УДК 519.21; 51-76

Простейшая геометризация уравнений Максвелла

Д. С. Кулябов, А. В. Королькова, Л. А. Севастьянов

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Для проведения разработок в области трансформационной оптики и для расчёта линз перспективным представляется метод геометризации уравнений Максвелла. Основная идея заключается в переводе материальных уравнений Максвелла, а именно диэлектрической и магнитной проницаемости, в эффективную геометрию пространства–времени (и вакуумные уравнения Максвелла). Это позволит решать прямую и обратную задачи, то есть находить диэлектрическую и магнитную проницаемость по заданной эффективной геометрии (по траекториям лучей), а также находить эффективную геометрию по диэлектрической и магнитной проницаемости. Наиболее популярная наивная геометризация была предложена Плебанским. При определённых ограничениях она достаточно хорошо решает задачи в своей области. Следует отметить, что в оригинальной статье приводятся лишь результирующие формулы и исключительно для декартовых систем координат. В работе авторов проводится подробный вывод формул для наивной геометризации уравнений Максвелла, кроме того, формулы выписываются для произвольной криволинейной системы координат. Данная работа рассматривается как этап для построения полной ковариантной геометризации макроскопических уравнений Максвелла.

Ключевые слова: уравнения Максвелла; материальные уравнения Максвелла; геометризация уравнений Максвелла; риманова геометрия; криволинейные координаты; геометризация Плебанского.

1. Введение

Аппарат дифференциальной геометрии являлся основным языком физики XX-го века. Его базовые элементы развивались в рамках общей теории относительности. Возникает желание применить этот развитый и к другим областям физики, в частности к оптике.

Первые попытки применения методов дифференциальной геометрии в электродинамике следует отнести к публикациям И. Е. Тамма [1–3]. В 1960 году Е. Плебанский предложил метод геометризации материальных уравнений электромагнитного поля [4–7], ставший классическим. Все последующие работы либо использовали его, либо пытались немного подправить, не меняя идеологии [8]. К сожалению, в статье Плебанского [4] нет никакого вывода формул, а идеология вывода также не выражена явно.

Для применения и углубления направления геометризации материальных уравнений авторам потребовалось восстановить идеологию и вывод уравнений по методу, предложенному Плебанским.

В разделе 2 даются основные обозначения и соглашения, применяемые в статье. В разделе 3 вводятся основные соотношения для уравнений Максвелла в криволинейных координатах (для более подробного ознакомления можно обратиться к другим статьям авторов [9, 10]). В разделе 4 приводятся собственно расчёты по геометризации Плебанского.

2. Обозначения и соглашения

1. Будем использовать нотацию абстрактных индексов [11]. В данной нотации тензор как целостный объект обозначается просто индексом (например, x^i), компоненты обозначаются подчёркнутым индексом (например, $x^{\underline{i}}$).

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2013 г.

2. Будем придерживаться следующих соглашений. Греческие индексы (α, β) будут относиться к четырёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{\alpha} = \overline{0,3}$. Латинские индексы из середины алфавита (i, j, k) будут относиться к трёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{i} = \overline{1,3}$.
3. Запятой в индексе обозначается частная производная по соответствующей координате ($f_{,i} := \partial_i f$); точкой с запятой — ковариантная производная ($f_{;i} := \nabla_i f$).
4. Для записи уравнений электродинамики в работе используется система СГС симметричная [12].
5. Антисимметризация обозначается квадратными скобками.

3. Уравнения Максвелла в криволинейных координатах

3.1. Общие соотношения

Приведём основные сведения об уравнениях Максвелла в криволинейных координатах. Более подробное описание дано в статьях [9, 10, 13–15].

Запишем уравнение Максвелла через тензоры электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ [16, 17]:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta, \tag{2}$$

где тензоры $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ имеют следующие компоненты

$$F_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E_2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E_3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$F^{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$G^{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D^2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$G_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -D_2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -D_3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $E_{\underline{i}}$, $H_{\underline{i}}$ — компоненты векторов напряжённости электрического и магнитного полей соответственно; $D^{\underline{i}}$, $B^{\underline{i}}$ — компоненты векторов электрической и магнитной индукции соответственно.

