

**ИНФОРМАЦИОННО-  
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНЫХ СИСТЕМ**

**Материалы  
Всероссийской конференции  
с международным участием**

*Москва, РУДН, 16–20 апреля 2018 г.*

УДК 004.007(063)  
ББК 32.81  
И74

Конференция проводится в рамках реализации Программы повышения конкурентоспособности РУДН «5-100», проект М 2.4.1.П1 «Организация и проведение НТМ, повышающих международный и всероссийский уровень признания ученых РУДН».

**Организатор конференции:** Российский университет дружбы народов

**Соорганизаторы конференции:**

Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ);

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН);

Лаборатория информационных технологий Объединенного института ядерных исследований (ЛИТ ОИЯИ);

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН)

**Программный комитет:** Самуйлов К. Е., д.т.н., проф., РУДН — председатель программного комитета; Мележик В. С., д.ф.-м.н., ЛТФ ОИЯИ, РУДН — сопредседатель программного комитета; Севастьянов Л. А., д.ф.-м.н., проф., РУДН — сопредседатель программного комитета; Чукарин А. В., к.ф.-м.н., доцент, РУДН — сопредседатель программного комитета; Гудкова И. А., к.ф.-м.н., доцент, РУДН — секретарь программного комитета; Андреев С. Д., к.т.н., РУДН, Tampere University of Technology, г. Тампере, Финляндия; Башарин Г. П., д.т.н., проф., РУДН; Боголюбов А. Н., д.ф.-м.н., проф., МГУ; Виницкий С. И., д.ф.-м.н., проф., ЛТФ ОИЯИ; Вишневский В. М., д.т.н., проф., ИПУ РАН; Гайдамака Ю. В., д.ф.-м.н., доцент, РУДН; Гнатич М. М., проф., Pavol Jozef Šafárik University in Košice, Словакия; Гольдштейн Б. С., д.т.н., проф., СПб ГУТ; Горшенин А. К., к.ф.-м.н., доцент, ФИЦ ИУ РАН; Дружинина О. В., д.ф.-м.н., проф., ФИЦ ИУ РАН; Ефимушкин В. А., к.ф.-м.н., доцент, ОАО «Интеллект Телеком»; Кореньков В. В., д.т.н., проф., ЛИТ ОИЯИ; Королькова А. В., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Крынев А. В., д.ф.-м.н., проф., НИЯУ «МИФИ»; Кулябов Д. С., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Кучерявый А. Е., д.т.н., проф., СПб ГУТ; Кучерявый Е. А., к.т.н., проф., НИУ ВШЭ; Ланеев Е. Б., д.ф.-м.н., проф., РУДН; Мартикайнен О. Е., проф., Service Innovation Research Institute, г. Хельсинки, Финляндия; Назаров А. А., д.т.н., проф., ТГУ; Наумов В. А., проф., Service Innovation Research Institute, г. Хельсинки, Финляндия; Осипов Г. С., д.ф.-м.н., проф., ФИЦ ИУ РАН; Пузынин И. В., д.ф.-м.н., проф., ЛИТ ОИЯИ; Пшеничников А. П., к.т.н., проф., МТУСИ; Ромашкова О. Н., д.т.н., проф., МГПУ; Севастьянов А. Л., к.ф.-м.н., РУДН; Соченков И. В., к.ф.-м.н., РУДН, ФИЦ ИУ РАН; Степанов С. Н., д.т.н., проф., МТУСИ; Сушенко С. П., д.т.н., проф., ТГУ; Хачумов В. М., д.т.н., проф., ФИЦ ИУ РАН; Цирулев А. Н., д.ф.-м.н., проф., ТвГУ; Цитович И. И., д.ф.-м.н., доцент, ИПИ РАН; Чулуунбаатар О., д.ф.-м.н., ЛИТ ОИЯИ; Шоргин С. Я., д.ф.-м.н., проф., ФИЦ ИУ РАН; Щетинин Е. Ю., д.ф.-м.н., проф., СТАНКИН

**Оргкомитет:**

*Председатель:* Васильев С. А., к.ф.-м.н. (РУДН).

