КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

Материалы международной конференции

Москва, 30 октября – 3 ноября 2017 г.

COMPUTER
ALGEBRA
INTERNATIONAL
CONFERENCE
MOSCOW
2017

РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Г.В.ПЛЕХАНОВА

Федеральный исследовательский центр
Информатика
и Управление
Российской академии наук

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

The Ministry of Education and Science
of the Russian Federation
Plekhanov Russian University of Economics

Institution of Russian Academy of Sciences
Dorodnicyn Computing Centre of
Federal Research Center
“Computer Science and Control” of RAS

COMPUTER ALGEBRA

International Conference Materials

Moscow, October 30 – November 3, 2017

Moscow
PRUE
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова»
(ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова»)

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук»
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

Материалы Международной конференции

Москва, 30 октября — 3 ноября 2017 г.

Москва
ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова»
2017

UDC 519.6(063)
BBC 22.19я431
K637

Responsible editors:
Doctor of Physical and Mathematical Sciences S. A. A b r a m o v
Doctor of Physical and Mathematical Sciences T. M. S a d y k o v

Reviewers: PhD Yu. O. T r u s o v a, PhD K. P. L o v e t s k i y

It is printed in author's edition

Computer algebra : International Conference Materials. Moscow, October 30 – November 3, 2017 / ed. S. A. Abramov, T. M. Sadykov. – Moscow : Plekhanov Russian University of Economics, 2017. – 173 c.
K637
ISBN 978-5-7307-1266-9

The International conference is organized jointly by Dorodnicyn Computing Center of Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS and Plekhanov Russian University of Economics with a support of Russian Foundation for Basic Research, grant no. 17-01-20398\17. The talks presented at the conference discuss actual problems of computer algebra – the discipline whose algorithms are focused on the exact solution of mathematical problems using a computer.

For scientists, graduate and undergraduate students in mathematics, physics and computer science.

UDC 519.6(063)
BBC 22.19я431

ISBN 978-5-7307-1266-9

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я431
К637

Ответственные редакторы:
д-р физ.-мат. наук С. А. А б р а м о в
д-р физ.-мат. наук Т. М. С а д ы к о в

Рецензенты: канд. техн. наук Ю. О. Т р у с о в а
канд. физ.-мат. наук К. П. Л о в е ц к и й

Печатается в авторской редакции

К637 **Компьютерная алгебра** : материалы Международной конференции. Москва, 30 октября – 3 ноября 2017 г. / отв. ред. С. А. Абрамов, Т. М. Садыков. – Москва : ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2017. – 173 с.
ISBN 978-5-7307-1266-9

Международная конференция проводится совместно Вычислительным центром им. А. А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН и Российским экономическим университетом имени Г. В. Плеханова при поддержке РФФИ, проект № 17-01-20398\17. В представленных на конференции докладах обсуждаются актуальные проблемы компьютерной алгебры – научной дисциплины, алгоритмы которой ориентированы на точное решение математических задач с помощью компьютера.

Для научных работников, аспирантов и студентов физико-математических и технических специальностей.

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я431

ISBN 978-5-7307-1266-9

Программный комитет

Евтушенко Ю. Г. (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Россия — сопредседатель программного комитета; *Минашкин В. Г.* Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Россия — сопредседатель программного комитета; *Садыков Т. М.* Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Россия — зам. председателя программного комитета; *Абрамов С. А.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, Россия — зам. председателя программного комитета; *Флеров Ю. А.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Россия; *Баркату М.* (Лиможский университет), профессор, Франция; *Бернштейн А. В.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Виницкий С. И.* (ЛТФ ОИЯИ, РУДН), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Ву М.* (Восточно-Китайский педагогический университет), профессор, Китай; *Гердт В. П.* (ЛИТ ОИЯИ), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Малашонок Г. И.* (Тамбовский ГУ), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Михалев А. А.* (МГУ), Россия; *Михалев А. В.* (МГУ), Россия; *Петковшек М.* (Люблянский университет), профессор, Словения; *Прокопеня А. Н.* (Варшавский университет естественных наук), д.ф.-м.н., профессор, Польша; *Гонцов Р. Р.* (ИППИ РАН), Россия; *Самуйлов К. Е.* (РУДН), д.т.н., профессор, Россия; *Севастьянов Л. А.* (РУДН, ЛТФ ОИЯИ), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Серебряков В. А.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, Россия.

