ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2015, том 4, № 3, с. 201–205

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.125.4,539.128,539.1.09

ПРОБЛЕМА ПОСТРОЕНИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

© 2015 г. Д. С. Кулябов[1, 2], А. В. Королькова[1], Л. А. Севастьянов[1, 2]

[1]*Российский университет дружбы народов, Москва*

[2] *Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Московская область*

e-mail: yamadharma@gmail.com, avkorolkova@gmail.com, leonid.sevast@gmail.com

Поступила в редакцию 28.02.2015 г.

Гамильтонов формализм представляется крайне элегантным и удобным в задачах механики. Однако его применение к классическим полевым теориям представляется достаточно трудной задачей. Действительно, можно установить однозначное соответствие между гамильтонианом и лагранжианом в случае гиперрегулярного лагранжиана, что не выполняеся в калибровочно-инвариантных теориях поля. В случае нерегулярного лагранжиана применяется обычно гамильтонов формализм со связями, использование которого связано с определенными трудностями. В статье предлагается переформулировка задачи для случая полей без источников, что позволяет использовать симплектический гамильтонов формализм. Предполагаемый формализм будет использован авторами в дальнейшем для обоснования методов векторных (гамильтоновых) расслоений в трансформационной оптике.

Ключевые слова: уравнения Максвелла; криволинейные координаты; симплектическое многообразие; гамильтонов формализм; удвоение переменных.

DOI: 10.1134/S2304487X15030086

1. ВВЕДЕНИЕ

В геометрической оптике известен и широко применяется гамильтонов формализм [1]. В качестве гамильтониана используется гамильтониан материальной частицы.

В случае же волновой оптики возникает ряд трудностей при построении гамильтонова формализма. Поскольку лагранжиан электромагнитного поля не является регулярным, то построение симплектического гамильтонового формализма не представляется возможным. Для калибровочных теорий обычно применяют дираковский формализм со связями.

Однако, если ограничиться рассмотрением только систем без источников, то возможно построение стандартного симплектического гамильтонового формализма.

В данной статье демонстрируется невозможность построения симплектического гамильтониана для общего случая электромагнитного поля. Для случая поля без источников строится общий метод построения симплектического гамильтониана и приводится пример реализации такого построения.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

1. Будем использовать нотацию абстрактных индексов [2]. В данной нотации тензор как целостный объект обозначается просто индексом (например, x^i), компоненты обозначаются подчеркнутым индексом (например, $x^{\underline{i}}$).

2. Будем придерживаться следующих соглашений. Греческие индексы (α, β) будут относиться к четырехмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{\alpha} = \overline{0, 3}$. Латинские индексы из середины алфавита (i, j, k) будут относиться к трехмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{i} = \overline{1, 3}$.

3. Запятой в индексе обозначается частная производная по соответствующей координате ($f_{,i} := \partial_i f$); точкой с запятой — ковариантная производная ($f_{;i} := \nabla_i f$).

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 13-01-00595, 14-01-00628, 15-07-08795.

4. Для записи уравнений электродинамики в работе используется система СГС симметричная [3].

3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Будем записывать уравнения Максвелла как через полевые переменные, так и в калибровочно-инвариантном виде (в формализме расслоений) [4–9].

3.1. Уравнения Максвелла через полевые переменные

Уравнения Максвелла через полевые переменные в тензорном формализме в голономном базисе:

$$\begin{aligned} \nabla_i D^i &= 4\pi\rho, \\ e^{ijk}\nabla_j H_k - \frac{1}{c}\partial_t D^i &= \frac{4\pi}{c} j^i, \\ \nabla^i B_i &= 0, \\ e_{ijk}\nabla^j E^k + \frac{1}{c}\partial_t B_i &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь e_{ijk} — тензор Леви–Чивиты (альтернирующий тензор)[1].