*Сопредседатели:* Диваков Д. В., к.ф.-м.н. (РУДН); Острикова Д. Ю., к.ф.-м.н. (РУДН); Стрельцова О. И., к.ф.-м.н., с.н.с. (ЛИТ ОИЯИ).

*Члены оргкомитета:* Никитина Е. В., к.х.н., зам. декана по науке (РУДН); Малых М. Д., к.ф.-м.н. (РУДН); Демидова А. В., к.ф.-м.н. (РУДН); Тютюнник А. А. (РУДН)

И74

**Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем** : материалы Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 16–20 апреля 2018 г. — Москва : РУДН, 2018. — 434 с. : ил.

ISBN 978-5-209-08641-3

# Содержание

## Теория телетрафика и её применения

Агеев К. А., Сопин Э. С. Разработка средства имитационного моделирования ресурсных систем массового обслуживания . . . . .	17
Аду К. И., Маркова Е. В. Рекуррентный алгоритм для расчета показателей эффективности СМО с приборами, находящимися под влиянием случайной среды	20
Багаева Н. В. Анализ модели процесса обслуживания клиентов страховой компании с ограниченным сроком действия договоров страхования . . . . .	23
Богданова Е. В., Зарядов И. С., Милованова Т. А. Математическая модель системы с рекуррентным входящим потоком, повторным обслуживанием и обобщенным обновлением . . . . .	26
Гольская А. А., Маркова Е. В., Дзантиев И. Л. Модель соты беспроводной М2М сети с равномерно распределенными на плоскости источниками заявок в виде СМО . . . . .	29
Горшенин А. К. Об исследовании параметров метеорологических моделей на основе паттернов . . . . .	32
Дудин А. Н., Дудин С. А., Дудина О. С. Модели массового обслуживания для описания работы узлов беспроводных сенсорных сетей с самогенерацией энергии	35
Ибрагимов Б. Г., Гумбатов Р. Т., Ибрагимов Р. Ф. Исследование управления информационными и сетевыми ресурсами в мультисервисных сетях связи . . . . .	38
Ибрагимов Б. Г., Керимов В. Р., Гаджижаде Н. К., Исаев А. М. Исследование ресурсов в мультисервисных сетях связи на базе единого инфокоммуникационного пространства . . . . .	44
Карнаухова Е. А., Иванова Д. В., Маркова Е. В. Модель схемы распределения радиоресурсов в сети LTE в виде СМО с ненадежными приборами и конечной очередью . . . . .	49
Крупко О. С., Москалева Ф. А., Ковальчуков Р. Н., Самуйлов А. К., Молчанов Д. А. Математическая модель звена доступа в сетях связи миллиметрового диапазона для одноадресных и многоадресных соединений . . . . .	52
Назаров А. А., Анисимова А. А. Асимптотический анализ второго порядка двухфазной гибридной СМО . . . . .	54
Никитина В. В., Хуракай Д. М. Об этапах интеллектуального анализа данных при построении и совершенствовании бизнес-процессов (Process Mining) . . . . .	57
Орбелян Т. С., Зарядов И. С., Милованова Т. А. Система с выбором кратчайшей очереди при поступлении заявок и максимальной очереди при обслуживании заявок . . . . .	60
Погосян Ш. Г. Анализ модели процесса обработки разнотипных исков в страховой компании . . . . .	63
Ромашкова О. Н., Пономарева Л. А., Василиук И. П. Применение информационных технологий для анализа показателей рейтинговой оценки вуза . . . . .	65
Семёнова О. В., Буй Д. Т. Адаптивные дисциплины опроса в системах поллинга и их имитационное моделирование . . . . .	69
Синицын И. Э. Анализ вероятности успешного установления соединения по радиоканалу случайного доступа с использованием виртуальных преамбул . . . . .	72
Уанкпо Г. Ж. К., Козырев Д. В. Модель надёжности однородной системы передачи данных облегчённого резервирования с произвольным распределением времени ремонта элементов . . . . .	75
Халина В. А. Анализ временных показателей бизнес-процессов . . . . .	78
Цурлуков В. В., Зарядов И. С., Милованова Т. А. К анализу системы массового обслуживания с ресурсами, функционирующей в случайном окружении . . . . .	81

