

**ИНФОРМАЦИОННО-
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНЫХ СИСТЕМ**

**Материалы
Всероссийской конференции
с международным участием**

Москва, РУДН, 24–28 апреля 2017 года

УДК 004:007(063)
ББК 32.81
И74

Конференция проводится в рамках реализации Программы повышения конкурентоспособности РУДН «5-100», проект М 2.4.1.П1 «Организация и проведение НТМ, повышающих международный и всероссийский уровень признания ученых РУДН».

Организатор конференции: Российский университет дружбы народов.

Соорганизаторы конференции:

Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ);
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН);
Лаборатория информационных технологий Объединенного института ядерных исследований (ЛИТ ОИЯИ);
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН).

Программный комитет: Самуйлов К. Е., д.т.н., проф., РУДН — председатель программного комитета; Севастьянов Л. А., д.ф.-м.н., проф., РУДН — сопредседатель программного комитета; Толмачев И. Л., к.ф.-м.н., проф., РУДН — сопредседатель программного комитета; Гудкова И. А., к.ф.-м.н., доцент, РУДН — секретарь программного комитета; Андреев С. Д., к.т.н., РУДН, Tampere University of Technology, г. Тампере, Финляндия; Башарин Г. П., д.т.н., проф., РУДН; Боголюбов А. Н., д.ф.-м.н., проф., МГУ; Виноцкий С. И., д.ф.-м.н., проф., ЛТФ ОИЯИ; Вишневский В. М., д.т.н., проф., ИПУ РАН; Гайдамака Ю. В., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Гнатич М. М., проф., Pavol Jozef Šafárik University in Košice, Словакия; Гольдштейн Б. С., д.т.н., проф., СПб ГУТ; Горшенин А. К., к.ф.-м.н., доцент, ФИЦ ИУ РАН; Дружинина О. В., д.ф.-м.н., проф., ФИЦ ИУ РАН; Ефимушкин В. А., к.ф.-м.н., доцент, ОАО «Интеллект Телеком»; Ибрагимов Б. Г., д.т.н., проф., Азербайджанский технический университет (АЗТУ), г. Баку, Азербайджан; Кореньков В. В., д.т.н., проф., ЛИТ ОИЯИ; Королькова А. В., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Крынев А. В., д.ф.-м.н., проф., НИЯУ «МИФИ»; Кулябов Д. С., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Кучерявый А. Е., д.т.н., проф., СПб ГУТ; Кучерявый Е. А., к.т.н., проф., НИУ ВШЭ; Ланеев Е. Б., д.ф.-м.н., проф., РУДН; Мартикайнен О. Е., проф., Service Innovation Research Institute, г. Хельсинки, Финляндия; Назаров А. А., д.т.н., проф., ТГУ; Наумов В. А., проф., Service Innovation Research Institute, г. Хельсинки, Финляндия; Осипов Г. С., д.ф.-м.н., проф., ФИЦ ИУ РАН; Пузынин И. В., д.ф.-м.н., проф., ЛИТ ОИЯИ; Пшеничников А. П., к.т.н., проф., МТУСИ; Ромашкова О. Н., д.т.н., проф., МГПУ; Севастьянов А. Л., к.ф.-м.н., РУДН; Степанов С. Н., д.т.н., проф., МТУСИ; Стрельцова О. И., к.ф.-м.н., с.н.с., ЛИТ ОИЯИ; Сущенко С. П., д.т.н., проф., ТГУ; Хачумов В. М., д.т.н., проф., ФИЦ ИУ РАН; Цирулев А. Н., д.ф.-м.н., проф., ТвГУ; Цитович И. И., д.ф.-м.н., доцент, ИППИ РАН; Чулуунбаатар О., д.ф.-м.н., ЛИТ ОИЯИ; Шоргин С. Я., д.ф.-м.н., проф., ФИЦ ИУ РАН; Щетинин Е. Ю., д.ф.-м.н., проф., СТАНКИН.

Оргкомитет:

Председатель: Васильев С. А., к.ф.-м.н. (РУДН).

