РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи

Кулябов Дмитрий Сергеевич

ПРИМЕНЕНИЕ 2-СПИНОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Рыбаков Ю. П.

Москва — 2000

Оглавление

Введение

В данной работе рассмотрены две темы: применение лоренцевых 2-спиноров для решения физических задач (в частности при решении задач КЭД) и исследование влияния гравитационного поля на устойчивость самогравитивующих солитонов в нелинейной электродинамике.

Применение лоренцевых 2-спиноров

Пространство-время, в котором мы живём, с очень большой степенью точности можно рассматривать как гладкое четырёхмерное многообразие, наделённое гладкой лоренцевой метрикой в рамках частной или общей теории относительности. Наиболее употребимым формализмом для математического описания многообразий является тензорный анализ (или один из эквивалентных альтернативных подходов типа картановского исчисления подвижных реперов). Однако именно для четырёхмерных многообразий с лоренцевой метрикой существует и другой формализм, во многих отношениях более удобный. Это — 2-спинорный формализм [18, 20]. Ещё в начале века Картан ввёл общее понятие спинора [48], потом Дирак на примере своего уравнения для электрона продемонстрировал фундаментальную роль спиноров в физике, а Ван дер Верден разработал основы 2-спинорной алгебры и построил систему обозначений — однако до сих пор 2-спинорное исчисление всё ещё сравнительно непривычно.

Спинорное исчисление позволяет исследовать более глубокий уровень структуры пространства-времени, чем общепринятое исчисление мировых тензоров. Преимущество тензорного исчисления — в его универсальной применимости к многообразиям произвольной размерности, а не в возможности описывать конкретный тип многообразия — пространство-время [52]. Таким образом из-за своей большей общности тензорный подход менее изящен, чем более специализированный 2-спинорный подход; в нём возникают трудности при описании некоторых тонких свойств пространства-времени, существенных в квантовой теории; к тому же он приводит иногда к чрезвычайно громоздким математическим выкладкам.

Так же представляется не вполне удовлетворительным применение дираковских 4-спиноров. Данный формализм (в его современной форме) является существенно координатнозависимым. Кроме того, он вынуждает работать сразу в двух пространствах — в тензорном и спинорном, что ещё более усложняет вычисления. Выходом из данной ситуации может быть переход к работе только в одном из пространств. То есть получаем две ветви: тензорный (бивекторы) и спинорный (2-спиноры) формализмы.

В даной работе продемонстрирована возможность последовательного введения 2-спинорного формализма. Это сделано с различных позиций. Дано геометрическое представление 2-спиноров и различных операций над ними. Показан аксиоматический алгебраический способ построения 2-спиноров.

Также в работе по возможности используется метод абстрактных индексов (как в спинорном, так и в тензорном исчислении). Использование абстрактных индексов приводит к ряду упрощений по сравнению с общепринятыми методами.

Влияние гравитационного поля на устойчивость

После создания общей теории относительности и квантовой теории поля возник интерес к исследованию роли гравитационных взаимодействий в физике элементарных частиц. С продвижением в область высоких энергий и по мере построения теории остальных взаимодействий включение гравитации в общую теоретическую схему взаимодействий элементарных частиц стало одной из наиболее актуальных задач физики высоких энергий.

Учет собственного гравитационного поля системы взаимодействующих полей представляет физический интерес в силу его универсальности и неэкранируемости, а также в силу того, что уравнения гравитационного поля по своей структуре нелинейны. И таким образом из нелинейности гравитационного поля следует невозможность введения точечного объекта.

В связи с малой массой объектов в квантовой теории очень долго пренебрегали гравитационными эффектами. Но при изучении нелинейных образований возникает вопрос об их устойчивости. И тут гравитационное поле может оказать сильное влияние.

1. Введение в общую теорию спиноров

В данной главе сделана попытка систематизированного изложения теории спиноров.

В первом параграфе, предполагая структуру модуля над кольцом, вводится формализм абстрактных индексов и действия над ними. Данный формализм является разновидностью бескоординатного подхода. Он построен так, что алгебраические действия аналогичны оным в координатном подходе; основные отличия возникают в случае анализа. Ковариантная производная выступает в качестве первичной структуры, а частная — вторичной. Таким образом, производная не зависит от связности (подобно формализму дифференциальных форм).

Во втором параграфе рассматриваются условия существования глобального спинорного поля. Вводится критерий для некомпактного пространственно-временного многообразия, устанавливающий существование глобальной спинорной структуры.

Далее рассматриваются два подхода при определении спинорных объектов: геометрический и алгебраический (аксиоматический).

В третьем параграфе геометрически вводятся унивалентные спиноры (спин-векторы) как изотропные флаги. В первом пункте рассматриваются спиновые преобразования. Демонстрируется соответствие между спиновыми преобразованиями и преобразованиями Лоренца. Во втором пункте строятся изотропные флаги. В третьем пункте вводятся спин-векторы как изотропные флаги. В четвёртом пункте рассматриваются алгебраические операции над спинорами.

В четвёртом параграфе рассматривается связь спиноров с кватернионами. Показывается изоморфизм спин-матриц и унивалентных кватернионов при отсутствии такой связи в общем случае.

В пятом параграфе рассматривается алгебраический подход. Аксиоматическим образом вводятся лоренцевы 2-спиноры произвольной валентности. В первом пункте вводится важный объект спинорной алгебры — ε-спинор. Величина ε_{AB} является важным объектом спинорной алгебры. Она играет роль, в чём-то аналогичную роли метрического тензора в римановой теории тензоров, однако имеются важные отличия, связанные с антисимметричностью. Во втором пункте вводится операция комплексного сопряжения.

1.1. Формализм абстрактных индексов

Классическая тензорная алгебра [30] имеет дело с упорядоченными наборами

$$A^{\boldsymbol{\alpha}\ldots\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{\rho}\ldots\boldsymbol{\tau}}, \tag{1.1.1}$$

где каждый индекс $\boldsymbol{\alpha}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\rho}, \ldots, \boldsymbol{\tau}$ принимает значения $1, 2, \ldots, n$. Для определённости можно представить, что (1.1.1) — это упорядоченный набор чисел. Однако, этот набор представляет собой не сам тензор, а лишь множество тензорных компонент.

Однако в этом определении слишком большое значение придаётся базису и компонентам. Современное же алгебраическое определение тензора избегает каких-либо ссылок на базисы или координатные системы. В то же время алгебраический подход, в той форме, в которой он обычно излагается, обладает рядом определённых недостатков. Причина кроется в основном в обозначениях, теряется мощность индексных обозначений. Отсюда вытекает тезис — тензорные индексные обозначения должны быть сохранены. Преимущества, которые дают абстрактный алгебраический и компонентный методы, не являются взаимоисключающими. Ведь индекс не обязательно означает множество пробегаемых им целых чисел. Можно считать его просто меткой, несущей лишь информацию о типе рассматриваемого тензора и об операциях, которым подвергается тензор. Таким образом символ с индексами описываue весь тензор целиком, а не его компоненты.