Также полезно ввести тензор ${}^*F^{\alpha\beta}$, дуально сопряжённый тензору $F_{\alpha\beta}$:

$$ {}^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}, \tag{7} $$

где $e^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — альтернирующий тензор, выражающийся через символ Леви–Чивиты $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$ e_{\underline{\alpha\beta\gamma\delta}} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\underline{\alpha\beta\gamma\delta}}, \quad e^{\underline{\alpha\beta\gamma\delta}} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\underline{\alpha\beta\gamma\delta}}. \tag{8} $$

Аналогично вводится тензор

$$ {}^*G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\delta}, \tag{9} $$

Оба они записываются в компонентах в следующем виде:

$$ {}^*F^{\underline{\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B^2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B^3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10} $$

$$ {}^*G_{\underline{\alpha\beta}} = \sqrt{-g} \begin{pmatrix} 0 & H_1 & H_2 & H_3 \\ -H_1 & 0 & D^3 & -D^2 \\ -H_2 & -D^3 & 0 & D^1 \\ -H_3 & D^2 & -D^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11} $$

С помощью дуального тензора (7) уравнение (1) можно записать в более простом виде:

$$ \nabla_\alpha {}^*F^{\alpha\beta} = 0. \tag{12} $$

Далее мы объясним, почему для целей реализации методики Плебанского мы предпочитаем запись уравнений в виде (1) более простому виду (12).

3.2. Уравнения Максвелла в среде

При наличии среды претерпевает изменения лишь группа уравнений Максвелла, содержащая связанные заряды, а именно уравнение (2). Помимо самих уравнений Максвелла (1) и (2), необходимо добавить уравнения связи между тензорами $G^{\alpha\beta}$ и $F^{\alpha\beta}$. При введении дополнительных предположений о линейности среды и неподвижности вещества их можно записать в трёхмерном виде следующим образом:

$$ D^i = \varepsilon^{ij} E_j, \qquad B^i = \mu^{ij} H_j, \tag{13} $$

где ε^{ij} и μ^{ij} — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей. В четырёхмерном виде (13) принимает следующий вид:

$$ G^{\alpha\beta} = \lambda^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}, \quad \lambda^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = \lambda^{[\alpha\beta]}_{[\gamma\delta]}, \tag{14} $$

здесь $\lambda^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$ — тензор проницаемостей, содержащий информацию как об диэлектрической и магнитной проницаемостях, так и об электромагнитной связи [1,3].

Учитывая структуру тензоров $F^{\alpha\beta}$ (4) и $G^{\alpha\beta}$ (5), а также уравнения связи (13), запишем

$$ F^{\underline{0i}} = -E^{\underline{i}}, \quad G^{\underline{0i}} = -D^{\underline{i}}, \quad G^{\underline{ij}} = -\varepsilon^{\underline{ijk}} H_{\underline{k}}, \quad B_{\underline{i}} = -\varepsilon_{\underline{ijk}} F^{\underline{jk}}. \tag{15} $$

Или в другом виде:

$$G^{\underline{0i}} = \varepsilon^{i}_{\underline{j}} F^{0\underline{j}}, \quad G^{\underline{ij}} = \varepsilon^{\underline{ijk}} \varepsilon_{\underline{lmn}} (\mu^{-1})^{l}_{\underline{k}} F^{\underline{mn}}/2. \tag{16}$$

Из (16) выпишем структуру тензора $\lambda^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$:

$$\lambda^{0i}_{0\underline{j}} = \varepsilon^{i}_{\underline{j}}/2, \quad \lambda^{0i}_{\underline{kl}} = \lambda^{kl}_{0\underline{i}} = 0, \quad \lambda^{\underline{ij}}_{\underline{mn}} = \varepsilon^{\underline{ijk}} \varepsilon_{\underline{lmn}} (\mu^{-1})^{l}_{\underline{k}}/2. \tag{17}$$

Считая, что в вакууме диэлектрическая и магнитная проницаемость имеют вид:

$$\varepsilon^{ij} := \delta^{ij}, \qquad \mu^{ij} := \delta^{ij}, \tag{18}$$

получим, что в вакууме уравнения связи (13) и (14) принимают вид

$$D^i = E^i, \qquad B^i = H^i, \qquad G^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}. \tag{19}$$

3.2.1. Тензор проницаемостей для изотропной среды

В случае изотропной среды выражение (13) принимает вид:

$$D^i = \varepsilon E^j, \qquad B^i = \mu H^j, \tag{20}$$

где диэлектрическая и магнитная проницаемости ε и μ — скалярные величины.

