# Maxwell's Optics Symplectic Hamiltonian

D. S. Kulyabov,[1,2,*] A. V. Korolkova,[1,†] and L. A. Sevastyanov[1,3,‡]

[1] *Department of Applied Probability and Informatics*
*Peoples' Friendship University of Russia*
*Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*
[2] *Laboratory of Information Technologies*
*Joint Institute for Nuclear Research*
*Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia*
[3] *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
*Joint Institute for Nuclear Research*
*Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia*[§]



The Hamiltonian formalism is extremely elegant and convenient to mechanics problems. However, its application to the classical field theories is a difficult task. In fact, you can set one to one correspondence between the Lagrangian and Hamiltonian in the case of hyperregular Lagrangian. It is impossible to do the same in gauge-invariant field theories. In the case of irregular Lagrangian the Dirac Hamiltonian formalism with constraints is usually used, and this leads to a number of certain difficulties. The paper proposes a reformulation of the problem to the case of a field without sources. This allows to use a symplectic Hamiltonian formalism. The proposed formalism will be used by the authors in the future to justify the methods of vector bundles (Hamiltonian bundles) in transformation optics.

Keywords: Maxwell's equations; curvilinear coordinates; symplectic manifold; Hamiltonian formalism; doubling of variables

## I. INTRODUCTION

The Hamiltonian formalism [1] is well known and widely used in geometrical optics. As a Hamiltonian the Hamiltonian of material particle is used.

In the case of wave optics there is a number of difficulties in the construction of the Hamiltonian formalism. Since the Lagrangian of the electromagnetic field is not regular, then the construction of a symplectic Hamiltonian formalism is not possible. The Dirac formalism with constraints is commonly used to gauge theories.

However, if we restrict ourselves to systems without sources, it is possible to build a standard symplectic Hamiltonian formalism.

This article demonstrates the impossibility of constructing symplectic Hamiltonian for the general case of the electromagnetic field. In the case of the sourceless field the general method for constructing symplectic Hamiltonian and the example of such constructing are presented.

## II. NOTATIONS AND CONVENTIONS

1. We will use the notation of abstract indices [2]. In this notation tensor as a complete object is denoted merely by an index (e.g., $x^i$). Its components are designated by underlined indices (e.g., $x^{\underline{i}}$).

2. We will adhere to the following agreements . Greek indices ($\alpha$, $\beta$) will refer to the four-dimensional space, in component form it looks like: $\underline{\alpha} = \overline{0,3}$. Latin indices from the middle of the alphabet ($i$, $j$, $k$) will refer to the three-dimensional space, in the component form it looks like: $\underline{i} = \overline{1,3}$.

3. The comma in the index denotes a partial derivative with respect to corresponding coordinate ($f_{,i} := \partial_i f$); semicolon denotes a covariant derivative ($f_{;i} := \nabla_i f$).

4. The CGS symmetrical system [3] is used for notation of the equations of electrodynamics.

## III. MAXWELL'S EQUATIONS

Maxwell's equations will be written both via field variables, and in the gauge-invariant form (in the formalism of bundles) [4–8].

* yamadharma@gmail.com
† avkorolkova@gmail.com
‡ leonid.sevast@gmail.com
§ *Published in:* D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, and L. A. Sevastyanov, "Problem of the Construction of a Hamiltonian for Maxwell's Equations," Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI" **4**, 201–205 (2015), in Russian. doi: 10.1134/S2304487X15030086.; *Sources:* `https://bitbucket.org/yamadharma/articles-2014-em-hamiltonian`

### A. Maxwell's equations via field variables

We write Maxwell's equations via the field variables in the tensor formalism in holonomic basis:

$$\begin{cases} \nabla_i D^i = 4\pi\rho, \\ e^{ijk}\nabla_j H_k - \dfrac{1}{c}\partial_t D^i = \dfrac{4\pi}{c} j^i, \\ \nabla^i B_i = 0, \\ e_{ijk}\nabla^j E^k + \dfrac{1}{c}\partial_t B_i = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Here $e_{ijk}$ is the Levi–Civita tensor (alternating tensor)[1].

Field functions $\vec{E}$ and $\vec{B}$ can be represented via field potentials $\varphi$ and $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A},$$

or in the index notation:

$$\begin{cases} B^i = \left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)^i = e^{ikl}\partial_k A_l, \\ E_i = -\partial_i\varphi - \partial_0 g_{ij}A^j. \end{cases} \tag{2}$$

### B. Maxwell's equations in the formalism of bundles

We introduce the tensor of the electromagnetic field as a curvature on the tangent bundle:

$$F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \tag{3}$$

where the connection $A^\alpha$ means the 4-vector potential $A^\alpha = (\varphi, \vec{A})$.

