Построение стохастической модели Bittorrent-подобного протокола методом комбинаторной кинетики

Поведение сетевых систем зависит от случайных возмущений. И это необходимо учитывать при их моделировании детерминистическими моделями. Необходимо учитывать множество факторов, таких, например, как грубость получившейся модели. Если модель грубая, то стохастические добавки обычно изменяют ее поведение незначительно, внося лишь малые поправки. В негрубых моделях стохастические поправки могут принципиально изменить поведение системы. При стохастизации математических моделей возникает проблема, как ввести стохастический член. Существует несколько способов введения такого члена. Самый простой вариант — аддитивное добавление стохастического члена к детерминистическому уравнению. При таком введении возникают свободные параметры, требующие дальнейшего определения. Данные стохастические члены обычно интерпретируются как внешнее случайное воздействие и связь их со структурой самой системы остается непонятной. Авторы предлагают для стохастизации использовать метод комбинаторной кинетики, который позволяет получать стохастические дифференциальные уравнения со стохастическим членом, согласованным с детерминистическим. Моделируется Bittorrent-подобный протокол. Вводятся интенсивности появления новых пиров в системе и ухода сидов из системы. Построенная математическая модель относится к классу эпидемиологических моделей, что позволяет провести ее анализ, базируясь на известных результатах.

Ключевые слова: *комбинаторная кинетика, стохастические дифференциальные уравнения, уравнение Фоккера-Планка, bittorrent протокол, основное кинетическое уравнение.*

Кулябов Д.С., *к.ф.-м.н., доцент кафедры систем телекоммуникаций РУДН, dskulyabov@gmail.com*

Королькова А.В., *к.ф.-м.н., доцент кафедры систем телекоммуникаций РУДН, akorolkova@sci.pfu.edu.ru*

Демидова А.В., *аспирант кафедры систем телекоммуникаций РУДН, avdemidova@gmail.com*

Кузнецова О.В., *аспирант кафедры систем телекоммуникаций РУДН*

Введение

Целью работы является создание стохастической модели протокола типа Bittorrent. Выбор стохастической модели обусловлен не только возможностью учета случайных воздействий, но и удобством исследования модели, поскольку мы получаем одновременно два представления: обыкновенное дифференциальное уравнение в форме уравнения в форме уравнения Ланжевена и уравнение в частных производных для плотности распределения в форме уравнения Фоккера-Планка. Обыкновенные дифференциальные уравнения удобны для качественного исследования уравнений, а уравнения в частных производных для исследования задачи с наложенными граничными условиями.

Методы исследования. Для получения стохастических дифференциальных уравнений мы используем метод комбинаторной кинетики. Особенностью данного метода является то, что стохастический член вводится не ad-hoc, а получается одновременно с детерминистической частью из одних и тех же первых принципов. В этом смысле можно говорить, что мы получаем стохастические дифференциальные уравнеия с согласованной стохастической и детерминистической частями.

Результаты. Нами получено семейство стохастических моделей протокола Bittorrent на основе ящичной модели, схожей с эпидемиологической моделью. Эта схожесть позволяет применить для их анализа хорошо известные результаты эпидемиологических моделей. Однако некоторая громоздкость полученных моделей заставляет авторов продолжить исследования.

Метод комбинаторной кинетики

Многие стохастические процессы относятся к одношаговым процессам, называемым также процессами рождения-гибели. Это Марковские процессы с непрерывным временем, принимающие целочисленные значения, а матрица переходов допускает лишь переходы между соседними участками.

Системы уравнений, возникающие при описании систем с взаимодействующими элементами, во многом близки системам дифференциальных уравнений, описывающих кинетику химических реакций. Так, например, система Лотки-Вольтерра была первоначально выведена Лоткой как система, описывающая некоторую гипотетическую химическую реакцию, и лишь позже Вольтерра вывел ее как систему, описывающую систему «хищник-жертва».

