Finslerian representation of the Maxwell equations

Dmitry S. Kulyabov, 1, 2, * Anna V. Korolkova, 1, † Tatyana R. Velieva, 1, ‡ and Anastasia V. Demidova 1, §

¹Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation ²Laboratory of Information Technologies Joint Institute for Nuclear Research 6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

When the Maxwell equations are geometrized, the Maxwell Lagrangian is usually reduced to the Yang-Mills Lagrangian. In this case, the effective quadratic metric, usually corresponding to the Riemannian metric of our space, is considered. However, it is more reasonable to use Finsler approach to Maxwell's equations. In the paper the Finsler representation of the geometrized Maxwell equations is considered. The comparison with the Riemannian approach also is made.

Keywords: Maxwell's equations, Riemannian geometry, Finsler geometry, transformation optics

^{*} kulyabov-ds@rudn.ru

[†] korolkova-av@rudn.ru

[‡] velieva-tr@rudn.ru

[§] demidova-av@rudn.ru

I. INTRODUCTION

The ideology of transformational optics is based on the following trick [1–4]. The Maxwell's equations for medium are usually written for flat Minkowski space. Also Maxwell's equations may be written in vacuum, but for an arbitrary Riemannian space. By equating the relevant terms in these systems, we obtain the geometrization of the medium parameters. However, the given method has certain drawbacks. The permeability (permittivity) tensor is constructed from the metric tensor [5, 6], but the metric tensor in Riemannian space has only 10 independent components. This not enough to describe the full permittivity tensor. So it seems justified to use a richer geometric structure such as Finsler geometry [7].

The paper presents the basic elements of Finsler geometry. On this basis, we use differential forms to write Maxwell's equations both for Riemannian and Finsler geometries [8, 9].

II. NOTATIONS AND CONVENTIONS

- 1. We will adhere to the following agreements. Greek indices (α, β) will refer to the four-dimensional space. Latin indices will refer to the space of arbitrary dimension.
- 2. The comma in the index denotes a partial derivative with respect to corresponding coordinate $(f_{,i} := \partial_i f)$; the semicolon denotes a covariant derivative $(f_{;i} := \nabla_i f)$.

III. ELEMENTS OF FINSLER GEOMETRY

Finsler geometry can be considered as geometry without restriction by quadratic metric [10]. In the general case the Finsler metric depends not only on the coordinates, but also on the velocities [11, 12].

A. General definitions

Let M be a smooth n-dimensional manifold, TM is a tangent bundle over M, (x^i) are local coordinates on M, (x^i, y^i) are natural local coordinates on TM. The Finsler structure on M is determined by scalar function L(x, y) on TM which satisfies the following conditions:

• L(x,y) — positive homogeneous function of the first degree with respect of the tangent vector coordinates:

$$L(x, \lambda y) = \lambda(x, y), \quad \lambda > 0;$$

• L(x,y) is positive if $y \neq 0$:

$$L(x,y) > 0, \quad y \neq 0;$$

• the quadratic form $\varphi(\xi) = g_{ij}(x,y)\xi^i\xi^j$ is positive definite, that is $\varphi(\xi) > 0$ for all $\xi \neq 0$, where functions

$$g_{ij} := F_{\cdot i \cdot j}$$

are components of the non-degenerate tensor field q (the metric tensor of the space). Here

$$F_{\cdot i} := \frac{\partial F}{\partial y^i}.$$

Manifold M with given Finsler structure L is called the Finsler space F^n . The function

$$F = L^2$$

is called the metric function of the Finsler space F^n . If x and x + dx are two infinitely close points of space F^n , then the distance ds between them is the value of function L in point (x, dx):

$$ds = L(x, dx).$$

The length s of the curve c: x = x(t) that connects the points $x_1 = x(t_1)$ and $x_2 = x(t_2)$ is determined by the integral

$$s = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$
,

where $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ is the velocity vector of the curve. The fundamental function F is a homogeneous function of the second degree from the coordinates of the tangent vector. Therefore, by the Euler theorem we get:

$$y^{i}F_{.i} = 2F.$$

Differentiating this expression by y^{I} , we obtain:

$$y^i F_{\cdot i \cdot j} = F_{\cdot j}$$

from where, from convolution with y^j , we get:

$$g_{ij}y^iy^j = F$$

and

$$ds^2 = g_{ij}(x, dx) dx^i dx^j.$$

In the last expression the functions $g_{ij}(x,y)$ are homogeneous functions of y:

$$y^k g_{ii\cdot k} = 0.$$

In Finsler geometry the characteristic element is the tensor

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}g_{ij \cdot k},$$

the vanishing of which is a necessary and sufficient condition for the space F^n to be Riemannian. This tensor is symmetric by all indices.