Организационный комитет

Михайлов Г. М. зам. директора ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия — сопредседатель оргкомитета; *Титов В. А.*Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Россия — сопредседатель оргкомитета; *Зонн И. А.* (ФИЦ ИУ РАН), Россия — зам. председателя оргкомитета; *Кулябов Д. С.* (РУДН), Россия; *Державина А. И.* (ФИЦ ИУ РАН), Россия; *Хмельнов Д. Е.*, (ФИЦ ИУ РАН), Россия; *Рябенко А. А.* (ФИЦ ИУ РАН), Россия — секретарь оргкомитета.

Program Committee

Evtushenko, Yu. G. FRC CSC RAS, Russia — Program Committee General Co-Chair; *Minashkin, V. G.* Plekhanov Russian University of Economics, Russia — Program Committee General Co-Chair; *Sadykov, T. M.* Plekhanov Russian University of Economics, Russia — Program Committee Vice Chair; *Abramov, S. A.* FRC CSC RAS, Russia — Program Committee Vice Chair; *Flerov, Yu. A.* FRC CSC RAS, Russia; *Barkatou, M.* Universite de Limoges, France; *Bernstein, A. V.* FRC CSC RAS, Russia; *Vinitsky, S. I.* Joint Institute for Nuclear Research, and Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Wu, M.* East China Normal University, Shanghai, P.R. China; *Gerdt, V. P.* Joint Institute for Nuclear Research, Russia; *Malaschonok, G. I.* Tambov State University, Russia; *Mikhalev, A. A.* Moscow State University, Russia; *Mikhalev, A. V.* Moscow State University, Russia; *Petkovšek, M.* University of Ljubljana, Slovenia; *Prokopenya, A. N.* Warsaw University of Life Sciences, Poland; *Gontsov, R. R.* Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, Russia; *Samuilov, K. E.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Sevastyanov, L. A.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Serebryakov, V. A.* FRC CSC RAS.

Organizing Committee

Mikhailov, G. M. vice-director of CC FRC CSC PAS, Russia — Organising Committee Co-Chair; *Titov, V. A.* Plekhanov Russian University of Economics, Russia — Organising Committee Co-Chair; *Zonn, I. A.* FRC CSC RAS, Russia — Organising Committee Vice Chair; *Kulyabov, D. S.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Derzhavina, A. I.* FRC CSC RAS, Russia; *Khmelnov, D. E.* FRC CSC RAS, Russia; *Ryabenko, A. A.* FRC CSC RAS, Russia — Organising Committee Secretary.

Предисловие

Вторая международная конференция «Компьютерная алгебра» организована совместно Вычислительным центром им. А. А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН и Российским экономическим университетом им. Г.В.Плеханова. Первая конференция (`http://www.ccas.ru/ca/conference2016`) проводилась в 2016 г., в ее проведении вместе с Вычислительным центром им. А. А. Дородницына участвовал Российский университет дружбы народов. Алгоритмы компьютерной алгебры ориентированы на точное решение математических задач с помощью компьютера. Участники настоящей конференции представляют новые результаты, полученные в этой научной области. Обсуждаются как новые теоретические результаты, так и результаты, связанные с решением прикладных задач средствами компьютерной алгебры, с реализационными вопросами и т.д. Формулируются и обсуждаются задачи компьютерной алгебры, не решенные до настоящего времени. Классификация средств компьютерной алгебры также привлекает внимание участников конференции.

Организаторы и участники конференции благодарят Российский фонд фундаментальных исследований за оказанную финансовую поддержку (проект 17-01-20398).

Программный и организационный комитеты конференции

Foreword

The second international conference "Computer Algebra" has been organized jointly by Dorodnicyn Computing Centre of Russian Academy of Sciences and by Plekhanov Russian Univeristy of Economics. The first edition of the event (`http://www.ccas.ru/ca/conference2016`) was held in 2016 at the Dorodnicyn Computing Centre in cooperation with Russian University of Friendship of Peoples.

