Constrained Hamiltonian approach to the Maxwell theory

Dmitry S. Kulyabov, 1, 2, * Anna V. Korolkova, 1, † Migran N. Gevorkyan, 1, † and Leonid A. Sevastianov 1, 3, §

¹Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation ²Laboratory of Information Technologies Joint Institute for Nuclear Research 6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russia ³Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics Joint Institute for Nuclear Research 6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

The most common physical formalisms are the Lagrangian formalism and the Hamiltonian formalism. From the superficial point of view, they are one and the same, but rewritten in other terms. However, it seems that the Hamiltonian formalism has a richer structure and is more convenient for studying the electromagnetic field, especially in the formalization of its geometrization. Unfortunately for field problems, there is a whole set of Hamiltonian formalisms. The authors study the applicability of different variants of the Hamiltonian formalism to the problems of electrodynamics. In this paper we consider the Hamiltonian formalism with constraints.

 $Keywords: \ Lagrangian \ formalism, \ Hamiltonian \ formalism, \ Hamiltonian \ formalism \ with \ constraints, \ Maxwell \ equations$

^{*} kulyabov-ds@rudn.ru

[†] korolkova-av@rudn.ru

[‡] gevorkyan-mn@rudn.ru

[§] sevastianov-la@rudn.ru

I. INTRODUCTION

In the study of electromagnetic and optical phenomena Hamiltonian formalism is often used. The main drawback of Hamiltonian formalism it seems to be poorly developed for field systems. For descriptions of field systems, we propose several variants of the Hamiltonian formalism. Previously, we considered the possibility of building symplectic [1] and multipulse [2] Hamiltonian formalism. In this paper we consider the construction of a Hamiltonian formalism with constraints.

II. NOTATIONS AND CONVENTIONS

- 1. We will adhere to the following agreements. Greek indices (α, β) will refer to the four-dimensional space. Latin indices from the middle of the alphabet (i, j, k) will refer to the three-dimensional space.
- 2. In the theoretical description, Latin indices will refer to the space of arbitrary dimension.
- 3. The comma in the index denotes a partial derivative with respect to corresponding coordinate $(f_{,i} := \partial_i f)$; the semicolon denotes a covariant derivative $(f_{:i} := \nabla_i f)$.
- 4. The CGS symmetrical system [3] is used for notation of the equations of electrodynamics.

III. HAMILTONIAN FORMALISM

There are several variants of the Hamiltonian formalism.

- The symplectic Hamiltonian formalism [1, 4].
- The Dirac–Bergman Hamiltonian formalism for systems with constraints [5, 6].
- The Hamilton–De Donder Hamiltonian formalism [7].
- The multimomentum Hamiltonian formalism [7–9].

Consider major points of the Hamiltonian formalism.

Let the system be described by some quantity called the action:

$$S[q^i] = \int \mathrm{d}^4 \mathcal{L}(x^i, q^i, \dot{q}^i).$$

Lagrangian (Lagrangian density) (x^I, q^i, \dot{q}^i) depends on the generalized coordinates q and their first derivatives of \dot{q} . In the transition to the Hamiltonian formalism the system is described by generalized coordinates q^I and generalized momentum:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}.$$
 (1)

One can construct the Legendre transform in velocities:

$$\mathcal{H}(q^i, p_i) := p_i \dot{q}^i - \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i).$$

The function \mathcal{H} is called a Hamiltonian (Hamiltonian density). The Hamiltonian of the system depends only on generalized coordinates and momenta.

Using the connection between Hamiltonian and Lagrangian, we consider the action:

$$S[q^i, p_i] = \int d^4(p_i \dot{q}^i - \mathcal{H}(q^i, p_i)).$$

The corresponding system of Euler–Lagrange equations has the form:

$$\frac{\delta S}{\delta q^{i}} = -\dot{p}_{i} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^{i}} = 0,
\frac{\delta S}{\delta p_{i}} = \dot{q}^{i} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_{i}} = 0.$$
(2)

Let us define the Poisson brackets:

$$[f,g] := \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}.$$

Then we can rewrite equation (2) as:

$$\begin{split} \dot{q}^i &= \left[q^i, \mathcal{H}\right] = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_i}, \\ \dot{p}_i &= \left[p_i, \mathcal{H}\right] = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^i}. \end{split}$$

IV. HAMILTONIAN DYNAMICS WITH CONSTRAINTS

If the Lagrangian is singular by velocities:

$$\det\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right] = 0,$$

it is not possible to express all momentum by formula (1). In this case one gets only possible momentum and for the rest the concept of constraints [5] is used.