Теперь символ V^α означает не набор n компонент $(V^1, \dots, V^n)$, а единственный элемент некоторого абстрактного векторного пространства или модуля. Конечно, всегда можно выбрать определённый базис и записать в нём вектор $V^{\boldsymbol{\alpha}}$. Чтобы не возникало путаницы, будем использовать другой тип буквы-индекса [52]: индексы, обозначающие компоненты тензора, будут набираться прямым полужирным шрифтом (например символ $V^{\boldsymbol{\alpha}}$ будет обозначать набор компонент $(V^1, \dots, V^n)$).

Множество абстрактных меток

$$\mathfrak{L} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_1, \dots\} \tag{1.1.2}$$

имеет только организующее значение. Это множество должно удовлетворять единственному требованию — быть бесконечным. Пусть векторы и векторные поля образуют модуль $\mathfrak{S}^\bullet$. Тогда элементы всевозможных множеств

$\mathfrak{S}^\alpha, \mathfrak{S}^\beta, \ldots$ — это просто элементы из $\mathfrak{S}^\bullet \times \mathfrak{L}$.

1.2. Глобальная спинорная структура

Теперь кратко остановимся на том, как спинорная структура влияет на глобальную топология общего искривлённого пространственно-временного многообразия $\mathcal{M}$ [52, 77, 78, 90, 91]. Рассмотрение локальной спинорной структуры не вызывает затруднений. Вместе с тем возникает вопрос, какие ограничения должны быть наложены на на многообразие для того, чтобы оно допускало существование глобально определённых объектов типа спин-вектора[1].

Для этого нам нужно рассмотреть пространство $\mathcal{F}$, каждая точка которого представляет изотропный флаг[2] в точке пространства $\mathcal{M}$. Для существования пространства $\mathcal{F}$ требуются два глобальных ограничения на $\mathcal{M}$.

Во-первых, изотропные флаги связаны только с полуконусом, указывающим в будущее. Поэтому необходимо иметь возможность на всём многообразии $\mathcal{M}$ сделать согласованный выбор световых полуконусов.

Утверждение 1.1. Многообразие $\mathcal{M}$ должно быть ориентируемым во времени.

Во-вторых, необходимо иметь возможность на всём многообразии $\mathcal{M}$ сделать согласованный непрерывный выбор пространственно-временной ориентации.

[1]определение спин-вектора см. на стр. 17
[2]определение изотропного флага см. на стр. 16

Утверждение 1.2. Многообразие $\mathcal{M}$ должно быть ориентируемым в пространстве и времени.

Кроме того, многообразие $\mathcal{M}$ должно также допускать возможность определения на нём спиновой структуры, т. е. возможности проследить за знаком спин-вектора не только в фиксированной точке многообразия $\mathcal{M}$, но и при перемещении от точки к точке в пределах $\mathcal{M}$. В общем случае условия, обеспечивающие существование и единственность спиновой структуры многообразия $\mathcal{M}$, зависят только от его топологии и не зависят от вида его метрики.

Утверждение 1.3. Равенство нулю второго класса Штиффеля–Уитни w_2 в случае ориентируемого ($w_1 = 0$) многообразия $\mathcal{M}$ является необходимым и достаточным условием существования на данном многообразии спиновой структуры.

В случае, когда верны все три утверждения, вместо общего термина спиновая структура пользуются термином спинорная структура.

Упомянем простой критерий для $\mathcal{M}$, устанавливающий существование спинорной структуры в случае, когда многообразие $\mathcal{M}$ некомпактно (фактически некомпактность следует из физического требования, чтобы многообразие не содержало замкнутых времениподобных кривых).

Теорема 1.1. *Если $\mathcal{M}$ — некомпактное пространство-время, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы оно имело спинорную структуру, является существование четырёх непрерывных векторных полей на $\mathcal{M}$, образующих тетраду Минковского в касательном пространстве* *в каждой точке многообразия* $\mathcal{M}$.

1.3. Спиноры: геометрический подход

Векторное пространство Минковского есть четырёхмерное векторное пространство $\mathbb{V}$ над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, на $\mathbb{V}$ заданы ориентация, скалярное произведение с сигнатурой $(+ - --)$ и временна́я ориентация. Аналогично можно задать афинное пространство Минковского $\mathbb{M}$ (пространство-время Минковского), связанное с $\mathbb{V}$:

$$\mathrm{vec} : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{V}. \tag{1.3.1}$$

Мы будем использовать стандартные (правовинтовые и изохронные) координаты Минковского

$$x^0 = T, \qquad x^1 = X, \qquad x^2 = Y, \qquad x^3 = Z. \tag{1.3.2}$$

Рассмотрим изотропные вектора, координаты которых удовлетворяют условию:

$$T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0. \tag{1.3.3}$$

Абстрактное пространство, элементами которого являются изотропные направления будущего (прошлого), обозначаются через $\mathcal{S}^+$ ($\mathcal{S}^-$). Эти два пространства в произвольно заданной системе координат (T, X, Y, Z) могут быть представлены пересечениями S^+ (S^-) светового конуса (1.3.3) будущего (прошлого) с гиперплоскостями $T = 1$ ($T = -1$). В эвклидовом (X, Y, Z)-пространстве $T = 1$ ($T = -1$) данное пересечение S^+ (S^-) представляет собой сферу, описываемую уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{1.3.4}$$

где x, y, z — координаты на S^+ (S^-).

Рассматривая сферу S^+ (S^-) как риманову сферу аргандовой плоскости, можно координаты x, y, z на S^+ одним комплексным числом. Возьмём плоскость Σ с уравнением $z = 0$ в эвклидовом 3-пространстве $T = 1$ и отобразим точки сферы S^+ на эту плоскость путём проектирования из северного полюса $(1, 0, 0, 1)$. Таким образом точки на Σ можно пометить комплексным параметром $\zeta \in \mathbb{C} \cup \infty$, который задаётся выражением

$$\zeta = \frac{x + \mathrm{i}y}{1 - z}. \tag{1.3.5}$$

Тогда для координат получаем

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \qquad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\mathrm{i}(\zeta\bar{\zeta} + 1)}, \qquad z = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1}. \tag{1.3.6}$$

Алгебраические выражения (1.3.5) и (1.3.6) устанавливают стандартное стереографическое соответствие между аргандовой плоскостью ζ и единичной сферой в (x, y, z)-пространстве с центром в точке $(0, 0, 0)$.