Зам. председателя: Диваков Д. В. (РУДН); Острикова Д. Ю., к.ф.-м.н. (РУДН); Соченков И. В., к.ф.-м.н. (РУДН); Стрельцова О. И., к.ф.-м.н., с.н.с. (ЛИТ ОИЯИ).

Члены оргкомитета: Никитина Е. В., к.х.н., зам. декана по науке (РУДН); Малых М. Д., к.ф.-м.н. (РУДН); Демидова А. В., к.ф.-м.н. (РУДН); Тютюнник А. А. (РУДН).

Секции:

Теория телетрафика и ее применения

Сопредседатели: д.т.н., проф. Башарин Г. П. (РУДН), к.т.н., проф. Пшеничников А. П. (МТУСИ), к.ф.-м.н. доцент Гудкова И. А. (РУДН).

Секретарь: к.ф.-м.н. Острикова Д. Ю. (РУДН).

Сети связи следующего поколения: управление, качество, архитектура

Сопредседатели: д.т.н., проф. Самуйлов К. Е. (РУДН), д.т.н., проф. Вишневский В. М. (ИПУ РАН), к.ф.-м.н., доцент Гайдамака Ю. В. (РУДН).

Секретарь: Горбунова А. В. (РУДН).

Прикладные информационные системы

Сопредседатели: д.ф.-м.н., проф. Осипов Г. С. (ФИЦ ИУ РАН), проф. Толмачев И. Л. (РУДН).

Секретарь: Новикова Д. С. (РУДН).

Высокопроизводительные технологии распределенных вычислений

Сопредседатели: д.т.н., проф. Кореньков В. В. (ЛИТ ОИЯИ), к.ф.-м.н., доцент Кулябов Д. С. (РУДН).

Секретарь: к.ф.-м.н. Демидова А. В. (РУДН).

Математическое моделирование

Сопредседатели: д.ф.-м.н., проф. Севастьянов Л. А. (РУДН), д.ф.-м.н., проф. Крынев А. В. (НИЯУ «МИФИ»), к.ф.-м.н., проф. Дружинина О. В. (ФИЦ ИУ РАН).

Секретарь: к.ф.-м.н. Демидова А. В. (РУДН).

И74

Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологических систем : материалы Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 24–28 апреля 2017 г. — Москва : РУДН, 2017. — 370 с. : ил.

ISBN 978-5-209-07913-2

© Коллектив авторов, 2017

© Российский университет дружбы народов, 2017

Содержание

Теория телетрафика и её применения

Берснев Г. Б., Воронков С. С. Исследование потоков графических данных в трафике компьютерного класса	10
Ботвинко А. Ю. Оптимизация набора правил фильтрации в межсетевых экранах	13
Васильев А. П. Построение и анализ модели с динамическим распределением канально-го ресурса при обслуживании трафика реального времени и эластичного трафика данных	15
Журко А. М., Степанов М. С., Степанов С. Н. Построение и анализ модели call-центра с учетом навыков операторов и нетерпеливости абонентов	18
Заринова Э. Р., Чухно Н. В., Чухно О. В. Разработка математической модели бизнес-процесса телекоммуникационной компании	21
Зарядов И. С., Богданова Е. В., Милованова Т. А. Характеристики системы массового обслуживания с обновлением и рекуррентным обслуживанием по вложенной цепи Маркова	24
Иванова Д. В., Карнаухова Е. А., Гольская А. А., Маркова Е. В. Марковская модель схемы совместного использования ресурсов со снижением скорости обслуживания в беспроводной сети	27
Калинина К. А. О случайном суммировании нагрузки при оценивании эффективной пропускной способности узла высокоответственной сети	30
Киселева К. М. Исследование некоторых нестационарных моделей массового обслуживания, описываемых неоднородными марковскими цепями с непрерывным временем	33
Кутбитдинов С. Ш., Лохмотко В. В. Асимптотическая модель сбалансированной IP-сети с распределенной структурой.	35
Мокров Е. В., Полуэктов Д. С., Гудкова И. А. Вероятностная модель загрузки данных подвижному устройству в беспроводной сети LTE	38
Назаров А. А., Бронер В. И. Модифицированная модель Крамера-Лундберга с релейным управлением поступлением ресурса	41
Полуэктов Д. С., Мокров Е. В. Анализ времени ожидания доступа к ресурсам совместного использования в модели с эластичным трафиком и прерыванием обслуживания	44
Потатуева В. В., Лисовская Е. Ю., Моисеева С. П. Асимптотический анализ системы MPP[GI] ∞ с заявками случайного объема	47
Сарайкин И. В. Бизнес-процесс оказания услуг профессиональной видеосъемки и монтажа как сеть массового обслуживания	50
Сопин Э. С., Самуйлов К. Е. Рекуррентный алгоритм вычисления вероятностных характеристик для СМО с ограниченными ресурсами и случайными требованиями	52
Уанкло Г. Ж. К., Козырев Д. В. Анализ чувствительности характеристик надёжности модели резервирования системы передачи данных к виду распределений времени безотказной работы и ремонта её элементов	55
Фёдорова Е. А. Исследование RQ-системы M M 1 с нетерпеливыми заявками в условии большой загрузки	59
Филонец Т. А. Моделирование телеграфного процесса	63
Цурлуков В. В., Крупко О. С., Зарядов И. С. Входящий поток, управляемый цепью Маркова (ММАР). Использование в задачах теории телетрафика	66

