УДК 537.8:514.762.37
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-81-90

Использование геометризации уравнений Максвелла при расчёте оптических приборов

Д. С. Кулябов[*†]

[*] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198
[†] *Лаборатория информационных технологий*
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

Развитие физики в XX-м веке было тесно связано с развитием математического аппарата. Общая теория относительности продемонстрировала силу геометрического подхода. К сожалению проникновение этого аппарата в другие области физики происходит достаточно медленно. Например, было несколько попыток внедрения геометрических методов в электродинамику, однако до последнего времени они оставались лишь теоретическими упражнениями.

Интерес к геометрическим методам в электродинамике вызван практической необходимостью. Представляется заманчивым следующий алгоритм конструирования электромагнитного прибора. Строятся предполагаемые траектории распространения электромагнитных волн. Затем по этим траекториям вычисляются параметры среды. Также представляет интерес и обратная задача.

В работе рассматривается методика расчёта оптических приборов на основе метода геометризации уравнений Максвелла. В основе метода лежит представление материальных уравнений Максвелла в виде эффективной геометрии пространства-времени. Таким образом мы получаем задачу, сходную с некой биметрической теорией гравитации, что позволяет применять хорошо разработанный аппарат дифференциальной геометрии. На основании этого мы можем как исследовать распространение электромагнитного поля по заданным параметрам среды, так и находить параметры среды по заданному закону распространения электромагнитного поля.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, материальные уравнения Максвелла, геометризация уравнений Максвелла, риманова геометрия, криволинейные координаты

1. Введение

Аппарат дифференциальной геометрии являлся основным языком физики XX-го века. Его базовые элементы развивались в рамках общей теории относительности. Возникает желание применить этот развитый и к другим областям физики, в частности к оптике.

Первые попытки применения методов дифференциальной геометрии в электродинамике следует отнести к публикациям И. Е. Тамма [1–3]. В 1960 году Е. Плебаньский предложил метод геометризации материальных уравнений электромагнитного поля [4–7], ставший классическим. Все последующие работы либо использовали его, либо пытались немного подправить, не меняя идеологии [8]. К сожалению, в статье Плебаньского [4] нет никакого вывода формул, а идеология вывода также не выражена явно. Кроме того, методика Плебаньского выглядит скорее как хитрый трюк. Автор постарался выполнить геометризацию уравнений Максвелла более формально.

Статья поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.
Работа частично поддержана грантами РФФИ № 14-01-00628, 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008).

2. Обозначения и соглашения

1. Будем использовать нотацию абстрактных индексов [9]. В данной нотации тензор как целостный объект обозначается просто индексом (например, x^i), компоненты обозначаются подчёркнутым индексом (например, $x^{\underline{i}}$).
2. Будем придерживаться следующих соглашений. Греческие индексы (α, β) будут относиться к четырёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{\alpha} = \overline{0,3}$. Латинские индексы из середины алфавита (i, j, k) будут относиться к трёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{i} = \overline{1,3}$.
3. Запятой в индексе обозначается частная производная по соответствующей координате ($f_{,i} := \partial_i f$); точкой с запятой — ковариантная производная ($f_{;i} := \nabla_i f$).
4. Для записи уравнений электродинамики в работе используется система СГС симметричная [10].

3. Представления уравнений Максвелла

Будем использовать запись уравнений Максвелла в криволинейных координатах. Более подробное описание дано в статьях [11–15].

Уравнения Максвелла в 3-х мерной форме имеют вид:

$$\begin{cases} e^{ijk}\nabla_j E_k = -\dfrac{1}{c}\partial_t B^i, \\ \nabla_i D^i = 4\pi\rho, \\ e^{ijk}\nabla_j H_k = \dfrac{1}{c}\partial_t D^i + \dfrac{4\pi}{c} j^i, \\ \nabla_i B^i = 0. \end{cases} \tag{1}$$

где $e^{\underline{ijk}}$ — альтернирующий тензор.

Запишем уравнение Максвелла через тензоры электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ [16–18]:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta, \tag{3}$$

где тензоры $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ имеют следующие компоненты

$$F_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E_2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E_3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D^2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь $E_{\underline{i}}$, $H_{\underline{i}}$ — компоненты векторов напряжённости электрического и магнитного полей соответственно; $D^{\underline{i}}$, $B^{\underline{i}}$ — компоненты векторов электрической и магнитной индукции соответственно.

