

**ИНФОРМАЦИОННО-  
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНЫХ СИСТЕМ**

**Материалы  
Всероссийской конференции  
с международным участием**

*Москва, РУДН, 20–24 апреля 2015 года*

УДК 004.007 (063)

ББК 32.81

И74

**Организаторы конференции:** Российский университет дружбы народов;

Московский технический университет связи и информатики;

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук;

Лаборатория информационных технологий Объединённого института ядерных исследований.

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-07-20169.

**Программный комитет:** Башарин Г. П., д.т.н., проф., РУДН; Боголюбов А. Н., д.ф.-м.н., проф., МГУ; Вилинский С. И., д.ф.-м.н., проф., ЛТФ ОИЯИ; Вишневский В. М., д.т.н., проф., НПФ «ИНСЕТ»; Гайдамака Ю. В., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Гнатич М. М., проф., University P.J. Safarik, Kosice, Словакия; Гольдштейн Б. С., д.т.н., проф., СПб ГУТ; Гудкова И. А., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Дружинина О. В., д.ф.-м.н., проф., ВЦ (ФИЦ ИУ РАН); Ефимушкин В. А., к.ф.-м.н., доцент, ОАО «Интеллект Телеком»; Кореньков В. В., д.т.н., проф., ЛИТ ОИЯИ; Крянев А. В., д.ф.-м.н., проф., НИЯУ «МИФИ»; Кулябов Д. С., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Кучерявый А. Е., д.т.н., проф., СПб ГУТ; Кучерявый Е. А., проф., Tampere University of Technology, Финляндия; Ланеев Е. Б., д.ф.-м.н., проф., РУДН; Мартикайнен О. Е., проф., Service Innovation Research Institute, Финляндия; Наумов В. А., проф., Service Innovation Research Institute, Финляндия; Осипов Г. С., д.ф.-м.н., проф., ИСА (ФИЦ ИУ РАН); Пузынин И. В., д.ф.-м.н., проф., ЛИТ ОИЯИ; Пшеничников А. П., к.т.н., проф., МТУСИ; Ромашкова О. Н., д.т.н., проф., МГПУ; Самуйлов К. Е., д.т.н., проф., РУДН; Севастьянов А. Л., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Севастьянов Л. А., д.ф.-м.н., проф., РУДН; Степанов С. Н., д.т.н., проф., ОАО «Интеллект Телеком»; Стрельцова О. И., к.ф.-м.н., с.н.с., ЛИТ ОИЯИ; Толмачев И. Л., к.ф.-м.н., проф., РУДН; Хачумов В. М., д.т.н., проф., ИСА (ФИЦ ИУ РАН); Цирулев А. Н., д.ф.-м.н., проф., ТвГУ; Цитович И. И., д.ф.-м.н., доцент, ИПИ РАН; Шоргин С. Я., д.ф.-м.н., проф., ИПИ ФИЦ ИУ РАН; Щетинин Е. Ю., д.ф.-м.н., проф., СТАНККИН.

### **Оргкомитет:**

*Председатель:* Самуйлов К. Е., д.т.н., профессор, РУДН.

*Сопредседатели:* Севастьянов Л. А., д.ф.-м.н., проф., РУДН; Толмачёв И. Л., к.ф.-м.н., профессор, РУДН.

*Учёный секретарь:* Острикова Д. Ю., РУДН

*Члены оргкомитета:* Никитина Е. В., к.х.н., зам. декана РУДН; Гайдамака Ю. В., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Гудкова И. А., к.ф.-м.н., РУДН; Демидова А. В., РУДН; Диваков Д. В., РУДН; Королькова А. В., к.ф.-м.н., РУДН; Кулябов Д. С., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Масловская Н. Д., РУДН; Соченков И. В., к.ф.-м.н., РУДН; Таланова М. О., РУДН.

### **Секции:**

#### **Теория телеграфика и ее применения**

*Сопредседатели:* д.т.н., проф. Башарин Г. П. (РУДН), к.т.н., проф. Пшеничников А. П. (МТУСИ), к.ф.-м.н. Гудкова И. А. (РУДН).

*Секретарь:* Масловская Н. Д. (РУДН).

#### **Сети связи следующего поколения: управление, качество, архитектура**

*Сопредседатели:* д.т.н., проф. Самуйлов К. Е. (РУДН), д.т.н., проф. Вишневский В. М. (НПФ),

к.ф.-м.н., доцент Гайдамака Ю. В. (РУДН).

*Секретарь:* Таланова М. О. (РУДН)

#### **Прикладные информационные системы**

*Сопредседатели:* проф. Осипов Г. С., ИСА (ФИЦ ИУ РАН), проф. Толмачев И. Л. (РУДН).