Чукарин А. В., Зарипова Э. Р., Смирнова Н. М. Моделирование семи эталонных клиентоориентированных бизнес-процессов телекоммуникационной компании	69
Шкленник М. А., Моисеева С. П. Исследование суммарного потока обращений в неоднородной системе массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств и повторными обращениями	72
Штыкова Е. Н. Анализ марковских сетей с доходами, положительными и отрицательными заявками	75

Сети связи следующего поколения: управление, качество, архитектура

Абаев П. О. Угрозы безопасности в программно-конфигурируемых сетях	77
Абаев П. О., Царев А. С., Леон Агупанья М. К. Модель для анализа показателей эффективности виртуальных сетевых функций в 5G сетях	80
Агеев К. А., Сопин Э. С. Дискретизация функции распределения требований к ресурсу для анализа характеристик M2M трафика	83
Адаму А., Медведева Е. Г., Гайдамака Ю. В. К анализу характеристик туманно-облачных вычислений	86
Андреев С. Д. О причинах и последствиях технологической фрагментации современного интернета вещей	89
Ардилла Пинто А. Процедура установления соединения по каналу случайного доступа	92
Ардилла Пинто А., Семенова О. В., Власкина А. С., Зарипова Э. Р., Гудкова И. А. К разработке имитационной модели схемы установления соединения по каналу случайного доступа	95
Бегишев В. О., Молчанов Д. А., Самуйлов А. К. Анализ сотовой технологии интернета вещей NarrowBand IoT	98
Бесчастный В. А. Дискретная модель с групповым обслуживанием для анализа схемы доступа транспортных средств к ресурсам беспроводной сети	101
Власкина А. С., Семенова О. В., Гудкова И. А. Об алгоритме использования технологий мультимедиа и прямого взаимодействия устройств для передачи данных в беспроводной сети	104
Волков А. С., Бахтин А. А., Миронов А. В., Солодков А. В., Кульпина Ю. А. Применение широкополосных сигналов в сетях MANET	107
Гайдамака Ю. В., Жданков А. Н. Алгоритм моделирования расположения взаимодействующих устройств для оценки интерференции в сетях беспроводной связи	110
Гайдамака Ю. В., Русина Н. В., Фомченко Т. Д., Цветкова О. О. Алгоритм расчета вероятности блокировки заявок на узлах пассивной оптической сети	113
Гудкова И. А., Самуйлов К. Е. К разработке модели схемы совместного доступа к ресурсам беспроводной сети с адаптивной скоростью обслуживания пользователей	116
Дараселлия А. В., Сопин Э. С. Анализ энергопотребления системы облачных вычислений с учетом разогрева и выключения серверов	119
Дзантиев И. Л., Харин П. А., Маркова Е. В., Гудкова И. А. К разработке вероятностной модели затухания сигнала в беспроводной сети с разноудаленными от базовой станции и разновысокими устройствами	122
Ибрагимов Б. Г., Гасанов М. Г., Керимов В. Р. К анализу показателей эффективности функционирования сетей NGN/IMS при оказании мультимедийных услуг	124