В этом случае тензор проницаемостей в покоящейся системе отсчёта можно представить в следующем виде [1,3]:

$$\begin{gathered} \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_{\alpha\gamma}\lambda_{\beta\delta}, \\ \lambda_{\underline{\alpha\beta}} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\mu}}, -\sqrt{\mu}, -\sqrt{\mu}, -\sqrt{\mu}\right), \\ \lambda^{\underline{\alpha\beta}} = \operatorname{diag}\left(\varepsilon\sqrt{\mu}, -\frac{1}{\sqrt{\mu}}, -\frac{1}{\sqrt{\mu}}, -\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right). \end{gathered} \tag{21}$$

3.2.2. Уравнения связи для движущихся сред

Минковским были выведены уравнения связи для изотропных движущихся сред [16, 18] (уравнения Минковского для движущихся сред). Пусть u^α — 4-скорость среды. Считая диэлектрическую и магнитную проницаемости ε и μ скалярами, можно записать

$$G^{\alpha\beta} u_\beta = \varepsilon F^{\alpha\beta} u_\beta, \quad {}^*F^{\alpha\beta} u_\beta = \mu\, {}^*G^{\alpha\beta} u_\beta. \tag{22}$$

В трёхмерном виде уравнения (22) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} D^i = \varepsilon\left(E^i + \left[\frac{u_j}{c}, B_k\right]^i\right) - \left[\frac{u_j}{c}, H_k\right]^i = \varepsilon E^i + (\varepsilon\mu - 1)\left[\frac{u_j}{c}, H_k\right]^i, \\ B^i = \mu\left(H^i - \left[\frac{u_j}{c}, D_k\right]^i\right) + \left[\frac{u_j}{c}, E_k\right]^i = \mu H^i - (\varepsilon\mu - 1)\left[\frac{u_j}{c}, E_k\right]^i. \end{gathered} \tag{23}$$

Тамм расширил уравнения (23) для анизотропного случая [1,3], а именно считая, что диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют вид

$$\varepsilon^{i}_{\underline{j}} = \operatorname{diag}(\varepsilon^1_1, \varepsilon^2_2, \varepsilon^3_3), \quad \mu^{i}_{\underline{j}} = \operatorname{diag}(\mu^1_1, \mu^2_2, \mu^3_3), \tag{24}$$

а вектор скорости u^i системы отсчёта параллелен одной из главных осей анизотропии. Тогда уравнения Минковского для движущихся сред приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned} D^i &= \varepsilon^i_l \left(E^l + \left[\frac{u_j}{c}, B_k \right]^l \right) - \left[\frac{u_j}{c}, H_k \right]^i, \\ B^i &= \mu^i_l \left(H^l - \left[\frac{u_j}{c}, D_k \right]^l \right) + \left[\frac{u_j}{c}, E_k \right]^i. \end{aligned} \tag{25}$$

4. Формальная геометризация материальных уравнений Максвелла

Плебанским была предложена простейшая геометризация уравнений Максвелла [4, 5]. Однако в оригинальной статье сразу даны финальные формулы, а принципы и методы их получения остаются непрояснёнными. Авторы постарались явно выписать методику, которую, по нашему мнению, использовал Плебанский, а также подробно провести вычисления.

Основная идея геометризации по Плебанскому заключается в следующем:

1) записать уравнения Максвелла в среде в пространстве Минковского;
2) записать вакуумные уравнения Максвелла в эффективном римановом пространстве;
3) приравнять соответствующие члены уравнений.

В результате мы получим выражение диэлектрической и магнитной проницаемостей через геометрические объекты.

Прежде, чем приступать к реализации программы Плебанского, напомним некоторые вспомогательные соотношения.

