New Features in the Second Version of the Cadabra Computer Algebra System

D. S. Kulyabov, ^{1,2,*} A. V. Korolkova, ^{1,†} and L. A. Sevastianov^{1,3,‡}

¹Department of Applied Probability and Informatics,
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

²Laboratory of Information Technologies

Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russia
³ Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

In certain scientific domains, there is a need for tensor operations. To facilitate tensor computations, computer algebra systems are employed. In our research, we have been using Cadabra as the main computer algebra system for several years. Recently, an operable second version of this software was released. In this version, a number of improvements were made that can be regarded as revolutionary ones. The most significant improvements are the implementation of component computations and the change in the ideology of the Cadabra's software mechanism as compared to the first version. This paper provides a brief overview of the key improvements in the Cadabra system.

Keywords: computer algebra systems, tensor calculations, component calculations, python, sympy

I. INTRODUCTION

Computer algebra systems that support tensor calculus can be conventionally divided into three groups [1]. The first group includes universal tensor calculus systems designed mainly for use in the general theory of relativity. In these systems, focus is placed on computing characteristic quantities of Riemannian geometry (Christoffel symbols, Riemann tensor) [2–4]. The second group includes computer algebra systems for tensor computations in quantum field theory [5–9]. They focus on computations with Dirac spinors and simple symmetries. The third group of computer algebra systems for tensor calculus is designed mainly as a framework for arbitrary tensor computations. These systems have fewer default templates but provide more expressive means for designing new objects. It is to this group that Cadabra belongs. This paper is devoted to the specific features of this computer algebra system.

Cadabra is currently available in two versions. The first version (hereinafter, Cadabra 1.x) significantly differs from the other computer algebra systems for tensor calculus, particularly, in

- use of the TEX notation;
- convenient definition of tensors of arbitrary types;
- use of Young tableau to describe the symmetry properties of tensors.

However, Cadabra 1.x has significant disadvantages. In particular, this version does not support component computations. Moreover, the monolithic and rigid software structure of the system held no promise for the implementation of component computations in the near future. However, a revolutionary step taken in the second version of the system (hereinafter, Cadabra 2.x), namely, the use of the Python ecosystem, made it possible to solve these problems. In our opinion, it is the combination of component computations and Python ecosystem that constitutes a revolutionary improvement of the Cadabra system.

Unfortunately, the documentation on Cadabra leaves much to be desired. The website of the system (https://cadabra.science) provides only a few examples. More specific information can be found in research papers that may contain possible applications of Cadabra [10–15].

This paper provides a brief overview of the new features in Cadabra 2.x. The paper is organized as follows. Section II discusses the implementation of Cadabra 1.x and 2.x. Section III describes the process of action variation for a source-free electromagnetic field to illustrate the syntax of Cadabra 2.x. To compare the 1.x and 2.x syntaxes, see [13–15]. Section IV considers one of the most important features in Cadabra 2.x: its transparent interaction with the universal scalar computer algebra system SymPy. Section V describes the key (in our opinion) innovation in Cadabra 2.x—component computations—by the example of finding basic quantities for the general theory of relativity, namely, Christoffel connection and different curvatures. Finally, Section VI illustrates work with graphics in Cadabra 2.x.

When implementing the examples, we used code fragment from the Cadabra 2.x documentation (https://cadabra.science/tutorials.html).

^{*} kulyabov-ds@rudn.ru

 $^{^{\}dagger}$ korolkova-av@rudn.ru

[‡] sevastianov-la@rudn.ru

II. IMPLEMENTATION FEATURES OF CADABRA 1.X AND 2.X

Each computer algebra system has its own implementation features. There are several levels of implementation:

- notation;
- manipulation language;
- implementation language;
- extension language.

Not every computer algebra system has all these levels. For instance, in most systems, the notation is based on the manipulation language.

In Cadabra 2.x (as in 1.x), the notation is based on the TEX notation (more precisely, TEX-like notation). In this case, a certain subset of TEX symbols (letters of different alphabets, symbols for integral and derivatives, etc.) is used. Above all, indices are denoted by the symbols _ and ^, as in the TEX system.

The manipulation language is used to work in the system. The syntax of Cadabra 1.x is quite simple and more oriented to code parsing rather than to userfriendliness. This approach to language design was common in the early years of computing technology development (e.g., Shell and Perl languages). Cadabra 2.x takes a qualitative step forward by switching to Python. As a result, all operations in Cadabra 2.x are written in a Python-like syntax.

Cadabra 1.x is implemented in C++ with the use of the LiE computer algebra system [16] (currently, the compilation of the LiE system causes certain difficulties). Its main purpose is processing Lie groups, on which operations with tensor symmetries are based. It should be noted that the entire system was actually implemented by one person. This required great efforts. However, the presence of only one author and the monolithic software structure of the system caused some concern.

In Cadabra 2.x, the author fundamentally changed his approach to the structure of the system by integrating it with the Python ecosystem. The 2.x system is still written in C++, but Python is used as a glue language (and also as a manipulation language). In addition, Python can be employed for writing extensions.

The Python infrastructure opens access to a large number of scientific libraries, including the SciPy project [17]. This allows the SciPy libraries to be used seamlessly, transparently to the user. In our opinion, this allowed Cadabra 2.x to take a revolutionary step forward.

III. ELEMENTS OF THE 2.X SYNTAX

Let us recall some elements of the 1.x and 2.x syntaxes. As an example, we obtain the source-free Maxwell's equation [18]:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0, \tag{1}$$

by varying the action

$$S = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, \mathrm{d}x \,. \tag{2}$$

In this case, the Maxwell tensor $F_{\mu\nu}$ is expressed in terms of the vector potential:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \tag{3}$$

Again, both versions of Cadabra use the T_EX notation. In Cadabra 2.x, it becomes possible to use functionality of Python, in particular, define functions directly in the text of a program written in Cadabra 2.x. Note that, just like Cadabra 1.x, the 2.x version does not process resulting expressions by default (except for collecting like terms); this processing is left to the user. If it is required to apply a certain set of rules to all expressions used, then the function post_process can be called, which is executed after each operation (in fact, post_process is simply a Python function):

def post_process(ex):
 sort_product(ex)
 canonicalise(ex)
 collect_terms(ex)

If necessary, this function can be made empty, thus disabling any processing of expressions. The interface of Cadabra 2.x exploits the ideology of a notepad, i.e., in addition to writing program code, the user can also add comments. However, in contrast to iPython [19], text is written in the LATEX syntax rather than in the Markdown syntax [20].

The object in Cadabra 2.x can be assigned a property, which, in turn, has a set of its own settings. Since we are dealing with tensors, the most useful property is Indices. The option position=free allows the system to raise and lower indices:

{\mu,\nu,\rho}::Indices(position=free).
x::Coordinate.

