ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.6
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-279-289

Поступила в редакцию 22.02.2018
Received 22.02.2018

Э. А. Айрян[1], А. Д. Егоров[2], Д. С. Кулябов[1,3], В. Б. Малютин[2], Л. А. Севастьянов[1,3]

[1]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия
[2]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[3]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматриваются системы стохастических дифференциальных уравнений, для которых риманово многообразие, порождаемое диффузионной матрицей, имеет нулевую кривизну. Предлагается метод вычисления характеристик решения рассматриваемых систем стохастических дифференциальных уравнений, который основывается на представлении функции плотности вероятности перехода через функциональный интеграл. Для вычисления возникающих функциональных интегралов используется разложение действия относительно классической траектории, для которой действие принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение многомерного уравнения Эйлера – Лагранжа.

Ключевые слова: системы стохастических дифференциальных уравнений, Onsager–Machlup функционалы, функциональные интегралы

Для цитирования. Метод функциональных интегралов для систем стохастических дифференциальных уравнений / Э. А. Айрян [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 279–289. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-279-289

E. A. Ayryan[1], A. D. Egorov[2], D. S. Kulyabov[1,3], V. B. Malyutin[2], L. A. Sevastyanov[1,3]

[1]Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[3]RUDN University, Moscow, Russia

FUNCTIONAL INTEGRALS METHOD FOR SYSTEMS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. Systems of stochastic differential equations, for which the Riemannian manifold generated by a diffusion matrix has zero curvature, are considered in this article. The method for approximate evaluation of characteristics of the solution of the systems of stochastic differential equations is proposed. This method is based on the representation of the probability density function through the functional integral. To compute functional integrals we use the expansion of action with respect to a classical trajectory, for which the action takes an extreme value. The classical trajectory is found as the solution of the multidimensional Euler – Lagrange equation.

Keywords: systems of stochastic differential equations, Onsager – Machlup functionals, functional integrals

For citation. Ayryan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastyanov L. A. Functional integrals method for systems of stochastic differential equations. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 279–289 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-279-289

Введение. Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) широко используются в физике, химии, биологии и т. д. [1, 2]. В настоящее время существует большое количество литературных источников, в которых рассматриваются определения, свойства, задачи и применение СДУ [1–3]. Основная задача теории СДУ – найти решение уравнения или характеристики этого решения (функция вероятности перехода, математическое ожидание, моменты высоких порядков). Так как только некоторые специальные типы стохастических дифференциальных уравнений могут быть решены аналитически, на практике применяются численные методы их решения. Наиболее распространенные численные методы основываются на дискретизации временного интервала и численного моделирования решения СДУ в дискретные моменты времени [4–6]. В данной работе предлагается использовать представление функции плотности вероятности перехода (ФПВП) для решения СДУ через функциональный интеграл и методы приближенного вычисления возникающих функциональных интегралов. Для того чтобы записать ФПВП в виде функционального интеграла, используется техника Onsager – Machlup функционалов [7–12]. Этот подход был рассмотрен в [13] для одномерного случая, в данной работе он применяется для системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dx_1(t) = \alpha_1(\vec{x},t)dt + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{1j}(\vec{x},t)dw_j(t), \\ \qquad \dots \\ dx_n(t) = \alpha_n(\vec{x},t)dt + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{nj}(\vec{x},t)dw_j(t), \end{cases} \tag{1}$$

с начальным условием $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$.

Систему уравнений (1) можно записать в виде

$$dx^i = \alpha^i(x)dt + g_a^i(x)dw^a,$$

где x – n-мерный вектор состояний системы, w – m-мерный винеровский процесс, $g_{ia} \in R_n \times R_m$. Здесь латинскими индексами из середины алфавита обозначаются величины, относящиеся к векторам состояний (размерность пространства n), а латинскими индексами из начала алфавита обозначаются величины, относящиеся к вектору винеровского процесса (обычно размерность пространства $m \le n$). Матрица g_{ia} имеет размерность $m \times n$ и связывает пространство векторов состояния и пространство винеровских процессов, а риманово многообразие порождается метрическим тензором $G^{ij} = g_a^i g^{ja}$.

Представление функции плотности вероятности перехода через функциональный интеграл в случае произвольного риманова многообразия, порождаемого метрическим тензором G^{ij}, изучается в [11, 12]. Мы исследуем случай, когда риманово многообразие, порождаемое метрическим тензором G^{ij}, имеет нулевую кривизну, но рассматриваем как представление ФПВП через функциональный интеграл, так и методы приближенного вычисления возникающих функциональных интегралов. В разделе 1 рассматривается представление величин с помощью функционального интеграла, в разделе 2 – метод вычисления возникающих функциональных интегралов. Этот метод основывается на выделении из всех возможных траекторий классической траектории $\vec{y}_{\text{кл}}$, для которой действие S принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение многомерного уравнения Эйлера – Лагранжа. Затем для вычисления интеграла используется разложение действия S относительно классической траектории $\vec{y}_{\text{кл}}$. В разделе 3 с помощью предложенного метода вычисляются приближенные значения математического ожидания от некоторых функционалов от решения конкретной системы стохастических дифференциальных уравнений.