## Сети связи следующего поколения: управление, качество, архитектура

Абаев П. О., Карев А. С. Модель для анализа показателей эффективности ядра сети 5G с виртуализацией и гистерезисным управлением . . . . .	87
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

<b>Андреев С. Д.</b> Прямое взаимодействие пользователей в мобильных социальных сетях . . . . .	90
<b>Бахтин А. А.</b> Разработка протокола передачи данных в сетях MANET . . . . .	93
<b>Богданова Е. Ю.</b> Численный анализ простейшей модели транспортного потока в уном городе . . . . .	96
<b>Волков А. С., Солодков А. В., Баскаков А. Е., Муратчаев С. С.</b> Разработка двухранговой помехоустойчивой системы радиосвязи на основе кодового разделения каналов . . . . .	98
<b>Волков А. С., Лазарев А. В.</b> Исследование и выбор помехоустойчивых кодов в соответствии с требованиями сетей мобильной связи пятого поколения . . . . .	101
<b>Волынец А. С., Гарибян А. А.</b> Реализация модели случайного блуждания для описания движения объектов в ограниченном пространстве . . . . .	104
<b>Гайдамака А. А., Чухно Н. В., Чухно О. В.</b> Алгоритмы принятия решений с помощью вычислений со словами для задач большой размерности . . . . .	107
<b>Гольдштейн Б. С., Соколов Н. А.</b> Задачи безопасности нормализуемого QoS в сетях следующего поколения . . . . .	110
<b>Гудкова И. А., Романовская Ю. А.</b> Оценка производительности работы LSA на примере модели отдельно взятой соты . . . . .	115
<b>Дараселия А. В.</b> Анализ механизмов повышения энергоэффективности облачных систем . . . . .	118
<b>Жданков А. Н., Гайдамака Ю. В.</b> Об одном алгоритме моделирования движения абонентов в беспроводной сети . . . . .	121
<b>Карачанская Е. В., Соседова Н. И.</b> Разработка метода выявления аномалий сетевого графика . . . . .	124
<b>Кименчежи В. В., Козырев Д. В.</b> Имитационное моделирование мобильности участников соединения в гетерогенной сети беспроводной передачи данных с ограничением на пересечение границ и ненадежными объектами . . . . .	127
<b>Кутбитдинов С. Ш., Лохмотко В. В., Рудинская С. Р.</b> Гармонизация параметров IMS методом взаимной оптимизации по критериям производительности и потерь . . . . .	131
<b>Макеева Е. Д., Харин П. А., Поляков Н. А., Маркова Е. В., Гудкова И. А., Галинина О. С.</b> Анализ установления соединения пар передатчик-приемник на mmWave . . . . .	134
<b>Мачнев Е. А., Бегишев В. О.</b> Имитационное моделирование уличных точек доступа, функционирующие на миллиметровом диапазоне частот . . . . .	137
<b>Мацкевич И. А.</b> Исследование наработки сенсорной сети полиграфического комбината до отказа . . . . .	140
<b>Половов М. П., Бесчастный В. А., Острикова Д. Ю., Гудкова И. А.</b> Численный анализ оптимальной скорости передачи данных в сети с технологией мультимедиа методом перебора . . . . .	143
<b>Разгоняев В. А., Мокров Е. В., Самуйлов К. Е.</b> Математическая модель среднего времени передачи данных подвижным пользователям в сети LTE . . . . .	146
<b>Ромашкова О. Н., Самойлов В. Е.</b> Определение дальности гарантируемой радиосвязи в беспроводных телекоммуникационных сетях стандарта IEEE 802.11 с использованием программы ring . . . . .	150
<b>Савич В. Н., Бесчастный В. А., Острикова Д. Ю., Гудкова И. А.</b> Модель мобильности в виде СЕМО с «пассивным» узлом . . . . .	154

## Прикладные информационные системы и технологии

<b>Волков С. С.</b> Система распознавания рукописных букв на основе нейронной сети . . . . .	159
<b>Григорьева Т. В., Жуков В. В.</b> Перспективы применения кластерного анализа для реинжиниринга клинических бизнес-процессов . . . . .	162
<b>Жуков В. В., Аронов Д. А., Семушина С. Г., Моисеева Е. В.</b> Применение машины опорных векторов для предсказания возникновения рака молочной железы в мышинной модели . . . . .	165
<b>Зубрихина М. О., Молодченков А. И.</b> Разработка метода поддержки принятия решений о выборе тактики хирургического лечения грыжи диска . . . . .	168
<b>Катрич А. В.</b> Пример применения OLAP . . . . .	171

