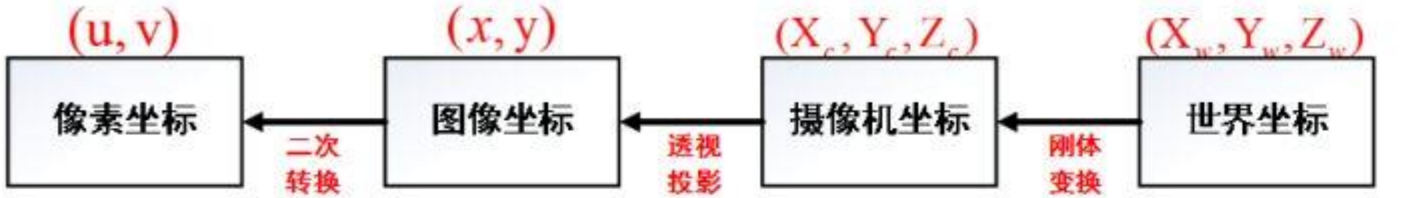
对张正友相机标定法的改进研究

主讲人：颜丙齐

为什么相机需要标定?



$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & r & u_0 \\ 0 & b & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} R_{3\times3} & T_{3\times1} \\ O & 1 \end{bmatrix}}_{P_{3\times4}:\text{透视投影矩阵}}$$

我们拿到一个新的相机，用来拍照，将三维世界的信息，投影到二维平面，得到一张RGB图像。一般来说，**小孔成像**模型就可以解释成像原理，但是真在使用过程中，由于镜片的畸变和装配等原因，单纯的**小孔成像**模型无法满足要求。

相机标定的已知条件和待求解是什么?

- **标定前的已知条件：**
- 一个可以拍照的相机，焦距固定（不要在校准和使用的时候变焦）
- 分辨率一般已知，但是标定好像用不上。

待求信息：

相机内参(M)

$$K=\begin{bmatrix} f_x & s & x_0 \\ 0 & f_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

相机外参（R, t），标定过程中的外参一般用不上，需要单独标定外参其实标定过程中的外参，用不上。毕竟标定板换了一个位姿，世界坐标系就变了，求出来的外参也会变化。

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix}$$

张博士简介

- 他是世界著名的计算机视觉和多媒体技术的专家，ACM Fellow，IEEE Fellow。现任微软研究院视觉技术组高级研究员,已经Tencent Robotics X了，他在立体视觉、三维重建、运动分析、图像配准、摄像机标定等方面都有开创性的贡献。
「张氏标定法」是张正友博士在1999年发表在国际顶级会议ICCV上的论文《Flexible Camera Calibration By Viewing a Plane From Unknown Orientations》中，提出的一种利用平面棋盘格进行相机标定的实用方法。
- 其后2000的这篇《A flexible new technique for camera calibration》引用数更是达到了恐怖的**13885次**，江湖地位可见一斑。

相机标定

➢什么是相机标定

- 相机标定对于计算机视觉系统起着十分重要的作用，是实现三维场景重建的首要步骤，标定的精确与否直接影响着重建的结果，标定的过程其实就是求解摄像机内外参数的过程。计算机视觉最基本的任务就是从相机中得到图像信息并计算出空间中物体的三维几何。