1. Представление величин с помощью функционального интеграла. В случае схемы Ито и функций α_j, g_{ij}, не зависящих от времени t, с помощью техники Onsager – Machlup функционалов ФПВП $p(\vec{x}_i, t_{i-1} + \Delta t, \vec{x}_{i-1}, t_{i-1})$ на малом промежутке времени Δt может быть записана в виде [8, 10]

$$p(\vec{x}_i, t_{i-1} + \Delta t, \vec{x}_{i-1}, t_{i-1}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^{\,n} \sqrt{\det G(\vec{x}_{i-1}, t_{i-1})}} \exp\left\{-S_0(\vec{x}_i, t_{i-1} + \Delta t, \vec{x}_{i-1}, t_{i-1})\right\}, \tag{2}$$

где

$$G_{ij}(\vec{y},t) = \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\vec{y},t) g_{jk}(\vec{y},t),$$

$$S_0(\vec{x}_i, t_{i-1} + \Delta t, \vec{x}_{i-1}, t_{i-1}) = \frac{1}{2\Delta t} \sum_{k,j=1}^{n} G_{kj}^{-1}(\vec{x}_{i-1}, t_{i-1}) \Big[\Delta x_k - A_k(\vec{x}_{i-1}, t_{i-1})\Delta t\Big]\Big[\Delta x_j - A_j(\vec{x}_{i-1}, t_{i-1})\Delta t\Big],$$

$$A_k(\vec{y},t)=\alpha_k(\vec{y},t)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}g_{ij}(\vec{y},t)\frac{\partial}{\partial y_i}g_{kj}(\vec{y},t).$$

Выражение (2) для ФПВП на малом промежутке времени Δt верно с точностью до слагаемых, имеющих относительно Δt порядок не выше первого.

$G_{ij}(\vec{y},t)$ можно интерпретировать как метрический тензор риманова многообразия [8] с кривизной, определяемой через символы Кристоффеля. Мы будем рассматривать случай плоского пространства, т. е. пространства с нулевой кривизной.

Используя выражение (2), можно записать ФПВП в виде

$$P(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)=\lim_{N\to\infty}\int\cdots\int\prod_{i=1}^{N-1}d\vec{x}_i\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^{\,n}\sqrt{\det G(\vec{x}_{i-1},t)}}\exp\left\{-\sum_{i=0}^{N-1}S_0(\vec{x}_{i+1},t_i+\Delta t,\vec{x}_i,t_i)\right\}. \quad (3)$$

В предельном случае формула (3) имеет вид

$$P(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)=Z[0]=\int D[\vec{x}]\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}L_0(\vec{x}(\tau),\dot{\vec{x}}(\tau))d\tau\right\}, \quad (4)$$

где

$$D[\vec{x}]=\lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N-1}d\vec{x}_i\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^{\,n}\sqrt{\det G(\vec{x}_{i-1},t_{i-1})}},$$

$$L_0\left(\vec{x}(\tau),\dot{\vec{x}}(\tau)\right)=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}G_{kj}^{-1}(\vec{x},\tau)\left[\dot{x}_k-A_k(\vec{x},\tau)\right]\left[\dot{x}_j-A_j(\vec{x},\tau)\right].$$

Выражение $D[\vec{x}]$ формально расходится и имеет смысл только вместе с экспонентой под знаком интеграла в (4), а строго математически функциональный интеграл в правой части равенства (4) определяется как предел интегралов конечной кратности. Функционал в показателе экспоненты в формуле (4) называется Onsager – Machlup функционалом.

Формулы вида (4) в случае интегрального представления ядра оператора эволюции называются формулами Фейнмана – Каца [14].

В качестве примера рассмотрим систему двух стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx_1(t)=\left(\alpha_1x_1+\gamma_1\sqrt{x_1x_2}+\beta_1\right)dt+\sigma_1\sqrt{x_1}\,dw_1(t),\\ dx_2(t)=\left(\alpha_2x_2+\gamma_2\sqrt{x_1x_2}+\beta_2\right)dt+\sigma_2\sqrt{x_2}\,dw_2(t). \end{cases} \quad (5)$$

Метрический тензор $G_{ij}(\vec{x},t)$, соответствующий уравнениям (5), определяется равенствами $G_{12}=G_{21}=0,\ G_{11}=\sigma_1^2x_1,\ G_{22}=\sigma_2^2x_2.$

Символы Кристоффеля определяются равенством

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=\frac{1}{2}G^{\delta\lambda}\left(\frac{\partial G_{\nu\delta}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial G_{\mu\delta}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial G_{\nu\mu}}{\partial x_\delta}\right).$$

Компоненты тензора кривизны определяются через символы Кристоффеля по формуле

$$R_{\mu\delta\nu}^{\lambda}=\partial_\nu\Gamma_{\mu\delta}^{\lambda}-\partial_\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}+\Gamma_{\mu\delta}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda}-\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\delta\eta}^{\lambda}.$$

Для уравнений (5), при $\lambda=\mu=\nu$, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=\frac{1}{2}G^{\lambda\lambda}\frac{\partial G_{\lambda\lambda}}{\partial x_\lambda}$. В остальных случаях $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=0$, поэтому $R_{\mu\delta\nu}^{\lambda}=0$.

Таким образом, риманово многообразие, порождаемое метрическим тензором G^{ij} для уравнений (5), имеет нулевую кривизну.