<b>Психоловский А. Н., Жуков В. В.</b> Вычисление апостериорных вероятностей в психопатологии на основе метаанализа медицинских публикаций . . . . .	174
<b>Коняев Е. Ю.</b> Автоматизация оценивания вопросов открытого типа . . . . .	177
<b>Крескин А. Д.</b> Выявление источников заимствования для документа с использованием моделей дистрибутивной семантики . . . . .	180
<b>Кузнецов Е. А., Фомин М. Б.</b> Проектирование многомерных информационных систем с использованием методологии «Data Vault» . . . . .	183
<b>Лукин А. В.</b> Построение системы проведения мета-анализа медицинских исследований для получения ответа на клинический вопрос (на примере печеночной недостаточности) . . . . .	186
<b>Матвеева Е. А.</b> Методы синтеза текстов на естественном языке в заданном стиле	189
<b>Молодченков А. И.</b> Модуль базы знаний в системе управления здоровьем людей	192
<b>Новикова Д. С.</b> Разрешение неоднозначности авторства публикаций на основе коллекции документов поисковой системы Eхactus Expert . . . . .	195
<b>Павлюкова А. В.</b> Использование статистических характеристик сигнала в построении аудиоидентификатора музыкальных произведений для поиска нечетких соответствий . . . . .	198
<b>Пальчевский А. И., Молодченков А. И.</b> Разработка методов моделирования динамики изменения ишемической болезни мозга путем применения алгоритмов 3d моделирования и морфинга изображений . . . . .	201
<b>Паршина К. С.</b> Алгоритмы удаления невидимых линий при построении изображений трехмерных тел . . . . .	204
<b>Перетягько О. Д., Молодченков А. И.</b> Оценка соответствия экземпляра процесса его обобщенной схеме . . . . .	207
<b>Салпагаров С. И., Гончаров Л. М., Мардашев А. М.</b> Векторная задача о сочетаниях на гиперграфах . . . . .	210
<b>Салпагаров С. И., Исаев Ю. Д.</b> Оптимизационная модель распределения потоков данных R2P-телевидения на гиперграфах . . . . .	213
<b>Сингх Л., Молодченков А. И.</b> Разработка метода оценки близости пептидов . . . . .	216
<b>Скрынник К. В.</b> Исследование метода классификации новостей на основе дистрибутивной семантики . . . . .	219
<b>Тханг Фам К., Копылов А., Тхао Чан Т. Т.</b> Вычислительно эффективный алгоритм восстановления изображений с использованием полной вариации . . . . .	222
<b>Хачумов М. В., Хачумов В. М.</b> Задача безопасного формирования заданного строя БПЛА (плоский случай) . . . . .	226
<b>Храбров Р. Н., Фомин М. Б.</b> Визуализация потока жидкости через тонкостенный сосуд с переменным сечением . . . . .	229
<b>Чистова Е. В.</b> Моделирование естественно-языковой коммуникации с помощью глубокого обучения . . . . .	232
<b>Ядринцев В. В., Соченков И. В.</b> Полнотекстовый классификатор патентных документов . . . . .	235
<b>Янко Ю. Д.</b> Проектирование базы данных для системы автоматизации процесса голосования . . . . .	238

## **Распределённые, высокопроизводительные вычисления и аналитика больших данных**

<b>Адам Г., Беляков Д. В., Валя М., Гончаров П. В., Зрелов П. В., Кореньков В. В., Матвеев М. А., Подгайный Д. В., Стрельцова О. И.</b> Виртуальные рабочие столы гетерогенного кластера HybriLIT . . . . .	245
<b>Башапин М. В., Земляная Е. В., Лукьянов К. В.</b> Параллельная реализация модели микроскопического оптического ядро-ядерного потенциала на основе технологий MPI и OPENMP . . . . .	248
<b>Добрынин В. Н., Миловидова А. А., Соколов И. А.</b> Оценка адекватности модели и объекта исследования . . . . .	252
<b>Дубнов Ю. А.</b> Перекрестная энтропия для отбора признаков в задачах анализа данных . . . . .	257

