

УДК 519.6, 519.612, 519.651

Обработка данных методом преобразования значений производных функций на сетке в коэффициенты Фурье

Л. А. Севастьянов, М. Г. Кокотчикова, Д. С. Кулябов

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В работе рассмотрены две практические задачи восстановления функции на круге по возмущенным значениям функции и её частных производных на дискретной сетке. Предложены формулировки устойчивого восстановления функции методом регуляризованного разложения в ряд Фурье по полиномам Цернике. Вычисление стабилизирующих функционалов реализованно в модуле для системы компьютерной алгебры Axiom.

Ключевые слова: восстановление функции по дискретному следу, метод регуляризации, аналитические вычисления.

1. Введение

При разработке математической модели процесса экранируемого вакуумного напыления возникла вспомогательная задача: восстановление коэффициентов Фурье функции эффективного распределения источника напыления по измеренным с погрешностью значениям функции на конечной сетке (не определенной заранее) [1, 2].

Математическая модель калибровки оптических поверхностей $z(x, y)$ с помощью теста Гартмана состоит в восстановлении коэффициентов Фурье по полиномам Цернике функции $z(x, y)$ на основании приближенно измеренных частных производных $\partial z/\partial x(x, y)$, $\partial z/\partial y(x, y)$ в точках определенной заранее сетки: диафрагмы Гартмана [3, 4].

Обе задачи являются неустойчивыми ко входным данным. Следовательно, к ним нужно применить метод регуляризации А. Н. Тихонова [5, 6].

1.1. Устойчивое восстановление функции по её следу на сетке

Рассмотрим задачу отыскания вектора коэффициентов Фурье в разложении по полиномам Цернике $\{\varphi_j\}$ на единичном круге Q функции f , значения которой известны лишь в точках некоторой сетки $T_m = \{t_1, \dots, t_m\} \subset Q$.

Полиномы Цернике образуют ортонормированный базис: $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, который задает отображение $F: L_2(Q) \rightarrow l_2$ в гильбертово пространство l_2 :

$$F: L_2(Q) \rightarrow l_2: f \mapsto \left\{ \int_Q f \varphi_j \right\}_{j=1}^{\infty} = \{c_j\}_{j=1}^{\infty}.$$

Измеряются значения f в точках $\{t_j\}$, т. е. оценивается абсолютная величина возмущения функции $|\delta f(t_j)| = |\tilde{f}(t_j) - f(t_j)|$. Этому соответствует метрика ρ_c : $\rho_c(\tilde{f}, f) = \max_{t \in Q} |\tilde{f}(t) - f(t)|$ в пространстве $C(Q)$ непрерывных на круге Q функций. Решать надо обратную задачу относительно отображения $A: l_2 \rightarrow C(Q): \{c_j\} \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(q)$.

Статья поступила в редакцию 25 октября 2008 г.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ №07-01-00738а, №08-01-00800а.

Данная задача эквивалентна задаче с оператором $\tilde{A} : L_2 \rightarrow C(Q)$. В силу компактности вложения $W_2^2(Q) \subset C(Q)$ [7], регуляризация последней задачи достигается сужением \tilde{A} на компакт $F_\delta = \{f \in L_2(Q) : \|f\|_{W_2^2} \leq \delta\}$.

1.2. Устойчивое восстановление функции по следу её градиента на сетке

В задачах обработки гартманограмм результатом наблюдения является вектор приближенных значений частных производных в конечном наборе точек апертюры T_m [3, 4]. Рассматриваемые нами функции являются один раз непрерывно дифференцируемыми $f \in C^1(Q) \subset W_2^1(Q)$. Полиномы Цернике образуют полный набор функций в $W_2^1(Q)$, а отображение $F(\sum a_j \varphi_j(q)) = \{a_j\}_1^\infty$ на W_2^1 индуцирует отображение $DF(\sum a_j \varphi_j(q)) = \left\{ \sum_k \gamma_{jk}^x a_k, \sum_k \gamma_{jk}^y a_k \right\} \subset l_2 \oplus l_2$.