\partial{#}::Derivative.

Here, # is a wildcard. The dot at the end of the expression suppresses the output (as is common in computer algebra systems).

To work with abstract indices, it is necessary to take into account the symmetry properties of tensors. In addition, when differentiating and integrating, the coordinate dependence of objects needs to be taken into account:

 $\label{eq:final_symmetric} $$F_{\mu\in \mathbb{R}_{\mathbb{R}}::\operatorname{AntiSymmetric};}$$F_{\mu\in \mathbb{R}_{\mathbb{R}}::\operatorname{Depends}(x).$$ A_{\mu\in \mathbb{R}}::\operatorname{Accent};$$ Attached property AntiSymmetric to $F_{\mu\nu}$.$

Attached property Accent to $\delta \#$.

In this case, the variation sign δ is regarded as a modifier (rather than as an object with the Derivative property) and does not introduce any additional computational semantics. In our example, $F_{\mu\nu}$ is a Maxwell tensor. We express it in terms of the vector potential A_{μ} (3):

$$F:= F_{\{\unu} = \operatorname{\mathbb{A}_{\unu}} - \\ \hookrightarrow \operatorname{\mathbb{A}_{\unu}};$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

Here, the sign := defines a row label (in our case, it is F). The label denominates the expression for convenience of referring to it.

Next, the action for the electromagnetic field (2) is defined:

S:= -1/4 \int{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} }{x};
$$-\frac{1}{4} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} dx$$

By substitution, the action is expressed in terms of the vector potential A_{μ} :

substitute(S, F);
$$-\frac{1}{4}\int \left(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right)\left(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}\right) \,\mathrm{d}x$$

Then, the action has the following form:

S;
$$-\frac{1}{4} \int (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) dx$$

The value of the action in this expression differs from the initial one. It takes the form that it received after the last computation. This is a bit unusual. The point is that most computer algebra systems are implemented using functional languages, or they follow a functional paradigm in which variables have the property of immutability. In this case, the label acts as a variable in imperative languages (Python is an imperative language). This makes work in Cadabra 2.x necessary linear: the user cannot randomly navigate through the notebook and perform computations at arbitrary points.

Let us vary the action:

$$\begin{array}{l} \text{vary(S, $A_{\infty} = \sum_{\mu} (\partial_{\mu} A^{\nu} - \partial_{\nu} A^{\mu}) (\partial_{\mu} \delta A_{\nu} - \partial_{\nu} \delta A_{\mu}) + (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) (\partial_{\mu} \delta A^{\nu} - \partial^{\nu} \delta A^{\mu})) \ \mathrm{d}x} \end{array}$$

Here, the expression itself, rather than its label, is used. For this purpose, the expression is put between two dollar symbols (\$), as in the standard T_FX.

Next, we expand the products and collect the like terms:

distribute(S);

$$-\frac{1}{4}\int (4\partial^{\mu}A^{\nu}\partial_{\mu}\delta A_{\nu} - 4\partial^{\mu}A^{\nu}\partial_{\nu}\delta A_{\mu}) dx$$

Then, integration by parts is carried out:

integrate_by_parts(S, \$\delta{A_{\mu}}\$);
$$-\frac{1}{4}\int \left(-4\delta A^{\mu}\partial^{\nu}\left(\partial_{\nu}A_{\mu}\right)+4\delta A^{\mu}\partial^{\nu}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)\right) \, \mathrm{d}x$$

In this case, integration by parts is quite a formal action that uses only the Derivative property of the object.

Once again, we perform the substitution, expand the products, and collect the like terms:

$$-\int \delta A^{\mu} \partial^{\nu} F_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x$$

Here, the label _ denotes the previous expression. As a result, we obtain the desired Maxwell equation (1):

$$\partial^{\nu} F_{\mu\nu} = 0$$

This example demonstrates that the syntax of the manipulation language in Cadabra 2.x is based on the Python syntax, which is more customary than the syntax of the 1.x language.

INTERACTION BETWEEN CADABRA AND SYMPY

Computer algebra systems for tensor calculus support quite a small number of operations. They are sufficient for basic manipulations with tensors in the formalism of abstract indices, as well as the index-free formalism. However, in many cases (e.g., full-fledged implementation of component computations), the support of scalar operations is required. If a computer algebra system for tensor calculus is implemented in the framework of a universal computer algebra system, then no problems arise. However, Cadabra is an independent system. Cadabra 1.x implements a mechanism (though inconvenient) for communication with the Maxima universal computer algebra system; however, it seems that this mechanism was implemented only as a proof of concept.

In Cadabra 2.x, communication with the universal computer algebra system is implemented via SymPy [21]. Moreover, this communication is seamless: the work of the mechanism is invisible for the user, which is owing to implementation of Cadabra 2.x in Python.

Let us illustrate the use of SymPy in Cadabra 2.x by computing the integral

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \,.$$

The main function for the explicit call of SymPy is map_sympy(). This function has a side effect: it changes the value of the argument. However, as noted above, the absence of immutability is a feature of Cadabra 2.x. Let us consider the simplest call of this function:

ex :=
$$\inf\{1/x\}\{x\}$$
;
 $\int x^{-1} dx$
map_sympy(_);
 $\log(x)$

To confirm the presence of this side effect, we check the current value of the expression ex:

ex;
$$\log(x)$$

It can be seen that the value of ex has changed.

We can transfer the value of the expression to SymPy and, moreover, call a particular function to process it. For instance, in this case, we can call the SymPy's function integrate:

```
ex := 1/x;
r^{-1}
```

The second argument of the function map_sympy() is SymPy function name:

```
map_sympy(ex,"integrate");
\log(x)
ex;
\log(x)
```

Again, this confirms the side effect of map_sympy(). In Python, the same action can be performed in several

ways. Hence, this can be done in Cadabra 2.x. For illustration purposes, let us consider the following variants.

The class method _sympy_() can be used as follows:

```
ex := \inf\{1/x\}\{x\};
\int x^{-1} dx
```

While regarding the label ex as an object, we call the method _sympy_():

```
ex._sympy_();
\log(x)
```

Check the state of the environment:

```
ex:
\int x^{-1} dx
```

It is seen that the state of the environment has not changed, i.e., the method _sympy_() has no side effect.

In addition, we can use the function sympy with a method corresponding to a callee function of the SymPy environment:

```
ex := 1/x;
```

Let us call the function sympy with the method integrate:

```
sympy.integrate(ex);
\log(x)
```

Note that this function always requires specifying a particular method, which is why it cannot be used in the previous case.