Зуев М. И., Матвеев М. А., Подгайный Д. В., Стрельцова О. И., Торосян Ш. Г. HLLT-VDI – новый сервис IT-экосистемы гетерогенного кластера HybriLIT для работы с прикладным программным обеспечением	260
Мажитова Е. М., Балашов Н. А., Баранов А. В., Кутовский Н. А., Семенов Р. Н. Интеграция облачных инфраструктур ЛИТ ОИЯИ и Астанинского филиала ИЯФ	262
Никольский И. М. Суперкомпьютерное моделирование функционирования беспроводной сенсорной сети в ситуации потери связи с базовой станцией	266
Рахмонова А. Р. Анализ производительности компьютерного моделирования физических процессов в системе длинных джозефсоновских переходов на кластере HybriLIT	269
Чеботов А. И., Авзалов Р. Л., Чернышев Я. М., Герценбергер К. В., Бутенко Ю. А. Разработка сервиса VM@N-Webapp для обработки и визуализации информации об эксперименте на фиксированной мишени VM@N	273

## Математическое моделирование

Аль-Натор М. С., Аль-Натор С. В. Оптимальная самофинансируемая много-периодная портфельная стратегия с учетом комиссии	279
Амирханов И. В., Саркар Н. Р. Об одном методе приближенного решения задачи трех тел	282
Апреутсей А.-М. Ю. Простая модель системы с активным управлением очередью по алгоритму типа RED	285
Ахметханова Д. М., Зарядов И. С. Вероятностные и статистические методы, применяемые для оптимизации работы парковочных систем и связанные с распознаванием номерных знаков	288
Байло Н. В., Матюшенко С. И., Пяткина Д. А. Статистический анализ инфляции в современной России	291
Боровских Д. А., Дилие Гбавле Люк-Дональд, Петров В. А., Савин А. С., Садовников В. К., Хохлов А. А. Применение метода SSA к различным прикладным задачам	294
Бочкарёв В. В., Крынев А. В., Смирнов Д. С., Шарафутдинов Р. Б. Информационно-математическая модель поддержки принятия решений по выводу из эксплуатации объектов использования атомной энергии	297
Будочкина С. А. О скобках Пуассона в пространствах $B_{\mu}$ -потенциалов	300
Буурулдай А. Э. О функции волатильности в модифицированной модели дисперсии с постоянной эластичностью (CEV)	302
Батгэрэл Б., Димова С. Н., Пузынин И. В., Пузынина Т. П., Тухлиев З. К., Христов И. Г., Христова Р. Д., Шарипов З. А. Моделирование дальности действия тепловых изменений металла, облучаемого нанокластерами меди	305
Велиева Т. Р., Завозина А. В., Королькова А. В. Определение коэффициентов гармонической линеаризации для детерминистической нелинейной системы с управлением	308
Велиева Т. Р., Завозина А. В., Королькова А. В. NS-2 как средство верификации амплитудно-частотных характеристик системы с управлением	311
Геворкян М. Н., Демидова А. В., Демидова Т. С., Соболев А. А. Моделирование распространения сетевых червей с помощью стохастических дифференциальных уравнений	314
Геворкян М. Н., Демидова А. В., Королькова А. В., Кулябов Д. С., Гостев И. М. Проблемы реализации стохастических численных методов Рунге-Кутты	318
Гоголева С. Ю., Зайнетдинова Л. Г. Об одном итерационном методе для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами	321
Грачев Д. А., Емельянова Е. Ю., Попова Е. В., Хохлов А. А. Разработка модели биоимпедансометра	324
Дилие Гбавле Люк-Дональд, Емельянова Е. Ю., Попова Е. В., Хохлов А. А. Обработка данных акселерометров мобильных устройств для классификации движений	326