Ибрагимов Б. Г., Гумбатов Р. Т., Ибрагимов Р. Ф. Исследование эффективности интеллектуальной сети связи при установлении соединения	127
Мащевич И. А., Самуйлов К. Е. Модель разделения нагрузки в системах туманных вычислений	130
Мачнев Е. А., Полужков Д. С., Мокров Е. В. К разработке мобильного приложения для измерения качества радиоканала и моментов совершения хэндовера в беспроводной сети LTE	133
Осипов О. А. Построение модели системы распределённых вычислений в виде системы массового обслуживания с делением и слиянием требований	135
Саркер М., Острикова Д. Ю. К анализу вероятностных характеристик процедуры веб-браузинга в условиях ненадежности ресурсов беспроводной сети	137

Прикладные информационные системы и технологии

Данилов И. Д. Программная реализация графического интерфейса, направленного на моделирование инвестиционных проектов	140
Докучаев Д. А. Методы решения задач распознавания изображений	143
Жарикова С.-Н. А. Тематическая кластеризация новостных сообщений	147
Исаев А. А. Выделение параметров для обучения ЭС, решающей задачи ТОРО	150
Каменская М. А., Храмоин И. В. Разрешение референции в текстах на русском языке	153
Карпов А. В., Деникин А. С., Наumenко М. А., Алексеев А. П., Рачков В. А., Самарин В. В., Сайко В. В. Сетевая база знаний NRV по ядерной физике низких энергий	156
Кулзак О. Д. Д. Интеллектуальный анализ клинических данных	159
Лорян К. А., Иванов В. Е. Расширение функциональности партионного учета себестоимости в среде 1С: Предприятие	161
Лукина М. С. Экспериментальные исследования задачи планирования траектории на картах специального вида	164
Панкратов А. С., Мазри А. Построение интегрированной информационной системы, объединяющей базы данных компаний, обеспечивающих грузоперевозки	167
Панкратов А. С., Пшеунов А. Х. Построение интегрированной информационной системы, объединяющей транспортные расписания	170
Сарибекян М. А. Исследование зависимости основных макроэкономических показателей Российской Федерации с помощью корреляционно-регрессионного анализа	173
Симон К. К. Сетевая защита с помощью средства машинного обучения	176
Соколова Т. А. Методы автоматического извлечения и сегментации библиографических ссылок из научных текстов	179
Хамбикова Г. М. Разработка метода интеллектуального анализа социально-экономических данных	182
Харитонов А. С., Жуков В. В. Сравнительный анализ статистических систем, используемых при проведении клинических и биомедицинских исследований	185
Хасаншина А. Д. Анализ методов разработки диалоговых систем	188
Фомин М. Б. Использование тестовых данных в процессе описания метаданных многомерных информационных систем	191

Черчик К., Меняшина А. Ю., Толмачев И. Л. Технология автоматизации документо-оборота	194
Шагаев Е. А. Структуры данных для хранения больших массивов данных и алгоритмы быстрого доступа к ним	197