Полевые функции E^i и B^i можно представить через потенциалы поля φ и A^i:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}(\vec{A}, \vec{E}) = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A},$$

или в индексной нотации:

$$\begin{aligned} B^i &= (\mathrm{rot}\vec{A})^i = e^{ikl}\partial_k A_l, \\ E_i &= -\partial_i\varphi - \partial_0 g_{ij} A^j. \end{aligned} \tag{2}$$

3.2. Уравнения Максвелла в формализме расслоений

Введем тензор электромагнитного поля как кривизну на касательном расслоении:

$$F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \tag{3}$$

где связность A^α имеет смысл 4-вектора потенциала $A^\alpha = (\varphi, \vec{A})$.

Распишем тензор (3) по компонентам с учетом (2):

$$F_{0\underline{i}} = \partial_0 A_{\underline{i}} - \partial_{\underline{i}} A_0 = -\partial_0 A^{\underline{i}} - \partial_i A^0 = E_{\underline{i}},$$

$$F_{\underline{ik}} = \partial_{\underline{i}} A_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}} A_{\underline{i}} = -\varepsilon_{\underline{ikl}} B^{\underline{l}}.$$

[1] $e_{ijk} = \sqrt{{}^3g}\,\varepsilon_{ijk}, \quad e^{ijk} = \dfrac{1}{\sqrt{{}^3g}}\varepsilon^{ijk},$

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-{}^4g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad e^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-{}^4g}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

Аналогично введем тензор Минковского (тензор смещений) $G^{\alpha\beta} := F^{\alpha\beta} - 4\pi S^{\alpha\beta}$ ($S^{\alpha\beta}$ есть тензор поляризации–намагничения) [10].

Таким образом тензоры $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ имеют следующие компоненты

$$F_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E_2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E_3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -D_2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -D_3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G^{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D^2 & H^3 & 0 & -H_1 \\ D^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $E_{\underline{i}}$, $H_{\underline{i}}$ — компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей соответственно; $D^{\underline{i}}$, $B^{\underline{i}}$ — компоненты векторов электрической и магнитной индукции соответственно.

Запишем уравнение Максвелла через тензоры электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ [11–13]:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta. \tag{5}$$

3.3. Лагранжиан электромагнитного поля

Построим лагранжиан (лагранжеву плотность) H в явном виде.

Уравнение (4) представляет собой дифференциальное тождество Бьянки, то есть выполняется в силу построения (3). Для построения лагранжиана достаточно использовать только группу уравнений (5).

Тогда лагранжиан будет иметь вид:

$$L = \frac{-1}{16\pi}F_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}J_\alpha A^\alpha.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид:

$$\nabla_\beta \frac{\delta L}{\delta A^\alpha_\beta} - \frac{\delta L}{\delta A^\alpha} = 0. \tag{6}$$

3.4. Проблема построения гамильтониана электромагнитного поля

Гамильтониан (гамильтонова плотность) строится через лагранжиан с помощью преобразований Лежандра:

$$H := p_\alpha A^\alpha - L, \tag{7}$$

где p_α – плотность импульса, L – лагранжиан.

Так как в гамильтоновом формализме все уравнения строятся через обобщенные координаты и импульсы, то в (6) требуется выразить обобщенный импульс p^α через скорости $\dot{A}^\alpha$, чтобы выписать гамильтонову плотность (7) и соответствующие ей уравнения Гамильтона:

$$\dot{A}^\alpha = \frac{\delta H}{\delta p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = \frac{-\delta H}{\delta A^\alpha}.$$

При этом требуется, чтобы детерминант матрицы Гессе (гессиан) был отличен от нуля:

$$\det H(L) \neq 0,$$

где элементы матрицы Гессе:

$$\{H(L)\}_{\underline{\alpha\beta}} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{A}^{\underline{\alpha}} \partial \dot{B}^{\underline{\beta}}}.$$

Но $F_{00} = 0$ и $\{H(L)\}_{00} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial(\dot{A}^0)^2} = 0$. Следовательно, $\det H(L) = 0$. То есть лагранжиан нерегулярный, и построение симплектического гамильтонового формализма в данном случае невозможно.

4. ПОСТРОЕНИЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Оказывается, что в случае отсутствия источников ($j_\alpha = 0$) можно построить симплектический гамильтонов формализм, произведя необходимую замену переменных. В качестве одного из методов рассмотрим метод удвоения переменных [14, 15]. Данный метод применим в случае, когда система содержит лишь обобщенные переменные, а обобщенные импульсы отсутствуют.

