**V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
Academy of Sciences
RUDN University
Tomsk State University
Institute of Information and Communication
Technologies Bulgarian Academy of Sciences
Research and development company
"Information and networking technologies"**

DISTRIBUTED COMPUTER AND COMMUNICATION NETWORKS: CONTROL, COMPUTATION, COMMUNICATIONS (DCCN-2016)

Volume 3
Youth School-Seminar

**Proceedings
of the Nineteenth International Scientific Conference**

Russia, Moscow, 21–25 November 2016

*Under the general editorship
of D.Sc. V. M. Vishnevskiy and D.Sc. K. E. Samouylov*

**Moscow
2016**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»
Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Институт информационных и телекоммуникационных технологий
БОЛГАРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Научно-производственное объединение
«Информационные и сетевые технологии»

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ СЕТИ: УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛЕНИЕ, СВЯЗЬ (DCCN-2016)

В трех томах

Том 3
Молодежная школа-семинар

Материалы
Девятнадцатой международной научной конференции

Россия, Москва, 21–25 ноября 2016 г.

Под общей редакцией
д.т.н. В.М. Вишневского и д.т.н. К.Е. Самуйлова

Москва
2016

УДК 004.7:004.4.001:621.391:007(063)
ББК 32.973.202:32.968
Р 24

Р 24 **Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) = Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016)** : материалы Девятнадцатой международной научной конференции, 21–25 нояб. 2016 г. : в 3 т.; под общ. ред. В. М. Вишневского и К. Е. Самуйлова — М.: РУДН, 2016.
ISBN 978-5-209-07666-7
Т. 3: Молодежная школа-семинар = Youth School-Seminar. — 499 с. : ил.
ISBN 978-5-209-07669-8 (т. 3)

Научная молодежная школа-семинар проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Проект № 16-37-10500.

В научном издании представлены материалы Девятнадцатой международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» по следующим направлениям:

— Оптимизация архитектуры компьютерных и телекоммуникационных сетей;
— Управление в компьютерных и телекоммуникационных сетях;
— Оценка производительности и качества обслуживания в беспроводных сетях;
— Аналитическое и имитационное моделирование коммуникационных систем последующих поколений;
— Беспроводные сети 4G/5G и технологии сантиметрового и миллиметрового диапазона радиоволн;
— RFID-технологии и их применение в интеллектуальных транспортных сетях;
— Интернет вещей, носимые устройства, приложения распределенных информационных систем;
— Распределенные системы и системы облачного вычисления, анализ больших данных;
— Вероятностные и статистические модели в информационных системах;
— Теория очередей, теория надежности и их приложения;
— Математическое моделирование высокотехнологичных систем;
— Математическое моделирование и задачи управления.

Сборник материалов конференции предназначен для научных работников и специалистов в области теории и практики построения компьютерных и телекоммуникационных сетей.

Текст воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами

Утверждено к печати Программным комитетом конференции

ISBN 978-5-209-07669-8 (т. 3)
ISBN 978-5-209-07666-7
©Коллектив авторов, 2016
©Российский университет дружбы народов, 2016

Contents

Abaev P. O., Beschastny V. A., Tsarev A. S., Samouylov K. E. Network Resource Management 9

Abaev P. O., Beschastny V. A., Samouylov K. E. Tractable distance distribution approximations for hardcore processes 17

Abrosimov L. I., Rudenkova M. A. Analysis of Throughput Wireless Media and Settings for Access Point Date Layer 26

Abrosimov L. I., Larin A. A. Minimization of Data Center Cost Creating Monitoring System with Determinate Data Flow 34

Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L. About damping problem for control system with delay 41

Aliev T. I., Sosnin V. V. Characteristics of Priority Queues with High Utilization Parameter 45

Begishev V. O., Petrov V. I., Samuylov A. K., Moltchanov D. A., Gaidamaka Yu. V. Modeling NB-IoT technologies for the Internet of Things Applications. 56

Belyaeva J. O., Skubachevskii A. L. Stationary solutions of the Vlasov equations for a two-component high temperature plasma. 60