Запишем уравнения (2) и (3) через дифференциальные формы в формализме расслоенных пространств. Будем рассматривать расслоение

$$Y \to X, \tag{5}$$

где $X = M^4$ — четырёхмерное пространство. При этом мы не делаем предположение о метрике данного пространства.

Зададим F (2-форма), G (бивектор) и j (вектор):

$$
\begin{gathered}
F = \frac{1}{2} F_{\underline{\alpha\beta}} \, \mathrm{d}x^{\underline{\alpha}} \wedge \mathrm{d}x^{\underline{\beta}}, \quad F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} F_{\underline{\alpha\beta}} \, \mathrm{d}x^{\underline{\alpha}}_{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{\underline{\beta}}_{\beta}, \quad F \in \Lambda^2, \\
G = \frac{1}{2} G^{\underline{\alpha\beta}} \partial_{\underline{\alpha}} \wedge \partial_{\underline{\beta}}, \quad G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} G^{\underline{\alpha\beta}} \partial^{\alpha}_{\underline{\alpha}} \wedge \partial^{\beta}_{\underline{\beta}}, \quad G \in \Lambda_2, \\
j = j^{\underline{\alpha}} \partial_{\underline{\alpha}} \quad j^{\alpha} = j^{\underline{\alpha}} \partial^{\alpha}_{\underline{\alpha}}, \quad j \in \Lambda_1.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Тогда уравнения (2) и (3) примут вид:

$$
\mathrm{d}F = 0, \tag{7}
$$

$$
\delta G = \frac{4\pi}{c} j. \tag{8}
$$

Здесь $\delta = \sharp^{-1} \, \mathrm{d} \, \sharp$ — дивергенция, $\sharp : \Lambda_k \to \Lambda^{n-k}$ задаёт двойственность Пуанкаре.

При этом $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ имеют смысл кривизны в кокасательном (T^*X) и касательном (TX) расслоениях. Связь между этими величинами задаётся следующим образом:

$$
G^{\alpha\beta} = \lambda(F_{\gamma\delta}). \tag{9}
$$

Тогда уравнение (8) примет вид:

$$
\delta\lambda = \frac{4\pi}{c} j. \tag{10}
$$

В линейном случае соотношение (9) можно задать как

$$
G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}. \tag{11}
$$

В этом случае уравнение (8) примет вид:

$$
\delta\left(\frac{1}{2}\lambda F\right) = \frac{4\pi}{c} j. \tag{12}
$$

Будем считать, что λ задаёт на X некоторую эффективную метрику.

4. Тензор проницаемостей

Будем считать, что отображение $\lambda : \Lambda^2 \to \Lambda_2$ линейное и локальное. Тогда его можно представить в следующем виде:

$$
G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}, \tag{13}
$$

где $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор проницаемостей, содержащий информацию как об диэлектрической и магнитной проницаемостях, так и об электромагнитной связи [1, 3].

Из (13) видно, что $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет следующую симметрию:

$$
\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} \tag{14}
$$

Для уточнения симметрии, тензор $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно представить в следующем виде [19–22]:

$$
\begin{gathered}
\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^{(2)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^{(3)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
{}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(1)}\lambda^{([\alpha\beta][\gamma\delta])}, \\
{}^{(2)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(2)}\lambda^{[[\alpha\beta][\gamma\delta]]}, \\
{}^{(3)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(3)}\lambda^{[\alpha\beta\gamma\delta]}.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Очевидно, что $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 36 независимых компонент, ${}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 20 независимых компонент, ${}^{(2)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 15 независимых компонент, ${}^{(3)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 1 независимую компоненту.

Далее будем рассматривать только часть ${}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Запишем материальные уравнения:

$$
\begin{gathered}
D^i = \varepsilon^{ij} E_j + {}^{(1)}\gamma^i_j B^j, \\
H_i = \left(\mu^{-1}\right)_{ij} B^j + {}^{(2)}\gamma^j_i E_j,
\end{gathered}
\tag{16}
$$

где ε^{ij} и μ^{ij} — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, ${}^{(1)}\gamma^i_j$ и ${}^{(2)}\gamma^i_j$ — перекрёстные члены.