Высокопроизводительные технологии распределённых вычислений

Адам Г., Беляков Д. В., Валя М., Зрелов П. В., Кореньков В. В., Матвеев М. А., Подгайный Д. В., Стрельцова О. И. Расширение функциональных возможностей гетерогенного кластера HybriLIT	200
Адам Г., Вальова Л., Валя М., Заикина Т. Н., Киракосян М. Х., Кутовский Н. А., Федоров К. В., Подгайный Д. В., Стрельцов А. И., Стрельцова О. И., Торосян Ш. Г. Новые компоненты программно-информационной среды гетерогенного кластера hybriLit	203
Александров Е. И., Башашин М. В., Беляков Д. В., Волохова А. В., Земляная Е. В., Зуев М. И., Кутовский Н. А., Матвеев М. А., Нечаевский А. В., Ососков Г. А., Подгайный Д. В., Рахмонов И. Р., Стрельцова О. И., Трофимов В. В., Шукринов Ю. М. Исследование эффективности MPI-расчетов на облачной и гетерогенной инфраструктурах МИВК ОИЯИ	206
Валя М., Майоров А. В., Бутенко Ю. А. Развитие сервиса Stat-HybriLIT для гетерогенного кластера HybriLIT	209
Зуев М. И., Башашин М. В., Беляков Д. В., Кутовский Н. А., Матвеев М. А., Подгайный Д. В., Стрельцова О. И. Тестовый полигон для исследования эффективности проведения параллельных расчетов на облачной и гетерогенной вычислительных системах	212
Кулябов Д. С., Геворкян М. Н., Королькова А. В., Севастьянов Л. А. О поддержке параллельных вычислений в языке Julia	215
Кутовский Н. А., Нечаевский А. В., Ососков Г. А., Пряхина Д. И., Трофимов В. В. Моделирование MPI-приложений, выполняемых на гетерогенных вычислительных ресурсах	218
Мажитова Е. М., Балашов Н. А., Баранов А. В., Кутовский Н. А., Семенов Р. Н. Использование облачных технологий в ЛИТ ОИЯИ	221
Никонов Э. Г., Казаков Д. С. Механизм управления процессом сходимости итерационного метода Ньютона	224
Федосов М. Е., Коробов Н. А., Назаренко К. М. Оценка временных характеристик вычислительных экспериментов с использованием квантово-химических методов	227

Математическое моделирование

Агавелян Г. В. Формирование инвестиционного портфеля по модели Г. Марковица	229
Аль-Натор М. С. Задача выбора оптимального портфеля с двусторонними ограничениями и с комиссией в условиях определенности	232
Аль-Натор С. В., Новиченкова М. Г. Хеджирование фьючерсными контрактами в нефтегазовой отрасли РФ	235
Амирханов И. В., Доля С. Н., Сархадов И. Математическое моделирование движения протонов в сильноточном линейном ускорителе	238
Амирханов И. В., Саркар Н. Р. Об одном методе исследования нелинейной самосоглазованной задачи на собственные значения с растущим потенциалом нечетной степени	241

Бугрий Г. С., Пономаренко Е. Ю. Об обратной задаче потенциала для тела постоянной толщины в слоистой среде	244
Будочкина С. А. Гамильтоновы и Гамильтона-допустимые уравнения, скобки Пуассона и алгебраические структуры в механике бесконечномерных систем	246
Велиева Т. Р., Королькова А. В., Кулябов Д. С. Гармоническая линеаризация модели системы с управлением	249
Велиева Т. Р., Платонова А. А. Программный комплекс определения значений параметров автоколебательного режима в системах с управлением	252
Веселов А. В. Вычисление нормали к поверхности, заданной приближенно	256
Вiana И. К., Зарядов И. С. Применение марковских моделей для анализа страховых компаний	258
Диваков Д. В., Древицкий А. С. Задача численного моделирования распространения волноводных мод в регулярном однородном открытом волноводе	261
Дружинина О. В., Масина О. Н. Анализ устойчивости многомерных моделей динамики популяций на основе принципа редукции	264
Емельянова Е. Ю., Исмаилов И. И., Петров В. А., Попова Е. В., Савин А. С., Хохлов А. А. К задаче анализа состава тела человека	268
Ермачкова А. В., Пономаренко Е. Ю. Об обратной задаче потенциала для бесконечно тонкого тела в слоистой среде	271
Ефрина Е. Г., Кулябов Д. С. Элементы диаграммной техники для статистических моделей	273
Завозина А. В., Мухина Д. Б. Применение метода гармонической линеаризации для определения значений параметров автоколебательного режима в системах с управлением	276
Зайцева А. А., Зарядов И. С. Цепи Маркова высшего порядка, их применение и построение в R	280
Иванов В. В., Крянев А. В., Осетров Е. С. Прогнозирование суточного потребления электроэнергии в Московском регионе на основе сингулярно-спектрального анализа	283
Иванов В. В., Крянев А. В., Севастьянов Л. А., Удумян Д. К. Прогнозирование временных рядов с помощью метрического анализа	286
Камнев А. В. Имитационное моделирование алгоритмов с управлением	289
Карамышева А. В., Шипова Е. П. Прогнозирование расходов пенсионного фонда России при увеличении пенсионного возраста	292
Касимов Ю. Ф. Риск менеджмент позиций в однопериодных финансовых сделках	295
Керимов А. К., Марченко М. Н. Стохастическое моделирование влияния метеофакторов на результаты электрометрического мониторинга	298
Крянев А. В., Орехов А. А., Пинегин А. А., Семенов С. В., Удумян Д. К. Моделирование ксеноновых переходных процессов на основе данных реакторных экспериментов и метрического анализа	301
Кузв Я. Ю. Прямая реализация псевдоспектрального метода вычисления волноводных мод	304
Кулябов Д. С., Геворкян М. Н., Королькова А. В., Демидова А. В. Стохастическое моделирование ветроэнергетических установок	307
Ломидзе И. Р., Евлахов С. А. Об одноом методе классификации эрмитовых матриц по унитарным инвариантам	309