4.1. Вспомогательные соотношения

4.1.1. Дифференциальное тождество Бьянки

Заметим, что уравнение (1) можно записать в виде

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0. \tag{26}$$

Действительно:

$$\begin{aligned} &\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = \\ &\quad = \partial_\alpha F_{\beta\gamma} - \Gamma^\delta_{\alpha\beta} F_{\delta\gamma} - \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} - \Gamma^\delta_{\beta\gamma} F_{\delta\alpha} - \Gamma^\delta_{\beta\alpha} F_{\gamma\delta} + \\ &\quad\quad + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} - \Gamma^\delta_{\gamma\alpha} F_{\delta\beta} - \Gamma^\delta_{\gamma\beta} F_{\alpha\delta}. \end{aligned} \tag{27}$$

Учитывая антисимметрию тензора $F_{\alpha\beta}$ и симметрию по нижним индексам символа Кристоффеля $\Gamma^\delta_{\alpha\beta}$, мы и получим (26).

Полученное уравнение записывается форминвариантно в произвольной системе координат. Поэтому мы и будем использовать уравнение (26) вместо более общеупотребительного уравнения (12).

4.1.2. Соотношения для метрического тензора

Нам понадобятся простые соотношения для метрического тензора. Выражение

$$g_{\alpha\delta} g^{\delta\beta} = \delta^\beta_\alpha \tag{28}$$

приводит к следующим частным соотношениям:

$$g_{0\delta}g^{\delta i} = g_{00}g^{0i} + g_{0k}g^{ki} = \delta^i_0 = 0, \tag{29}$$

$$g_{i\delta}g^{\delta j} = g_{i0}g^{0j} + g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i. \tag{30}$$

Соотношение (29) перепишем в виде

$$g^{0i} = -\frac{1}{g_{00}}g_{0k}g^{ki}. \tag{31}$$

Подставляя (31) в (30), получаем:

$$\left(g_{ik} - \frac{1}{g_{00}}g_{0i}g_{0k}\right)g^{kj} = \delta^j_i. \tag{32}$$

Это соотношение будет использовано позднее для упрощения записи итоговых уравнений.

4.2. Геометризация в декартовых координатах

Запишем уравнения Максвелла в среде в декартовых координатах с метрическим тензором $\eta_{\underline{\alpha\beta}} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$:

$$\begin{gathered}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0,\\ \partial_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}j^\beta.\end{gathered} \tag{33}$$

Теперь запишем вакуумные уравнения Максвелла в эффективном римановом пространстве с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ (относящиеся к ним величины пометим тильдой):

$$\begin{gathered}\partial_\alpha \tilde{F}_{\beta\gamma} + \partial_\beta \tilde{F}_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \tilde{F}_{\alpha\beta} = 0,\\ \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\tilde{G}^{\alpha\beta}\right) = \frac{4\pi}{c}\tilde{j}^\beta.\end{gathered} \tag{34}$$

В вакууме будет верно следующее соотношение (см. (19)):

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \tilde{G}_{\alpha\beta}. \tag{35}$$

Подымая индексы в (35), получим

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\tilde{G}_{\gamma\delta}. \tag{36}$$

Сравнивая почленно (33) и (34), с учётом (36) получим:

$$F_{\alpha\beta} = \tilde{F}_{\alpha\beta}, \qquad j^\alpha = \sqrt{-g}\tilde{j}^\alpha, \tag{37}$$

$$G^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\gamma\delta}. \tag{38}$$

Уравнения (38) собственно и являются искомыми 4-мерными геометризованными уравнениями связи (14). Следуя методике Плебанского, мы должны получить явный вид для трёхмерных уравнений связи (13).

4.2.1. Формула для вектора электрической индукции

Перепишем выражение (38) в виде:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} G^{\gamma\delta} \tag{39}$$

и будем искать значение компонент $F_{0\underline{i}}$, учитывая (3) и (5):

$$\begin{aligned}
F_{0i} = E_i = \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{0\gamma} g_{i\delta} G^{\gamma\delta} = \\
= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(g_{0j} g_{i0} G^{j0} + g_{00} g_{ij} G^{0j} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{0j} g_{ik} G^{jk} = \\
= \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{00} \left(\frac{1}{g_{00}} g_{0j} g_{i0} - g_{ij} \right) D^j - \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{0j} g_{ik} \varepsilon^{jkl} H_l.
\end{aligned} \tag{40}$$

Для компонент индукции D^i применим соотношение (32) и получим:

$$D^i = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij} E_j + \frac{1}{g_{00}} \varepsilon^{ijk} g_{j0} H_k. \tag{41}$$

Из (41) можно формально выписать выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}. \tag{42}$$

При этом смысл второго члена в (41) нуждается в дальнейшем уточнении.