We write the tensor (3) by components taking into account relation (2):

$$F_{0\underline{i}} = \partial_0 A_{\underline{i}} - \partial_{\underline{i}} A_0 = -\partial_0 A^{\underline{i}} - \partial_i A^0 = E_{\underline{i}},$$
$$F_{\underline{ik}} = \partial_{\underline{i}} A_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}} A_{\underline{i}} = -\varepsilon_{\underline{ikl}} B^{\underline{l}}.$$

Similarly, we introduce the Minkowski's tensor (displacement tensor) $G^{\alpha\beta} := F^{\alpha\beta} - 4\pi S^{\alpha\beta}$ ($S^{\alpha\beta}$ is the polarization–magnetization tensor) [9].

Thereby the tensors $F_{\alpha\beta}$ and $G^{\alpha\beta}$ have the following components

$$F_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E_2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E_3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G^{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D^2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Here $E_{\underline{i}}$, $H_{\underline{i}}$ are components of electric and magnetic fields intensity vectors; $D^{\underline{i}}$, $B^{\underline{i}}$ are components of vectors of electric and magnetic induction.

Let's write the Maxwell equations with the help of electromagnetic field tensors $F_{\alpha\beta}$ and $G_{\alpha\beta}$ [10, 11]:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0, \tag{4}$$
$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta. \tag{5}$$

### C. The Lagrangian of the electromagnetic field

Let's construct the Lagrangian $\mathcal{L}$ explicitly.

The equation (4) represents the second Bianchi identity, that is performed by the construction of (3). To construct the Lagrangian we only need to use the equations (5).

Then the Lagrangian has the form:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha.$$

The form of Euler–Lagrange equation:

$$\nabla_\beta \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^\alpha_{;\beta}} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^\alpha} = 0. \tag{6}$$

### D. The problem of constructing the Hamiltonian of the electromagnetic field

The Hamiltonian (Hamiltonian density) is constructed by Lagrangian with the help of Legendre transformations:

$$\mathcal{H} := p_\alpha \dot{A}^\alpha - \mathcal{L}, \tag{7}$$

where $p_\alpha$ is momentum density, $\mathcal{L}$ is Lagrangian.

Because in Hamiltonian formalism all the equations are constructed with generalized coordinates and momenta, in order to write down the Hamiltonian density (7) and the corresponding Hamilton equations we need to express the generalized momentum $p^\alpha$ through velocities $\dot{A}^\alpha$ in the (6):

$$\begin{cases} \dot{A}^\alpha = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta p_\alpha}, \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta A^\alpha}. \end{cases}$$

This requires that the determinant of the Hessian matrix is nonzero:

$$\det \mathbf{H}(\mathcal{L}) \neq 0,$$

[1] $e_{ijk} = \sqrt{{}^3 g}\,\varepsilon_{ijk}$, $e^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{{}^3 g}}\varepsilon^{ijk}$, $e_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-{}^4 g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $e^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-{}^4 g}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

where the elements of the Hessian matrix are:

$$\{\mathbf{H}(\mathcal{L})\}_{\underline{\alpha\beta}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{\underline{\alpha}} \partial \dot{A}^{\underline{\beta}}}.$$

But $F_{00} = 0$ and $\{\mathbf{H}(\mathcal{L})\}_{00} = \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}^0)^2} = 0$. Therefore, $\det \mathbf{H}(\mathcal{L}) = 0$. That means that the Lagrangian is irregular, and the construction of symplectic Hamiltonian formalism in such a manner is impossible.

## IV. BUILDING A SYMPLECTIC HAMILTONIAN

It turns out that in the absence of sources ($j_\alpha = 0$) we can construct a symplectic Hamiltonian formalism making the desired change of variables. As one of the methods, the method of doubling variables is considered. This method is applicable when the system contains only generalized variables, and generalized momenta are absent.

### A. Doubling of variables method

Consider the system of $s$ equations:

$$\dot{q}^{\underline{n}} = f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t), \quad \underline{n} = \overline{0, s}. \tag{8}$$

We define the space $\mathbb{R}^{2s}$ with the following coordinates:

$$\xi^{\underline{n}} := q^{\underline{n}}, \quad \xi^{\underline{n+s}} := p_{\underline{n}}, \quad \xi^a \in \mathbb{R}^{2s}; \quad \underline{n} = \overline{0, s}, \quad \underline{a} = \overline{0, 2s}.$$