Демидова А. В., Дружинина О. В., Масина О. Н., Мияйлович Н., Ячимо- вич М. Синтез и анализ многомерных математических моделей популяционной динамики	329
Денисенко А. П., Мингажитдинова Э. Ф., Петров В. А., Савин А. С., Хох- лов А. А. Оптимизация стоимости транзакций в блокчейне Ethereum	333
Диваков Д. В., Севастьянов А. Л., Белов М. П. Постановка задачи расчета направляемых мод градиентного в поперечном направлении волновода	336
Древицкий А. С., Диваков Д. В., Котюков М. М. Задача символьно- численного расчета собственных значений вытекающих мод в регулярном одно- родном открытом волноводе	339
Егоров А. А. Исследование свойств жидкокристаллических волноводных структур	342
Зотова П. А., Жукова Л. В., Пяткина Д. А. Анализ востребованных форма- тов заданий для онлайн-курсов среди студентов разных учебных заведений	345
Касимов Ю. Ф., Тимербаев М. И. Оптимальные веса рискованных активов в ин- дексных портфелях постоянной пропорции	348
Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. Управление марковской цепью с непрерыв- ным ограниченным множеством состояний, оптимизирующее стационарное рас- пределение цепи	351
Крянев А. В., Слива Д. Е., Матохин В. В. Характеристики неравномерности распределения ресурсов в экономических системах	355
Кузив Я. Ю. Комплекс программ для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка	358
Кулябов Д. С., Геворкян М. Н., Королькова А. В. Численный анализ геомет- ризованных уравнений Максвелла	361
Лесик П. А., Романов А. А., Чистотина Д. А. Об одной обратной задаче для метагармонического уравнения	364
Лижненко Н. М., Морозова Д. А. Задача продолжения ньютоновского потен- циала в цилиндре кругового сечения	366
Мысина Ю. А. Повышение пенсионного возраста и решение проблемы снижения численности занятого населения	368
Пермякова Ю. С. Рыночные риски коммерческого банка: методы оценки и управления	371
Попков А. Ю. Метод генерации случайных векторов в заданными вероятност- ными характеристиками	374
Пылаева А. Н. Моделирование ценообразования на рынке смартфонов	377
Пяткина Д. А., Матюшенко С. И., Зотова П. А., Казандаева А. П. Анализ цен на ноутбуки с помощью эконометрических моделей	381
Рассахан Н. Д., Щетинин Е. Ю. Оценка зависимостей тяжелых хвостов при помощи аппарата копул для анализа осадков	384
Севастьянов Л. А., Васильева Д. Г. Стохастическая динамика роста популяций	387
Талагаев Ю. В. Оценка состояния нелинейных сетевых систем управления, пред- ставленных нечеткими моделями Такаги-Сугено	390
Тевелева Е. А., Третьяков Н. П., Терлецкий А. Я. Применение фазового ана- лиза временных рядов для выделения макроэкономических циклов на примере динамики курсов валют	393
Третьяков Н. П., Кочанов А. А. Эффективное уравнение Шрёдингера для од- номерной системы с быстро осциллирующими граничными условиями	396
Шебанова К. В., Хамидуллина К. И. Устойчивое вычисление нормали к по- верхности, заданной приближенно	399
Чупритский В. К., Диваков Д. В. Моделирование прохождения световой вол- ны через открытый планарный волновод методом «ящика Дирихле»	401
Шорохов С. Г., Буурулдай А. Э. О модели локальной волатильности с гипер- болическим синусом	404
Шунин Е. В. Сравнение Online-Q и Experience Replay для обучения нейронной сети в мультиагентной среде	407
Щетинин Е. Ю. О некоторых свойствах непараметрических оценок коэффи- циентов хвостовой зависимости	410

<b>Щетинин Е. Ю., Бережков М. В., Любин П. Г.</b> Разработка эффективного алгоритма краткосрочного прогнозирования электропотребления с использованием метода ансамбля . . . . .	413
<b>Юй Ин</b> Методика отыскания алгебраических интегралов дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	416
<b>Бабин А. В.</b> Обзор методов решения задач мониторинга производительности и доступности ИТ структуры предприятия . . . . .	419
<b>Конькова Е. В.</b> К анализу системы массового обслуживания фазового типа в частном случае . . . . .	422
<b>Авторский указатель</b>	425



УДК 004.4

## Проблемы реализации стохастических численных методов Рунге–Кутты

М. Н. Геворкян\*, А. В. Демидова\*, А. В. Королькова\*,  
Д. С. Кулябов\*, И. М. Гостев†

\* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

† *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
ул. Мясницкая, д. 20, Москва, Россия, 101000*

Email: gevorkyan\_mn@rudn.university

В данной работе рассматриваются стохастические численные методы типа Рунге–Кутты с слабой и сильной сходимостями для систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито. Дается краткий обзор основных стохастических численных методов и сведений из теории стохастических дифференциальных уравнений. Далее излагается и мотивируется подход к реализации данных методов с помощью генерации исходного кода. Обсуждаются детали реализации и используемые языки программирования и библиотеки.