In the tangent space T_xM we will consider the equation

$$L(x^{i}, y^{i}) = 1.$$

By identifying T_xM with centroaffine space, the center o of which $(y^i = 0)$ is the tangent point $x \in M$, we can consider that this equation defines in T_xM a hypersurface which is called as the indicatrix. It turns out that points y of T_xM satisfying the inequality

$$L(x^i, y^i) \leqslant 1$$
,

are internal or boundary points of a convex body whose boundary is given by the indicatrix equation. This is the consequence from the conditions of the basic definition. Now we can define the length of the vector y of the centroaffine space $T_x m$ by using equality

$$|y| = L(x^i, y^i).$$

Thus defined metric in the vector space T_xM will be the Minkowski metric. Therefore, the Finsler space can be defined as a smooth manifold M and in its tangent spaces T_xM one can define the Minkowski metric which depends on $x \in M$ as smooth function.

The manifold M is called Finsler space F^n with alternating metric if in its tangent bundle TM the metric is given by homogeneous function F(x,y) of second degree on the coordinates of the tangent vector:

$$F(x, \lambda y) = \lambda^2 F(x, y), \quad \lambda \neq 0.$$

Moreover, it is a non-degenerate function:

$$\det ||F_{\cdot i \cdot j}|| \neq 0.$$

B. Berwald connection

In Finsler geometry there are two main connections: the Berwald and the Cartan ones.

The characteristic feature of the Berwald connection is the coincidence of its geodesic with the extremals of the functional:

$$F(x, \dot{x}) dt$$
.

The Euler–Lagrange equations of this functional can be led to the canonical form due the nondegeneracy of the metric function F:

$$\ddot{x}^k + 2G^k(x, \dot{x}) = 0,$$

where

$$G^{k} := \frac{1}{4}g^{ik}(\partial_{j}F_{\cdot i}\dot{x}^{j} - \partial_{i}F).$$

Here g^{ik} are contravariant components of the metric tensor $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j$. The function G^k is changed according to the following law:

$$G^{k'} = \partial_k x^{k'} G^k - \frac{1}{2} \partial_{ij}^2 x^{k'} y^i y^j.$$

Herewith $G_{ij}^k := G_{\cdot i \cdot j}^k$ are converted as connection coefficients:

$$G_{i'j'}^{k'} = G_{ij}^k \partial_{i'} x^i \partial_{j'} x^j \partial_k x^{k'} + \partial_p x^{k'} \partial_{i'j'}^2 x^p,$$

which determine the Berwald connection. Since $G^k(x,y)$ are homogeneous functions of the second degree by y, then

$$G_{ij}^k y^i y^j = 2G^k.$$

The extremal equations coincide with the geodesic equations in Berwald connections:

$$\ddot{x}^k + G_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

We define the vector field on the tangent bundle TM of the Finsler space F^n

$$X = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^k \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

The integral curves $(x(t), \dot{x}(t))$ determine the geodesic of the Finsler space:

$$\dot{x}^k = y^k, \quad \dot{y}^k = -2G^k(x, \dot{x}).$$

Berwald connection generates the infinitesimal connection, that is, the distribution $H: z \to Hz$ on tangent bundle TM of the basis manifold M. At each point $z \in TM$ vectors

$$\delta_i = \partial_i - N_i^k \dot{\partial}_k$$

form the basis of the horizontal distribution, where $N_i^k = G_{\cdot i}^k := G_{ij}^k y^j$ are the coefficients of the infinitesimal connectivities, and $\dot{\partial}_k := \frac{\partial}{\partial y^k}$ is the basis of the vertical distribution $V: z \to Vz$ formed by all vectors tangent to the layer at z. The dual basis is $\delta x^i = \mathrm{d} x^i$, δy^i , where $\delta y^i = \mathrm{d} y^i + N_k^I \, \mathrm{d} x^k$.