We introduce in this space the Poisson bracket:

$$\{A(\xi^c, t), B(\xi^c, t)\} = \Omega^{\underline{ab}} \frac{\partial A(\xi^c, t)}{\partial \xi^{\underline{a}}} \frac{\partial B(\xi^c, t)}{\partial \xi^{\underline{b}}},$$

$$\Omega^{\underline{ab}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} = \overline{0, 2s}.$$

The Hamiltonian is defined as follows:

$$\mathcal{H}(q^n, p_n, x^i, t) = p_{\underline{n}} f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t). \tag{9}$$

Then the first group of the Hamilton equations will be the same as the original system (8), and the second group will be as follows:

$$\dot{p}_{\underline{n}} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^{\underline{n}}} = -p_{\underline{m}} \frac{\delta f^{\underline{m}}}{\delta q^{\underline{n}}}.$$

### B. The applicability of the method of doubling the variables for the Maxwell equations

Let's establish that Maxwell's equations without sources satisfy the condition of applicability of the doubling of variables method. To do this, we rewrite the equations (1) in the form:

$$\begin{cases} \partial_t B_i = -c e_{ijk} \nabla^j E^k, \\ \partial_t D^i = c e^{ijk} \nabla_j H_k, \\ \nabla^i B_i = 0, \\ \nabla_i D^i = 0. \end{cases}$$

It can be seen that the second pair of equations violates the condition of method applicability. However, we can show that in the absence of sources these equations are linearly dependent on the rest of the Maxwell equations. Let's write first and second equations in component form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} [E_{3,2} - E_{2,3}] &= -\frac{1}{c} \partial_t B^1, \\ \frac{1}{\sqrt{g}} [E_{1,3} - E_{3,1}] &= -\frac{1}{c} \partial_t B^2, \\ \frac{1}{\sqrt{g}} [E_{2,1} - E_{1,2}] &= -\frac{1}{c} \partial_t B^3. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} [H_{3,2} - H_{2,3}] &= \frac{1}{c} \partial_t D^1, \\ \frac{1}{\sqrt{g}} [H_{1,3} - H_{3,1}] &= \frac{1}{c} \partial_t D^2, \\ \frac{1}{\sqrt{g}} [H_{2,1} - H_{1,2}] &= \frac{1}{c} \partial_t D^3. \end{aligned} \tag{11}$$

The following two equations are written in the same way:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left( \sqrt{g} B^i \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \partial_1 \left( \sqrt{g} B^1 \right) + \partial_2 \left( \sqrt{g} B^2 \right) + \partial_3 \left( \sqrt{g} B^3 \right) \right] = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left( \sqrt{g} D^i \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \partial_1 \left( \sqrt{g} D^1 \right) + \partial_2 \left( \sqrt{g} D^2 \right) + \partial_3 \left( \sqrt{g} D^3 \right) \right] = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Differentiating both sides of equations (10) and (11) we get (assuming that $g$ is time independent):

$$\begin{aligned} E_{3,21} - E_{2,31} &= -\frac{1}{c} \partial_t \partial_1 \left( \sqrt{g} B^1 \right), \\ E_{1,32} - E_{3,12} &= -\frac{1}{c} \partial_t \partial_2 \left( \sqrt{g} B^2 \right), \\ E_{2,13} - E_{1,23} &= -\frac{1}{c} \partial_t \partial_3 \left( \sqrt{g} B^3 \right). \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} H_{3,21} - H_{2,31} &= \frac{1}{c} \partial_t \partial_1 \left( \sqrt{g} D^1 \right), \\ H_{1,32} - H_{3,12} &= \frac{1}{c} \partial_t \partial_2 \left( \sqrt{g} D^2 \right), \\ H_{2,13} - H_{1,23} &= \frac{1}{c} \partial_t \partial_3 \left( \sqrt{g} D^3 \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Adding the equations (14) and (15) term by term we obtain (12) and (13) respectively.

Thus, the system of Maxwell's equations is transformed into the following reduced system which satisfies the condition of method:

$$\begin{cases} \partial_t B_i = -c e_{ijk} \nabla^j E^k, \\ \partial_t D^i = c e^{ijk} \nabla_j H_k. \end{cases} \tag{16}$$

### C. Example of the Hamiltonian

We define the constitutive equations:

$$D^i = \varepsilon^i_j(x^k)E^j, \quad B^i = \mu^i_j(x^k)H^j.$$

We rewrite (16) as follows (assuming that the metric is time independent):

$$\begin{cases} \partial_t E^i = c(\varepsilon^{-1})^i_l \dfrac{1}{\sqrt{{}^3 g}} \varepsilon^{ljk} H_{k,j}, \\ \partial_t H^i = -c(\mu^{-1})^i_l \dfrac{1}{\sqrt{{}^3 g}} \varepsilon^{ljk} E_{k,j}. \end{cases}$$

