ВЕСТНИК ТВЕРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал *Основан в 2003 г.* ***№15, 2013***

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
ПИ №ФС77-51592 от 2 ноября 2012 г.

Серия «Прикладная математика» *Выпуск 1 (28)* *2013*

Учредитель

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Адрес редакции:

Россия, 170100, Тверь, ул. Желябова, 33.
Тел. РИУ: (4822) 35-60-63

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

Numerical Calculations Models for Physical-Mechanical Systems

Probabilistic Possibilistic Models

Image Processing and Analysis

Differential Geometry

Theoretical Foundations of Computer Science

УДК 537.8, 514.742, 514.743

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Кулябов Д.С., Королькова А.В.
Кафедра систем телекоммуникаций,
Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступила в редакцию 13.05.2012, после переработки 15.01.2013.

В работе продемонстрировано применение тензорного формализма для получения разных форм записи уравнений Максвелла. Получены уравнения Максвелла в ковариантной бескоординатной и ковариантной координатной формах. Предварительно установлена связь между векторным и тензорным формализмами, выписано координатное представление дифференциальных операторов для произвольных голономных систем координат. Проведена верификация результатов, полученных с помощью тензорного и векторного формализмов на примере цилиндрической и сферической систем координат.

The article is devoted to application of tensorial formalism for derivation of different types of Maxwell's equations. The Maxwell's equations are written in the covariant coordinate-free and the covariant coordinate forms. Also the relation between vectorial and tensorial formalisms and differential operators for arbitrary holonomic coordinate system in coordinate form is given. The results obtained by tensorial and vectorial formalisms are verified in cylindrical and spherical coordinate systems.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, тензорный формализм, ковариантная бескоординатная форма, ковариантная координатная форма.
Keywords: Maxwell's equations, tensorial formalism, covariant coordinate-free form, covariant coordinate form.

Введение

В задачах математического моделирования волноводов часто возникает потребность использования криволинейных систем координат. Выбор конкретной системы координат зависит от формы поперечного сечения волновода.

Обычно для описания исследуемой волноводной модели за основу берётся запись уравнений Максвелла в декартовой системе координат. Используя трансформационные свойства векторов, уравнения Максвелла переписываются для конкретной криволинейной системы координат, часто сферической или цилиндрической. Однако, например, в задаче моделирования ускорителя тяжёлых частиц волновод может иметь форму конуса или гиперболоида. Другой пример волновода сложной формы — волноводная линза Люнеберга, представляющая собой часть сферы или цилиндра, прикреплённой к планарному волноводу. Поэтому, в случае более сложной формы волновода требуется запись уравнений Максвелла в произвольной криволинейной системе координат.

Традиционно к уравнениям Максвелла применяют векторный формализм. В этом случае запись уравнений в криволинейной системе координат крайне громоздка. В работе [1] проведены предварительные исследования по применению тензорного формализма, приводящего к более компактной и удобной форме записи уравнений Максвелла. Кроме того, тензорный формализм имеет мощный математический аппарат, который позволяет работать с ковариантной бескоординатной формой записи уравнений. В этом случае переход к конкретной системе координат нужен только на заключительном этапе исследований при записи результата. Непосредственно применить тензорный формализм к уравнениям Максвелла нельзя. Требуется установить связь векторного и тензорного формализмов.

Различные формы записи уравнений Максвелла используются и в задачах, связанных с нахождением гамильтониана электромагнитного поля, применяемого для построения вариационных интеграторов, в частности, симплектических интеграторов. Основная цель — выполнение условия сохранения симплектической структуры при дискретизации уравнений. Методы нахождения гамильтониана электромагнитного поля используют следующие формы записи уравнений Максвелла:

- через 3-векторы;
- через 4-векторы;
- комплексное представление;
- импульсное представление (для его записи в свою очередь применяется комплексная форма);
- спинорное представление.

Резюмируя сказанное выше, сформулируем основные задачи, решаемые в данной работе. Необходимо продемонстрировать связь векторного и тензорного формализмов (раздел). Применить тензорный формализм для различных форм представления уравнений Максвелла (раздел) и верифицировать полученные результаты, выписав явно уравнения Максвелла в цилиндрической и сферической системах координат (раздел).

1. Связь тензорного и векторного формализмов записи векторов

Будем использовать предложенный в [2] формализм абстрактных индексов. В [2] через α обозначен абстрактный индекс, $\underline{\alpha}$ — компонентный индекс тензора. Присутствие в некотором выражении компонентного индекса означает, что в него косвенным образом введён некоторый (произвольный) базис, а сами индексы подчиняются правилу суммирования Эйнштейна (суммирование по всякому численному индексу, который встречается в одном члене выражения дважды: вверху и внизу). Абстрактные индексы имеют организующее значение.

Рассмотрим произвольное n-мерное векторное пространство V^i и сопряжённое к V^i пространство V_i.

В тензорном формализме зададим голономный базис:

$$\delta^i_{\underline{i}} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{i}}} \in V^i, \quad \delta^{\underline{i}}_i = \mathrm{d}x^{\underline{i}} \in V_i, \quad \underline{i} = \overline{1,n}.$$

В векторном формализме неголономный базис задаётся через элементы длины $\mathrm{d}s^{\underline{i}'}$ по соответствующей координате:

$$\delta^i_{\underline{i}'} = \frac{\partial}{\partial s^{\underline{i}'}}, \quad \delta^{\underline{i}'}_i = \mathrm{d}s^{\underline{i}'}, \quad \underline{i}' = \overline{1,n}.$$

Неголономный базис обычно предоставляет некоторые удобства. В данном случае это:

- сохранение величин при преобразовании координат (т. е. расстояния переходят в расстояние, углы в углы и т. д.);
- неразличимость контравариантных и ковариантных векторов, что позволяет использовать только один тип индекса.