Again, check the state of the environment:

```
x^{-1}
```

It can be seen that the function sympy does not have the side effect. Based on the examples considered above, we can conclude that the interaction with SymPy in Cadabra 2.x is implemented in quite an elegant way. In our opinion, the main advantage of this operation is its deep integration with the system, e.g., for implementation of component computations (see Section V).

COMPONENT COMPUTATIONS IN CADABRA 2.X

To illustrate component operations, we find curvature R on a sphere S^2 of radius r:

$$g_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(r^2, r^2 \sin^2 \theta).$$

For this purpose, we evaluate Christoffel symbols $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, Riemann tensor $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$, and Ricci tensor $R_{\alpha\beta}$ [18?]. Let us define coordinates and labels for the indices while specifying what values these labels can take:

```
{\theta, \varphi}::Coordinate;
{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \

    values={\varphi, \theta}, position=

    \hookrightarrow fixed);
\partial{#}::PartialDerivative;
Attached property Coordinate to [\theta, \varphi].
Attached property Indices(position=fixed) to [\alpha, \beta,
\gamma, \delta, \rho, \sigma, \mu, \nu, \lambda].
Attached property Partial Derivative to \partial \#.
```

Next, we define a tensor g with the Metric property and, similarly, define the inverse metric:

```
g_{\alpha\beta}::Metric.
g^{\alpha\beta}::InverseMetric.
```

In this case, it is sufficient to specify the components for the original metric. The components for the inverse metric are computed using the function complete:

 $g:=\{g_{\hat{x}} = r**2, g_{\hat{x}} = r**2, g_{\hat{x}}$

Let us define the Christoffel symbols $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left(\partial_{\nu}g_{\beta\mu} + \partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu} \right)$$
We expand the Christoffel symbols by using

We expand the Christoffel symbols by using the metric tensor. In this case, expansion is applied only to the right-hand side of the definition (after the equal sign). This order of the expansion is determined by the option rhsonly=True. The function evaluate() implicitly calls SymPy for operations on components (this is another advantage of using the Python infrastructure). To expand trigonometric relationships, SymPy should be called explicitly:

```
evaluate(Gamma, g, rhsonly=True)
map_sympy(Gamma, "expand_trig");
```

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Box_{\mu\nu}{}^{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \Box_{\varphi\theta}{}^{\varphi} = (\tan\theta)^{-1} \\ \Box_{\theta\varphi}{}^{\varphi} = (\tan\theta)^{-1} \\ \Box_{\varphi\varphi}{}^{\theta} = -\sin\theta\cos\theta \end{array} \right.$$

Similarly, for the Riemann tensor $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$, we write its definition and evaluate its components:

The Ricci tensor $R_{\alpha\beta}$ is computed from the Riemann tensor:

```
R2:= R_{\sigma\nu} = R^{\\rho}_{\sigma\rho}_{\sigma\rho} \rightarrow nu}; substitute(R2, R4) evaluate(R2, g, rhsonly=True); R_{\sigma\nu} = R^{\rho}_{\sigma\rho\nu} \\ R_{\sigma\nu} = \Pi_{\sigma\nu} \begin{cases} \Pi_{\varphi\varphi} = (\sin\theta)^2 \\ \Pi_{\theta\theta} = 1 \end{cases} Finally, we compute the scalar curvature R: R:= R = R_{\sigma\nu} g^{\sigma\nu}; substitute(R, R2) evaluate(R, R2) evaluate(R, g, rhsonly=True); R = R_{\sigma\nu}g^{\sigma\nu} \\ R = 2r^{-2}
```

Thus, from the user's perspective, component computations in Cadabra 2.x are represented by the additional property Coordinate and several functions with the main one being evaluate() (it is this function that computes the components).

At the system level, component computations are implemented in Cadabra 2.x through interaction with a scalar computer algebra system, namely, with SymPy.

VI. USE OF GRAPHICS IN CADABRA 2.X

The need for graphics in tensor-oriented computer algebra systems is questionable. In our opinion, it is simply not needed. However, in this case, graphics capabilities is nothing more than an additional (side) effect of implementing Cadabra 2.x in the framework of the Python ecosystem. That is why graph plotting in Cadabra 2.x is the same as in Python.

First, we need to choose a plotting library. The following example uses the popular Matplotlib library [22–24]. For numerical computations, the NumPy [25, 26] library is used.

Then, we import the modules for matplotlib and numpy:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Let us construct a vector field; i.e., to each point in a space (in our case, on a plane), we assign a vector that originates from this point. Suppose that the vector f has the form

$$f^{i}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \cos x \\ \cos y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Let us define a square grid on which the vector field is evaluated. Since grid pitch along the axes is the same, we use only the values for x:

```
x = np.arange(-2*np.pi, 2*np.pi, 0.1)
u = np.sin(x)*np.cos(x)
v = np.cos(x)
uu, vv = np.meshgrid(u,v)
```

The function meshgrid from the numpy package generates a rectangular grid based on two arrays (in our case, u and v).

Now, we construct the vector field by using the function streamplot from the matplotlib package:

```
fig = plt.figure()
plt.streamplot(x, x, uu, vv, color='black')
plt.title('Vector field')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
```

The resulting plot can be both saved and displayed:

```
fig.savefig("plot.pdf")
```

display(fig)

The image of the vector field is shown in Fig. 1.

We hope that, in the future, Cadabra will include more useful applications than the one illustrated by this simple example.

VII. CONCLUSION

We can make the following conclusions. From the user's perspective, the main breakthrough of Cadabra 2.x is the implementation of component computations, which allows the system to cover the whole range of necessary tensor operations. From the developer's perspective, the main innovation is rewriting the system by using the Python language and its entire ecosystem. We hope that this will increase interest in Cadabra 2.x when solving problems that involve tensor operations.

ACKNOWLEDGMENTS

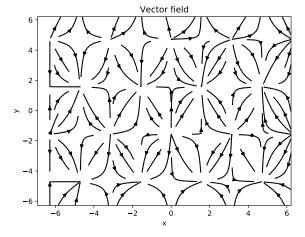


Figure 1. Image of the vector field (4) constructed using matplotlib

The publication has been prepared with the support of the "RUDN University Program 5-100" and funded by Russian Foundation for Basic Research (RFBR) according to the research project No 16-07-00556, 18-07-00567, 18-51-18005.

