ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНЫХ СИСТЕМ

Материалы
Всероссийской конференции
с международным участием

Москва, РУДН, 20–24 апреля 2015 года

Москва
Российский университет дружбы народов
2015

УДК 004:007 (063)
ББК 32.81
И74

Организаторы конференции: Российский университет дружбы народов;
Московский технический университет связи и информатики;
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук;
Лаборатория информационных технологий Объединённого института ядерных исследований.

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-07-20169.

Программный комитет: Башарин Г. П., д.т.н., проф., РУДН; Боголюбов А. Н., д.ф.-м.н., проф., МГУ; Виницкий С. И., д.ф.-м.н., проф., ЛТФ ОИЯИ; Вишневский В. М., д.т.н., проф., НПФ «ИНСЕТ»; Гайдамака Ю. В., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Гнатич М. М., проф., University P.J. Safarik, Kosice, Словакия; Гольдштейн Б. С., д.т.н., проф., СПб ГУТ; Гудкова И. А., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Дружинина О. В., д.ф.-м.н., проф., ВЦ (ФИЦ ИУ РАН); Ефимушкин В. А., к.ф.-м.н., доцент, ОАО «Интеллект Телеком»; Кореньков В. В., д.т.н., проф., ЛИТ ОИЯИ; Крянев А. В., д.ф.-м.н., проф., НИЯУ «МИФИ»; Кулябов Д. С., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Кучерявый А. Е., д.т.н., проф., СПб ГУТ; Кучерявый Е. А., проф., Tampere University of Technology, Финляндия; Ланеев Е. Б., д.ф.-м.н., проф., РУДН; Мартикайнен О. Е., проф., Service Innovation Research Institute, Финляндия; Наумов В. А., проф., Service Innovation Research Institute, Финляндия; Осипов Г. С., д.ф.-м.н., проф., ИСА (ФИЦ ИУ РАН); Пузынин И. В., д.ф.-м.н., проф., ЛИТ ОИЯИ; Пшеничников А. П., к.т.н., проф., МТУСИ; Ромашкова О. Н., д.т.н., проф., МГПУ; Самуйлов К. Е., д.т.н., проф., РУДН; Севастьянов А. Л., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Севастьянов Л. А., д.ф.-м.н., проф., РУДН; Степанов С. Н., д.т.н., проф., ОАО «Интеллект Телеком»; Стрельцова О. И., к.ф.-м.н., с.н.с., ЛИТ ОИЯИ; Толмачев И. Л., к.ф.-м.н., проф., РУДН; Хачумов В. М., д.т.н., проф., ИСА (ФИЦ ИУ РАН); Цирулев А. Н., д.ф.-м.н., проф., ТвГУ; Цитович И. И., д.ф.-м.н., доцент, ИППИ РАН; Шоргин С. Я., д.ф.-м.н., проф., ИПИ ФИЦ ИУ РАН; Щетинин Е. Ю., д.ф.-м.н., проф., СТАНКИН.

Оргкомитет:
Председатель: Самуйлов К. Е., д.т.н., профессор, РУДН.
Сопредседатели: Севастьянов Л. А., д.ф.-м.н., проф., РУДН; Толмачёв И. Л., к.ф.-м.н., профессор, РУДН.
Учёный секретарь: Острикова Д. Ю., РУДН
Члены оргкомитета: Никитина Е. В., к.х.н, зам. декана РУДН; Гайдамака Ю. В., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Гудкова И. А., к.ф.-м.н., РУДН; Демидова А. В., РУДН; Диваков Д. В., РУДН; Королькова А. В., к.ф.-м.н., РУДН; Кулябов Д. С., к.ф.-м.н., доцент, РУДН; Масловская Н. Д., РУДН Соченков И. В., к.ф.-м.н., РУДН; Таланова М. О., РУДН.

Секции:
Теория телетрафика и ее применения
Сопредседатели: д.т.н., проф. Башарин Г. П. (РУДН), к.т.н., проф. Пшеничников А. П. (МТУСИ), к.ф.-м.н. Гудкова И. А. (РУДН).
Секретарь: Масловская Н. Д. (РУДН).
Сети связи следующего поколения: управление, качество, архитектура
Сопредседатели: д.т.н., проф. Самуйлов К. Е. (РУДН), д.т.н., проф. Вишневский В. М. (НПФ), к.ф.-м.н., доцент Гайдамака Ю. В. (РУДН).
Секретарь: Таланова М. О. (РУДН)
Прикладные информационные системы
Сопредседатели: проф. Осипов Г. С., ИСА (ФИЦ ИУ РАН), проф. Толмачев И. Л. (РУДН).
Секретарь: к.ф.-м.н. Соченков И. В. (РУДН).
Высокопроизводительные технологии распределенных вычислений
Сопредседатели: д.т.н., проф. Кореньков В. В. (ЛИТ ОИЯИ), к.ф.-м.н., доцент Кулябов Д. С. (РУДН).
Секретарь: к.ф.-м.н. Королькова А. В. (РУДН).
Математическое моделирование
Сопредседатели: д.ф.-м.н., проф. Севастьянов Л. А. (РУДН), д.ф.-м.н., проф. Крянев А. В. (НИЯУ «МИФИ»), д.ф.-м.н., проф. Дружинина О. В., ВЦ (ФИЦ ИУ РАН).
Секретари: Демидова А. В. (РУДН), Диваков Д. В. (РУДН).