C. Cartan connection

The metric tensor of the Finsler space is not covariantly constant in Berwald's connectivity. One can specify the connectivity that is consistent with the metric (when the metric tensor is covariantly constant). This is the Cartan connection

Suppose that the infinitesimal connection is given on TM.

The connection coefficients (F_{ij}^k, C_{ij}^k) of the ∇ are defined by expansions

$$\nabla_i \partial_j = \nabla_{\delta_i} \partial_j = F_{ij}^k \partial_k, \quad \dot{\nabla}_i \partial_j = \nabla_{\dot{\delta}_i} \partial_j = C_{ij}^k \partial_k.$$

We require consistency with the metric:

$$F_{ij}^{k} = F_{ji}^{k}, \quad C_{ij}^{k} = C_{ji}^{k}, \quad \nabla_{\mathcal{A}} g_{ij} = 0.$$

Then

$$F_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{ks}(\delta_{i}g_{sj} + \delta_{j}g_{is} - \delta_{s}g_{ij}),$$

$$C_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{ks}(\dot{\partial}_{i}g_{sj} + \dot{\partial}_{j}g_{is} - \dot{\partial}_{s}g_{ij}).$$

The Finsler connection is called the Cartan connection, if $N_i^k = F_{ij}^k y^j$. The coefficients of the Cartan connection are denoted as Γ_{ij}^{*k} :

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} g^{kp} \left(g_{pi \cdot s} G_{\cdot j}^s + g_{jp \cdot s} G_{\cdot i}^s - g_{ij \cdot s} G_{\cdot p}^s \right).$$

The tensor part of the connection ∇ takes the form

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{ks}g_{ij\cdot s}.$$

IV. MAXWELL EQUATIONS

We will write Maxwell equations with use of differential forms [13, 14].

$$\mathrm{d}F = 0,\tag{1}$$

$$d^* F = \frac{4\pi}{c}^* j. \tag{2}$$

The 2-form of the electromagnetic field F is expressed in 1-form field potential a as follows:

$$F = \mathrm{d}A. \tag{3}$$

In this case, the vector potential A makes sense of connectivity, and the Maxwell tensor F makes sense curvature.

A. Maxwell equation in Riemann geometry

1-form of the potential of the field is written as follows:

$$A = A_{\alpha} dx^{\alpha}$$
.

Assuming that $a = A(x^i)$, we may write the 2-form of the electromagnetic field (IV):

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \, \mathrm{d} x^{\alpha} \wedge \mathrm{d} x^{\beta} \, .$$

The tensor $F_{\alpha\beta}$ has the form:

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} A_{\beta} - \nabla_{\beta} A_{\alpha} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}.$$

The equation (IV) takes the form:

$$dF = d dA = \frac{1}{2} \nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} dx^{\gamma} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = \frac{1}{6} (\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \nabla_{\beta} F_{\gamma\alpha}) dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} = 0$$

or

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0.$$

The second Maxwell equation (IV) takes the form:

$$\nabla_{\alpha} F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^{\beta}$$

or in partial derivatives [15]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\partial_{\alpha} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha \beta} \right) \right] = \frac{4\pi}{c} j^{\beta}.$$

B. Maxwell equation in Finsler geometry

In the case of Finsler geometry, the natural local coordinates on TM have the form (x^{α}, y^{α}) . Then for the metric tensor the following may be written:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^{\delta}, y^{\delta}).$$

Accordingly, for the potential vector we have:

$$A_{\alpha} = A_{\alpha}(x^{\delta}, y^{\delta}).$$

Let us write down the 2-form of the electromagnetic field (IV):

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \, \mathrm{d} x^{\alpha} \wedge \mathrm{d} x^{\beta} + F_{\alpha\bar{\beta}} \, \mathrm{d} x^{\alpha} \wedge \mathrm{d} y^{\bar{\beta}} \,.$$

We expand the last expression in terms of vector potential:

$$F_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha} A_{\beta} - \delta_{\beta} A_{\alpha} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta},$$

$$F_{\alpha\bar{\beta}} = -\partial_{\bar{\beta}} A_{\alpha} = -A_{\alpha;\bar{\beta}}.$$

We assume that the connection is consistent with the metric. That is, we will use the Cartan connection. Then the first Maxwell equation (IV) takes the form:

$$F_{\bar{\alpha}\beta:\gamma} + F_{\gamma\bar{\alpha}:\beta} + F_{\beta\gamma\cdot\bar{\alpha}} = 0.$$

The second Maxwell equation (IV) takes the form:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\delta_{\beta} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha \beta} \right) + \partial_{\bar{\beta}} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha \bar{\beta}} \right) \right] = -\frac{4\pi}{c} j^{\alpha}.$$

We have written down the Maxwell equations in the case of Finsler geometry. Obviously, the correspondence principle is fulfilled for the written formulas. That is, when there is a dependence on only one coordinate x^i , we get the case of Riemannian geometry.

