
УДК 514.88; 519.62; 519.63; 535.016; 537.87

**Вычисление поля фазового замедления
плавнонерегулярного интегрально-оптического волновода
(на примере тонкоплёночной обобщённой волноводной
линзы Люнеберга)**

Л. А. Севастьянов, Д. С. Кулябов, А. Л. Севастьянов

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Уравнения Максвелла обладают несомненной простотой и элегантностью. Однако конкретные расчёты оказываются намного более сложными в реализации. В задачах расчёта нерегулярных интегрально-оптических волноводов применяется несколько основных методов. Авторы предлагают использовать метод адиабатических волноводных мод. Данный метод может быть реализован в фарватере работ Люнеберга. Кроме того, метод имеет прозрачную геометрическую интерпретацию. Как и уравнения Люнеберга, получающиеся в данном методе уравнения соответствуют уравнениям Гамильтона на кокасательном расслоении над конфигурационным пространством. Кроме того, для вычисления траекторий лучей используется простейшая геометризация, когда показатель преломления представляется как метрика некоторого эффективного пространства. Таким образом, фазовая функция вычисляется как действие вдоль траектории.

Тонкоплёночная линза Люнеберга является интересным объектом как в общетеоретическом смысле, так и в практическом. Её изучение позволяет в дальнейшем описывать целый класс объектов, но при этом она является важнейшим элементом для построения чисто оптических управляющих устройств. Таким образом, авторы считают метод адиабатических мод наиболее подходящим для исследования такого объекта, как тонкоплёночная обобщённая волноводная линза Люнеберга.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона, интегрально-оптические волноводы, метод адиабатических волноводных мод.

1. Введение

Для численного моделирования интегрально-оптических волноводов существуют различные методы. Каждый из них работает в круге своих предположений и имеет, соответственно, свой круг ограничений. Авторы предлагают для расчётов использовать метод адиабатических волноводных мод. В этой методике адиабатические волноводные моды распространяются вдоль двумерных лучей, т.е. гамильтоновых кривых в фазовом пространстве. В этом представлении конфигурационное пространство координат становится одномерным, а фазовое пространство — двумерным. Электромагнитное поле адиабатической волноводной моды задаётся решением в каждой точке семейства лучей системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения этих уравнений вместе с решениями двумерных уравнений лучей полностью задают эволюцию электромагнитного поля адиабатической волноводной моды при распространении через плавнонерегулярный интегрально-оптический волновод. В данной работе указанный метод формулируется на языке дифференциально-геометрических методов для эффективного вычисления поля фазового замедления $\beta(y, z)$ адиабатической моды, распространяющейся через тонкоплёночную обобщённую волноводную линзу Люнеберга.

2. Модель адиабатических волноводных мод плавнонерегулярного интегрально-оптического волновода

В рамках метода адиабатических волноводных мод описание распространения электромагнитного монохроматического поляризованного излучения в изотропных плавнонерегулярных интегрально-оптических волноводах сводится к следующей модели адиабатических волноводных мод [1–10]. Электромагнитное поле

излучения удовлетворяет системе уравнений Максвелла, которая в гауссовой системе единиц имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (1)$$

Решения уравнений (1) ищутся в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} (x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} (x; y, z) \frac{\exp \{i\omega t - i\varphi(y, z)\}}{\sqrt{\beta(y, z)}}, \quad (2)$$

где $\beta = \nabla \varphi / k_0$, $\beta = \sqrt{\beta_y^2 + \beta_z^2}$, $k_0 = \omega / c$.