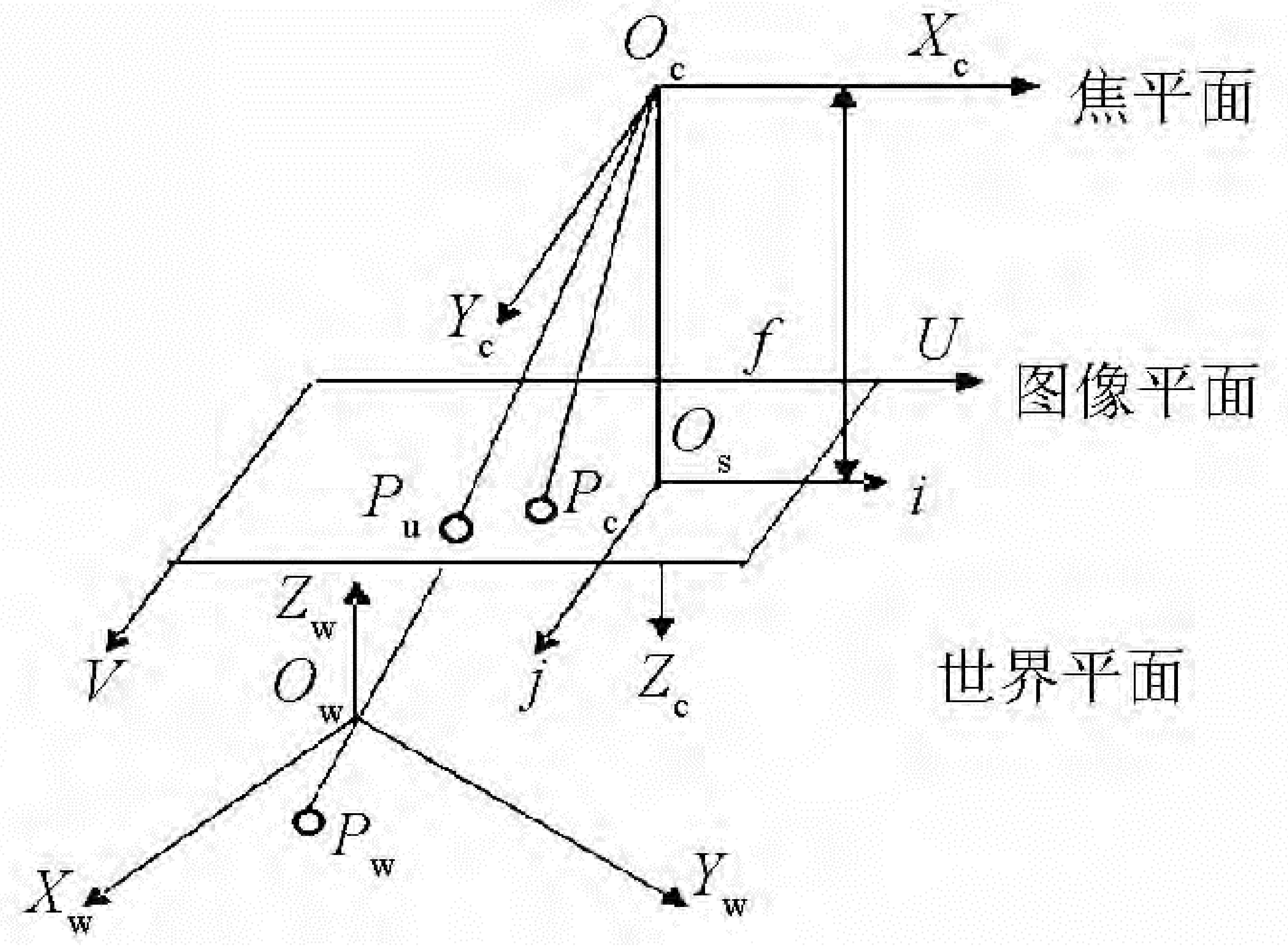
➢求解的内参

- 摄像机有 5 个未知内参数
- 由摄像机本身决定，只与摄像机本身有关。其参数有：

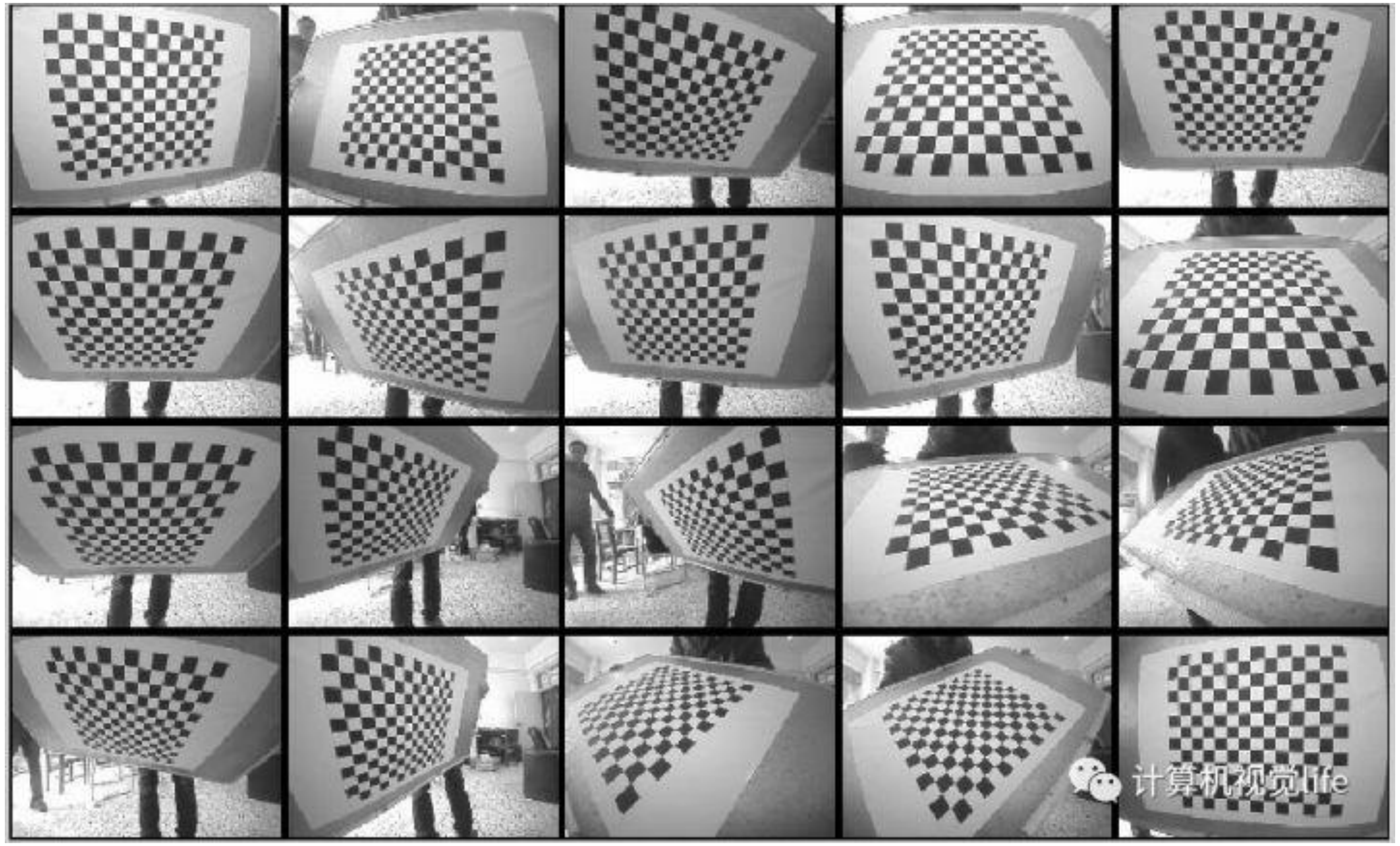
$$K = \begin{bmatrix} f_x & s & x_0 \\ 0 & f_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，fx，fy为焦距，一般情况下，二者相等，x0、y0为主点坐标（相对于成像平面），s为坐标轴倾斜参数，理想情况下为0

坐标系



棋盘



张正友相机标定法

➢基本原理

$$s\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=K[r_1\quad r_2\quad r_3\quad t]\begin{bmatrix}X\\Y\\0\\1\end{bmatrix}=K[r_1\quad r_2\quad t]\begin{bmatrix}X\\Y\\1\end{bmatrix}$$

$\widetilde{M}=[X\quad Y\quad 1]^T$为模板平面上点的齐次坐标， $\widetilde{m}=[u\quad v\quad 1]^T$为模板平面上点投影到图像平面上对应点的齐次坐标。$[r_1\quad r_2\quad r_3]$ 和t分别是摄像机坐标系相对于世界坐标系的旋转矩阵和平移向量.