Малькова А. М., Зарядов И. С. Скрытые марковские модели, их применение и моделирование в пакете R	310
Матюшенко С. И., Сухина Ю. И. Эконометрическое моделирование зависимости между спросом и предложением на рынке дизельного топлива	313
Михеев А. В. Механизмы управления риском страховых исков	316
Мусаев В. К. Математическое моделирование динамических упругих напряжений в полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) с помощью волновой теории сейсмической безопасности	319
Мусаев В. К. Численное моделирование динамических упругих напряжений в полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) с помощью волновой теории взрывной безопасности	322
Нсамо В. Д., Мануэль М. А., Бенто А. Э., Гаспар С., Маршалл О. И. Р. Реализация генераторов псевдослучайных чисел на языке Julia	325
Пермякова Ю. С. Оценка и анализ стабильности финансового состояния страховой компании	327
Петров А. А. Алгоритмы поиска оптимальных траекторий для моделей управляемых технических систем	330
Полуян С. В., Ершов Н. М. Разработка эффективных алгоритмов биоинформатики на основе решения модельной задачи укладки графов	333
Пузынин И. В., Пузынина Т. П., Христов И. Г., Христова Р. Д., Тухлиев З. К., Шарипов З. А. Развитие непрерывно-атомистического метода для моделирования процессов взаимодействия тяжелых ионов высоких энергий с конденсированными средами	336
Стародубцев В. В., Мусаев А. В., Дикова Е. В., Крылов А. И. Моделирование достоверности и точности импульсного воздействия в упругой полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В. К.	339
Сучков Д. А., Перепелкин Е. Е. Исследование энтропии систем многих частиц в неравновесных процессах	342
Талагаев Ю. В. Стабилизация класса 3D хаотических систем, представленного нечеткой моделью Такаги-Сугено.	343
Тарелкин А. А., Перепелкин Е. Е. Исследование поведения решения нелинейного уравнения дивергентного типа	346
Третьяков Н. П., Кафарова М. В., Кафаров Р. Р. Оптимизация объема властных полномочий по критерию удельного потребления	348
Федоров А. Л., Шиянов С. М., Саликов Л. М., Блинные В. В. Моделирование плоских волн при распространении импульса (восходящая часть – линейная, нисходящая часть – четверть круга) в упругой полуплоскости с помощью комплекса программ Мусаева В. К.	353
Хведелидзе А. М., Рогожин И. А. Генерация ансамблей Гильберта–Шмидта и Бура для пар кубитов и кутиров	356
Цыганкова В. С. Реализация генераторов стохастических процессов.	358
Щербаков А. В. Анализ устойчивости нелинейной модели популяционной динамики на основе свойств дивергенции поля скоростей	360
Щетинин Е. Ю., Мартынова В. М. О моделировании пространственных структур статистической зависимости экстремальных осадков	363

ЭЛЕМЕНТЫ ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ефери́на Е. Г., Куля́бов Д. С.

Российский университет дружбы народов,
eg.eferinal@gmail.com, kulyabov_ds@rudn.university

Описывается диаграммная техника, которая позволяет формализовать и использовать несколько подходов стохастизации одношаговых процессов.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, основное кинетическое уравнение, диаграммная техника, диаграммы Фейнмана.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 14-01-00628, 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 02.A03.21.0008).