- [1] M. A. H. MacCallum, Computer algebra in gravity research, Living Reviews in Relativity 21 (1) (2018) 1–93. doi:10.1007/s41114-018-0015-6.
- [2] V. Ilyin, A. Kryukov, ATENSOR REDUCE program for tensor simplification, Computer Physics Communications 96 (1) (1996) 36–52. doi:10.1016/0010-4655(96) 00060-4.
- [3] A. G. P. Gómez-Lobo, J. M. Martín-García, Spinors: A Mathematica package for doing spinor calculus in General Relativity, Computer Physics Communications 183 (10) (2012) 2214–2225. arXiv:1110.2662, doi:10. 1016/j.cpc.2012.04.024.
- [4] M. MacCallum, Computer Algebra in General Relativity, International Journal of Modern Physics A 17 (20) (2002) 2707–2710. doi:10.1142/S0217751X02011643.
- [5] D. A. Bolotin, S. V. Poslavsky, Introduction to Redberry: the Computer Algebra System Designed for Tensor Manipulation (2015) 1–27arXiv:1302.1219.
- [6] S. Poslavsky, D. Bolotin, Redberry: a computer algebra system designed for tensor manipulation, Journal of Physics: Conference Series 608 (1) (2015) 012060. arXiv: 1302.1219, doi:10.1088/1742-6596/608/1/012060.
- [7] D. Fliegner, A. Retey, J. a. M. Vermaseren, Parallelizing the Symbolic Manipulation Program FORM Part I: Workstation Clusters and Message Passing (2000). arXiv:0007221.
- [8] A. Heck, FORM for Pedestrians (2000).
- [9] M. M. Tung, FORM Matters: Fast Symbolic Computation under UNIX, Computers and Mathematics with Applications 49 (7-8) (2005) 1127-1137. arXiv:0409048, doi:10.1016/j.camwa.2004.07.023.
- [10] K. Peeters, Introducing Cadabra: a symbolic computer algebra system for field theory problems (2007). arXiv: 0701238
- [11] K. Peeters, Cadabra: a field-theory motivated symbolic computer algebra system, Computer Physics Communications 176 (8) (2007) 550-558. arXiv:0608005, doi:10.1016/j.cpc.2007.01.003.

- [12] L. Brewin, A Brief Introduction to Cadabra: A Tool for Tensor Computations in General Relativity, Computer Physics Communications 181 (3) (2010) 489-498. arXiv: 0903.2085, doi:10.1016/j.cpc.2009.10.020.
- [13] L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov, M. G. Kokotchikova, An Application of Computer Algebra System Cadabra to Scientific Problems of Physics, Physics of Particles and Nuclei Letters 6 (7) (2009) 530–534. doi:10.1134/ S1547477109070073.
- [14] A. V. Korol'kova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevast'yanov, Tensor Computations in Computer Algebra Systems, Programming and Computer Software 39 (3) (2013) 135–142. arXiv:1402.6635, doi:10.1134/S0361768813030031.
- [15] D. S. Kulyabov, Using two Types of Computer Algebra Systems to Solve Maxwell Optics Problems, Programming and Computer Software 42 (2) (2016) 77–83. arXiv: 1605.00832, doi:10.1134/S0361768816020043.
- [16] M. A. A. v. Leeuwen, A. M. Cohen, B. Lisser, LiE: A package for Lie group computations, Computer Algebra Nederland, Amsterdam, 1992.
- [17] T. E. Oliphant, Python for Scientific Computing, Computing in Science and Engineering 9 (3) (2007) 10–20. doi:10.1109/MCSE.2007.58.
- [18] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, 4th Edition, Course of Theoretical Physics. Vol. 2, Butterworth-Heinemann, 1975.
- [19] F. Perez, B. E. Granger, IPython: A System for Interactive Scientific Computing, Computing in Science and Engineering 9 (3) (2007) 21–29. doi:10.1109/MCSE.2007.53.
- [20] S. Leonard, The text/markdown Media Type, Rfc, RFC Editor (mar 2016). doi:10.17487/RFC7763.
- [21] R. Lamy, Instant SymPy Starter, Packt Publishing, 2013.
- [22] S. Tosi, Matplotlib for Python Developers, Packt Publishing, 2009.
- [23] S. Vaingast, Beginning Python visualization: crafting visual transformation scripts, Springer, 2009.
- [24] A. C. Müller, S. Guido, Introduction to Machine Learning with Python: A Guide for Data Scientists, O'Reilly Media,

2016. [25] I. Idris, NumPy Cookbook, Packt Publishing, 2012. [26] T. E. Oliphant, Guide to NumPy, 2nd Edition, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015.

Новые возможности второй версии пакета компьютерной алгебры Cadabra

Д. С. Кулябов, 1,2,* А. В. Королькова, 1,† и Л. А. Севастьянов 1,3,‡

¹ Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

² Лаборатория информационных технологий,
Объединённый институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

³ Лаборатория теоретической физики,
Объединённый институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

В определённых научных областях есть потребность использования операций над тензорами. Для облегчения кропотливой работы над тензорными расчётами можно использовать системы компьютерной алгебры. В качестве основной системы тензорной компьютерной алгебры авторами данной работы в своих научных исследованиях уже несколько лет используется система Cadabra. Недавно вышла работоспособная вторая версия этой программы. В ней сделан ряд улучшений, которые можно позиционировать как революционные. Наиболее яркие улучшения касаются реализации компонентных тензорных операций и смены идеологии программной реализации системы по сравнению с первой версией Cadabra. В данной статье даётся краткий обзор ключевых улучшений в системе Cadabra.

Ключевыеслова: системы компьютерной алгебры, тензорные вычисления, компонентные вычисления, python, sympy

І. ВВЕДЕНИЕ

Системы компьютерной алгебры с поддержкой операций над тензорами можно условно разделить на три группы [1]. К первой группе относят универсальные системы тензорных вычислений, которые создавались в основном для применения в задачах общей теории относительности. В таких системах упор делается на вычисление характерных величин римановой геометрии (символы Кристоффеля, тензор Римана) [2–4]. Ко второй группе относят системы тензорной компьютерной алгебры для расчётов в квантовой теории поля [5–9]. В них упор делается на вычисления с использованием дираковских спиноров, а также используются простые симметрии. Третья группа систем тензорной компьютерной алгебры создавалась скорее как фреймворк для произвольных тензорных расчётов. В них меньше готовых шаблонов, но есть более выразительные средства для конструирования новых объектов. Именно к этой группе и относится система Cadabra, особенностям реализации которой посвящена данная работа.

Система Cadabra на данный момент имеет две версии. В первой версии Cadabra (далее Cadabra1) есть существенные отличия от других систем тензорной компьютерной алгебры, в частности:

использование Т_ЕХ-нотации при записи выражений;

- удобство определения произвольного типа тензоров;
- использование диаграмм Юнга для описания симметрийных свойств тензоров.