В тензорной записи:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\underline{i}\underline{j}} \mathrm{d}x^{\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{j}}, \quad \underline{i},\, \underline{j} = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где $g_{\underline{i}\underline{j}}$ — метрический тензор.
В векторной записи:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\underline{i}'\underline{j}'} \mathrm{d}s^{\underline{i}'} \mathrm{d}s^{\underline{j}'}, \quad \underline{i}',\, \underline{j}' = \overline{1,n}. \tag{2}$$

В случае ортогонального базиса (2) принимает вид:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\underline{i}'\underline{i}'} \mathrm{d}s^{\underline{i}'} \mathrm{d}s^{\underline{i}'}, \quad \underline{i}' = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Выразим векторный базис через тензорный:

$$\mathrm{d}s^{\underline{i}'} = h^{\underline{i}'}_{\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{i}}, \quad \frac{\partial}{\partial s^{\underline{i}'}} = h^{\underline{i}}_{\underline{i}'} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{i}}}.$$

Здесь $h^{\underline{i}'}_{\underline{i}}$, $h^{\underline{i}}_{\underline{i}'}$, $\underline{i}$, $\underline{i}' = \overline{1,n}$, — коэффициенты неголономности.
Для ортогонального базиса из (3) находим:

$$g_{\underline{i}\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{i}} = g_{\underline{i}'\underline{i}'} h^{\underline{i}'}_{\underline{i}} h^{\underline{i}'}_{\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{i}}, \quad \underline{i},\, \underline{i}' = \overline{1,n}.$$

Введём обозначение (для ортогональной системы координат):

$$\left(h_{\underline{i}}\right)^2 := h^{\underline{i}'}_{\underline{i}} h^{\underline{i}'}_{\underline{i}} = \frac{g_{\underline{i}\underline{i}}}{g_{\underline{i}'\underline{i}'}}, \quad h_{\underline{i}} := h^{\underline{i}'}_{\underline{i}} = \sqrt{\frac{g_{\underline{i}\underline{i}}}{g_{\underline{i}'\underline{i}'}}}, \quad \underline{i},\, \underline{i}' = \overline{1,n}.$$

Величины $h_{\underline{i}}$ называются коэффициентами Ламе [3, Т. 1, с. 34–35].

Выразим вектор $f^i \in V^i$ через его компоненты $f^{\underline{i}}$ в тензорном $\delta^i_{\underline{i}}$ и векторном $\delta^i_{\underline{i}'}$ базисах соответственно:

$$f^i = f^{\underline{i}} \delta^i_{\underline{i}} = f^{\underline{i}} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{i}}},$$
$$f^i = f^{\underline{i}'} \delta^i_{\underline{i}'} = f^{\underline{i}'} \frac{\partial}{\partial s^{\underline{i}'}} = f^{\underline{i}'} \frac{1}{h^{\underline{i}'}_{\underline{i}}} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{i}}}.$$

$$f^{\underline{i}'} = f^{\underline{i}} h^{\underline{i}'}_{\underline{i}}, \quad \underline{i}, \underline{i}' = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Аналогично для ковекторов имеем:

$$f_i = f_{\underline{i}} \delta^{\underline{i}}_i = f_{\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{i}},$$
$$f_i = f_{\underline{i}'} \delta^{\underline{i}'}_i = f_{\underline{i}'} \mathrm{d}s^{\underline{i}'} = f_{\underline{i}'} h^{\underline{i}'}_{\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{i}},$$

откуда получаем, что

$$f_{\underline{i}'} = f_{\underline{i}} \frac{1}{h^{\underline{i}'}_{\underline{i}}}, \quad \underline{i}, \underline{i}' = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Таким образом, показана связь между тензорным и векторным формализмами.

2. Тензорная запись дифференциальных операторов в компонентах

Запишем в компонентах дифференциальные операторы (для связностей, ассоциированных с метрикой).

Выражение для градиента имеет вид (здесь φ — скаляр):

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} \varphi)_i &= (\operatorname{grad} \varphi)_{\underline{i}} \delta^{\underline{i}}_i, \\ (\operatorname{grad} \varphi)_{\underline{i}} &= \nabla_{\underline{i}} \varphi = \partial_{\underline{i}} \varphi, \quad \underline{i} = \overline{1, n}.\end{aligned} \tag{6}$$

Выражение для дивергенции некоторого произвольного вектора $\vec{f} \in V^i$ имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla_i f^i = f^i_{,i} - \Gamma^i_{ji} f^j = f^i_{,i} - f^i \frac{(\sqrt{|g|})_{,i}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} f^i \right), \tag{7}$$

или в компонентах:

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\underline{i}} \left(\sqrt{|g|} f^{\underline{i}} \right), \quad \underline{i} = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Здесь g представляет собой $\det \left(g_{\underline{i}\underline{i}} \right)$. Так как подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а в пространстве Минковского $\mathbb{M}^4$ $g < 0$, то для определённости будем использовать запись $|g|$.

