РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СОЦИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ ТРЕТЬЕЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНОЙ И ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

(MMSED-2010)

23–25 июня 2010 г.

Научные редакторы
М. Г. Дмитриев, А. П. Петров, Н. П. Третьяков

URSS
МОСКВА

APPLICATION OF STOCHASTIC DIFFERENCIAL EQUATIONS TO MODEL POPULATION SYSTEMS

A.V. Demidova, D.S. Kulyabov, L.A.Sevastianov
demidav@gmail.com, dharma@mx.pfu.edu.ru, sevast@sci.pfu.edu.ru
Peoples' Friendship University of Russia

For simulate the interactions of population systems are typically used deterministic models, for example based on a system of differential equations V. Volterra. But they did not accurately describe the real system, because not take into account the probabilistic nature of the processes of birth, death and random fluctuations that occur over time in the environment, leading to random fluctuations of model parameters. To describe such systems is proposed to use the kinetic method [1]. This method describes the universal rules for Fokker-Planck equation (and stochastic differential equations), equivalent to master equations of the process of birth-death population system.

Для моделирования взаимодействий в популяционных системах обычно используются детерминистические модели, например основанные на системе дифференциальных уравнений, выведенных В.Вольтерра. Математическая модель взаимодействия типа «хищник – жертва» была разработана итальянским математиком В. Вольтерра (1926г.), глубокие исследования которого в области экологических проблем заложили фундамент математической теории биологических сообществ или так называемой математической экологии, аппаратом которой служат дифференциальные и интегрально-дифференциальные уравнения.

В своей книге[2] Вольтерра сначала формулирует некоторые предположения об объектах, которые предполагается изучать, а затем проводится математическое исследование свойств этих объектов. На основании сделанных предположений для описания численности видов может быть получена система дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2,$$

где N_1 и N_2 численность видов(хищника и жертвы), а ε и γ коэффициенты прироста вида и коэффициенты, соответствующие потребности в пище для каждого из двух видов.

Данная модель эволюции популяций является детерминистической, и, несмотря на то, что эта модель качественно отражает циклические свойства реальных систем, существуют аспекты, по которым она не может служить их точным описанием. Во-первых, не учитывается вероятностный характер процессов рождения-гибели, А во-вторых, не учитываются случайные колебания, которые происходят со временем в среде, приводящие к случайным флуктуациям параметров модели[3].

Широкий круг явлений можно моделировать с помощью класса процессов рождения гибели. При таком подходе рассматривается условная вероятность перехода системы из одного состояния в другое $P(x,t\,|\,x',t') =: P(x,t)$ и соответствующее управляющее уравнение.

Рассмотрим систему «хищник – жертва». Для нее возможны следующие процессы:

$$X + A \xrightarrow{k_1} 2X$$

$$X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y$$

$$Y \xrightarrow{k_3} B$$

Зададим распределение вероятности $P(x,y,t)$ для числа особей в заданный и предполагаем, что для бесконечно малого временного интервала Δt имеют место следующие формулы для вероятностей переходов:

$$P(x \to x+1; y \to y) = k_1 ax\Delta t$$

$$P(x \to x-1; y \to y+1) = k_2 xy\Delta t$$

$$P(x \to x; y \to y-1) = k_3 y\Delta t$$

$$P(x \to x; y \to y) = 1 - (k_1 ax + k_2 xy + k_3 y)\Delta t$$

Тогда управляющее уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = (k_1 a(x-1)P(x-1,y) + k_2(x+1)(y-1)P(x+1,y-1) +$$

$$+ k_3(y+1)P(x,y+1) - (k_1 ax + k_2 xy + k_3 y)P(x,y),$$

где k_i и a коэффициенты, характеризующие данную систему.

В работе изучен метод[1], позволяющий стандартным образом получить для любой системы типа рождения-гибели стохастическое дифференциальное уравнение. Для описания таких систем предлагается использовать кинетический метод, который описывает в своей книге К.В.Гардинер. Данный метод описывает универсальные правила получения уравнений Фоккера-Планка (а как следствие и стохастических дифференциальных уравнений) эквивалентных управляющим уравнениям, соответствующих процессу рождения-гибели популяционной системы.

По предположению $P(\mathbf{x},t)$ представима в виде суперпозиции многомерных некоррелированных пуассоновских распределений:

$$P(\mathbf{x},t)=\int\prod_{a}\frac{e^{-\alpha_a}\alpha_a^{x_a}}{x_a!}f(\boldsymbol{\alpha},t)d\boldsymbol{\alpha}$$

Далее рассмотрим производящую функцию

$$G(\mathbf{s},t)=\sum_{\mathbf{x}}\mathbf{s}^{\mathbf{x}}P(\mathbf{x},t)=\int\exp\left[\sum_{a}(s_a-1)\alpha_a\right]f(\boldsymbol{\alpha},t)d\boldsymbol{\alpha}$$

и преобразовав дифференциальную форму данной производящей функции, для системы «хищник – жертва» было получено следующее уравнение Фоккера-Планка в представлении Пуассона:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\alpha},t)}{\partial t}=-\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_x}(k_1a\alpha_x-k_2\alpha_x\alpha_y)f(\boldsymbol{\alpha},t)-\frac{\partial}{\partial\alpha_y}(k_2\alpha_x\alpha_y-k_3\alpha_y)f(\boldsymbol{\alpha},t)\right)+$$

$$+\frac{\partial^2}{(\partial\alpha_x)^2}k_1a\alpha_xf(\boldsymbol{\alpha},t)-\frac{\partial^2}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}k_2\alpha_x\alpha_yf(\boldsymbol{\alpha},t)+\frac{\partial^2}{(\partial\alpha_y)^2}k_2\alpha_x\alpha_yf(\boldsymbol{\alpha},t)$$

Кроме того данный метод позволяет получить стохастические дифференциальные уравнения, которые учитывают вероятностный характер процессов системы, не только для систем «хищник – жертва», описанных Лоткой и Волльтера, но и других систем типа рождения-гибели

Литература

1. *Гардинер К.В.,* Стохастические методы в естественных науках. Мир, 1986.
2. *Вольтерра В.,* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
3. *Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б.,* Математические модели биологических продукционных процессов. Изд-во МГУ, 1988.

MANAGING OF A COMMERCIAL BANK ON RISK-MANAGEMENT PRINCIPLES (UNIVERSAL RISK MANAGEMENT APPROACH)

G.G. Dimitriadi
gdimitriadi@yahoo.com

The Finance Academy under the Government of the Russian Federation

Usually risk-management in a commercial bank is considered as a one of its internal activities. Top-management creates a special division, estimating and monitoring risks of a bank.