4.2.2. Формула для вектора магнитной индукции

Для получения выражения для вектора магнитной индукции будем использовать тензоры (10) и (11). Опуская индексы у ${}^*G^{\alpha\beta}$ в выражении (38) и применяя соотношения (7) и (9), получаем:

$${}^*G_{\alpha\beta} = \sqrt{-g} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} {}^*F^{\gamma\delta}. \tag{43}$$

Будем искать значения компонент ${}^*G_{0\underline{i}}$:

$$\begin{aligned}
{}^*G_{0i} = \sqrt{-g} H_i = \sqrt{-g} g_{0\gamma} g_{i\delta} {}^*F^{\gamma\delta} = \\
= \sqrt{-g} \left(g_{0j} g_{i0} {}^*F^{j0} + g_{00} g_{ij} {}^*F^{0j} \right) + \sqrt{-g} g_{0j} g_{ik} {}^*F^{jk} = \\
= \sqrt{-g} g_{00} \left(\frac{1}{g_{00}} g_{0j} g_{i0} - g_{ij} \right) \frac{1}{\sqrt{-g}} B^j - \sqrt{-g} g_{0j} g_{ik} \varepsilon^{jkl} \frac{1}{\sqrt{-g}} E_l.
\end{aligned} \tag{44}$$

Применяя соотношение (32), получим для B^i следующее выражение:

$$B^i = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij} H_j - \frac{1}{g_{00}} \varepsilon^{ijk} g_{j0} E_k. \tag{45}$$

Из (45) можно формально выписать выражение для магнитной проницаемости:

$$\mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}. \tag{46}$$

Таким образом, геометризованные уравнения связи в декартовых координатах имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}D^i = \varepsilon^{ij} E_j + \varepsilon^{ijk} w_j H_k,\\ B^i = \mu^{ij} H_j - \varepsilon^{ijk} w_j E_k,\\ \varepsilon^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \qquad \mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \qquad w_i = \frac{g_{i0}}{g_{00}}.\end{gathered} \tag{47}$$

Эти уравнения и были приведены в исходной статье [4]. Теперь мы можем считать выполненной нашу задачу по восстановлению методики Плебанского.

4.2.3. Интерпретация члена электромагнитного взаимодействия

В уравнениях (47) член электромагнитного взаимодействия у Плебанского никакого истолкования не получает. Однако Леонгард предложил интерпретировать его как скорость движения геометризованной системы отсчёта [6]. Действительно, на основании (23) уравнения (47) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}D^i = \varepsilon^{ij} E_j + \left[\frac{u_j}{c}, H_k\right]^i,\\ B^i = \mu^{ij} H_j - \left[\frac{u_j}{c}, E_k\right]^i,\\ \varepsilon^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \qquad \mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \qquad u_i = \frac{g_{i0}}{g_{00}} \frac{c\sqrt{g^{(3)}}}{n^2-1},\end{gathered} \tag{48}$$

где u^i — трёхмерная скорость движения системы отсчёта, $g^{(3)} = \det g_{ij}$ — определитель пространственной части метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — показатель преломления.

