РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Д. С. Кулябов, Л. А. Севастьянов

Численная реализация вариационных методов

Учебное пособие

Москва
Российский университет дружбы народов
2015

УДК 517.2:518
ББК
К

Утверждено
РИС Учёного совета
Российского университета
дружбы народов

Кулябов Д. С., Севастьянов Л. А.
К Численная реализация вариационных методов : учебное пособие / Д. С. Кулябов, Л. А. Севастьянов. — Москва : РУДН, 2015. — 45 с.

ISBN

Пособие вводит читателей в предметную область вариационных методов. Пособие предназначено для направлений магистратуры 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика».

УДК 517.2:518
ББК

ISBN

Оглавление

Учебное пособие

Глава 1. Элементы теории гильбертовых пространств

Изложение прямых вариационных методов базируется на теории гильбертовых пространств, обобщающих на бесконечномерный (функциональный) случай понятие конечномерных линейных евклидовых пространств.

Множество элементов любой природы (точек, векторов, функций) называется линейным (векторным) пространством, если его элементы можно складывать между собой и умножать на число, получая при этом новые элементы того же линейного пространства.

Различают обычно вещественные и комплексные линейные пространства, если разрешено умножение на вещественные и комплексные числа соответственно.

Пример 1.1. Плоскость — одномерное комплексное пространство и двумерное вещественное пространство.

В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент (вектор) $\vec{0}$.

Линейное пространство H называется (комплексным) гильбертовым пространством H, если каждой паре элементов $\varphi,\ \psi \in H$ соответствует единственное (комплексное) число $(\varphi,\, \psi)$, удовлетворяющее свойствам

$$(\varphi,\, \psi) = (\overline{\psi,\, \varphi}), \tag{1.1}$$

где $\bar{\lambda}$ — комплексно сопряженное к λ число;

$$(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2,\, \psi) = \lambda_1(\varphi_1,\, \psi) + \lambda_2(\varphi_2,\, \psi); \tag{1.2}$$

$$\lambda_1,\, \lambda_2 \in C.$$

$$\begin{aligned} &(\varphi,\, \varphi) \geqslant 0, \\ &(\varphi,\, \varphi) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi = \vec{0}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Число $(\varphi,\, \psi)$ называется скалярным произведением векторов φ и ψ.

Пространство H называется (вещественным) гильбертовым пространством H, если $(\varphi,\, \psi)$ — вещественное число. При этом свойство (1.1) заменяется свойством

$$(\varphi,\, \psi) = (\psi,\, \varphi), \tag{1.4}$$

а в свойстве (1.2) $\lambda_1,\, \lambda_2 \in R$.

Неотрицательное число $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\, \varphi)}$ называется нормой элемента

$\varphi \in H$ и обладает следующими свойствами:

$$\|\varphi\| \geqslant 0, \tag{1.5}$$

$$\|\varphi\| = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \vec{0}, \tag{1.6}$$

$$\|\lambda\varphi\| = |\lambda| \cdot \|\varphi\|, \tag{1.7}$$

где λ — число, $\varphi \in H$; $|(\varphi,\, \psi)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ — неравенство Коши–Буняковского; $\|\varphi + \psi\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\|$ — неравенство треугольника.

Пример 1.2. Пусть Ω — измеримое множество евклидова m-мерного пространства R^m. Множество квадратично интегрируемых функций $L_2(\Omega)$ образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\varphi,\, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{1.8}$$

где $\mathrm{d}x$ — мера Лебега в R^m ($m = 1, 2, 3$ и т.д.).

Замечание 1.1. Если функции $\varphi,\ \psi$, рассматриваемые в примере 1.2 комплекснозначные, то скалярное произведение (1.8) — комплексное число и имеет смысл умножение функций на комплексные числа. Если же $\varphi,\ \psi$ — вещественнозначные функции, то $(\varphi,\ \psi) \in R$ и имеет смысл рассматривать его в качестве вещественного гильбертова пространства.

Пример 1.3. Рассмотрим множество таких числовых последовательностей $\vec{a} = (a_1,\, a_2,\, ...,\, a_n,\, ...)$, для которых выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty.$$

Оно образует гильбертово пространство l_2 со скалярным произведением

$$(\vec{a},\, \vec{b}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j}.$$

Элементы $\varphi_1,\, ...,\, \varphi_n$ гильбертова пространства называются линейно зависимыми, если можно найти такие (не равные одновременно нулю) числа $a_1,\, ...,\, a_n$, что выполняется равенство

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + ... + a_n\varphi_n = \vec{0}. \tag{1.9}$$

Если же равенство (1.9) выполняется лишь при условии $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, то элементы $\varphi_1,\, \varphi_2,\, ...,\, \varphi_n$ называются линейно независимыми.

Теорема 1.1. *Для того чтобы элементы $\varphi_1,\, \varphi_2,\, ...,\, \varphi_n$ гильбертова пространства были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы равнялся нулю определитель*

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1,\, \varphi_1) & (\varphi_1,\, \varphi_2) & ... & (\varphi_1,\, \varphi_n) \\ (\varphi_2,\, \varphi_1) & (\varphi_2,\, \varphi_2) & ... & (\varphi_2,\, \varphi_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ (\varphi_n,\, \varphi_1) & (\varphi_n,\, \varphi_2) & ... & (\varphi_n,\, \varphi_n) \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

Определитель (1.10) называется определителем Грамма элементов φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Пусть $\varphi_1,\, \varphi_2,\, ...,\, \varphi_n$ — последовательность элементов гильбертова пространства H. Говорят, что эта последовательность сходится (стремится) к элементу $\varphi_0 \in H$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_0\| = 0.$$

Элемент φ_0 называется пределом указанной последовательности и обозначается

$$\varphi_0 = \lim_{n\to\infty} \varphi_n.$$

Теорема 1.2. *Если $\varphi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ и $\psi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$, то*

$$(\varphi_0,\, \psi_0) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n,\, \psi_n).$$

Следствие 1.1. Если $\varphi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, то $(\varphi_0,\, \psi) = \lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_n,\, \psi)$.

Следствие 1.2. Если $\varphi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, то $\|\varphi_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\|$.

Гильбертово пространство H называется полным, если всякая фундаментальная последовательность его элементов $\varphi_1,\, \varphi_2,\, ...,\, \varphi_n ...$, т.е. последовательность, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} \|\varphi_n - \varphi_k\| = 0$$

сходится к некоторому пределу $\varphi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n \in H$.

Пример 1.4. Гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$ и l_2 полны.

Пример 1.5. $C(\Omega)$ неполно в метрике $L_2(\Omega)$, $\Omega \in [a, b]$.

Неполное гильбертово пространство (предгильбертово пространство) $\tilde{H}$ можно пополнить (до полного гильбертова пространства H), присоединив к нему новые элементы (подобно тому, как множество рациональных чисел пополняется до вещественной прямой присоединением иррациональных чисел).