В итоге, первый множитель в (2), зависящий от x функционально, а от y, z зависящий параметрически, удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений для продольных компонент $E_z(x; y, z)$, $H_z(x; y, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_z}{dx^2} + \chi^2 E_z &= \frac{\partial (\ln \chi_z^2)}{\partial y} \left[p_y E_z + \frac{p_z}{ik_0 \varepsilon} \frac{dH_z}{dx} \right] + \\ &+ \frac{\partial (\ln \chi_z^2)}{\partial x} \left[\frac{dE_z}{dx} - \frac{1}{ik_0 \varepsilon} \left(p_z p_y + \frac{\partial p_y}{\partial z} \right) H_z \right] - \left[\frac{\partial (\ln \varepsilon)}{\partial x} \frac{dE_z}{dx} + \frac{\partial (\ln \varepsilon)}{\partial y} p_y E_z \right], \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_z}{dx^2} + \chi^2 H_z &= \frac{\partial (\ln \chi_z^2)}{\partial y} \left[p_y H_z - \frac{p_z}{ik_0 \mu} \frac{dE_z}{dx} \right] + \\ &+ \frac{\partial (\ln \chi_z^2)}{\partial x} \left[\frac{dH_z}{dx} + \frac{1}{ik_0 \mu} \left(p_z p_y + \frac{\partial p_y}{\partial z} \right) E_z \right] + \left[\frac{\partial (\ln \mu)}{\partial x} \frac{dH_z}{dx} + \frac{\partial (\ln \mu)}{\partial y} p_y H_z \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Компоненты поля $E_x(x; y, z)$, $E_y(x; y, z)$, $H_x(x; y, z)$, $H_y(x; y, z)$ выражаются через продольные компоненты $E_z(x; y, z)$, $H_z(x; y, z)$ и их производные:

$$\chi_z^2 H_y = (p_y p_z + \partial p_z / \partial y) H_z - ik_0 \varepsilon dE_z / dx, \quad \chi_z^2 H_x = p_z dH_z / dx + ik_0 \varepsilon p_y E_z, \quad (5)$$

$$\chi_z^2 E_y = ik_0 \mu dH_z / dx + (p_y p_z + \partial p_z / \partial y) E_z, \quad \chi_z^2 E_x = p_z dE_z / dx - ik_0 \mu p_y H_z. \quad (6)$$

В соотношениях (3), (4), (5), (6) использованы обозначения: $\chi_z^2 = k_0^2 \varepsilon \mu + p_z p_z + \partial p_z / \partial z$, $\chi^2 = \chi_z^2 + p_y p_y + \partial p_y / \partial y$, $p_y = -ik_0 \beta_y - (2\beta)^{-1} \partial \beta / \partial y$, $p_z = -ik_0 \beta_z - (2\beta)^{-1} \partial \beta / \partial z$, с помощью которых производные от напряжённостей E_m , $m = x, y, z$, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial E_m / \partial y &= p_y E_m, \quad \partial^2 E_m / \partial y^2 = (p_y p_y + \partial p_y / \partial y) E_m, \\ \partial E_m / \partial z &= p_z E_m, \quad \partial^2 E_m / \partial z^2 = (p_z p_z + \partial p_z / \partial z) E_m. \end{aligned} \quad (7)$$

Производные от напряжённость H_m выражаются аналогичным образом.

Двумерные волновые фронты адиабатических волноводных мод плавнонерегулярного интегрально-оптического волновода описываются [11, 12] «характеристическим» уравнением Гамильтона–Якоби для фазы замедления моды $\varphi(y, z)$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = k_0^2 \beta^2(y, z) \equiv k_0^2 \varepsilon(y, z) - k_x^2. \quad (8)$$

Семейство двумерных лучей, локально ортогональных двумерным волновым фронтам $\varphi(y, z)$, описывается «бихарактеристическим» уравнением (см. [11–13]):

$$\frac{d}{ds} \left(\beta(y, z) \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \beta(y, z), \quad (9)$$

где ds — элементарная длина двумерного инфинитезимального вектора $(dy, dz)^T$: $ds^2 = dy^2 + dz^2$.