В качестве альтернативного выбора координат на S^+ можно применить обычные сферические полярные координаты, связанные с x, y, z соотношениями

$$x = \sin\theta\cos\phi, \qquad y = \sin\theta\sin\phi, \qquad z = \cos\theta. \tag{1.3.7}$$

Выражение для ζ в координатах (θ, ϕ) находится подстановкой (1.3.7) в (1.3.5):

$$\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}. \tag{1.3.8}$$

1.3.1. Спиновые преобразования

Для исключения бесконечноудалённой точки $\zeta = \infty$ будем использовать пару (ξ, η) комплексных чисел, подчинённых условию

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta}. \tag{1.3.9}$$

Тогда (1.3.6) принимают вид

$$x = \frac{\xi\bar\eta + \eta\bar\xi}{\xi\bar\xi + \eta\bar\eta}, \qquad y = \frac{\xi\bar\eta - \eta\bar\xi}{\mathrm{i}(\xi\bar\xi + \eta\bar\eta)}, \qquad z = \frac{\xi\bar\xi - \eta\bar\eta}{\xi\bar\xi + \eta\bar\eta}. \tag{1.3.10}$$

Поскольку нас интересует само изотропное направление, а не точка, то можно выбрать любую другую точку, представляющую то же самое изотропное направление. Например,точку с координатами (T, X, Y, Z), полученными из координат точки $P(1, x, y, z)$ умножением $(\xi\bar\xi + \eta\bar\eta)/\sqrt{2}$. Получаем вектор $\boldsymbol{K}$ с координатами

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\xi\bar\xi + \eta\bar\eta\big), \qquad & X &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\xi\bar\eta + \eta\bar\xi\big), \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\xi\bar\eta - \eta\bar\xi\big), \qquad & T &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\xi\bar\xi - \eta\bar\eta\big). \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Рассмотрим комплексные линейные преобразования координат ξ и η:

$$\begin{aligned} \xi \mapsto \tilde\xi &= \alpha\xi + \beta\eta, \\ \eta \mapsto \tilde\eta &= \gamma\xi + \delta\eta. \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Здесь α, β, γ и δ суть произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию регулярности $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Можно записать преобразование (1.3.12) для ζ:

$$\zeta \mapsto \tilde\zeta = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}. \tag{1.3.13}$$

Без потери общности можно нормировать (1.3.13) на единицу (унимодулярность)

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{1.3.14}$$

Преобразования (1.3.12) и (1.3.13), удовлетворяющие условию (1.3.14), называются спиновыми преобразованиями в случае, когда ζ связана с изотропными векторами пространства Минковского соотношениями (1.3.9) и (1.3.11).

Можно записать спин-матрицу $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{A} = 1, \tag{1.3.15}$$

Тогда (1.3.12) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{1.3.16}$$

Перепишем равенства (1.3.11) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T+Z & X+\mathrm{i}Y \\ X-\mathrm{i}Y & T-Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}. \tag{1.3.17}$$

Отсюда видно, что спиновое преобразование (1.3.16) действует следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}+\tilde{Z} & \tilde{X}+\mathrm{i}\tilde{Y} \\ \tilde{X}-\mathrm{i}\tilde{Y} & \tilde{T}-\tilde{Z} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} T+Z & X+\mathrm{i}Y \\ X-\mathrm{i}Y & T-Z \end{pmatrix} \mathbf{A}^{\dagger}, \tag{1.3.18}$$

что определяет преобразование Лоренца. Вообще верно следующее утверждение.

Утверждение 1.4. Всякое спиновое преобразование соответствует единственному ограниченному преобразованию Лоренца; обратно, всякое ограниченное преобразование Лоренца соответствует двум и только двум спиновым преобразованиям, из которых одно противоположно другому.

1.3.2. Изотропные флаги

Введём вектор

$$\mathbf{L} = \lambda\frac{\partial}{\partial\zeta} + \bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \tag{1.3.19}$$

с коэффициентами λ и $\bar{\lambda}$, выбранными так, чтобы он был действительным. Потребуем, чтобы величина λ выражалась через ξ и η таким образом, что после осуществления пассивного спинового преобразования

$$\tilde{\xi} = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad \tilde{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta, \qquad \tilde{\zeta} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \tag{1.3.20}$$

выполняется равенство

$$\tilde{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}} + \bar{\tilde{\lambda}}\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\zeta}}} = \lambda\frac{\partial}{\partial\zeta} + \bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}. \tag{1.3.21}$$

с учётом (1.3.14) получаем

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}\eta^{-2}, \tag{1.3.22}$$

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta^{-2}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \bar{\eta}^{-2}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right). \tag{1.3.23}$$

Обратно, если известен $\mathbf{L}$ в точке P (как оператор), то с точностью до знака известна и пара (ξ, η): зная $\mathbf{L}$ и сравнивая коэффициенты, можно найти η^2, а зная P, можно найти ζ. Далее находятся ξ^2, $\xi\eta$ и η^2, а следовательно, и $\pm(\xi, \eta)$.

Плоскость $\hat{\Pi}$ задаётся семейством векторов

$$a\boldsymbol{K} + b\boldsymbol{L} \qquad (a, b \in \mathbb{R}). \tag{1.3.24}$$

Для придания определённости направлению вектора $\boldsymbol{L}$, наложим условие

$$b > 0. \tag{1.3.25}$$

Тогда (1.3.24) переходит в полуплоскость Π, ограниченную вектором $\boldsymbol{K}$. Эта полуплоскость и является флагом. Вместе с $\boldsymbol{K}$ она определяет (ξ, η) с точностью до знака.

Полуплоскость Π и вектор $\boldsymbol{K}$ составляют изотропный флаг. Вектор $\boldsymbol{K}$ называется флагштоком, его направление — направлением флагштока, полуплоскость Π — полотнищем флага.

1.3.3. Спин-вектор

Рассмотрим непрерывное вращение $(\xi, \eta) \mapsto (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\xi, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\eta)$, где θ изменяется от 0 до π. В конце получаем

$$(\xi, \eta) \mapsto (-\xi, -\eta), \tag{1.3.26}$$

но флаг возвращается к своему исходному положению, причём полотнище флага поворачивается на угол 2π. Если продолжить вращение, так что θ изменяется от π до 2π, то опять получается исходная пара (ξ, η). Таким образом, чтобы вернуть (ξ, η) к исходному положению, необходим поворот полотнища флага на угол 4π.

Необходимо расширить понятие геометрии в пространстве $\mathbb{V}$, так чтобы «геометрическими» можно было бы считать и такие величины, которые не возвращаются в своё исходное положение при повороте вокруг некоторой оси на угол 2π, но возвращаются в своё исходное положение при повороте на угол 4π. Такие величины называются спинорными объектами. Спин-вектор отличается от изотропного флага только тем, что он представляет собой спинорный объект, и всякому изотропному флагу соответствуют два и только два спин-вектора.

1.3.4. Спинорные операции

Пусть $\mathfrak{S}^\bullet$ — спиновое пространство, т. е. пространство спин-векторов, а $\mathbb{C}$ —поле комплексных чисел. Основными операциями на $\mathfrak{S}^\bullet$ будут:

Умножение на скаляр: $\mathbb{C} \times \mathfrak{S}^\bullet \to \mathfrak{S}^\bullet$, т. е. при заданных $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\boldsymbol{\varkappa} \in \mathfrak{S}^\bullet$ имеем $\lambda\boldsymbol{\varkappa} \in \mathfrak{S}^\bullet$;

Сложение: $\mathfrak{S}^\bullet \times \mathfrak{S}^\bullet \to \mathfrak{S}^\bullet$, т. е. при заданных $\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{S}^\bullet$ имеем $\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{S}^\bullet$;

Внутреннее произведение: $\mathfrak{S}^\bullet \times \mathfrak{S}^\bullet \to \mathbb{C}$, т. е. при заданных $\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{S}^\bullet$ имеем $\{\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\omega}\} \in \mathbb{C}$.