Пусть последовательность $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots \in \tilde{H}$ — фундаментальная, но не имеет предела, тогда примем эту последовательность за новый элемент (предельный) и присоединим его к $\tilde{H}$. Обозначим через H объединение $\tilde{H}$ и всех фундаментальных последовательностей из $\tilde{H}$, не имеющих предела. Обозначим через $\{\psi\}$ последовательность $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots\}$, а через $\{\varphi\}$ последовательность $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$; будем считать $\{\psi\} = \{\varphi\}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_n - \varphi_n\| = 0$.

Скалярное произведение новых элементов определяется формулой

$$(\{\varphi\}, \{\psi\}) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n, \psi_n).$$

В результате, H — полное гильбертово пространство (пополнение $\tilde{H}$ по норме $\|\cdot\|$ или скалярному произведению $(\cdot, \cdot)$).

Подмножество M называется плотным в гильбертовом пространстве H, если любой элемент $\varphi \in H$ может быть получен как предел фундаментальных последовательностей из M.

Пример 1.6. Множество бесконечно дифференцируемых функций на множестве Ω плотно в $L_2(\Omega)$.

Подмножество M гильбертова пространства H называется замкнутым, если оно содержит все предельные точки.

Конечная или бесконечная система элементов гильбертова пространства $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ называется ортогональной, если $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ при $i \neq j$, и ортонормированной, если

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

Ортонормированная система $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ в гильбертовом пространстве H называется полной, если для любого элемента $\varphi \in H$ из условия $(\varphi, \varphi_j) = 0$ при $\forall j$ следует $\varphi = \vec{0}$.

Теорема 1.3. *Если гильбертово пространство H полное, то ряд Фурье*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k)\varphi_k$$

любого элемента $\varphi \in H$ по любой полной ортонормированной системе $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ сходится к этому элементу

$$\sum_{k=1}^{n} (\varphi, \varphi_k)\varphi_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi.$$

При этом

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2.$$

Элемент φ, ортогональный ко всем элементам множества, полного в гильбертовом пространстве H, равен нулю: $\varphi = \vec{0} \in H$.

Гильбертово пространство H называется сепарабельным, если в нём существует счётная полная ортонормированная система.

Будем говорить, что на подмножестве M гильбертова пространства H задан функционал l, если каждому элементу $\varphi \in M$ поставлено в соответствие некоторое единственное число $l(\varphi)$, т.е. $l : \varphi \mapsto l(\varphi)$. Множество M называется областью определения функционала l и обозначается D_l.

Пример 1.7. А. Норма вектора в гильбертовом пространстве H является функционалом $\|\cdot\|$ с областью определения $D_{\|\cdot\|} = H$

$$\|\cdot\| : \varphi \mapsto \|\varphi\|.$$

Б. При любом фиксированном векторе ψ гильбертова пространства H скалярное произведение $(\,\cdot\,, \psi)$ является функционалом с областью определения $D_\varphi = H$

$$(\,\cdot\,, \psi) : \varphi \mapsto (\varphi, \psi).$$

Функционал l называется линейным, если D_l является линейным пространством и

$$l(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 l(\varphi_1) + a_2 l(\varphi_2).$$

Линейный функционал l называется ограниченным, если для любого $\varphi \in D_l$ существует такая положительная константа C, что

$$|l(\varphi)| \leqslant C\,\|\varphi\|.$$

Наименьшее число из указанных C называется нормой функционала l и обозначается $\|l\|$.

Функционал l называется непрерывным, если из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$ следует соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} l(\varphi_n) = l(\varphi_0)$.

Всякий линейный ограниченный функционал, определенный на всем гильбертовом пространстве H, непрерывен. Всякий линейный непрерывный функционал, определенный на всем гильбертовом пространстве H, ограничен.

Теорема 1.4 (Теорема Рисса). *Для всякого ограниченного в гильбертовом пространстве H функционала l существует такой единственный элемент $\varphi_l \in H$, что для всех $\psi \in H$ справедливо равенство $l(\psi) = (\psi, \varphi_l)$.*

Теорема 1.5. *Заданный на плотном пространстве в гильбертовом пространстве H линейный ограниченный функционал l можно единственным образом продолжить на всё пространство H с сохранением нормы $\|l\|$.*

Говорят, что на некотором подмножестве D_A гильбертова пространства H определен оператор A, если каждому элементу $\varphi \in D_A$ поставлен в соответствие единственный элемент $A(\varphi) \in H$. D_A называется областью определения оператора A, а $R_A == \bigcup_{\varphi \in D_A} A(\varphi)$ называется областью значений оператора A.

Замечание 1.2. В определении оператора существенную роль играет его область определения. Два оператора A и B считаются равными, если $D_A = D_B$ и $A(\varphi) = B(\varphi)$ при любом $\varphi \in D_A = D_B$. Если $D_B \supset D_A$ и $A(\varphi) = B(\varphi)$ при любом $\varphi \in D_A \subset D_B$, то оператор B называется расширением оператора A.

Оператор A называется линейным, если D_A — линейное подпространство и если $A(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 A(\varphi_1) + \lambda_2 A(\varphi_2)$.

Для действия линейных операторов A на элементы $\varphi \in D_A$ применяется обозначение $A \cdot \varphi$.

Линейный оператор A называется ограниченным, если существует такая положительная константа C, что для любого $\varphi \in D_A$ справедливо неравенство $\|A \cdot \varphi\| \leqslant C \|\varphi\|$.

Наименьшая из упомянутых констант C называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$.

Оператор A называется непрерывным, если из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$ следует соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} (A\varphi_n) = A\varphi_0$.

Линейный ограниченный на всем гильбертовом пространстве оператор A непрерывен. Обратно, линейный непрерывный оператор ограничен.

Теорема 1.6. *Заданный на плотном линейном подпространстве D_A гильбертова пространства H линейный ограниченный оператор A можно продолжить (расширить) на все пространство H с сохранением нормы $\|A\|$.*

Глава 2. Положительные и строго положительные операторы. Энергетическое пространство

Оператор A называется симметричным в гильбертовом пространстве H, если он определен на плотном в H подмножестве D_A и если для любых элементов $u_1, u_2 \in D_A$ имеет место равенство

$$(Au_1,\, u_2) = (u_1,\, Au_2), \tag{2.1}$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — скалярное произведение в H.

Симметричный оператор A в гильбертовом пространстве H называется положительным, если для любого элемента $u \in D_A$ имеет место неравенство

$$(Au,\, u) \geqslant 0, \tag{2.2}$$

причем равенство $(Au,\, u) = 0$ выполняется лишь при условии $u = \vec{0}$.

Пример 2.1. Вещественное гильбертово пространство $H = L_2(0,\, 1)$.

