

Домашнее задание 7

Турков Матвей, группа 777

Сортировки

①

Решение:

Попробуем построить алгоритм, сходный с сортировкой слиянием. А именно пусть без ограничения общности наш массив элементов A и соответствующий ему массив инверсий P имеют длину 2^k . Поделим его на две части, пока не получим единичные массивы. Тогда $P[0] = 0$. Далее будем сравнивать массивы A_1 и A_2 .

Если $(A_1[i] < A_2[j])$ выполнить $P[j + i] = P_1[i]; i++$;

Иначе $P[j + i] = P_2[j]; j++$;

Сложность аналогична сложности сортировки слиянием $O(n \cdot \log n)$.

Кучи

①

Решение:

На высоте h , считая что у листьев $h = 0$, содержится не более $\left\lceil \frac{n}{2^{k+1}} \right\rceil$.
 $h \in [0, \lfloor \log n \rfloor]$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{k+1}} \right\rceil \cdot O(k) = n \cdot O\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lceil \frac{k}{2^{k+1}} \right\rceil\right) = O(n)$$

Графы

①

Решение:

Рассмотрим модификацию алгоритма *BFS*. Теперь вместо обычного стека, будет использовать двусторонний - дек. Тогда если мы перешли в вершину v по нулевому ребру, то добавим v в начало дека; если же по ребру весом 1 — в конец.

Тааким образом, как и в обходе в ширину, мы будем рассматривать каждый раз вершину, расстояние до которой минимально. А "релаксация" ребер остается такой же, как и в BFS , поэтому алгоритм корректен.

②

Решение:

Будем решать задачу с помощью поиска в глубину. То есть из каждой вершины, в которую мы ещё ни разу не приходили, запустим поиск в глубину, который при входе в вершину будет красить её в серый цвет, а при выходе из нее — в чёрный. И, если алгоритм пытается пойти в серую вершину, то это означает, что цикл найден.

③

Решение:

Аналогично алгоритму из предыдущего пункта запустим DFS из каждой вершины графа. В итоге мы обнаружим, есть ли цикл для каждой из вершин графа. Длину цикла можно получить так: при запуске из вершины v определим $counter_v = 0$. Далее при каждой покраске вершины в серый цвет, будет инкрементировать $counter$, при ее покраске в черный — декрементировать $counter$. Если мы на каком-то моменте попытаемся войти в начальную черную вершину - считываем $counter$, получим длину цикла. Далее просто сравним циклы. Из каждой вершины DFS — $O(V(V + E))$.