The algorithms of computer algebra serve the purpose of finding exact solutions to mathematically formulated problems by means of technical computing. The participants of the conference have presented recent scientific advances in the field. The scope of the event includes theoretical aspects of computer algebra as well as its applications and implementation issues. A number of hitherto unresolved problems in the field of computer algebra have been formulated and discussed in the framework of the conference. Besides, the classification of the existing computer algebra tools was the focus of the event.

The organizers and the participants of the conference thank the Russian Foundation for Basic Research for the provided financial support, grant no. 17-01-20398.

Program and Organizing Committees of the conference

Содержание

Пленарные доклады

Сессионные доклады

Использование системы компьютерной алгебры SymPy для реализация метода стохастизации одношаговых процессов

М. Н. Геворкян[*], **А. В. Демидова**[*], **Т. Р. Велиева**[*], **А. В. Королькова**[*], **Д. С. Кулябов**[*†], **Л. А. Севастьянов**[*‡]

[*] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

[†] *Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

[‡] *Лаборатория теоретической физики, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Email: gevorkyan_mn@rudn.university, demidova_av@rudn.university, velieva_tr@rudn.university, korolkova_av@rudn.university, kulyabov_ds@rudn.university, sevastianov_la@rudn.university

При моделировании таких явлений как популяционная динамика, исследование управляемых потоков и т.д. возникает проблема адаптации существующих моделей под исследуемое явление. Для этого предлагается получать новые модели из первых принципов на основе метода стохастизации одношаговых процессов. Исследование имеет вид итеративного процесса, заключающегося в получении модели и последующей её корректировке. Количество таких итераций может быть крайне большим. Целью данной работы является разработка программной реализации средствами компьютерной алгебры метода стохастизации одношаговых процессов. В работе предложено использовать систему компьютерной алгебры *SymPy* в качестве основы для программной реализации. На основе разработанного алгоритма показано получение стохастических дифференциальных уравнений из вида схем взаимодействия. Результаты работы программы продемонстрированы на модели Ферхюльста.

Ключевые слова: CAS, SymPy, iPython, стохастизация, одношаговые процессы.

1. Введение

Явления, изучаемые нашим коллективом, можно описывать в рамках статистического подхода. Обычно подбирается модель, достаточно полно отражающая изучаемое явление, и в неё вносятся некоторые уточнения. Возникает вопрос, как вносить изменения, поскольку данный процесс не однозначен. Используемые модели являются реализацией некоторых первых принципов. Мы считаем, что если строить модели из первых принципов, то вносимые изменения будут иметь конкретную прагматику и семантику, и однозначно проявляться в используемых приближённых моделях. Для описания изучаемых нами явлений (сети передачи данных, системы с управлением, популяционная динамика) мы используем модель одношаговых процессов [1, 2].

Нами разработана методика стохастизации моделей, которая позволяет получать из первых принципов стохастическую модель, соответствующую детерминистической [3–7]. Процес исследования является итеративным: из детерминистической модели мы получаем первичную модель, из первичной модели стохастическую, стохастическая модель соотносится с детерминистической, на основании этого соотнесения мы получает уточнённую первичную модель. Далее процесс повторяется.

Формализм стохастизации может быть реализован разными способами. На данный момент нами применяются представление векторов состояния (комбинаторный подход) и представление чисел заполнения (операторный подход) [8–11].

В случае применения комбинаторного подхода все действия выполняются в пространстве векторов состояния системы. На протяжении всех модельных манипуляций мы имеем дело с конкретной исследуемой системой. В результате получается

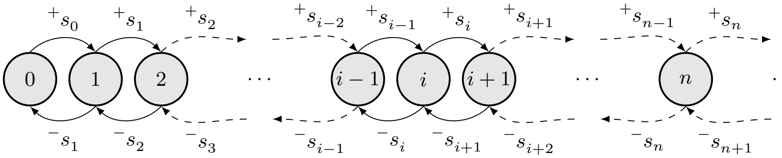

Рис. 1. Одношаговый процесс

описание в виде дифференциального уравнения. Этот подход удобен при конструировании модели, поскольку позволяет легко сравнить результат с другими моделями.

В операторном подходе мы отвлекаемся от конкретной реализации исследуемой системы, работая с абстрактными операторами. В пространство векторов состояний мы переходим только в конце вычислений. Кроме того, конкретную операторную алгебру мы выбираем, исходя их симметрии задачи. Этот подход удобен при теоретических построениях.