Для уравнений (5) ФПВП $P(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)$ определяется формулой (4), где

$$D[\vec{x}] = \lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^2\sqrt{\sigma_1^2 x_{1i-1}\sigma_{21}^2 x_{2i-1}}},$$

$$L_0\left(\vec{x}(\tau),\dot{\vec{x}}(\tau)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\sigma_k^2 x_k}\left[\dot{x}_k - A_k(\vec{x},\tau)\right]^2, \tag{6}$$

$$A_k(\vec{x},t) = \left(\alpha_k x_k + \gamma_k\sqrt{x_1 x_2} + \beta_k\right) - \frac{1}{2}g_k(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x_k}g_k(\vec{x},t) = \alpha_k x_k + \gamma_k\sqrt{x_1x_2} + \beta_k - \frac{1}{4}\sigma_1^2.$$

После замены переменных $y_k = \dfrac{2\sqrt{x_k}}{\sigma_k}$, $k = 1,2$, получим

$$P(\vec{y},t,\vec{y}_0,t_0) = \frac{2}{\sigma_1^2 y_1}\frac{2}{\sigma_2^2 y_2}\overline{Z}[0],\ \ y_{k0} = \frac{2\sqrt{x_{k0}}}{\sigma_k},\ k = 1,2,$$

$$\overline{Z}[0] = \int D[\vec{y}]\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} L_0(\vec{y}(\tau),\dot{\vec{y}}(\tau))d\tau\right\}, \tag{7}$$

$$D[\vec{y}] = \lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N-1} d\vec{y}_i\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^2},$$

$$L_0\left(\vec{y}(\tau),\dot{\vec{y}}(\tau)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left[\dot{y}_k - A_k(\vec{y},\tau)\right]^2, \tag{8}$$

$$A_k(\vec{y},t) = \frac{1}{2}\alpha_k y_k + \frac{1}{2}\gamma_k\frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k}y_{3-k} + \frac{4\beta_k - \sigma_k^2}{2\sigma_k^2 y_k},\ k = 1,2. \tag{9}$$

2. Вычисление функциональных интегралов. Перейдем к методу вычисления функциональных интегралов вида (4), (7). Функциональный интеграл в формулах (4), (7) – это интеграл по функциям или траекториям, удовлетворяющим некоторым начальным условиям. Выражение $L_0\left(\vec{y}(\tau),\dot{\vec{y}}(\tau)\right)$ в формуле (7) можно рассматривать как лагранжиан системы, а величину $S = \int_{t_0}^{t} L_0\left(\vec{y}(\tau),\dot{\vec{y}}(\tau)\right)d\tau$ – как действие. Используя принцип наименьшего действия [15], из всех возможных траекторий можно выделить классическую траекторию $\vec{y}_{\text{кл}}$, для которой действие S принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial\dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial x_k} = 0,\ \ 1\le k\le n.$$

Далее для вычисления интеграла можно использовать разложение действия S относительно классической траектории $\vec{y}_{\text{кл}}$:

$$S\left[\vec{y}(\tau)\right] \approx S\left[\vec{y}_{\text{кл}}(\tau)\right] + \frac{1}{2}\delta^2 S\left[\vec{y}_{\text{кл}}(\tau)\right].$$

Вариацию второго порядка $\delta^2 S[\vec{y}_{\text{кл}}(\tau)]$ можно записать в виде

$$\delta^2 S\left[\vec{y}_{\text{кл}}(\tau)\right] = \int_{t_0}^{t} \sum_{ij=1}^{n} \delta y_i \Lambda_{ij} \delta y_j d\tau,$$

где $\vec{y} = \vec{y}_{\text{кл}} + \delta\vec{y}$,

$$\Lambda_{ij} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j}\right)_{\vec{y}_{\text{кл}}} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial \dot{y}_j}\right)_{\vec{y}_{\text{кл}}} \frac{d}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_i \partial y_j}\right)_{\vec{y}_{\text{кл}}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j}\right)_{\vec{y}_{\text{кл}}} \frac{d}{dt}. \tag{10}$$

После этих преобразований интеграл (7) запишется в виде

$$\overline{Z}[0] = \int D[\vec{x}] \exp\left\{-S\left[\vec{y}_{\text{кл}}(\tau)\right] - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \vec{x}\Lambda\vec{x} d\tau\right\}, \tag{11}$$

где интегрирование выполняется по траекториям $\vec{x} = \delta\vec{y}$, удовлетворяющим условиям $\vec{x}(t_0) = 0, \vec{x}(t) = 0$, $D[\vec{x}] = \lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod\limits_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^2}$.

Для вычисления интеграла (11) используем разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j,$$

где функции u_j являются решениями задачи Штурма – Лиувилля, ассоциированной с оператором Λ, т. е.

$$\Lambda u_j = \lambda_j u_j, \tag{12}$$

$$\int_{t_0}^{t} u_j(\tau) u_i(\tau) d\tau = \delta_{ji},$$

$$u(t_0) = 0, u(t) = 0,$$

λ_j – собственные значения.