Тем не менее Cadabra1 имеет и существенные недостатки. В частности, в этой версии отсутствует возможность компонентных тензорных вычислений. Кроме того, монолитная и косная программная структура самой системы не даёт возможности надеяться на реализацию компонентных вычислений в ближайшем будущем. Однако, революционный шаг, совершённый при реализации второй версии системы (далее Cadabra2), а именно использование экосистемы Руthon, позволило решить указанные проблемы. На наш взгляд именно комбинация «компонентные вычисления + экосистема Руthon», реализованная во второй версии, является революционным улучшением системы Cadabra.

К сожалению, документация по системе Cadabra оставляет желать лучшего. На сайте самой системы (https://cadabra.science/) представлен достаточно небольшой набор примеров. Более существенную информацию можно получить из специализированных исследовательских статей, в которых можно встретить возможное применение системы Cadabra [10–15].

В данной работе предлагается небольшой обзор новых возможностей второй версии пакета компьютерной алгебры Cadabra. Структура статьи следующая. В разделе II рассмотрены особенности реализации первой и второй версий Cadabra. В разделе III приведено описание процесса варьирования действия для электромагнитного поля без источников с целью сделать краткий обзор синтаксиса Cadabra2. Если читатель хочет сравнить синтаксис Cadabra2 с синтаксисом

^{*} kulyabov-ds@rudn.ru

[†] korolkova-av@rudn.ru

[‡] sevastianov-la@rudn.ru

Саdabra1, то мы рекомендуем ознакомится с более ранними работами [13–15]. В разделе IV рассмотрена одна из важнейших особенностей Cadabra2 — прозрачное взаимодействие с универсальной скалярной системой компьютерной алгебры SymPy. В разделе V описывается основное, на наш взгляд, нововведение в Cadabra2 — компонентные вычисления, рассмотренные на примере нахождения основных величин для общей теории относительности, а именно связности Кристоффеля и разных кривизн. В завершении статьи, в разделе VI приводится пример, демонстрирующий работу с графикой в Cadabra2.

Заметим, что при реализации примеров были использованы элементы кода из документации по Cadabra2 (https://cadabra.science/tutorials.html).

II. ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ CADABRA1 И CADABRA2

Каждая система компьютерной алгебры имеет свою специфику в реализации. Можно выделить несколько уровней при реализации:

- нотация;
- язык манипуляции;
- язык реализации;
- язык расширений.

Не у каждой системы компьютерной алгебры можно выделить все эти уровни. Так, у большинства систем нотация строится на основе языка манипуляции.

У пакета Cadabra1, также как и у пакета Cadabra1 нотация построена на основе Т_ЕХ-нотации (правильнее сказать, Т_ЕХ-подобной нотации). Для этого выделяется некоторое подмножество символов Т_ЕХ, как то буквы разных алфавитов, символы производных, интеграла и так далее. Главное, что индексы обозначаются с помощью символов _ и ^, как привычно пользователям системы Т_ЕХ.

Язык манипуляций служит собственно для работы в системе. Синтаксис Cadabra1 достаточно простой и скорее приспособлен для облегчения лексического и синтаксического разбора текста программы, чем для удобства пользователя. Такой подход к конструированию языков использовали в ранние годы развития вычислительной техники (например, в языках Shell, Perl). В Cadabra2 произошёл качественный скачок — система перешла на язык Руthon. Соответственно и все операции в Cadabra2 выполняются в Руthon-подобном синтаксисе.

Реализация системы Cadabra1 выполнена на языке C++ с использованием системы компьютерной алгебры LiE [16] (на данный момент компиляция системы LiE вызывает некоторые трудности). Основное предназначение — работа с группами Ли, на которых основаны операции с симметриями тензоров. Следует

заметить, что фактически вся система была реализована одним человеком. Это большой труд. Но наличие только одного автора и монолитная программная структура системы вызвала тревогу за дальнейшую судьбу всей системы.

В версии Cadabra2 автор принципиально изменил свой подход к структуре системы. Он взял направление на интеграцию её с экосистемой Python. Система всё также написана на языке C++, но в качестве языка-клея применяется Python, который также используется в качестве языка манипуляций. При этом Python же может быть использован как язык написания расширений.

Инфраструктура Python открывает доступ к огромному количеству научных библиотек, в том числе и к проекту SciPy [17]. Это позволяет использовать библиотеки SciPy бесшовно, прозрачно для пользователя. Именно это и позволило на наш взгляд сделать системе Cadabra2 революционный шаг.

III. ЭЛЕМЕНТЫ СИНТАКСИСА CADABRA2

Напомним некоторые элементы синтаксиса Cadabra1 и Cadabra2. В качестве примера рассмотрим получение уравнения Максвелла без источников [18]:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0, \tag{1}$$

варьируя действие

$$S = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, \mathrm{d}x \,. \tag{2}$$

При этом тензор Максвелла $F_{\mu\nu}$ представим через векторный потенциал:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \tag{3}$$

Напомним, что обе версии Саdabra используют нотацию ТЕХ. Во второй версии появилась возможность использовать функционал языка Python, в частности, можно задавать функции прямо в тексте программы, написанной на Cadabra2. Заметим, что также как и Cadabra1, Cadabra2 по умолчанию практически не обрабатывает получающиеся выражения (разве что приводит подобные), эта обработка отдана на откуп самому пользователю. Если требуется применить какой-то набор правил ко всем используемым выражениям, то можно задать функцию post_process, выполняемую после каждой операции (фактически, post_process является просто функцией Python):

def post_process(ex):
 sort_product(ex)
 canonicalise(ex)
 collect_terms(ex)

В экстремальном случае эту функцию можно сделать пустой, убрав таким образом любую обработку выражений.

Интерфейс Cadabra2 выполнен по идеологии блокнота, то есть наряду с программным кодом можно указывать и пояснения. Правда, в отличие от iPython [19] текстовая часть пишется не в синтаксисе Markdown [20], а в синтаксисе LATEX.

Объекту Cadabra2 можно приписать свойство, имеющее в свою очередь некоторый набор настроек. Естественно, раз речь идёт о тензорах, наиболее полезное свойство — Indices. Настройка position=free даёт возможность системе самой поднимать и опускать индексы:

{\mu,\nu,\rho}::Indices(position=free).
x::Coordinate.
\partial{#}::Derivative.

Здесь знак # является шаблоном подстановки. Знак точки в конце выражения подавляет вывод (как часто принято в системах компьютерной алгебры).

Для работы с абстрактными индексами необходимо учитывать симметрийные свойства тензоров. Кроме того, при дифференцировании и интегрировании необходимо учитывать зависимость объектов от координат:

F_{\mu\nu}::AntiSymmetric;
F_{\mu\nu}::Depends(x).
A_{\mu}::Depends(x,\partial{#}).
\delta{#}::Accent;

Attached property AntiSymmetric to $F_{\mu\nu}$.

Attached property Accent to $\delta \#$.