Так называемая химическая кинетика описывает реакции с помощью уравнений, которые имеют следующий общий вид:

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проекты 8.7962.2013, 14.U02.21.1874).

$$\sum_{i=1}^{p} m_i X_i \xrightarrow{k} \sum_{i=1}^{q} n_i Y_i \qquad (1)$$

где натуральные числа m_i и n_i называются *стехиометрическими коэффициентами*. Это символическая запись реакции, в которой m_1 молекул реагента X_1, m_2 молекул реагента X_2, ..., m_p молекул реагента X_p, вступив в реакцию образуют n_1 молекул вещества Y_1, n_2 молекул вещества Y_2, ..., n_q молекул вещества Y_q соответственно. В рамках химической кинетики считается, что скорость протекания реакции *пропорциональна концентрациям реагентов*. Это есть *закон действующих масс*. Поэтому, если обозначить через x_i и y_i концентрации соответствующих веществ, то имеем уравнение для скорости изменения концентраций веществ:

$$x_1'(t) = \ldots = x_p'(t) = -k\prod_{i=1}^{p} x_i^{m_i}(t) = y_1'(t) = \ldots = y_q'(t) \qquad (2)$$

здесь k – *константа скорости протекания реакции*. Уравнение (2) называется кинетическим уравнением.

Эволюция во времени многомерных систем рождения-гибели может быть рассмотрена как результат индивидуальных взаимодействий между элементами этой системы. К таким системам можно отнести химические реакции (реакции взаимодействия молекул), экологические системы, где особи гибнут, дают потомство и уничтожают друг друга, системы, описывающие эпидемии, в которых заболевание передается от одного индивидуума другому при контакте и т.д. Такие системы можно моделировать с помощью метода комбинаторной кинетики.

Комбинаторная кинетика [1,2] расширяет методику химической кинетики и вносит следующие основные изменения:

– рассматриваются не скорости, а вероятности переходов;

– детерминистические уравнения заменяются стохастическими.

Для описания системы в данном методе используется основное кинетическое уравнение (*Master equation*), называемое также производящим или управляющим уравнением. Это уравнение описывает эволюцию распределения вероятностей в цепи Маркова с непрерывным временем и представляет собой разновидность уравнения Колмогорова-Чепмена для марковских процессов. Совпадает, по существу, с прямым уравнением Колмогорова. Для вероятности $P(n,t)$ нахождения системы в состоянии n в момент времени t основное кинетическое уравнение имеет вид [3,4]:

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = \sum_m \left(w_{nm}P(m,t) - w_{mn}P(n,t)\right)$$

где w_{nm} – вероятность перехода системы из состояния m в состояние n в единицу времени. Таким образом основное кинетическое уравнение представляет собой балансовое уравнение для вероятности каждого состояния n. Первый член соответствует возрастанию вероятности из-за переходов из других состояний m, а второй – уменьшению вероятности из-за переходов в другие состояния.

В основе комбинаторной кинетики лежит предположение, что вероятность перехода из одного состояния в другое, являющегося следствием взаимодействия, пропорциональна числу возможных взаимодействий данного типа.

Рассмотрим систему из n компонентов, в которой происходят s различных взаимодействий:

$$\sum_a N_a^A X_a \underset{k_A^-}{\overset{k_A^+}{\longleftrightarrow}} \sum_a M_a^A X_a,$$
$$(A = \overline{1,s};\ a = \overline{1,n})$$

Коэффициент N_a^A при X_a есть число компонентов типа X_a в левой части уравнения, а M_a^A – соответственно в правой. Запишем в векторном представлении:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\mathbf{N}^A = (N_1^A, N_2^A, \ldots, N_n^A),$$
$$\mathbf{M}^A = (M_1^A, M_2^A, \ldots, M_n^A)$$

где x_a есть число компонентов вида X_a. Также определим

$$\mathbf{r}^A = \mathbf{M}^A - \mathbf{N}^A.$$

Таким образом, один шаг взаимодействия А в прямом и обратном направлениях можно записать в виде двух соотношений:

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{r}^A$$
$$\mathbf{x} \to \mathbf{x} - \mathbf{r}^A.$$

Вероятности перехода из состояния $\mathbf{x}$ в состояние $\mathbf{x} \pm \mathbf{r}^A$ в единицу времени пропорциональны соответственно числу способов выбора комбинации N_a^A или M_a^A из x компонентов и определяются выражениями:

$$t_A^+(\mathbf{x}) = k_A^+ \prod_a \frac{x_a!}{(x_a - N_a^A)!}$$

$$t_A^-(\mathbf{x}) = k_A^- \prod_a \frac{x_a!}{(x_a - M_a^A)!}$$

Таким образом, общий вид основного кинетического уравнения для целочисленной переменной x, изменяющейся шагами длины $\mathbf{r}^A$, принимает вид:

$$\partial_t P(\mathbf{x},t) = \sum_A \Big\{\Big[t_A^-(\mathbf{x}+\mathbf{r}^A)P(\mathbf{x}+\mathbf{r}^A,t) - t_A^+(\mathbf{x})P(\mathbf{x},t)\Big] + \\ + \Big[t_A^+(\mathbf{x}-\mathbf{r}^A)P(\mathbf{x}-\mathbf{r}^A,t) - t_A^-(\mathbf{x})P(\mathbf{x},t)\Big]\Big\} \qquad (7)$$