Учитывая структуру тензоров $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ (4), а также уравнения связи (16), запишем

$$
\begin{gathered}
F_{\underline{0i}} = E_{\underline{i}}, \quad G^{\underline{0i}} = -D^{\underline{i}}, \\
G^{\underline{ij}} = -\varepsilon^{\underline{ijk}} H_{\underline{k}}, \quad F_{\underline{ij}} = -\varepsilon_{\underline{ijk}} B^{\underline{k}}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Из (16) и (17) выпишем структуру тензора $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$
\lambda^{\underline{0i0j}} = \varepsilon^{\underline{ij}}, \quad \lambda^{\underline{ijmn}} = \varepsilon^{\underline{ijk}} \varepsilon^{\underline{lmn}} (\mu^{-1})_{\underline{lk}}.
\tag{18}
$$

5. Линейная локальная геометризация уравнений Максвелла

Плебаньским была предложена простейшая геометризация уравнений Максвелла [4, 5, 23, 24]. Несмотря на некоторые недостатки, этот метод нашёл применение, например, в трансформационной оптике, где соотношение $\varepsilon_{ij} = \mu_{ij}$ является желательным [7, 25, 26].

Основная идея геометризации по Плебаньскому заключается в следующем:

1. Записать уравнения Максвелла в среде в пространстве Минковского.
2. Записать вакуумные уравнения Максвелла в эффективном римановом пространстве.
3. Приравнять соответствующие члены уравнений.
4. В результате мы получим выражение диэлектрической и магнитной проницаемостей через геометрические объекты.

Однако данный подход к геометризации выглядит скорее как трюк. Автор постарался выполнить данные вычисления более формально.

5.1. Вспомогательные соотношения для метрического тензора

Нам понадобятся простые соотношения для метрического тензора.

$$
g_{\alpha\delta} g^{\delta\beta} = \delta^\beta_\alpha
\tag{19}
$$

Выражение (19) приводит к следующим частным соотношениям:

$$g_{0\delta}g^{\delta i} = g_{00}g^{0i} + g_{0k}g^{ki} = \delta^i_0 = 0, \tag{20}$$

$$g_{i\delta}g^{\delta j} = g_{i0}g^{0j} + g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i. \tag{21}$$

Соотношение (20) перепишем в виде

$$g^{0i} = -\frac{1}{g_{00}} g_{0k}g^{ki}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21), получаем:

$$\left(g_{ik} - \frac{1}{g_{00}} g_{0i}g_{0k} \right) g^{kj} = \delta^j_i. \tag{23}$$

Это соотношение будет использовано позднее для упрощения записи итоговых уравнений.

5.2. Уравнения связи для движущихся сред

Минковским были выведены уравнения связи для изотропных движущихся сред [16,27] (уравнения Минковского для движущихся сред). Пусть u^α — 4-скорость среды. Считая диэлектрическую и магнитную проницаемости ε и μ скалярами, можно записать

$$G^{\alpha\beta}u_\beta = \varepsilon F^{\alpha\beta}u_\beta, \quad {}^*F^{\alpha\beta}u_\beta = \mu\, {}^*G^{\alpha\beta}u_\beta. \tag{24}$$

В трёхмерном виде уравнения (24) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} D^i &= \varepsilon \left(E^i + \left[\frac{u_j}{c}, B_k \right]^i \right) - \left[\frac{u_j}{c}, H_k \right]^i = \varepsilon E^i + (\varepsilon\mu - 1) \left[\frac{u_j}{c}, H_k \right]^i, \\ B^i &= \mu \left(H^i - \left[\frac{u_j}{c}, D_k \right]^i \right) + \left[\frac{u_j}{c}, E_k \right]^i = \mu H^i - (\varepsilon\mu - 1) \left[\frac{u_j}{c}, E_k \right]^i. \end{aligned} \tag{25}$$

Тамм расширил уравнения (25) для анизотропного случая [1,3], а именно, считая, что диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют вид

$$\varepsilon^i_{\underline{j}} = \operatorname{diag}(\varepsilon^1_1, \varepsilon^2_2, \varepsilon^3_3), \quad \mu^i_{\underline{j}} = \operatorname{diag}(\mu^1_1, \mu^2_2, \mu^3_3), \tag{26}$$