Представляя каждый спин-вектор его компонентами относительно некоторой заданной системы отсчёта, определим эти три операции следующим образом:

$$\lambda(\varkappa^0, \varkappa^1) = (\lambda\varkappa^0, \lambda\varkappa^1), \tag{1.3.27}$$

$$(\varkappa^0, \varkappa^1) + (\omega^0, \omega^1) = (\varkappa^0 + \omega^0, \varkappa^1 + \omega^1), \tag{1.3.28}$$

$$\{(\varkappa^0, \varkappa^1), (\omega^0, \omega^1)\} = \{\varkappa^0\omega^1 - \varkappa^1\omega^0\}. \tag{1.3.29}$$

Рассматривая (1.3.27) – (1.3.29) приходим к выводу, что $\mathfrak{S}^\bullet$ есть векторное пространство над $\mathbb{C}$. Внутреннее произведение является кососимметричной билинейной формой на $\mathfrak{S}^\bullet$. Данное векторное пространство двумерно.

Используя определение внутреннего произведения, нетрудно получить общую формулу для спин-вектора, выраженного через его компоненты. Выберем произвольную пару спин-векторов $\mathbf{o}$ и $\boldsymbol{\iota}$, нормированных таким образом, что их внутреннее произведение равно единице:

$$\{\mathbf{o}, \boldsymbol{\iota}\} = 1 = -\{\boldsymbol{\iota}, \mathbf{o}\}. \tag{1.3.30}$$

Пара $\mathbf{0}, \boldsymbol{\iota}$ называется спиновой системой отсчёта. Компоненты произвольного спин-вектора $\varkappa$ в указанной спиновой системе отсчёта таковы:

$$\varkappa^0 = \{\varkappa, \boldsymbol{\iota}\}, \qquad \varkappa^1 = -\{\varkappa, \mathbf{o}\}. \tag{1.3.31}$$

Таким образом имеем:

$$\varkappa = \varkappa^0 \mathbf{o} + \varkappa^1 \boldsymbol{\iota}. \tag{1.3.32}$$

1.4. Связь спин-матриц с кватернионами

Положим [67]

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{1.4.1}$$

Общий кватернион будет представлен матрицей

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{j}d = \begin{pmatrix} a + \mathrm{i}d & -c + \mathrm{i}b \\ c + \mathrm{i}b & a - \mathrm{i}d \end{pmatrix}, \tag{1.4.2}$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Сумма и произведение двух кватернионов получаются просто как матричная сумма и матричное произведение. Сопряжённый кватернион $\mathbf{A}^*$ определяется соответствующей матричной операцией:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{I}a - (\mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d). \tag{1.4.3}$$

Если матрица $\mathbf{A}$ (1.4.2) унимодулярна и унитарна, то она будет представлять собой унитарную спин-матрицу. Можно записать соотношения:

$$\det \mathbf{A} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \tag{1.4.4}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{I}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \tag{1.4.5}$$

Таким образом, кватернион должен иметь единичную норму:

$$\|\mathbf{A}\| := a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \tag{1.4.6}$$

Следовательно, единичный кватернион может быть представлен унитарной спин-матрицей.

Несмотря на то, что унитарные спин-матрицы и единичные кватернионы представляют собой по существу одно и то же, в общем случае между кватернионами и спин-матрицами не существует такой тесной взаимосвязи. Дело в том, что кватернионы связаны с положительно определёнными квадратичными формами, тогда как спин-матрицы и преобразования Лоренца характеризуются лоренцевой сигнатурой $(+, -, -, -)$.

1.5. Спиноры: алгебраический подход

Имеются три основные операции, которые можно совершить со спин-векторами. Это умножение на скаляр (1.3.27), сложение (1.3.28) и антисимметричное внутреннее произведение (1.3.29). Указанные операции могут выполняться над спин-векторами в произвольной одной точке, так что спин-векторы относятся к одному и тому же векторному пространству Минковского, а именно касательному пространству в этой точке, причём $\mathfrak{S}^\bullet$ является модулем над комплексными скалярами $\mathfrak{S}$. Таким образом, вводя систему меток

$$\mathfrak{L} = \{A, B, C, \ldots, Z, A_0, B_0, \ldots, A_1, \ldots\}, \tag{1.5.1}$$

получим канонически изоморфные копии модуля $\mathfrak{S}^\bullet$ $(\mathfrak{S}^A, \mathfrak{S}^B, \ldots)$. Всякий спин-вектор (спин-векторное поле) $\boldsymbol{\varkappa} \in \mathfrak{S}^\bullet$ будет иметь образы $\varkappa^A \in \mathfrak{S}^A, \varkappa^B \in \mathfrak{S}^B, \ldots$. Можно определить дуальные модули $\mathfrak{S}_A, \mathfrak{S}_B, \ldots$ и, следовательно, общие множества вида $\mathfrak{S}^{AB}, \ldots, \mathfrak{S}^A_B, \ldots, \mathfrak{S}^{P\ldots R}_{S\ldots U}$. Элементы общих множеств $\mathfrak{S}^{P\ldots R}_{S\ldots U}$ называются спинорами.

1.5.1. ε-спиноры

Спинорное внутреннее произведение было задано как антисимметричное $\mathfrak{S}$-билинейное отображение из $\mathfrak{S}^\bullet \times \mathfrak{S}^\bullet$ в $\mathfrak{S}$ так, что должен существовать единственный элемент $\varepsilon_{AB} \in \mathfrak{S}_{AB}$, такой, что

$$\{\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\omega}\} = \varepsilon_{AB}\varkappa^A\omega^B = -\{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varkappa}\} \tag{1.5.2}$$

для всех $\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{S}^\bullet$, причём ε_{AB} — антисимметричный спинор:

$$\varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA}. \tag{1.5.3}$$

Величина ε_{AB} является важным объектом спинорной алгебры. Она играет роль, аналогичную роли метрического тензора в римановой теории тензоров.

Она устанавливает изоморфизм между модулем $\mathfrak{S}^{\bullet}$ и дуальным модулем $\mathfrak{S}_{\bullet}$:

$$\varkappa^B \leftrightarrow \varkappa_B = \varkappa^A \varepsilon_{AB}, \tag{1.5.4}$$

т. е. можно рассматривать ε_{AB} как оператор, опускающий индекс.

Обратное отображение из $\mathfrak{S}_{\bullet}$ в $\mathfrak{S}^{\bullet}$ задаёт элемент $\varepsilon^{AB} \in \mathfrak{S}^{AB}$:

$$\varkappa^A = \varepsilon^{AB} \varkappa_B. \tag{1.5.5}$$

Отображения (1.5.4) и (1.5.5) обратны друг другу:

$$\varepsilon_{AB}\varepsilon^{CB} = \varepsilon_A{}^C, \qquad \varepsilon^{AB}\varepsilon_{AC} = \varepsilon_C{}^B, \tag{1.5.6}$$

где символ типа $\varepsilon_A{}^B$ обозначает канонический изоморфизм между $\mathfrak{S}^A$ и $\mathfrak{S}_B$.