И74 **Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем** : материалы Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 20–24 апреля 2015 г. — Москва : РУДН, 2015. — 332 с. : ил.

ISBN 978-5-209-06416-9

УДК 004:007(063)
ББК 32.81

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОДНОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Еферина Е.Г.[1], Королькова А.В.[1], Кулябов Д.С.[1,2], Малютин В.Б.[3]
[1]Российский университет дружбы народов, eg.eferina@gmail.com, akorolkova@sci.pfu.edu.ru, ds@sci.pfu.edu.ru
[2]Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980
[3]Институт математики НАН Беларуси, Белоруссия, 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11, no@mail.ru

Адаптирован операторный метод решения стохастических дифференциальных уравнений для одношаговых процессов.

Ключевые слова: операторный метод, стохастические дифференциальные уравнения, модель «хищник-жертва», основное кинетическое уравнение.
Работа частично поддержана грантами РФФИ № 14-01-00628, 15-07-08795, договором с БРФФИ № Ф14Д-002.

Введение

При решении основного кинетического уравнения, которое описывает одношаговые процессы, возникают проблемы. Решение формально представляется в форме матричной экспоненты и расходится.

В работе описывается адаптированный операторный подход квантовой теории поля (КТП) для решения задач, связанных с одношаговыми процессами. Операторный метод состоит из следующих частей:

- запись основного кинетического уравнения в операторной форме и определение гамильтониана,
- разложение гамильтониана в ряд,
- применение оператора хронологического упорядочения Дайсона к решению основного кинетического уравнения,
- переход к хронологическому оператору Вика,
- получение точного решения с помощью диаграмм Фейнмана.

Метод стохастизации одношаговых процессов

Метод стохастизации одношаговых процессов позволяет нам на основе схем взаимодействия получить операторы изменения состояний и интенсивности переходов [1]. Используя их, можно получить основное кинетическое уравнение в следующем виде:

$$\dot{P}(t,n) = s^{-}(n+1)P(t,n+1) - s^{+}(n)P(t,n) + s^{+}(n-1)P(t,n-1) - s^{-}(n)P(t,n), \qquad (1)$$

где s^{+} и s^{-} – интенсивности переходов.

Операторный метод

Полученное с помощью метода стохастизации одношаговых процессов основное кинетическое уравнение представим в операторной форме, для этого воспользуемся формализмом Дирака [2]:

$$\dot{P}(t,n) = (a^{\dagger} - I)s^{-}(n)P(t,n) + (a - I)s^{+}(n)P(t,n), \qquad (2)$$

где $a^{\dagger}$ – оператор рождения, a – оператор гибели.

Определим действие операторов рождения и гибели следующим образом [2-3]:

$$a|0\rangle = 0, \qquad a^{\dagger}|n\rangle = |n+1\rangle, \qquad a|n\rangle = |n-1\rangle,$$
$$[a, a^{\dagger}] = aa^{\dagger} + a^{\dagger} = I, \qquad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}.$$

Здесь $|0\rangle$ – вакуумное состояние, $|n\rangle$ – вектор состояния, $\langle n|m\rangle$ – нормировка, I – единичный оператор.

Для того чтобы перейти к гамильтонову формализму, запишем основное кинетическое уравнение в каноническом виде:

$$\frac{d|P_t\rangle}{dt} = H|P_t\rangle\,, \tag{3}$$

где $|P_t\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P(t,n)\,|n\rangle$, H – гамильтониан.

Запишем уравнение (3), используя скобку Пуассона, чтобы применить теорию возмущений для нахождения решения

$$\dot{\varphi_n} = \{\varphi_n, H(\varphi,t)\},\ n = \overline{1,\infty}\,. \tag{4}$$

Представим гамильтониан $H(\varphi,t)$ в виде $H = H_0 + h$, чтобы уравнения

$$\dot{\varphi_n} = \{\varphi_n, H_0(\varphi,t)\} \tag{5}$$

имели точное решение $\varphi_n = \varphi_n(\varphi',t)$. Координаты φ'_n удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{\varphi}'_n = \{\varphi'_n\,, H'(\varphi',t)\} \tag{6}$$

с гамильтонианом $H'(z',t) = \hat{h}(\varphi(\varphi',t),t)$.