Рассматривается отображение $D : C^1(Q) \rightarrow C(Q) \oplus C(Q)$, где $D(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, так как требуется оценка её частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в метрике пространства непрерывных функций:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{C(Q)} = \max_{q \in Q} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(q) \right|, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|_{C(Q)} = \max_{q \in Q} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(q) \right|.$$

Задача восстановления выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \max_{q \in Q} \left| \sum_j a_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(q) - \frac{\partial f}{\partial x}(q) \right| \rightarrow \min, \\ \max_{q \in Q} \left| \sum_j a_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(q) - \frac{\partial f}{\partial y}(q) \right| \rightarrow \min. \end{cases}$$

Таким образом, требуется для линейного оператора $B : l_2 \rightarrow C(Q) : \oplus C(Q)$

$$B(\vec{a}) = \left(\sum_j a_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \sum_j a_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right)$$

решить обратную задачу

$$B\vec{a} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

с учётом того факта, что вектор $\vec{a} \in w_2^1$ обеспечивает принадлежность $\sum a_j \varphi_j(q) \in C^1(Q)$. Метод регуляризации А. Н. Тихонова требует сужения отображения B на компакт [5, 6]. Воспользуемся компактностью вложения [7] $W_2^3(Q) \subset C^1(Q)$ и зададим компактное множество G_δ следующим образом:

$$G_\delta = \{f \in C^1 : \|f\|_{W_2^3} \leq \delta\}.$$

2. Необходимые сведения

Дифференцирование функции $f = \sum_{j=1}^{k(l)} a_j \varphi_j$ либо в полярных, либо в декартовых координатах понижает степень полиномиальной функции на единицу. Поэтому $\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=1}^{k(l-1)} b_j \varphi_j$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{j=1}^{k(l-1)} c_j \varphi_j$, то же самое можно сказать и про $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$. Здесь $k(l) = (l+1)(l+2)/2$ [8].

В частности, это относится к частным производным самих полиномов Цернике

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \sum_{j < 1} \gamma_{jk}^x \varphi_k; \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = \sum_{j < 1} \gamma_{jk}^y \varphi_k. \quad (1)$$

Матрицы $\{\gamma_{jk}^x\}$ и $\{\gamma_{jk}^y\}$ являются треугольными и могут быть построены по формулам

$$\gamma_{jk}^x = \int_Q \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dx dy; \quad \gamma_{jk}^y = \int_Q \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} dx dy. \quad (2)$$

Норма в пространстве $W_2^3(Q)$ задаётся соотношением

$$\begin{aligned} \|f\|_{W_2^0}^2 = \int_Q & \left\{ |f(q)|^2 + \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(q) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(q) \right|^2 \right) + \right. \\ & + \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q) \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q) \right|^2 \right) + \\ & \left. + \frac{1}{6} \left(\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(q) \right|^2 + 3 \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(q) \right|^2 + 3 \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(q) \right|^2 + \left| \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(q) \right|^2 \right) \right\} dq \end{aligned}$$

и индуцирует для функции $f(q) = \sum a_j \varphi_j(q)$ норму в пространстве w_2^3 числовых последовательностей, вычисляемую с помощью треугольных матриц γ_x и γ_y дифференцирования полиномов Фурье. А именно, первые производные имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(q) = \sum b_j^x \varphi_j(q), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(q) = \sum b_j^y \varphi_j(q),$$

где

$$b_j^x = \sum_k \gamma_{jk}^x a_k, \quad b_j^y = \sum_k \gamma_{jk}^y a_k.$$

Вторые производные имеют вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sum c_j^{xx} \varphi_j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sum c_j^{xy} \varphi_j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sum c_j^{yy} \varphi_j,$$

где

$$c_j^{xx} = \sum_{j,k} \gamma_{jk}^x \gamma_{kl}^x a_l, \quad c_j^{yy} = \sum_{j,k} \gamma_{jk}^y \gamma_{kl}^y a_l, \quad c_j^{xy} = \sum_{j,k} \gamma_{jk}^x \gamma_{kl}^y a_l = \sum_{j,k} \gamma_{jk}^y \gamma_{kl}^x a_l = c_j^{yx}.$$