Зачастую возникает задача нахождения стохастической модели, эквивалентной ранее созданной детерминистической. Для этого мы используем комбинаторный подход. В этом представлении стохастическая модель имеет вид дифференциального уравнения, что облегчает сравнение с исходной моделью.

2. Методика стохастизации детерминированных моделей

Нами разработана эмпирическая методика стохастизации одношаговых процессов. Однако лишь часть шагов эксплицирована, выражена явно. Методика формализована таким образом, что для её применения достаточно сформулировать исходную задачу соответствующим образом.

Первым шагом мы приводим нашу модель к виду одношагового процесса (см. рис. 1). Далее необходимо формализовать этот процесс в виде схем взаимодействия [5, 12]. Аналогами схем взаимодействия являются уравнения химической кинетики, реакции частиц и т.д.

Из схем взаимодействия непосредственно записывается основное кинетическое уравнение. Однако это уравнение [1,2] имеет обычно достаточно сложную структуру, что затрудняет его решение и исследование. Следующим шагом мы получаем приближённые модели в виде уравнений Фоккера–Планка и Ланжевена.

Предложенный подход подразумевает итеративность исследования: полученные приближённые модели уточняются и изменяются, что приводит к коррекции исходных схем взаимодействия.

3. Обоснование выбора системы компьютерной алгебры

При реализации рассмотренных алгоритмов перед нами встала задача выбора системы компьютерной алгебры. Наши потребности вполне укладываются в требования к универсальной системе компьютерной алгебры, но спектр таких систем весьма широк. Поэтому приведём наши критерии выбора:

— Система должна быть свободно распространяемой. Можно считать это нашим *profession de foi*.
— Взаимодействие с системой должно быть итеративным. В ней должна быть реализована парадигма REPL (Read–Eval–Print Loop).
— Желательно, чтобы система поддерживалась и развивалось. Неприятно создавать продукт на языке, который в скором времени окажется мёртвым.

— Символьные вычисления — лишь один из элементов методики. Полученные уравнения необходимо исследовать чаще всего численными методами. Необходимо иметь возможность разных форматов вывода результатов. А ещё лучше, иметь возможность бесшовно интегрировать искомую систему с другими программными продуктами.
— Также было бы удобно иметь реализацию численных методов в рамках системы компьютерной алгебры.

Выбор универсальных свободных систем компьютерной алгебры не так уж и велик. Рассмотрим основных претендентов.

Система Maxima [13, 14] — классическая система, однако застывшая в своём развитии в конце 90-х. Новые версии выпускаются часто. При этом они лишь увеличивают стабильность, исправляют ошибки. Добавление новых возможностей идёт крайне медленно. Кроме того, возможность взаимодействия с другими программами ограничена.

Система Axiom [15, 16] выделяется математическим подходом к компьютерной алгебре. Она поддерживает систему типов Хиндли–Милнера [17, 18], обладает великолепным внутренним языком расширения. Но из-за неразрешённых проблем с копирайтом систему лихорадит. Образовалось несколько форков. Каждый вариант имеет свою идеологию, свои планы развития. Чем и когда всё это закончится — не понятно. Да и интероперабельность фактически отсутствует.

Наиболее интересной для нас является система SymPy [19, 20]. Эта система появилась как библиотека символьных вычислений для языка Python. Но язык Python стал универсальным языковым клеем (достаточно неожиданно). Применение его в разнообразных проектах привело к взрывному росту сопутствующих средств и библиотек. Поэтому и SymPy развивался вместе с ним. Теперь это достаточно мощная система компьютерной алгебры. Причём большая часть необходимых нам критериев проистекают не из собственно системы SymPy, а из окружающих её библиотек. Получается, что SymPy удовлетворяет всем нашим критериям:
— В качестве интерактивной оболочки удобно использовать блокнот Jupyter, являющийся компонентом системы iPython [21], реализующей идеологию REPL.
— Язык Python фактически используется как соединительный язык, своего рода язык-клей, который позволяет интегрировать между собой разные программные продукты. Кроме того, в рамках библиотеки SciPy [22] поддерживается большое число выходных форматов.
— Выходные данные SymPy возможно естественным образом передать для численных расчётов в библиотеку NumPy [23].