Разложение Крамерса-Мойала используется для перехода от основного кинетического уравнения к уравнению Фоккера-Планка [1]. Преобразуем уравнение (7) к уравнению Фоккера-Планка. Для этого делается несколько предположений. Во-первых предполагается, что имеют место только малые скачки, т.е. $t_A(\mathbf{x})$ является функцией медленно изменяющейся с изменением $\mathbf{x}$. Второе предположение говорит о том, что $P(\mathbf{x},t)$ также медленно изменяется с изменением $\mathbf{x}$. Тогда можно выполнить сдвиг из точки $(\mathbf{x} \pm \mathbf{r}^A)$ в точку $\mathbf{x}$, разложив правую часть в ряд Тейлора:

$$\partial_t P(\mathbf{x},t) = \sum_A \left\{ \sum_n \left[\frac{(\mathbf{r}^A\nabla)^n}{n!} t_A^-(\mathbf{x})P(\mathbf{x},t) \right] + \\ + \sum_n \left[\frac{(-\mathbf{r}^A\nabla)^n}{n!} t_A^+(\mathbf{x})P(\mathbf{x},t) \right] \right\}$$

и отбросив члены порядка выше второго, получим уравнение Фоккера-Планка

$$\partial_t P(\mathbf{x},t) = -\sum_a \partial_a\big[A_a(\mathbf{x})P(\mathbf{x},t)\big] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{a,b} \partial_a \partial_b \big[B_{ab}(\mathbf{x})P(\mathbf{x},t)\big], \qquad (9)$$

где

$$A_a(\mathbf{x}) = \sum_A \mathbf{r}_a^A \left[t_A^+(\mathbf{x}) - t_A^-(\mathbf{x}) \right]$$
$$B_{ab}(\mathbf{x}) = \sum_A \mathbf{r}_a^A \mathbf{r}_b^A \left[t_A^+(\mathbf{x}) + t_A^-(\mathbf{x}) \right] \tag{10}$$

Уравнение Фоккера-Планка – одно из стохастических дифференциальных уравнений, которое описывает временную эволюцию функции плотности вероятности координат и импульса частиц в процессах, где важна стохастическая природа явления. Названо в честь нидерландского и немецкого физиков Адриана Фоккера и Макса Планка, также известно как прямое уравнение Колмогорова. Впервые уравнение было использовано для статистического описания броуновского движения частиц в воде. Для этого вводится функция плотности вероятности $W(\mathbf{v}, t)$, описывающая вероятность того, что частица имеет скорость в интервале $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$, если в момент времени 0 она имела начальную скорость $\mathbf{v}_0$.

Рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение в форме уравнения Ланжевена, которое состоит из обычного нестохастического дифференциального уравнения и дополнительной части, описывающей белый шум.

$$d\mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{X},t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X},t)d\mathbf{W}$$

где $\mathbf{X} \in \mathrm{R}^N$ – функция состояния системы, а $\mathbf{W} \in \mathrm{R}^N$ – стандартное N-мерное броуновское движение. Можно показать, что уравнение Фоккера-Планка для плотности условной вероятности $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = p$ имеет вид:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial_i} A_i^1(\mathbf{x},t) P(\mathbf{x},t) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} \left[\mathbf{B}(\mathbf{x},t) \mathbf{B}(\mathbf{x},t)^T \right] P(\mathbf{x},t)$$

Модель bittorrent

Представленные методы вполне применимы к моделированию одноранговых сетей [5, 6], в частности, для моделирования протокола BitTorrent. BitTorrent – пиринговый (P2P) сетевой протокол для кооперативного обмена файлами через Интернет.

Файлы передаются частями, каждый torrent-клиент, получая (скачивая) эти части, в то же время отдаёт (закачивает) их другим клиентам, что снижает нагрузку и зависимость от каждого клиента-источника и обеспечивает избыточность данных.

