

Уравнения Максвелла в криволинейных координатах

Д. С. Кулябов, Н. А. Немчанинова

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто–Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия*

При записи уравнений Максвелла в криволинейных координатах обычно используется громоздкий векторный формализм. Предлагается заменить его более простым тензорным описанием.

Ключевые слова: волноводы, уравнения Максвелла, тензорный формализм.

1. Введение

В исследованиях интегрально-оптических волноводов можно выделить два этапа: исследования регулярных планарных волноводов и исследования нерегулярных интегрально-оптических векторных волноводов. В тех и в других исследованиях решаются уравнения Максвелла с использованием граничных уравнений. Планарные волноводы образованы стопкой плоских параллельных диэлектрических пластинок и тонкоплёночных слоёв, так что все границы плоские и параллельны между собой. Это обусловило запись уравнений Максвелла и граничных условий в декартовых координатах. Исследование нерегулярных интегрально-оптических волноводов с круговыми и сферическими симметриями границ раздела побуждают к использованию криволинейных координат. Имеется большое число публикаций в этом направлении. Все они имеют дело с «векторной формой» уравнений, для которой характерна большая громоздкость выражений. Использование «тензорной формы» записи уравнений представляется нам более простой и изящной. Чтобы продемонстрировать эквивалентность двух форм, мы подробно приводим параллельно все используемые выражения в тензорной и векторной форме, а также формулы перехода между ними.

Предлагается следующий алгоритм преобразования. Уравнения в векторном формализме в декартовых координатах преобразуются в тензорную запись путём формальной замены оператора $\vec{\nabla}$ на ковариантную производную ∇_i . Затем производится замена координат. После этого тензорная запись переводится в векторную.

В данной работе рассматривается трёхмерное пространство. Индексы пробегают диапазон $i = 1, 2, 3$.

2. Преобразование координат в тензорном формализме

Напомним, как производятся преобразования дифференциальных операторов [1]. Градиент:

$$\text{grad } \varphi = (\text{grad } \varphi)_i e^i = \nabla_i \varphi e^i.$$

Поскольку φ — скаляр, то можем заменить ковариантную производную на частную:

$$(\text{grad } \varphi)_i = \nabla_i \varphi = \partial_i \varphi. \quad (1)$$

Таким образом, при преобразовании координат компоненты градиента не изменяются.

Распишем в компонентах:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \mathbf{e}^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \mathbf{e}^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \mathbf{e}^3. \quad (2)$$

Дивергенция:

$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \nabla_i a^i = A_{,i}^i - \Gamma_{ji}^i A^j = A_{,i}^i + A^i \frac{(\sqrt{g})_{,i}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} a^i). \quad (3)$$

Распишем в компонентах:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{g} a^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\sqrt{g} a^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\sqrt{g} a^3)}{\partial x^3} \right]. \quad (4)$$

Ротор:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= [\vec{\nabla}, \vec{a}] = \vec{\nabla} \times \vec{a} = (\text{rot } \vec{a})^i \mathbf{e}_i. \\ (\text{rot } \vec{a})^i &= E^{ijk} \nabla_j a_k = E^{ijk} a_{k;j}, \end{aligned} \quad (5)$$

где E^{ijk} — тензор Леви-Чевиты, выражающийся через ε^{ijk} — символ Леви-Чевиты следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & P(i, j, k) \text{ — чётная перестановка;} \\ -1, & P(i, j, k) \text{ — нечётная перестановка;} \\ 0, & \text{среди } i, j, k \text{ есть равные.} \end{cases}$$

$$E_{ijk} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk}; \quad E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk}.$$

Поскольку в (5) фигурируют члены типа $a_{[k;j]}$, то связности сокращаются, и мы можем заменить ковариантную производную на частную:

$$(\text{rot } \vec{a})^i = E^{ijk} a_{k,j}. \quad (6)$$

Распишем в компонентах:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \left[\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right] \mathbf{e}_1 + \left[\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \right] \mathbf{e}_2 + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right] \mathbf{e}_3 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Лапласиан можно получить из (3) для дивергенции, положив $a^i = g^{ij} f_{,j}$.

$$\Delta \varphi = \text{div } \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \varphi). \quad (8)$$

3. Соответствие между тензорной и векторной записями векторов

В то время, как в тензорном формализме обычно используется координатный базис $\mathbf{e}_i = \partial/\partial x^i$, в векторном формализме базис задаётся как $\hat{\mathbf{e}}_i = \partial/\partial s^i$, где ds^i — элемент длины по соответствующей координате [2].