V. CONCLUSION

In this paper we make the next step in construction of geometrized Maxwell's equations based on Finsler geometry but not on Riemann geometry. From the viewpoint of authors this will allow not only to construct a complete permeability tensor, but also to describe an anisotropic medium. As a whole this will allow us to develop an adequate method for solving the inverse problem of optics.

ACKNOWLEDGMENTS

The publication has been prepared with the support of the "RUDN University Program 5-100" and funded by Russian Foundation for Basic Research (RFBR) according to the research project No 19-01-00645.

- [1] J. Plebanski, Electromagnetic Waves in Gravitational Fields, Physical Review 118 (5) (1960) 1396–1408. doi:10.1103/PhysRev.118.1396.
- [2] U. Leonhardt, T. G. Philbin, Transformation Optics and the Geometry of Light, in: Progress in Optics, Vol. 53, 2009, pp. 69–152. arXiv:0805.4778v2, doi:10.1016/S0079-6638(08)00202-3.
- [3] J. B. Pendry, D. Schurig, D. R. Smith, Controlling Electromagnetic Fields, Science 312 (5781) (2006) 1780-1782. doi:10.1126/science.1125907.
- [4] D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, L. A. Sevastianov, M. N. Gevorkyan, A. V. Demidova, Geometrization of Maxwell's Equations in the Construction of Optical Devices, in: V. L. Derbov, D. E. Postnov (Eds.), Proceedings of SPIE. Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III, Vol. 10337 of Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, SPIE, 2017, pp. 103370K.1-7. doi:10.1117/12.2267959.
- [5] I. E. Tamm, L. I. Mandelstam, Elektrodynamik der anisotropen Medien in der speziellen Relativitatstheorie, Mathematische Annalen 95 (1) (1925) 154–160.
- [6] I. E. Tamm, Crystal Optics Theory of Relativity in Connection with Geometry Biquadratic Forms, Russian Journal of Physical and Chemical Society. Part physical 57 (3-4) (1925) 209–240.
- [7] D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, T. R. Velieva, The Riemannian Geometry is not Sufficient for the Geometrization of the Maxwell's Equations, in: V. L. Derbov, D. E. Postnov (Eds.), Saratov Fall Meeting 2017: Laser Physics and Photonics XVIII; and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data IV, Vol. 10717 of Progress in Biomedical Optics and Imaging - Proceedings of SPIE, SPIE, Saratov, 2018, pp. 1071713.1-6. arXiv:1805.10125, doi:10.1117/12.2315204.
- [8] C. Lämmerzahl, V. Perlick, Finsler geometry as a model for relativistic gravity, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 15 (supp01) (2018) 1850166. arXiv:1802.10043, doi:10.1142/S0219887818501669.
- [9] Y. Itin, C. Lämmerzahl, V. Perlick, Finsler-type Modification of the Coulomb Law, Physical Review D 90 (12) (2014) 124057. arXiv:1411.2670, doi:10.1103/PhysRevD.90.124057.
- [10] S.-S. Chern, Finsler Geometry Is Just Riemannian Geometry without the Quadratic Restriction, Notices of the Ams 43 (9) (1996) 959–963.
- [11] H. Rund, The Differential Geometry of Finsler Spaces, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1959. doi:10.1007/978-3-642-51610-8.
- [12] G. S. Asanov, Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories, 1985. doi:10.1007/978-94-009-5329-1.
- [13] H. Cartan, Differential forms, Dover Books on Mathematics, Courier Corporation, 2012.
- [14] N. Bourbaki, Algebra I, Elements of mathematics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.
- [15] D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, V. I. Korolkov, Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (1) (2012) 96–106. arXiv:1211.6590.