Оператор A действует на функцию $u(x)$ по формуле

$$(Au)(x) = -\frac{d^2u}{dx^2}(x)$$

на подмножестве D_A дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u(0) = u(1) = 0$$

1) D_A — плотное в H линейное подпространство;

2) A — симметричен;

3) A — положителен.

4) A — невырожден ($(Au,\, u) = 0\ \Rightarrow u \equiv 0$ на $[0, 1]$).

Пример 2.2. Вещественное гильбертово пространство.

Оператор B действует на функцию $v(x)$ по формуле

$$(Bv)(x) = -\frac{d^2v}{dx^2}(x)$$

на подмножестве D_B непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\frac{dv}{dx}(0) - \alpha \cdot v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(1) + \beta \cdot v(1) = 0,$$

где $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$, а также $\alpha + \beta > 0$,

1) D_B — плотное в H линейное подпространство;
2) B — симметричен;
3) B — положителен.
4) B — невырожден.

Пример 2.3. Пусть Ω — ограниченная область в m-мерном арифметическом пространстве R^m с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ (размерности $m-1$). Вещественное гильбертово пространство $H = L_2(\Omega)$. Оператор Лапласа $(-\Delta)$ действует на функцию $w(x_1, ..., x_m)$ по формуле

$$(-\Delta w)(x_1, ..., x_m) = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 w}{\partial x_m^2}\right)(x_1, ..., x_m).$$

Область определения D_Δ состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций на замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$, удовлетворяющих граничным условиям

$$w|_{\partial\Omega} \equiv 0$$

1) D_Δ — плотное в H линейное подпространство;
2) $(-\Delta)$ — симметричен;
3) $(-\Delta)$ — положителен.
4) $(-\Delta)$ — невырожден.

Симметричный оператор A называют строго положительным (положительно определенным), если для любого элемента $u \in D_A$ выполняется неравенство

$$(Au, u) \geqslant \gamma(u, u) \tag{2.3}$$

при некотором положительном числе $\gamma \in R^+$.

Очевидно, всякий строго положительный оператор A положителен. Обратное, вообще говоря, неверно.

Все операторы, приведенные в примерах 2.1–2.3, строго положительны.

Пример 2.4. Вещественное гильбертово пространство.

Оператор C действует на функцию $y(x)$ по формуле

$$(Cy)(x) = -\left[\frac{d}{dx}\left(x^3 \frac{dy}{dx}\right)\right](x).$$

Область определения D_C состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих условию

$$y(1) = 0;$$

1) D_C — плотное в H линейное подпространство;

2)

$$(Cy,\, z) - (y,\, Cz) = \int\limits_0^1 \left[y\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{dz}{dx}\right) - z\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{dy}{dx}\right)\right] dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{d}{dx}\left[yx^3\frac{dz}{dx} - zx^3\frac{dy}{dx}\right] dx = \left[x^3\left(y\frac{dz}{dx} - z\frac{dy}{dx}\right)\right]_0^1 = 0;$$

3)

$$(Cy,\, y) = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$y = const = y(1) = 0 \Leftrightarrow y \equiv 0;$$

4)

$$(Cy,\, y) = -\int\limits_0^1 y\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{dy}{dx}\right) = -\left[yx^3\frac{dy}{dx}\right]_0^1 + \int\limits_0^1 x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \geqslant 0.$$

Итак, оператор C положителен, однако не строго положителен. Действительно, если бы C был строго положителен, то неравенство

$$\frac{(Cy,\, y)}{(y,\, y)} \geqslant \gamma \tag{2.4}$$

выполнялось бы для любых $y \in D_C$ при некотором фиксированном $\gamma > 0$ согласно (2.3).

Докажем противное.

Пусть $0 < \delta < 1$. Положим

$$y_\delta(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leqslant x \leqslant \delta \\ 0, & \delta < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Функция $y_\delta(1) = 0$ по определению дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, так что $y_\delta \in D_C$ при $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Подставим $y_\delta(x)$ в (2.4):

$$\frac{(Cy_\delta,\, y_\delta)}{(y_\delta,\, y_\delta)} = \frac{\int\limits_0^1 x^3 \left(\frac{dy_\delta}{dx}\right)^2 dx}{\int\limits_0^1 (y_\delta)^2 dx} = \frac{9\int\limits_0^\delta x^3 (\delta - x)^4 dx}{\int\limits_0^\delta (\delta - x)^6 dx} = \frac{9\delta}{40} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0.$$

Следовательно, оператор C не является строго положительным.

Пусть A — строго положительный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. На множестве определения D_A оператора A определим новое скалярное произведение (если D_A — линейное подпространство (линеал) пространства H)

$$(u,\, v)_A \stackrel{def}{=} (Au,\, v). \tag{2.5}$$

Скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_A$ (2.5):

- симметрично в силу симметричности оператора A;
- билинейно в силу линейности оператора A;
- положительно определено в силу положительности оператора A и в силу аналогичных свойств оригинального скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в пространстве H.

Подпространство D_A, снабженное скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_A$, превращается в предгильбертово пространство, которое пополняется по норме $\|\cdot\|_A$ $(\|u\|_A^2 = (u,\, u)_A = (u,\, Au))$ до полного гильбертова пространства H_A.

Пространство H_A называется энергетическим пространством оператора A.

Теорема 2.1. *Все элементы пространства H_A принадлежат также и пространству H. Точнее говоря, существует взаимнооднозначное вложение гильбертова пространства H_A в гильбертово пространство H.*

Замечание 2.1. В силу строгой положительности оператора A, т.е. условия (2.3) или эквивалентного ему условия $\|u\| \leqslant \frac{\|u\|_A}{\gamma}$, из сходимости по энергетической норме $\|\cdot\|_A$ следует сходимость по оригинальной норме $\|\cdot\|$.

Глава 3. Энергетический метод для строго положительных операторов

Теорема 3.1. *Если оператор A положителен в гильбертовом пространстве H, то уравнение*

$$Au = f, \quad f \in H \tag{3.1}$$

имеет в этом пространстве не более одного решения.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два решения уравнения (3.1). В силу линейности оператора A получаем равенство $A\,[u_1 - u_2] = 0$, умножив которое скалярно на $u_1 - u_2$, получим равенство $(A\,[u_1 - u_2],\ [u_1 - u_2]) = 0$, из которого в силу положительности A вытекает равенство $u_1 - u_2 = \vec{0}$, доказывающее единственность решения. □

Теорема 3.2. *Пусть A — положительный оператор в D_A. Если уравнение (3.1) имеет решение $u_0 \in D_A : Au_0 = f \in H$, то функционал*

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \tag{3.2}$$

Достигает на u_0 наименьшего значения в D_A. Обратно, элемент $u_0 \in D_A$ гильбертова пространства H, реализующий минимум функционала (3.2), удовлетворяет уравнению (3.1).

Доказательство. Прежде всего следует отметить, что области определения оператора A из (3.1) и функционала F из (3.2) совпадают в силу определения функционала.

