ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ»
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А.А. ДОРОДНИЦЫНА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

Материалы международной конференции
Москва, 29 июня – 2 июля 2016

COMPUTER
ALGEBRA

INTERNATIONAL
CONFERENCE
MOSCOW

2016

ВЦ РАН

МОСКВА

ISBN 978-5-91993-061-7

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ»
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А. А. ДОРОДНИЦЫНА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

COMPUTER ALGEBRA

Материалы международной конференции
International Conference Materials

Москва, 29 июня – 2 июля 2016 года
Moscow, June 29 – July 2, 2016

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А. А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МОСКВА 2016

ББК 22.14+22.19

Ответственные редакторы
доктор физ.-матем. наук С. А. Абрамов,
доктор физ.-матем. наук Л. А. Севастьянов

Компьютерная алгебра. Сборник научных статей. Труды международной конференции «Компьютерная алгебра». Москва, 29 июня — 2 июля 2016 г. Под ред. С. А. Абрамова и Л. А. Севастьянова. М.: ФИЦ ИУ РАН, 2016.

Международная конференция проводится совместно Вычислительным центром им. А. А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН и Российским университетом дружбы народов при поддержке РФФИ. В представленных на конференции докладах обсуждаются актуальные проблемы компьютерной алгебры — научной дисциплины, алгоритмы которой ориентированы на точное решение математических задач с помощью компьютера.

Макет и компьютерная верстка: Д. С. Кулябов

Рецензенты: Ю. А. Трусова, К. П. Ловецкий

Научное издание

Responsible editors
Doctor of Physical and Mathematical Sciences S. A. Abramov,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences L. A. Sevastyanov

Computer algebra. A book of scientific articles. Proceedings of the International Conference "Computer Algebra." Moscow, 29 June – 2 July 2016. Ed. S. A. Abramov and L. A. Sevastyanov. Moscow: Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS.

The international conference is organized jointly by Dorodnicyn Computing Center of Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS and Peoples' Friendship University of Russia with a support of Russian Federal Property Fund. The talks presented at the conference discuss actual problems of computer algebra—the discipline whose algorithms are focused on the exact solution of mathematical problems using a computer.

Layout and DTP: D. S. Kulyabov

Reviewers: Yu. O. Trusova, K. P. Lovetskiy

Scientific publication

Оглавление

Пленарные доклады

Сессионные доклады

УДК 514.7:514.8:519.6

Свойства тензорных систем компьютерной алгебры

Д. С. Кулябов[*†], А. В. Королькова[*], Л. А. Севастьянов[*‡]

[*] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,*
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198

[†] *Лаборатория информационных технологий,*
Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

[‡] *Лаборатория теоретической физики,*
Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

Тензорные системы компьютерной алгебры достаточно сильно отличаются от скалярных систем. Кроме того, можно выделить несколько типов тензорных расчетов. На основании этого можно сформулировать критерии, которым должна удовлетворять система компьютерной алгебры для работы с тензорами.

Ключевые слова: системы компьютерной алгебры; тензорные вычисления; компонентный подход; абстрактный подход.

1. Введение

Тензорные вычисления используются во многих областях физики. Следует заметить, что во всей своей мощи формализм тензорного анализа проявляется не во всех областях, достаточно часто используют его упрощенные варианты.

Каждая тензорная операция сама по себе достаточно проста. Однако даже при стандартных вычислениях приходится выполнять множество элементарных операций. А каждая тензорная операция является более громоздкой, чем соответствующая скалярная [1]. Именно поэтому в этой области крайне высок спрос на системы компьютерной алгебры [2].

2. Операции для тензорных систем компьютерной алгебры

Можно выделить несколько вариантов использования тензорных систем компьютерной алгебры.

Векторное исчисление — простейший вариант тензорного исчисления. Часто используемые операции — построение разнообразных дифференциальных операторов и замена базиса. Наиболее распространенные операторы: градиент, дивергенция, ротор (специфична для трехмерного пространства). Следует заметить, что в векторных вычислениях также часто используется специальный неголономный базис, позволяющий не различать контравариантные и ковариантные вектора, а также сохранять размерность при замене координат [3, 4].