Введение

Диаграммная методика представляет собой набор правил, по которым исходя из начальной задачи, формализованной как одношаговые процессы, строятся диаграммы. Каждый элемент диаграммы несет фактор и дает определенный вклад, что позволяет легко получить модельные уравнения, не производя никаких вычислений, а имея лишь постановку задачи.

Когда модель записана в виде одношаговых процессов, следует далее формализовать этот процесс в виде схем взаимодействия. Каждой схеме взаимодействия приписывается собственная семантика. Эта семантика приводит непосредственно к основному кинетическому уравнению. Однако основное кинетическое уравнение [1, 2] имеет обычно достаточно сложную структуру, что затрудняет его решение и исследование.

Тогда при исследовании возможны два пути:

- вычислительный подход — решение основного кинетического уравнения, например по теории возмущений [3];
- модельный подход — получение приближённых моделей в виде уравнений Фоккера-Планка и Ланжевена.

Вычислительный подход позволяет получать конкретное решение для изучаемой модели. Модельный подход дает возможность получить модели, которые удобно исследовать численно и качественно.

Диаграммная техника

Опишем предлагаемую нами диаграммную технику для стохастизации одношаговых процессов. Одношаговые процессы будем описывать с помощью схем взаимодействия:

$$I_j^{i\alpha} \varphi^j \delta_i \xrightarrow{+k_{\alpha}} F_j^{i\alpha} \varphi^j \delta_i. \quad (1)$$

Будем записывать схемы взаимодействия в виде диаграмм. Каждой схеме взаимодействия (1) соответствует пара диаграмм (рис. 1,2) для прямого и обратного взаимодействия соответственно.

$$I\varphi \longrightarrow \cdots \xrightarrow{+k} \cdots \longrightarrow F\varphi$$

Рис. 1. Прямое взаимодействие

$$I\varphi \longleftarrow \cdots \xleftarrow{-k} \cdots \longleftarrow F\varphi$$

Рис. 2. Обратное взаимодействие

Диаграмма состоит из следующих элементов.

- Входящие линии (на рис. 1 обозначено сплошной линией). Эти линии направлены к линии взаимодействия. Линия помечается количеством и типом взаимодействующих сущностей. Можно записывать по одной сущности на линию или группировать их.

– Исходящие линии (на рис. 1 обозначено сплошной линией). Эти линии направлены от линии взаимодействия. Линия помечается количеством и типом взаимодействующих сущностей. Можно записывать по одной сущности на линию или группировать их.

– Линия взаимодействия (на рис. 1 обозначено пунктирной линией). Направление времени обозначено стрелкой. Линия помечается коэффициентом интенсивности взаимодействия.

Каждой линии приписывается определённый фактор, а результирующее выражение получается перемножением этих факторов.

При применении операторного подхода с помощью диаграмм взаимодействия мы получаем оператор Лиувилля. Каждой линии присвоим соответствующий фактор. Результирующий членом будет получен из нормального произведения факторов.

Будем использовать следующие факторы для каждого типа линий (рис. 3, 4).

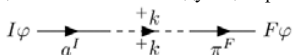


Рис. 3. Прямое взаимодействие
(операторный подход)



Рис. 4. Обратное взаимодействие
(операторный подход)

– Входящая линия. Линия соответствует выводу одной сущности из системы. Следовательно, ей соответствует оператор уничтожения a . Очевидно, что комбинированной линии мощности I соответствует оператор a^I .

– Исходящая линия. Линия соответствует появлению в системе новой сущности. Следовательно, ей соответствует оператор рождения π . Очевидно, что комбинированной линии мощности F соответствует оператор π^F .

– Линия взаимодействия. Этой линии соответствует собственно коэффициент интенсивности взаимодействия.

То есть, для диаграммы мы получим фактор $+k\pi^F a^I$. Однако при этом нарушается соотношение, задающее изменение состояния. Чтобы исправить такое положение, мы должны вычесть количество сущностей, вступивших во взаимодействие, помноженное на интенсивность взаимодействия. Тогда получим следующий член оператора Лиувилля:

$$+k\pi^F a^I - +k\pi^I a^I = +k(\pi^F - \pi^I) a^I. \quad (2)$$

Для обратных взаимодействий (рис. 3) используются эти же правила.