Таким образом, мы остановились в своём выборе на системе SymPy для реализации метода стохастизации одношаговых процессов.

4. Программная реализации алгоритма стохастизации

Алгоритм получения стохастического дифференциального уравнения из схемы взаимодействия реализован как последовательность операций над векторными данными. Исходными данными являются схемы взаимодействия, представленные в следующем виде:
— символьный вектор X представляет собой вектор состояния системы φ;
— символьный вектор K представляет собой интенсивности взаимодействия ${}^{+}k_{\underline{\alpha}}$, ${}^{-}k_{\underline{\alpha}}$;
— числовые матрицы I и F представляют собой начальное и конечное состояния.

Основные вычисления реализованы в виде четырёх функций.

Первая функция просто реализует нахождение элемента $\frac{\varphi^{\underline{i}}!}{(\varphi^{\underline{i}} - I^{\underline{i}\,\underline{\alpha}})!}$:

```
def P(x, n):
    """x = symbol, n = integer """
    return sp.prod([x-i for i in range(n)])
```

Следующая функция использует предыдущую для вычисления ${}^{+}s_{\underline{\alpha}}$ и ${}^{-}s_{\underline{\alpha}}$, в качестве аргументов здесь передаются символьные векторы $X = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T$ и $K = ({}^{-}k_{\underline{1}}, \ldots, {}^{-}k_s)$, а в качестве результата возвращается список ${}^{+}s_{\underline{1}}, \ldots, {}^{+}s_s$ (приведён код только для прямых реакций):

```
def S(X, K, I):
    res = []
    for i in range(len(K)):
        Ps = [P(x, int(n)) for (x, n) in zip(X, I[i, :])]
        res.append(K[i]* sp.prod(Ps))
    # output: list [s_1, s_2, s_3, ..., s_s]
    return res
```

Следующие функции — основные функции алгоритма: для получения вектора сноса `drift_vector(X, K, I, F)` и матрицы диффузии `diffusion_matrix(X, K, I, F)` в символьном формате `SymPy`:

```
def drift_vector(X, K, I, F):
    res = sp.zeros(r=len(X), c=1)
    R = F.T - I.T
    for i in range(len(K)):
        res += R[:, i] * S(X, K, I)[i]
    return res


def diffusion_matrix(X, K, I, F):
    res = sp.zeros(r=len(X), c=len(X))
    R = F.T - I.T
    R = sp.Matrix(R)
    for i in range(len(K)):
        res += R[:, i] * R[:, i].T * S(X, K, I)[i]
    return res
```

При использовании интерактивной оболочки `Jupyter` необходимо настроить корректное отображение нотации TEX. Для этого вначале `Jupyter`-блокнота следует импортировать модуль `Latex`:

```
from IPython.display import Latex
```

и вызвать функцию

```
sympy.init_printing(use_unicode=True)
```

При этом библиотека `SymPy` должна быть заранее импортированная командой `import sympy`.

Результаты работы программы можно экспортировать в формат LATEX. Можно воспользоваться встроенными методами, которые позволяют преобразовать A^i и B^{ij} в код LATEX. Для этого достаточно вызвать комбинацию функций `print(sympy.latex(A))`, где в переменной `A` содержится результат работы функции `drift_vector`, а функция `latex()` экспортирует его в LATEX-код.

5. Пример реализации. Модель Ферхюльста

Для демонстрации метода рассмотрим модель Ферхюльста [24–26]. В популяционной семантике эта модель описывает ограниченный рост популяции.

Детерминистическая модель имеет следующий вид:

$$\dot{\varphi} = \lambda\varphi - \beta\varphi - \gamma\varphi^2, \tag{1}$$

где λ — коэффициент интенсивности размножения, β — коэффициент интенсивности вымирания, γ — коэффициент интенсивности уменьшения популяции.

На основании (1) запишем схему взаимодействия:

$$\begin{aligned} &\varphi \underset{\gamma}{\overset{\lambda}{\rightleftharpoons}} 2\varphi, \\ &0 \xleftarrow{\beta} \varphi. \end{aligned} \qquad (2)$$

Первое соотношение (2) означает, что индивидуум, который съедает единицу пищи, немедленно репродуцируется, в обратную сторону – соперничество между индивидами. Второе соотношение описывает смерть индивидуума.