We choose the generalized coordinates in the form:

$$q^n = \left(E^1, E^2, E^3, H^1, H^2, H^3\right)^T, \quad \underline{n} = \overline{1,6}.$$

The System (8) takes the following form:

$$\begin{cases} \dot{q}^{\underline{i}} = f^{\underline{i}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t) = c(\varepsilon^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \dfrac{1}{\sqrt{{}^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k+3},\underline{j}}, \\ \dot{q}^{\underline{i+3}} = f^{\underline{i+3}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t) = -c(\mu^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \dfrac{1}{\sqrt{{}^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k},\underline{j}}. \end{cases} \tag{17}$$

We write the Hamiltonian based on the (9) and (17):

$$\mathcal{H}(q^n, p_n, x^i, t) = p_{\underline{n}} f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t) = \\ = p_{\underline{i}} c(\varepsilon^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \frac{1}{\sqrt{{}^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k+3},\underline{j}} - p_{\underline{i+3}} c(\mu^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \frac{1}{\sqrt{{}^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k},\underline{j}}.$$

The corresponding system of Hamiltonian equations has the following form:

$$\begin{cases} \dot{q}^n = \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_n} = f^n, \\ \dot{p}_n = -\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^n} = -p_m \dfrac{\delta f^m}{\delta q^n} = \\ \quad = -p_m \dfrac{\partial f^m}{\partial q_n} + p_m \partial_i \dfrac{\partial f^m}{\partial q^n_{,i}} = p_m \partial_i \dfrac{\partial f^m}{\partial q^n_{,i}}. \end{cases}$$

To write out the explicit form of the momenta in general is not possible.

## V. CONCLUSION

In geometrical optics the concept of the ideal instrument was formulated over a hundred years ago. Based on this concept, in particular, such focusing (two-dimensional or three-dimensional) objects, as a Luneburg lens, a Maxwell's fisheye and others were constructed. Prediction and the invention of lasers have given for researchers the concept of distribution and transformation of electromagnetic fields satisfying the Maxwell's equations. In the last 10–20 years, the laws of transformation of three-dimensional vector fields were studied in different papers dedicated to transformational optics. However, the concept of an ideal instrument in these studies remains taken from geometrical optics. The authors of this paper intend to strictly formulate the concept of the ideal transformation optics device in Maxwell's optics, that implements fundamental solutions (propagators, Green's function) of Maxwell's equations. The results represented are the first step towards solving this problem.

In this paper a formal method of obtaining symplectic Hamiltonian formalism for Maxwell's equations without sources was constructed. The authors also hope that represented examples sufficiently clarify the application of the proposed method.

## ACKNOWLEDGMENTS

The work is partially supported by RFBR grants No's 13-01-00595, 14-01-00628 and 15-07-08795.

[1] R. K. Luneburg, Mathematical Theory of Optics, University of California Press, Berkeley & Los Angeles, 1964.

[2] R. Penrose, W. Rindler, Spinors and Space-Time: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields, Vol. 1, Cambridge University Press, 1984.

[3] D. V. Sivukhin, The international system of physical units, Soviet Physics Uspekhi 22 (10) (1979) 834–836. doi:10.1070/PU1979v022n10ABEH005711. URL http://ufn.ru/en/articles/1979/10/g/

[4] D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, V. I. Korolkov, Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (1) (2012) 96–106. arXiv:1211.6590.

[5] A. V. Korol'kova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevast'yanov, Tensor computations in computer algebra systems, Programming and Computer Software 39 (3) (2013) 135–142. doi:10.1134/S0361768813030031.

[6] D. S. Kulyabov, Geometrization of Electromagnetic Waves, in: Mathematical Modeling and Computational Physics, JINR, Dubna, 2013, p. 120. URL http://mmcp2013.jinr.ru

[7] D. S. Kulyabov, N. A. Nemchaninova, Maxwell's equations in curvilinear coordinates, Bulletin of Peoples'

Friendship University of Russia. Series Mathematics. Information Sciences. Physics (2) (2011) 172–179, in Russian.

[8] L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov, The system of Hamilton equations for normal waves of the electromagnetic field in a stratified anisotropic medium, in: The 12th small triangle meeting of theoretical physics, Institute of experimental physics. Slovak academy of sciences, Stakč´in, 2010, pp. 82–86.

[9] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd Edition, Wiley, 1998.

[10] H. Minkowski, Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (68) (1908) 53–111.

[11] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, MGH, 1941.