Решив уравнения (5) и (6) и обозначив $\widetilde{\varphi_n} \equiv \varphi_n(\phi'_0,t)$, $\widetilde{\varphi_{n\alpha}} \equiv \varphi_n(\varphi'_0,t_\alpha)$, можем записать решение уравнения (4) в виде ряда:

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \hat{h}(t_k)\hat{h}(t_{k-1}) \cdots \hat{h}(t_1)\widetilde{\varphi_n},$$

где оператор $\hat{h}(t_\alpha)$ определяется по формуле:

$$\hat{h}(t_\alpha) = \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial h(\widetilde{\varphi_\alpha},t_\alpha)}{\partial \varphi'_\beta} \frac{\partial}{\partial \varphi'_{\alpha 0}},\ \alpha,\beta = \overline{1,\infty}.$$

Область интегрирования ограничена условиями $t_0 \le t_1 \le t, t_\alpha \le t_{\alpha-1}$. Это ограничение можно устранить введение хронологического оператора Дайсона P, который, действуя на произведение операторов, располагает их в хронологическом порядке. Тогда решение можно преобразовать к виду:

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t} dt_k P\hat{h}(t_1)\hat{h}(t_2) \cdots \hat{h}(t_k)\widetilde{\varphi_n},$$

$$\varphi_n = Pexp\left(\int_{t_0}^{t} dt\hat{h}(t)\right)\widetilde{\varphi_n}.$$

Так как мы хотим учитывать статистику, то перейдем от оператора Дайсона к оператору Вика. Оператор Вика T располагает произведение операторов в порядке возрастания временных аргументов так, что операторы, соответствующие более поздним моментам времени стоят слева от тех, которые соответствуют более ранним моментам, а общий знак выражения определяется четностью перестановок фермиевских операторов. Оператор Вика имеет следующий вид:

$$T\{\varphi(t_1)\varphi(t_2)\} =: \varphi(t_1)\varphi(t_2): +\ \varphi(t_1)^{\square}\varphi(t_2)^{\square}.$$

Диаграммы Фейнмана

Диаграммы Фейнмана – наглядный и эффективный способ описания взаимодействий в КТП. Основными элементами диаграммы Фейнмана являются вершины, внутренние и внешние линии. Правила Фейнмана сопоставляют каждому элементу диаграммы определенные математические величины и операции.

Таким образом, ряд можно проиллюстрировать с помощью диаграмм Фейнмана и получить точное решение.

Получение гамильтониана для модели «хищник-жертва»

Рассмотрим модель системы «хищник-жертва», состоящую из особей двух видов, один из них охотится за другим, который обеспечен неисчерпаемыми пищевыми ресурсами. Обозначив X – жертва, Y – хищник, запишем схемы взаимодействия:

$$X + A \overset{k_1}{\rightarrow} 2X, \quad r_1 = (1{,}0),$$
$$X + Y \overset{k_2}{\rightarrow} 2Y, \quad r_2 = (-1{,}1),$$
$$Y \overset{k_3}{\rightarrow} B, \quad r_3 = (0, -1),$$

которые имеют следующую интерпретацию. Первое соотношение означает, что жертва, которая съедает единицу пищи, немедленно репродуцирует. Второе соотношение описывает поглощение жертвы хищником и мгновенное репродуцирование хищника. Последнее соотношение – естественная смерть хищника.

Все процессы необратимы, поэтому $s^- = 0$,

$$s_1^+(x,y) = k_1 \frac{x!}{(x-1)!}\frac{y!}{y!} = k_1 x, \quad s_2^+(x,y) = k_2 \frac{x!}{(x-1)!}\frac{y!}{(y-1)!} = k_2 xy,$$
$$s_3^+(x,y) = k_3 \frac{x!}{x!}\frac{y!}{(y-1)!} = k_1 x.$$

Основное кинетическое уравнение в операторной форме имеет следующий вид:

$$\frac{\partial P(n,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} (a - I) s_i^+ (n) P(n,t).$$

Таким образом, для модели «хищник-жертва» гамильтониан имеет вид:

$$H = \sum_{i=1}^{3} (a - I) s_i^+ (n).$$

Выводы

Получен адаптированный операторный метод для одношаговых процессов, описанных основным кинетическим уравнением. Метод позволяет корректно решать уравнения с матричной экспонентой и снимает проблему расходимости решения.

Применение метода проиллюстрировано на модели «хищник-жертва».

Литература

1. *Eferina E.G. et al*. One-Step Stochastic Processes Simulation Software Package // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series «Mathematics. Information Sciences. Physics». 2014. № 3. P. 46-59.

2. *Hnatič M., Honkonen J., Lučivjanský T.* Field-theoretic technique for irreversible reaction processes // Physics of Particles and Nuclei. 2013. № 2. P. 316-348.

3. Doi M. Second quantization representation for classical many-particle system // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1976. № 9. P. 1465-1477.

OPERATOR METHOD FOR ONE-STEP PROCESSES

Eferina E.G.[1], Korolkova A.V.[1], Kulyabov D.S.[1,2], Malutin V.B.[3]

[1]Peoples' Friendship University of Russia, eg.eferina@gmail.com, akorolkova@sci.pfu.edu.ru, ds@sci.pfu.edu.ru

[2]Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research, Russia, 141980, Dubna, Moskovskaya obl., Joliot-Curie st., 6

[3]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus, 220072, Minsk, Surganov str., no@mail.ru

Operator method was adapted for solving stochastic differential equations for one-step processes.

Key words: operator method, stochastic differential equations, the "predator-prey" model, master equation.

The work is partially supported by RFBR grants No's 14-01-00628 and 15-07-08795, agreement with BRFFR No F14D-002.