Данная модель одномерна ($n = 1$). Количество взаимодействий s равно 2.

Из (2) запишем матрицы $I^{\underline{i}\,\underline{\alpha}}$ и $F^{\underline{i}\,\underline{\alpha}}$:

$$I^{\underline{i}\,\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F^{\underline{i}\,\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В программу передаются следующие значения:

```
I = sp.Matrix([[1], [1]])
F = sp.Matrix([[2], [0]])
X = sp.Matrix(['phi'])
K = sp.Matrix(['k_{0}'.format(i+1) for i in range(2)])
```

Поскольку задача одномерна, то вектор сноса и матрица диффузии являются скалярами:

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= \lambda\varphi - \beta\varphi - \gamma\varphi^2, \\ B(\varphi) &= \lambda\varphi + \beta\varphi - \gamma\varphi^2. \end{aligned}$$

Стохастическое дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1), будет иметь вид:

$$\mathrm{d}\varphi(t) = (\lambda\varphi - \beta\varphi - \gamma\varphi^2)\,\mathrm{d}t + \sqrt{(\lambda\varphi + \beta\varphi - \gamma\varphi^2)}\,\mathrm{d}W(t)\,.$$

Таким образом мы достигли своей цели — модель стохастизована. Следует заметить, что даже такая простая одномерная модель при ручных расчётах является достаточно трудоёмкой.

6. Заключение

Исследовательская работа часто носит итеративный характер. Результаты вычислений оцениваются по определённым критериям. Эти действия приходится выполнять многократно. Системы компьютерной алгебры позволяют автоматизировать этот процесс.

В данной работе рассмотрена простейшая реализация алгоритма стохастизации одношаговых процессов по заданным схемам взаимодействия. Для этого был проведён анализ систем компьютерной алгебры на основе предложенных авторами критериев. В соответствии с этими критериями в качестве системы компьютерной алгебры для реализации метода выбрана система *SymPy*. Приведены существенные элементы кода реализации метода стохастизации одношаговых процессов. Работа программного комплекса продемонстрирована на примере двух моделей: модели Ферхюльста и модели Лотки–Вольтерры.

Благодарности

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация подготовлена при поддержке программы РУДН «5-100».