В данном случае знак вариации δ рассматривается как модификатор, а не как объект со свойством Derivative, и не вносит никакой дополнительной вычислительной семантики.

В рассматриваемом нами примере $F_{\mu\nu}$ является тензором Максвелла. Распишем его через векторный потенциал A_{μ} (3):

$$F := F_{\{\nu\}} = \operatorname{mu}_{\{\nu\}} - \\ \hookrightarrow \operatorname{mu}_{\{\nu\}}_{\{\nu\}};$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

Здесь знаком := задаётся метка строки (в нашем случае это F). Метка именует выражение для удобства ссылки на него в последствии.

Далее зададим действие для электромагнитного поля (2):

S:= -1/4 \int{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} }{x};
-
$$\frac{1}{4} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} dx$$

Путём подстановки перепишем действие через векторный потенциал A_{μ} :

substitute(S, F);
$$-\frac{1}{4}\int \left(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right)\left(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}\right)\,\mathrm{d}x$$
 После этого посмотрим вид действия:

S;
$$-\frac{1}{4} \int (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) dx$$

Значение действия в этом выражении не такое, какое мы задали изначально. Оно стало таким, каким мы его получили после последних вычислений. И это немного необычно. Дело в том, что большинство систем компьютерной алгебры реализованы на функциональных языках программирования или придерживаются функциональной парадигмы, в рамках которой переменные обладают свойством иммутабельности. В данном же случае метка ведёт себя как переменная в императивных языках программирования (собственно, Python и является императивным языком). Это делает работу в Cadabra2 необходимо линейной: нельзя произвольно передвигаться по блокноту и производить вычисления в произвольном месте.

Проварьируем действие:

$$\begin{array}{l} \text{vary(S, $A_{\infty} = \mathbb{A}_{\mu}) : } \\ -\frac{1}{4} \int \left(\left(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \right) \left(\partial_{\mu} \delta A_{\nu} - \partial_{\nu} \delta A_{\mu} \right) + \left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \right) \left(\partial^{\mu} \delta A^{\nu} - \partial^{\nu} \delta A^{\mu} \right) \right) \, \mathrm{d}x \end{array}$$

Здесь мы видим пример использования не метки, а непосредственно выражения. Для этого мы окружаем выражение символами доллара (\$), как делается в обычном ТрХ'е.

Далее раскроем произведения и приведём подобные:

distribute(S);

$$-\frac{1}{4}\int \left(4\partial^{\mu}A^{\nu}\partial_{\mu}\delta A_{\nu}-4\partial^{\mu}A^{\nu}\partial_{\nu}\delta A_{\mu}\right) dx$$

Затем проинтегрируем по частям:

integrate_by_parts(S, \$\delta{A_{\mu}}\$);
$$-\frac{1}{4} \int (-4\delta A^{\mu} \partial^{\nu} (\partial_{\nu} A_{\mu}) + 4\delta A^{\mu} \partial^{\nu} (\partial_{\mu} A_{\nu})) dx$$

Интегрирование по частям в данном случае является достаточно формальным действием, использующим только свойство Derivative объекта.

Ещё раз выполним подстановку, а затем раскроем произведения и приведём подобные:

distribute(_);

$$-\int \delta A^{\mu} \partial^{\nu} F_{\mu\nu} dx$$

Здесь специальная метка _ указывает на предыдущее выражение.

В результате получим искомое уравнение Максвелла (1):

$$\partial^{\nu} F_{\mu\nu} = 0$$

Таким образом показано, что синтаксис языка манипуляции выражениями в системе Cadabra2 базируется на синтаксисе языка Python и он более привычен, чем синтаксис языка Cadabra1.

IV. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ CADABRA C

Тензорные системы компьютерной алгебры имеют в своём арсенале достаточно небольшое число поддерживаемых операций. Их достаточно для основных манипуляций с тензорами в формализме абстрактных индексов и в безындексном формализме. Но для многих операций (например, для полноценной реализации компонентных вычислений) требуются возможность использования скалярных операций. Если тензорная система компьютерной алгебры реализована в рамках универсальной системы компьютерной алгебры, то проблем не возникает. Однако Cadabra является отдельной системой. В Cadabra1 реализован, хотя и неудобный в применении, механизм для связи с универсальной системой компьютерной алгебры Махіта создалось впечатление, что этот механизм реализован только как «доказательство концепции».

В Cadabra2 связь с универсальной системой компьютерной алгебры реализована через SymPy [21]. Причём эта связь бесшовная: для пользователя использование данного механизма проходит незаметно. Впрочем, это один из результатов реализации системы Cadabra2 на языке Python.

Продемонстрируем применение SymPy в Cadabra2 на примере, в котором нам необходимо вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \, .$$

Основная функция явного вызова SymPy — map_sympy(). Эта функция имеет побочное действие: она изменяет значение аргумента. Впрочем, как мы уже обсуждали, отсутствие иммутабельности является особенностью системы Cadabra2. Рассмотрим простейший вызов этой функции:

ex :=
$$\inf\{1/x\}\{x\}$$
;
 $\int x^{-1} dx$
map_sympy(_);
 $\log(x)$

Для того, чтобы убедиться в наличии побочного действия, посмотрим текущее значение выражения **ex**:

ex; log(x)

Мы увидим, что значение ех изменилось.

Можно передать значение выражения не просто в систему SymPy, а вызвать для его обработки конкретную функцию. Например, в рассматриваемом нами случае можно вызвать функцию integrate среды SymPy:

$$ex := 1/x;$$
 x^{-1}

Вторым аргументом функции map_sympy() идёт имя конкретной функции SymPy:

```
map_sympy(ex,"integrate"); \log(x) ex; \log(x)
```

Здесь ещё раз убеждаемся в наличии побочного действия функции map_sympy().

В рамках языка Python есть несколько вариантов выполнения одного и того же действия. Естественно, эта возможность есть и в Cadabra2. Рассмотрим следующие варианты исключительно как потенциальные возможности, а не как руководство к действию.

Возможно использование метода класса _sympy_():

ex :=
$$\inf\{1/x\}\{x\}$$
;
$$\int x^{-1} dx$$

Воспринимая метку ех как объект, вызовем метод _sympy_():

 $\begin{array}{l} \texttt{ex._sympy_();} \\ \log{(x)} \end{array}$

Проверим состояние среды:

ex; $\int x^{-1} \, \mathrm{d}x$

Видим, что состояние среды не изменилось, то есть метод класса _sympy_() не имеет побочного действия.