По аналогии с работами [9, 13, 15] интеграл (11) запишется в виде

$$\overline{Z}[0] = \exp\left\{-S\left[\vec{y}_{\text{кл}}(\tau)\right]\right\} \int D[\vec{x}] \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \vec{x}\Lambda_{\text{free}}\vec{x} d\tau\right\} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}, \tag{13}$$

где $\Lambda_{\text{free}} = -\begin{pmatrix} \dfrac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix}$, $\lambda_{\text{free},j}$ – собственные значения задачи Штурма – Лиувилля, ассоциированной с оператором Λ_{free}, λ_j – собственные значения задачи Штурма – Лиувилля, ассоциированной с оператором Λ. Поэтому

$$\int D[\vec{x}] \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \vec{x}\Lambda_{\text{free}}\vec{x} d\tau\right\} = \lim_{N\to\infty} \int \cdots \int \prod_{i=1}^{N-1} \frac{dx_{1i} dx_{2i}}{\sqrt{2\pi\Delta t}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^2} \exp\left\{-\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{2} \frac{(x_{ki+1} - x_{ki})^2}{2\Delta t}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}^2}. \tag{14}$$

Таким образом, из (13), (14) следует, что

$$\overline{Z}[0] = \exp\left\{-S\left[\vec{y}_{\text{кл}}(\tau)\right]\right\} \frac{1}{2\pi(t-t_0)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}. \tag{15}$$

Для системы уравнений (5) $L_0\left(\vec{y}(\tau), \dot{\vec{y}}(\tau)\right)$ определяется равенствами (8), (9). При $4\beta_k = \sigma_k^2$ траектория $\vec{y}_{\text{кл}}$ удовлетворяет уравнениям

$$\ddot{y}_{1\text{кл}}(\tau) - \frac{\alpha_1^2}{4} y_{1\text{кл}} - \left(\frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}\right)^2 y_{1\text{кл}} - \frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1}\dot{y}_{2\text{кл}} + \frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}\dot{y}_{2\text{кл}} - \frac{\alpha_1\gamma_1\sigma_2}{4\sigma_1} y_{2\text{кл}} - \frac{\alpha_2\gamma_2\sigma_1}{4\sigma_2} y_{2\text{кл}} = 0,$$

$$\ddot{y}_{2\text{кл}}(\tau) - \frac{\alpha_2^2}{4} y_{2\text{кл}} - \left(\frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1}\right)^2 y_{2\text{кл}} - \frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}\dot{y}_{1\text{кл}} + \frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1}\dot{y}_{1\text{кл}} - \frac{\alpha_1\gamma_1\sigma_2}{4\sigma_1} y_{1\text{кл}} - \frac{\alpha_2\gamma_2\sigma_1}{4\sigma_2} y_{1\text{кл}} = 0. \tag{16}$$

Находим приближенные значения функций $y_{1\text{кл}}(\tau), y_{2\text{кл}}(\tau), t_0 \le \tau \le t,$ решая уравнения (16) с помощью метода сеток для решения нелинейных граничных задач [16]. Для этого выбираем нулевые приближения $\vec{y}_{1\text{кл}}^{(0)} = \left(y_{1\text{кл}}^{(0)}(\tau_0),\dots,y_{1\text{кл}}^{(0)}(\tau_l)\right)^T$, $\vec{y}_{2\text{кл}}^{(0)} = \left(y_{2\text{кл}}^{(0)}(\tau_0),\dots,y_{2\text{кл}}^{(0)}(\tau_l)\right)^T$ для функций $y_{1\text{кл}}(\tau)$, $y_{2\text{кл}}(\tau)$. Здесь T – знак транспонирования, $y_{1\text{кл}}^{(0)}(\tau_k) = \frac{y_1 - y_{10}}{t-t_0}\tau_k + \frac{y_{10}t - y_1 t_0}{t-t_0}$, $y_{2\text{кл}}^{(0)}(\tau_k) = \frac{y_2 - y_{20}}{t-t_0}\tau_k + \frac{y_{20}t - y_2 t_0}{t-t_0}$, $\tau_k = t_0 + kh$, $h = \frac{t-t_0}{l}$, $k = 0,1,\dots,l$, $y_{10} = y_1(t_0)$, $y_1 = y_1(t)$, $y_{20} = y_2(t_0)$, $y_2 = y_2(t)$. Далее, решая системы уравнений

$$\overline{\Delta}\vec{y}_{1\text{кл}}^{(i+1)} = \vec{f}_1\left(\vec{y}_{1\text{кл}}^{(i)}, \vec{y}_{2\text{кл}}^{(i)}\right),$$

$$\overline{\Delta}\vec{y}_{2\text{кл}}^{(i+1)} = \vec{f}_2\left(\vec{y}_{1\text{кл}}^{(i)}, \vec{y}_{2\text{кл}}^{(i)}\right)$$