Аналогично, третьи производные имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= \sum d_j^x a_j, \quad d_j^x = \sum \gamma_{jk}^x \gamma_{kl}^x \gamma_{lm}^x a_m, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= \sum d_j^{xy} a_j, \quad d_j^{xy} = \sum \gamma_{jk}^x \gamma_{kl}^x \gamma_{lm}^y a_m, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= \sum d_j^{yx} a_j, \quad d_j^{yx} = \sum \gamma_{jk}^y \gamma_{kl}^y \gamma_{lm}^x a_m, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= \sum d_j^y a_j, \quad d_j^y = \sum \gamma_{jk}^y \gamma_{kl}^y \gamma_{lm}^y a_m. \end{aligned}$$

Опираясь на указанные соотношения, сформируем квадратичные формы следующим образом

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij}^0 &= [\delta_{ij}], i, j = 1, \dots, k(l) = (l+1)(l+2)/2, \\
\Omega^1 &= \gamma^x (\gamma^x)^T + \gamma^y (\gamma^y)^T, \\
\Omega^2 &= \gamma^x \gamma^x (\gamma^x \gamma^x)^T + \gamma^y \gamma^y (\gamma^y \gamma^y)^T + (\gamma^x \gamma^y (\gamma^x \gamma^y)^T + \gamma^y \gamma^x (\gamma^y \gamma^x)^T), \\
\Omega^3 &= \gamma^x \gamma^x \gamma^x (\gamma^x \gamma^x \gamma^x)^T + \gamma^y \gamma^y \gamma^y (\gamma^y \gamma^y \gamma^y)^T + \gamma^x \gamma^x \gamma^y (\gamma^x \gamma^x \gamma^y)^T + \\
&\quad + \gamma^x \gamma^y \gamma^x (\gamma^x \gamma^y \gamma^x)^T + \gamma^y \gamma^x \gamma^y (\gamma^y \gamma^x \gamma^y)^T + \gamma^x \gamma^y \gamma^y (\gamma^x \gamma^y \gamma^y)^T + \\
&\quad + \gamma^y \gamma^x \gamma^x (\gamma^y \gamma^x \gamma^x)^T + \gamma^y \gamma^y \gamma^x (\gamma^y \gamma^y \gamma^x)^T.
\end{aligned} \tag{3}$$

С их помощью нормы в пространствах числовых последовательностей $\{a_j\} \equiv \vec{a} \in l_2 = w_2^0$, w_2^1 , w_2^2 и w_2^3 задаются формулами

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}\|_{w_2^0}^2 &= \sum a_j \Omega_{jk}^0 a_k, \quad \|\vec{a}\|_{w_2^1}^2 = \sum_{jk} a_j \Omega_{jk}^1 a_k + \|\vec{a}\|_{w_2^0}^2, \quad \|\vec{a}\|_{w_2^2}^2 = \frac{1}{2} (\Omega^2 \vec{a}, \vec{a}) + \|\vec{a}\|_{w_2^1}^2, \\
\|\vec{a}\|_{w_2^3}^2 &= (\Omega^0 \vec{a}, \vec{a}) + (\Omega^1 \vec{a}, \vec{a}) + \frac{1}{2} (\Omega^2 \vec{a}, \vec{a}) + \frac{1}{6} (\Omega^3 \vec{a}, \vec{a}).
\end{aligned}$$

3. Постановка задачи

3.1. Задача 1. Устойчивое восстановление функции по её следу на сетке

Задача устойчивого восстановления вектора коэффициентов \vec{f} формулируется следующим образом

$$N[\vec{a}, \tilde{f}] = \max_{q \in Q} \left| \sum a_j \varphi_j(q) - \tilde{f}(q) \right| \rightarrow \min_{\vec{a} \in F_\delta}. \tag{4}$$

Задача (4) эквивалентна задаче минимизации сглаживающего функционала

$$M^\alpha[\vec{a}, \tilde{f}] = N[\vec{a}, \tilde{f}] + \alpha \|\vec{a}\|_{w_2^2}^2 \rightarrow \min_{\vec{a}} \tag{5}$$

с параметром α , согласованным с уровнем погрешности δ задания \tilde{f} .

Для любого $\alpha > 0$ существует единственный вектор \vec{a}_α , доставляющий минимум функционала (5).