Далее, пусть уравнение (3.1) имеет решение $u_0 \in H$, т.е. $Au_0 = f$. Тогда

$$\begin{aligned} F(u) &= (Au, u) - 2(Au_0, u) = (Au, u) - (Au_0, u) - (u, Au_0) = \\ &= (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0) + (Au_0, u_0) - (Au_0, u_0) = \\ &= (A(u - u_0), (u - u_0)) - (Au_0, u_0) \geqslant 0 - (Au_0, u_0). \end{aligned} \tag{3.3}$$

В силу строгой положительности оператора A функционал F достигает своего минимального значения $F(u) = -(Au_0, u_0)$ только при $u = u_0$, при этом $F(u) \geqslant F(u_0) = -(Au_0, u_0)$.

С другой стороны, пусть функционал F достигает своего минимума на элементе $u_0 \in D_A$. Тогда для произвольного вектора $v \in D_A$ и произвольного числа τ (D_A — линейное подпространство, поэтому $\tau v \in D_A$ по этой же причине и $(u_0 + \tau v) \in D_A$) выполняется неравенство

$$F(u_0 + \tau v) \geqslant F(u_0).$$

Воспользуемся симметрией оператора A и свойствами скалярного произведения в (3.2):

$$\begin{aligned} F(u_0 + \tau v) = (A(u_0 + \tau v), (u_0 + \tau v)) - 2(f, (u_0 + \tau v)) = \\ = (Au_0 + \tau Av, u_0 + \tau v) - 2(f, u_0) - 2\tau(f, v) = \\ = (Au_0, u_0) + \tau(Av, u_0) + \tau(Au_0, v) + \tau^2(Av, v) - 2(f, u_0) - 2\tau(f, v) = \\ = F(u_0) + 2\tau\{(Au_0, v) - (f, v)\} + \tau^2(Av, v) \geqslant F(u_0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом,

$$2\tau(Au_0 - f, v) + \tau^2(Av, v) \geqslant 0.$$

Второй член неравенства положителен при любых v и τ. При произвольном $v \in D_A$, для которого $(Au_0 - f, v) \neq 0$, можно подобрать такое $\tau = -(Au_0 - f, v)$, чтобы $2\tau(Au_0 - f, v)$ было меньше нуля. Перемасштабированием τ можно добиться нарушения неравенства, поэтому для его справедливости необходимо выполнение равенства $(Au_0 - f, v)$ при $\forall\, v \in D_A$ — плотном в H, так что

$$Au_0 - f = \vec{0}.$$

Функционал (3.2) называется функционалом энергии, а теорема **??** – теоремой о функционале энергии. Она утверждает эквивалентность задачи о решении уравнения (3.1) и задачи об отыскании минимума функционала энергии (3.2). При этом предполагается существование элемента $u_0 \in H$, удовлетворяющего уравнению (3.1) или минимизирующего функционала (3.2). При этом открытыми остаются проблема существования такого элемента u_0 и проблема построения приближенного или точного решения (3.1).

Эти проблемы могут быть решены лишь в предположении о строгой положительности оператора A.

Дело в том, что оператор A может оказаться заданным на недостаточно широком линеале D_A. В этом случае задача минимизации функционала (3.2) может не иметь решения (как в случае с принципом Дирихле). Однако этот минимум может найтись, если D_A и A расширить должным образом (как это сделал Гильберт в случае с принципом Дирихле). Такие расширения существуют для строго положительного оператора A.

Воспользуемся результатами второго раздела для рассмотрения функционала (3.2). Прежде всего, для любого $u \in D_A$ справедливо

$$(Au, u) = (u, u)_A.$$

Далее для любых $f \in H$ и $u \in H_A$ скалярное произведение (f, u) удовлетворяет неравенству

$$(f, u) \leqslant \|f\| \cdot \|u\| \,.$$

Из строгой положительности оператора A следует неравенство

$$\|u\| \leqslant \|u\|_A/\gamma.$$

Поэтому

$$(f,u) \leqslant \|f\| \cdot \|u\|_A/\gamma,$$

т.е. (f,u) — ограниченный на H_A функционал.

Следовательно (по теореме Рисса), существует такой элемент $u_0 \in H_A$, что выполняется равенство

$$(f,u) \equiv (u_0,u)_A \quad \text{для} \quad \forall\ u \in H_A. \tag{3.5}$$

Теперь функционал (3.2) можно переписать в виде

$$F(u) = (u,u)_A - 2(u_0,u)_A. \tag{3.6}$$

До сих пор функционал (3.6) был определен на D_A. Однако первая часть определена на всем энергетическом пространстве H_A (строго положительного оператора A), следовательно, функционал (3.6) можно продолжить (расширить) до функционала $\tilde{F}$, заданного на всем H_A,

$$\tilde{F}(u) = (u,u)_A - 2(u_0,u)_A. \tag{3.7}$$

Обобщенная вариационная задача состоит в отыскании элемента из H_A, минимизирующего функционал (3.6). Этот функционал можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u) &= (u-u_0,u)_A - (u,u_0)_A + (u_0,u_0)_A + (u_0,u_0)_A = \\ &= (u-u_0,u)_A - (u-u_0,u_0)_A - (u_0,u_0)_A = (u-u_0,u-u_0)_A - (u_0,u_0)_A = \\ &= \|u-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Второй член этого выражения — постоянный, следовательно, мы ищем минимум выражения $\|u-u_0\|_A^2$, которое неотрицательно и обращается в нуль при $u = u_0$. Так что минимум функционала

$$\tilde{F}(u) = \|u-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \tag{3.9}$$

достигается при $u = u_0$ и равен

$$\tilde{F}_{min}(u) = F(u_0) = -\|u_0\|_A^2.$$

Элемент $u_0 \in H_A$ называется обобщенным решением уравнения (3.1).

Замечание 3.1. Соотношение (3.5) однозначно определяет решение u_0 задачи (3.1), однако практической ценности не имеет. Конструктивным способом построения u_0 или его приближения является минимизация функционала $\tilde{F}$ на H_A (или на D_A).

Определение 1. Последовательность $u_1, \ u_2, ..., u_n, ... \in H_A$ называется минимизирующей для функционала (3.9), если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{F}(u_n) = \tilde{F}_{min}(u) = \tilde{F}(u_0) = -\left\| u_0 \right\|_A^2 .$$

Теорема 3.3. *Если оператор A строго положителен и последовательность $u_1, ..., u_n, ...$ является минимизирующей для функционала (3.9), то эта последовательность сходится к обобщенному решению уравнения (3.1) в пространстве H_A.*

Доказательство. Предел последовательности чисел $\tilde{F}(u_n) = \left\| u_n - u_0 \right\|_A^2 - \left\| u_0 \right\|_A^2$ равен $-\left\| u_0 \right\|_A^2$, следовательно, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| u_n - u_0 \right\|_A^2 = 0$. А это значит, что u_n сходится к u_0 в H_A по определению. □

Теорема 3.3 лежит в основе многих методов. А именно, для функционала (3.9) строится минимизирующая последовательность. Она сходится к обобщенному решению u_0 и каждый член последовательности u_n представляет собой приближенное решение уравнения (3.1).