Считая систему координат ортогональной, запишем $ds^2 = g_{ii}dx^i dx^i = h_i^2(dx^i)^2$, где $h_i = \sqrt{g_{ii}} = 1/\sqrt{g^{ii}}$ — коэффициенты Ламе. Обычно для коэффициентов Ламе суммирование по индексу не производится. Заметим также, что $\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3$.

Расписывая вектор в тензорном и векторном виде, найдём соотношение между этими формализмами (векторный вид будем помечать шапочкой):

$$\vec{f} = f^i e_i = f^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \vec{f} = \hat{f}^i \hat{e}_i = \hat{f}^i \frac{\partial}{\partial s^i} = \hat{f}^i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Таким образом для контравариантных компонент:

$$f^i = \frac{1}{h_i} \hat{f}^i. \quad (9)$$

Аналогично для ковекторов: $\vec{f} = f_i e^i = f_i dx^i$, $\vec{f} = \hat{f}_i \hat{e}^i = \hat{f}_i ds^i = \hat{f}_i h_i dx^i$.
Таким образом для ковариантных компонент:

$$f_i = h_i \hat{f}_i.$$

4. Дифференциальные операторы в произвольной системе координат

Для градиента из (1) и (9) получаем:

$$\text{grad } \varphi = \partial_i \varphi e^i = \frac{1}{h_i} \partial_i \varphi \hat{e}^i.$$

Распишем в компонентах:

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \hat{e}^1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \hat{e}^2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \hat{e}^3.$$

Для дивергенции из (3) и (9) получаем:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} a^i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} \frac{\hat{a}^i}{h_i} \right).$$

Распишем в компонентах:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_2 h_3 \hat{a}^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(h_1 h_3 \hat{a}^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(h_1 h_2 \hat{a}^3)}{\partial x^3} \right).$$

Для ротора из (6) и (3) получаем:

$$\text{rot } \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} a_{k,j} e_i = \frac{h_i}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \partial_j (h_k \hat{a}_k) \hat{e}_i.$$

Распишем в компонентах:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} & \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ h_1 \hat{a}_1 & h_2 \hat{a}_2 & h_3 \hat{a}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 \hat{a}_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2 \hat{a}_2)}{\partial x^3} \right] \hat{e}_1 + \\ & + \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 \hat{a}_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3 \hat{a}_3)}{\partial x^1} \right] \hat{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 \hat{a}_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 \hat{a}_1)}{\partial x^2} \right] \hat{e}_3. \end{aligned}$$

Для лапласиана получаем запись, эквивалентную (8).

Распишем в компонентах:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right) \right].$$

5. Некоторые криволинейные координаты

5.1. Цилиндрические координаты

В рамках стандарта ISO 31-11 координаты (x^1, x^2, x^3) обозначаются как (ρ, φ, z) . Закон преобразования координат от декартовых к цилиндрическим:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Закон преобразования координат от цилиндрических к декартовым:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \\ z = z. \end{cases}$$

Метрический тензор:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} = \rho.$$

Коэффициенты Ламе: $h_1 \equiv h_\rho = 1$, $h_2 \equiv h_\varphi = \rho$, $h_3 \equiv h_z = 1$.

Символы Кристоффеля: $\Gamma_{22}^1 = -\rho$, $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\rho}$. Остальные символы Кристоффеля равны нулю.

5.2. Сферические координаты

В рамках стандарта ISO 31-11 координаты (x^1, x^2, x^3) обозначаются как (r, ϑ, φ) . Закон преобразования координат от декартовых к сферическим:

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = r \cos \vartheta. \end{cases}$$

Закон преобразования координат от сферических к декартовым:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right), \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases}$$

Метрический тензор:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} = r^2 \sin \vartheta.$$

Коэффициенты Ламе: $h_1 \equiv h_r = 1$, $h_2 \equiv h_\vartheta = r$, $h_3 \equiv h_\varphi = r \sin \vartheta$.

Символы Кристоффеля: $\Gamma_{22}^1 = -r$, $\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \vartheta$, $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$, $\Gamma_{33}^2 = -\cos \vartheta \sin \vartheta$, $\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = -\operatorname{ctg} \vartheta$. Остальные символы Кристоффеля равны нулю.

6. Уравнения Максвелла в криволинейных координатах

Будем рассматривать уравнения Максвелла в системе СГС [3, 4].

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi \rho; \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь \vec{E} и \vec{H} — напряжённости электрического и магнитного полей, \vec{D} и \vec{B} — электрическая и магнитная индукция, \vec{j} и ρ — плотности тока и заряда.