Уравнение Эйлера задачи (5) имеет вид:

$$\sum_j \left(\delta_{ij} + \alpha \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \Omega_{ij}^k \right) a_j^\alpha = \tilde{c}_i. \tag{6}$$

где $\tilde{c}_i = \langle \varphi_i, \tilde{f} \rangle_{L_2}$ — коэффициенты разложения \tilde{f} по ортонормированному в $L_2(Q)$ базису $\{\varphi_j\}$.

Дискретный аналог задачи (4) формулируется следующим образом

$$N[\vec{a}, T_m(f)] \equiv \max_{q_k \in T_m} \left| \sum a_j \varphi_j(q_k) - f(q_k) \right| \rightarrow \min_{\vec{a} \in F_\delta}.$$

Дискретизация уравнения (6) приводит к уравнению

$$\sum_{j=1}^{k(l)} \left(\delta_{ij} + \alpha \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \Omega_{ij}^k \right) a_j^\alpha = \tilde{c}_i^m, \quad i = 1, \dots, k(l). \tag{7}$$

Здесь \tilde{c}_i^m — дискретное преобразование функции f с сетки T_m в коэффициенты Фурье по полиномам Цернике.

3.2. Задача 2. Устойчивое восстановление функции по следу её градиента на сетке

Задача устойчивого восстановления вектора коэффициентов \vec{a}_δ по измеренным с точностью δ частным производным $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right)_\delta, \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)_\delta$ функции $f = \sum a_j \varphi_j$ формулируется следующим образом

$$N_1 \left[\vec{a}; \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right] \rightarrow \min_{\vec{a} \in g_\delta}. \quad (8)$$

Здесь

$$N_1 \left[\vec{a}; \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right] = \left\| \sum a_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right\|_C + \left\| \sum a_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right\|_C.$$

Задача (8) эквивалентна задаче минимизации сглаживающего функционала

$$M_1^\beta \left[\vec{a}; \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right] = N_1 \left[\vec{a}; \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right] + \beta \|\vec{a}\|_{w_2^3}^2 \rightarrow \min_{\vec{a}} \quad (9)$$

с параметром β , согласованным с уровнем погрешности δ .

Уравнение Эйлера задачи (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\delta_{ij} + \beta \sum_{r=0}^3 \frac{1}{r!} \Omega_{ij}^r \right) \sum_k \gamma_{jk}^x a_k^\beta &= \tilde{c}_i^x, \\ \sum_j \left(\delta_{ij} + \beta \sum_{r=0}^3 \frac{1}{r!} \Omega_{ij}^r \right) \sum_k \gamma_{jk}^y a_k^\beta &= \tilde{c}_i^y, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tilde{c}_i^x = \left\langle \varphi_i, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right\rangle_{L_2}$, $\tilde{c}_i^y = \left\langle \varphi_i, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right\rangle_{L_2}$ — коэффициенты разложения $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ по ортонормированному в $L_2(Q)$ базису $\{\varphi_j\}$.

Дискретизация уравнения (10) имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k(l)} \left(\delta_{ij} + \beta \sum_{r=0}^3 \frac{1}{r!} \Omega_{ij}^r \right) \sum_{k=1}^{k(l-1)} \gamma_{jk}^x a_k = c_i^x, & i = 1, \dots, k(l), \\ \sum_{j=1}^{k(l)} \left(\delta_{ij} + \beta \sum_{r=0}^3 \frac{1}{r!} \Omega_{ij}^r \right) \sum_{k=1}^{k(l-1)} \gamma_{jk}^y a_k = c_i^y, & i = 1, \dots, k(l). \end{cases} \quad (11)$$

4. Алгоритм аналитического построения матриц стабилизирующего функционала

Полиномы Цернике — это ортогональные функции внутри единичного круга, которые используются главным образом в задачах оптики, связанных с восстановлением оптических поверхностей.

Испорченная оптическая поверхность содержит аберрации такого типа как, астигматизм, кома и др. Полиномы Цернике разного порядка описывают один из типов аберраций (например, полиномы с порядковым номером 5 и 6 — описывают аберрацию типа кома). Если же поверхность содержит несколько типов искажений, то её аналитическая функция представляет собой сумму различных полиномов Цернике с определенными коэффициентами.

При восстановлении функции, приближенно заданной на дискретной сетке или с приближенно заданным градиентом на сетке, возникает неустойчивость, для

устранении которой необходимо построить матрицы стабилизирующего функционала Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 , как указано выше. Для построения этих матриц был разработан алгоритм, реализованный в системе компьютерной алгебры Axiom. Алгоритм описан ниже пошагово и с пояснениями.