и вектор скорости u^i системы отсчёта — параллельным одной из главных осей анизотропии. Тогда уравнения Минковского для движущихся сред приобретут следующий вид:

$$D^i = \varepsilon^i_l \left(E^l + \left[\frac{u_j}{c}, B_k \right]^l \right) - \left[\frac{u_j}{c}, H_k \right]^i, \quad B^i = \mu^i_l \left(H^l - \left[\frac{u_j}{c}, D_k \right]^l \right) + \left[\frac{u_j}{c}, E_k \right]^i. \tag{27}$$

5.3. Общая геометризация

Проведём геометризацию уравнений Максвелла. Введём эффективную метрику в X $g_{\alpha\beta}$. Тогда запишем лагранжиан электромагнитного поля в виде лагранжиана Янга–Миллса:

$$L = -\frac{1}{16\pi c} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} - \frac{1}{c^2} A_\alpha j^\alpha.$$

Построим тензор $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ следующим образом:

$$\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} = \sqrt{-g}\big(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}\big) + \sqrt{-g}\big(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}\big).$$

Тогда уравнение (13) примет следующий вид:

$$G^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\big(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}\big) F_{\gamma\delta}.$$

Для наглядности распишем по компонентам:

$$\begin{gathered} G^{0\underline{i}} = \sqrt{-g}\big(g^{00} g^{\underline{ij}} - g^{0\underline{i}} g^{0\underline{j}}\big) F_{0\underline{j}} + \sqrt{-g}\big(g^{0\underline{j}} g^{\underline{ik}} - g^{0\underline{k}} g^{\underline{ij}}\big) F_{\underline{jk}}, \\ G^{\underline{ij}} = \sqrt{-g}\big(g^{\underline{i}0} g^{\underline{jk}} - g^{0\underline{j}} g^{\underline{ik}}\big) F_{0\underline{k}} + \sqrt{-g}\big(g^{\underline{ik}} g^{\underline{jl}} - g^{\underline{il}} g^{\underline{jk}}\big) F_{\underline{kl}}. \end{gathered}$$

На основании (17) получим:

$$\begin{gathered} D^{i} = -\sqrt{-g} g^{00} \left(g^{\underline{ij}} - \frac{1}{g^{00}} g^{0\underline{i}} g^{0\underline{j}}\right) E_{\underline{j}} - \sqrt{-g}\big(g^{0\underline{j}} g^{\underline{ik}} - g^{0\underline{k}} g^{\underline{ij}}\big) \varepsilon_{\underline{jkl}} B^{\underline{l}}, \\ -\varepsilon^{\underline{ijk}} H_{\underline{k}} = \sqrt{-g}\big(g^{\underline{i}0} g^{\underline{jk}} - g^{0\underline{j}} g^{\underline{ik}}\big) E_{\underline{k}} - \sqrt{-g}\big(g^{\underline{ik}} g^{\underline{jl}} - g^{\underline{il}} g^{\underline{jk}}\big) \varepsilon_{\underline{klm}} B^{\underline{m}}. \end{gathered}$$

На основании (17) с учётом соотношения (23) получим:

$$D^{\underline{i}} = -\sqrt{-g} g^{00} g^{\underline{ij}} E_{\underline{j}} + \sqrt{-g} \varepsilon_{\underline{klj}} g^{0\underline{k}} g^{\underline{il}} B^{\underline{j}}, \tag{28}$$

$$H_{\underline{i}} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\underline{mni}} \varepsilon_{\underline{klj}} g^{\underline{nk}} g^{\underline{ml}} B^{\underline{j}} + \sqrt{-g} \varepsilon^{\underline{klj}} g_{0\underline{k}} g_{\underline{il}} E_{\underline{j}}. \tag{29}$$

Из (28) можно формально выписать выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon^{\underline{ij}} = -\sqrt{-g} g^{00} g^{\underline{ij}}. \tag{30}$$

При этом геометрический смысл второго члена в (28) нуждается в дальнейшем уточнении.