Кроме того, можно использовать функцию **sympy** с методом, соответствующим вызываемой функции среды SymPy:

$$\begin{array}{l} \text{ex} := \text{1/x;} \\ x^{-1} \end{array}$$

Вызовем функцию sympy с методом integrate:

```
sympy.integrate(ex); \log(x)
```

Обратим внимание, что данная функция всегда требует указания конкретного метода, поэтому мы не смогли бы применить её в предыдущем случае.

Опять проверим состояние среды:

 ex ; x^{-1}

Убеждаемся, что функция **sympy** не обладает побочным действием.

Базируясь на приведённых выше примерах, можно сделать вывод, что взаимодействие с SymPy в Cadabra2 реализовано достаточно элегантным образом. Но основное достоинство этой операции заключается на наш взгляд в её тесной интеграции с системой, например, для реализации компонентных вычислений (см. раздел V).

V. КОМПОНЕНТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В CADABRA2

В качестве примера компонентных тензорных операций получим кривизну R на сфере S^2 радиуса r:

$$g_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(r^2, r^2 \sin^2 \theta).$$

Для этого получим значения для символов Кристоффеля $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, тензора Римана $R^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu}$ и тензора Риччи $R_{\alpha\beta}$ [18, 22].

Зададим координаты и набор меток для индексов. При этом укажем, какие значения данные метки принимают:

```
 \begin{tabular}{ll} & \{\harmonian & \{\har
```

Attached property Partial Derivative to $\partial \#$.

Затем зададим тензор g со свойством Metric и аналогичным образом зададим обратную метрику:

```
g_{\alpha\beta}::Metric.
g^{\alpha\beta}::InverseMetric.
```

В данном случае достаточно задать компоненты для самой метрики. Компоненты для обратной метрики рассчитываются с помощью функции complete:

 $g:=\{ g_{\hat{x}} = r**2, g_{\hat{x}} = r**2, g_{\hat{x}}$

Запишем определение символов Кристоффеля $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$:

```
\begin{split} \operatorname{Gamma} := \operatorname{Gamma}_{\operatorname{nu}_{1}} &= 1/2 \text{ g}_{\operatorname{nu}_{2}} \\ &\hookrightarrow \operatorname{alpha}_{\operatorname{nu}_{2}_{1}} \\ &\hookrightarrow \operatorname{mu}_{1} &: \operatorname{nu}_{2}_{\operatorname{nu}_{2}} \\ &\hookrightarrow \operatorname{nu}_{1} &: \operatorname{nu}_{2}_{\operatorname{nu}_{2}} \\ &\hookrightarrow \operatorname{nu}_{1}_{\operatorname{nu}_{2}} \\ &\hookrightarrow \operatorname{nu}_{1}_{\operatorname{nu}_{2}} \\ & \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \partial_{\nu} g_{\beta\mu} + \partial_{\mu} g_{\beta\nu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu} \right) \end{split}
```

Раскроем символы Кристоффеля через метрический тензор. При этом раскрытие будет применяться только к правой части определения (после знака равенства). Этот порядок раскрытия определяется опцией rhsonly=True. Функция evaluate() имплицитно использует вызов SymPy для операций с компонентами (это ещё одно преимущество использования инфраструктуры Python). Для раскрытия тригонометрических соотношений следует явно обратиться к SymPy:

```
evaluate(Gamma, g, rhsonly=True)
map_sympy(Gamma, "expand_trig");
```

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Box_{\mu\nu}{}^{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \Box_{\varphi\theta}{}^{\varphi} = (\tan\theta)^{-1} \\ \Box_{\theta\varphi}{}^{\varphi} = (\tan\theta)^{-1} \\ \Box_{\varphi\varphi}{}^{\theta} = -\sin\theta\cos\theta \end{array} \right.$$

Аналогично для тензора Римана $R^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu}$ запишем его определение и вычислим его компоненты:

$$\begin{split} & \text{R4:= R^{\langle ho\}_{\langle sigma \rangle mu \rangle} = +\langle hartial_{\langle \omega mu\}_{\langle sigma \rangle mu \rangle} - \langle \omega mu\}_{\langle sigma \rangle \{\langle ho\}_{\langle sigma \rangle u} \} - \langle \omega partial_{\langle hu\}_{\langle sigma \rangle u} \} - \langle \omega mu\}_{\langle \omega mu\}_{\langle beta \rangle_{\langle sigma \rangle u} \} - \langle hota \rangle_{\langle beta \rangle u}_{\langle \omega rho\}_{\langle beta \rangle u}_{\langle sigma \rangle u} - \langle hota \rangle_{\langle \omega rho\}_{\langle beta \rangle u}_{\langle \omega rho]_{\langle u rho)}_{\langle \omega rho)}_{\langle \omega$$

Тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ вычисляется из тензора Римана:

 $R2:= R_{\sigma nu} = R^{\rho}_{\sigma rho}_{\sigma rho}$

$$\begin{array}{l} \hookrightarrow \text{nu};\\ \text{substitute(R2, R4)}\\ \text{evaluate(R2, g, rhsonly=True);}\\ R_{\sigma\nu} = R^{\rho}_{\ \sigma\rho\nu}\\ R_{\sigma\nu} = \Box_{\sigma\nu} \left\{ \begin{array}{l} \Box_{\varphi\varphi} = (\sin\theta)^2\\ \Box_{\theta\theta} = 1 \end{array} \right.\\ \text{И, наконец, вычислим скалярную кривизну R:}\\ \text{R:= R = R_{sigma\nu} g^{s}(\sin\theta)^2;}\\ \text{substitute(R, R2)}\\ \text{evaluate(R, g, rhsonly=True);}\\ R = R_{\sigma\nu}g^{\sigma\nu}\\ \text{Reduction} \end{array}$$

Таким образом, наличие компонентных вычислений для пользователя выглядит в Cadabra2 как дополнительное свойство Coordinate и несколько функций, основной из которых является функция evaluate(), которая собственно вычисляет значения компонент.

На уровне системы компонентные вычисления реализованы в Cadabra2 через взаимодействие со скалярной системой компьютерной алгебры, а именно с SymPy.

VI. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИКИ В CADABRA2

Необходимость наличия графики в системе тензорной компьютерной алгебры вызывает много вопросов. Коротко говоря, по мнению авторов, она просто не нужна. Однако в данном случае наличие графических возможностей — не более, чем дополнительный (в чемто побочный) эффект реализации Cadabra2 в рамках экосистемы Python. Поэтому и построение графиков

в Cadabra2 не отличается от построения графиков в Pvthon.

Сначала нужно выбрать библиотеку для построения графиков. В следующем примере использована популярная библиотека Matplotlib [23–25]. Для численных расчётов использована библиотека NumPy [26, 27].