Одним из способов построения минимизирующей последовательности является следующий.

Пусть H — сепарабельное пространство, тогда H_A также сепарабельно и в H_A существует полная ортонормированная система векторов (функций) w_n.

Разложим обобщенное решение u_0 в ряд по w_n

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, w_k)_A w_k. \tag{3.10}$$

Согласно (3.5) $(u_0, w_k)_A = (f, w_k)$, так что

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, w_k) w_k. \tag{3.11}$$

Ряды (3.10) и (3.11) ортогональны в H_A, но не обязательно в H. Оба ряда сходятся в H_A (в силу полноты системы векторов) и в H в силу оценки

$$\left\| u_0 - u_n \right\| \leqslant \frac{1}{\gamma} \left\| u_0 - u_n \right\|_A \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

где $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (f, w_k) w_k$ — частные суммы ряда, образующие минимизирующую последовательность. Крупным недостатком этого метода является «плохая обусловленность» (накопление больших ошибок в процессе вычисления на ЭВМ) процессов ортогонализации и работы с ортогональными матрицами.

Наиболее распространенным методом построения минимизирующей последовательности является метод Ритца.

Глава 4. Метод Ритца

Пусть A — строго положительный оператор в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H, H_A — его энергетическое пространство (также сепарабельное). Пусть элементы

$$\varphi_1,\ \varphi_2, ...,\ \varphi_n, ... \tag{4.1}$$

образуют базис в H_A (не обязательно ортонормированный).

Систему (4.1) назовем координатной (следуя Ритцу), а элементы φ_k — координатами.

Построим линейную комбинацию

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{4.2}$$

первых n координатных элементов (функций) с неопределенными вещественными коэффициентами $a_1,\ a_2, ...,\ a_n$. Подставим u_n (4.2) в функционал (3.6), при этом $\tilde{F}(u_k)$ становится функцией $\Phi(a_1, ..., a_n)$ переменных $(a_1, ...,\ a_n)$:

$$F(u_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k, \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j) - 2(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, f) =$$

$$= \Phi(\vec{a}) = \sum_{k,j=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_j) a_k a_j - 2\sum_{k=1}^{n} a_k (\varphi_k, f). \tag{4.3}$$

Выберем коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы функционал (4.3) принял минимальное значение в классе функций u_n с произвольными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$ (n фиксировано). Иными словами, выберем переменные $(a_1, \ldots, a_n) \equiv \vec{a}$, минимизирующие функцию (4.3). Как известно, это приводит к системе линейных алгебраических уравнений с неизвестными $(a_1, \ldots, a_n)$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0. \tag{4.4}$$

Производные легко вычисляются:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = 2\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_j) a_k - 2(f, \varphi_j),$$

поэтому систему (4.4) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}(A\varphi_k,\varphi_j)a_k=(f,\varphi_j),\quad j=\overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Система (4.5) называется системой Ритца.

Более строго следовало бы записать

$$\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k,\varphi_j)_A a_k=(u_0,\varphi_j)_A, \tag{4.6}$$

а форма (4.6) справедлива, если $\varphi_j\in D_A$.

Определитель системы (4.5) или (4.6) является определителем Грамма линейно независимой конечной системы функций $\varphi_1,...,\varphi_n$, поэтому он отличен от нуля. Следовательно, система (4.5) или система (4.6) уравнений Ритца всегда разрешима.

Разрешив систему Ритца относительно $a_1,...,\ a_n$ и подставив найденное решение в (4.2), получим элемент u_n, который будем называть приближенным по Ритцу решением уравнения (3.1).

Теорема 4.1. *Приближенные по Ритцу решения u_n уравнения (3.1) сходятся к точному обобщенному решению u_0 этого уравнения в норме энергетического пространства H_A (а также в норме исходного пространства H).*

Доказательство. Заменим элементы $\varphi_1,...,\varphi_n$ новыми элементами

$$\begin{aligned}&\psi_1=a_{11}\varphi_1,\\&\psi_2=a_{21}\varphi_1+a_{22}\varphi_2,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&\psi_n=a_{n1}\varphi_1+...+a_{nn}\varphi_n,\end{aligned} \tag{4.7}$$

в которых все коэффициенты a_{kj} отличны от нуля (тогда элементы $\psi_1,...,\psi_n$ также образуют базис в H_A). Записывая элемент u_n в виде

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k$$

и в виде

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}b_k\psi_k,$$

получаем соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \psi_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{k} a_{kj} \varphi_j = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m \sum_{k=m}^{n} a_{km} b_k.$$

Так что вместо разложения (4.2) можно воспользоваться разложением u_n по ортонормированному базису $\psi_1, ..., \psi_n, ...$, задаваемому соотношениями (ортогонализации) (4.7). При этом система Ритца принимает вид (в силе ортонормированности ψ_j)

$$a_j = (f, \psi_j), \quad j = \overline{1, n},$$

так что

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (f, \psi_k) \cdot \psi_k,$$

т.е. приближенное по Ритцу решение u_n есть частная сумма ряда (3.10), который сходится к точному обобщенному решению

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) \cdot \psi_k$$

в энергетической норме (а значит и в норме исходного пространства). □

Таким образом, последовательность приближенных по Ритцу решений уравнения (3.1) является минимизирующей для функционала (3.9). Решение u_n тем ближе по норме H_A к точному u_0, чем больше число членов n в (4.2). Для достижения высокой точности нужно работать с большим числом уравнений в системе Ритца, что приводит к накоплению больших ошибок при работе на ЭВМ.

С этой проблемой можно справиться при удачном выборе координатной системы, когда небольшого числа координатных функций оказывается достаточно для достижения высокой точности приближения решением Ритца точного решения. Однако удачный выбор координатной системы является результатом хорошего знания предметной стороны задачи и скорее искусства, чем образованности исследователя.

Глава 5. Метод наименьших квадратов. Метод Куранта. Метод наискорейшего спуска

А. Метод наименьших квадратов.

Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H, определенный на плотном линейном подпространстве D_A. Для нахождения приближенного решения u_n уравнения

$$Au - f = \vec{0}, \quad f \in H \tag{5.1}$$

может быть использован метод наименьших квадратов, заключающийся в следующем. Для любого набора линейно независимых координатных элементов $\varphi_1,\ \varphi_2, ...,\ \varphi_n, ... \in D_A$ приближенное решение u_n ищем в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k. \tag{5.2}$$

При этом коэффициенты $a_1, ..., a_n$ определяются из условия

$$\|Au_n - f\|_H^2 \underset{\bar{a}}{\longrightarrow} \min. \tag{5.3}$$

Последовательность $\varphi_1,\ \varphi_2, ...,\ \varphi_n, ...$ называется A-полной, если для произвольных $u \in D_A$ и $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что выполняется условие

$$\left\| Au - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A\varphi_k \right\|_H^< \varepsilon$$

при некотором наборе коэффициентов $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n ...$.