# Симплектический гамильтониан максвелловской оптики

Д. С. Кулябов,[1,2,*] А. В. Королькова,[1,†] and Л. А. Севастьянов[1,3,‡]

[1] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*

[2] *Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

[3] *Лаборатория теоретической физики, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*[§]

Гамильтонов формализм представляется крайне элегантным и удобным в задачах механики. Однако его применение к классическим полевым теориям представляется достаточно трудной задачей. Действительно, можно установить однозначное соответствие между гамильтонианом и лагранжианом в случае гиперрегулярного лагранжиана, что не выполняеся в калибровочно-инвариантных теориях поля. В случае нерегулярного лагранжиана применяется обычно гамильтонов формализм со связями, использование которого связано с определёнными трудностями. В статье предлагается переформулировка задачи для случая полей без источников, что позволяет использовать симплектический гамильтонов формализм. Предполагаемый формализм будет использован авторами в дальнейшем для обоснования методов векторных (гамильтоновых) расслоений в трансформационной оптике.

Keywords: уравнения Максвелла; криволинейные координаты; симплектическое многобразие; гамильтонов формализм; удвоение переменных

## I. ВВЕДЕНИЕ

В геометрической оптике известен и широко применяется гамильтонов формализм [1]. В качестве гамильтониана используется гамильтониан материальной частицы.

В случае же волновой оптики возникает ряд трудностей при построении гамильтонова формализма. Поскольку лагранжиан электромагнитного поля не является регулярным, то построение симплектического гамильтонового формализма не представляется возможным. Для калибровочных теорий обычно применяют дираковский формализм со связями.

Однако, если ограничиться рассмотрением только систем без источников, то возможно построение стандартного симплектического гамильтонового формализма.

В данной статье демонстрируется невозможность построения симплектического гамильтониана для общего случая электромагнитного поля. Для случая поля без источников строится общий метод построения симплектического гамильтониана и приводится пример реализации такого построения.

* yamadharma@gmail.com

† avkorolkova@gmail.com

‡ leonid.sevast@gmail.com

§ *Опубликовано в:* Кулябов Д. С., Королькова А. В., Севастьянов Л. А. Проблема построения гамильтониана полевых уравнений Максвелла // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2015. — Т. 4, № 3. — С. 201–205. doi: 10.1134/S2304487X15030086.; *Исходные тексты:* `https://bitbucket.org/yamadharma/articles-2014-em-hamiltonian`

## II. ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

1. Будем использовать нотацию абстрактных индексов [2]. В данной нотации тензор как целостный объект обозначается просто индексом (например, $x^i$), компоненты обозначаются подчёркнутым индексом (например, $x^{\underline{i}}$).

2. Будем придерживаться следующих соглашений. Греческие индексы ($\alpha$, $\beta$) будут относиться к четырёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{\alpha} = \overline{0, 3}$. Латинские индексы из середины алфавита ($i$, $j$, $k$) будут относиться к трёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{i} = \overline{1, 3}$.

3. Запятой в индексе обозначается частная производная по соответствующей координате ($f_{,i} := \partial_i f$); точкой с запятой — ковариантная производная ($f_{;i} := \nabla_i f$).

4. Для записи уравнений электродинамики в работе используется система СГС симметричная [3].

## III. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Будем записывать уравнения Максвелла как через полевые переменные, так и в калибровочно-инвариантном виде (в формализме расслоений) [4–9].

### A. Уравнения Максвелла через полевые переменные

Уравнения Максвелла через полевые переменные в тензорном формализме в голономном базисе:

$$\begin{cases} \nabla_i D^i = 4\pi\rho, \\ e^{ijk}\nabla_j H_k - \dfrac{1}{c}\partial_t D^i = \dfrac{4\pi}{c} j^i, \\ \nabla^i B_i = 0, \\ e_{ijk}\nabla^j E^k + \dfrac{1}{c}\partial_t B_i = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $e_{ijk}$ — тензор Леви–Чивиты (альтернирующий тензор)[1].

Полевые функции $\vec{E}$ и $\vec{B}$ можно представить через потенциалы поля $\varphi$ и $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A},$$

или в индексной нотации:

$$\begin{cases} B^i = \left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)^i = e^{ikl}\partial_k A_l, \\ E_i = -\partial_i\varphi - \partial_0 g_{ij} A^j. \end{cases} \tag{2}$$

### B. Уравнения Максвелла в формализме расслоений

Введём тензор электромагнитного поля как кривизну на касательном расслоении:

$$F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \tag{3}$$

где связность $A^\alpha$ имеет смысл 4-вектора потенциала $A^\alpha = (\varphi, \vec{A})$.