4.3. Геометризация в криволинейных координатах

Расширим теперь область применения полученных формул за счёт записи уравнений Максвелла в произвольных криволинейных системах координат. Пусть исходное пространство задаётся метрическим тензором $\gamma_{\alpha\beta}$. Тогда система (33) примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0,\\ \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \partial_\alpha \left(\sqrt{-\gamma} G^{\alpha\beta}\right) = \frac{4\pi}{c} j^\beta.\end{gathered} \tag{49}$$

Далее, повторяя шаги для эффективного риманового пространства (34), (35), (36), получим аналог (37) и (38):

$$F_{\alpha\beta} = \tilde{F}_{\alpha\beta}, \qquad j^\alpha = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}} \tilde{j}^\alpha, \tag{50}$$

$$G^{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\gamma\delta}. \tag{51}$$

4.3.1. Формула для вектора электрической индукции

Запишем выражение (51) в виде:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-g}} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} G^{\gamma\delta}. \tag{52}$$

Рассуждая аналогично (40), получим для компонент индукции D^i соотношение:

$$D^i = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}} \frac{1}{g_{00}} g^{ij} E_j + \frac{1}{g_{00}} \varepsilon^{ijk} g_{j0} H_k, \tag{53}$$

а выражение для диэлектрической проницаемости примет вид:

$$\varepsilon^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}} \frac{1}{g_{00}} g^{ij}. \tag{54}$$

4.3.2. Формула для вектора магнитной индукции

Перепишем (43) с учётом (51)

$$^{*}G_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{\gamma}} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} {}^{*}F^{\gamma\delta}. \tag{55}$$

По аналогии с (44), (45) и (46) получим соотношение для B^i:

$$B^i = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{g_{00}} g^{ij} H_j - \frac{1}{g_{00}} \varepsilon^{ijk} g_{j0} E_k, \tag{56}$$

и для магнитной проницаемости:

$$\mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}} \frac{1}{g_{00}} g^{ij}. \tag{57}$$

Таким образом, геометризованные уравнения связи в криволинейных координатах с метрическим тензором $\gamma_{\alpha\beta}$ имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
D^i = \varepsilon^{ij} E_j + \varepsilon^{ijk} w_j H_k, \\
B^i = \mu^{ij} H_j - \varepsilon^{ijk} w_j E_k, \\
\varepsilon^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}} \frac{1}{g_{00}} g^{ij}, \qquad \mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}} \frac{1}{g_{00}} g^{ij}, \qquad w_i = \frac{g_{i0}}{g_{00}}.
\end{gathered} \tag{58}$$

5. Выводы

Авторами была восстановлена методика и расчёты Плебанского. Однако данный подход к геометризации представляется неокончательным, поскольку рассматривает специальный случай. А именно, сам метод получения соотношений для геометризации (уравнение (36)) неявно подразумевает изотропность среды (21). Впрочем, это не мешает применять данный метод при расчётах в области трансформационной оптики.