Выражение для ротора действительно только в пространстве $\mathbb{E}^3$:

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{rot} \vec{f} \right)^i &= \left[\vec{\nabla}, \vec{f} \right] = \left(\operatorname{rot} \vec{f} \right)^{\underline{i}} \delta^i_{\underline{i}}, \\ \left(\operatorname{rot} \vec{f} \right)^{\underline{i}} &= e^{\underline{i}\underline{j}\underline{k}} \nabla_{\underline{j}} f_{\underline{k}}, \quad \underline{i}, \underline{j}, \underline{k} = \overline{1, 3},\end{aligned} \tag{9}$$

где $e^{\underline{ijk}}$ — альтернирующий тензор, выражающийся через символ Леви-Чевиты[1]:

$$e_{\underline{ijk}} = \sqrt{g^{(3)}}\varepsilon_{\underline{ijk}}, \quad e^{\underline{ijk}} = \frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\varepsilon^{\underline{ijk}}, \quad \underline{i}, \underline{j}, \underline{k} = \overline{1,3}.$$

Из выражений (7) для дивергенции и (6) для градиента можно получить лапласиан:

$$\Delta\varphi = \nabla_i \left(\nabla^i\varphi\right) = \nabla_i \left(g^{ij}(\operatorname{grad}\varphi)_j\right) = \nabla_i \left(g^{ij}\partial_j\varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i \left(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\varphi\right). \tag{10}$$

3. Представления уравнений Максвелла

Рассмотрим уравнения Максвелла в системе СГС [4]:

$$\begin{gathered}
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho; \\
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}; \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряжённости электрического и магнитного полей, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — электрическая и магнитная индукция соответственно, $\vec{j}$ — плотность тока, ρ — плотность заряда, c — скорость света.

3.1 Ковариантная запись уравнений Максвелла через 3-векторы

Запишем уравнения (11) в явно ковариантной форме

$$\begin{gathered}
e^{ijk}\nabla_j E_k = -\frac{1}{c}\frac{\partial B^i}{\partial t}; \\
\nabla_i D^i = 4\pi\rho; \\
e^{ijk}\nabla_j H_k = \frac{1}{c}\frac{\partial D^i}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j^i; \\
\nabla_i B^i = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

[1]В общем случае имеем:

$$e_{\underline{a_1 a_2 \ldots a_n}} = \sqrt{|g^{(n)}|}\varepsilon_{\underline{a_1 a_2 \ldots a_n}},$$

$$e^{\underline{a_1 a_2 \ldots a_n}} = \frac{\sqrt{|g^{(n)}|}}{g^{(n)}}\varepsilon^{\underline{a_1 a_2 \ldots a_n}} = \frac{\operatorname{sign} g^{(n)}}{\sqrt{|g^{(n)}|}}\varepsilon^{\underline{a_1 a_2 \ldots a_n}},$$

$$\underline{a_1}, \underline{a_2}, \ldots, \underline{a_n} = \overline{1,n}.$$

Перепишем (11) в компонентах тензорного формализма, используя (9) и (8):

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\left[\partial_{\underline{j}} E_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}} E_{\underline{j}}\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^{\underline{i}}, \quad \underline{i}, \underline{j}, \underline{k} = \overline{1,3}, \\
\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\partial_{\underline{i}}\left(\sqrt{g^{(3)}} D^{\underline{i}}\right) = 4\pi\rho, \quad \underline{i} = \overline{1,3}, \\
\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\left[\partial_{\underline{j}} H_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}} H_{\underline{j}}\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^{\underline{i}} + \frac{4\pi}{c} j^{\underline{i}}, \quad \underline{i}, \underline{j}, \underline{k} = \overline{1,3}, \\
\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\partial_{\underline{i}}\left(\sqrt{g^{(3)}} B^{\underline{i}}\right) = 0, \quad \underline{i} = \overline{1,3}.
\end{gathered} \tag{13}$$

3.2 Ковариантная запись уравнений Максвелла через 4-векторы

Запишем (11) через тензоры электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$[5], [6, с. 256, 263–264]:

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta, \tag{14}$$

$$\nabla_\alpha G_{\beta\gamma} + \nabla_\beta G_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma G_{\alpha\beta} = 0, \tag{15}$$

где тензоры $F^{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ имеют следующие компоненты

$$\begin{gathered}
F^{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \\
G_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -D_2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -D_3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{16}$$

$E^{\underline{i}}$, $H^{\underline{i}}$, $\underline{i} = \overline{1,3}$, — компоненты векторов напряжённости электрического и магнитного полей соответственно; $D_{\underline{i}}$, $B_{\underline{i}}$, $\underline{i} = \overline{1,3}$, — компоненты векторов электрической и магнитной индукции соответственно.

Уравнение (15) можно записать в более простом виде

$$\nabla_\alpha {}^*G^{\alpha\beta} = 0. \tag{17}$$

Здесь введён тензор ${}^*G^{\alpha\beta}$, дуально сопряжённый тензору $G^{\alpha\beta}$

$${}^*G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta}, \tag{18}$$

где $e^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — альтернирующий тензор.