Распишем тензор (3) по компонентам с учётом (2):

$$F_{0\underline{i}} = \partial_0 A_{\underline{i}} - \partial_{\underline{i}} A_0 = -\partial_0 A^{\underline{i}} - \partial_i A^0 = E_{\underline{i}},$$
$$F_{\underline{ik}} = \partial_{\underline{i}} A_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}} A_{\underline{i}} = -\varepsilon_{\underline{ikl}} B^{\underline{l}}.$$

Аналогично введём тензор тензор Минковского (тензор смещений) $G^{\alpha\beta} := F^{\alpha\beta} - 4\pi S^{\alpha\beta}$ ($S^{\alpha\beta}$ есть тензор поляризации–намагничения) [10].

Таким образом тензоры $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ имеют следующие компоненты

$$F_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E_2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E_3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

[1] $e_{ijk} = \sqrt{{}^3 g}\,\varepsilon_{ijk}$, $e^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{{}^3 g}}\varepsilon^{ijk}$, $e_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-{}^4 g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $e^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-{}^4 g}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

$$G^{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D^2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $E_{\underline{i}}$, $H_{\underline{i}}$ — компоненты векторов напряжённости электрического и магнитного полей соответственно; $D^{\underline{i}}$, $B^{\underline{i}}$ — компоненты векторов электрической и магнитной индукции соответственно.

Запишем уравнение Максвелла через тензоры электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ [11–13]:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta. \tag{5}$$

### C. Лагранжиан электромагнитного поля

Построим лагранжиан (лагранжеву плотность) $\mathcal{L}$ в явном виде.

Уравнение (4) представляет собой дифференциальное тождество Бьянки, то есть выполняется в силу построения (3). Для построения лагранжиана достаточно использовать только группу уравнений (5).

Тогда лагранжиан будет иметь вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид:

$$\nabla_\beta \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^\alpha_{;\beta}} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^\alpha} = 0. \tag{6}$$

### D. Проблема построения гамильтониана электромагнитного поля

Гамильтониан (гамильтонова плотность) строится через лагранжиан с помощью преобразований Лежандра:

$$\mathcal{H} := p_\alpha \dot{A}^\alpha - \mathcal{L}, \tag{7}$$

где $p_\alpha$ — плотность импульса, $\mathcal{L}$ — лагранжиан.

Так как в гамильтоновом формализме все уравнения строятся через обобщённые координаты и импульсы, то в (6) требуется выразить обобщённый импульс $p^\alpha$ через скорости $\dot{A}^\alpha$, чтобы выписать гамильтонову плотность (7) и соответствующие ей уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{A}^\alpha = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta p_\alpha}, \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta A^\alpha}. \end{cases}$$

При этом требуется, чтобы детерминант матрицы Гессе (гессиан) был отличен от нуля:

$$\det \mathbf{H}(\mathcal{L}) \neq 0,$$

где элементы матрицы Гессе:

$$\{\mathbf{H}(\mathcal{L})\}_{\underline{\alpha\beta}} = \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^{\underline{\alpha}}\partial\dot{A}^{\underline{\beta}}}.$$

Но $F_{00} = 0$ и $\{\mathbf{H}(\mathcal{L})\}_{00} = \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\dot{A}^0)^2} = 0$. Следовательно, $\det\mathbf{H}(\mathcal{L}) = 0$. То есть лагранжиан нерегулярный, и построение симплектического гамильтонового формализма в данном случае невозможно.

## IV. ПОСТРОЕНИЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Оказывается, что в случае отсутствия источников ($j_\alpha = 0$) можно построить симплектический гамильтонов формализм, произведя необходимую замену переменных. В качестве одного из методов рассмотрим метод удвоения переменных [14, 15]. Данный метод применим в случае, когда система содержит лишь обобщённые переменные, а обобщённые импульсы отсутствуют.

### A. Метод удвоения переменных

Рассмотрим систему $s$ уравнений.

$$\dot{q}^{\underline{n}} = f^{\,\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t), \quad \underline{n} = \overline{0, s}. \tag{8}$$

Зададим пространство $\mathbb{R}^{2s}$ со следующими координатами:

$$\xi^{\underline{n}} := q^{\underline{n}}, \quad \xi^{\underline{n+s}} := p_{\underline{n}}, \quad \xi^a \in \mathbb{R}^{2s}; \quad \underline{n} = \overline{0, s}, \quad \underline{a} = \overline{0, 2s}.$$

Введём в этом пространстве скобку Пуассона:

$$\{A(\xi^c, t), B(\xi^c, t)\} = \Omega^{\underline{ab}} \frac{\partial A(\xi^c, t)}{\partial \xi^{\underline{a}}} \frac{\partial B(\xi^c, t)}{\partial \xi^{\underline{b}}},$$

$$\Omega^{\underline{ab}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} = \overline{0, 2s}.$$