Сначала рассмотрим упрощенную закрытую систему, т.е. такую, в которую не приходят новые клиенты и не уходят клиенты, которые раздают файл. Кроме того, сделаем предположение, что файл состоит из одной части. Таким образом за один шаг взаимодействия нового клиента (личера), желающего скачать файл, и клиента, раздающего файл (сида), новый клиент скачивает весь файл и становится сидом.

Пусть N – это обозначение нового клиента (личера), S – это сид, а β – коэффициент взаимодействия. Тогда схема взаимодействия будет иметь вид:

$$N + S \xrightarrow{\beta} 2S$$

Схема отражает, что после взаимодействия личера и сида, в системе пропадает личер и появляется еще один сид (т.е. новый клиент скачивает файл и становиться раздающим).

Введем обозначения: пусть n – это численность новых клиентов, а s – количество сидов в системе. Далее пользуясь комбинаторной кинетикой запишем:

$$\mathbf{r} = (-1,1) \text{ и } t^+(n,s) = \beta ns$$

где вектор $\mathbf{r}$ – это вектор разности коэффициентов элементов в правой и левой частях схемы, $t^+(n,s)$ вероятность перехода из состояния (n,s) в состояние $(n-1, s+1)$ в единицу времени, т.е. вероятность взаимодействия личера и сида, которая пропорциональна численности элементов в системе. Далее, пользуясь формулами (9) и (10) запишем уравнение Фоккера-Планка для данной модели:

$$\partial_t P(n,s) = -\sum_a \partial_a \left[A_a(n,s) P(n,s) \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{a,b} \partial_a \partial_b \left[B_{ab}(n,s) P(n,s) \right], \text{ где}$$
$$A(n,s) = \mathbf{r} t^+(n,s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta ns = \begin{pmatrix} -\beta ns \\ \beta ns \end{pmatrix}$$
$$B(n,s) = \mathbf{r}\mathbf{r}^T t^+(n,s) = \begin{pmatrix} \beta ns & -\beta ns \\ -\beta ns & \beta ns \end{pmatrix}$$

Как следствие можно получить систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику численности новых клиентов и сидов:

$$\begin{cases} \dot{n} = -\beta ns \\ \dot{s} = \beta ns \end{cases}$$

Далее рассмотрим открытую систему, в которой новые клиенты могут приходить в систему с интенсивностью λ, а сиды уходить из нее с интенсивностью μ.

Схема взаимодействия и вектор $\mathbf{r}$ будут иметь вид:

$$0 \xrightarrow{\lambda} N \qquad \mathbf{r}^1 = (1,0)$$
$$N + S \xrightarrow{\beta} 2S \qquad \mathbf{r}^2 = (-1,1)$$
$$S \xrightarrow{\mu} 0 \qquad \mathbf{r}^3 = (0,-1)$$

Первая строка в схеме описывает появление нового клиента в системе. Вторая строка отражает взаимодействие нового клиента и сида, в результате которого появляется новый сид. А третья – это уход сида из системы.

Запишем вероятности переходов:

$$t_1^+(n,s) = \lambda$$
$$t_2^+(n,s) = \beta ns$$
$$t_3^+(n,s) = \mu s$$

Аналогично, пользуясь формулами (9) и (10), можно записать уравнение Фоккера-Планка для данной модели:

$$\partial_t P(n,s) = -\sum_a \partial_a \left[A_a(n,s) P(n,s) \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{a,b} \partial_a \partial_b \left[B_{ab}(n,s) P(n,s) \right],$$

где

$$A(n,s) = \mathbf{r}^1 t_1^+(n,s) + \mathbf{r}^2 t_2^+(n,s) + \mathbf{r}^3 t_3^+(n,s) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta ns + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mu s = \begin{pmatrix} \lambda - \beta ns \\ \beta ns - \mu s \end{pmatrix}$$
$$B(n,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1,0) \lambda + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-1,1) \beta ns +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (0,-1) \mu s = \begin{pmatrix} \lambda + \beta ns & -\beta ns \\ -\beta ns & \beta ns + \mu s \end{pmatrix}$$

Как следствие можно получить систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику численности новых клиентов и сидов:

$$\begin{cases} \dot{n} = \lambda - \beta ns \\ \dot{s} = \beta ns - \mu s \end{cases}$$

Теперь рассмотрим систему, в которой передаются файлы, состоящие из m частей. В системе присутствуют следующие участники:

– Новые клиенты (N) – это клиенты, у которых нет ни одной части файла.