Blinov A. I., Sevastianov L. A., Vasilyev S. A. Transport systems analysis using neural networks 65

Bogatyrev V. A., Parshutina S. A. Efficiency of Redundant Multipath Transmission of Requests Through the Network to Destination Servers . . 73

Bolotova G. O., Vasilyev S. A., Udin D. N. Systems of Differential Equations of Infinite Order with Small Parameter and Countable Markov Chains 81

Borodina A. B., Efrosinin D. V., Morozov E. V. Accelerated regenerative simulation of degradation process in the system with gradual and sudden failures 89

Dao T. N., Paramonov A. I. Analysis of communications network based unmanned aerial vehicles 92

Devyatkov V. V., Naung M. T. Model-oriented check the correctness of network interaction 101

Dinh T. D., Kirichek R. V. Development and research of methods of installation of wireless sensor nodes from UAV 114

Dolgushev R. A., Kirichek R. V. An Overview of Possible Testing Types and Methods for the Internet of Things 122

Eferina E. G., Kuznetsova O. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. Spinor representation of Maxwell's equations 129

Fomin M. B., Ivanov A. E. Recognition of anchor points on three-dimensional objects by stereo images in machine vision systems 137

Gerasimenko M. A. Neuron Networks 143

Gevorkyan M. N., Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. Implementation of the Wiener stochastic process in OpenModelica 150

Gevorkyan M. N., Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. About extensions programming for OpenModelica . . 158

Glukhov I. V., Orlov Y. N. Modeling of stock prices in the density distribution of a product of processes Weibull 165

Gorbunova A. V., Kradenyh A. A., Zaryadov I. S. The mathematical model of a cloud computing systeme 169

Gorshenin A. K., Korolev V. Yu. On noising of data to refine the output of moving separation of mixtures 176

Grebeshkov A. Yu., Zuev A. V., Kiporov D. S. Computer Simulation of Average Channel Access Delay in Cognitive Radio Network 184

Hussein O. A., Okuneva D. V. Analysis of D2D technologies impact on the operation of wireless networks 191

Izmaylova Y. The research of retrial queueing systems with exclusion of customers 198

Kalimulina E. Yu. Queueing System Convergence Rate 203

Kalinina K. A. Effective bandwidth estimation in highly critical systems . 212

Kanzitdinov S. K., Vasilyev S. A. Neural networks with an infinite number of cells analysis 216

Kaspirovich I. E. Analisys of Numerical Solution Stability of Motion of Rolling Sphere on Rotating Plane 225

Kocheganov V. M., Zorine A. V. Low-priority queue and server's steady-state existence in a tandem under prolongable cyclic service 232

Kokshenev V., Mikheev P., Suschenko S., Tkachev R. Analysis of the effectiveness of forward error correction in selective mode of transport protocol 240

Kolbasova V., Lisovskaya E., Moiseeva S. Total capacity of customers in infinite-server queueing system with stationary renewal arrivalse 248

Kolechkin A. O., Vladyko A. G. Software for testing of controllers in software-defined networks 256

Kolomoitcev V. S., Bogatyrev V. A. The Fault-tolerant Structure of Multilevel Secure Access to the Resources of the Public Network 264

Korshok E. O., Vasilyev S. A. Solutions analysis of infinite order singular perturbated stochastics differential equation 272

Korzun D. G., Vdovenko A. S., Bogoiavlenskaia O. I. On Convergence of Active Control Strategies for Subscription Notification Delivery in Smart Spaces 281

Koucheryavy A., Makolkina M. A., Paramonov A. I. Applications of augmented reality traffic and quality requirements study and modeling . . 289

Kovalchukov R., Samuylov A. K., Moltchanov D. A., Andreev S., Samouylov K. E. The three-dimensional simulation framework for interference and SIR assessment 301

Kulik V. A., Vybornova A. I. Methods of complex testing the devices of the Internet of Things 305

Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M. The total capacity of customers in the MMPP/GI/∞ queueing system 313

Makolkina M. A., Surodeeva E. V. Study of the interrelationship of subjective perception of the video quality and Hurst parameter of traffic . . 326