Уравнения (9) являются уравнениями геодезических в метрике $\beta(y, z)$ [11, 12]. Параметр s , участвующий в записи уравнения (9), является естественным параметром эволюции вдоль геодезических [12, 13]. Лагранжевы уравнения (9) с помощью функции Лагранжа

$$L \left(y, z, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\beta^2(y, z)}{2} \left(\left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right) \quad (10)$$

и преобразования Лежандра (см. [11, 14, 15]) приводятся к эквивалентным уравнениям Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_z}, \\ \frac{dp_y}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dp_z}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь функция Гамильтона имеет вид:

$$H(y, z, p_y, p_z) = \frac{p_y^2 + p_z^2}{2\beta^2(y, z)} \quad (12)$$

3. Модель адиабатических волноводных мод тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга

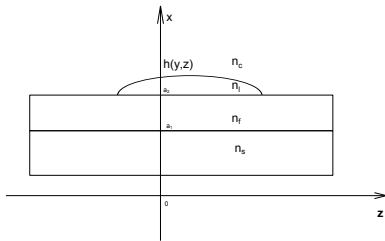


Рис. 1. Профиль линзы Люнеберга

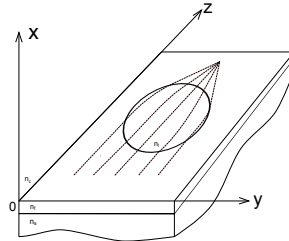


Рис. 2. Эффект фокусировки в линзе Люнеберга

Тонкоплёночная обобщённая волноводная линза Люнеберга [1–11, 13] (см. рис. 1 и рис. 2) обладает распределением коэффициента фазового замедления β , зависящим от расстояния r до центра линзы. В этом случае от декартовых координат y, z удобно перейти к полярным координатам r, φ в горизонтальной плоскости, связанной с плоскостью регулярного планарного волновода, служащего основой для тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга: $z = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Функция Лагранжа в полярных координатах принимает вид

$$L \left(r, \varphi, \frac{dr}{ds}, \frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{\beta^2(r)}{2} \left(\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right). \quad (13)$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (14)$$

принимают вид

$$\beta \frac{\partial \beta}{\partial r} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \beta^2 r = \frac{d}{ds} (\beta^2 \dot{r}), \quad \frac{d}{ds} (\beta^2 r^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (15)$$

Преобразование Лежандра в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} p_r &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \beta^2 \dot{r} \Leftrightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{\beta^2}, \\ p_\varphi &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \beta^2 r^2 \dot{\varphi} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\beta^2 r^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Функция Гамильтона, равная $H = \sum \dot{q}_j p_j - L$, принимает вид

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2 + p_\varphi^2 / r^2}{2\beta^2}. \quad (17)$$

Соответствующие уравнения Гамильтона принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &\equiv \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\beta^2}, \quad \frac{dp_r}{ds} \equiv -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_r^2 + p_\varphi^2 / r^2}{\beta^3} \frac{\partial \beta}{\partial r}, \\ \frac{d\varphi}{ds} &\equiv \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{\beta^2 r^2}, \quad \frac{dp_\varphi}{ds} \equiv -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из выражения (17) видно, что функция Гамильтона не зависит от координаты φ . Следовательно, она является циклической, а соответствующий импульс p_φ является сохраняющейся величиной. Первый интеграл движения $p_\varphi = c_1$ меняется от геодезической к геодезической, т.е. зависит от траектории луча. Иными словами, в терминологии работ [11, 13, 14] этот интеграл движения зависит от прицельного угла ϑ (рис. 3) или прицельного расстояния y_0 (рис. 4).

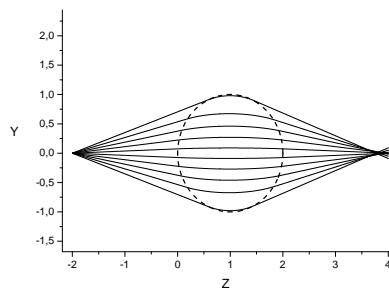


Рис. 3. Изменение прицельного угла ϑ

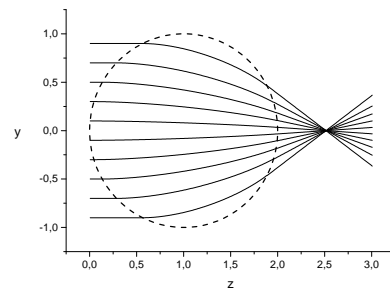


Рис. 4. Изменение прицельного расстояния y_0

Другой сохраняющейся величиной описываемой системы (другим первым интегралом движения) является полная энергия $H = c_2$, принимающая одинаковое значение для всех геодезических, т.е. для всех траекторий лучей, выходящих из одного фокуса и входящих в другой фокус тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга, при условии, что каждая из них пересекает область нерегулярности, в которой $\beta(r) \neq \beta_0$.