Будем считать среду линейной, изотропной, однородной и не обладающей диссипацией. Для изотропной среды $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, где μ и ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды. В силу линейности среды сигнал можно разложить на сумму монохроматических волн, которые можно рассматривать в комплексной форме: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\tilde{E}}(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$. Переход к действительным полям осуществляется следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \vec{\tilde{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\vec{\tilde{E}}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) + \vec{\tilde{E}}^*(\vec{r}) \exp(i\omega t) \right],$$

где $\vec{\tilde{E}}(\vec{r})$ — комплексная амплитуда.

При отсутствии источников ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) уравнения Максвелла (10) для комплексных амплитуд сводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{E}} &= ik\mu \vec{\tilde{H}}; \\ \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{H}} &= -ik\varepsilon \vec{\tilde{E}}; \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{E}} &= 0; \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{H}} &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число.

Решать можно двумя путями: записать уравнения Максвелла сразу в векторном виде, либо произвести вычисления в тензорном виде, а результаты перевести в векторный вид.

6.1. Решение в векторном виде

Запишем уравнения Максвелла (11) в криволинейных координатах в векторном виде (тильду писать не будем во избежании громоздкости).

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 \hat{E}_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2 \hat{E}_2)}{\partial x^3} \right] = ik\mu \hat{H}^1; \quad (12a)$$

$$\frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 \hat{E}_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3 \hat{E}_3)}{\partial x^1} \right] = ik\mu \hat{H}^2; \quad (12b)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 \hat{E}_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 \hat{E}_1)}{\partial x^2} \right] = ik\mu \hat{H}^3; \quad (12c)$$

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 \hat{H}_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2 \hat{H}_2)}{\partial x^3} \right] = -ik\varepsilon \hat{E}^1; \quad (12d)$$

$$\frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 \hat{H}_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3 \hat{H}_3)}{\partial x^1} \right] = -ik\varepsilon \hat{E}^2; \quad (12e)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 \hat{H}_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 \hat{H}_1)}{\partial x^2} \right] = -ik\varepsilon \hat{E}^3; \quad (12f)$$

$$\frac{\partial(h_2 h_3 \hat{E}^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(h_1 h_3 \hat{E}^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(h_1 h_2 \hat{E}^3)}{\partial x^3} = 0; \quad (12g)$$

$$\frac{\partial(h_2 h_3 \hat{H}^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(h_1 h_3 \hat{H}^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(h_1 h_2 \hat{H}^3)}{\partial x^3} = 0. \quad (12h)$$

Система переопределена, так как для шести переменных имеем восемь уравнений. Следовательно, необходимо ввести два координатных условия.

Электромагнитное поле в волноводе не является чисто поперечным, но и имеет и продольную составляющую [3]. В зависимости от того, какое из полей имеет продольную составляющую, можно выделить ТЕ-волну (электрическое поле не имеет продольной составляющей) и ТМ-волну (магнитное поле не имеет продольной составляющей). Очевидно, что в линейной среде общее решение можно разделить на ТЕ-моду и ТМ-моду.

Считая, что волна распространяется вдоль координаты x^3 , будем искать решение в виде ТЕ-моды ($\hat{E}_3 = 0$) и ТМ-моды ($\hat{H}_3 = 0$). Начнём со случая ТЕ-моды. Идея решения заключается в введении новой потенциальной функции U и выражении через неё компонент \hat{E}_i и \hat{H}_i .

Считая, что для криволинейных координат справедливо условие (первое координатное условие)

$$h_3 = 1, \quad (13)$$

из (12g) получим:

$$\hat{E}_1 = \hat{E}^1 = \frac{ik\mu}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x^2}, \quad \hat{E}_2 = \hat{E}^2 = -\frac{ik\mu}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x^1}. \quad (14)$$

Подставляя \hat{E}_1 в (12b) и \hat{E}_2 в (12a), получим:

$$\hat{H}_1 = \hat{H}^1 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x^1} \right), \quad \hat{H}_2 = \hat{H}^2 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x^2} \right). \quad (15)$$

Для выполнения (12f) после подстановки (15) необходимо, чтобы криволинейные координаты удовлетворяли также следующему условию (второе координатное условие):

$$\frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) = 0. \quad (16)$$

Из (12e) получаем: $\hat{H}^3 = \hat{H}_3 = k^2 \varepsilon \mu U + \frac{\partial^2 U}{\partial (x^3)^2}$. Подставляя полученные значения в (12с), получаем уравнение для U :

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial (x^3)^2} + k^2 \varepsilon \mu U = 0.$$

Аналогично для ТМ-моды. Исходя из симметрии системы (12), решения для ТМ-моды можно получить механически заменой $\hat{E}_i \rightarrow \hat{H}_i$, $\hat{H}_i \rightarrow \hat{E}_i$. Вместо функции U будет аналогичная функция V .