*Секретарь:* к.ф.-м.н. Соченков И. В. (РУДН).

#### **Высокопроизводительные технологии распределенных вычислений**

*Сопредседатели:* д.т.н., проф. Кореньков В. В. (ЛИТ ОИЯИ), к.ф.-м.н., доцент Кулябов Д. С. (РУДН).

*Секретарь:* к.ф.-м.н. Королькова А. В. (РУДН).

#### **Математическое моделирование**

*Сопредседатели:* д.ф.-м.н., проф. Севастьянов Л. А. (РУДН), д.ф.-м.н., проф. Крянев А. В. (НИЯУ «МИФИ»), д.ф.-м.н., проф. Дружинина О. В., ВЦ (ФИЦ ИУ РАН).

*Секретари:* Демидова А. В. (РУДН), Диваков Д. В. (РУДН).

И74

**Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем** : материалы Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 20–24 апреля 2015 г. — Москва : РУДН, 2015. — 332 с. : ил.

ISBN 978-5-209-06416-9

УДК 004.007(063)

ББК 32.81

© Коллектив авторов, 2015

© Российский университет дружбы народов, Издательство, 2015

<b>Будочкина С. А.</b> Симметрии уравнений и связанные с ними алгебраические структуры	228
<b>Буурулдай А. Э., Шорохов С. Г.</b> Построение дельта- и гамма-нейтральных портфелей опционов	230
<b>Вальда Васкес Л.</b> Реализация алгоритмов AQM в ns-3	232
<b>Васильев С. А., Болотова Г. О., Урусова Д. А.</b> Построение асимптотических решений бесконечных систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром и неоднородные счетные цепи Маркова	235
<b>Васильев С. А., Канзитдинов С. К., Коршок Е. О.</b> Построение асимптотических решений сингулярно возмущенных стохастических дифференциальных уравнений бесконечного порядка	236
<b>Васильев С. А., Полежаева И. С.</b> Построение асимптотического решения краевой задачи для уравнения Кадышевского с периодическими краевыми условиями	238
<b>Велиева Т. Р.</b> Моделирование управляющего модуля маршрутизатора типа RED на GNS3	239
<b>Вельможный Д. Э.</b> О выборе и внедрении DLP-системы	242
<b>Геворкян М. Н., Кулябов Д. С., Севастьянов Л. А., Егоров А. Д.</b> Обзор стохастических методов Рунге-Кутты	245
<b>Герасимов А. А., Пиунова А. П.</b> Сравнительный анализ реализации протоколов Диффи-Хеллмана и Эль-Гамала в эллиптической криптографии	249
<b>Дашицыренов Г. Д.</b> Постановка и решение задачи компьютерного синтеза тонкоплочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга	252
<b>Демидова А. В., Дружинина О. В., Масина О. Н.</b> Построение стохастической модели динамики популяций, учитывающей конкуренцию и миграцию видов	255
<b>Денисович А. П., Матюшенко С. И.</b> Сравнительный анализ принципов назначения страховых премий в области краткосрочного страхования жизни	259
<b>Диваков Д. В., Тютюнник А. А.</b> Применение метода Канторовича к задаче моделирования открытых волноводов	263
<b>Дружинина О. В., Масина О. Н.</b> Подход к исследованию систем интеллектуального управления на основе сравнительного анализа полиномиальных TS-моделей	265
<b>Еферина Е. Г., Королькова А. В., Кулябов Д. С., Малютин В. Б.</b> Операторный метод для одношаговых процессов	269
<b>Зорин А. В.</b> Компьютерная реализация модели квантовых измерений	272
<b>Игонина Е. В.</b> Моделирование маятниковых систем интеллектуального управления	275
<b>Камнев А. В., Велиева Т. Р., Королькова А. В., Кулябов Д. С.</b> Имитационное моделирование алгоритма RED в симуляторе NS-3	279
<b>Касимов Ю. Ф., Мальцева Т. А.</b> Анализ связи финальных потерь портфеля однородных ссуд и ранних показателей просрочки коммерческого банка	283
<b>Крянев А. В., Пинегин А. А., Климанов С. Г., Рыжов А. А.</b> Схемы выявления аномалий энерговыделения в активных зонах ядерных реакторов	286
<b>Кузив Я. Ю.</b> Компьютерная модель замкнутой развивающейся экономики на основе модели Чернавского	289

## ОБЗОР СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫ

Геворкян М.Н.<sup>1</sup>, Кулябов Д. С.<sup>1,2</sup>, Севастьянов Л. А.<sup>1,3</sup>, Егоров А. Д.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия, mnggevorkeyan@sci.pfu.edu.ru, ds@sci.pfu.edu.ru

<sup>2</sup>Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980.