4. Вычисление интегралов движения тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга

Следуя работам [16–19], рассмотрим обобщённую линзу Люнеберга с нормированным радиусом $R = 1, 0$ и нормированным фокусным расстоянием f . Рассмотрим семейство всех лучей, исходящих из левого фокуса тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга, входящих в правый фокус тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга и проходящих через круг единичного радиуса с переменным распределением коэффициента фазового замедления $\beta(r) \geq \beta_k$, $0, 0 \leq r \leq 1, 0$.

Итак, первый интеграл волноводной линзы Люнеберга согласно соотношений (16) и $p_\varphi = c_1$ принимает вид: $\beta^2 r^2 \dot{\varphi} = p_\varphi \equiv c_1$, который можно преобразовать следующим образом:

$$d\varphi = \frac{c_1 ds}{\beta^2(r) r^2}. \quad (19)$$

Другой первый интеграл, согласно соотношениям (17) и $H = c_2$, принимает вид $c_2 = \frac{p_r^2 r^2 + p_\varphi^2}{2\beta^2 r^2}$, а с учётом (16) может быть переписан в виде $c_2 = \frac{(\beta^2 \dot{r})^2 r^2 + p_\varphi^2}{2\beta^2 r^2}$. Последнее соотношение можно преобразовать к виду:

$$dr = \frac{ds}{r\beta^2(r)} \sqrt{2c_2\beta^2(r)r^2 - c_1^2}. \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20) вытекает соотношение:

$$d\varphi = \frac{c_1 dr}{r\sqrt{2c_2\beta^2(r)r^2 - c_1^2}}. \quad (21)$$

Положим $\rho(r) = r\beta(r)$ и $\varkappa = \frac{c_1}{\sqrt{2c_2}}$. Тогда соотношение (21) примет вид

$$d\varphi = \frac{\varkappa dr}{r\sqrt{\rho^2 - \varkappa^2}}. \quad (22)$$

Здесь полезно воспользоваться ещё одним интегралом движения вдоль отдельной геодезической, а именно интегралом Клеро. Рассмотрим локальные орты \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_φ , соответствующие полярным координатам r и φ . Рассмотрим вектор скорости геодезической $\mathbf{v} = (\dot{r}, r\dot{\varphi})^T$ и вычислим угол ψ между векторами \mathbf{v} и \mathbf{e}_φ :

$$\cos \psi = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{e}_\varphi)}{\sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\varphi)}}. \quad (23)$$

Вычислим входящие в (23) величины

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \equiv 2c_2/\beta^2(r), \quad (\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\varphi) = 1, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{e}_\varphi) = r\dot{\varphi}.$$

Тогда

$$\cos \psi = \frac{\beta(r) r \dot{\varphi}}{\sqrt{2c_2}} \equiv \frac{\beta^2(r) r^2 \dot{\varphi}}{\beta(r) r \sqrt{2c_2}} = \frac{\varkappa}{\rho(r)}. \quad (24)$$

С помощью (24) свяжем интегральные характеристики отдельных геодезических (траекторий лучей) с начальными прицельными углами, под которыми эти лучи выходят из точки $(-r_0, -\pi)^T$ и, проходя через тонкоплёночную обобщённую волноводную линзу Люнеберга, входят в точку $(r_1, 0)^T$ (см. рис. 5).

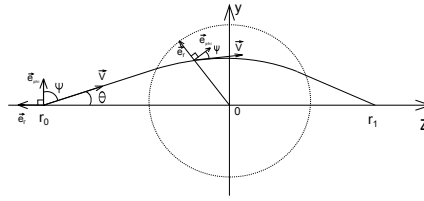


Рис. 5. Трассировка лучей через линзу Лüneберга

В точке $(-r_0, -\pi)^T$ угол ψ между векторами \mathbf{v} и \mathbf{e}_φ отдельной траектории, пересекающей тонкоплёночную обобщённую волноводную линзу Лüneберга, является дополнительным к прицельному углу ϑ этой траектории: $\psi + \vartheta = \pi/2$. Следовательно, $\cos \psi = \sin \vartheta = \frac{\kappa(\vartheta)}{\rho(r_0)}$, что эквивалентно соотношению

$$\kappa(\vartheta) = \beta(r_0) \sin \vartheta = \beta_0 r_0 \sin \vartheta, \quad (25)$$

где β_0 — коэффициент фазового замедления волноводной моды (набегающей на нерегулярный участок тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Лüneберга) регулярного трёхслойного планарного волновода.