$$H=[h_1\quad h_2\quad h_3]=\lambda K[r_1\quad r_2\quad t]$$

故得

$$r_1=\frac{1}{\lambda}K^{-1}h_1, r_2=\frac{1}{\lambda}K^{-1}h_2$$

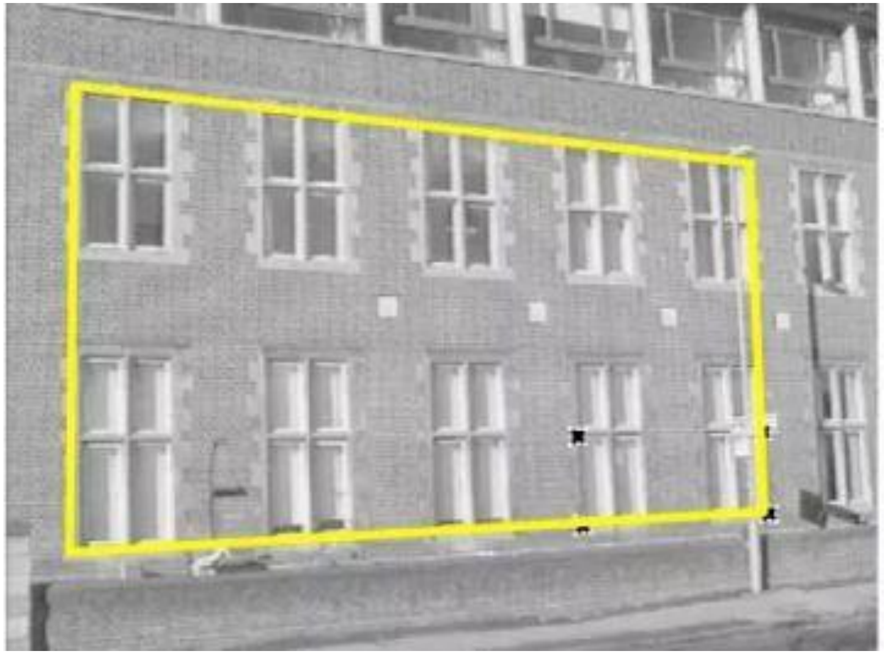
单应性（Homography）变换

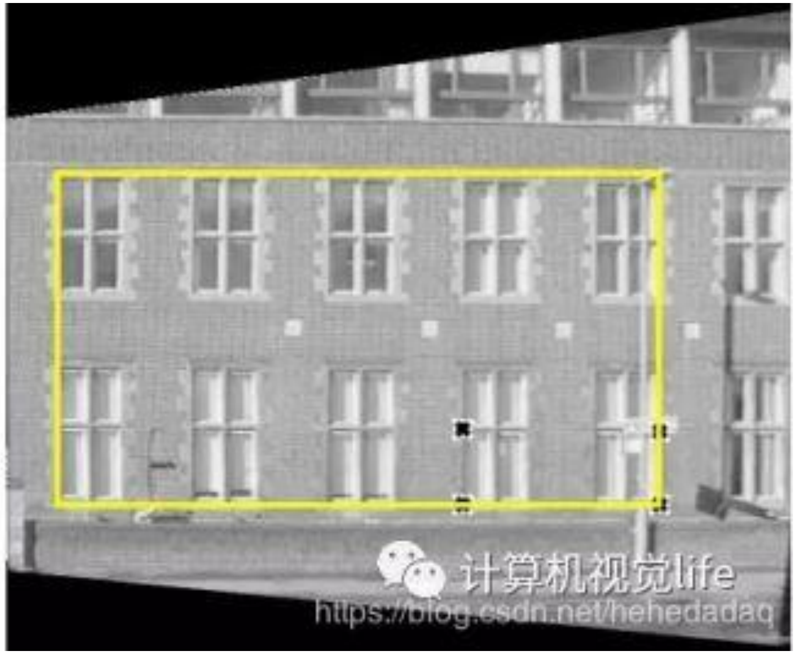
- 可以简单的理解为它用来描述物体在世界坐标系和像素坐标系之间的位置映射关系。对应的变换矩阵称为单应性矩阵。在上述式子中，单应性矩阵定义为：

$$H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] = \lambda K [r_1 \quad r_2 \quad t]$$