Специальным случаем тензорных объектов являются спиноры. В частности спиноры являются представлениями группы Лоренца с полуцелым старшим весом. Обычные тензоры являются представлениями с целочисленным старшим весом.

По историческим причинам наиболее часто в исследованиях используются дираковские 4-спиноры, которые применяют для записи уравнений Дирака, описывающих фермионы со спином $\frac{1}{2}$. Обычно для манипуляции с дираковскими спинорами используют γ-матрицы, получаемые из уравнения Клиффорда–Дирака [5].

Общая теория относительности стала первой физической теорией, потребовавшей всю мощь дифференциальной геометрии и тензорных вычислений. В вычислениях возникают громоздкие тензорные конструкции, которые можно упрощать, учитывая симметрии тензоров. Обычно выделяют одноэлементные (monoterm) и многоэлементные (multiterm) симметрии. Одним из основных элементов теории является тензор Римана, обладающий как простейшими одноэлементными, так и сложными многоэлементными симметриями типа тождеств Бьянки.

Можно выделить три типа записи тензоров: компонентная запись, запись с абстрактными индексами и безындексная запись. Каждый тип имеет свою специфику и область применения.

Компонентные индексы, фактически, превращают тензор в набор скалярных величин, применяемых при конкретных расчетах. Обычно оперировать с компонентными индексами есть смысл лишь после упрощения тензорного выражения и учета всех его симметрий.

Безындексную запись часто используют, если исследователя интересует не конечный результат, а симметрии тензоров. Однако эта форма записи страдает недостатком выразительности: тензор рассматривается как целостный объект, соответственно и симметрии возможно рассматривать лишь те, которые относятся к тензору в целом. Для работы с объектами сложной структуры приходится изобретать новые обозначения либо добавлять словесные пояснения.

Абстрактные индексы [6] следует рассматривать как усовершенствование безындексной записи тензора. Абстрактный индекс обозначает лишь принадлежность тензора к определенному пространству, а не следование тензорному правилу преобразования (в отличие от компонентных индексов). В этом случае возможно рассмотрение как симметрий, охватывающих весь тензор (все его индексы), так и симметрий отдельных групп индексов.

3. Заключение

На данный момент фактически отсутствуют системы с полностью удовлетворительной поддержкой тензоров.

Компонентные тензорные вычисления практически не требуют дополнительных возможностей от универсальной системы компьютерной алгебры. Поэтому пакеты, реализующие данный функционал, представлены наиболее широко. Чего нельзя сказать об эффективной работе с абстрактными тензорами.

Благодарности

Работа частично поддержана грантами РФФИ №№ 14-01-00628, 15-07-08795 и 16-07-00556.

Список литературы

1. *Korol'kova A. V., Kulyabov D. S., Sevast'yanov L. A.* Tensor computations in computer algebra systems // *Programming and Computer Software*. — 2013. — May. — Vol. 39, no. 3. — P. 135–142.
2. *Kulyabov D. S.* Using two types of computer algebra systems to solve maxwell optics problems // *Programming and Computer Software*. — 2016. — mar. — Vol. 42, no. 2. — P. 77–83.
3. *Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Korolkov V. I.* Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series «Mathematics. Information Sciences. Physics»*. — 2012. — no. 1. — P. 96–106.
4. *Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Sevastianov L. A.* A Naive Geometrization of Maxwell's Equations // The 15th small triangle meeting of Theoretical Physics. — Stara Lesna, 2013. — P. 104–111.
5. *Cartan E.* The Theory of Spinors. — Paris: Hermann, 1966.
6. *Penrose R., Rindler W.* Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields. — Cambridge University Press, 1987. — Vol. 1. — P. 478.

UDC 514.7:514.8:519.6

The Features of Tensor Computer Algebra Systems

D. S. Kulyabov[*†], A. V. Korolkova[*], L. A. Sevastianov[*‡]

[*] *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia
[†] *Laboratory of Information Technologies*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia
[‡] *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

Tensorial computer algebra systems are quite different from scalar one. Moreover, there are several types of tensor computations. We can formulate the criteria that must be satisfied by a computer algebra system dealing with tensors.

Key words and phrases: computer algebra system; tensor calculation; component approach; abstract approach.