Замечание 5.1. Если последовательность $\varphi_1,\ \varphi_2, ...,\ \varphi_n, ...$ полна в H и A — ограничен; то $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} - A$ — полная система в H.

Доказательство. Если $\{\varphi_k\}$ — полна в H, то для любого $\varepsilon/\|A\|$ существует такой вектор

$$u: \ \left\| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\| \leqslant (\varepsilon/\|A\|).$$

Тогда

$$\left\| Au - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A\varphi_k \right\|_H^{\leqslant} \|A\| \cdot \left\| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Из условия (5.3) вытекает система линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \left\| Au_n - f \right\|^2}{\partial \alpha_1} = 0, ..., \frac{\partial \left\| Au_n - f \right\|^2}{\partial \alpha_n} = 0. \tag{5.4}$$

Эта система уравнений имеет конкретный вид

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (A\varphi_k, A\varphi_m) = (f, A\varphi_m), \quad m = \overline{1, n} \tag{5.5}$$

При этом определитель матрицы $[(A\varphi_k, A\varphi_m)]$ есть определитель Грамма элементов $A_{\varphi_1}, A_{\varphi_2}, ..., A_{\varphi_n}$, который отличен от нуля в случае A-полноты системы $\{\varphi_k\}$. □

Лемма 1. *Если уравнение*

$$Au = 0 \tag{5.6}$$

имеет только тривиальное решение и система $\{\varphi_k\}$ — A-полна, то приближенные решения системы (5.1) по методу наименьших квадратов (решение системы (5.5)) существует при $\forall\, u > 0$ и единственны.

Лемма 2. *Последовательность приближенных решений системы (5.5), полученных методом наименьших квадратов, сходятся к точному решению системы (5.1), если:*

A. $\{\varphi\}$ — A-полная система,

B. Уравнение (5.1) разрешимо.

C. Существует такая константа C, что для любого $u \in D_A$ справедлива оценка

$$\|u\| \leqslant C \|Au\| .$$

Теорема 5.1. *Пусть A — строго положительный оператор в гильбертовом пространстве H, определенный на плотном линейном подпространстве D_A. Пусть система $\{\varphi_k\}$ образует базис в H. Тогда последовательность элементов (5.2), определяемая системой линейных алгебраических уравнений (5.4) или (5.5), сходится в H_A (а также в H) к обобщенному решению уравнения (5.1).*

Доказательство. Для любого положительного (а значит, и строго положительного) оператора A существует положительный (строго положительный) оператор B, являющийся корнем квадратным из A, то есть $BB = B^2 = A$. Тогда уравнение (5.1) можно записать в виде

$$B^2 u = f, \tag{5.7}$$

причем из ограниченности A^{-1} следует ограниченность оператора $B^{-1} = A^{-1/2}$, так что

$$Bu = B^{-1}f. \tag{5.8}$$

Для уравнения (5.8) применяем метод наименьших квадратов

$$\left\|Bu - B^{-1}f\right\|^2 \underset{u}{\longrightarrow} \min, \tag{5.9}$$

из которого следует равенство

$$B^T Bu - B^T B^{-1} f = 0,$$

эквивалентное равенству

$$Au - f = 0, \tag{5.10}$$

так как $B^T = B$. Следовательно, МНК (в случае строго положительного оператора A) для оператора $B = A^{1/2}$ эквивалентен методу Ритца для строго положительного оператора $A = B^2$. □

Замечание 5.2. В метрике пространства H метод наименьших квадратов сходится медленнее, чем метод Ритца (так как $A = B^2$).

<u>В.</u> Метод Куранта.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Au - f = \vec{0} \tag{5.11}$$

и требуется найти его решение в области $\Omega \leqslant R^N$, удовлетворяющее на границе $\partial\Omega$ некоторым однородным условиям. Пусть A — строго положителен на множестве D_A функций, удовлетворяющих указанным граничным условиям. Решение (5.11) минимизирует функционал

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \tag{5.12}$$

Если при этом функция f имеет частные производные порядка до n включительно, и то же известно про функцию Au, то имеет смысл функционал

$$\Phi(u) = F(u) + \sum_{j=0}^{n} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=j} \left\| \frac{\partial^j (Au - f)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|^2. \tag{5.13}$$

Для функционала (5.13) справедлива оценка $\Phi(u) \geqslant F(u)$.

С другой стороны, если $F(u_0) = \min\limits_u F(u)$, то $\dfrac{\partial^{\alpha_i}(Au_0 - f)}{\partial x_i^{\alpha_i}} = 0$, так что $\Phi(u_0) = \min\limits_u \Phi(u)$.

Следовательно, можно искать минимум функционала (5.13) для решения задачи (5.11). При этом минимизирующая последовательность для функционала (5.13) сходится к точному решению (5.11) (минимуму функционала (5.13)) в метрике пространства $W_2^n(\Omega)$, то есть вместе со своими производными до n-го порядка включительно.

C. Метод наискорейшего спуска.

Метод применим для строго положительных ограниченных операторов A, то есть для операторов, удовлетворяющих оценкам

$$m\left\|u\right\|^2 \leqslant (Au, u) \leqslant M\left\|u\right\|^2, \tag{5.14}$$

где $m \geqslant 0$ и $M \geqslant 0$ — константы.

Дифференциальные операторы в этот класс не входят. Типичным примером уравнений, для решения которых данный метод предпочтителен, являются интегральные уравнения.

Так как A — строго положителен в H, то существует u_0 — обобщенное решение уравнения (5.1), минимизирующее функционал

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f).$$

Если $u \neq u_0$, то $F(u) > F(u_0)$, и желая быстрее достичь u_0, отправляясь из u, следует выбрать $\frac{\partial F}{\partial u} \underset{u}{\longrightarrow}$ max, т.е.

$$\left.\frac{d}{d\tau}F(u+\tau v)\right|_{\tau=0} = \max,$$

$$\left.\frac{d}{d\tau}F(u+\tau v)\right|_{\tau=0} = 2(Au - f, v) + 2f(Av, v)$$

откуда следует

$$v = Au - f.$$

При этом функционал $F(u+\tau v)$ принимает минимальное значение на прямой $u+\tau v$ при

$$\tau = -\frac{(Au-f, v)}{(Av, v)} = -\frac{(v, v)}{(Av, v)}.$$

Возьмем произвольную u_1. Если $Au_1 = f$, то задача решена. Если же $Au_1 - f \neq \vec{0}$, то будем считать u_1 за первое приближение к u_0. Для построения u_2 положим $v_1 = Au_1 - f$ и выберем τ так, чтобы $F(u_1 + \tau v_1)$ принял наименьшее значение

$$F(u_1 + \tau v_1) = F(u_1) - 2\tau\{(Au_1, v_1) - (f, v_1)\} + \tau^2(Av_1, v_1).$$

Приравниваем нулю производную по τ этого выражения

$$\tau(Av_1, v) - \{(Au_1, v_1) - (f, v_1)\} = 0.$$

Но так как

$$(Au_1, v_1) - (f, v_1) = (Au_1 - f, v_1) = (v_1, v_1) = \|v_1\|^2,$$

то

$$\tau(Av_1, v_1) - (v_1, v_1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{(v_1, v_1)}{(Av_1, v_1)}.$$

Продолжая процесс, получим

$$u_2 = u_1 - \tau v_1$$

и т.д.