А гамильтониан определим следующим образом:

$$\mathcal{H}(q^n, p_n, x^i, t) = p_{\underline{n}} f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t). \tag{9}$$

Тогда первая группа уравнений Гамильтона будет совпадать с исходной системой (8), а вторая группа будет иметь следующий вид:

$$\dot{p}_{\underline{n}} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta q^{\underline{n}}} = -p_{\underline{m}} \frac{\delta f^{\,\underline{m}}}{\delta q^{\underline{n}}}.$$

### B. Соответствие методу

Установим, что уравнения Максвелла без источников удовлетворяют условию применимости метода удвоения переменных. Для этого перепишем уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \partial_t B_i = -c e_{ijk} \nabla^j E^k, \\ \partial_t D^i = c e^{ijk} \nabla_j H_k, \\ \nabla^i B_i = 0, \\ \nabla_i D^i = 0. \end{cases}$$

Видно, что вторая пара уравнений нарушает условие применимости метода. Однако, можно показать, что в случае отсутствия источников эти уравнения линейно зависят от остальных уравнений Максвелла. Для этого запишем первое и второе уравнения в компонентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}}\left[E_{3,2} - E_{2,3}\right] &= -\frac{1}{c}\partial_t B^1, \\ \frac{1}{\sqrt{g}}\left[E_{1,3} - E_{3,1}\right] &= -\frac{1}{c}\partial_t B^2, \\ \frac{1}{\sqrt{g}}\left[E_{2,1} - E_{1,2}\right] &= -\frac{1}{c}\partial_t B^3. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}}\left[H_{3,2} - H_{2,3}\right] &= \frac{1}{c}\partial_t D^1, \\ \frac{1}{\sqrt{g}}\left[H_{1,3} - H_{3,1}\right] &= \frac{1}{c}\partial_t D^2, \\ \frac{1}{\sqrt{g}}\left[H_{2,1} - H_{1,2}\right] &= \frac{1}{c}\partial_t D^3. \end{aligned} \tag{11}$$

И вторые два уравнения распишем аналогичным образом:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}B^i\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\partial_1\left(\sqrt{g}B^1\right) + \partial_2\left(\sqrt{g}B^2\right) + \partial_3\left(\sqrt{g}B^3\right)\right] = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}D^i\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\partial_1\left(\sqrt{g}D^1\right) + \partial_2\left(\sqrt{g}D^2\right) + \partial_3\left(\sqrt{g}D^3\right)\right] = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Дифференцируя обе части уравнений (10) и (11) получаем (считая, что $g$ не зависит от времени):

$$\begin{aligned} E_{3,21} - E_{2,31} &= -\frac{1}{c}\partial_t\partial_1\left(\sqrt{g}B^1\right), \\ E_{1,32} - E_{3,12} &= -\frac{1}{c}\partial_t\partial_2\left(\sqrt{g}B^2\right), \\ E_{2,13} - E_{1,23} &= -\frac{1}{c}\partial_t\partial_3\left(\sqrt{g}B^3\right). \end{aligned} \tag{14}$$

$$H_{3,21} - H_{2,31} = \frac{1}{c}\partial_t \partial_1 \left(\sqrt{g} D^1\right),$$
$$H_{1,32} - H_{3,12} = \frac{1}{c}\partial_t \partial_2 \left(\sqrt{g} D^2\right), \qquad (15)$$
$$H_{2,13} - H_{1,23} = \frac{1}{c}\partial_t \partial_3 \left(\sqrt{g} D^3\right).$$

Складывая почленно (14) и (15) получаем (12) и (13) соответственно.

Таким образом, система уравнений Максвелла переходит в следующую редуцированную систему, удовлетворяющую условию метода:

$$\begin{cases} \partial_t B_i = -c e_{ijk} \nabla^j E^k, \\ \partial_t D^i = c e^{ijk} \nabla_j H_k. \end{cases} \qquad (16)$$

### C. Пример реализации гамильтониана

Зададим материальные уравнения:

$$D^i = \varepsilon^i_j(x^k) E^j, \quad B^i = \mu^i_j(x^k) H^j.$$

Перепишем (16) в следующем виде (считая, что метрика не зависит явным образом от времени):

$$\begin{cases} \partial_t E^i = c(\varepsilon^{-1})^i_l \dfrac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{ljk} H_{k,j}, \\ \partial_t H^i = -c(\mu^{-1})^i_l \dfrac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{ljk} E_{k,j}. \end{cases}$$

Выберем обобщённые координаты в виде:

$$q^n = \left(E^1, E^2, E^3, H^1, H^2, H^3\right)^T, \quad \underline{n} = \overline{1,6}.$$