We will consider the system with Lagrangian $\mathcal{L}(x^k, q^k, p_k)$, $I = \overline{1, n}$. Also consider set of constraints:

$$\varphi^a(x^k, q^k, \dot{q}^k), \quad a = \overline{1, m}, \quad m \leqslant n.$$

Action minimum, in case the trajectory satisfy the equations of connection, is interpret also on trajectories without constraints, but with Lagrangian with constraints:

$$L(x^k, q^k, \dot{q}^k) = \mathcal{L}(x^k, q^k, \dot{q}^k) - \lambda_a(x^k, q^k, \dot{q}^k)\varphi^a(x^k, q^k, \dot{q}^k).$$

Hamilton's equations take the following form:

$$\dot{q}^{i} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_{i}} + \lambda_{a} \frac{\partial \varphi^{a}}{\partial p_{i}},$$
$$\dot{p}_{i} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^{i}} - \lambda_{a} \frac{\partial \varphi^{a}}{\partial q^{i}}.$$

Lagrange multipliers are found from the condition of preserving constraints:

$$\dot{\varphi^a} = [\varphi^a, \mathcal{H}] + \lambda_a \varphi^a = 0.$$

V. THE HAMILTONIAN OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD WITH CONSTRAINTS

We consider the construction of a Hamiltonian formalism with constraints for the case electromagnetic field. Write the Lagrangian of the electromagnetic field [10]:

$$\mathcal{L}(x^{\alpha}, A_{\beta}, A_{\alpha, \beta}) = -\frac{1}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g} - \frac{1}{c^2} A_{\alpha} j^{\alpha} \sqrt{-g}.$$

Since $F_{00} = 0$,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0^2} = 0.$$

That is, the Lagrangian is irregular. Therefore, we need to find constraints for the case p^0 . Because

$$p^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0,$$

then enter the constraints

$$\varphi := p^0 \approx 0. \tag{3}$$

The \approx symbol indicates that the equality must be performed on surfaces of all constraints.

Let's write down expressions for momentum:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{.0}^i} = -\frac{\sqrt{-g}}{4\pi c^2} [A_{i,0} - A_{0,i}].$$

Let us express time derivatives of A_i by momentum:

$$\dot{A}_i = cA_{i,0} = -\frac{4\pi c^3}{\sqrt{-g}}p_i + cA_{0,i}.$$

Let us construct the Hamiltonian

$$H = p^{i} \dot{A}_{i} - \mathcal{L} + \lambda p^{0} = p^{i} \left(-\frac{4\pi c^{3}}{\sqrt{-g}} p_{i} + cA_{0,i} \right) + \frac{\sqrt{-g}}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{-g}}{c^{2}} A_{\alpha} j^{\alpha} + \lambda p^{0}$$

Hamilton's equations take the following form:

$$\dot{A}_0 = \frac{\partial H}{\partial p^0} = \lambda,$$

$$\dot{A}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} = -\frac{4\pi c^3}{\sqrt{-g}} p_i + cA_{0,i},$$
(4)

$$\dot{p}^0 = -\frac{\delta H}{\delta A_0} = -\frac{\partial H}{\partial A_0} + \partial_\alpha \frac{\partial H}{\partial A_{0,\alpha}} = -cp_{,i}^i + \frac{\sqrt{-g}}{c^2} j^0, \tag{5}$$

$$\dot{p}^{i} = -\frac{\delta H}{\delta A_{i}} = -\frac{\partial H}{\partial A_{i}} + \partial_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial A_{i,\alpha}} = -\frac{\sqrt{-g}}{c^{2}} \dot{j}^{i} + \frac{\sqrt{-g}}{16\pi c} F_{,\alpha}^{\alpha i}. \tag{6}$$

We show that the resulting system of equations is equivalent to Maxwell equations (which seems obvious). From the equation (4) we obtain

$$p_i = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi c^3} \left(cA_{0,i} - \dot{A}_i \right) = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi c^2} (A_{0,i} - A_{i,0}) = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi c^2} F_{i0}.$$
 (7)

We raise the indices in the equation (7) and substitute the result in the equation (6). Writing the tensor components $F^{\alpha\beta}$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D^2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix},$$

we get the equation

$$\frac{1}{\sqrt{3}g}[\partial_j H_k - \partial_k H_j] = -\frac{1}{c}\partial_t D^i + \frac{4\pi}{c}j^i.$$

Similarly from (5) taking into account equation (7) and connection (3) we obtain another Maxwell equation.

$$\frac{1}{\sqrt{3g}}\partial_i \left(\sqrt{3g}D^i\right) = 4\pi\rho.$$

Thus, we showed that the resulting Hamiltonian gives inhomogeneous Maxwell equations. It is obvious that the homogeneous Maxwell equations is not obtained from the Hamiltonian and from the Bianchi identities for tensor $F_{\alpha\beta}$.