Литература

1. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — Мир, 1986.
2. Ван-Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. — М. : Высшая школа, 1990.
3. Korolkova A. V., Eferina E. G., Laneev E. B., Gudkova I. A., Sevastianov L. A., Kulyabov D. S. Stochastization Of One-Step Processes In The Occupations Number Representation // Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation. — 2016. — jun. — P. 698–704.
4. Eferina E. G., Hnatich M., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A., Velieva T. R. Diagram Representation for the Stochastization of Single-Step Processes // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science / Ed. by V. M. Vishnevskiy, K. E. Samouylov, D. V. Kozyrev. — Cham : Springer, 2016. — Vol. 678. — P. 483–497.
5. Hnatič M., Eferina E. G., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. Operator Approach to the Master Equation for the One-Step Process // EPJ Web of Conferences. — 2015. — Vol. 108. — P. 58–59. — 1603.02205.
6. Gevorkyan M. N., Demidova A. V., Zaryadov I. S., Sobolewski R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. Approaches to Stochastic Modeling of Wind Turbines // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2017 / Ed. by K. Varadi, A. Vidovics-Dancs, J. P. Radics, Z. Z. Paprika, P. T. Zwierczyk, P. Horak. — Budapest : European Council for Modelling and Simulation, 2017. — may. — P. 622–627.
7. Gevorkyan M. N., Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. Stochastic Runge–Kutta Software Package for Stochastic Differential Equations // Dependability Engineering and Complex Systems. — Springer International Publishing, 2016. — Vol. 470. — P. 169–179. — 1606.06604.
8. Grassberger P., Scheunert M. Fock-Space Methods for Identical Classical Objects // Fortschritte der Physik. — 1980. — Vol. 28, no. 10. — P. 547–578.
9. Täuber U. C. Field-Theory Approaches to Nonequilibrium Dynamics // Ageing and the Glass Transition. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005. — Vol. 716. — P. 295–348. — 0511743.
10. Janssen H.-K., Täuber U. C. The field theory approach to percolation processes // Annals of Physics. — 2005. — jan. — Vol. 315, no. 1. — P. 147–192. — 0409670.
11. Mobilia M., Georgiev I. T., Täuber U. C. Fluctuations and correlations in lattice models for predator-prey interaction // Physical Review E. — 2006. — apr. — Vol. 73, no. 4. — P. 040903. — 0508043.
12. Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. The Method of Constructing Models of Peer to Peer Protocols // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — P. 557–562. — 1504.00576.
13. Bainov D. D., Hristova S. G. Differential Equations with Maxima. Pure and Applied Mathematics. — Chapman and Hall/CRC, 2011. — apr. — P. x+291.
14. Timberlake T. K., Mixon J. W. Classical Mechanics with Maxima. Undergraduate Lecture Notes in Physics. — New York, NY : Springer New York, 2016. — P. xi+258.
15. Jenks R. D., Sutor R. S. AXIOM: The Scientific Computation System. — 1992. — P. xxiv + 742.
16. Eferina E. G., Korolkova A. V., Gevorkyan M. N., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. One-Step Stochastic Processes Simulation Software Package // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series “Mathematics. Information Sciences. Physics”. — 2014. — no. 3. — P. 46–59. — 1503.07342.
17. Hindley R. The Principal Type-Scheme of an Object in Combinatory Logic // Transactions of the American Mathematical Society. — 1969. — Vol. 146, no. December. — P. 29–29.
18. Milner R. A Theory of Type Polymorphism in Programming // Journal of Computer and System Sciences. — 1978. — dec. — Vol. 17, no. 3. — P. 348–375.
19. Lamy R. Instant SymPy Starter. — Packt Publishing, 2013. — P. 52.

20. Eferina E. G., Kulyabov D. S. Implementation of Diagram Technique for Statistical Systems in Sympy // 6th International conference "Problems of Mathematical Phisics and Mathematical Modelling". — Moscow : NRNU MEPhI, 2017. — may. — P. 125–127.
21. Perez F., Granger B. E. IPython: A System for Interactive Scientific Computing // Computing in Science & Engineering. — 2007. — Vol. 9, no. 3. — P. 21–29.
22. Oliphant T. E. Python for Scientific Computing // Computing in Science & Engineering. — 2007. — Vol. 9, no. 3. — P. 10–20.
23. Oliphant T. E. Guide to NumPy. — 2 edition edition. — CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. — P. 364.
24. Verhulst P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. — 1838. — Vol. 10. — P. 113–117.
25. Feller W. Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in wahrscheinlichkeitstheoretischer Behandlung // Acta Biotheoretica. — 1939. — Bd. 5, H. 1. — S. 11–40.
26. Feller W. On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications // Proceedings of the [First] Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. — 1949. — P. 403–432.

Using the computer algebra system SymPy to implement the method of stochastization of one-step processes

M. N. Gevorkyan*, A. V. Demidova*, T. R. Velieva*, A. V. Korolkova*, D. S. Kulyabov*†, L. A. Sevastianov*‡

* *Department of Applied Probability and Informatics,*
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
6 Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

† *Laboratory of Information Technologies*
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

‡ *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

Email: gevorkyan_mn@rudn.university, demidova_av@rudn.university, velieva_tr@rudn.university, korolkova_av@rudn.university, kulyabov_ds@rudn.university, sevastianov_la@rudn.university

When modeling phenomena such as population dynamics, the study of controlled flows, etc. there is a problem of adapting existing models to the phenomenon under investigation. To this end, we propose to obtain new models from the first principles on the basis of the method of stochastization of one-step processes. Our study has the form of an iterative process, which consists in obtaining a model and subsequently adjusting it. The number of such iterations can be extremely large. The aim of this work is to develop a software implementation of the method of stochastization of one-step processes by means of computer algebra. In this paper, we propose to use the computer algebra system *SymPy* as the basis for software implementation. Based on the developed algorithm, we obtain stochastic differential equations. The results of the program are demonstrated on the Verhulst model.

Key words and phrases: CAS, SymPy, iPython, stochastization, one-step processes.