Входные данные: N — максимальная степень полиномов Цернике, через которую определяется количество полиномов — $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$.

1. Сначала вычисляется радиальная составляющая полиномов Цернике:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s},$$

где $n, m \in \{N \cup 0\}$, $m \leq n$, $(n-m)$ — чётное число. Для вычисления коэффициентов $R_{nm}(\rho)$ существует рекуррентная формула:

$$(n+m)R_n^m(\rho) - 2n\rho R_{n-1}^{m-1}(\rho) + (n-m)R_{n-2}^m(\rho) = 0. \quad (12)$$

Данная формула применима при любых $n > 1$ и $m > 1$. Использование рекуррентной формулы (12) позволяет существенно сократить время вычисления.

2. На следующем шаге вычисляются полиномы Цернике:

$$Z_{0,j} = \sqrt{n+1}R_n^0(\rho), \quad m = 0, \quad (13)$$

$$Z_{\text{неч},j} = \sqrt{n+1}R_n^m(\rho)\sqrt{2}\sin m\theta, \quad m \neq 0, \quad (14)$$

$$Z_{\text{чѐтн},j} = \sqrt{n+1}R_n^m(\rho)\sqrt{2}\cos m\theta, \quad m \neq 0, \quad (15)$$

где $n, m \in \{N \cup 0\}$, $m \leq n$, $(n-m)$ — чётное число. Полиномы задаются тремя формулами — для $m = 0$ (13), а для $m > 0$ полиномы задаются двумя формулами (14) и (15).

Обычно двумерные полиномы нумеруют двумя индексами. Однако при вычислениях удобнее пользоваться одноиндексной нумерацией. Соответствующее определение было введено в статье [8].

Полиномы Цернике при одноиндексной нумерации задаются следующими соотношениями:

$$\varphi_j(\rho, \theta) = \begin{cases} \sqrt{n_j+1}R_{n_j}^{m_j}(\rho)\cos m_j\rho, & (-1)^j > 0, \quad m_j > 0, \\ \sqrt{n_j+1}R_{n_j}^{m_j}(\rho)\sin m_j\rho, & (-1)^j < 0, \quad m_j > 0, \\ \sqrt{n_j+1}R_{n_j}^0(\rho), & m_j = 0, \end{cases} \quad (16)$$

При этом перевод мультииндексов n и m по индексу j осуществляются:

$$\begin{aligned} n_j &= \min \left\{ k \geq 0 : \frac{(k+1)(k+2)}{2} \geq j \right\}, \\ m_j &= \min \left\{ k \geq 0 : (-1)^k = (-1)^{n_j}, \quad k \geq 1 - j - \frac{n_j(n_j+1)}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$0 \leq m \leq n$; $(n-m)$ — чётное число. Для заданной максимальной степени полиномов N индекс сквозной нумерации, j , изменяется от нуля до $(N+1)(N+2)/2$ (число полиномов).

3. Далее необходимо разложить производные по x и по y от базисных функций (1) в базисе полиномов Цернике.

В силу ортогональности системы полиномов Цернике коэффициенты разложения (1) выражаются через скалярные произведения (2).

Скалярные произведения вычислялись следующим образом:

- аналитическое дифференцирование базисных функций на первом этапе;

- процедура `scalar_product_circle1` нахождения скалярного произведения для двух заданных функций вычисляет скалярное произведение повторным интегралом, пределы интегрирования в круге радиуса 1: $x = -1, \dots, 1, y = -\sqrt{1-x^2}, \dots, \sqrt{1-x^2}$.

Отметим, что все вычисления (дифференцирование, взятие двойного интеграла в заданных пределах интегрирования) производятся в аналитическом виде, никакие численные методы не применялись.

- После этого заполняются вспомогательные матрицы γ^x, γ^y разложения производных от полиномов Цернике по полиномам Цернике (2).
- В итоге матрицы стабилизирующего функционала $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2$ и Ω^3 через вспомогательные матрицы γ^x и γ^y задаются формулами (3).