**Ключевые слова:** стохастические дифференциальные уравнения; стохастические численные методы; автоматическая генерация кода; Python; Julia; шаблонизатор.

### 1. Введение

В статье авторов [1] описывалась реализация стохастических численных методов типа Рунге–Кутты на языке Python с использованием библиотек NumPy и SciPy. Выбор языка был продиктован удобством программирования и возможностью работать с многомерными массивами как с тензорами. Однако быстродействие созданных функций была на низком уровне. В данной работе мы описываем альтернативный подход к реализации стохастических численных методов, основанный на генерации кода численных методов.

### 2. Анализ трудностей реализации стохастических численных методов Рунге–Кутты

Стохастические методы Рунге–Кутты значительно сложнее своих классических аналогов. Можно указать следующие факторы, усложняющие реализацию стохастических методов в программном виде.

- Общая громоздкость формул численных схем.
- При выборе конкретного метода надо учитывать какой тип сходимости необходимо обеспечить для данной конкретной задачи, а также какое из стохастических уравнений необходимо решать — в форме Ито или в форме Стратоновича. Это увеличивает количество алгоритмов, которые нужно запрограммировать.
- Для методов с сильной сходимостью большей единицы на каждом шаге необходимо решать ресурсоёмкую задачу по аппроксимации двукратных стохастических интегралов.
- В численной схеме присутствуют не только матрицы и векторы, но и тензоры (четырёхмерные массивы), с которыми необходимо совершать операцию свертки по нескольким индексам. Реализация свертки через суммирование с помощью обычных циклов приводит к существенному падению производительности.
- Для использования слабых методов необходимо применять метод Монте-Карло, проводя несколько серий по множеству испытаний в каждой. Так как метод Монте-Карло сходится приблизительно как  $1/\sqrt{N}$ , где  $N$  — число испытаний, то для достижения точности хотя бы  $10^{-3}$  необходимо провести минимум  $10^6$  испытаний.

Наиболее существенное падение производительности происходит при реализации универсального алгоритма, то есть такой программы, которая может произвести расчет, используя произвольную таблицу коэффициентов. В этом случае приходится использовать большое количество вложенных циклов для того, чтобы организовать суммирование. Наличие в схемах для систем СДУ двойных сумм и сложной комбинации индексов в множителях, находящихся под знаком этих сумм, еще более усложняет задачу, и число вложенных циклов вырастает до шести.

Кроме этих специфических особенностей стоит упомянуть также несколько причин падения производительности, присущих также и классическим схемам, которые в стохастическом случае также играют роль. Очевидным способом хранения коэффициентов методов является использование массивов. Однако у явных методов, которые мы рассматриваем, матрица является ниже-диагональной и хранение ее в виде двумерного массива приводит к тому, что более чем половина выделенной для массива памяти тратится на хранение нулей.

Если изучить исходные коды популярных подпрограмм, реализующих классические явные вложенные методы Рунге–Кутты, то можно обнаружить, что в этих программах для хранения коэффициентов метода используется набор именованных констант, а не массивов. Это вызвано также и тем, что операции со скалярными величинами в большинстве языков программирования проводятся быстрее, чем операции с массивами.

При сохранении требования универсальности создаваемого кода и вместе с тем желание увеличить скорость вычислений и уменьшить расход памяти, привели нас к решению использовать автоматическую генерацию кода по одному шаблону для каждого отдельного метода.

Кроме выигрыша в производительности автоматическая генерация кода позволяет добавлять или изменять все функции за раз путем редактирования одного лишь шаблона, а не каждой отдельной функции. Это позволяет как уменьшить количество ошибок, так и генерировать различные варианты функций для разных целей.