– Личеры (L) – это клиенты, которые уже скачали какое-то количество частей файла и могут их раздавать новым клиентам или другим личерам.

– Сиды (S) – клиенты, у которых есть весь файл целиком, т.е. они только раздают.

Введем обозначения. Пусть n – количество новых клиентов в системе, s – количество сидов, а l_i – количество личеров, у которых есть ровно i частей файла, где $i=\overline{1,n-1}$. Также пусть $\overline{L_i}$ – это личеры, у которых есть какие-либо части файла интересующие личера L_i и соответственно $\overline{l_i}$ их количество.

Для данной системы в схеме взаимодействия будут иметь место следующие типы соотношений:

$$0 \xrightarrow{\lambda} N$$
$$N + S \xrightarrow{\beta} L_1 + S$$
$$N + L_i \xrightarrow{\beta_i} L_1 + L_i$$
$$L_i + \overline{L_i} \xrightarrow{\delta_i} L_{i+1} + \overline{L_i}$$
$$L_i + S \xrightarrow{\gamma_i} L_{i+1} + S$$
$$L_{m-1} + \overline{L_{m-1}} \xrightarrow{\gamma_{m-1}} S + \overline{L_{m-1}}$$
$$L_{m-1} + S \xrightarrow{\gamma} 2S$$
$$S \xrightarrow{\mu} 0$$

Один шаг взаимодействия – это передача одной части файла от одного клиента другому. Первое соотношение описывает появление нового клиента в системе с интенсивностью λ. Второе и третье соотношения описывают взаимодействие нового клиента с сидом или личером с коэффициентами β и β_i ($i = 1,\ldots,m-1$), в результате которого новый клиент становиться личером из класса L_1. Четвертое и пятое соотношения – это взаимодействие личера L_i с сидом или другим личером с коэффициентами δ_i и γ_i ($i = 1,\ldots,m-2$), что приводит к получению личером одной части файла и переходу его в класс L_{i+1}. Шестое и седьмое описывает процесс перехода личера в класс сидов с коэффициентами γ_{m-1} и γ, т.е. личер скачивает последнюю часть файл. Последнее соотношение – это уход сида из системы с интенсивность μ.

Запишем векторы $\mathbf{r}_A = (n, l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}, s)$ и вероятности перехода t_i^+:

$$\mathbf{r}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{3i} = (-1,1,0,\ldots,0), \quad i = 1,\ldots,m-1$$
$$\mathbf{r}_{4i} = \mathbf{r}_{5i} = (0,\ldots,\underset{i+1}{-1},\underset{i+2}{1},\underset{\text{места}}{\ldots},0), \quad i=1,\ldots,m-2$$
$$\mathbf{r}_6 = \mathbf{r}_7 = (0,0,\ldots,-1,1)$$
$$\mathbf{r}_8 = (0,0,\ldots,0,-1)$$

$$t_1^+(n,l,s) = \lambda$$
$$t_2^+(n,l,s) = \beta ns$$
$$t_{3i}^+(n,l,s) = \beta_i n l_i$$
$$t_{4i}^+(n,l,s) = \delta_i l_i \overline{l_i}, \quad i = \overline{1,m-1}$$
$$t_{5i}^+(n,l,s) = \gamma_i l_i s, \quad i = \overline{1,m-2}$$
$$t_6^+(n,l,s) = \gamma_{m-1} l_{m-1} \overline{l_{m-1}}$$
$$t_7^+(n,l,s) = \gamma l_{m-1} s$$
$$t_8^+(n,l,s) = \mu s$$

Аналогично предыдущей модели, пользуясь формулами (9) и (10), можно записать уравнение Фоккера-Планка для данной модели. Но так как детерминистическое поведение описывает вектор **A**, запишем только его:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda - \beta ns - \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i n l_i \\ \beta ns + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i n l_i - \delta_1 l_1 \overline{l_1} - \gamma_1 l_1 s \\ \delta_1 l_1 \overline{l_1} + \gamma_1 l_1 s - \delta_2 l_2 \overline{l_2} - \gamma_2 l_2 s \\ \ldots \\ \delta_{m-2} l_{m-2} \overline{l_{m-2}} + \gamma_{m-2} l_{m-2} s - \gamma_{m-1} l_{m-1} \overline{l_{m-1}} - \gamma l_{m-1} s \\ \gamma_{m-1} l_{m-1} \overline{l_{m-1}} + \gamma l_{m-1} s - \mu s \end{pmatrix}$$