<sup>3</sup>Лаборатория теоретической физики, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980.

<sup>4</sup>Институт математики НАН Беларуси, Белоруссия, 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11. po@mail.ru

***В докладе дан обзор стохастических численных методов Рунге-Кутты. Наиболее эффективные численные схемы реализованы программно на основе математического пакета Sage и с помощью языка программирования Julia.***

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, численные методы, методы Рунге-Кутты.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 14-01-00628, 15-07-08795, договором с БРФФИ № Ф14Д-002.

### Введение

Стохастические математические модели используются в широком спектре прикладных областей науки: химическая кинетика, популяционная динамика, экономика, финансовая математика, страхование, фильтрация сигналов и т.д. Стохастические модели позволяют адекватнее отразить моделируемый процесс, как качественно, так и количественно. Математическим аппаратом этих моделей являются стохастические дифференциальные уравнения (СДУ). Точное аналитическое решение в конечном виде известно буквально для нескольких простейших случаев. Исходя из этого, значение численных методов для решения СДУ существенно возрастает.

Данная работа носит обзорный характер и основной ее целью является подробное введение в практическое использование стохастических численных схем типа Рунге-Кутты.

### Стохастические численные методы

Численные методы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений начали разрабатываться несколько веков тому назад, а в течении двадцатого века были разработаны крайне мощные методы [1], позволяющие получать численные решения с любой необходимой для практических целей точность.

Стохастические численные методы развиты хуже, чем детерминированные [2]. Основные причины — это сравнительная новизна данной темы и более сложный математический аппарат. Направления поиска новых стохастических численных методов в целом совпадает со случаем классическим. Наглядное представление об этих направлениях дает схема, предложенная Бутчером (см. рис. 1).

### Стохастические методы Рунге-Кутты

Среди детерминированных методов наиболее эффективными и простыми в реализации являются явные многостадийные методы типа Рунге-Кутты. Естественно, что их попытались обобщить на случай СДУ. Такие схемы получили названия *стохастических численных методов Рунге-Кутты*. Росслер в своих работах [3] ввел в рассмотрение *обобщенную таблицу Бутчера*, которая, как и обычная таблица Бутчера [1], используется для краткой записи массива коэффициентов метода. Также он записал формулы в аналогичном классическим схемам виде.

Запись общей схемы стохастического метода Рунге-Кутты громоздка и включает в себя многомерные массивы коэффициентов [3]. В зависимости от того, какая форма СДУ рассматривается (Ито или Стратоновича), а также какая сходимость требуется (сильная или слабая), численная схема модифицируется тем или иным способом, хотя по-прежнему остается далеко не такой простой, как детерминированная схема.

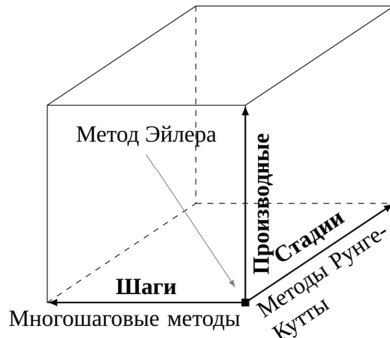


Рис. 1 Куб Бутчера

Конкретные реализации стохастических численных методов типа Рунге-Кутты для СДУ с многомерным винеровским процессом получены лишь для сильного порядка не больше 1,0 и слабого порядка сходимости не больше 3,0. Схемы более высокого порядка найдены лишь для одномерного винеровского процесса.

Построение численных схем стохастического Рунге-Кутты высоких порядков наталкивается на две ключевые трудности: сложность решения уравнений порядка и необходимость аппроксимации кратных интегралов Ито или Стратоновича.

### Условия порядка стохастических методов Рунге-Кутты

Условиями порядка называются нелинейные алгебраические уравнения, связывающие коэффициенты метода между собой. Даже для детерминированной схемы число этих уравнений быстро увеличивается с ростом стадийности, которая связана с порядком точности. Для получения этих уравнений используется формула Тейлора и аппарат помеченных деревьев, который позволяет получать условия порядка из наглядных графических построений [1]. Аппарат помеченных деревьев был распространен на случай стохастических методов Рунге-Кутты в работах [3-8].

Число условий порядка для стохастической численной схемы существенно больше детерминированного случая. Так, нахождение коэффициентов метода для СДУ с многомерным винеровским процессом и порядком сильной сходимости  $p = 1.0$  требует решения 6 условий порядка. Для СДУ со скалярным винеровским процессом и сильным порядком  $p = 1.5$  число условий равно 25. Для многомерного винеровского процесса и сильного порядка  $p = 2.0$  количество условий возрастает до 59 [3].