Подключим модули для matplotlib и numpy:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Построим векторное поле, то есть каждой точке пространства (в нашем случае плоскости) поставим в соответствие вектор с началом в этой точке. Пусть вектор f имеет вид:

$$f^{i}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \cos x \\ \cos y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Зададим квадратную сетку, на которой и будем вычислять значения векторного поля. Поскольку отсчёты по осям одинаковы, то будем использовать только значения для x:

```
x = np.arange(-2*np.pi, 2*np.pi, 0.1)
u = np.sin(x)*np.cos(x)
v = np.cos(x)
uu, vv = np.meshgrid(u,v)
```

Функция meshgrid из пакета numpy создаёт прямоугольную сетку из двух массивов (в нашем случае из u и v).

Теперь, собственно, построим векторное поле с помощью функции streamplot из пакета matplotlib:

```
fig = plt.figure()
plt.streamplot(x, x, uu, vv, color='black')
plt.title('Vector field')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
```

Мы можем как сохранить получившийся график, так и отобразить его в рабочем блокноте:

```
fig.savefig("plot.pdf")
```

display(fig)

В результате получим изображение векторного поля (см. рис. 1).

Возможно в будущем в Cadabra появятся более полезные приложения, нежели мы продемонстрировали в этом простом примере.

VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате можно сделать следующие выводы. Основным прорывом системы Cadabra2 с точки зрения пользователя тензорной системы компьютерной алгебры является реализация компонентных тензорных вычислений. Таким образом система охватывает весь спектр необходимых тензорных операций. С точки же зрения разработчика основным нововведением является переписывание системы с использованием языка

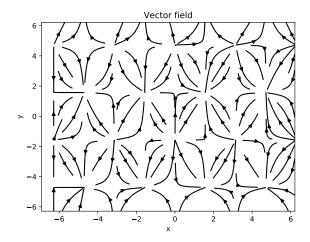


Рис. 1. Изображение векторного поля (4), полученное с помощью matplotlib

Python и всей экосистемы этого языка. Это позволяет надеяться на рост интереса к системе Cadabra2 при решении задач, связанных с операциями над тензорами.

БЛАГОДАРНОСТИ

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 16-07-00556, 18-07-00567, 18-51-18005.

^[1] MacCallum M. A. H. Computer algebra in gravity research // Living Reviews in Relativity. — 2018. — dec. — Vol. 21, no. 1. — P. 1–93.

^[2] Ilyin V., Kryukov A. ATENSOR — REDUCE program for tensor simplification // Computer Physics Communications. — 1996. — jul. — Vol. 96, no. 1. — P. 36–52.

^[3] Gómez-Lobo A. G. P., Martín-García J. M. Spinors: A Mathematica package for doing spinor calculus in General Relativity // Computer Physics Communications.—

^{2012. —} Vol. 183, no. 10. — P. 2214–2225. — arXiv : 1110.2662.

^[4] MacCallum M. Computer Algebra in General Relativity // International Journal of Modern Physics A. — 2002. — Vol. 17, no. 20. — P. 2707–2710.

^[5] Bolotin D. A., Poslavsky S. V. Introduction to Redberry: the Computer Algebra System Designed for Tensor Manipulation. — 2015. — P. 1–27. — arXiv: 1302.1219.

- [6] Poslavsky S., Bolotin D. Redberry: a computer algebra system designed for tensor manipulation // Journal of Physics: Conference Series. — 2015. — may. — Vol. 608, no. 1. — P. 012060. — arXiv: 1302.1219.
- [7] Fliegner D., Retey A., Vermaseren J. a. M. Parallelizing the Symbolic Manipulation Program FORM Part I: Workstation Clusters and Message Passing. — 2000. — arXiv: hep-ph/0007221.
- [8] Heck A. FORM for Pedestrians. 2000.
- [9] Tung M. M. FORM Matters: Fast Symbolic Computation under UNIX // Computers and Mathematics with Applications. — 2005. — Vol. 49, no. 7-8. — P. 1127–1137. arXiv: cs/0409048.
- [10] Peeters K. Introducing Cadabra: a symbolic computer algebra system for field theory problems. 2007. arXiv: hep-th/0701238.
- [11] Peeters K. Cadabra: a field-theory motivated symbolic computer algebra system // Computer Physics Communications. — 2007. — Vol. 176, no. 8. — P. 550–558. arXiv: cs/0608005.
- [12] Brewin L. A Brief Introduction to Cadabra: A Tool for Tensor Computations in General Relativity // Computer Physics Communications. — 2010. — mar. — Vol. 181, no. 3. — P. 489–498. — arXiv: 0903.2085.
- [13] Sevastianov L. A., Kulyabov D. S., Kokotchikova M. G. An Application of Computer Algebra System Cadabra to Scientific Problems of Physics // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2009. — Vol. 6, no. 7. — P. 530–534.
- [14] Korol'kova A. V., Kulyabov D. S., Sevast'yanov L. A. Tensor Computations in Computer Algebra Systems // Programming and Computer Software. — 2013. — Vol. 39, no. 3. — P. 135–142. — arXiv: 1402.6635.
- [15] Kulyabov D. S. Using two Types of Computer Algebra Systems to Solve Maxwell Optics Problems // Program-

- ming and Computer Software. 2016. Vol. 42, no. 2. P. 77–83. arXiv: 1605.00832.
- [16] Leeuwen M. A. A. v., Cohen A. M., Lisser B. LiE: A package for Lie group computations. Amsterdam: Computer Algebra Nederland, 1992.
- [17] Oliphant T. E. Python for Scientific Computing // Computing in Science and Engineering. 2007. Vol. 9, no. 3. P. 10–20.
- [18] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Теоретическая физика. Т. II. 8-е изд. М. : Физматлит, 2012. 536 с.
- [19] Perez F., Granger B. E. IPython: A System for Interactive Scientific Computing // Computing in Science and Engineering. 2007. Vol. 9, no. 3. P. 21–29.
- [20] The text/markdown Media Type: RFC / RFC Editor; Executor: S. Leonard: 2016.—mar.
- [21] Lamy R. Instant SymPy Starter. Packt Publishing, 2013. — 52 p.
- [22] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Д. А. Гравитация. Мир изд. М., 1977. Т. 1. 474 с.
- [23] Tosi S. Matplotlib for Python Developers. Packt Publishing, 2009. 308 p.
- [24] Vaingast S. Beginning Python visualization: crafting visual transformation scripts. Springer, 2009. 384 p.
- [25] Müller A. C., Guido S. Introduction to Machine Learning with Python: A Guide for Data Scientists. — O'Reilly Media, 2016. — 285 p.
- [26] Idris I. NumPy Cookbook. Packt Publishing, 2012. 226 p.
- [27] Oliphant T. E. Guide to NumPy. 2 edition. CreateS-pace Independent Publishing Platform, 2015. 364 p.