по i-му приближению $y_{1\text{кл}}^{(i)}, y_{2\text{кл}}^{(i)}$, вычисляем $(i+1)$-е приближение $y_{1\text{кл}}^{(i+1)}, y_{2\text{кл}}^{(i+1)}$:

$$\overline{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h^{-2} & -2h^{-2} & h^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & h^{-2} & -2h^{-2} & h^{-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}_1 = (f_{10},\dots,f_{1l})^T,\ f_{10} = y_{10},\ f_{1l} = y_1,$$

$$f_{1j} = \frac{\alpha_1^2}{4} y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \left(\frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}\right)^2 y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1}\frac{y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) - y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_{j-1})}{h} -$$

$$-\frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}\frac{y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) - y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_{j-1})}{h} + \frac{\alpha_1\gamma_1\sigma_2}{4\sigma_1} y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \frac{\alpha_2\gamma_2\sigma_1}{4\sigma_2} y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j),\ 1 \le j \le l-1,$$

$$\vec{f}_2 = (f_{20},\dots,f_{2l})^T,\ f_{20} = y_{20},\ f_{2l} = y_2,$$

$$f_{2j} = \frac{\alpha_2^2}{4} y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \left(\frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1}\right)^2 y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}\frac{y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) - y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_{j-1})}{h} -$$

$$-\frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1}\frac{y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) - y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_{j-1})}{h} + \frac{\alpha_1\gamma_1\sigma_2}{4\sigma_1} y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \frac{\alpha_2\gamma_2\sigma_1}{4\sigma_2} y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j),\ 1 \le j \le l-1.$$

С помощью вычисленных приближенных значений $y_{1\text{кл}}(\tau_0),...,y_{1\text{кл}}(\tau_l),\ y_{2\text{кл}}(\tau_0),...,y_{2\text{кл}}(\tau_l)$ вычисляем $S[\vec{y}_{кл}(\tau)]$:

$$S[\vec{y}_{\text{кл}}(\tau)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{2}\left[\dot{y}_k - \frac{1}{2}\alpha_k y_k - \frac{1}{2}\gamma_k\frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k}y_{3-k}\right]^2 d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\dot{y}_k^2\, d\tau + \int_{t_0}^{t}\dot{y}_k\left[-\frac{1}{2}\alpha_k y_k + \frac{1}{2}\gamma_k\frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k}y_{3-k}\right]d\tau + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[-\frac{1}{2}\alpha_k y_k + \frac{1}{2}\gamma_k\frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k}y_{3-k}\right]^2 d\tau\right) \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}\Bigg[\dot{y}_k(t)y_k(t) - \dot{y}_k(t_0)y_k(t_0) -$$

$$-\sum_{j=1}^{l} y_{k\text{кл}}(\tau_j)\left\{\left(\frac{\alpha_k^2}{4}y_{k\text{кл}}(\tau_j) + \left(\frac{\gamma_{3-k}\sigma_k}{2\sigma_{3-k}}\right)^2 y_{k\text{кл}}(\tau_j)\right)h + \frac{\gamma_k\sigma_{3-k}}{2\sigma_k}\Big(y_{3-k\text{кл}}(\tau_j) - y_{3-k\text{кл}}(\tau_{j-1})\Big) -\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma_{3-k}\sigma_k}{2\sigma_{3-k}}\Big(y_{3-k\text{кл}}(\tau_j) - y_{3-k\text{кл}}(\tau_{j-1})\Big) + \left(\frac{\alpha_1\gamma_1\sigma_2}{4\sigma_1}y_{3-k\text{кл}}(\tau_j) + \frac{\alpha_2\gamma_2\sigma_1}{4\sigma_2}y_{3-k\text{кл}}(\tau_j)\right)h\right\}\Bigg] +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{l}\left[-\frac{1}{2}\alpha_k y_k(\tau_j) - \frac{1}{2}\gamma_k\frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k}y_{3-k}(\tau_j)\right]\Big(y_k(\tau_j) - y_k(\tau_{j-1})\Big) +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\alpha_k y_k(\tau_j) - \frac{1}{2}\gamma_k\frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k}y_{3-k}(\tau_j)\right]^2 h. \tag{17}$$

Из (10) следует, что для системы уравнений (5) $\Lambda = \begin{pmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}\end{pmatrix}$, где Λ_{ij} имеют вид

$$\Lambda_{11} = -\frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}\right)^2,\quad \Lambda_{22} = -\frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2,\quad \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \frac{\alpha_1}{2}\frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1} + \frac{\alpha_2}{2}\frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}.$$

При выборе на интервале $-A \le t \le A$ сетки с узлами $t_k = -A + kh,\ h = \frac{2A}{l},\ k = 0,1,...,l,$

$$\Lambda_{\text{free}} = -\begin{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2} & 0\\ 0 & \frac{d^2}{dt^2}\end{pmatrix}$$

аппроксимируется матрицей

$$\overline{\Lambda}_{\text{free}} = \begin{pmatrix}\overline{\Lambda}_{11\text{free}} & 0\\ 0 & \overline{\Lambda}_{22\text{free}}\end{pmatrix},$$

где

$$\overline{\Lambda}_{11\text{free}} = \overline{\Lambda}_{22\text{free}} = \begin{pmatrix}2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & \dots & 0\\ -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2}\\ 0 & \dots & 0 & -h^{-2} & 2h^{-2}\end{pmatrix}$$