Кодифицируем запись используемых тензоров. Для этого поставим в соответствие $F_{\underline{\alpha\beta}}$ упорядоченную пару $(E_{\underline{i}}, B^{\underline{i}})$ $(F_{\underline{\alpha\beta}} \sim (E_{\underline{i}}, B^{\underline{i}}))$ следующим образом

$$F_{0\underline{i}} = E_i, \quad F_{\underline{ij}} = -B^{\underline{k}}, \text{подстановка } P(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \text{ — чётная.} \tag{19}$$

Таким образом можно выписать следующие соответствия

$$
\begin{aligned}
F_{\underline{\alpha\beta}} &\sim (E_{\underline{i}}, B^{\underline{i}}), & F^{\underline{\alpha\beta}} &\sim (-E^{\underline{i}}, B_{\underline{i}}),\\
G_{\underline{\alpha\beta}} &\sim (D_{\underline{i}}, H^{\underline{i}}), & G^{\underline{\alpha\beta}} &\sim (-D^{\underline{i}}, H_{\underline{i}}),\\
{}^*G_{\underline{\alpha\beta}} &\sim (H_{\underline{i}}, -D^{\underline{i}}), & {}^*G^{\underline{\alpha\beta}} &\sim (-H^{\underline{i}}, -D_{\underline{i}}).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

По этой упорядоченной паре можно строить как тензорные, так и векторные представления тензора электромагнитной индукции.

3.3 Комплексное представление уравнений Максвелла

Можно построить несколько видов комплексного представления уравнений Максвелла, хотя обычно ограничиваются вакуумным случаем в евклидовом пространстве. Мы же запишем комплексное представление в среде в произвольных координатах.

Комплексное представление уравнений Максвелла рассматривалось разными авторами [7, с. 40–42], [8].

Аналогично (20) зададим соответствие упорядоченной пары и комплексного 3-вектора

$$
\begin{aligned}
F^{\underline{i}} &\sim (E^{\underline{i}}, B^{\underline{i}}), & F^{\underline{i}} &= E^{\underline{i}} + \mathrm{i}B^{\underline{i}};\\
G^{\underline{i}} &\sim (D^{\underline{i}}, H^{\underline{i}}), & G^{\underline{i}} &= D^{\underline{i}} + \mathrm{i}H^{\underline{i}}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Выразим напряжённость и индукцию через соответствующие комплексные векторы

$$
\begin{aligned}
E^i &= \frac{F^i + \bar{F}^i}{2}, & B^i &= \frac{F^i - \bar{F}^i}{2\mathrm{i}},\\
D^i &= \frac{G^i + \bar{G}^i}{2}, & H^i &= \frac{G^i - \bar{G}^i}{2\mathrm{i}}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Введём два дополнительных комплексных вектора

$$
K^i = \frac{G^i + F^i}{2}, \quad L^i = \frac{\bar{G}^i - \bar{F}^i}{2}. \tag{23}
$$

Тогда уравнения (12) примут вид

$$
\begin{gathered}
\nabla_i(K^i + L^i) = 4\pi\rho;\\
-\mathrm{i}\nabla_0(K^i - L^i) + e^{ijk}\nabla_j(K_k - L_k) = \mathrm{i}\frac{4\pi}{c}j^i.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

3.3.1 Комплексное представление уравнений Максвелла в вакууме

Из соотношений $D^i = E^i$, $H^i = B^i$ и (23) получаем

$$
K^i = E^i + \mathrm{i}B^i = F^i, \quad L^i = 0. \tag{25}
$$

Тогда уравнения (24) будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
\nabla_i F^i &= 4\pi\rho; \\
-\mathrm{i}\nabla_0 F^i + e^{ijk}\nabla_j F_k &= \mathrm{i}\frac{4\pi}{c} j^i.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

3.3.2 Комплексное представление уравнений Максвелла в однородной изотропной среде

В однородной изотропной среде справедливы следующие соотношения $D^i = \varepsilon E^i$, $\mu H^i = B^i$, где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Для упрощения получаемых выражений возможен следующий трюк. В (26) делаем формальную замену $c \to c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (то есть заменяем скорость света в вакууме на скорость света в среде) и $j^\alpha \to \frac{j^\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда получим

$$
\begin{aligned}
F^i &= \sqrt{\varepsilon} E^i + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{\mu}} B^i, \\
\nabla_i F^i &= \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\rho, \\
e^{ijk}\nabla_j F_k &= \mathrm{i}\frac{4\pi\sqrt{\mu}}{c} j^i + \mathrm{i}\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial F^i}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Данное представление уравнений Максвелла имеет несколько наименований. В частности, оно известно как представление Римана–Зильберштейна.

3.4 Импульсное представление уравнений Максвелла

Разложим векторы напряжённости электрического и магнитного полей, электрической и магнитной индукций в ряд Фурье по волновым векторам k^j, j — абстрактный индекс (фурье-образы стандартно обозначим шапочкой):

$$
\begin{aligned}
\hat{E}^i(t, k_j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 x^j \sqrt{g^{(3)}} E^i(t, x^j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j x^j}, \\
\hat{H}^i(t, k_j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 x^j \sqrt{g^{(3)}} H^i(t, x^j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j x^j}, \\
\hat{B}^i(t, k_j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 x^j \sqrt{g^{(3)}} B^i(t, x^j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j x^j}, \\
\hat{D}^i(t, k_j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 x^j \sqrt{g^{(3)}} D^i(t, x^j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j x^j}, \\
\hat{\rho}(t, k_j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 x^j \sqrt{g^{(3)}} \rho(t, x^j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j x^j}, \\
\hat{j}^i(t, k_j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 x^j \sqrt{g^{(3)}} j^i(t, x^j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j x^j}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Обратное преобразование:

$$
\begin{aligned}
E^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{E}^i(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j},\\
H^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{H}^i(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j},\\
B^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{B}^i(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j},\\
D^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{D}^i(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j},\\
\rho(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{\rho}(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j},\\
j^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{j}^i(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Следует заметить, что компоненты векторов $E^i(t,x^j)$ и $\hat{E}^i(t,k_j)$, (аналогично: $H^i(t,x^j)$ и $\hat{H}^i(t,k_j)$, $D^i(t,x^j)$ и $\hat{D}^i(t,k_j)$, $B^i(t,x^j)$ и $\hat{B}^i(t,k_j)$, $j^i(t,x^j)$ и $\hat{j}^i(t,k_j)$) рассматриваются в разных базисах:

$$
\begin{aligned}
E^i(t,x^j) &= E^{\underline{i}}(t,x^j)\delta^i_{\underline{i}},\\
\hat{E}^i(t,k_j) &= \hat{E}^{\hat{\underline{i}}}(t,k_j)\delta^i_{\hat{\underline{i}}},\\
\hat{g}^{(3)} := \det g_{\hat{\underline{i}}\hat{\underline{j}}}, &\quad \mathrm{d}s^2 = g_{\hat{\underline{i}}\hat{\underline{j}}}\mathrm{d}x^{\hat{\underline{i}}}\mathrm{d}x^{\hat{\underline{j}}}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

где базис $\delta^i_{\hat{\underline{i}}}$ взят относительно вектора k_i. Для всех k_i определён свой независимый базис. При выписывании уравнений Максвелла из (29) можно работать не с интегралами, а напрямую с подынтегральными выражениями. Или воспользоваться формулами для преобразований Фурье:

$$
\begin{aligned}
(\widehat{af(x^i)+bg}(x^i)) &= a\hat{f}(k_i)+b\hat{g}(k_i), \quad a,b=\mathrm{const},\\
\widehat{\frac{\partial f(x^i)}{\partial x^{\underline{j}}}} &= \mathrm{i}k_{\underline{j}}\hat{f}(k^i),\\
f(\widehat{x^i)g(x^i}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}(\hat{f}*\hat{g})(k_i),
\end{aligned}
$$

где свёртка имеет вид

$$
(\hat{f}*\hat{g})(k_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k_i-s_i)\hat{g}(s_i)\mathrm{d}^3s_i.
$$

Считая $g = \mathrm{const}$, получим

$$
\begin{gathered}
\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\varepsilon^{ijk}k_j E_k(t,k_j) = -\frac{1}{c}\partial_t B^i(t,k_j), \\
\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\varepsilon^{ijk}k_j H_k(t,k_j) = \frac{1}{c}\partial_t D^i(t,k_j) + \frac{4\pi}{c}j^i(t,k_j), \\
\mathrm{i}k_i D^i(t,k_j) = 4\pi\rho(t,k_j), \\
\mathrm{i}k_i B^i(t,k_j) = 0.
\end{gathered} \tag{31}
$$

Поскольку результирующие (31) уравнения получаются комплексными, то представляется более оправданным использование в данном подходе комплексного представления уравнений Максвелла (21):

$$
\begin{aligned}
F^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{F}^i(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j}, \\
G^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{G}^i(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j}, \\
\rho(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{\rho}(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j}, \\
j^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k_j\sqrt{\hat{g}^{(3)}}\hat{j}^i(t,k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx^j}.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Замечание. В рамках классической электродинамики разложение векторов E^j, H^j, B^j, D^j в ряд Фурье по волновым векторам k^j соответствует в квантовой механике разложению этих векторов в ряд Фурье по импульсам. Поэтому представление (31) можно назвать импульсным.

3.5 Спинорная запись уравнений Максвелла

Тензор электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и его компоненты $F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$, $\underline{\alpha},\underline{\beta}=\overline{0,3}$, можно рассматривать в спинорной форме [2, с. 153] (аналогично и для $G_{\alpha\beta}$):

$$
\begin{gathered}
F_{\alpha\beta} = F_{AA'BB'}; \\
F_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} = F_{\underline{A}\,\underline{A}'\underline{B}\,\underline{B}'}g_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{A}\,\underline{A}'}g_{\underline{\beta}}{}^{\underline{B}\,\underline{B}'}, \\
\underline{A},\underline{A}',\underline{B},\underline{B}' = \overline{0,1}, \quad \underline{\alpha},\underline{\beta} = \overline{0,3},
\end{gathered} \tag{33}
$$

где $g_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{A}\,\underline{A}'}$, $\underline{\alpha}=\overline{0,3}$, — символы Инфельда–ван дер Вердена, определяемые в действительном спинорном базисе $\varepsilon_{\underline{A}\,\underline{B}}$ следующим образом [2, с. 161]:

$$
g_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{A}\,\underline{A}'} := g_{\underline{\alpha}}{}^{\alpha}\varepsilon_A{}^{\underline{A}}\varepsilon_{A'}{}^{\underline{A}'}, \quad g_{\underline{A}\,\underline{A}'}{}^{\underline{\alpha}} := g^{\underline{\alpha}}{}_{\alpha}\varepsilon^A{}_{\underline{A}}\varepsilon^{A'}{}_{\underline{A}'}, \tag{34}
$$

$$
\varepsilon_{\underline{A}\,\underline{B}} = \varepsilon_{\underline{A}'\,\underline{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\underline{A}}{}^{A}\varepsilon_{A}{}^{\underline{B}} = \varepsilon_{\underline{A}}{}^{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{35}
$$

Запишем уравнения Максвелла через спиноры.