### Аппроксимация кратных стохастических интегралов

Вторая трудность специфична лишь для стохастического случая. Она касается проблемы вычисления кратных интегралов Ито/Стратоновича [9]. Точную формулу для таких интегралов можно получить лишь в некоторых частных случаях, поэтому возникает задача их аппроксимации. Для аппроксимации двукратных интегралов в схеме с сильным порядком 1,0 необходимо суммировать большое число членов бесконечного ряда [2,10]. Для схем более высокого порядка приходится иметь дело уже с интегралами

большей кратности: третьей, четвертой и т.д., эффективных способов аппроксимации которых по-видимому не существует.

### Описание программной реализации

Для наиболее эффективных стохастических схем Рунге-Кутты была создана программная реализация на языках Julia [11] и Sage [12] (python). Язык Julia это высокоуровневый компилируемый язык, созданный специально для научных вычислений. Язык находится на стадии активной разработки, но уже обладает большими возможностями и хорошим набором стандартных библиотек. Были проведены численные эксперименты по сравнению схем между собой и с известными точными решениями.

### Выводы

В работе дан обзор основных публикаций по стохастическим численным методам типа Рунге-Кутты. Изложены основные теоретические сведения, касающиеся численного решения СДУ с помощью стохастических многостадийных методов. Основной упор в изложении сделан на практическое использование данных схем. В отличие от детерминированного случая, стохастические численные схемы намного менее интуитивно понятны для неподготовленного читателя.

### Литература

1. Э. Хайпер, С. Нёрсметт, Г. Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Под ред. С. С. Филиппова. — 1 изд.— Москва: Мир, 1990. — 512 с.— ISBN: 5-03-001179-X.
2. Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.— 2 edition.— Berlin Heidelberg New York: Springer, 1995.— 632 p.— ISBN: 3-540-54062-8.
3. Reßler A. Strong and Weak Approximation Methods for Stochastic Differential Equations – Some Recent Developments / Department Mathematik. Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse. — 2010.
4. Burrage K., Burrage P. M. High strong order explicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations // Appl. Numer. Math.— 1996.— no. 22.— P. 81–101.
5. Burrage K., Burrage P.M., Belward J.A. A bound on the maximum strong order of stochastic Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations. // BIT.— 1997.— no. 37. — P. 771–780.
6. Burrage K., Burrage P.M. General order conditions for stochastic Runge-Kutta methods for both commuting and non-commuting stochastic ordinary differential equation systems //Appl. Numer. Math.— 1998. — no. 28. — P. 161–177.
7. Burrage K., Burrage P. M. Order conditions of stochastic Runge-Kutta methods by B-series // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — no. 38.— P. 1626–1646.
8. Ереико А. Ф. Филатова Д. В. Анализ явных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. — 2008.— Т. 32, № 2. — С. 164–173.
9. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — 5 edition. — Москва: Мир, АСТ, 2003. — 385p.— ISBN: 5-03-003477-3
10. Wiktorsson M. Joint characteristic function and simultaneous simulation of iterated Itô integrals for multiple independent Brownian motions//The Annals of Applied Probability.— 2001.— Vol. 11, no. 2. — P. 470–487
11. Jeff Bezanson, Stefan Karpinski, Viral B. Shah, Alan Edelman. Julia: A Fast Dynamic Language for Technical Computing, 2012, arXiv: 1209.5145
12. W. A. Stein et al. Sage Mathematics Software (Version x.y.z), The Sage Development Team, YYYY, <http://www.sagemath.org>.

## REVIEW OF STOCHASTIC RUNGE-KUTTA SCHEMAS

*Gevorgyan M.N.<sup>1</sup>, Kuliabov D.S.<sup>1,2</sup>, Sevastianov L.A.<sup>1,3</sup>, Egorov A.D.<sup>4</sup>*

<sup>1</sup>*Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia. Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia, mngevorgyan@sci.pfu.edu.ru, ds@sci.pfu.edu.ru*

<sup>2</sup>*Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research, Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia.*

<sup>3</sup>*Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia.*

<sup>4</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus, 220072, Minsk, Surganov str., 11.*

***The report provides an overview of stochastic numerical Runge-Kutta methods. The most efficient numerical schemes are implemented in software based on mathematical package Sage and programming language Julia.***

Key words: stochastic differential equations, numerical methods, Runge-Kutta methods.

*The work is partially supported by RFBR grants No's 14-01-00628 and 15-07-08795, agreement with BRFFR No F14D-002.*