Литература

1. *Тамм И. Е.* Электродинамика анизотропной среды в специальной теории относительности // Журнал Русского физико-химического общества. Часть физическая. — 1924. — Т. 56, № 2-3. — С. 248–262. [Tamm I. E. Electrodynamics of an Anisotropic Medium in a Special Theory of Relativity // Russian Journal of Physical and Chemical Society. Part Phys. — 1924. — Vol. 56 (2–3). — Pp. 248–262. — (in russian).]
2. *Тамм И. Е.* Кристаллооптика теории относительности в связи с геометрией биквадратичной формы // Журнал Русского физико-химического общества. Часть физическая. — 1925. — Т. 57, № 3-4. — С. 209–240. [Tamm I. E. Crystal Optics Theory of Relativity in Connection with Geometry Biquadratic Forms // Russian Journal of Physical and Chemical Society. Part Physical. — 1925. — Vol. 57 (3–4). — Pp. 209–240. — (in russian).]
3. *Tamm I. E., Mandelstam L. I.* Elektrodynamik der anisotropen Medien in der speziellen Relativitatstheorie // Mathematische Annalen. — 1925. — Bd. 95, No. 1. — Ss. 154–160.
4. *Plebanski J.* Electromagnetic waves in gravitational fields // Physical Review. — 1960. — Vol. 118, No 5. — Pp. 1396–1408. — http://prola.aps.org/abstract/PR/v118/i5/p1396_1.
5. *Felice F.* On the gravitational field acting as an optical medium // General Relativity and Gravitation. — 1971. — Vol. 2, No 4. — Pp. 347–357. — ISSN 0001-7701. — http://link.springer.com/10.1007/BF00758153.
6. *Leonhardt U., Philbin T. G., Haugh N.* General Relativity in Electrical Engineering. — 2008. — Pp. 1–19.
7. *Leonhardt U., Philbin T. G.* Transformation Optics and the Geometry of Light // Progress in Optics. — 2009. — Vol. 53. — Pp. 69–152. — http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079663808002023.
8. *Thompson R. T., Cummer S. A., Frauendiener J.* A Completely Covariant Approach to Transformation Optics // Journal of Optics. — 2011. — Vol. 13, No 2. — P. 024008. — ISSN 2040-8978.
9. *Кулябов Д. С., Немчанинова Н. А.* Уравнения Максвелла в криволинейных координатах // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 2. — С. 172–179. [Kulyabov D. S., Nemchaninova N. A. Maxwell's Equations in Curvilinear Coordinates // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2011. — No 2. — Pp. 172–179. — (in russian).]
10. *Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Korolkov V. I.* Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2012. — No 1. — Pp. 96–106. — http://arxiv.org/abs/1211.6590.
11. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. — М.: Мир, 1987. — Т. 1, 528 с. [Penrose R., Rindler W. Spinors and Space-Time: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields, Vol. 1. — Cambridge University Press, 1984.]
12. *Сивухин Д. В.* О Международной системе физических величин // Успехи физических наук. — 1979. — Т. 129, № 10. — С. 335–338. — ISSN 0042-1294. — http://ufn.ru/ru/articles/1979/10/h/. [Sivukhin D. V. The International System of Physical Units // Soviet Physics Uspekhi. — 1979. Vol. 22 (10). — Pp. 834–836. — doi: 10.1070/PU1979v022n10ABEH005711.]
13. *Korol'kova A. V., Kulyabov D. S., Sevast'yanov L. A.* Tensor Computations in Computer Algebra Systems // Programming and Computer Software. — 2013. — Vol. 39, No 3. — Pp. 135–142. — ISSN 0361-7688. — http://link.springer.com/10.1134/S0361768813030031.
14. *Kulyabov D. S.* Geometrization of Electromagnetic Waves // Mathematical Modeling and Computational Physics. — Dubna: JINR, 2013. — P. 120. — http:

//mmcp2013.jinr.ru.
15. *Кулябов Д. С., Королькова А. В.* Уравнения Максвелла в произвольной системе координат // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2013. — № 1 (28). — С. 29–44. [Kulyabov D. S., Korolkova A. V. Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // Bulletin of Tver State University. Series "Applied Mathematics". — 2013. — Vol. 1 (28). — Pp. 29–44. — (in russian)]
16. *Minkowski H.* Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. — 1908. — No. 68. — Ss. 53–111.
17. *Стрэттон Д. А.* Теория электромагнетизма. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. [Stratton J. A. Electromagnetic Theory. — MGH, 1941.]
18. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. — М.: Издательство иностранной литературы, 1958. [Sommerfeld A. Lectures on Theoretical Physics: Electrodynamics. Lectures on Theoretical Physics. — Academic Press, 1964.]

UDC 519.21; 51-76

The Simplest Geometrization of Maxwell's Equations

D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, L. A. Sevastyanov

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

For research in the field of transformation optics and for the calculation of optically inhomogeneous lenses the method of geometrization of the Maxwell equations seems to be perspective. The basic idea is to transform the coefficients of constitutive equations, namely the dielectric permittivity and magnetic permeability into the effective geometry of space-time (and the vacuum Maxwell equations). This allows us to solve the direct and inverse problems, that is, to find the permittivity and magnetic permeability for a given effective geometry (paths of rays), as well as finding the effective geometry on the base of dielectric permittivity and magnetic permeability. The most popular naive geometrization was proposed by J. Plebanski. Under certain limitations it is quite good for solving relevant problems. It should be noted that in his paper only the resulting formulas and exclusively for Cartesian coordinate systems are given. In our work we conducted a detailed derivation of formulas for the naive geometrization of Maxwell's equations, and these formulas are written for an arbitrary curvilinear coordinate system. This work is a step toward building a complete covariant geometrization of the macroscopic Maxwell's equations.

Key words and phrases: Maxwell's equations, constitutive equations, Maxwell's equations geometrization, Riemann geometry, curvilinear coordinates, Plebanski's geometrization.