VI. CONCLUSION

Полученные уравнения The authors applied the Dirac–Bergman method to the Maxwell equations. Obtained equations is equivalent to inhomogeneous Maxwell equations. The main feature of our approach is that Maxwell's equations is considered in covariant form and in an arbitrary Riemannian coordinates.

ACKNOWLEDGMENTS

The publication has been prepared with the support of the "RUDN University Program 5-100" and funded by Russian Foundation for Basic Research (RFBR) according to the research project No 19-01-00645.

- [1] D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, L. A. Sevastianov, E. G. Eferina, T. R. Velieva, I. S. Zaryadov, Maxwell's Equations Instantaneous Hamiltonian, in: V. L. Derbov, D. E. Postnov (Eds.), Proceedings of SPIE. Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III, Vol. 10337 of Proceedings of SPIE The International Society for Optical Engineering, SPIE, 2017, pp. 103370L.1–9. doi:10.1117/12.2267938.
- [2] D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, L. A. Sevastianov, E. G. Eferina, T. R. Velieva, A Geometric Approach to the Lagrangian and Hamiltonian Formalism of Electrodynamics, in: V. L. Derbov, D. E. Postnov (Eds.), Proceedings of SPIE. Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III, Vol. 10337 of Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, SPIE, 2017, pp. 103370M.1–6. doi:10.1117/12.2267944.
- [3] D. V. Sivukhin, The international system of physical units, Soviet Physics Uspekhi 22 (10) (1979) 834–836. doi:10.1070/PU1979v022n10ABEH005711.
- [4] G. Vilasi, Hamiltonian Dynamics, World Scientific Pub Co Inc, 2001.
- [5] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Courier Corporation, 2001.
- [6] E. Newman, P. G. Bergmann, Lagrangians Linear in the "Velocities", Physical Review 99 (2) (1955) 587-592. doi:10.1103/PhysRev.99.587.
- [7] G. A. Sardanashvily, Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1995. doi:10.1088/0264-9381/13/12/025.
- [8] G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. A. Sardanashvily, Covariant Hamilton Equations for Field Theory, J Phys A 32 (38) (1999) 6629-6642. doi:10.1088/0305-4470/32/38/302.
- [9] G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. A. Sardanashvily, Advanced Classical Field Theory, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2009. doi:10.1142/7189.
- [10] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, MGH, 1941.

Гамильтонов подход со связями к теории Максвелла

Д. С. Кулябов, 1,2,* А. В. Королькова, 1,† М. Н. Геворкян, 1,‡ и Л. А. Севастьянов 1,3,§

¹ Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружсы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 ² Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980 ³ Лаборатория теоретической физики, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

Наиболее распространённые физические формализмы: лагранжев формализм и гамильтонов формализм. С поверхностной точки зрения они суть одно и тоже, но переписанное в других терминах. Однако представляется, что гамильтонов формализм имеет более богатую структуру и более удобен для изучения электромагнитного поля, особенно в формализме его геометризации. К сожалению для полевых задач существует целый набор гамильтоновых формализмов. Авторы изучают применимость разных вариантов гамильтонового формализма к задачам электродинамики. В данной работе рассматривается гамильтонов формализм со связями.

Ключевыеслова: лагранжев формализм, гамильтонов формализм, гамильтонов формализм со связями, уравнения Максвелла

^{*} kulyabov-ds@rudn.ru

[†] korolkova-av@rudn.ru

[‡] gevorkyan-mn@rudn.ru

[§] sevastianov-la@rudn.ru

І. ВВЕДЕНИЕ

При изучении электромагнитных и оптических явлений часто применяется гамильтоново описание. Основным недостатком гамильтонова формализма представляется его слабая разработанность для полевых систем. Для описания полевых систем предложено несколько вариантов гамильтонова формализма. Ранее мы рассматривали возможность построения симплектического [1] и многоимпульсного [2] гамильтоновых формализмов. В данной работе мы рассматриваем построение гамильтонова формализма со связями.

II. ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

- 1. Будем придерживаться следующих соглашений. Греческие индексы (α, β) будут относиться к четырёхмерному пространству. Латинские индексы из середины алфавита (i, j, k) будут относиться к трёхмерному пространству.
- В теоретическом описании латинские индексы будут применяться для пространства произвольной размерности.
- 3. Запятой в индексе обозначается частная производная по соответствующей координате $(f_{,i} := \partial_i f)$; точкой с запятой ковариантная производная $(f_{;i} := \nabla_i f)$.
- 4. Для записи уравнений электродинамики в работе используется система СГС симметричная [3].

III. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Можно выделить несколько вариантов гамильтонова формализма.

- Симплектический гамильтонов формализм [1, 4].
- Формализм Дирака-Бергмана для систем со связями [5, 6].
- Гамильтонов формализм Гамильтона-де Дондера [7].
- Многоимпульсный гамильтонов формализм [7–9].

Рассмотрим общие положения гамильтонова формализма.

Пусть система описывается некоторым действием:

$$S[q^i] = \int \mathrm{d}^4 \mathcal{L}(x^i, q^i, \dot{q}^i).$$

Лагранжиан (лагранжева плотность) (x^i, q^i, \dot{q}^i) зависит от обобщённых координат q и их первых производных по времени \dot{q} .

При переходе к гамильтонову формализму система описывается обобщёнными координатами q^i и обобщёнными импульсами:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}.$$
(1)

Можно построить преобразование Лежандра по скоростям:

$$\mathcal{H}(q^i, p_i) := p_i \dot{q}^i - \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i).$$

Функция \mathcal{H} называется гамильтонианом (гамильтоновой плотностью). Гамильтониан системы зависит только от обобщенных координат и импульсов.

Используя связь между гамильтонианом и лагранжианом, рассмотрим действие:

$$S[q^i, p_i] = \int \mathrm{d}^4 ig(p_i \dot{q}^i - \mathcal{H}(q^i, p_i) ig).$$

Соответствующая система уравнений Эйлера-Лагранжа имеет вид:

$$\begin{split} \frac{\delta S}{\delta q^i} &= -\dot{p}_i - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^i} = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta p_i} &= \dot{q}^i - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_i} = 0. \end{split} \tag{2}$$

Определим скобку Пуассона:

$$[f,g] := \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}.$$

Тогда (2) можно переписать как:

$$\dot{q}^i = [q^i, \mathcal{H}] = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_i},$$
 $\dot{p}_i = [p_i, \mathcal{H}] = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^i}.$

IV. ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА СО СВЯЗЯМИ

Если лагранжиан вырожден по скоростям:

$$\det\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right] = 0,$$

то не возможно выразить все импульсы по формуле (1). В этом случае получают те импульсы, которые возможно, а для остальных вводят понятие связи [5].

Будем рассматривать систему с лагранжианом $\mathcal{L}(x^k, q^k, p_k), i = \overline{1, n}$. Также рассмотрим набор связей:

$$\varphi^a(x^k, q^k, \dot{q}^k), \quad a = \overline{1, m}, \quad m \leqslant n.$$

Минимум действия, когда траектории удовлетворяют уравнениям связи, реализуется также и на траекториях без связей, но с лагранжианом со связями:

$$L(x^k, q^k, \dot{q}^k) = \mathcal{L}(x^k, q^k, \dot{q}^k) - \lambda_a(x^k, q^k, \dot{q}^k)\varphi^a(x^k, q^k, \dot{q}^k).$$

Уравнения Гамильтона принимают следующий вид:

$$\dot{q}^{i} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_{i}} + \lambda_{a} \frac{\partial \varphi^{a}}{\partial p_{i}},$$

$$\dot{p}_{i} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^{i}} - \lambda_{a} \frac{\partial \varphi^{a}}{\partial q^{i}}.$$

Множители Лагранжа находятся из условия сохранения связей:

$$\dot{\varphi}^a = [\varphi^a, \mathcal{H}] + \lambda_a \varphi^a = 0.$$

V. ГАМИЛЬТОНИАН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ СО СВЯЗЯМИ

Рассмотрим построение гамильтонова формализма со связями для случая электромагнитного поля. Запишем лагранжиан электромагнитного поля [10]:

$$\mathcal{L}(x^{\alpha}, A_{\beta}, A_{\alpha, \beta}) = -\frac{1}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g} - \frac{1}{c^2} A_{\alpha} j^{\alpha} \sqrt{-g}.$$

Поскольку $F_{00} = 0$, то

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0^2} = 0.$$

То есть лагранжиан нерегулярный. Следовательно, нам необходимо найти связь для случая p^0 . Поскольку

$$p^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0,$$

то введём связь

$$\varphi := p^0 \approx 0. \tag{3}$$

Символ \approx обозначает, что равенство должно выполняться на поверхности всех связей.