Morozov E. V., Potakhina L. V. Speed-up estimation of a system with random volume customers 334

Morozov E., Peshkova I., Rumyantsev A. On regenerative envelopes for high performance cluster simulation 337

Nazarov A. A., Fedorova E. Asymptotic analysis of retrial queue M/M/1 with impatient calls under the long patience time condition 342

Nazarov A. A., Broner V. I. Inventory management system with On/Off control and phase-type distribution of purchases quantity 349

Nazarov A. A., Pomortseva N. A. Asymptotic analysis of M/GI/1 retrial system with conflicts and afterservice 356

Okuneva D. V., Proshutinskiy K. S. Improving of the traffic balancing efficiency on the base of estimations of user attention concentration . . . 363

Pirmagomedov R., Hudoev I., Shangina D. Simulation of Medical Sensor Nanonetwork Applications Traffic. 371

Schetinin E. Yu., Merzlyakov V. Statistical extreme type dependence structures modeling in spatial domains 381

Serebryakova A. A., Kulik V. A., Pham V. D., Kirichek R. V. Effect of Traffic IoT on network equipment 388

Shilin P. A., Kirichek R. V. Research the possibility of using UAVs swarm for organization VANET infrastructure 394

Shklyaeva A. V., Kirichek R. V. An Overview of Possible Testing Types and Methods for the Flying Ubiquitous Sensor Networks 401

Sopin E. S., Daraseliya A. V., Yarkina N. V. On the virtual machines migration effectiveness in cloud systems 408

Sosnin V. V. Per-Packet Load Balancing of TCP Traffic for Goodput Aggregation of Communication Channels with Asymmetric Transmission Delay 412

Teltevskaya V. A., Makolkina M. A. Method for evaluating the quality of experience in augmented reality systems 419

Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. Hybrid simulation of active traffic management 427

Vishnevsky V. M., Ivanov R. E., Larionov A. A., Dudin M. S. Optimisation of data transmission scheduling in 5G mmWave backhaul network with STDMA 435

Yapo G. S., Milovanova T. A., Zaryadov I. S. Interval estimation of system performance with the optimal choice. 445

Zadiranova L., Melikov A., Moiseev A. Asymptotic Analysis of Queueing System with MMPP Arrivals and Feedback. 452

Zaryadov I. S., Matskevich I. A., Scherbanskaya A. A. The queueing system with general renovation and repeated service — time-probability characteristics. 458

Fedorov S. L. Kinetic approach in models of forecasting non-stationary time-series and functional calculations on them. 463

Gorbunova A. V., Zaryadov I. S., Matushenko S. I., Sopin E. S. The Estimation of Probability Characteristics of Cloud Computing Systems with Splitting of Requests. 467

Houankpo H. G. K., Kozyrev D. V. Sensitivity analysis of steady state reliability characteristics of a cold redundant data transmission system to the shapes of lifetime and repair time distributions of its elements . . . 473

Ustyuzhanin N., Gilmutdinov M. Analysis of background modeling methods performance in lossy video compression systems 481

Zaryadov I. S., Razumchik R. V. Stationary waiting time in $G/M/n/r$ FCFS queue with random renovation 489

УДК 514.7:514.8

Спинорное представление уравнений Максвелла

Е. Г. Еферина*, **О. В. Кузнецова***, **А. В. Королькова***, **Д. С. Кулябов*†**, **Л. А. Севастьянов*‡**

* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*

† *Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

‡ *Лаборатория теоретической физики, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Аннотация. Предпосылки Спиноры являются более специализированными объектами, чем тензоры. Поэтому обладают большим количеством свойств, нежели более общие объекты, такие как тензоры. Группа лоренцевых 2-спиноров является накрывающей группой группы Лоренца. Цель Поскольку группа Лоренца является группой симметрии уравнений Максвелла, то предполагается оправданным использовать при записи уравнений Максвелла спиноры вместо тензоров. Методы Уравнения Максвелла записываются в форме лоренцевых спиноров. Также используется удобное представление лоренцевых спиноров через комплексные векторы Зильберштейна. Результаты В спинорном формализме (в представлении лоренцовых спиноров и векторов Зильбернштейна) построен гамильтониан максвелловской оптики. При спинорной записи уравнения Максвелла приобретают вид, подобный уравнениям Дирака. Выводы При записи уравнений Максвелла в диракоподобном виде представляется возможным расширить инструментарий исследования за счёт методов квантовой теории поля. В этом виде наглядно представляется связь между гамильтонианами геометрической, параксиальной и волновой оптики.