Из (29) можно формально выписать выражение для магнитной проницаемости:

$$(\mu^{-1})_{\underline{ij}} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\underline{mni}} \varepsilon_{\underline{klj}} g^{\underline{nk}} g^{\underline{ml}}. \tag{31}$$

Таким образом, геометризованные уравнения связи координатах имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} D^{i} = \varepsilon^{ij} E_{j} + {}^{(1)}\gamma^{i}_{j} B^{j}, \quad H_{i} = (\mu^{-1})_{ij} B^{j} + {}^{(2)}\gamma^{j}_{i} E_{j}, \\ \varepsilon^{\underline{ij}} = -\sqrt{-g} g^{00} g^{\underline{ij}}, \\ (\mu^{-1})_{\underline{ij}} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\underline{mni}} \varepsilon_{\underline{klj}} g^{\underline{nk}} g^{\underline{ml}}, \quad {}^{(1)}\gamma^{i}_{j} = {}^{(2)}\gamma^{i}_{j} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\underline{klj}} g^{0\underline{k}} g^{\underline{il}}. \end{gathered} \tag{32}$$

Леонгард предложил интерпретировать перекрёстный член в уравнениях (32) как скорость движения геометризованной системы отсчёта [6]. Действительно, на основании (25) уравнения (32) можно переписать в виде:

$$D^{i} = \varepsilon^{ij} E_{j} + \left[\frac{u_{j}}{c}, B_{k}\right]^{i}, \quad H_{i} = (\mu^{-1})_{ij} B^{j} + \left[\frac{u^{j}}{c}, E^{k}\right]_{i}, \tag{33}$$

где u^{i} — трёхмерная скорость движения системы отсчёта.

6. Заключение

Автор предложил формальный подход к проблеме геометризации уравнений электромагнитного поля. В качестве иллюстрации представлен метод локальной линейной геометризация уравнений Максвелла. Следует отметить, что данный метод нельзя считать полностью удовлетворительным. Действительно, полный тензор проницаемостей $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 36 независимых компонент. И даже его основная часть, тензор ${}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$, имеет 20 независимых компонент. В то время как риманов метрический тензор имеет только 10 независимых компонент.

Также следует сказать, что предложенный метод отличается по идеологии и результатам от метода Плебаньского.

Литература

1. *Тамм И. Е.* Электродинамика анизотропной среды в специальной теории относительности // Журнал Русского физико-химического общества. Часть физическая. — 1924. — Т. 56, № 2-3. — С. 248–262.
2. *Тамм И. Е.* Кристаллооптика теории относительности в связи с геометрией биквадратичной формы // Журнал Русского физико-химического общества. Часть физическая. — 1925. — Т. 57, № 3-4. — С. 209–240.
3. *Tamm I. E., Mandelstam L. I.* Elektrodynamik der anisotropen Medien in der speziellen Relativitatstheorie // Mathematische Annalen. — 1925. — Bd. 95, No. 1. — Ss. 154–160.
4. *Plebanski J.* Electromagnetic Waves in Gravitational Fields // Physical Review. — 1960. — Vol. 118, No 5. — Pp. 1396–1408.
5. *Felice F.* On the Gravitational Field Acting as an Optical Medium // General Relativity and Gravitation. — 1971. — Vol. 2, No 4. — Pp. 347–357.
6. *Leonhardt U., Philbin T. G., Haugh N.* General Relativity in Electrical Engineering. — 2008. — Pp. 1–19.
7. *Leonhardt U., Philbin T. G.* Transformation optics and the geometry of light // Progress in Optics. — 2009. — Vol. 53. — Pp. 69–152.
8. *Thompson R. T., Cummer S. A., Frauendiener J.* A Completely Covariant Approach to Transformation Optics // Journal of Optics. — 2011. — Vol. 13, No 2. — P. 024008.
9. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. — М.: Мир, 1987. — Т. 1.
10. *Сивухин Д. В.* О Международной системе физических величин // Успехи физических наук. — 1979. — Т. 129, № 10. — С. 335–338.
11. *Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Korolkov V. I.* Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series “Mathematics. Information Sciences. Physics”. — 2012. — No 1. — Pp. 96–106.
12. *Korol'kova A. V., Kulyabov D. S., Sevast'yanov L. A.* Tensor Computations in Computer Algebra Systems // Programming and Computer Software. — 2013. — Vol. 39, No 3. — Pp. 135–142.
13. *Kulyabov D. S.* Geometrization of Electromagnetic Waves // Mathematical Modeling and Computational Physics. — Dubna: JINR, 2013. — P. 120.
14. *Кулябов Д. С., Королькова А. В.* Уравнения Максвелла в произвольной системе координат // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2013. — № 1 (28). — С. 29–44.
15. *Кулябов Д. С., Немчанинова Н. А.* Уравнения Максвелла в криволинейных координатах // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 2. — С. 172–179.
16. *Minkowski H.* Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgönge in bewegten Körpern // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. — 1908. — Ss. 53–111.
17. *Стрэттон Д. А.* Теория электромагнетизма. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.

18. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика. — Москва: Высшая школа, 1990. — С. 352.
19. *Post E.* The Constitutive Map and Some of its Ramifications // Annals of Physics. — 1972. — Vol. 71, No 2. — Pp. 497–518.
20. *Gilkey P. B.* Algebraic Curvature Tensors // Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor. — World Scientific Publishing Company, 2001. — Pp. 1–91.
21. *Obukhov Y. N., Hehl F. W.* Possible Skewon Effects on Light Propagation // Physical Review D – Particles, Fields, Gravitation and Cosmology. — 2004. — Vol. 70, No 12. — Pp. 1–14.
22. *Hehl F. W., Obukhov Y. N.* Linear Media in Classical Electrodynamics and the Post Constraint // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics. — 2005. — Vol. 334, No 4. — Pp. 249–259.
23. *Leonhardt U.* Optical Conformal Mapping // Science. — 2006. — Vol. 312. — Pp. 1777–1780.
24. *Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R.* Controlling Electromagnetic Fields // Science. — 2006. — Vol. 312, No 5781. — Pp. 1780–1782.
25. *Nicolet A., Zolla F., Geuzaine C.* Transformation optics, generalized cloaking and superlenses // IEEE Transactions on Magnetics. — 2010. — Vol. 46, No 8. — Pp. 2975–2981.
26. *Schurig D., Pendry J. B., Smith D. R.* Calculation of Material Properties and Ray Tracing in Transformation Media // Optics express. — 2006. — Vol. 14, No 21. — Pp. 9794–9804.
27. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1958.

UDC 537.8:514.762.37
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-81-90

Geometrization of Maxwell's Equations in the Construction of Optical Devices

D. S. Kulyabov[*†]

[*] *Department of Applied Probability and Informatics*
RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia)
6 Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198
[†] *Laboratory of Information Technologies*
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, Russia, 141980

The development of physics in the XX-th century was closely linked to the development of the mathematical apparatus. The General Relativity demonstrated the power of the geometric approach. Unfortunately, the infiltration of this apparatus in other domains of physics is rather slow. For example, there were some attempts of integration of the geometric methods in electrodynamics, but until recently they remained only as a theoretical exercise.

Interest to the geometric methods in electrodynamics is summoned by practical necessity. The following algorithm of designing of the electromagnetic device is possible. We construct the estimated trajectories of propagation of electromagnetic waves. Then we calculate the parameters of the medium along these trajectories. The inverse problem is also interesting.

The paper considers the techniques of construction of optical devices based on the method of geometrization of Maxwell's equations. The method is based on representation of material equations in the form of an effective space-time geometry. Thus we get a problem similar to that of some bimetric theory of gravity. That allows to use a well-developed apparatus of differential geometry. On this basis, we can examine the propagation of the electromagnetic field on the given parameters of the medium. It is also possible to find the parameters of the medium by a given law of propagation of electromagnetic fields.

Key words and phrases: Maxwell's equations, constitutive equations, Maxwell's equations geometrization, Riemann geometry, curvilinear coordinates