Финслерово представление уравнений Максвелла

Д. С. Кулябов, 1,2,* А. В. Королькова, 1,† Т. Р. Велиева, 1,‡ и А. В. Демидова 1,§

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
З Лаборатория информационных технологий,
Объединённый институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

При геометризации уравнений Максвелла лагранжиан Максвелла обычно сводится к лагранжиану Янга-Миллса. При этом рассматривается эффективная квадратичная метрика, обычно соответствующая римановой метрике нашего пространства. Однако представляется более оправданным использовать финслеров подход к уравнениям Максвелла. В работе рассматривается финслерово представление геометризованных уравнений Максвелла. Проводится сравнение с римановым подходом.

Ключевыеслова: уравнения Максвелла, риманова геометрия, финслерова геометрия, трансформационная оптика

^{*} kulyabov-ds@rudn.ru

[†] korolkova-av@rudn.ru

[‡] velieva-tr@rudn.ru

[§] demidova-av@rudn.ru

І. ВВЕДЕНИЕ

Идеология трансформационной оптики базируется на следующем трюке [1–4]. Записываются уравнения Максвелла в среде, но в плоском пространстве Минковского. Также записываются уравнения Максвелла в вакууме, но в произвольном римановом пространстве. Приравнивая соответствующие члены в этих системах, получаем геометризацию параметров среды. Однако, данный метод имеет определённые недостатки. Тензор проницаемостей конструируется из метрических тензоров [5, 6]. Но метрический тензор риманового пространства имеет только 10 независимых компонент. Этого не хватает для описания полного тензора проницаемостей. Представляется оправданным переход к более богатой геометрической структуре, такой как финслерова геометрия [7].

В работе приводятся основные элементы финслеровой геометрии. На основании этого из уравнений Максвелла в формализме внешних форм записываются уравнения Максвелла как в римановой, так и в финслеровой геометрии [8, 9].

II. ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

- 1. Будем придерживаться следующих соглашений. Греческие индексы (α, β) будут относиться к четырёхмерному пространству. Латинские индексы будут применяться для пространства произвольной размерности.
- 2. Запятой в индексе обозначается частная производная по соответствующей координате $(f_{,i} := \partial_i f)$; точкой с запятой ковариантная производная $(f_{;i} := \nabla_i f)$.

ІІІ. ЭЛЕМЕНТЫ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Финслерову геометрию можно рассматривать как геометрию без ограничения только квадратичной метрикой [10]. В общем случае финслерова метрика зависит не только от координат, но и от скоростей [11, 12].

А. Общие определения

Пусть M есть гладкое n-мерное многообразие, TM — касательное расслоение над M, (x^i) — локальные координаты на M, (x^i, y^i) — естественные локальные координаты на TM. Финслерова структура на M определяется заданием на TM скалярной функции L(x,y), удовлетворяющей следующим условиям:

 \bullet L(x,y) — положительно однородная функция первой степени по координатам касательного вектора:

$$L(x, \lambda y) = \lambda(x, y), \quad \lambda > 0;$$

• L(x,y) является положительной функцией, если $y \neq 0$:

$$L(x,y) > 0, \quad y \neq 0;$$

• квадратичная форма $\varphi(\xi) = g_{ij}(x,y)\xi^i\xi^j$ положительно определена, то есть $\varphi(\xi) > 0$ при всех $\xi \neq 0$, где функции

$$g_{ij} := F_{\cdot i \cdot j}$$

являются компонентами невырожденного тензорного поля g — метрического тензора пространства. Здесь

$$F_{\cdot i} := \frac{\partial F}{\partial y^i}.$$

Многообразие M с заданной финслеровой структурой L называется финслеровым пространством F^n . Функцию

$$F = L^2$$

называют метрической функцией финслерова пространства F^n . Если x и $x + \mathrm{d}x$ — две бесконечно близкие точки пространства F^n , то расстояние $\mathrm{d}s$ между ними есть значение L в точке $(x,\mathrm{d}x)$:

$$ds = L(x, dx).$$

Длина s кривой c: x = x(t), соединяющей точки $x_1 = x(t_1)$ и $x_2 = x(t_2)$, определяется интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$
,

где $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ — вектор скорости кривой. Фундаментальная функция F является однородной функцией второй степени по координатам касательного вектора. Поэтому в силу теоремы Эйлера имеем:

$$y^{i}F_{\cdot i} = 2F_{\cdot i}$$

Дифференцируя это выражение по y^i , получим:

$$y^i F_{\cdot i \cdot j} = F_{\cdot j},$$

откуда, свернув с y^j , получим:

$$g_{ij}y^iy^j = F$$

И

$$ds^2 = g_{ij}(x, dx) dx^i dx^j.$$

В последнем выражении функции $g_{ij}(x,y)$ являются однородными функциями нулевой степени по y:

$$y^k g_{ij \cdot k} = 0.$$

В финслеровой геометрии характерным элементом является тензор

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}g_{ij\cdot k},$$

обращение в нуль которого является необходимым и достаточным условием того, что пространство F^n будет римановым. Этот тензор симметричен по всем индексам.