Ключевые слова: спиноры, уравнения Максвелла, представление Зильберштейна.

1. Введение

Уравнения Максвелла имеют большое число представлений [1]. Принцип их введения следующий: каждое представление должно упрощать конкретное теоретическое или практическое исследование. К нашим интересам при исследовании уравнений Максвелла относятся их геометризация и гамильтонов формализм. В данной работе мы предлагаем на основе спинорного описания уравнений Максвелла [2–4] сконструировать дираковски-подобный гамильтониан. Предполагается, что данная форма позволит применять аппарат, разработанный в рамках квантовой теории, к изучению уравнений Максвелла.

Структура статьи следующая. В разделе 2 введены основные обозначения и соглашения. В разделе 3 даётся краткое описание уравнений Максвелла. В разделе 4 Вводится комплексное представление уравнений Максвелла. Далее, в разделе 5 даётся спинорное представление уравнений Максвелла. И в разделе 6, на основе комбинации результатов двух предыдущих разделов, получен дирако-подобный гамильтониан уравнений Максвелла.

2. Обозначения и соглашения

1. В работе используется нотация абстрактных индексов [5]. В данной нотации тензор как целостный объект обозначается просто индексом (например, x^i), компоненты обозначаются подчёркнутым индексом (например, $x^{\underline{i}}$).
2. Будем придерживаться следующих соглашений. Греческие индексы (α, β) будут относиться к четырёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{\alpha} = \overline{0,3}$. Латинские индексы из середины алфавита (i, j, k) будут относиться к трёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{i} = \overline{1,3}$.
3. Запятой в индексе обозначается частная производная по соответствующей координате ($f_{,i} := \partial_i f$); точкой с запятой — ковариантная производная ($f_{;i} := \nabla_i f$).
4. Для записи уравнений электродинамики в работе используется система СГС симметричная.

3. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла в 3-х мерной форме имеют вид:

$$\begin{gathered}
\nabla_0 B^i = -e^{ijk}\nabla_j E_k; \\
\nabla_i D^i = 4\pi\rho; \\
\nabla_0 D^i = e^{ijk}\nabla_j H_k - \frac{4\pi}{c} j^i; \\
\nabla_i B^i = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

где $e^{\underline{ijk}}$ — альтернирующий тензор, выражающийся через символ Леви-Чивиты $\varepsilon^{\underline{ijk}}$:

$$e_{\underline{ijk}} = \sqrt{{}^3 g}\,\varepsilon_{\underline{ijk}}, \quad e^{\underline{ijk}} = \frac{1}{\sqrt{{}^3 g}}\varepsilon^{\underline{ijk}}.$$

Запишем (1) через тензоры электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ [6]:

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0,\\ \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta,\end{gathered} \tag{2}$$

где тензоры $F_{\alpha\beta}$, $F^{\alpha\beta}$, $G^{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ имеют следующие компоненты

$$F_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E_2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E_3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D^2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$E^{\underline{i}}$, $H^{\underline{i}}$, $\underline{i} = \overline{1,3}$, — компоненты векторов напряжённости электрического и магнитного полей соответственно; $D_{\underline{i}}$, $B_{\underline{i}}$, $\underline{i} = \overline{1,3}$, — компоненты векторов электрической и магнитной индукции соответственно[1] .

4. Комплексное представление уравнений Максвелла

Комплексное представление уравнений Максвелла рассматривалось разными авторами [7–9].