1.5.2. Комплексное сопряжение

Обозначим операцию комплексного сопряжения чертой:

$$\overline{\varkappa^A} = \bar{\varkappa}^{A'} \in \mathfrak{S}^{A'}. \tag{1.5.7}$$

Метка A' может рассматриваться как комплексно-сопряжённая метке A. Следовательно, в дополнение к множеству меток $\mathfrak{L}$ (1.5.1) имеется другое множество меток $\mathfrak{L}'$, комплексно-сопряжённых меткам множества $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L}' = \{A', B', C', \dots, Z', A'_0, B'_0, \dots, A'_1, \dots\}. \tag{1.5.8}$$

Множество $\mathfrak{S}^{A'}$ рассматривается как комплексно-сопряжённое множеству $\mathfrak{S}^A$ и также является $\mathfrak{S}$-модулем, и модуль $\mathfrak{S}^{A'}$ антиизоморфен $\mathfrak{S}^A$. Обратное отображение из $\mathfrak{S}^{A'}$ в $\mathfrak{S}^A$ также обозначается чертой над всем символом:

$$\overline{\bar{\tau}^{A'}} = \tau^A, \qquad \overline{\lambda\varkappa^A + \mu\omega^A} = \bar{\lambda}\bar{\varkappa}^{A'} + \bar{\mu}\bar{\omega}^{A'}. \tag{1.5.9}$$

С помощью $\mathfrak{S}$-модулей $\mathfrak{S}^A$ и $\mathfrak{S}^{A'}$ можно образовать спинорную систему.

Определение 1.1. Общий спинор $\chi_{L\dots NU'\dots W}{}^{A\dots DP'\dots R'}$ валентности $\left[\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right]$ есть $\mathfrak{S}$-полилинейное отображение

$$\mathfrak{S}_A \times \dots \times \mathfrak{S}_D \times \mathfrak{S}_{P'} \times \dots \times \mathfrak{S}_{R'} \times \mathfrak{S}^L \times \dots \times \mathfrak{S}^N \times \mathfrak{S}^{U'} \times \dots \times \mathfrak{S}^{W'} \to \mathfrak{S}.$$

Кроме четырёх операций — сложения, тензорного произведения, замены индексов и свёртки — определена и новая операция — комплексное сопряжение, индуцируемое антиизоморфизмом между $\mathfrak{S}^A$ и $\mathfrak{S}^{A'}$.

Для элемента $\varepsilon_{AB} \in \mathfrak{S}_{AB}$ существует комплексно-сопряженный ему элемент $\bar{\varepsilon}_{A'B'} \in \mathfrak{S}_{A'B'}$. Обычно черту опускают и записывают этот элемент просто как $\varepsilon_{A'B'}$.

1.6. Связь спинорного и векторного базисов

При окончательных вычислениях возникает необходимость перевода аббстрактных индексов в компонентную запись. Кроме того, зачастую результат удобнее формулировать в векторной форме. Для установления взаимосвязи между спинорным и векторным базисами служат символы Инфельда–ван дер Вердена:

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{a}}{}^{\mathbf{A}\mathbf{A}'} &:= g_{\mathbf{a}}{}^{a} \varepsilon_A{}^{\mathbf{A}} \varepsilon_{A'}{}^{\mathbf{A}'}, \\ g^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{A}\mathbf{A}'} &:= g_a{}^{\mathbf{a}} \varepsilon_{\mathbf{A}}{}^{A} \varepsilon_{\mathbf{A}'}{}^{A'}, \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

где свёртка производится только по абстрактным индексам.

Для стандартной тетрады Минковского и спиновой системы отсчёта (1.3.30) получим:

$$
\begin{aligned}
&{g_0}^{\mathbf{AB'}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = g^0_{\mathbf{AB'}}, \qquad {g_1}^{\mathbf{AB'}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = g^1_{\mathbf{AB'}},\\
&{g_2}^{\mathbf{AB'}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 0\end{pmatrix} = -g^2_{\mathbf{AB'}}, \qquad {g_3}^{\mathbf{AB'}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = g^3_{\mathbf{AB'}}.
\end{aligned}
\tag{1.6.2}
$$

2. Приложения 2-спинорного формализма

При использовании дираковских 4-спиноров основную трудность вызывают γ-матрицы. По своей сути это объекты, служащие для связи спинорного и тензорного пространств и несущие, соответственно, два типа индексов: спинорные и тензорные. Логично было бы проводить вычисления лишь в одном из этих пространств.

В первом параграфе рассмотрена одна из альтернатив — переход от спиноров к тензорам. Показаны преимущества и недостатки этого подхода. Показывается возможность тензорной записи спинорных дифференциальных уравнений. Приведены подробные расчёты для уравнений Дирака–Вейля и Дирака.

Во втором параграфе как альтернатива дираковским 4-спинорам рассматриваются лоренцевы 2-спиноры. В первом пункте приводится формализм для перевода 4-спинорного формализма в 2-спинорный. Во втором пункте демонстрируется исключительная простота получения спинорных инвариантов.

В третьем параграфе рассматривается спинорная реализация киральной модели Скирма. Первый пункт служит введением в модель Скирма. Второй и третий пункты рассматривают случаи двух внутренних групп: $SU(2)$ и $SU(3)$. С помощью 2-спинорного формализма доказываются спинорные тождества.

В четвёртом параграфе предлагается эффективный метод вычисления матричных элементов, основанный на 2-спинорном исчислении. При применении 2-спинорного формализма мы можем вместо использования «фейнмановского трюка» и вычисления квадрата матричного элемента вычислять сам матричный элемент. При этом уменьшается количество вычисляемых членов и сохраняется информация о фазе.

2.1. Тензорное представление спинорных операций

Любая тензорная операция может рассматриваться как спинорная. Различие между двумя этими подходами чисто формальное. Переход осуществляется заменой каждого тензорного индекса парой спинорных индексов — нештрихованным и штрихованным, т.е. тензорные операции можно рассматриваться как частный случай действий над определёнными спинорами, все операции производятся только с парами спинорных индексов (один штрихованный и один нештрихованный). Операции, возникающие в спинорном формализме, имеют соответствующие тензорные аналоги.

Преимущество спинорного формализма не в том, что он допускает более широкий класс операций, а в том, что многие операции, которые в тензорном представлении выглядят крайне сложно, в спинорном виде становятся весьма прозрачными. Кроме того, линейному спинорному уравнению часто соответствует нелинейное тензорное уравнение.

2.1.1. Тензорная запись спинорных дифференциальных уравнений

Рассмотрим вопрос о преобразовании производных от спиноров, а следовательно, спинорных дифференциальных уравнений к тензорной форме.

Всякое спинорное дифференциальное уравнение имеет эквивалентную тензорную форму, определяемую с точностью до знака. Поскольку тензорные уравнения часто содержат квадраты соответствующих спиноров, может случиться, что в многосвязных областях пространства-времени существуют глобальные решения тензорных уравнений и в то же время не существует непротиворечивого способа фиксировать знак в решениях спинорных уравнений. Поэтому тензорные и спинорные уравнения могут быть эквивалентны локально, но не эквивалентны глобально.