6.2. Решение в тензорном виде

Теперь решение будем выполнять в тензорном виде, а получившийся результат переведем в векторный вид.

Проведем все рассуждения аналогично предыдущему пункту. Запишем уравнения Максвелла (11) в криволинейных координатах в тензорном виде (тильду писать не будем во избежание громоздкости).

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right] = ik\mu H^1; \quad (17a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} \right] = ik\mu H^2; \quad (17b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right] = ik\mu H^3; \quad (17c)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial H_3}{\partial x^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x^3} \right] = -ik\varepsilon E^1; \quad (17d)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial H_1}{\partial x^3} - \frac{\partial H_3}{\partial x^1} \right] = -ik\varepsilon E^2; \quad (17e)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right] = -ik\varepsilon E^3; \quad (17f)$$

$$\frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} = 0; \quad (17g)$$

$$\frac{\partial H^1}{\partial x^1} + \frac{\partial H^2}{\partial x^2} + \frac{\partial H^3}{\partial x^3} = 0. \quad (17h)$$

Будем использовать первое координатное условие, аналогичное (13):

$$\sqrt{g_{33}} = 1 \equiv h_3 = 1. \quad (18)$$

Из (17g) получим (учитывая также (3) и (18)):

$$\begin{aligned} E_1 = g_{11} E^1 = g_{11} \frac{ik\mu}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial x^2}, \quad E_2 = g_{22} E^2 = -g_{22} \frac{ik\mu}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial x^1}, \\ \hat{E}_1 = \frac{1}{h_1} E_1 = \frac{ik\mu}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x^2}, \quad \hat{E}_2 = \frac{1}{h_2} E_2 = -\frac{ik\mu}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x^1}. \end{aligned}$$

Подставляя E_1 в (17b) и E_2 в (17a), получим (опять учитываем (3) и (18)):

$$H_1 = g_{11}H^1 = \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial x^1} \right), \quad H_2 = g_{22}H^2 = \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial x^2} \right),$$

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{h_1} H_1 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x^1} \right), \quad \hat{H}_2 = \frac{1}{h_2} H_2 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x^2} \right).$$

Аналогично (16) введём второе координатное условие: $\frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) = 0$. Из (17e) получаем (используя (3) и (18)):

$$H_3 = k^2 \varepsilon \mu U + \frac{\partial^2 U}{\partial (x^3)^2}, \quad H^3 = \frac{1}{g_{33}} H_3 = H_3, \quad \hat{H}_3 = \frac{1}{h_3} H_3 = k^2 \varepsilon \mu U + \frac{\partial^2 U}{\partial (x^3)^2}.$$

Подставляя полученные значения в (17c), получаем уравнение для U :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial (x^3)^2} + k^2 \varepsilon \mu U = 0.$$

7. Заключение

Использование тензорного формализма при оперировании векторами в криволинейных координатах представляется оправданным. Более того, наиболее предпочтительным является использование в вычислениях именно тензорного формализма, а переход к векторам — только в результирующих выражениях. При этом использование тензорного формализма предпочтительно в неоднородных и неизотропных средах, а также при использовании неортогональных координат.

Литература

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986. [*Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T. Sovremennaya geometriya: Metodih i prilozheniya.* — М.: Nauka, 1986.]
2. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. [*Mors F. M., Feshbach G. Metodih teoreticheskoy fiziki.* — М.: Izdatelstvo inostrannoy literaturih, 1960.]
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: МИР, 1988. [*Vaynshteyn L. A. Ehlektromagnitnihe volnih.* — М.: MIR, 1988.]
4. Денисов В. И. Лекции по электродинамике. — М.: УНЦ ДО, 2005. [*Denisov V. I. Lekcii po ehlektrodinamike.* — М.: UNC DO, 2005.]

UDC 537.8:514.7:621.372.81

Maxwell's Equations in Curvilinear Coordinates D. S. Kulyabov, N. A. Nemchaninova

*Telecommunication Systems Department
Peoples Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia*

When writing the Maxwell equations in curvilinear coordinates, usually used a vector-based formalism. Proposed to replace it by easier tensor-based formalism.

Key words and phrases: waveguide, Maxwell's equations, tensor formalism.