4.1. Метод удвоения переменных

Рассмотрим систему s уравнений

$$\dot{q}^n = f^n(q^r, q^r_{;i}, x^i, t). \tag{8}$$

Зададим пространство R^{2s} со следующими координатами:

$$\xi^{\underline{n}} := q^{\underline{n}}, \quad \xi^{\underline{n}+s} := p_{\underline{n}}, \quad \xi^\alpha \in R^{2s};$$

$$\underline{n} = \overline{0, s}, \quad \underline{a} = \overline{0, 2s}.$$

Введем скобку Пуассона:

$$\{A(\xi^c, t), B(\xi^c, t)\} = \Omega^{\underline{ab}} \frac{\partial A(\xi^c, t)}{\partial \xi^{\underline{a}}} \frac{\partial B(\xi^c, t)}{\partial \xi^{\underline{b}}},$$

$$\Omega^{\underline{ab}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c = \overline{0, 2s}.$$

А гамильтониан определим следующим образом:

$$H(q^n, p_n, x^i, t) = p_{\underline{n}} f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t). \tag{9}$$

Тогда первая группа уравнений Гамильтона будет совпадать с исходной системой (8), а вторая группа будет иметь следующий вид:

$$\dot{p}_{\underline{n}} = \frac{-\delta H}{\partial q^{\underline{n}}} = -p_{\underline{m}} \frac{\delta f^{\underline{m}}}{\partial q^{\underline{n}}}.$$

4.2. Соответствие методу

Установим, что уравнения Максвелла без источников удовлетворяют условию применимости метода удвоения переменных. Для этого перепишем уравнения (1) в следующем виде:

$$\partial_t B_i = -c e_{ijk} \nabla^j E^k,$$

$$\partial_t D^i = c e^{ijk} \nabla_j H_k,$$

$$\nabla^i B_i = 0,$$

$$\nabla^i D_i = 0.$$

Видно, что вторая пара уравнений нарушает условие применимости метода. Однако, можно показать, что в случае отсутствия источников эти уравнения линейно зависят от остальных уравнений Максвелла. Для этого запишем первое и второе уравнения в компонентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}}[E_{3,2} - E_{2,3}] &= \frac{-1}{c}\partial_t B^1, \\ \frac{1}{\sqrt{g}}[E_{1,3} - E_{3,1}] &= \frac{-1}{c}\partial_t B^2, \\ \frac{1}{\sqrt{g}}[E_{2,1} - E_{1,2}] &= \frac{-1}{c}\partial_t B^3. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}[H_{3,2} - H_{2,3}] = \frac{1}{c}\partial_t D^1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{g}}[H_{1,3} - H_{3,1}] = \frac{1}{c}\partial_t D^2, \tag{11}$$
$$\frac{1}{\sqrt{g}}[H_{2,1} - H_{1,2}] = \frac{1}{c}\partial_t D^3.$$

И вторые два уравнения распишем аналогичным образом:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_t(\sqrt{g}B^i) = \frac{1}{\sqrt{g}}[\partial_1(\sqrt{g}B^1) + \\ + \partial_2(\sqrt{g}B^2) + \partial_3(\sqrt{g}B^3)] = 0. \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_t(\sqrt{g}D^i) = \frac{1}{\sqrt{g}}[\partial_1(\sqrt{g}D^1) + \\ + \partial_2(\sqrt{g}D^2) + \partial_3(\sqrt{g}D^3)] = 0. \tag{13}$$

Дифференцируя обе части уравнений (10) и (11) получаем (считая, что g не зависит от времени):

$$E_{3,21} - E_{2,31} = \frac{-1}{c}\partial_t\partial_1(\sqrt{g}B^1),$$
$$E_{1,32} - E_{3,12} = \frac{-1}{c}\partial_t\partial_2(\sqrt{g}B^2), \tag{14}$$
$$E_{2,13} - E_{1,23} = \frac{-1}{c}\partial_t\partial_3(\sqrt{g}B^3).$$

$$H_{3,21} - H_{2,31} = \frac{1}{c}\partial_t\partial_1(\sqrt{g}D^1),$$
$$H_{1,32} - H_{3,12} = \frac{1}{c}\partial_t\partial_2(\sqrt{g}D^2), \tag{15}$$
$$H_{2,13} - H_{1,23} = \frac{1}{c}\partial_t\partial_3(\sqrt{g}D^3).$$

Складывая почленно (14) и (15) получаем (12) и (13) соответственно.