Система (8) приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot q^{\underline{i}} = f^{\underline{i}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t) = c(\varepsilon^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \dfrac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k+3},\underline{j}}, \\ \dot q^{\underline{i+3}} = f^{\underline{i+3}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t) = -c(\mu^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \dfrac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k},\underline{j}}. \end{cases} \qquad (17)$$

Запишем гамильтониан на основе (9) и (17):

$$\mathcal{H}(q^n, p_n, x^i, t) = p_{\underline{n}} f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t) =$$
$$= p_{\underline{i}} c(\varepsilon^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \frac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k+3},\underline{j}} - p_{\underline{i+3}} c(\mu^{-1})^{\underline{i}}_{\underline{l}} \frac{1}{\sqrt{^3 g}} \varepsilon^{\underline{ljk}} q_{\underline{k},\underline{j}}.$$

Соответствующая система уравнений Гамильтона имеет вид:

$$\begin{cases} \dot q^n = \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_n} = f^n, \\ \dot p_n = -\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^n} = -p_m \dfrac{\delta f^m}{\delta q^n} = \\ \quad = -p_m \dfrac{\partial f^m}{\partial q_n} + p_m \partial_i \dfrac{\partial f^m}{\partial q^n_{,i}} = p_m \partial_i \dfrac{\partial f^m}{\partial q^n_{,i}}. \end{cases}$$

Выписать явный вид импульсов в общем случае не представляется возможным.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В геометрической оптике более ста лет назад была сформулирована концепция идеального прибора. На основе этой концепции были построены, в частности, такие фокусирующие (двумерные или трёхмерные) объекты, как линза Люнеберга, «рыбий глаз» Максвелла и другие. Предсказание и изобретение лазеров ввели в обиход исследователей распространение и преобразование электромагнитных полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла. Законы трансформации таких трёхмерных векторных полей в последние 10–20 лет изучаются в работах, посвящённых так называемой трансформационной оптике. Концепция же идеального прибора в этих работах остаётся заимствованной из геометрической оптики. Авторы данной работы намерены строго сформулировать концепцию идеального трансформационного прибора в максвелловской оптике, реализующего фундаментальные решения (пропагаторы, функции Грина) системы уравнений Максвелла. Представленные результаты служат первой ступенью на пути решения данной задачи.

В работе построен формальный метод получения симплектического гамильтонового формализма для уравнений Максвелла без источников. Авторы также надеются, что приведённый пример в достаточной мере поясняет применение предложенного метода.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа частично поддержана грантами РФФИ №№ 13-01-00595, 14-01-00628 и 15-07-08795.

[1] Luneburg R. K. Mathematical Theory of Optics. — Berkeley & Los Angeles : University of California Press, 1964. — P. 448.

[2] Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. — М. : Мир, 1987. — Т. 1. — 528 с.

[3] Сивухин Д. В. О Международной системе физических величин // Успехи физических наук. — 1979. — Т. 129, № 10. — С. 335–338. — URL: http://ufn.ru/ru/articles/1979/10/h/.

[4] Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Korolkov V. I. Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". —

2012. — no. 1. — P. 96–106. — arXiv : 1211.6590.

[5] Korol'kova A. V., Kulyabov D. S., Sevast'yanov L. A. Tensor computations in computer algebra systems // Programming and Computer Software. — 2013. — Vol. 39, no. 3. — P. 135–142.

[6] Kulyabov D. S. Geometrization of Electromagnetic Waves // Mathematical Modeling and Computational Physics. — Dubna : JINR, 2013. — P. 120. — URL: http://mmcp2013.jinr.ru.

[7] Кулябов Д. С., Королькова А. В. Уравнения Максвелла в произвольной системе координат // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2013. — № 1 (28). — С. 29–44.

[8] Кулябов Д. С., Немчанинова Н. А. Уравнения Максвелла в криволинейных координатах // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 2. — С. 172–179.

[9] Sevastianov L. A., Kulyabov D. S. The system of Hamilton equations for normal waves of the electromagnetic field in a stratified anisotropic medium // The 12th small triangle meeting of theoretical physics. — Stakčín : Institute of experimental physics. Slovak academy of sciences, 2010. — P. 82–86.

[10] Джексон Д. Д. Классическая электродинамика. — 1965. — С. 702.

[11] Minkowski H. Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. — 1908. — H. 68. — S. 53–111.

[12] Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.

[13] Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика. — 2-е, перераб. изд. — М. : Высшая школа, 1990. — 352 с.

[14] Павленко Ю. Г. Лекции по теоретической механике. — ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 392. — ISBN: 5-9221-0241-9.

[15] Павленко Ю. Г. Задачи по теоретической механике. — ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 536. — ISBN: 5-9221-0302-4.