Скорость сходимости метода наискорейшего спуска оценивается неравенством

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant \|u_1 - u_0\| \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^n.$$

Учебно-методический комплекс

ПРОГРАММА

Наименование дисциплины **Вариационные методы в математическом моделировании**

Рекомендуется для направления

01.04.02 — Прикладная математика и информатика

магистерская программа: Теория вероятностей и математическая статистика

(указываются код и наименования направления(ий)

подготовки (специальности (ей) и/или профилей (специализаций)

Квалификация (степень) выпускника ____магистр______________

1. Цели и задачи дисциплины:

Целью дисциплины является овладение современным математическим аппаратом вариационных методов и навыками применения их в математическом моделировании.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Цикл, к которому относится дисциплина: Б1. дисциплины (модули), вариативная часть, обязательные дисциплины.

Требования к входным знаниям, умениям и компетенциям студента:

Требуется пройти обучение по дисциплинам: математический анализ, фундаментальная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальные уравнения, функциональный анализ

Знать:

- Основные понятия математического анализа: функция многих переменных, вектор-функция, частные производные функции многих переменных, матрица и определитель Якоби, основы векторного анализа.
- Основные понятия алгебры: группа, линейное пространство, аффинное пространство, евклидово пространство, базис евклидова пространства, ортогональность и ортонормированость векторов, матрица Грама, билинейные и квадратичные формы.
- Основные понятия аналитической геометрии: уравнение прямой, плоскости, касательной, нормали, конических сечений.
- Основные понятия функционального анализа: банахово пространство, гильбертово пространство, функционалы на гильбертовых пространствах, теорема Риса-Фишера, неравенство Бесселя, неравенство Коши-Буняковского.

Владеть:

- Аппаратом математического анализа.
- Аппаратом общей и линейной алгебры.

Дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей: *Т*ехнологии вычислительного эксперимента

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОК-1, ОПК-3, ПК-2

(указываются в соответствии с ОС ВО РУДН)

ОК-1 — способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу;

ОПК-1 — готовность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач профессиональной деятельности;

ПК-2 — способность разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- основные понятия, обозначения и методы вариационных методов;
- формулировки утверждений и методы их доказательства;
- корректные постановки классических задач вариационных методов;
- основные области приложения вариационных методов.

Уметь:

- решать задачи прикладного характера используя вариационные методы;
- уметь грамотно пользоваться языком предметной области,
- ориентироваться в постановках классических задач вариационных методов,
- ориентироваться в разделах вариационных методов и уметь анализировать и синтезировать информацию по данному предмету, полученную из разных источников.

Владеть:

- математическим аппаратом вариационных методов,
- умением видеть прикладной аспект в решении задач вариационных методов,
- методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц.

№	**Вид учебной работы**	**Всего часов**	**Семестры**
			2
1.	**Аудиторные занятия (всего)**	**54**	**54**
2.	В том числе:		
2.1.	Лекции	18	18
2.2.	Прочие занятия	36	36
3.	*В том числе:*		
3.1.1.	*Практические занятия (ПЗ)*	36	36

3.1.2.	*Семинары (С)*	-	-
3.1.3.	*Лабораторные работы (ЛР)*	-	-
4.	**Из них в интерактивной форме (ИФ):**	18	18
5.	**Самостоятельная работа студентов (ак. часов)**	**54**	**54**
6.	*В том числе:*		
6.1.	Курсовой проект (работа)	-	-
6.2.	Расчетно-графические работы	-	-
6.3.	Реферат	-	-
6.4.	Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	27	27
6.5.	*Другие виды самостоятельной работы:*		
6.5.1.	Самостоятельная проработка дополнительных материалов по дисциплине	27	27
6.5.2.	Выполнение домашних работ		
7.	**Общая трудоемкость (ак.часов)**	**108**	**108**
8.	**Общая трудоемкость (зачетных единиц)**	**3**	**3**

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	**Наименование раздела дисциплины**	**Содержание раздела**
1	Энергетический метод для положительных операторов	Описание Энергетического метода для положительных операторов. Примеры применения метода для решения задач.
2	Метод Ритца	Описание метода Ритца. Примеры применения для решения задач.
3	Метод наименьших квадратов.	Описание метода наименьших квадратов. Примеры применения для решения задач.

4	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	Описание методов Куранта и наискорейшего спуска. Примеры применения для решения задач.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин			
		1	**2**	**3**	**4**
1.	Технологии вычислительного эксперимента	+	+	+	-

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции	Практические занятия и лабораторные работы		СРС	Всего час.
			ПЗ/С	Из них в ИФ		
1.	Энергетический метод для положительных операторов	8	4	4	13	25
2.	Метод Ритца	8	4	4	13	25
3.	Метод наименьших квадратов.	10	5	5	14	29
4.	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	10	5	5	14	29
	Итого:	**36**	**18**	**18**	**54**	**108**

5.4. Разделы дисциплин и виды интерактивных занятий

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тема интерактивного занятия	Вид занятия	Трудоемкость (час.)
1.	1	Энергетический метод для положительных операторов	Учебная дискуссия. Решение задач совместно с учащимися.	4

2.	2	Метод Ритца	Учебная дискуссия. Решение задач совместно с учащимися.	4
3.	3	Метод наименьших квадратов.	Учебная дискуссия. Решение задач совместно с учащимися.	5
4.	4	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	Учебная дискуссия. Решение задач совместно с учащимися.	5

6. Лабораторный практикум

Лабораторный практикум не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тема семинарского занятия	Трудоемкость (час.)
1.	1	Энергетический метод для положительных операторов	4
2.	2	Метод Ритца	4
3.	3	Метод наименьших квадратов.	5
4.	4	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	5
	Итого:		18

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ)

Курсовые работы не предусмотрены

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с. — ISBN 5-9221-0120-X
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 488 с.
3. Соболев С.Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988 — С. 336.

б) дополнительная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с. — ISBN 5-9221-0266-4
2. Фридман А. Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990 — 536 с.