Чаще всего со спинорными дифференциальными уравнениями оперируют в квантовой теории. На основании теории представлений групп, требованиях лоренцевой инвариантности и принципа суперпозиций можно полагть, что основные уравнения для свободных частиц должны быть линейными уравнениями. Однако в тензорной форме они часто принимают нелинейный вид. Возникает определённая методологическая проблема.

Для осуществления перехода от спиноров к тензорам в дифференциальных уравнениях введём две леммы [20, 93].

Лемма 2.1. *Справедливо тождество:*

$$\nabla_p(\varphi_A\varphi_B) + \varepsilon_{AB}\varphi_C\nabla_p\varphi^C = 2\varphi_A\nabla_p\varphi_B. \tag{2.1.1}$$

Для доказательства разложим первое слагаемое в левой части и заменим второе величиной $-2\nabla_p\varphi_{[A}\varphi_{B]}$.

Лемма 2.2. *Если F_{ab} есть антисамодуальный изотропный бивектор, соответствующий спинору φ_A:*

$$F_{ab} = \varphi_A\varphi_B\varepsilon_{A'B'} \tag{2.1.2}$$

и M_p — вспомогательный вектор, такой, что

$$M_p = \varphi_A\nabla_p\varphi^A, \tag{2.1.3}$$

то

$$F_{ab}\nabla_p F_c{}^b = F_{ac}M_p. \tag{2.1.4}$$

Для примера рассмотрим два уравнения — уравнение Дирака–Вейля для нейтрино и уравнение Дирака для электрона.

Уравнение Дирака–Вейля

Уравнение Дирака–Вейля можно записать в виде

$$\nabla_{AA'}\varphi^A = 0. \tag{2.1.5}$$

Введём вспомогательный вектор

$$R_a = \varphi_A\nabla_{BA'}\varphi^B, \tag{2.1.6}$$

равенство нулю которого эквивалентно выполнению уравнения Дирака–Вейля, за исключением может быть тех областей, в которых $\varphi_A = 0$. Преобразуем тождество (2.1.1) следующим образом: поднимем индекс B, заменим

p на b, свернём по B, умножим всё выражение на $\varepsilon_{A'}{}^{B'}$. Получим тензорное уравнение:

$$\nabla_d F_c{}^d + M_c = 2R_c. \tag{2.1.7}$$

Из эквивалентности уравнения Дирака–Вейля условию $R_c = 0$ получаем [12–14, 47, 58, 83, 93]:

$$\nabla_d F_c{}^d + M_c = 0. \tag{2.1.8}$$

Умножая (2.1.8) на F_{ab} и учитывая (2.1.4) исключим вспомогательный вектор M_c [20]:

$$F_{ab}\nabla_d F_c{}^d + F_{ad}\nabla_c F_b{}^d = 0. \tag{2.1.9}$$

Из (2.1.2) следует, что бивектор F_{ab} дополнительно удовлетворяет условиям

$$F_{ab} = -F_{ba}, \qquad {}^*F_{ab} = -\mathrm{i}F_{ab}, \qquad F_{ab}F^{ab} = 0, \tag{2.1.10}$$

т.е. он кососимметричный, антисамодуальный и изотропный.

Система тензорных уравнений (2.1.9) и (2.1.10) эквивалентна уравнению Дирака–Вейля. Можно видеть, что его структура гораздо сложнее структуры первоначального спинорного уравнения. Оно стало нелинейным.

Уравнение Дирака

Уравнение Дирака можно записать в виде двух связанных 2-спинорных уравнений:

$$\nabla_{A'}^{A}\varphi_A = \mu\chi_{A'}, \tag{2.1.11a}$$

$$\nabla_{A}^{A'}\chi_{A'} = \mu\varphi_A, \tag{2.1.11b}$$

где $\mu = 2^{-1/2} m\hbar^{-1}$ есть действительная константа. Заменяя A на B в первом из уравнений и умножая на φ_A, получаем эквивалентное уравнение

$$\varphi_A \nabla_{BA'} \varphi^B = -\mu \varphi_A \chi_{A'} \tag{2.1.12}$$

(всюду, кроме, быть может, областей, где $\varphi_A = 0$). Левая часть равенства (2.1.12) совпадает с вектором R_a, определённым в формуле (2.1.6). Введём вектор

$$C_a = \varphi_A \chi_{A'}. \tag{2.1.13}$$

Используя (2.1.7) приведём уравнение (2.1.11a) к эквивалентному уравнению [12–14, 47, 57, 58, 93]:

$$\nabla_b {F_a}^b + M_a = -2\mu C_a. \tag{2.1.14}$$

Аналогично уравнение (2.1.11b) приводится к виду:

$$\nabla_b {G_a}^b + N_a = -2\mu C_a, \tag{2.1.15}$$

где $\bar{G}_{ab}$ и $\bar{N}_{ab}$ связаны с $\bar{\chi}_A$ так же, как F_{ab} и M_a связаны с φ_A. Исключая вспомогательные векторы M_a и N_a, получаем [20]:

$$F_{ab} \nabla_d {F_c}^d + F_{ad} \nabla_c {F_b}^d = -2\mu F_{ab} C_c, \tag{2.1.16a}$$

$$G_{ab} \nabla_d {G_c}^d + G_{ad} \nabla_c {G_b}^d = -2\mu G_{ab} C_c. \tag{2.1.16b}$$

Дополнительно записываются два набора алгебраических условий типа (2.1.10).

Бивекторы F_{ab} и G_{ab} алгебраически независимы, вектор C_a определяется по F_{ab} и G_{ab} с точностью до знака:

$$\varphi_A \chi_{A'} \varphi_B \chi_{B'} = \varphi_A \varphi^C {\varepsilon_{A'}}^{C'} \chi_{C'} \chi_{B'} \varepsilon_{CB},$$

или

$$C_a C_b = F_a{}^c G_{cb}.$$

Данные рассуждения основываются в основном на работе [93]. Подобные рассуждения были приведены и в более поздних работах [12–14, 47, 57, 58, 83], однако они существенно координатно-зависимы. В этих работах использовано представление 4-бивектора в виде комплексного 3-вектора.

