Домашнее задание 1

Турков Матвей, группа 777

1

Решение:

1.

$$T(n) = 10T(\frac{n}{2}) + \frac{n^4}{log\, n}$$

Воспользуемся мастер теоремой.Нам подходит третий случай. Покажем,что

$$10\,\frac{(n/2)^4}{log\, n/2} \leq C\frac{n^4}{log\, n}$$
$$10/16 + log\, 2/log\, n \leq C$$

Что верно при достаточно больших n и $C < 1$. Покажем теперь, что

$$\frac{n^4}{log\, n} \geq C\, n^{log\, 10 + \epsilon}$$

Пусть $n = e^s$, для некоторого s, тогда

$$e^{4s}/s \geq C\, e^{2,3s + \epsilon\, s}$$
$$c = 1/s$$
$$e^{4s} \geq e^{2,3s + \epsilon\, s}$$

Что верно для некоторого $\epsilon = 1$. Отсюда

$$T(n) = \Theta(\frac{n^4}{log\, n})$$

2.

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n\sqrt[3]{n}\, log\, n)$$

Воспользуемся Акра-Баззи , для которой выполняются все необходимые условия $a_1 = 2, b_1 = 1/2, f(n) \in O(x^c), c \geq 5$

$$T(n) \in \Theta(n\,(1 + \int_1^n cu^{-2/3}\,log\,u\,du))$$
$$T(n) \in \Theta(n + 3\,c\,n\,n^{1/3}(log\,n - 3) - 9cn)$$

Отсюда

$$T(n) \in \Theta(n^{4/3} log\,n)$$

3.

$$T(n) = T(n-1) + 2T(n-2)$$
$$T(1) = T(2) = 1$$

Разрешаем данную линейную рекуренту в виде $t(n) = C_1\lambda^n + C_2\lambda^n$

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$t(n) = C_1(-1)^n + C_2(2)^n$$

Тогда найдем константы из ууравнений (1) и (2), полученных из начальных условий

$$1 = -C_1 + 2\,C_2 \tag{1}$$
$$1 = C_1 + 4\,C_2 \tag{2}$$

В итоге,

$$t(n) = -1/3(-1)^n + 1/3(2)^n$$
$$T(n) \in \Theta(2^n)$$

2

Решение:

———————————

(3)

Решение:

1. Запишем рекурсивную формулу из условия задачи

$$T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + 10\frac{n^3}{\log n}$$

2. Найдём оценку снизу

$$T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + 10\frac{n^3}{\log n} > 10\frac{n^3}{\log n}$$

$$T(n) > 10\frac{n^3}{\log n}$$

3. Найдём оценку сверху

$$T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + 10\frac{n^3}{\log n} < 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil) + 10\frac{n^3}{\log n}$$

Найдём оценку сверху, используя Мастер Теорему. В данной задаче подходит третий случай .

$$\begin{cases} a = 3; \\ b = \sqrt{3} \\ f(n) = 10\frac{n^3}{\log n} \end{cases}$$

$f(n) = 10\frac{n^3}{\log n} = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) = \Omega(n^{2+\varepsilon}) = \Omega(n^{2,1})$

$$3 \cdot 10 \cdot \frac{(\frac{n}{\sqrt{3}})^3}{\log(\frac{n}{\sqrt{3}})} < 0,9 \cdot 10 \cdot \frac{n^3}{\log n}$$

4. В итоге, имеем

$$T(n) \in \Theta(\frac{n^3}{\log n})$$

(4)

Решение:

Функция натурального аргумента $S(n)$ задана рекурсией:

$$S(n) = \begin{cases} 100, n \leq 100 \\ S(n-1) + S(n-3), n > 100 \end{cases}$$

1. Функция, вычисляющая число рекурсивных вызововов данной процедуры задано уравнениями.

   $$T(n) = \begin{cases} 1, n \leq 100 \\ T(n-1) + T(n-3), n > 100 \end{cases}$$

   Соответственно , наша задача стала эквивалентна вычислению $T(10^{12})$.

2. Имеем рекурентное уравнение $T_{n+3} - T_{n+2} - T_{n+1} = 1$

   Решая его получим необходимый ответ. Решим характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$

   Получили корни(прим Wolphram):

   $$\begin{cases} x = 1,4656 \\ x = -0,233 + 0,793i \\ x = -0,233 - 0,793i \end{cases}$$

3. $t(k) = A \cdot 1,4656^k + B \cdot (\exp(-0,233 + 0,793i)) + C \cdot \exp(-0,233 - 0,793i)$, где A, B, C – некоторые константы.

4. $0,233^2 + 0,793^2 < 1 \Rightarrow$ при $k \to \infty$, экспонента стремится к нулю. $\Rightarrow t(k) = A \cdot 1,4656^k$

5. $T_k = -1$ – частное решение.

   $$\begin{cases} t(k) = -1 + A \cdot 1,4656^k \\ t(100) = 1 \end{cases}$$

   $1 = -1 + A \cdot 1,4656^{100} \Rightarrow A = 2 \cdot 1,456^{-100}$

6. В итоге имеем :

   $$t(n) = -1 + 2 \cdot 1,456^{n-100} \approx 2 \cdot 1,456^{10^{12}-100}$$

5

Решение:

$$T(n) = nT\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + O(n)$$

Решим задачу рассмотреннием дерева рекурсии

Высота $\log n$.

На $i-$том уровне выполняется $\frac{n^i}{2^{(i^2+i)/2}}$ операций по $O\left(\frac{n}{2^i}\right)$ каждая.

Тогда отсюда имеем :

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\log n} \frac{n^i}{2^{i(i+1)/2}} O\left(\frac{n}{2^i}\right)$$
$$\sum_{i=1}^{\log n} O\left(\frac{n^{i+1}}{2^{i(i+1)/2+i}}\right)$$

Пусть $n = 2^k$, тогда проведя эту замену и некоторое количество арифметики , получим

$$\sum_{i=1}^{\log n} O\left(2^{ki/2}\right) = \sum_{i=1}^{\log n} O\left(\sqrt{n^i}\right) = O(n^{\frac{\log n}{2}})$$

6

Решение:

В случае со степенью двойки выражение

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4})$$

Пусть $k = \log_2 n$:

$$T(k) = T(k-1) + T(k-2) + 3$$

Что издали напоминает рекуренту для чисел Фибоначчи. Решив данную линейную рекуренту,с учетом начальных условий $T(1) = 3, T(2) = 6$, получим ,что :

$$T(m) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$$

7

Решение:

———————————