### 3. Краткое описание автоматической генерации кода

В качестве языка для написания генератора кода используется язык Python. Исходный код и документация созданных в нашем коллективе программ доступны по ссылке [bitbucket.org/mngev/sde\\_num\\_generation](https://bitbucket.org/mngev/sde_num_generation). Данный репозиторий содержит модуль `stochastic`, в котором реализован винеровский случайный процесс и численные методы типа Рунге–Кутты для скалярных и многомерных стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито. Большая часть кода для этого модуля генерируется набором скриптов из директории `generator`. В ручную написан класс, реализующий многомерный винеровский процесс и методы Эйлера–Маруямы.

Для работы генератора кода мы использовали библиотеку для обработки шаблонов Jinja2 [2]. Данный шаблонизатор (template engine) разрабатывался изначально для генерации HTML страниц, однако он обладает очень гибким синтаксисом и может использоваться как универсальное средство для генерации текстовых файлов любого вида, в том числе и исходных кодов на любых языках программирования. Кроме Jinja2 мы также использовали библиотеку NumPy для работы с массивами и ускорения вычислений.

Шаблоны для генерации кода представляют собой файлы с исходным кодом на языке Python со вставками специальных команд шаблонизатора Jinja2. Информация о коэффициентах методов хранится отдельно в структурированном виде в формате JSON. Это позволяет легко добавлять новые методы и изменять старые путем редактирования и JSON файлов. В настоящее время генерируются методы с коэффициентами, представленными в работах [3–5].

В качестве языка для уже сгенерированных функций используется сам python с активным применением библиотеки NumPy, которая позволяет получить приемлемую производительность. Однако генерируемый код легко можно перформатировать так, чтобы он соответствовал синтаксису любого другого языка программирования.

#### 4. Заключение

В данной работе рассмотрены стохастические численные схемы с порядком сходимости выше 0,5. Показано, что такие методы существенно сложнее эквивалентных численных методов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Выделены их особенности, делающие эффективную программную реализацию таких методов не тривиальной задачей. В заключительной части статьи обсуждается подход, основанный на автоматической генерации программного кода, который позволяет получить эффективную реализацию рассматриваемых методов, давая возможность использовать любую таблицу коэффициентов. Дано краткое описание программы, созданной авторами, и ссылка на репозиторий с исходными кодами.

#### Благодарности

Публикация подготовлена при поддержке программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов РФФИ № 15-07-08795, 16-07-00556.

#### Литература

1. Gevorkyan M. N., Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. Stochastic Runge–Kutta Software Package for Stochastic Differential Equations // Dependability Engineering and Complex Systems. — Springer International Publishing, 2016. — Vol. 470. — P. 169–179. — 1606.06604.
2. Jinja2 official site. — Access mode: <http://http://jinja.pocoo.org>.
3. Debrabant K., Rößler A. Continuous weak approximation for stochastic differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2008. — no. 214. — P. 259–273.
4. Debrabant K., Rößler A. Classification of Stochastic Runge–Kutta Methods for the Weak Approximation of Stochastic Differential Equations / Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Mathematik. — 2013. — Mar. — arXiv:1303.4510v1.
5. Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — 2 edition. — Berlin Heidelberg New York : Springer, 1995. — ISBN: 3-540-54062-8.

UDC 004.4

### Problems in Realization of Stochastic Numerical Runge–Kutta Methods

M. N. Gevorkyan\*, A. V. Demidova\*, A. V. Korolkova\*, D. S. Kulyabov\*,  
I. M. Gostev†

\* *Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

† *National Research University Higher School of Economics  
20 Myasnitskaya str., Moscow, 101000, Russian Federation*

Email: [gevorkyan\\_mn@rudn.university](mailto:gevorkyan_mn@rudn.university)

This article discusses stochastic numerical methods of Runge-Kutta type with weak and strong convergences for systems of stochastic differential equations in Itô form. At the beginning we give a brief overview of the stochastic numerical methods and information from the theory of stochastic differential equations. Then we motivate the approach to the implementation of these methods using source code generation. We discuss the implementation details and the used programming languages and libraries

**Key words and phrases:** stochastic differential equations; stochastic numerical methods; automatic code generation; Python; Julia; the template engine.