4.1. Общее представление

Зададим соответствие упорядоченной пары и комплексного 3-вектора

$$\begin{aligned} F^{\underline{i}} &\sim (E^{\underline{i}}, B^{\underline{i}}), \quad F^{\underline{i}} = E^{\underline{i}} + \mathrm{i} B^{\underline{i}};\\ G^{\underline{i}} &\sim (D^{\underline{i}}, H^{\underline{i}}), \quad G^{\underline{i}} = D^{\underline{i}} + \mathrm{i} H^{\underline{i}}.\end{aligned}$$

Выразим напряжённость и индукцию через соответствующие комплексные векторы

$$\begin{aligned} E^i &= \frac{F^i + \bar{F}^i}{2}, \quad B^i = \frac{F^i - \bar{F}^i}{2\mathrm{i}},\\ D^i &= \frac{G^i + \bar{G}^i}{2}, \quad H^i = \frac{G^i - \bar{G}^i}{2\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

Введём два дополнительных комплексных вектора

$$K^i = \frac{G^i + F^i}{2}, \quad L^i = \frac{\bar{G}^i - \bar{F}^i}{2}. \tag{3}$$

[1]Следует заметить, что именно B^i имеет физический смысл напряжённости магнитного поля.

Тогда уравнения (1) примут вид

$$\begin{gathered}\nabla_i (K^i + L^i) = 4\pi\rho;\\ -\mathrm{i}\nabla_0 (K^i - L^i) + e^{ijk}\nabla_j (K_k - L_k) = \mathrm{i}\frac{4\pi}{c} j^i.\end{gathered} \tag{4}$$

4.2. Комплексное представление уравнений Максвелла в вакууме

Из соотношений $D^i = E^i$, $H^i = B^i$ и (3) получаем

$$K^i = E^i + \mathrm{i}B^i = F^i, \quad L^i = 0.$$

Тогда уравнения (4) будут иметь вид

$$\begin{gathered}\nabla_i F^i = 4\pi\rho;\\ -\mathrm{i}\nabla_0 F^i + e^{ijk}\nabla_j F_k = \mathrm{i}\frac{4\pi}{c} j^i.\end{gathered} \tag{5}$$

4.3. Комплексное представление уравнений Максвелла в однородной изотропной среде

В однородной изотропной среде справедливы следующие соотношения $D^i = \varepsilon E^i$, $\mu H^i = B^i$, где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Для упрощения получаемых выражений возможен следующий трюк. В (5) делаем формальную замену $c \to c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (то есть заменяем скорость света в вакууме на скорость света в среде) и $j^\alpha \to \frac{j^\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда получим

$$F^i = \sqrt{\varepsilon} E^i + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{\mu}} B^i. \tag{6}$$

Тогда уравнения Максвелла (1) приобретают вид:

$$\begin{gathered}\nabla_i F^i = \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\rho;\\ \mathrm{i}\frac{\partial F^i}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} e^{ijk}\nabla_j F_k - \mathrm{i}\frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}} j^i.\end{gathered} \tag{7}$$

Данное представление уравнений Максвелла имеет несколько наименований. В частности, оно известно как представление Зильберштейна [7, 8].

5. Спинорная запись уравнений Максвелла

Тензор электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и его компоненты $F_{\underline{\alpha\beta}}$, $\underline{\alpha}, \underline{\beta} = \overline{0,3}$, можно рассматривать в спинорной форме [5] (аналогично и для $G_{\alpha\beta}$):

$$F_{\alpha\beta} = F_{AA'BB'};$$
$$F_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} = F_{\underline{A}\,\underline{A'}\,\underline{B}\,\underline{B'}} g_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{A}\,\underline{A'}} g_{\underline{\beta}}{}^{\underline{B}\,\underline{B'}},$$
$$\underline{A}, \underline{A'}, \underline{B}, \underline{B'} = \overline{0,1}, \quad \underline{\alpha}, \underline{\beta} = \overline{0,3},$$