Запишем (2.1.2) с помощью (1.6.2) в компонентной форме:

$$\varphi_{\mathbf{A}}\varphi_{\mathbf{B}}\varepsilon_{\mathbf{A'B'}} = F_{\mathbf{ab}} g_{\mathbf{AA'}}{}^{\mathbf{a}} g_{\mathbf{BB'}}{}^{\mathbf{b}}. \tag{2.1.17}$$

Запишем бивектор F_{ab} в виде:

$$F_{\mathbf{ab}} := \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.18}$$

Тогда (2.1.17) принимает вид:

$$\begin{aligned} \varphi_0\varphi_0 &= \frac{1}{2}\big(F_{01} + F_{31} - \mathrm{i}F_{02} - \mathrm{i}F_{32}\big) = \frac{1}{2}\left(F_1^{(+)} - \mathrm{i}F_2^{(+)}\right), \\ \varphi_0\varphi_1 &= \frac{1}{2}\big(-F_{03} - \mathrm{i}F_{02}\big) = -\frac{1}{2}F_3^{(+)}, \\ \varphi_1\varphi_1 &= \frac{1}{2}\big(F_{31} - F_{01} + \mathrm{i}F_{32} - \mathrm{i}F_{02}\big) = -\frac{1}{2}\left(F_1^{(+)} + \mathrm{i}F_2^{(+)}\right), \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

где

$$\vec{F}^{(+)} := \vec{E}^{(+)} + \mathrm{i}\vec{H}^{(+)} = \vec{E} + \mathrm{i}\vec{H}. \tag{2.1.20}$$

Из (2.1.19) можно записать представление вектора $\vec{F}^{(+)}$ через компоненты спинора φ_A:

$$\vec{F}^{(+)} = \begin{pmatrix} \varphi_0^2 - \varphi_1^2 \\ \mathrm{i}\big(\varphi_0^2 + \varphi_1^2\big) \\ -2\varphi_0\varphi_1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.21}$$

Аналогичным же образом на базе бивектора G_{ab} (2.1.15) получим комплексный 3-вектор $\vec{F}^{(-)}$ [89]:

$$\vec{F}^{(-)} := \vec{E}^{(-)} + \mathrm{i}\vec{H}^{(-)}. \tag{2.1.22}$$

2.2. Дираковские 4-спиноры и лоренцовы 2-спиноры

В физических расчётах часто пользуются дираковскими 4-спинорами[1]. Однако, операции с данными объектами крайне громоздки. Одним из главных недостатков этого формализма является явное использование γ-матриц, которые по сути своей являются объектами, служащими для связи векторного и спинорного пространств. Наши спинорные объекты «живут» как бы в двух пространствах: векторном и спинорном. Соответственно наблюдается стремление перейти к более единообразному формализму посредством отказа либо от спинорных, либо от тензорных индексов.

Рассмотрим переход к чисто спинорному формализму на основе лоренцовых 2-спиноров. Вначале сконструируем 4-спинорный объект на основе 2-спиноров. Далее продемонстрируем возможности данного формализма. Рассмотрим два примера: вывод инвариантных спинорных соотношений и вычисление матричных элементов.

[1] Введение 4-спиноров можно, наверное, мотивировать желанием сконструировать объект, с помощью которого можно было бы удобно реализовать операцию пространственного отражения.

2.2.1. Построение 4-спинорного формализма

Построим реализацию 4-спинорного формализма на основе лоренцовых 2-спиноров[2].

Будем обозначать строчными греческими буквами 4-спинорные индексы. Так же, как всегда, прописными латинскими буквами обозначим 2-спинорные индексы, а строчными латинскими — тензорные.

Запишем дираковский 4-спинор как

$$\psi^\alpha = \begin{pmatrix} \varphi^A \\ \pi^{A'} \end{pmatrix}, \tag{2.2.1}$$

где φ^A и $\pi^{A'}$ — лоренцовы 2-спиноры.

Сопряжённый спинор будет иметь вид:

$$\overline{\psi^\alpha} = \bar{\psi}_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{\pi}_A, \bar{\varphi}_{A'} \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

Определим оператор отражения:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \varphi^A \\ \pi^{A'} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \pi^{A'} \\ \varphi^A \end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

Будем использовать γ-матрицы в киральном представлении. Тогда запишем явный вид γ-матриц:

$$\gamma_{a\rho}{}^\sigma = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{A'R'}\varepsilon_A{}^S \\ \varepsilon_{AR}\varepsilon_{A'}{}^{S'} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta_\rho{}^\sigma = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\varepsilon_R{}^S & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\varepsilon_{R'}{}^{S'} \end{pmatrix}, \tag{2.2.4}$$

кроме того

$$\gamma_{ab\rho}{}^\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{R(A}\varepsilon_{B)}{}^S & 0 \\ 0 & \varepsilon_{AB}\varepsilon_{R'(A'}\varepsilon_{B')}{}^{S'} \end{pmatrix}. \tag{2.2.5}$$

[2]Зачастую дираковский 4-спинор реализуют с помощью двух трёхмерных спиноров. Формально это вполне возможно, поскольку структура пространств $\mathbb{S}_R$ и $\mathbb{S}_{R'}$ полуспиноров спинора размерности $n+1$ совпадает со структурой пространства S_ρ спиноров размерности n (n — нечётное)

Введём так же обозначение $\gamma_5 := \mathrm{i}\eta$.

2.2.2. Инвариантные соотношения

С помощью определённой нами структуры дираковских 4-спиноров можно построить инвариантные соотношения. Мы будем оперировать парой спинор–сопряжённый 4-спинор (ψ и $\bar{\psi}$) и, соответственно, четырьмя 2-спинорами (φ^A, $\bar{\varphi}_{A'}$, $\pi^{A'}$ и $\bar{\pi}_A$).

Скаляры

Свёртки $\bar{\pi}_A\varphi^A$ и $\bar{\varphi}_{A'}\pi_{A'}$ имеют смысл скаляров. Их сумма будет вести себя как скаляр, а разность как псевдоскаляр:

$$s = \bar{\pi}_A\varphi^A + \bar{\varphi}_{A'}\pi^{A'} = \bar{\psi}_\alpha\psi^\alpha, \tag{2.2.6}$$

$$p = \mathrm{i}(\bar{\pi}_A\varphi^A - \bar{\varphi}_{A'}\pi^{A'}) = \mathrm{i}\bar{\psi}_\alpha{\gamma_{5\beta}}^\alpha\psi^\beta. \tag{2.2.7}$$

Векторы

Комбинации $\bar{\pi}^A\pi^{A'}$ и $\varphi^A\bar{\varphi}^{A'}$ имеют смысл вектора. Их сумма ведёт себя как вектор, разность как псевдовектор:

$$j^a = \sqrt{2}(\bar{\pi}^A\pi^{A'} + \varphi^A\bar{\varphi}^{A'}) = \bar{\psi}_\alpha\gamma^{a\alpha}_\beta\psi^\beta, \tag{2.2.8}$$

$$\tilde{j}^a = \sqrt{2}(\bar{\pi}^A\pi^{A'} - \varphi^A\bar{\varphi}^{A'}) = \bar{\psi}_\alpha\gamma^{a\alpha}_\beta{\gamma_{5\delta}}^\beta\psi^\delta. \tag{2.2.9}$$

Тензор

Действительный кососимметричный тензор можно построить следующим образом:

$$a^{ab} = \mathrm{i}(\varphi^{(A}\bar{\pi}^{B)}\varepsilon^{A'B'} - \bar{\varphi}^{(A'}\pi^{B')}\varepsilon^{AB}) = \bar{\psi}_\alpha \sigma^{ab}{}_\beta{}^\alpha \psi^\beta. \qquad (2.2.10)$$

2.3. Киральная модель Скирма и её спинорная реализация

Интересным классом солитонов, для которых реализуется важное требование устойчивости, являются топологические солитоны. Они появляются в моделях, допускающих абсолютное (не зависящее от уравнений поля) сохранение некоторых величин Q, называемых топологическими зарядами и принимающих целочисленные значения. Если для энергии E поля удаётся обеспечить неравенство вида $E \geqslant f(|Q|)$, где f — монотонно растущая функция, то солитоны с заданным Q, реализующие $\inf E$, устойчивы.