Для каждой геодезической $(r, \varphi)^T(\vartheta, s)$ введём в рассмотрение «точку поворота» траектории луча, расстояние до которой $r^*(\vartheta)$ от начала координат меньше, чем до любой другой точки данного луча. В точке $r^*(\vartheta)$ векторы \mathbf{v} и \mathbf{e}_φ коллинеарны, так что $\cos \psi(\vartheta) = 1$, т.е. справедливо соотношение

$$\rho(r^*(\vartheta)) = \kappa(\vartheta). \quad (26)$$

Помимо этого, если траектория луча, выходящего из точки $(-r_0, -\pi)^T$ и входящего в точку $(r_1, 0)^T$, пересекает тонкоплёночную обобщённую волноводную линзу Лüneберга, то из соотношения $\beta_0 \sin \vartheta = \kappa(\vartheta)$ и оценок $0 \leq \sin \vartheta \equiv \kappa(\vartheta) / \beta_0 \leq 1$ вытекает полезная оценка

$$0 \leq \kappa(\vartheta) \leq \beta_0. \quad (27)$$

Аналогично тому, как в работах [13, 16–19] проводится интегрирование для объёмной линзы Лüneберга, проводим интегрирование для тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Лüneберга. Интегрирование левой части равенства (22) проводим по всему интервалу изменения $\varphi \in [0, \pi]$, а интегрирование правой части равенства (22) проводим по частям $r \in [r_0, r^*(\vartheta)] \cup [r^*(\vartheta), r_1]$:

$$\int_{-\pi}^0 d\varphi = \int_{r_0}^{r^*(\vartheta)} \frac{\kappa(\vartheta) dr}{r \sqrt{\rho(r)^2 - \kappa(\vartheta)^2}} + \int_{r^*(\vartheta)}^{r_1} \frac{\kappa(\vartheta) dr}{r \sqrt{\rho(r)^2 - \kappa(\vartheta)^2}}. \quad (28)$$

Соотношение (28) совпадает с соотношением (7) в работе [16], так что все дальнейшие выкладки работы [16] справедливы и в нашем случае.

5. Заключение

Описание распространения в нерегулярном интегрально-оптическом волноводе направляемых мод с помощью модели адиабатических волноводных мод позволяет перенести в волноводную оптику методы и представления, разработанные

Р. К. Люнебергом [13]. Эти методы являются по существу дифференциально-геометрическими методами, использующими структуру лагранжевых расслоений [14]. Выделение этой структуры в описании электромагнитного поля адиабатических волноводных мод позволяет описывать волновые (волноводные) фронты и двумерные лучи на языке лагранжевой и гамильтоновой механики. Тем самым в конструкции трансформационной волноводной оптики естественным образом вносится техника римановой геометрии, доказавшая свою эффективность во многих областях прикладной математики.

В данной статье предложена схема вычисления поля фазового замедления для тонкоплёночной волноводной обобщённой линзы Люнеберга. Путём учёта естественных симметрий были получены первые интегралы задачи. В результате чего сложные логические рассуждения *ad hoc*, использованные в работах [16–19], удалось заменить прозрачными дифференциально-геометрическими методами.