Как следствие можно получить систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику численности новых клиентов, личеров и сидов:

$$\begin{cases} \dot{n} = \lambda - \beta ns - \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i n l_i \\ \dot{l}_1 = \beta ns + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i n l_i - \delta_1 l_1 \overline{l_1} - \gamma_1 l_1 s \\ \dot{l}_2 = \delta_1 l_1 \overline{l_1} + \gamma_1 l_1 s - \delta_2 l_2 \overline{l_2} - \gamma_2 l_2 s \\ \ldots \\ \dot{l}_{m-1} = \delta_{m-2} l_{m-2} \overline{l_{m-2}} + \gamma_{m-2} l_{m-2} s - \gamma_{m-1} l_{m-1} \overline{l_{m-1}} - \gamma l_{m-1} s \\ \dot{s} = \gamma_{m-1} l_{m-1} \overline{l_{m-1}} + \gamma l_{m-1} s - \mu s \end{cases}$$

Сделаем предположение, что $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{m-1} = const$. Сложим в системе уравнения со второго по m+1 и при обозначении всех личеров и сидов через $l = l_1 + l_2 + \ldots + l_{m-1} + s$ получим упрощенную систему следующего вида

$$\begin{cases} \dot{n} = \lambda - \beta n(l+s) \\ \dot{l} + \dot{s} = \beta n(l+s) - \mu s \end{cases}$$

Заключение

Авторы рассматривают полученные результаты в первую очередь как иллюстрацию к развиваемому ими методу стохастической кинетики. Данный метод позволяет из первых принципов получать стохастические модели, детерминистические части которых сравнимы с моделями, полученными эвристическими методами, а стохастические части согласованными с детерминистическими.

Полученная же модель протокола Bittorrent представляется адекватной для случая с неограниченной пропускной способностью сети. При наложении на систему ограничений представляется необходимым вводить в уравнение разнообразные трофические функции.

Литература

1. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986.
2. *Демидова А.В., Кулябов Д.С.* Введение согласованного стохастического члена в уравнение модели роста популяций // Вестник РУДН, №3 – С. 69-78.
3. *Паули В.* Труды по квантовой теории. – М.: Наука, 1975. – Т. 1.
4. *Ван Кампен Н.Г.,* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990 г.
5. *Адаму А., Гайдамака Ю.В.* Анализ вероятности непрерывного воспроизведения видеопотока в Р 2 Р -сети // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика» – М.: Изд-во РУДН, 2011. – №4. - С. 38-46.
6. *Aminu Adamu, Yuliya Gaidamaka, and Andrey Samuylov* Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network // Lecture Notes in Computer Science. – Germany, Heidelberg: Springer, 2011. – Vol. 6869. Pp. 428-439.

Bittorent-likeprotokol stochastic model development using combinatorial kinetics

Kulyabov D.S., *PhD, associate professor, telecommunication systems department, PFUR, dskulyabov@gmail.com*
Korolkova A.V., *PhD, associate professor, telecommunication systems department, PFUR, akorolkova@sci.pfu.edu.ru*
Demidova A.V., *PhD student, telecommunication systems department, PFUR, avdemidova@gmail.com*
Kuznetsova O.V., *PhD student, telecommunication systems department, PFUR*

Abstract

Network systems behavior depends on random perturbations. And this should be considered when modeling it with deterministic models. Moreover, a lot of factors are necessary to be taken into consideration, such as roughness of constructed model. If the model is rough, then stochastic additions usually change its behavior insignificantly, making only small modifications. But in structurally unstable models stochastic adjustments can change the system behavior fundamentally. With stochastizating of the mathematical models there appears a problem of stochastic member insertion. There are several ways of such member insertion. The easiest way is the additive supplementation of the stochastic member to the deterministic equation. But with such implementation there emerge free parameters demanding further definition. Besides, the given stochastic members are usually interpreted as external random influence and its relation to the structure of the system remains inexplicable. For stochastization authors propose to use combinatorial kinetics which allows withdrawing stochastic differential equations with stochastic member, compatible with deterministic one. Bittorent-like protocol is modeled. New peers appearance in system and seeds' withdrawal from system intensities are embedded. The developed model belongs to the epidemiological models class, and this allows to analyze it basing on known results.

Keywords: *stochastic differential equations, combinatorial kinetic, bittorent protocol, fokker-planck equation, master equation.*