其中K为内参矩阵，矩阵$[r_1 \quad r_2 \quad t]$为外参矩阵，λ为尺度因子

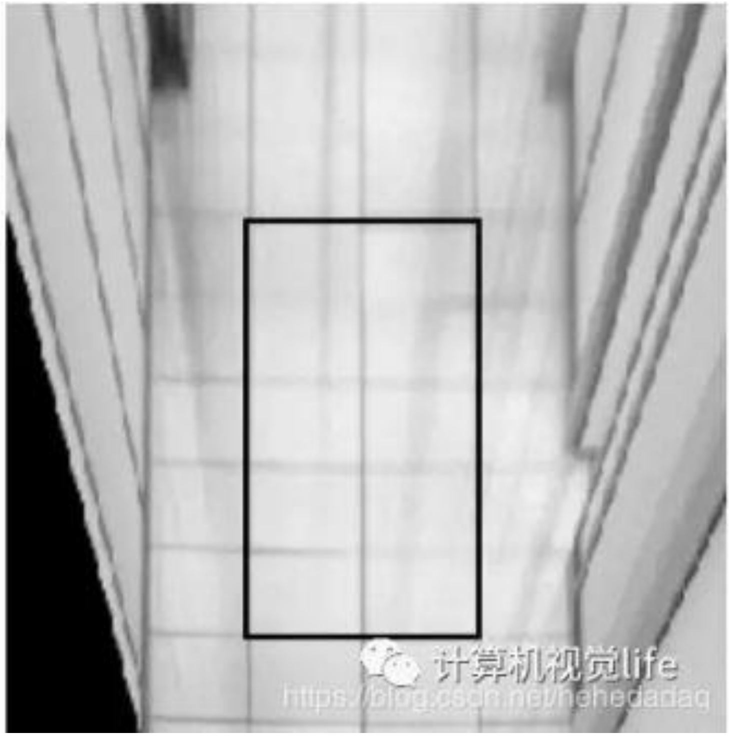
应用中的单应性





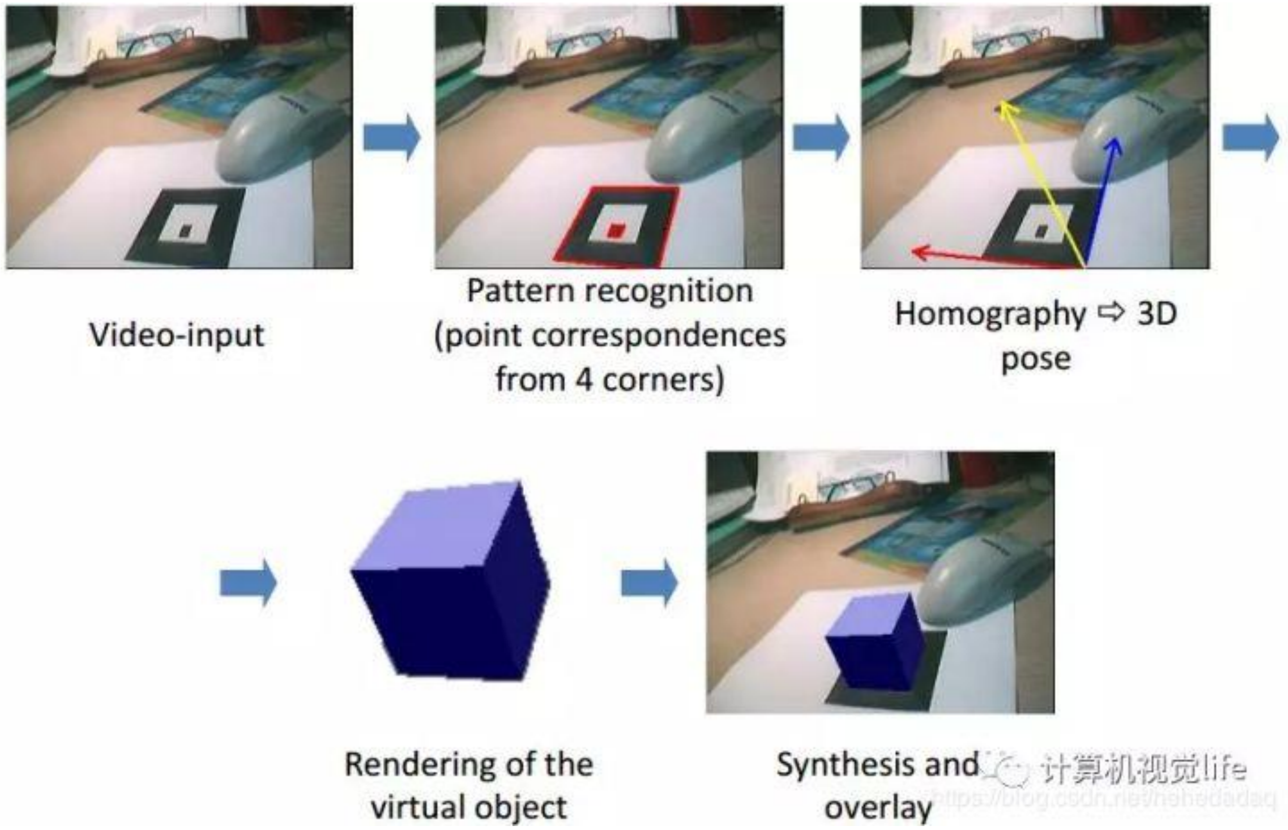
最少需要四个对应点对（后面会给出原因）就可以实现。

应用中的单应性



单应矩阵用于视角变换的例子如下图所示，可以方便地将左边普通视图转换为右图的鸟瞰图。

应用中的单应性



平面二维标记图案（marker）经常用来做AR展示。根据marker不同视角下的图像可以方便的得到虚拟物体的位置姿态并进行显示，如下图所示。

单应性矩阵的推导

- 我们假设两张图像中的对应点对齐次坐标为(x',y',1)和(x,y,1)，单应矩阵H定义为：

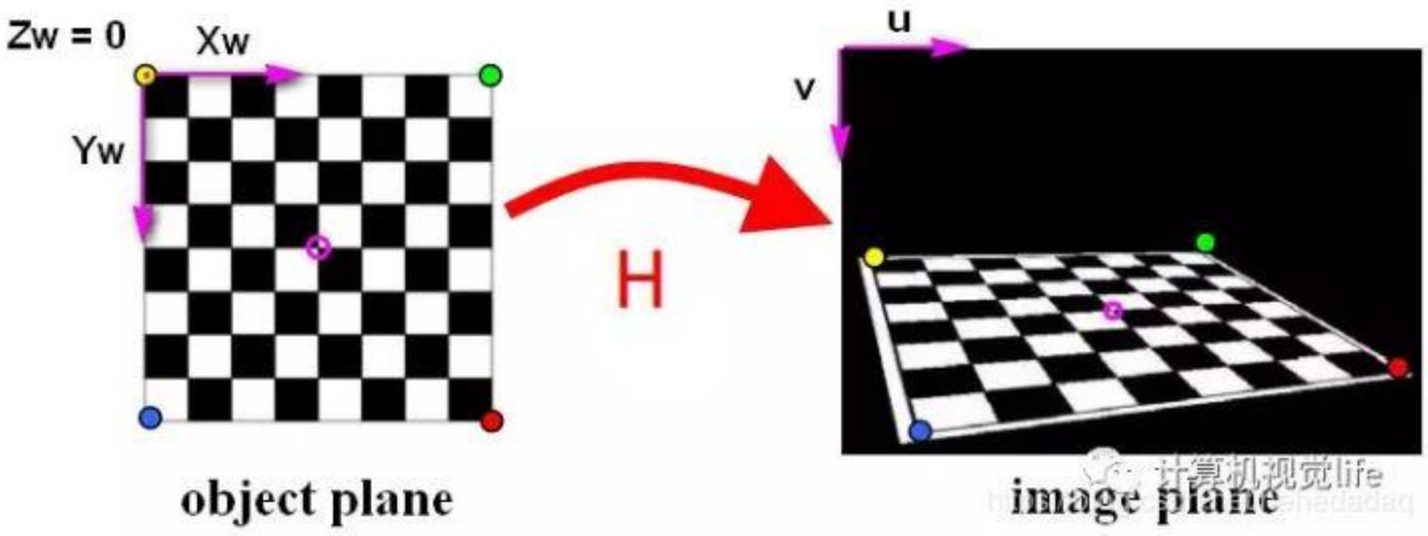
$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

整理得

$$x' = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}x + h_{33}}, y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}x + h_{33}}$$




```
Mat findHomography(InputArray srcPoints, InputArray dstPoints, int method=0, double ransacReprojThreshold=3, OutputArray mask=noArray() )
```

张正友相机标定法

单应性矩阵

$$H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] = \lambda K [r_1 \quad r_2 \quad t]$$

故得

$$r_1 = \frac{1}{\lambda} K^{-1} h_1, r_2 = \frac{1}{\lambda} K^{-1} h_2$$

根据旋转矩阵的性质，即$r_1^T r_2 = 0, \|r_1\| = \|r_2\| = 1$,每幅图像可以获得以下两个对内参数矩阵的基本约束：

$$\begin{cases} h_1^T K^{-T} K^{-1} h_2 = 0 \\ h_1^T K^{-T} K^{-1} h_1 = h_2^T K^{-T} K^{-1} h_2 \end{cases}$$