References

1. I. E. Tamm, Electrodynamics of an Anisotropic Medium in a Special Theory of Relativity, Russian Journal of Physical and Chemical Society. Part physical 56 (2-3) (1924) 248–262.
2. I. E. Tamm, Crystal Optics Theory of Relativity in Connection with Geometry Biquadratic Forms, Russian Journal of Physical and Chemical Society. Part physical 57 (3-4) (1925) 209–240.
3. I. E. Tamm, L. I. Mandelstam, Elektrodynamik der anisotropen Medien in der speziellen Relativitatstheorie, Mathematische Annalen 95 (1) (1925) 154–160.
4. J. Plebanski, Electromagnetic Waves in Gravitational Fields, Physical Review 118 (5) (1960) 1396–1408. doi:10.1103/PhysRev.118.1396.
5. F. Felice, On the Gravitational Field Acting as an Optical Medium, General Relativity and Gravitation 2 (4) (1971) 347–357. doi:10.1007/BF00758153.
6. U. Leonhardt, T. G. Philbin, N. Haugh, General Relativity in Electrical Engineering (2008) 1–19arXiv:0607418v2.
7. U. Leonhardt, T. G. Philbin, Transformation Optics and the Geometry of Light, in: Progress in Optics, Vol. 53, 2009, pp. 69–152. arXiv:0805.4778v2, doi:10.1016/S0079-6638(08)00202-3.
8. R. T. Thompson, S. A. Cummer, J. Frauendiener, A Completely Covariant Approach to Transformation Optics, Journal of Optics 13 (2) (2011) 024008. doi:10.1088/2040-8978/13/2/024008.
9. R. Penrose, W. Rindler, Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields, Vol. 1, Cambridge University Press, 1987.
10. D. V. Sivukhin, The International System of Physical Units, Soviet Physics Uspekhi 22 (10) (1979) 834–836. doi:10.1070/PU1979v022n10ABEH005711.
11. D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, V. I. Korolkov, Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (1) (2012) 96–106. arXiv:1211.6590.
12. A. V. Korol'kova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevast'yanov, Tensor Computations in Computer Algebra Systems, Programming and Computer Software 39 (3) (2013) 135–142. arXiv:1402.6635, doi:10.1134/S0361768813030031.
13. D. S. Kulyabov, Geometrization of Electromagnetic Waves, in: Mathematical Modeling and Computational Physics, JINR, Dubna, 2013, p. 120.
14. D. S. Kulyabov, A. V. Korol'kova, Maxwell's Equations in an Arbitrary Coordinate System, Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics (1 (28)) (2013) 29–44, in Russian. arXiv:1211.6590.
15. D. S. Kulyabov, N. A. Nemchaninova, Maxwell's Equations in Curvilinear Coordinates, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia Series: Mathematics. Information Sciences. Physics (2) (2011) 172–179, in Russian.
16. H. Minkowski, Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgönge in bewegten Körpern, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1908) 53–111.
17. J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, MGH, 1941.
18. Ya. P. Terletskiy, Yu. P. Rybakov, Electrodynamics, High School, Moscow, 1990, in Russian.
19. E. Post, The Constitutive Map and Some of its Ramifications, Annals of Physics 71 (2) (1972) 497–518. doi:10.1016/0003-4916(72)90129-7.
20. P. B. Gilkey, Algebraic Curvature Tensors, in: Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor, World Scientific Publishing Company, 2001, pp. 1–91. doi:10.1142/9789812799692_0001.
21. Y. N. Obukhov, F. W. Hehl, Possible Skewon Effects on Light Propagation, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology 70 (12) (2004) 1–14. arXiv:0409155, doi:10.1103/PhysRevD.70.125015.
22. F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, Linear Media in Classical Electrodynamics and the

Post Constraint, Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics 334 (4) (2005) 249–259. arXiv:0411038, doi:10.1016/j.physleta.2004.11.038.
23. U. Leonhardt, Optical Conformal Mapping, Science 312 (June) (2006) 1777–1780. arXiv:0602092, doi:10.1126/science.1218633.
24. J. B. Pendry, D. Schurig, D. R. Smith, Controlling Electromagnetic Fields, Science 312 (5781) (2006) 1780–1782. doi:10.1126/science.1125907.
25. A. Nicolet, F. Zolla, C. Geuzaine, Transformation Optics, Generalized Cloaking and Superlenses, IEEE Transactions on Magnetics 46 (8) (2010) 2975–2981. arXiv:1002.1644, doi:10.1109/TMAG.2010.2043073.
26. D. Schurig, J. B. Pendry, D. R. Smith, Calculation of Material Properties and Ray Tracing in Transformation Media, Optics express 14 (21) (2006) 9794–9804. arXiv:0607205, doi:10.1364/OE.14.009794.
27. A. Sommerfeld, Lectures on Theoretical Physics: Electrodynamics, Academic Press, 1964.