Таким образом, система уравнений Максвелла переходит в следующую редуцированную систему, удовлетворяющую условию метода:

$$\partial_t B_i = -ce_{ijk}\nabla^j E^k,$$
$$\partial_t D^i = ce^{ijk}\nabla_j H_k. \tag{16}$$

4.3. Пример реализации гамильтониана

Зададим материальные уравнения:

$$D^i = \varepsilon^i_j(x^k)E^j, \quad B^i = \mu^i_j(x^k)H^j.$$

Перепишем (16) в следующем виде (считая, что метрика не зависит явным образом от времени):

$$\partial_t E^i = c(\varepsilon^{-1})_{l}{}^{i}\frac{1}{\sqrt[3]{g}}\varepsilon^{ljk}H_{k,j},$$

$$\partial_t H^i = -c(\mu^{-1})_{l}{}^{i}\frac{1}{\sqrt[3]{g}}\varepsilon^{ljk}E_{k,j}.$$

Выберем обобщенные координаты в виде:

$$q^n = (E^1, E^2, E^3, H^1, H^2, H^3)^T, \quad \underline{n} = \overline{1,6}.$$

Система (8) приобретает вид:

$$\dot{q}^i = f^{\underline{i}}(q^n, q^{n;i}, x^i, t) = c(\varepsilon^{-1})^{\underline{i}}_{l}\frac{1}{\underline{\sqrt[3]{g}}}\varepsilon^{\underline{ljk}}q_{\underline{k}+3,j},$$

$$\dot{q}^{i+3} = f^{\underline{i+3}}(q^n, q^{n;i}, x^i, t) = -c(\mu^{-1})^{\underline{i}}_{l}\frac{1}{\underline{\sqrt[3]{g}}}\varepsilon^{\underline{ljk}}q_{\underline{k},j}.$$

Запишем гамильтониан на основе этой системы и равенства (9):

$$H(q^n, p_n, x^i, i) = p_{\underline{n}}f^{\underline{n}}(q^n, q^{n;i}, x^i, t) =$$
$$= p_{\underline{i}}c(\varepsilon^{-1})^{\underline{i}}_{l}\frac{1}{\sqrt[3]{g}}\varepsilon^{\underline{ljk}}q_{\underline{k}+3,\underline{j}} - p_{\underline{i+3}}c(\mu^{-1})^{\underline{i}}_{l}\frac{1}{\sqrt[3]{g}}\varepsilon^{\underline{ljk}}q_{\underline{k},\underline{j}}.$$

Соответствующая система уравнений Гамильтона имеет вид:

$$\dot{q}^n = \frac{\delta H}{\delta p_n} = f^n,$$

$$\dot{p}_n - \frac{\delta H}{\delta q^n} = -p_m\frac{\delta f^m}{\delta q^n} = -p_m\frac{\delta f^m}{\delta q_n} + \\ + p_m\partial_i\frac{\delta f^m}{\delta q^{n,i}} = p_m\partial_i\frac{\delta f^m}{\delta q^{n,i}}.$$

Выписать явный вид импульсов в общем случае не представляется возможным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В геометрической оптике более ста лет назад была сформулирована концепция идеального прибора. На основе этой концепции были построены, в частности, такие фокусирующие (двумерные или трехмерные) объекты, как линза Люнеберга, “рыбий глаз” Максвелла и другие. Предсказание и изобретение лазеров ввели в обиход исследователей распространение и преобразование электромагнитных полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла. Законы трансформации таких трехмерных векторных полей в последние 10–20 лет изучаются в работах, посвященных так называемой трансформационной оптике. Концепция же идеального прибора в этих работах остается заимствованной из геометрической оптики. Авторы данной работы намерены строго сформулировать концепцию идеального трансформационного прибора в максвелловской оптике, реализующего фундаментальные решения (пропагаторы, функции Грина) системы уравнений Максвелла. Представленные результаты служат первой ступенью на пути решения данной задачи.