– матрицы размерности $(l-1)\times(l-1)$. Матрицы Λ_{ij} аппроксимируются матрицами $\overline{\Lambda}_{ij}$ размерности $(l-1)\times(l-1)$. $\overline{\Lambda}_{11}=\overline{\Lambda}_{11\text{free}}+\theta_1$, $\overline{\Lambda}_{22}=\overline{\Lambda}_{22\text{free}}+\theta_3$, $\overline{\Lambda}_{12}=\overline{\Lambda}_{21}=\theta_2$, где θ_1 – диагональная матрица с элементами $\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}\right)^2$ на диагонали, θ_3 – диагональная матрица с элементами $\left(\frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2$ на диагонали, θ_2 – диагональная матрица с элементами $\frac{\alpha_1}{2}\frac{\gamma_1\sigma_2}{2\sigma_1}+\frac{\alpha_2}{2}\frac{\gamma_2\sigma_1}{2\sigma_2}$ на диагонали. Оператор Λ аппроксимируется матрицей $\overline{\Lambda}=\begin{pmatrix}\overline{\Lambda}_{11} & \overline{\Lambda}_{12}\\ \overline{\Lambda}_{21} & \overline{\Lambda}_{22}\end{pmatrix}$. После введенных обозначений получим

$$\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}\approx\frac{\det\overline{\Lambda}_{\text{free}}}{\det\overline{\Lambda}}. \tag{18}$$

С помощью $S[\vec{y}_{\text{кл}}(\tau)]$, вычисленных по формуле (17), и $\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}$, вычисленных по формуле (18), получаем значение для $\overline{Z}[0]$ в формуле (15).

3. Численные результаты. Рассмотрим приближенное вычисление математического ожидания функционала от решения системы уравнений (5) с помощью полученных приближенных значений для $\overline{Z}[0]$ и с учетом нормирующего множителя $\exp\left(-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}(t-t_0)\right)$.

Из (4) получаем, что приближенные значения математического ожидания $E[x_1-x_2]$ вычисляются по формуле

$$E[x_1-x_2]=\lim_{N\to\infty}\int\cdots\int(x_{1N}-x_{2N})dx_{1N}dx_{2N}D[\vec{x}]\times$$

$$\times\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}L_0\left(\vec{x}(\tau),\dot{\vec{x}}(\tau)\right)d\tau\right\}\exp\left(-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}(t-t_0)\right),$$

где $L_0\left(\vec{x}(\tau),\dot{\vec{x}}(\tau)\right)$ определяется формулой (6), $D[\vec{x}]=\lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N-1}d\vec{x}_i\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^{2}\sqrt{\sigma_1^2x_{1i-1}\sigma_{21}^2x_{2i-1}}}$.

После замены переменных $y_k=\frac{2\sqrt{x_k}}{\sigma_k}$, $k=1,2$, получим

$$E[x_1-x_2]=\int\cdots\int\left(\frac{\sigma_1^2y_{1N}^2}{4}-\frac{\sigma_2^2y_{2N}^2}{4}\right)\frac{\sigma_1^2y_{1N}}{2}dy_{1N}\frac{\sigma_2^2y_{2N}}{2}dy_{2N}\times$$

$$\times\frac{2}{\sigma_1^2y_{1N}}\frac{2}{\sigma_2^2y_{2N}}\overline{Z}[0]\exp\left(-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}(t-t_0)\right)=\exp\left(-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}(t-t_0)\right)\int\left(\frac{\sigma_1^2y_{1N}^2}{4}-\frac{\sigma_2^2y_{2N}^2}{4}\right)\overline{Z}[0]dy_{1N}dy_{2N}.$$

Здесь $\overline{Z}[0]$ определяется формулами (7), (15).

Приближенные значения математического ожидания $E[\sqrt{x_k}]$ вычисляются по формуле

$$E[\sqrt{x_k}]=\exp\left(-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}(t-t_0)\right)\int\frac{\sigma_k}{2}y_{kN}\overline{Z}[0]dy_{1N}dy_{2N}.$$

Точное значение математического ожидания $E[x_1 - x_2]$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ вычисляется из уравнений

$$dE[x_1](t) = \left(aE[x_1] + \gamma E[\sqrt{x_1 x_2}\,] + \beta_1\right)dt,$$

$$dE[x_2](t) = \left(aE[x_2] + \gamma E[\sqrt{x_1 x_2}\,] + \beta_2\right)dt,$$

$$E[x_1 - x_2](0) = x_{10} - x_{20}$$

и равно

$$E[x_1 - x_2](t) = \left(x_{10} - x_{20} + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha}\right)\exp\left\{a(t - t_0)\right\} + \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha}.$$

Точное значение математического ожидания $E[\sqrt{x_k}\,]$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ вычисляется из уравнений

$$dE[\sqrt{x_1}\,](t) = \left(\frac{\alpha}{2}E[\sqrt{x_1}\,] + \frac{\gamma\sigma_2}{2\sigma_1}E[\sqrt{x_2}\,]\right)dt,$$

$$dE[\sqrt{x_2}\,](t) = \left(\frac{\alpha}{2}E[\sqrt{x_2}\,] + \frac{\gamma\sigma_1}{2\sigma_2}E[\sqrt{x_1}\,]\right)dt,$$

$$E[\sqrt{x_k}\,](0) = \sqrt{x_{k0}}$$

и равно

$$E[\sqrt{x_k}\,] = \exp\left\{\frac{t - t_0}{2}\alpha\right\}\left(\operatorname{ch}\left\{\frac{t - t_0}{2}\gamma\right\}\sqrt{x_{k0}} + \frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k}\operatorname{sh}\left\{\frac{t - t_0}{2}\gamma\right\}\sqrt{x_{3-k0}}\right).$$

Приближенные и точные значения математических ожиданий от некоторых функционалов от решений системы уравнений (5) для конкретных значений коэффициентов и начальных условий приведены в табл. 1, 2. Параметр l – это количество интервалов, на которые разбивается отрезок $[t_0, t]$ при приближенном вычислении $y_{1\text{кл}}(\tau),\ y_{2\text{кл}}(\tau)$. Форма функционалов выбрана так, чтобы можно было вычислить точные значения математических ожиданий.