В касательном пространстве $T_x M$ рассмотрим уравнение

$$L(x^i, y^i) = 1.$$

Отождествляя $T_x M$ с центроаффинным пространством, центр o которого $(y^i = 0)$ есть точка касания $x \in M$, можно считать, что это уравнение определяет в $T_x M$ гиперповерхность, которая называется индикатрисой. Оказывается, что точки y из $T_x M$, удовлетворяющие неравенству

$$L(x^i, y^i) \leqslant 1,$$

являются внутренними или граничными точками выпуклого тела, граница которого задаётся уравнением индикатрисы. Это является следствием условий основного определения. Теперь можно определить длину (норму) вектора y центроаффинного пространства $T_x M$ с помощью равенства

$$|y| = L(x^i, y^i).$$

Определённая таким образом метрика в векторном пространстве $T_x M$ будет являться метрикой Минковского. Поэтому финслерово пространство можно определить как гладкое многообразие M, в касательных пространствах $T_x M$ которого задана метрика Минковского, гладким образом зависящая от $x \in M$.

Многообразие M называется финслеровым пространством F^n знакопеременной метрики, если в его касательном расслоении TM задана метрическая однородная функция F(x,y) второй степени по координатам касательного вектора:

$$F(x, \lambda y) = \lambda^2 F(x, y), \quad \lambda \neq 0.$$

Причём это невырожденная функция:

$$\det \|F_{\cdot i \cdot j}\| \neq 0.$$

В. Связность Бервальда

В финслеровой геометрии выделяются две основные связности — связность Бервальда и связность Картана. Характерной особенностью связности Бервальда является совпадение её геодезических с экстремалями функционала:

$$F(x, \dot{x}) dt$$
.

Уравнения Эйлера-Лагранжа этого функционала в силу невырожденности метрической функции F можно привести к каноническому виду:

$$\ddot{x}^k + 2G^k(x, \dot{x}) = 0,$$

где

$$G^{k} := \frac{1}{4}g^{ik}(\partial_{j}F_{\cdot i}\dot{x}^{j} - \partial_{i}F).$$

Здесь g^{ik} — контравариантные компоненты метрического тензора $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j$. При замене локальных координат функции G^k меняются по следующему закону:

$$G^{k'} = \partial_k x^{k'} G^k - \frac{1}{2} \partial_{ij}^2 x^{k'} y^i y^j.$$

При этом $G^k_{ij} := G^k_{\cdot i \cdot j}$ преобразуются как коэффициенты связности:

$$G_{i'j'}^{k'} = G_{ij}^k \partial_{i'} x^i \partial_{j'} x^j \partial_k x^{k'} + \partial_p x^{k'} \partial_{i'j'}^2 x^p,$$

которые и определяют связность Бервальда. Так как $G^k(x,y)$ являются однородными функциями второй степени по y, то

$$G_{ij}^k y^i y^j = 2G^k$$
.

Уравнения экстремалей совпадают с уравнениями геодезических в связности Бервальда:

$$\ddot{x}^k + G^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0.$$

На касательном расслоении TM финслерова пространства F^n определено векторное поле

$$X = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^k \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Его интегральные кривые $(x(t), \dot{x}(t))$ определяют геодезические финслерова пространства:

$$\dot{x}^k = y^k, \quad \dot{y}^k = -2G^k(x, \dot{x}).$$

Связность Бервальда порождает инфинитезимальную связность, т.е. распределение $H:z\to Hz$ горизонтальных площадок на касательном расслоении TM базисного многообразия M. В каждой точке $z\in TM$ векторы

$$\delta_i = \partial_i - N_i^k \dot{\partial}_k$$

образуют базис горизонтального распределения, где $N_i^k = G_{\cdot i}^k := G_{ij}^k y^j$ — коэффициенты инфинитезимальной связности, а $\dot{\partial}_k := \frac{\partial}{\partial y^k}$ — базис вертикального распределения $V: z \to Vz$, образованного всеми векторами, касательными к слою в точке z. Дуальный ему базис имеет вид $\delta x^i = \mathrm{d} x^i$, δy^i , где $\delta y^i = \mathrm{d} y^i + N_k^i \, \mathrm{d} x^k$.