Литература

1. Егоров А. А., Севастьянов Л. А., Севастьянов А. Л. Исследование электродинамических свойств планарной тонкоплёночной линзы Люнеберга // Журнал Радиоэлектроники. — 2008. — Т. 6. [Egorov A. A., Sevastyanov L. A., Sevastyanov A. L. Research of Electrodinamic Properties of a Planar Thin-Film Luneburg Lens // J. of Radio Electronics. — 2008. — No 6. — (in russian).]
2. Моделирование направляемых (собственных) мод и синтез тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга в нулевом векторном приближении / А. А. Егоров, К. П. Ловецкий, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов // Квантовая электроника. — 2010. — Т. 40, № 9. — С. 830–836. [Simulation of Guided Modes (Eigenmodes) and Synthesis of a Thin-Film Generalised Waveguide Luneburg Lens in the Zero-Order Vector Approximation / A. A. Egorov, K. P. Lovetskiy, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov // Quantum Electronics. — 2010. — Vol. 40, No 9. — Pp. 830–836. — (in russian).]
3. Расчёт и проектирование тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга методом адиабатических мод / А. А. Егоров, А. Л. Севастьянов, Э. А. Айрян и др. // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». — 2012. — Вып. 3 (26). — С. 35–47. [Calculation and Design of Thin-Film Generalized Waveguide Luneburg Lens by Adiabatic Modes Method / A. A. Egorov, L. A. Sevastianov, E. A. Ayryan et al. // Bulletin of TvSU. Series Appl. Mathematics. — 2012. — № 3 (26). — Pp. 35–47. — (in russian).]
4. Севастьянов Л. А., Егоров А. А. Теоретический анализ волноводного распространения электромагнитных волн в диэлектрических плавно-нерегулярных интегральных структурах // Оптика и спектроскопия. — 2008. — Т. 105, № 4. — С. 632–640. [Sevastianov L. A., Egorov A. A. The Theoretical Analysis of Waveguide Propagation of Electromagnetic Waves in Dielectric Smoothly-Irregular Integrated Structures // Optics and Spectroscopy. — 2008. — Vol. 105, No 4. — Pp. 576–584. — (in russian).]
5. Propagation of Electromagnetic Waves in Thin-Film Structures with Smoothly Irregular Sections / А. А. Егоров, Л. А. Севастьянов, А. Л. Севастьянов, К. П. Ловецкий // ICO Topical Meeting on Optoinformatics/Information Photonics. September 15–18, 2008. St. Petersburg. Russia. — St. Petersburg: ITMO, 2008. — P. 23.
6. Егоров А. А., Севастьянов Л. А. Структура мод плавно-нерегулярного интегрально-оптического четырёхслойного трёхмерного волновода // Квантовая электроника. — 2009. — Т. 39, № 6. — С. 566–574. [Egorov A. A., Sevast'yanov L. A. Structure of Modes of a Smoothly Irregular Integrated-Optical Four-Layer Three-Dimensional Waveguide // Quantum Electronics. — 2009. — Vol. 39, No 6. — Pp. 566–574. — (in russian).]