где $g_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{A}\,\underline{A'}}$, $\underline{\alpha} = \overline{0,3}$, — символы Инфельда–ван дер Вердена, определяемые в действительном спинорном базисе $\varepsilon_{\underline{A}\,\underline{B}}$ следующим образом [5]:

$$g_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{A}\,\underline{A'}} := g_{\underline{\alpha}}{}^{\alpha} \varepsilon_{A}{}^{\underline{A}} \varepsilon_{A'}{}^{\underline{A'}}, \quad g_{\underline{A}\,\underline{A'}}{}^{\underline{\alpha}} := g^{\underline{\alpha}}{}_{\alpha} \varepsilon^{A}{}_{\underline{A}} \varepsilon^{A'}{}_{\underline{A'}}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{\underline{A}\,\underline{B}} = \varepsilon_{\underline{A'}\,\underline{B'}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\underline{A}}{}^{A} \varepsilon_{A}{}^{\underline{B}} = \varepsilon_{\underline{A}}{}^{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Запишем уравнения Максвелла через спиноры.

Поскольку тензор $F_{\alpha\beta}$ действителен и антисимметричен, то его можно представить в виде

$$F_{\alpha\beta} = \varphi_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \varepsilon_{AB}\bar{\varphi}_{A'B'},$$
$${}^{*}F^{\alpha\beta} = -\mathrm{i}\varphi^{AB}\varepsilon^{A'B'} + \mathrm{i}\varepsilon^{AB}\bar{\varphi}^{A'B'}. \tag{10}$$

здесь φ_{AB} — спинор электромагнитного поля:

$$\varphi_{AB} := \frac{1}{2} F_{ABC'}{}^{C'} = \frac{1}{2} F_{AA'BB'}\varepsilon^{A'B'} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}\varepsilon^{A'B'}. \tag{11}$$

Аналогично можно записать

$$G^{\alpha\beta} = \gamma^{AB}\varepsilon^{A'B'} + \varepsilon^{AB}\bar{\gamma}^{A'B'}, \tag{12}$$
$${}^{*}G_{\alpha\beta} = -\mathrm{i}\gamma_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \mathrm{i}\varepsilon_{AB}\bar{\gamma}_{A'B'}.$$

Заменяя в уравнении (2) абстрактные индексы α на AA' и β на BB', запишем:

$$\nabla_{AA'} G^{AA'BB'} = \frac{4\pi}{c} j^{BB'}.$$

Используя соотношение (12) получим

$$\nabla^{AB'}\gamma_{A}^{B} + \nabla^{BA'}\gamma_{A'}^{B'} = \frac{4\pi}{c} j^{BB'}.$$

Аналогично, из (10) получим

$$\nabla^{A'B}\varphi^{A}_{B} - \nabla^{AB'}\bar{\varphi}^{A'}_{B'} = 0.$$

Таким образом полная система уравнений Максвелла в спинорном представлении имеет вид

$$\nabla^{A'B}\varphi^{A}_{B} - \nabla^{AB'}\bar{\varphi}^{A'}_{B'} = 0,$$
$$\nabla^{AB'}\gamma^{B}_{A} + \nabla^{BA'}\gamma^{B'}_{A'} = \frac{4\pi}{c} j^{BB'}.$$

Система уравнений Максвелла в вакууме в спинорной форме запишется в виде одного уравнения [5]:

$$\nabla^{AB'}\varphi^{B}_{A} = \frac{2\pi}{c} j^{BB'}.$$

Выпишем компоненты спинора электромагнитного поля:

$$\varphi_{\underline{A}\,\underline{B}} = \frac{1}{2} F_{\underline{\alpha\beta}} \varepsilon^{\underline{A'}\,\underline{B'}} g^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{A}\,\underline{A'}} g^{\underline{\beta}}{}_{\underline{B}\,\underline{B'}},$$
$$\underline{A}, \underline{A'}, \underline{B}, \underline{B'} = \overline{0,1}, \quad \underline{\alpha}, \underline{\beta} = \overline{0,3}.$$

Используя (8), (9) и обозначив $F_i = E_i - \mathrm{i}B_i$, можно записать:

$$\varphi_{00} = \frac{1}{2}\left(F_1 - \mathrm{i}F_2\right), \quad \varphi_{01} = \varphi_{10} = -\frac{1}{2}F_3,$$
$$\varphi_{11} = -\frac{1}{2}\left(F_1 + \mathrm{i}F_2\right).$$