С. Связность Картана

Метрический тензор финслерова пространства не ковариантно постоянен в связности Бервальда. Можно задать связность, согласованную с метрикой (когда метрический тензор ковариантно постоянен). Это связность Картана.

Предположим, что на TM задана инфинитезимальная связность. Пусть (F_{ij}^k, C_{ij}^k) — коэффициенты связности ∇ , определяемые разложениями

$$\nabla_i \partial_j = \nabla_{\delta_i} \partial_j = F_{ij}^k \partial_k, \quad \dot{\nabla}_i \partial_j = \nabla_{\dot{\delta}_i} \partial_j = C_{ij}^k \partial_k.$$

Потребуем согласованность с метрикой:

$$F_{ij}^k = F_{ji}^k, \quad C_{ij}^k = C_{ji}^k, \quad \nabla_{\mathcal{A}} g_{ij} = 0.$$

Тогда

$$F_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{ks}(\delta_{i}g_{sj} + \delta_{j}g_{is} - \delta_{s}g_{ij}),$$

$$C_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{ks}(\dot{\partial}_{i}g_{sj} + \dot{\partial}_{j}g_{is} - \dot{\partial}_{s}g_{ij}).$$

Финслерова связность называется связностью Картана, если $N_i^k = F_{ij}^k y^j$. Коэффициенты связности Картана обозначаются через Γ_{ij}^{*k} :

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} g^{kp} (g_{pi \cdot s} G_{\cdot j}^s + g_{jp \cdot s} G_{\cdot i}^s - g_{ij \cdot s} G_{\cdot p}^s).$$

Тензорная часть связности ∇ примет вид

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{ks}g_{ij\cdot s}.$$

IV. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Запишем уравнения Максвелла с помощью внешних (дифференциальных) форм [13, 14].

$$dF = 0, (1)$$

$$d^* F = \frac{4\pi}{c}^* j. \tag{2}$$

2-форма электромагнитного поля F выражается через 1-форму потенциала поля A следующим образом:

$$F = dA. (3)$$

При этом векторный потенциал A имеет смысл связности, а тензор Максвелла F имеет смысл кривизны.

А. Уравнение Максвелла в римановой геометрии

1-форма потенциала поля записывается следующим образом:

$$A = A_{\alpha} dx^{\alpha}$$
.

Считая, что $A = A(x^i)$, запишем 2-форму электромагнитного поля (IV):

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \, \mathrm{d} x^{\alpha} \wedge \mathrm{d} x^{\beta} \,.$$

Тензор $F_{\alpha\beta}$ при этом имеет вид:

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} A_{\beta} - \nabla_{\beta} A_{\alpha} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}.$$

Уравнение (IV) принимает вид:

$$dF = d dA = \frac{1}{2} \nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} dx^{\gamma} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = \frac{1}{6} (\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \nabla_{\beta} F_{\gamma\alpha}) dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} = 0$$

или

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0.$$

Второе уравнение Максвелла (IV) принимает вид:

$$\nabla_{\alpha} F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^{\beta}$$

или в частных производных [15]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\partial_{\alpha} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha \beta} \right) \right] = \frac{4\pi}{c} j^{\beta}.$$

В. Уравнение Максвелла в финслеровой геометрии

В случае финслеровой геометрии естественные локальные координаты на TM имеют вид (x^{α}, y^{α}) . Тогда для метрического тензора можно записать:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^{\delta}, y^{\delta}).$$

Соответственно для вектора потенциала имеем:

$$A_{\alpha} = A_{\alpha}(x^{\delta}, y^{\delta}).$$

Запишем 2-форму электромагнитного поля (IV):

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \, \mathrm{d} x^{\alpha} \wedge \mathrm{d} x^{\beta} + F_{\alpha\bar{\beta}} \, \mathrm{d} x^{\alpha} \wedge \mathrm{d} y^{\bar{\beta}} \,.$$