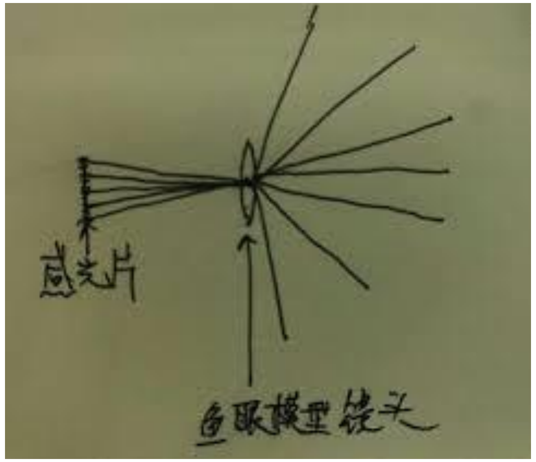
故，摄取三张或三张以上图片，就可以唯一解出矩阵内参。

优化

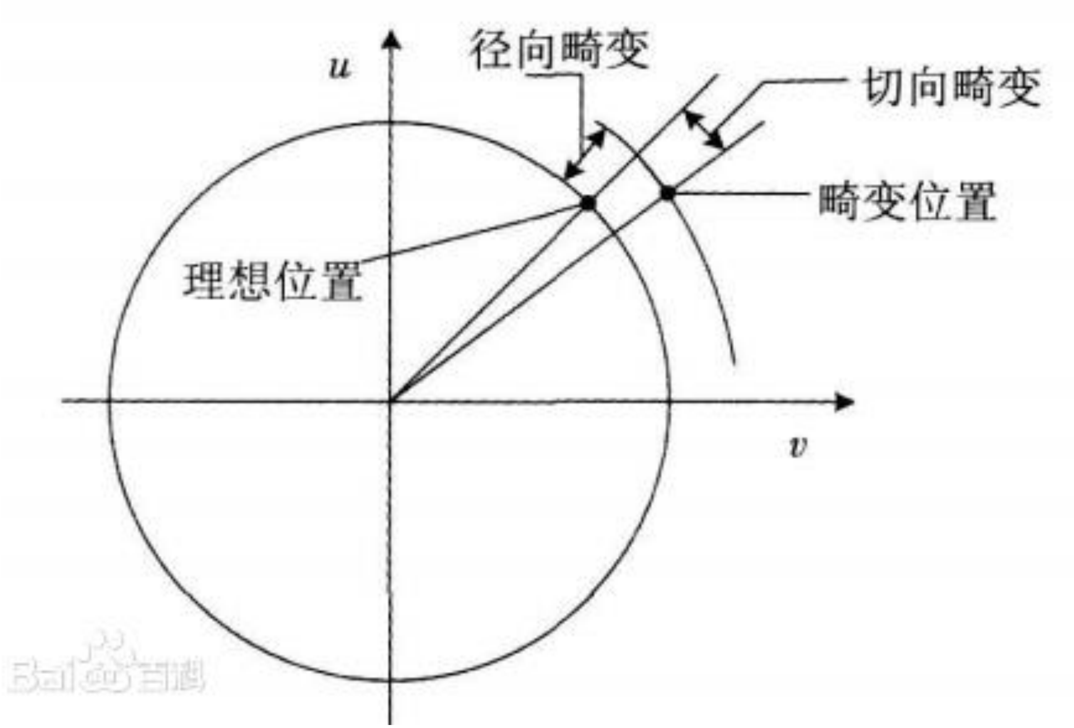
- 从理论上证明了张氏标定算法的可行性。但在实际标定过程中，一般使用最大似然估计进行优化。设我们拍摄了n张标定图片，每张图片里有m个棋盘格角点。三维空间点X在图片上对应的二维像素为x，三维空间点经过相机内参M，外参R，t变换后得到的二维像素为x'（类似于一个函数，输入参数和世界坐标，输出一个二维投影图像坐标(x',y')），假设噪声是独立同分布的，我们通过最小化x, x'的位置来求解上述最大似然估计问题：

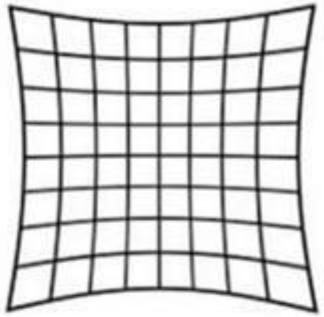
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\|x_{ij}-x'(M,R_i,t_i,X_j)\right\|^2$$

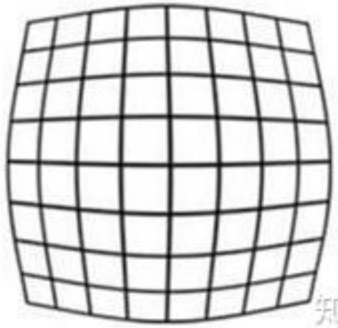
鱼眼镜头与畸变



畸变







透镜畸变的影响

- 常只考虑径向畸变的前两个参数k1,k2就可以（增加更多的参数会使得模型变的复杂且不稳定）。实际求解中，通常把k1,k2也作为参数加入上述函数一起进行优化，待优化函数如下所示

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\|x_{ij}-x'(M,k_1,k_2,R_i,t_i,X_j)\right\|^2$$

背景及解决问题解决的问题

➢背景

1、张正友相机标定法是普遍使用的一种标定方法

2、但是张正友相机标定法需要确定模板上点阵的物理坐标以及图像和模板之间的点匹配，给不熟悉计算机视觉的使用者带来不便。

3、同时对于鱼眼镜头标定并没有把镜头畸变考虑进去，影响了标定的精度。

➢解决问题

1、考虑鱼眼镜头的畸变问题。

2、提出了，提出了改进的两步标定法来解决镜头的畸变。

两步标定法

- **1987年由Tsai提出**

第一步：求除tz外的所有外参数

- 利用径向排列约束（RAC）
- 线性求解

第二步：求其余参数

- 非线性优化

- **两步法的前提**
- 假设：
- u0,v0已知
- 只考虑二阶径向畸变
- 主点既是图像中心又是径向畸变中心

两步标定法

世界坐标系与图像坐标系之间正向投影映射间的关系为

$$s\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=A[R\quad T]\begin{bmatrix}x_w\\y_w\\z_w\\1\end{bmatrix}$$