Поскольку тензор $F_{\alpha\beta}$ действителен и антисимметричен, то его можно представить в виде

$$F_{\alpha\beta} = \varphi_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \varepsilon_{AB}\bar{\varphi}_{A'B'}, \tag{36}$$

здесь φ_{AB} — спинор электромагнитного поля:

$$\varphi_{AB} := \frac{1}{2}F_{ABC'}{}^{C'} = \frac{1}{2}F_{AA'BB'}\varepsilon^{A'B'} = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\varepsilon^{A'B'}.$$

Аналогично можно записать

$$G_{\alpha\beta} = \gamma_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \varepsilon_{AB}\bar{\gamma}_{A'B'}, \tag{37}$$

$$^{*}G^{\alpha\beta} = -\mathrm{i}\gamma^{AB}\varepsilon^{A'B'} + \mathrm{i}\varepsilon^{AB}\bar{\gamma}^{A'B'}. \tag{38}$$

Заменяя в уравнении (14) абстрактные индексы α на AA' и β на BB', запишем:

$$\nabla_{AA'}F^{AA'BB'} = \frac{4\pi}{c}j^{BB'}.$$

Используя соотношение (36) получим

$$\nabla^{AB'}\varphi_{A}^{B} + \nabla^{BA'}\varphi_{A'}^{B'} = \frac{4\pi}{c}j^{BB'}. \tag{39}$$

Аналогично, из (17) и (38) получим

$$\nabla^{A'B}\gamma_{B}^{A} - \nabla^{AB'}\bar{\gamma}_{B'}^{A'} = 0. \tag{40}$$

Таким образом полная система уравнений Максвелла в спинорном представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla^{AB'}\varphi_{A}^{B} + \nabla^{BA'}\varphi_{A'}^{B'} &= \frac{4\pi}{c}j^{BB'}, \\ \nabla^{A'B}\gamma_{B}^{A} - \nabla^{AB'}\bar{\gamma}_{B'}^{A'} &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Система уравнений Максвелла в вакууме в спинорной форме запишется в виде одного уравнения [2, с. 385]:

$$\nabla^{AB'}\varphi_{A}^{B} = \frac{2\pi}{c}j^{BB'}. \tag{42}$$

Выпишем компоненты спинора электромагнитного поля:

$$\begin{gathered} \varphi_{\underline{A}\,\underline{B}} = \frac{1}{2}F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\varepsilon^{\underline{A'}\,\underline{B'}}g^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{A}\,\underline{A'}}g^{\underline{\beta}}{}_{\underline{B}\,\underline{B'}}, \\ \underline{A}, \underline{A'}, \underline{B}, \underline{B'} = \overline{0,1}, \quad \underline{\alpha}, \underline{\beta} = \overline{0,3}. \end{gathered} \tag{43}$$

Используя (34), (35) и обозначив $F_i = E_i - \mathrm{i}B^i$, можно записать [2, с. 386]:

$$\begin{aligned} \varphi_{00} &= \frac{1}{2}\left(F_1 - \mathrm{i}F_2\right), \\ \varphi_{01} = \varphi_{10} &= -\frac{1}{2}F_3, \\ \varphi_{11} &= -\frac{1}{2}\left(F_1 + \mathrm{i}F_2\right). \end{aligned} \tag{44}$$

4. Реализация уравнений Максвелла в некоторых системах координат

Продемонстрируем реализацию уравнений Максвелла в голономном базисе на примере часто используемых систем координат: цилиндрической и сферической. Результат можно сравнить с реализацией в неголономной системе координат [9].

4.1 Уравнения Максвелла в цилиндрической системе координат

В рамках стандарта ISO 31-11 координаты (x^1, x^2, x^3) обозначаются как (ρ, φ, z). Чтобы не возникало коллизий с обозначением плотности заряда ρ, будем использовать обозначения (r, φ, z)

Закон преобразования координат от декартовых к цилиндрическим:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{45}$$

Закон преобразования координат от цилиндрических к декартовым:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), \\ z = z. \end{cases} \tag{46}$$

Метрический тензор:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$\sqrt{g} = r. \tag{48}$$

Коэффициенты Ламе:

$$h_1 \equiv h_r = 1, \quad h_2 \equiv h_\varphi = r, \quad h_3 \equiv h_z = 1. \tag{49}$$

Соотношение между голономным (тензорным) и неголономным (векторным) базисами (см. (4) и (5)):

$$f^{\underline{r}'} = f^{\underline{r}}, \quad f^{\underline{\varphi}'} = r f^{\underline{\varphi}}, \quad f^{\underline{z}'} = f^{\underline{z}}, \tag{50}$$

$$f_{\underline{r}'} = f_{\underline{r}}, \quad f_{\underline{\varphi}'} = \frac{1}{r} f_{\underline{\varphi}}, \quad f_{\underline{z}'} = f_{\underline{z}}. \tag{51}$$

Дифференциальные операторы в голономном базисе:

$$(\operatorname{grad} f)_i = \frac{\partial f}{\partial r}\delta_i^{\underline{r}} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\delta_i^{\underline{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\delta_i^{\underline{z}}; \tag{52}$$

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{1}{r}\partial_r\left(r f^{\underline{r}}\right) + \partial_\varphi\left(f^{\underline{\varphi}}\right) + \partial_z\left(f^{\underline{z}}\right); \tag{53}$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{f}\right)^i = \frac{1}{r}\left[\partial_\varphi f_{\underline{z}} - \partial_z f_{\underline{\varphi}}\right]\delta_{\underline{r}}^i + \frac{1}{r}\left[\partial_z f_{\underline{r}} - \partial_r f_{\underline{z}}\right]\delta_{\underline{\varphi}}^i + \frac{1}{r}\left[\partial_r f_{\underline{\varphi}} - \partial_\varphi f_{\underline{r}}\right]\delta_{\underline{z}}^i. \tag{54}$$