Таблица 1. **Приближенные и точные значения математического ожидания при**

$$\alpha = 2,\ \gamma = -2,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4},\ t_0 = 0,\ t = 1,\ x_{10} = x_{20} = \frac{1}{4}$$

Table 1. **Approximate and exact values of the expectations for**

$$\alpha = 2,\ \gamma = -2,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4},\ t_0 = 0,\ t = 1,\ x_{10} = x_{20} = \frac{1}{4}$$

Значение	$E\left[\sqrt{x_1}\right]$	$E\left[\sqrt{x_2}\right]$	$E[x_1 - x_2]$
Приближенное $l = 40$	0,4651	0,4651	0,00003
Приближенное $l = 120$	0,4837	0,4837	0,00002
Точное	0,5	0,5	0

Таблица 2. **Приближенные и точные значения математического ожидания при**

$$\alpha = 2,\ \gamma = -2,\ \sigma_1 = 9,\ \sigma_2 = 10,\ \beta_1 = \frac{81}{4},\ \beta_2 = \frac{100}{4},\ t_0 = 0,\ t = 1,\ x_{10} = 4,\ x_{20} = 4$$

Table 2. **Approximate and exact values of the expectations for**

$$\alpha = 2,\ \gamma = -2,\ \sigma_1 = 9,\ \sigma_2 = 10,\ \beta_1 = \frac{81}{4},\ \beta_2 = \frac{100}{4},\ t_0 = 0,\ t = 1,\ x_{10} = 4,\ x_{20} = 4$$

Значение	$E\left[\sqrt{x_1}\right]$	$E\left[\sqrt{x_2}\right]$	$E[x_1 - x_2]$
Приближенное $l = 40$	6,037	10,72	–11,17
Приближенное $l = 120$	5,962	11,51	–13,53
Точное	5,806	13,19	–15,17

Из результатов, приведенных в табл. 1, 2, видно, что при увеличении параметра l увеличивается точность вычислений.

Заключение. Стохастические дифференциальные уравнения часто используют для описания стохастического поведения систем. В [17, 18] рассматривалась задача конструирования СДУ, стохастический член которых связан со структурой изучаемой системы. При конструировании СДУ использовалась аппроксимация основного кинетического уравнения уравнением Фоккера – Планка, для которого можно записать эквивалентное ему СДУ в форме уравнения Ланжевена.

Представление функции плотности вероятности перехода для решения одномерного стохастического дифференциального уравнения через функциональный интеграл и методы приближенного вычисления такого функционального интеграла рассмотрены в [13]. В данной работе получено представление функции плотности вероятности перехода для решения системы СДУ через функциональный интеграл и методы приближенного вычисления возникающего функционального интеграла. Для представления функции плотности вероятности перехода через функциональный интеграл используется техника Onsager – Machlup функционалов. Для вычисления функционального интеграла применяется разложение действия относительно классической траектории, для которой действие принимает экстремальное значение.

Список использованных источников

1. Gardiner, C. W. Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry, and the Natural Sciences / C. W. Gardiner. – 2nd ed. – Springer-Verlag, 1986. – 442 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02452-2

2. Van Kampen, N. G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry / N. G. Van Kampen. – 3rd ed. – Amsterdam, 2007. – 463 p.

3. Гихман, И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.

4. Кузнецов, Д. Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2 / Д. Ф. Кузнецов. – С.-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 764 с.

5. Kloeden, P. E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations / P. E. Kloeden, E. Platen. – Berlin: Springer, 1992. – 636 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5

6. Kloeden, P. E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations Through Computer Experiments / P. E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz. – Berlin: Springer, 1994. – 309 p.

7. Onsager, L. Fluctuations and irreversible processes / L. Onsager, S. Machlup // Phys. Rev. – 1953. Vol. 91, № 6. – P. 1505–1512. https://doi.org/10.1103/physrev.91.1505

8. Langouche, F. Functional Integration and Semiclassical Expansions / F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui. – Dordrecht: D. Reidel Pub.Co., 1982. – 315 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1634-5

9. Wio, H. S. Path Integration to Stochastic Process: an Introduction / Horacio S. Wio. – World Scientific Publishing Company, 2012. – 176 p. https://doi.org/10.1142/8695

10. Bennati, E. A path integral approach to derivative security pricing I: formalism and analytical results / E. Bennati, M. Rosa-Clot, S. Taddei // Int. J. Theor. Appl. Finan. – 1999. – Vol. 2, № 4. – P. 381–407. https://doi.org/10.1142/s0219024999000200

11. Graham, R. Path integral formulation of general diffusion processes / R. Graham // Z. Phys. B: Condens. Matter and Quanta. – 1977. – Vol. 26, № 3. – P. 281–290. https://doi.org/10.1007/bf01312935

12. Graham, R. Lagrangian for diffusion in curved phase space / R. Graham // Phys. Rev. Lett. – 1977. – Vol. 38, № 2. – P. 51–53. https://doi.org/10.1103/physrevlett.38.51

13. Применение функциональных интегралов к стохастическим уравнениям / Э. А. Айрян [и др.] // Мат. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 11. – С. 113–125.