Выходные данные: В качестве результата получаем матрицы стабилизирующего функционала $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ (3), которые необходимы в задаче восстановления (11). В качестве результата представлена матрица Ω^1 (рис. 1), полученная при использовании разработанного алгоритма для Axiom.

5. Заключение

Итак, решение задачи 1 реализуется решением системы линейных алгебраических уравнений (7) для вычисления вектора коэффициентов \vec{a}^α по заданному вектору \vec{c} :

$$A_\alpha \circ \vec{a}^\alpha = \vec{c}. \quad (18)$$

В свою очередь решение задачи 2 реализуется решением системы (вдвое большей размерности) линейных алгебраических уравнений (11):

$$\begin{cases} B_1^\beta \circ \vec{a}^\beta = \vec{c}_1, \\ B_2^\beta \circ \vec{a}^\beta = \vec{c}_2. \end{cases} \quad (19)$$

В работе [9] рассмотрен вопрос об устойчивом дискретном преобразовании следа функции на сетке $T(f)$, измеренного с точностью δ_1 , в вектор коэффициентов Фурье \vec{c} :

$$\vec{c}_\delta = D_S^F \circ T(f).$$

Решаем один раз с $\alpha(\delta_1)$ систему (18) и получаем окончательный результат:

$$\vec{a}^\alpha = F_1 \circ T(f), \quad F_1 = A_{\alpha(\delta)}^{-1} \circ D_S^F$$

с матрицей F_1 для серийной обработки экспериментальных данных $T(f)$ на сетке T_m (фиксированной), измеренных с фиксированной точностью δ_1 .

В работе [9] рассмотрен вопрос об устойчивом дискретном преобразовании следа градиента функции на сетке $DT(f)$ (в два раза больше данных, чем число точек сетки), измеренного с точностью δ_2 , в вектор коэффициентов Фурье $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)^T$:

$$(\vec{c}_1, \vec{c}_2)_{\delta_2}^T = DD_S^F \circ DT(f)$$

(количество строк в матрице DD_S^F в два раза больше числа точек сетки, а количество строк в матрице D_S^F равно числу точек сетки).

Решаем один раз с $\beta(\delta_2)$ систему (19) и получаем окончательный результат:

$$\vec{a}_\beta = DF_2 \circ DT(f), \quad DF_2 = \begin{pmatrix} B_1^\beta \\ B_2^\beta \end{pmatrix} \circ DD_S^F$$

с матрицей DF_2 для серийной обработки экспериментальных $DT(f)$ данных на сетке T_m (фиксированной), измеренных с фиксированной точностью δ_2 .

Литература

1. Жидков Е. П., Севастьянов Л. А. Макропараметры эффективного распределения в математической модели экранируемого напыления // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 9.
2. Sevastianov L. A., Zhidkov E. P. Analysis of Problems in Mathematical Model for Shadowed Sputtering // Comp. Phys. Comm. — 2000. — Vol. 130.
3. Войцехович В. В. Влияние атмосферной турбулентности на точность определения параметров волнового фронта // Препринт ИКИ АН СССР, Пр-862. — 1984.
4. Севастьянов Л. А. и др.. Программно-математический комплекс для обработки кинопартманограмм // Препринт ИКИ АН СССР, Пр-1209. — 1987.
5. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501–504.
6. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. — 1963. — Т. 153, № 1. — С. 49–52.
7. Соболев С. А. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. — М.: Наука, 1989.
8. Noll R. J. Zernike Polynomials and Atmospheric Turbulence // JOSA. — 1976. — Vol. 66, No 2.
9. Севастьянов Л. А., Ловецкий К., Кокотчикова М. Г. Дискретное преобразование значений функций на сетке в коэффициенты полиномов Цернике // Вестник РУДН, Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2007. — № 3–4.

UDC 519.6, 519.612, 519.651

Data Processing by Method of Transformation of Functions and its Derivatives Values on Grids into Fourier Coefficients

L. A. Sevastianov, M. G. Kokotchikova, D. S. Kulyabov

*Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198*

In this paper two practical problems are considered: function reconstruction from its or its partial derivatives perturbed values on a discrete grid. Formulation of stable reconstruction of a function via method of regularized expansion in Fourier series of Zernike polynomials is proposed. Calculations of stabilizing functionals are realized in computer algebra system Axiom.