Дифференциальные операторы в неголономном базисе:

$$(\mathrm{grad}\, f)_i = \frac{\partial f}{\partial r}\delta_i^{\underline{r}'} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\delta_i^{\underline{\varphi}'} + \frac{\partial f}{\partial z}\delta_i^{\underline{z}'}; \tag{55}$$

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{1}{r}\partial_r\left(r f^{\underline{r}'}\right) + \frac{1}{r}\partial_\varphi\left(f^{\underline{\varphi}'}\right) + \partial_z\left(f^{\underline{z}'}\right); \tag{56}$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\vec{f}\right)^i = \frac{1}{r}\left[\partial_\varphi f_{\underline{z}'} - r\partial_z f_{\underline{\varphi}'}\right]\delta^i_{\underline{r}'} + \left[\partial_z f_{\underline{r}'} - \partial_r f_{\underline{z}'}\right]\delta^i_{\underline{\varphi}} + \frac{1}{r}\left[\partial_r(r f_{\underline{\varphi}'}) - \partial_\varphi f_{\underline{r}'}\right]\delta^i_{\underline{z}'}. \tag{57}$$

Запишем уравнения Максвелла в цилиндрических координатах (r, φ, z).

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\left[\partial_{\underline{j}}E_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}}E_{\underline{j}}\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^{\underline{i}}, \quad \underline{i},\, \underline{j},\, \underline{k} = \overline{1,3},\\
&\frac{1}{r}\left[\partial_{\underline{j}}H_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}}H_{\underline{j}}\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^{\underline{i}} + \frac{4\pi}{c}j^{\underline{i}}, \quad \underline{i},\, \underline{j},\, \underline{k} = \overline{1,3},\\
&\frac{1}{r}\partial_{\underline{i}}\left(rD^{\underline{i}}\right) = 4\pi\rho, \quad \underline{i} = \overline{1,3},\\
&\frac{1}{r}\partial_{\underline{i}}\left(rB^{\underline{i}}\right) = 0, \quad \underline{i} = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{58}$$

После преобразований окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\left[\partial_\varphi E_3 - \partial_z E_2\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^1,\\
&\frac{1}{r}\left[\partial_z E_1 - \partial_r E_3\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^2,\\
&\frac{1}{r}\left[\partial_r E_2 - \partial_\varphi E_1\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^3,\\
&\frac{1}{r}\left[\partial_\varphi H_3 - \partial_z H_2\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^1 + \frac{4\pi}{c}j^1,\\
&\frac{1}{r}\left[\partial_z H_1 - \partial_r H_3\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^2 + \frac{4\pi}{c}j^2,\\
&\frac{1}{r}\left[\partial_r H_2 - \partial_\varphi H_1\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^3 + \frac{4\pi}{c}j^3,\\
&\frac{1}{r}D^1 + \frac{\partial D^1}{\partial r} + \frac{\partial D^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial D^3}{\partial z} = 4\pi\rho,\\
&\frac{1}{r}B^1 + \frac{\partial B^1}{\partial r} + \frac{\partial B^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial B^3}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{59}$$

4.2 Уравнения Максвелла в сферической системе координат

В рамках стандарта ISO 31-11 координаты (x^1, x^2, x^3) обозначаются как (r, ϑ, φ).

Закон преобразования координат от декартовых к сферическим:

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\\ z = r\cos\vartheta. \end{cases} \tag{60}$$

Закон преобразования координат от сферических к декартовым:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \vartheta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right), \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{cases} \tag{61}$$

Метрический тензор:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \end{pmatrix}, \tag{62}$$

$$\sqrt{g} = r^2 \sin\vartheta. \tag{63}$$

Коэффициенты Ламе:

$$h_1 \equiv h_r = 1, \quad h_2 \equiv h_\vartheta = r, \quad h_3 \equiv h_\varphi = r\sin\vartheta. \tag{64}$$

Соотношение между голономным (тензорным) и неголономным (векторным) базисами (см. (4) и (5)):

$$f^{\underline{r}'} = f^{\underline{r}}, \quad f^{\underline{\vartheta}'} = r f^{\underline{\vartheta}}, \quad f^{\underline{\varphi}'} = r\sin\vartheta f^{\underline{\varphi}}, \tag{65}$$

$$f_{\underline{r}'} = f_{\underline{r}}, \quad f_{\underline{\vartheta}'} = \frac{1}{r} f_{\underline{\vartheta}}, \quad f_{\underline{\varphi}'} = \frac{1}{r\sin\vartheta} f_{\underline{\varphi}}. \tag{66}$$

Дифференциальные операторы в голономном базисе:

$$(\operatorname{grad} f)_i = \frac{\partial f}{\partial r}\delta_i^{\underline{r}} + \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\delta_i^{\underline{\vartheta}} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\delta_i^{\underline{\varphi}}; \tag{67}$$

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 f^{\underline{r}}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta f^{\underline{\vartheta}}\right) + \partial_\varphi\left(f^{\underline{\varphi}}\right); \tag{68}$$

$$\begin{gathered} \left(\operatorname{rot}\vec{f}\right)^i = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\partial_\vartheta f_{\underline{\varphi}} - \partial_\varphi f_{\underline{\vartheta}}\right]\delta^i_{\underline{r}} + \\ + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\partial_\varphi f_{\underline{r}} - \partial_r f_{\underline{\varphi}}\right]\delta^i_{\underline{\vartheta}} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\partial_r f_{\underline{\vartheta}} - \partial_\vartheta f_{\underline{r}}\right]\delta^i_{\underline{\varphi}}. \end{gathered} \tag{69}$$