14. Глимм, Дж. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов: пер. с англ. / Дж. Глимм, А. Джаффе. – М.: Мир, 1984. – 448 с.

15. Feynman, R. P. Quantum Mechanics and Path Integrals / R. P. Feynman, A. R. Hibbs. – New York: McGraw-Hill, 1965. – 365 p.

16. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики: в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск: Выш. шк., 1975. – Т. 2. – 584 с.

17. Кулябов, Д. С. Введение согласованного стохастического члена в уравнение модели роста популяций / Д. С. Кулябов, А. В. Демидова // Вестн. РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. – 2012. – № 3. – С. 69–78.

18. Влияние стохастизации на одношаговые модели / А. В. Демидова [и др.] // Вестн. РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. – 2014. – № 1. – С. 71−85.

References

1. Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry, and the Natural Sciences*. 2nd ed. Springer-Verlag, 1986, 442 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02452-2

2. Van Kampen N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry.* 3rd ed. Amsterdam, 2007. 463 p.

3. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *Stochastic Differential Eqations*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1968. 354 p. (in Russian).

4. Kuznetsov D. F. *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations. 2.* S.-Peterburg, Polytechnic University Publishing House, 2006. 764 p. (in Russian).

5. Kloeden P. E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin, Springer, 1992. 636 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5

6. Kloeden P. E., Platen E. and Schurz H. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations Through Computer Experiments*. Berlin, Springer, 1994. 309 p.

7. Onsager L., Machlup S. Fluctuations and Irreversible Processes. *Physical Review*, 1953, vol. 91, no. 6, pp. 1505–1512. https://doi.org/10.1103/physrev.91.1505

8. Langouche F., Roekaerts D., Tirapegui E. *Functional Integration and Semiclassical Expansions*. Dordrecht: D. Reidel Pub.Co., 1982. 315 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1634-5

9. Wio H. S. *Application of Path Integration to Stochastic Process: an Introduction*. World Scientific Publishing Company, 2013. 176 p. https://doi.org/10.1142/8695

10. Bennati E., Rosa-Clot M., Taddei S. A path integral approach to derivative security pricing I: formalism and analytical results. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1999, vol. 2, no. 4, pp. 381–407. https://doi.org/10.1142/s0219024999000200

11. Graham R. Path integral formulation of general diffusion processes. *Zeitschrift fur Physik B Condensed Matter and Quanta,* 1977, vol. 26, no. 3, pp. 281–290. https://doi.org/10.1007/bf01312935

12. Graham R. Lagrangian for diffusion in curved phase space. *Physical Review Letters*, 1977, vol. 38, no. 2, pp. 51–53. https://doi.org/10.1103/physrevlett.38.51

13. Ayryan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastyanov L. A. Application of functional integrals to stochastic equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 339–348. https://doi.org/10.1134/s2070048217030024

14. Glimm J., Jaffe A. *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1981. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0121-9

15. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York, McGraw-Hill, 1965. 365 p.

16. Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrnyi P. I. *Numerical Methods of Higher Mathematics. Vol. 2*. Minsk, Vysheishaya Shkola Publ., 1975. 584 p. (in Russian).

17. Kulyabov D. S. and Demidova A. V. Introduction of self-consistent term in stochastic population model equation. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika = RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 2012, no. **3**, pp. 69–78 (in Russian).

18. Demidova A. V., Gevorkian M. N., Egorov A. D., Kuliabov D. S., Korolkova A. V., and Sevastianov L. A. Influence of stochastization on one-step models, *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika = RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 2014, no. 1, pp. 71–85 (in Russian).

Информация об авторах

Айрян Эдик Арташевич – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором, лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований (ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, г. Дубна, Российская Федерация). E-mail: ayrjan@jinr.ru

Егоров Александр Дмитриевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Кулябов Дмитрий Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198, г. Москва, Российская Федерация). E-mail: kulyabov_ds@rudn.university

Малютин Виктор Борисович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Севастьянов Леонид Антонович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198, г. Москва, Российская Федерация). E-mail: sevastianov_la@rudn.university

Information about the authors

Edik A. Ayryan – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Sector of the Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Russian Federation). E-mail: ayrjan@jinr.ru

Alexandr D. Egorov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Dmitry S. Kulyabov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Department of Applied Probability and Informatics, RUDN University (6, Mikluho-Maklaya Str., 117198, Moscow, Russian Federation). E-mail: kulyabov_ds@rudn.university

Victor B. Malyutin – D. Sc. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Leonid A. Sevastyanov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Applied Probability and Informatics, RUDN University (6, Mikluho-Maklaya Str., 117198, Moscow, Russian Federation). E-mail: sevastianov_la@rudn.university