A为相机的内参矩阵；[R T]为相机的外参矩阵，R和T分别代表相对于模型摄像机旋转和平移量。A和[R T]参数化方案如下：

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\alpha_s & 0 & u_0\\0 & \alpha_y & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\r_{21} & r_{22} & r_{23}\\r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}=[r_1\quad r_2\quad r_3],T=\begin{bmatrix}r_{14}\\r_{24}\\r_{34}\end{bmatrix}$$

两步标定法

- 世界坐标系与图像坐标系之间正向投影映射间的关系为

$$s\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = A[R \quad T]\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

式中 A 为相机内参数矩阵；［R　T］为相机的外参数矩阵，R 和 T 分别代表相对于模型摄像机旋转和平移量。A 和［R　T］参数化方案如下：

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_s & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3], T = \begin{bmatrix} r_{14} \\ r_{24} \\ r_{34} \end{bmatrix}$$

两步标定法

式中$\alpha_x=\frac{f}{d_x},\alpha_y=\frac{f}{d_y},d_x$、$d_y$分别是沿 x 、 y 轴的比例因子(mm/pixel); u_0和v_0为主点坐标。

$$s\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=A[R\quad T]\begin{bmatrix}X_w\\Y_w\\0\\1\end{bmatrix},s\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=A[r_1\quad r_2\quad T]\begin{bmatrix}x_w\\y_w\\1\end{bmatrix}$$

因此，在图像点 P 与模板点 P 之间的单应性 H 与矩阵$H=A[r_1\quad r_2\quad T]$有关系，单应性 H 被定义为内外参数矩阵，通过消除式（3）中的 S 可以得到透视数学模型和重新整理后的矩阵：

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{\alpha_{x(r_{11}x_w+r_{12}y_w+r_{14})}}{r_{31}x_w+r_{32}y_w+r_{34}}+u_0\\v&=\frac{\alpha_{x(r_{21}x_w+r_{22}y_w+r_{34})}}{r_{31}x_w+r_{32}y_w+r_{34}}+v_0\end{aligned}\right\}$$

两步标定法

- 径向畸变发生在鱼眼镜头光学中心，导致图像点从透视投影最开始的位置发生偏移，用一阶和二阶近似方程表示为

$$(x_d - x_u) = k_1 x_u\left(x_u^2 + y_u^2\right) + k_2 x_u (x_u^2 + y_u^2)^2$$
$$(y_d - y_u) = k_1 y_u\left(x_u^2 + y_u^2\right) + k_2 y_u (x_u^2 + y_u^2)^2$$

式中ｋ１，ｋ２表示第一阶和第二阶光学中心分散化系数。
最终得到得实际图像模型为

$$\left.\begin{aligned}\hat{u} &= \alpha_x[x_u + \delta_x(x_u, y_u)] + u_0\\ \hat{v} &= \alpha_y\left[x_u + \delta_y(x_u, y_u)\right] + v_0\end{aligned}\right\}$$

式中外参数x_u , y_u, $\delta_x(x_u, y_u)$, $\delta_y(x_u, y_u)$和内参数α_x, α_y, u_0, v_0，k_1，k_2可以由上式得到。

实验结果与分析

表 1　相机标定参数

图号	f_x/mm	f_y/mm	c_x/mm	c_y/mm	k_1	k_2	k_3	k_4
2	3.6066	3.6079	653.2	578.38	−0.23249	0.05308	−0.001853	−0.00078
3	3.8818	3.8851	658.98	577.58	−0.27047	0.077018	−0.004167	−0.00031
4	3.9497	3.954	662.18	578.46	−0.27812	0.080682	−0.005098	−0.00061
5	3.8106	3.8146	659.43	579.06	−0.25787	0.070426	−0.003914	−0.0006
6	3.5685	3.5684	646.64	579.32	−0.22661	0.056435	0.00073	−0.00054
7	3.5779	3.5779	647.45	579.44	−0.22827	0.058302	0.00063	−0.00055
8	3.5748	3.5751	647.89	579.24	−0.22837	0.06029	0.000159	−0.00034


谢谢朋友们！