Дифференциальные операторы в неголономном базисе:

$$(\operatorname{grad} f)_i = \frac{\partial f}{\partial r}\delta_i^{\underline{r}'} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\delta_i^{\underline{\vartheta}'} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\delta_i^{\underline{\varphi}'}; \tag{70}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\vec{f} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 f^{\underline{r}'}\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta f^{\underline{\vartheta}'}\right) + \\ + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\left(f^{\underline{\varphi}'}\right); \end{gathered} \tag{71}$$

$$\begin{gathered} \left(\operatorname{rot}\vec{f}\right)^i = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\partial_\vartheta(\sin\vartheta f_{\underline{\varphi}'}) - \partial_\varphi f_{\underline{\vartheta}'}\right]\delta^i_{\underline{r}'} + \\ + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\varphi f_{\underline{r}'} - \partial_r(r f_{\underline{\varphi}'})\right]\delta^i_{\underline{\vartheta}'} + \frac{1}{r}\left[\partial_r(r f_{\underline{\vartheta}'}) - \partial_\vartheta f_{\underline{r}'}\right]\delta^i_{\underline{\varphi}'}. \end{gathered} \tag{72}$$

Запишем уравнения Максвелла в сферических координатах (r, ϑ, φ).

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\partial_{\underline{j}} E_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}} E_{\underline{j}}\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^{\underline{i}}, \quad \underline{i},\, \underline{j},\, \underline{k} = \overline{1,3}, \\
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\partial_{\underline{j}} H_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}} H_{\underline{j}}\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^{\underline{i}} + \frac{4\pi}{c} j^{\underline{i}}, \quad \underline{i},\, \underline{j},\, \underline{k} = \overline{1,3}, \\
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\partial_{\underline{i}}\left(r^2 \sin\vartheta D^{\underline{i}}\right) = 4\pi\rho, \quad \underline{i} = \overline{1,3}, \\
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\partial_{\underline{i}}\left(r^2 \sin\vartheta B^{\underline{i}}\right) = 0, \quad \underline{i} = \overline{1,3}.
\end{gathered}
\tag{73}
$$

После преобразований окончательно получаем:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\partial_\vartheta E_3 - \partial_\varphi E_2\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^1, \\
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\partial_\varphi E_1 - \partial_r E_3\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^2, \\
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\partial_r E_2 - \partial_\vartheta E_1\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^3, \\
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\partial_\vartheta H_3 - \partial_\varphi H_2\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^1 + \frac{4\pi}{c} j^1, \\
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\partial_\varphi H_1 - \partial_r H_3\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^2 + \frac{4\pi}{c} j^2, \\
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\partial_r H_2 - \partial_\vartheta H_1\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^3 + \frac{4\pi}{c} j^3, \\
\frac{2}{r} D^1 + \partial_r D^1 + \operatorname{ctg}\vartheta D^2 + \partial_\vartheta D^2 + \partial_\varphi D^3 = 4\pi\rho, \\
\frac{2}{r} B^1 + \partial_r B^1 + \operatorname{ctg}\vartheta B^2 + \partial_\vartheta B^2 + \partial_\varphi B^3 = 0.
\end{gathered}
\tag{74}
$$

Заключение

Сформулируем основные выводы и результаты, полученные в работе:

1. Показана связь между тензорным и векторным формализмами.
2. Выписано ковариантное координатное представление дифференциальных операторов для голономных систем координат.
3. Продемонстрировано применение тензорного формализма для разных форм записи уравнений Максвелла.
4. Выписаны уравнения Максвелла в ковариантной бескоординатной и ковариантной координатной формах.
5. Показано совпадение результатов, полученных с помощью тензорного и векторного формализмов на примере цилиндрической и сферической систем координат.

6. Применение для уравнений Максвелла вместо векторного формализма тензорного позволяет упростить математические выкладки, в частности при работе с недекартовыми системами координат.

   Упрощение записи уравнений и промежуточных расчётов в недекартовых системах координат возможно за счёт использования хорошо разработанного формализма тензорного анализа. Перевод же уравнений или результатов в векторный формализм при необходимости можно осуществлять на заключительном этапе.

Список литературы

[1] Кулябов Д.С., Немчанинова Н.А. Уравнения Максвелла в криволинейных координатах // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 2. — С. 172–179.

[2] Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. — М.: Мир, 1987. — Т. 1. — 528 с.

[3] Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

[4] Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций. С.-П.: БХВ-Петербург, 2010.

[5] Minkowski H. Die grundlagen für die electromagnetischen vorgönge in bewegten körpern // Math. Ann. — 1910. — no. 68. — Pp. 472–525.

[6] Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика: Учебное пособие для студентов физ. спец. университетов. — 2-е, перераб. изд. — М.: Высш. шк., 1990. — 352 с.

[7] Стрэттон Д.А. Теория электромагнетизма. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.

[8] Silberstein L. Electromagnetische grundgleichungen in bivectorieller behandlung // Annalen der Physik. — 1907. — Vol. 22. — Pp. 579–586.

[9] Батыгин В.В., Топтыгин Н.И. Сборник задач по электродинамике. — М. : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.