7. Модель многослойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода в нулевом векторном приближении / А. А. Егоров, К. П. Ловецкий, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов // Исследовано в России. — 2011. — № 010/110303. — С. 96–122. [Model of a Multilayer Smoothly-Irregular Integrated-Optical Waveguide in a Zero Vector Approximation / A. A. Egorov, K. P. Lovetskiy, A. L. Sevastyanov, L. A. Sevastianov // Investigated in Russia. — 2011. — No 010/110303. — Pp. 96–122. — (in russian).]
8. Адиабатические моды плавно-нерегулярного оптического волновода: нулевое приближение векторной теории / А. А. Егоров, А. Л. Севастьянов, Э. А. Айрян и др. // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 8. — С. 42–54. [Adiabatic Modes of Smoothly Irregular Optical Waveguide: Zero Approximation of the Vector Theory / A. A. Egorov, A. L. Sevastianov, E. A. Ayryan et al. // Mathematical Modeling. — 2010. — Vol. 22, No 8. — Pp. 42–54. — (in russian).]
9. Mathematical Modeling of Irregular Integrated Optical Waveguides / E. A. Ayryan, A. A. Egorov, L. A. Sevastianov et al. // Lecture Notes in Computer Science. — 2012. — Vol. 7125. — Pp. 136–147.
10. Севастьянов Л. А., Егоров А. А., Севастьянов А. Л. Метод адиабатических мод в задачах плавно-нерегулярных открытых волноведущих структур // Ядерная физика. — 2013. — Т. 76, № 2. — С. 252–268. [Sevastyanov L. A., Egorov A. A., Sevastyanov A. L. Method of Adiabatic Modes in Studying Problems of Smoothly Irregular Open Waveguide Structures // Physics of Atomic Nuclei. — 2013. — Vol. 76, No 2. — Pp. 224–239. — (in russian).]
11. Севастьянов А. Л., Кулябов Д. С., Севастьянов Л. А. Моделирование методом адиабатических волноводных мод амплитудно-фазового преобразования электромагнитного поля тонкоплёночной обобщённой волноводной линзой Люнеберга // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2013. — № 4. — С. 132–142. [Sevastyanov A. L., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. Modeling in the Adiabatic Waveguide Modes Model of Amplitude-Phase Transformation of the Electromagnetic Field by a Thin-Film Generalized Waveguide Luneburg Lens // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2013. — No. 4. — Pp. 132–142. — (in russian).]
12. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986. [Dubrovin B. A., Fomenko A. T., Novikov S. P. Modern Geometry Methods and Applications: Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields. — Springer, 1992.]
13. Luneburg R. K. The Mathematical Theory of Optics. — Berkeley: University of California Press, 1964.
14. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. — М.: Мир, 1980. [Guillemin V., Sternberg S. Geometric Asymptotics. — Providence, RI: American Mathematical Soc., 1990.]
15. Wolf K. B. Geometric Optics on Phase Space. — Berlin: Springer-Verlag, 2004.
16. Morgan S. P. General Solution of the Luneburg Lens Problem // J. Appl. Phys. — 1958. — Vol. 29, No 9. — Pp. 1358–1368.
17. Fletcher A., Murphy T., Young A. Solutions of Two Optical Problems // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1954. — Vol. 223, No 1153. — Pp. 216–225.
18. Котляр В. В., Мелехин Ф. С. Преобразование Абеля в задачах синтеза градиентных оптических элементов // Компьютерная оптика. — 2002. — № 22. — С. 29–36. [Kotlyar V. V., Melekhin F. S. Abel Transformation in Synthesis Problems Gradient Optical Elements // Computer Optics. — 2002. — No 22. — Pp. 29–36. — (in russian).]
19. Котляр В. В., Мелехин Ф. С. Расчёт обобщённых линз «рыбий глаз» Максвелла и Итона-Липмана // Компьютерная оптика. — 2002. — № 24. — С. 53–57. [Kotlyar V. V., Melekhin F. S. Calculation of Generalized Lenses Maxwell's

“Fisheye” and Eaton–Lippmann // Computer Optics. — 2002. — No 24. — Pp. 53–57. — (in russian).]

UDC 514.88; 519.62; 519.63; 535.016; 537.87

**Calculating Phase Retardation Field in Smoothly Irregular
Integrated-Optical Waveguide (Using Thin-Film Generalized
Waveguide Luneburg Lens)**

L. A. Sevastyanov, D. S. Kulyabov, A. L. Sevastyanov

*Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198*

Maxwell's equations are extremely simple and elegant. However, the specific calculations require much more sophisticated approaches. Thus, in the problems of calculation of non-regular integrated optical waveguides a few basic techniques are used. The authors propose to use the method of adiabatic waveguide modes. This method follows in the footsteps of Luneburg works. Moreover, the method has a clear geometric interpretation. As well as Luneburg equations, the equations obtained by this correspond to the Hamilton equations on the cotangent bundle over the configuration space. Moreover, to calculate ray paths a simple geometrization is used, when the refractive index is represented as a metric of some efficient space. Thus, the phase function is evaluated as an action along the trajectory.

Thin-film Luneburg lens is an interesting object in the general theoretical sense as well as in practical one. Its study allows to further describe a class of objects, but it is an essential element for the construction of a purely optical control devices. Thus, the authors consider the method of adiabatic modes most suitable for studies of such object as a thin-film generalized waveguide Luneburg lens.

Key words and phrases: Maxwell's equations, equations of Lagrange, equations of Hamilton, integrated-optical waveguides, method of adiabatic waveguide modes.