В работе построен формальный метод получения симплектического гамильтонового формализма для уравнений Максвелла без источников. Авторы также надеются, что приведенный пример в достаточной мере поясняет применение предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Luneburg R.K.* Mathematical Theory of Optics. Berkeley & Los Angeles : University of California Press, 1964. P. 448.
2. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. М.: Мир, 1987. Т. 1. 528 с.
3. *Сивухин Д.В.* О Международной системе физических величин // Успехи физических наук. 1979. Т. 129. № 10. С. 335–338. URL: http://ufn.ru/ru/articles/1979/10/h/.
4. *Kulyabov D.S., Korolkova A.V., Korolkov V.I.* Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series “Mathematics. Information Sciences. Physics”. 2012. № 1. P. 96–106. arXiv : 1211.6590.
5. *Korol'kova A.V., Kulyabov D.S., Sevast'yanov L.A.* Tensor computations in computer algebra systems // Programming and Computer Software. 2013. V. 39. № 3. P. 135–142. URL: http://link.springer.com/10.1134/S0361768813030031.
6. *Kulyabov D.S.* Geometrization of Electromagnetic Waves // Mathematical Modeling and Computational Physics. Dubna : JINR, 2013. P. 120. URL: http://mmcp2013.jinr.ru.
7. *Кулябов Д.С., Королькова А.В.* Уравнения Максвелла в произвольной системе координат // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2013. № 1 (28). С. 29–44.
8. *Кулябов Д.С., Немчанинова Н.А.* Уравнения Максвелла в криволинейных координатах // Вестник РУДН. Серия “Математика. Информатика. Физика”. 2011. № 2. С. 172–179.
9. *Sevastianov L.A., Kulyabov D.S.* The system of Hamilton equations for normal waves of the electromagnetic field in a stratified anisotropic medium // The 12th small triangle meeting of theoretical physics. Stakčinn : Institute of experimental physics. Slovak academy of sciences, 2010. P. 82–86.
10. *Джексон Д.Д.* Классическая электродинамика. 1965. С. 702.
11. *Minkowski H.* Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. 1908. H. 68. S. 53–111.
12. *Стрэттон Д.А.* Теория электромагнетизма. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
13. *Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П.* Электродинамика. 2-е, перераб. изд. М.: Высшая школа, 1990. 352 с.
14. *Павленко Ю.Г.* Лекции по теоретической механике. ФИЗМАТЛИТ, 2002. С. 392. ISBN: 5–9221–0241–9.
15. *Павленко Ю.Г.* Задачи по теоретической механике. ФИЗМАТЛИТ, 2003. С. 536. ISBN: 5–9221–0302–4.

Problem of the Construction of a Hamiltonian for Maxwell's Equations

D. S. Kulyabov[a, b], A. V. Korolkova[a], and L. A. Sevastyanov[a, c]

[a] *Department of Applied Informatics and Probability Theory, Peoples' Friendship University of Russia, ul. Miklukho-Maklaya 6, Moscow, 117198 Russia*

[b] *Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research, ul. Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow oblast, 141980 Russia*

[c] *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, ul. Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow oblast, 141980 Russia*

e-mail: yamadharma@gmail.com, avkorolkova@gmail.com, leonid.sevast@gmail.com

The Hamiltonian formalism is extremely elegant and convenient to problems of mechanics. However, its application to classical field theories is a difficult task. Indeed, the one-to-one correspondence between the Lagrangian and Hamiltonian can be established in the case of hyperregular Lagrangian, which is not the case in gauge-invariant field theories. In the case of an irregular Lagrangian, the Dirac Hamiltonian formalism with constraints is usually used with certain difficulties. The paper proposes A reformulation of the problem in the case of a field without sources has been proposed. This allows using a symplectic Hamiltonian formalism. The proposed formalism will be used to substantiate methods of vector (Hamiltonian) bundles in transformation optics.

Keywords: Maxwell's equations, curvilinear coordinates, symplectic manifold, Hamiltonian formalism, doubling of variables