Распишем последнее выражение через векторный потенциал:

$$F_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha} A_{\beta} - \delta_{\beta} A_{\alpha} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta},$$

$$F_{\alpha\bar{\beta}} = -\partial_{\bar{\beta}} A_{\alpha} = -A_{\alpha:\bar{\beta}}.$$

Будем считать, что связность согласована с метрикой. То есть, мы будем использовать связность Картана. Тогда первое уравнение Максвелла (IV) принимает вид:

$$F_{\bar{\alpha}\beta:\gamma} + F_{\gamma\bar{\alpha}:\beta} + F_{\beta\gamma:\bar{\alpha}} = 0.$$

Второе уравнение Максвелла (IV) принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\delta_{\beta} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha \beta} \right) + \partial_{\bar{\beta}} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha \bar{\beta}} \right) \right] = -\frac{4\pi}{c} j^{\alpha}.$$

Мы записали уравнения Максвелла в случае финслеровой геометрии. Очевидно, что для записанных формул выполняется принцип соответствия. То есть, когда есть зависимость только от одной координаты x^i , мы получаем случай римановой геометрии.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сделан очередной шаг по конструированию геометризованных уравнений Максвелла на основе не римановой, а финслеровой геометрии. По мнению авторов это позволит не только сконструировать полный тензор проницаемостей, но и описать анизотропную среду. В совокупности это позволит построить адекватный метод решения обратной задачи оптики.

БЛАГОДАРНОСТИ

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00645.

- [1] Plebanski J. Electromagnetic Waves in Gravitational Fields // Physical Review. 1960. Vol. 118, no. 5. P. 1396–1408.
- [2] Leonhardt U., Philbin T. G. Transformation Optics and the Geometry of Light // Progress in Optics. 2009. Vol. 53. P. 69–152. arXiv: 0805.4778v2.
- [3] Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R. Controlling Electromagnetic Fields // Science. 2006. Vol. 312, no. 5781. P. 1780–1782.
- [4] Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Sevastianov L. A., Gevorkyan M. N., Demidova A. V. Geometrization of Maxwell's Equations in the Construction of Optical Devices // Proceedings of SPIE. Saratov Fall Meeting 2016: Laser Physics and Photonics XVII and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data III / Ed. by V. L. Derbov, D. E. Postnov. Vol. 10337 of Proceedings of SPIE The International Society for Optical Engineering. SPIE, 2017. P. 103370K.1–7.
- [5] Tamm I. E., Mandelstam L. I. Elektrodynamik der anisotropen Medien in der speziellen Relativitatstheorie // Mathematische Annalen. 1925. Bd. 95, H. 1. S. 154–160.
- [6] Тамм И. Е. Кристаллооптика теории относительности в связи с геометрией биквадратичной формы // Журнал Русского физико-химического общества. Часть физическая. 1925. Т. 57, № 3-4. С. 209–240.
- [7] Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Velieva T. R. The Riemannian Geometry is not Sufficient for the Geometrization of the Maxwell's Equation Saratov Fall Meeting 2017: Laser Physics and Photonics XVIII; and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data IV / Ed. by V. L. Derbov, D. E. Postnov. Vol. 10717 of Progress in Biomedical Optics and Imaging Proceedings of SPIE. Saratov: SPIE, 2018. apr. P. 1071713.1–6. arXiv: 1805.10125.
- [8] Lämmerzahl C., Perlick V. Finsler geometry as a model for relativistic gravity // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. — 2018. — nov. — Vol. 15, no. supp01. — P. 1850166. arXiv: 1802.10043.
- [9] Itin Y., Lämmerzahl C., Perlick V. Finsler-type Modification of the Coulomb Law // Physical Review D. 2014. dec. Vol. 90, no. 12. P. 124057. arXiv: 1411.2670.
- [10] Chern S.-S. Finsler Geometry Is Just Riemannian Geometry without the Quadratic Restriction // Notices of the Ams. 1996. Vol. 43, no. 9. P. 959–963.
- [11] Рунд X. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М. : Наука, 1981. 504 с.
- [12] Asanov G. S. Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. 1985. 384 p.
- [13] Картан А. П. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М. : Мир, 1971.-392 с.
- [14] Bourbaki N. Algebra I. Elements of mathematics. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1989. XXIII, 709 p.
- [15] Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Korolkov V. I. Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2012. — no. 1. — P. 96– 106. — arXiv: 1211.6590.