в) программное обеспечение:
не требуется
г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:
не требуются

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, корп. 4. Лекционные ауд. 260, 261,400, 485, 497, 495а. Ауд. для проведения семинарских занятий 385, 387, 389, 395, 397, 398. Графическая доска, раздаточный материал.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Учебным планом на изучение дисциплины отводится один семестр. Промежуточный контроль знаний предусматривает: проведение контроля знаний (контрольных работ, контрольной самостоятельной работы) в середине семестра, подготовку и сдачу домашних работ.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН

учебных занятий по дисциплине «Вариационные методы в математическом моделировании»

Трудоемкость — 3 зачетные единицы, лекций — 1 часа в неделю, практических занятий — 2 часа в неделю, 18 недель.

Аудиторных занятий 36 часов (18 часов лекции, 36 часов практических занятий) Самостоятельная работа студента 54 часа

Виды и содержание учебных занятий				
Неделя	**Лекции**	**Часы**	**Практические занятия**	**Часы**
1	Гильбертовы пространства. Элементы теории гильбертовых пространств.	**1**	Гильбертовы пространства. Элементы теории гильбертовых пространств.	**2**
2	Гильбертовы пространства. Элементы теории гильбертовых пространств.	**1**	Гильбертовы пространства. Элементы теории гильбертовых пространств.	**2**
3	Положительные и строго положительные операторы	**1**	Положительные и строго положительные операторы	**2**
4	Положительные и строго положительные операторы.	**1**	Положительные и строго положительные операторы.	**2**
5	Энергетическое пространство.	**1**	Энергетическое пространство.	**2**
6	Энергетический метод для положительных операторов	**1**	Энергетический метод для положительных операторов	**2**
7	Энергетический метод для положительных операторов	**1**	Энергетический метод для положительных операторов	**2**
8	Энергетический метод для положительных операторов	**1**	Энергетический метод для положительных операторов	**2**
9	Метод Ритца	**1**	Метод Ритца	**2**
10	Метод Ритца	**1**	Метод Ритца	**2**
11	Метод Ритца	**1**	Метод Ритца	**2**

12	Метод наименьших квадратов.	**1**	Метод наименьших квадратов.	**2**
13	Метод наименьших квадратов.	**1**	Метод наименьших квадратов.	**2**
14	Метод наименьших квадратов.	**1**	Метод наименьших квадратов.	**2**
15	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	**1**	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	**2**
16	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	**1**	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	**2**
17	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	**1**	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	**2**
18	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	**1**	Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска	**2**
Итого		**18**		**36**

Рейтинговая система оценки знаний студентов

по дисциплине «Вариационные методы в математическом моделировании»

Сводная оценочная таблица дисциплины

<table>
<tr><th rowspan="2">Раздел</th><th rowspan="2">Тема</th><th colspan="2">Формы контроля уровня освоения ООП</th><th rowspan="2">Баллы темы</th><th rowspan="2">Баллы раздела</th></tr>
<tr><th>Контрольная работа</th><th>Домашняя работа</th></tr>
<tr><td colspan="2">Энергетический метод для положительных операторов</td><td>15</td><td>10</td><td colspan="2">25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Метод Ритца</td><td>15</td><td>10</td><td colspan="2">25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Метод наименьших квадратов.</td><td>15</td><td>10</td><td colspan="2">25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Метод Куранта, Метод наискорейшего спуска</td><td>15</td><td>10</td><td colspan="2">25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Итого:</td><td>60</td><td>40</td><td colspan="2">100</td></tr>
</table>

Таблица соответствия баллов и оценок

<table>
<tr><th>Баллы БРС</th><th>Традиционные оценки РФ</th><th>Оценки ECTS</th></tr>
<tr><td>95 - 100</td><td rowspan="2">5</td><td>A</td></tr>
<tr><td>86 - 94</td><td>B</td></tr>
<tr><td>69 - 85</td><td>4</td><td>C</td></tr>
<tr><td>61 - 68</td><td rowspan="2">3</td><td>D</td></tr>
<tr><td>51 - 60</td><td>E</td></tr>
<tr><td>31 - 50</td><td rowspan="2">2</td><td>FX</td></tr>
<tr><td>0 - 30</td><td>F</td></tr>
<tr><td>51-100</td><td>Зачет</td><td>Passed</td></tr>
</table>

Правила применения БРС

1. Раздел (тема) учебной дисциплины считаются освоенными, если студент набрал более 50 % от возможного числа баллов по этому разделу (теме).
2. Студент не может быть аттестован по дисциплине, если он не освоил все темы и разделы дисциплины, указанные в сводной оценочной таблице дисциплины.
3. По решению преподавателя и с согласия студентов, не освоивших отдельные разделы (темы) изучаемой дисциплины, в течение учебного семестра могут быть повторно проведены мероприятия текущего контроля успеваемости или выданы дополнительные учебные задания по этим темам или разделам. При этом студентам за данную работу засчитывается минимально возможный положительный балл (51 % от максимального балла).
4. При выполнении студентом дополнительных учебных заданий или повторного прохождения мероприятий текущего контроля полученные им баллы засчитываются за конкретные темы. Итоговая сумма баллов не может превышать максимального количества баллов, установленного по данным темам (в соответствии с приказом Ректора № 564 от 20.06.2013). По решению преподавателя предыдущие баллы, полученные студентом по учебным заданиям, могут быть аннулированы.
5. График проведения мероприятий текущего контроля успеваемости формируется в соответствии с календарным планом курса. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
6. Время, которое отводится студенту на выполнение мероприятий текущего контроля успеваемости, устанавливается преподавателем. По завершение отведенного времени студент должен сдать работу преподавателю, вне зависимости от того, завершена она или нет.
7. Использование источников (в том числе конспектов лекций и материалов семинаров) во время выполнения контрольных мероприятий возможно только с разрешения преподавателя.
8. Отсрочка в прохождении мероприятий текущего контроля успеваемости считается уважительной только в случае болезни студента, что подтверждается наличием у него медицинской справки, заверенной круглой печатью в поликлинике № 25, предоставляемой преподавателю не позднее двух недель после

выздоровления. В этом случае выполнение контрольных мероприятий осуществляется после выздоровления студента в срок, назначенный преподавателем. В противном случае, отсутствие студента на контрольном мероприятии признается не уважительным.

9. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и студент должен повторить эту дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил 31-50 баллов, т. е. FX, то студенту разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путем повторного одноразового выполнения предусмотренных контрольных мероприятий, при этом по усмотрению преподавателя аннулируются соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.

Сведения об авторах

Севастьянов Леонид Антонович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

Кулябов Дмитрий Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

Учебное издание

Дмитрий Сергеевич Кулябов,
Леонид Антонович Севастьянов

Численная реализация вариационных методов

Тематический план изданий учебной и научной литературы

Технический редактор *Н. А. Ясько*
Компьютерная вёрстка *А. В. Королькова*, *Д. С. Кулябов*

Подписано в печать .2015 г. Формат 60×84/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. . Тираж экз. Заказ №

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41