Для учёта дополнительного фактора (2) будем использовать расширенные диаграммы (см. рис. 4). Здесь из нормального произведения числителей вычитается нормальное произведение знаменателей. Таким образом, схеме (1) соответствует оператор Лиувилля:

$$L = \sum_{\alpha, i} \left[+k_{\alpha} \left((\pi_i)^{F_{i\alpha}} - (\pi_i)^{I_{i\alpha}} \right) (\alpha_i)^{I_{i\alpha}} + -k_{\alpha} \left((\pi_i)^{I_{i\alpha}} - (\pi_i)^{F_{i\alpha}} \right) (\alpha_i)^{F_{i\alpha}} \right].$$

Комбинаторный подход мы используем для получения основного кинетического уравнения в представлении векторов состояния. В этом подходе с помощью диаграмм мы получаем интенсивности перехода. Они, как и в случае операторного подхода, получают путём перемножения факторов диаграммы.

Однако, структура основного кинетического уравнения сложнее, чем оператор Лиувилля. В представлении векторов состояния присутствуют аддитивные члены в аргументах функций. Поэтому мы не можем использовать лишь произведением факторов.

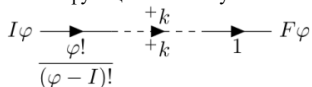


Рис. 5. Прямое взаимодействие
(комбинаторный подход)

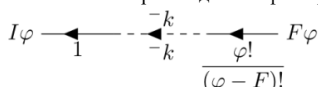


Рис. 6. Обратное взаимодействие
(комбинаторный подход)

Будем использовать следующие факторы для каждого типа линий.

– Входящая линия. Если все линии соответствуют разным векторам состояний, то фактором каждой линии будет соответствующий ей вектор состояний. Если же присутствуют несколько линий, соответствующих одному вектору состояний, то первой линии соответствует собственно вектор состояния (φ), второй линии соответствует значение $\varphi - I$, поскольку первая линия уменьшила количество сущностей данного типа в системе на единицу, и так далее. То есть для комбинированной линии можно записать фактор в следующем виде:

$$\frac{\varphi!}{(\varphi - I)!}$$

– Исходящая линия. Не даёт мультипликативного вклада. Однако служит для получения коэффициента шага r :

$$r = F - I.$$

– Линия взаимодействия. Этой линии соответствует собственно коэффициент интенсивности взаимодействия. Кроме того, нам понадобятся учитывать интенсивности перехода для предыдущего и последующего шагов:

Для обратных взаимодействий (рис. 6) используются эти же правила.

Выводы

Описана диаграммная техника стохастизации одношаговых процессов, показано формализация на примере комбинаторного и операторного процессов.

Литература

1. Demidova A.V., Korolkova A.V., Kulyabov D.S., Sevastianov L.A. The method of stochastization of one-step processes // *Mathematical Modeling and Computational Physics*. – Dubna : JINR, 2013. – P. 67.
2. Korolkova A.V., Eferina E.G., Laneev E.B. et al. Stochastization of one-step processes in the occupations number representation // *Proceedings – 30th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2016*. – 2016. – Pp. 698-704.
3. Hnatic M, Eferina E.G., Korolkova A.V., Kulyabov D.S. et al. Operator Approach to the Master Equation for the One-Step Processes // *EPJ Web Conferences*. – 2016. – Vol. 108. – P. 02027. – 1603.02205.

ELEMENTS OF THE DIAGRAM TECHNIQUE FOR STATISTICAL MODELS

Eferina E.G., Kulyabov D.S.

*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
eg.eferinal@gmail.com, kulyabov_ds@rudn.university*

We describe an diagram technique that allows to formalise and use several stochastisation approaches for one-step processes.

Key words: stochastic differential equations; a master equation; a diagrammatic technique, Feynman diagrams.

The work is partially supported by RFBR grants No's 14-01-00628, 15-07-08795 and 16-07-00556. Also the publication was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement No 02.A03.21.0008).