Запишем выражения для импульсов:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{.0}^i} = -\frac{\sqrt{-g}}{4\pi c^2} [A_{i,0} - A_{0,i}].$$

Выразим производные по времени от A_i через импульсы:

$$\dot{A}_i = cA_{i,0} = -\frac{4\pi c^3}{\sqrt{-q}}p_i + cA_{0,i}.$$

Построим гамильтониан:

$$H = p^{i}\dot{A}_{i} - \mathcal{L} + \lambda p^{0} = p^{i}\left(-\frac{4\pi c^{3}}{\sqrt{-g}}p_{i} + cA_{0,i}\right) + \frac{\sqrt{-g}}{16\pi c}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{-g}}{c^{2}}A_{\alpha}j^{\alpha} + \lambda p^{0}$$

Уравнения Гамильтона принимают следующий вид:

$$\dot{A}_0 = \frac{\partial H}{\partial p^0} = \lambda,$$

$$\dot{A}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} = -\frac{4\pi c^3}{\sqrt{-g}} p_i + cA_{0,i},$$
(4)

$$\dot{p}^0 = -\frac{\delta H}{\delta A_0} = -\frac{\partial H}{\partial A_0} + \partial_\alpha \frac{\partial H}{\partial A_{0,\alpha}} = -cp_{,i}^i + \frac{\sqrt{-g}}{c^2} j^0, \tag{5}$$

$$\dot{p}^{i} = -\frac{\delta H}{\delta A_{i}} = -\frac{\partial H}{\partial A_{i}} + \partial_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial A_{i,\alpha}} = -\frac{\sqrt{-g}}{c^{2}} j^{i} + \frac{\sqrt{-g}}{16\pi c} F_{,\alpha}^{\alpha i}. \tag{6}$$

Покажем, что полученная система уравнений эквивалентна уравнениям Максвелла (что представляется очевидным).

Из уравнения (4) получим

$$p_i = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi c^3} \left(cA_{0,i} - \dot{A}_i \right) = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi c^2} (A_{0,i} - A_{i,0}) = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi c^2} F_{i0}. \tag{7}$$

Поднимем индексы в уравнении (7) и подставим в уравнение (6). Записав компоненты тензора $F^{\alpha\beta}$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D^2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3}q}[\partial_j H_k - \partial_k H_j] = -\frac{1}{c}\partial_t D^i + \frac{4\pi}{c}j^i.$$

Аналогично из (5) с учётом уравнения (7) и связи (3) получим ещё одно уравнение Максвелла.

$$\frac{1}{\sqrt{3}q}\partial_i\left(\sqrt{3}gD^i\right) = 4\pi\rho.$$

Таким образом, мы показали, что полученный гамильтониан даёт неоднородные уравнения Максвелла. При этом очевидно, что однородные уравнения Максвелла получаются не из гамильтониана, а из тождества Бьянки для тензора $F_{\alpha\beta}$.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы применили методику Дирака—Бергмана к уравнениям Максвелла. Полученные уравнения совпадают с неоднородными уравнениями Максвелла. Особенностью рассмотрения является то, что рассматривались уравнения Максвелла в ковариантной записи в произвольных римановых координатах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00645.

- [1] Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Sevastianov L. A., Eferina E. G., Velieva T. R., Zaryadov I. S. Maxwell's Equations Instantaneous Hamiltonian // Proceedings of SPIE. Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III / Ed. by V. L. Derbov, D. E. Postnov. Vol. 10337 of Proceedings of SPIE The International Society for Optical Engineering. SPIE, 2017. P. 103370L.1–9.
- [2] Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Sevastianov L. A., Eferina E. G., Velieva T. R. A Geometric Approach to the Lagrangian and Hamiltonian Formalism of Electrodynamics // Proceedings of SPIE. Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III / Ed. by V. L. Derbov, D. E. Postnov. Vol. 10337 of Proceedings of SPIE The International Society for Optical Engineering. SPIE, 2017. P. 103370M.1–6.
- [3] Сивухин Д. В. О Международной системе физических величин // Успехи физических наук. 1979. Т. 129, № 10. С. 335–338.
- [4] Вилази Г. Гамильтонова динамика. М. : РХД, 2006. 432 с.
- [5] Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике. Ижевск : РХД, 1998.
- Newman E., Bergmann P. G. Lagrangians Linear in the "Velocities" // Physical Review. 1955. jul. Vol. 99, no. 2. —
 P. 587–592.
- [7] Sardanashvily G. A. Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1995. viii+155 p.
- [8] Giachetta G., Mangiarotti L., Sardanashvily G. A. Covariant Hamilton Equations for Field Theory // J Phys A. 1999. sep. Vol. 32, no. 38. P. 6629–6642.
- [9] Giachetta G., Mangiarotti L., Sardanashvily G. A. Advanced Classical Field Theory. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2009. 382 p.
- [10] Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.