6. Дирако-подобный гамильтониан

Из спинора второй валентности φ_{AB} (11) сконструируем спинор первой валентности ψ^{a}. При этом применим трюк (6).

$$\psi^{\underline{a}} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \varphi^{00} \\ \varphi^{01} \\ \varphi^{10} \\ \varphi^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F^1 + \mathrm{i}F^2 \\ F^3 \\ F^3 \\ F^1 + \mathrm{i}F^2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно ток принимает вид:

$$\xi^{\underline{a}} = \begin{pmatrix} -j^1 + \mathrm{i}j^2 \\ j^3 - \sqrt{\varepsilon}\rho \\ j^3 + \sqrt{\varepsilon}\rho \\ j^1 + \mathrm{i}j^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (7) приобретает следующий дирако-подобный вид:

$$\frac{\partial \psi^a}{\partial t} = -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} e^{ijk} \nabla_j \gamma_k{}^a{}_b \psi^b - \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \xi^a.$$

Из структуры уравнения Дирака

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \left[c\gamma^i p_i + \gamma^0 mc^2\right]\psi = H\psi$$

можно записать дирако-подобный гамильтониан уравнений Максвелла при отсутствии токов:

$$H = -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} e^{ijk} \nabla_j \gamma_k{}^a{}_b.$$

7. Заключение

В статье представлен способ записи уравнений Максвелла в спинорном представлении и записан гамильтониан уравнений Максвелла в диракоподобном виде. Представляется, что данное представление может быть интересно в плане применения методов квантовой теории к изучению электромагнитных явлений.

Благодарности

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 14-01-00628, 15-07-08795 и 16-07-00556.

Литература

1. Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Korolkov V. I. Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2012. — no. 1. — P. 96–106. — arXiv : 1211.6590.
2. Laporte O., Uhlenbeck G. E. Application of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations // Physical Review. — 1931. — Vol. 37, no. 11. — P. 1380–1397.
3. Aste A. Complex Representation Theory of the Electromagnetic Field // Journal of Geometry and Symmetry in Physics. — 2012. — no. 28. — P. 47–58. — arXiv:1211.1218v3.
4. Bialynicki-Birula I. Photon Wave Function // Progress in Optics. — Elsevier, 1996. — Vol. 36. — P. 245–294. — 0508202.
5. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. — М. : Мир, 1987. — Т. 1.

6. Minkowski H. Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgönge in bewegten Körpern // Math. Ann. — 1910. — H. 68. — S. 472–525.
7. Silberstein L. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung // Annalen der Physik. — 1907. — Vol. 327, no. 3. — P. 579–586.
8. Silberstein L. Nachtrag zur Abhandlung über „Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung" // Annalen der Physik. — 1907. — Vol. 329, no. 14. — P. 783–784.
9. Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.

UDC 514.7:514.8

Spinor representation of Maxwell's equations

E. G. Eferina*, O. V. Kuznetsova*, A. V. Korolkova*, D. S. Kulyabov*†, L. A. Sevastianov*‡

* *Department of Applied Probability and Informatics*
RUDN University
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

† *Laboratory of Information Technologies*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

‡ *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

Background Spinors are more special objects than tensor. Therefore possess more properties than the more generic objects such as tensors. Group of Lorentz two-spinors is the covering group of the Lorentz group. Purpose Since the Lorentz group is a symmetry group of Maxwell's equations, it is assumed to reasonable to use when writing the Maxwell equations Lorentz two-spinors and not tensors. Method We write the Maxwell's equations using Lorentz two-spinors. Also used a convenient representation of Lorentz two-spinors in terms of the Riemann-Silberstein's complex vectors. Results In the spinor formalism (in the representation of the Lorentz spinors and Riemann-Silberstein's vectors) we have constructed the Hamiltonian of Maxwellian optics. With the use of spinors Maxwell's equations take the form similar to the Dirac equation. Conclusions For Maxwell's equations in the Dirac-like form we can expand research methods at the expense of the methods of quantum field theory. In this form, clearly visible the connection between the Hamiltonians of geometric, beam and Maxwellian optics.

Keywords: spinors, Maxwell's equations, Riemann-Silberstein's vectors.