2.3.1. Модель Скирма

В конце 50-х годов Скирмом была предложена оригинальная модель сильных взаимодействий, в которой барионы выступали как стабильные протяжённые объекты — топологические солитоны. Своеобразие этого подхода было настолько разительным, что более двух десятилетий он развивался лишь самим Скирмом и немногочисленными его последователями. Только в 80-е года было установлено, что модель Скирма может рассматриваться как предельный случай квантовой хромодинамики, что инициировало повышенный интерес к модели. Обиходным стал термин «скирмион» [68].

Можно сказать, что модель Скирма оказалась очень удачным образом низкоэнергетической физики сильных взаимодействий, правильно схватывающим её основные черты. В рамках этой модели удалось сравнительно простыми средствами удовлетворительно описать взаимодействие нуклонов, основные статистические свойства барионов. Что же касается мезон-барионных взаимодействий, то здесь согласие лишь качественное, что ещё раз подчёркивает модельный характер этой схемы. Однако интерес к модели Скирма исключительно велик и объясняется тем, что это первая реалистичная модель, которая, будучи относительно простой, в целом верно схватывает симметрийные и структурные свойства ядерной физики.

Скирм предложил рассматривать ядро как некоторую электрически нейтральную несжимаемую «пионную жидкость», заполняющую шарообразную область радиуса R. В каждой точке пространства эту жидкость можно характеризовать некоторой скалярной плотностью и некоторым вектором изоспина. В жидкость погружены нуклонные источники, сильно взаимодействующие с пионами и занимающие область меньшего радиуса R'. Поэтому в экспериментах, где существенным является взаимодействие с пионами, мы получаем значение R, а в экспериментах с электрически заряженными частицами, где фактически проявляется распределение электрического заряда в ядре, — R', то есть среднеквадратичный зарядовый радиус.

Опираясь на эти представления, Скирм убедительно продемонстрировал качественное согласие модели «пионной жидкости» с известными экспериментальными данными об оболочечной структуре ядра, о коллективных движениях в ядрах, а также с явлением насыщения ядерных сил. Также он предложил математическую модель «пионной жидкости» [87]. Вероятно, это одна из первых формулировок идеи «солитонного механизма», суть которого заключается в том, что сильно взаимодействующие частицы в рамках нелинейной теории поля можно описывать как коллективные возбуждения в системе слабо связанных фундаментальных полей.

Последующая модификация модели «пионной жидкости» связана с осознанием важности киральной модели в физике адронов. В 1958 году в работе [88] Скирм приходит к кирально-инвариантной модификации модели и фактически строит одну из первых нелинейных реализаций киральной группы $SU(2)_L \times SU(2)_R$ — нелинейную σ-модель.

При обосновании своей модели Скирм исходил из глубокой физической идеи о спонтанном нарушении киральной симметрии в её нелинейной реализации. При этом поле принимало значение в нелинейном многообразии — трёхмерной сфере S^3, т.е. задавалось эвклидовым 4-вектором ϕ^x, $x = \overline{1,4}$, подчинённым связи

$$\sum_{x=1}^{4} (\phi^x)^2 = 1. \tag{2.3.1}$$

Группой внутренней симметрии модели Скирма является $O(4)$ — группа вращения сферы. При этом киральное преобразование соответствует поворотам, затрагивающим ϕ^4, а граничное условие

$$\phi^4(r \to \infty) = 1 \tag{2.3.2}$$

является выражением спонтанного нарушения киральной симметрии.

Благодаря условию сферы (2.3.1) и граничному условию (2.3.2) в теории существует тождественно сохраняющийся топологический заряд Q, совпадающий со степенью отображения $S^3 \to S^3$:

$$Q = \frac{1}{12\pi^2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{xyzv}\int \mathrm{d}^3x\, \partial_i\phi^x\partial_j\phi^y\partial_k\phi^z\phi^v. \tag{2.3.3}$$

Этот топологический заряд интерпретируется как барионное число. Тогда соответствующий барионный ток будет иметь вид

$$j_B^a = \frac{1}{12\pi^2}\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{xyzv}\partial_b\phi^x\partial_c\phi^y\partial_d\phi^z\phi^v. \tag{2.3.4}$$

Лагранжиан модели Скирма

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2\lambda^2}\partial_a\phi^x\partial^a\phi_x - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[(\partial_a\phi^x\partial^a\phi_x)^2 - \left(\partial_a\phi^x\partial^b\phi_x\right)\left(\partial_b\phi^y\partial^a\phi_y\right)\right], \tag{2.3.5}$$

где ε и λ — параметры модели, а сам лагранжиан построен так, чтобы энергия E оценивалась снизу через барионный заряд (2.3.3):

$$E > 6\pi^2\sqrt{2}\frac{\varepsilon}{\lambda}|Q|. \tag{2.3.6}$$

Благодаря оценке (2.3.6) состояние, реализующее минимум энергии при заданном заряде Q, оказывается устойчивым.

Однако связь (2.3.1) представляется искусственной. Хотелось бы, чтобы это условие возникало в теории естественным путём. Возможно построение модели, полевой переменной в которой является релятивистский спинор ψ, преобразующийся по фундаментальному представлению внутренней (изотопической) группы. При этом связь (2.3.1) является следствием одного из спинорных тождеств. Для доказательства тождеств будем использовать 2-спинорное представление.

2.3.2. Случай внутренней группы $SU(2)$

Выберем в качестве внутренней группы группу $SU(2)$ [11]. Тогда полевой переменной будет 8-спинор:

$$\psi \in \mathbb{S}^\alpha \times \mathbb{C}^2, \qquad \psi^{\alpha\varkappa} = \begin{pmatrix} \psi^{\alpha 1} \\ \psi^{\alpha 2} \end{pmatrix}, \tag{2.3.7}$$

где $\mathbb{S}^\alpha$ — пространство дираковских 4-спиноров, $\psi^\alpha \in \mathbb{S}^\alpha$, $\psi^\varkappa \in \mathbb{C}^2$.

Составим вещественные билинейные комбинации:

$$\begin{aligned}
s &= (\bar\psi_{\alpha\varkappa}\psi^{\alpha\varkappa}), & p &= \mathrm{i}(\bar\psi_\alpha \gamma_{5\beta}{}^\alpha \psi^\beta),\\
\underrightarrow{v}^k &= (\bar\psi^\varkappa_\alpha \underrightarrow{\tau}^k_{\varkappa\omega}\psi^{\alpha\omega}), & \underrightarrow{a}^k &= \mathrm{i}(\bar\psi^\varkappa_\alpha \gamma_{5\beta}{}^\alpha \underrightarrow{\tau}^k_{\varkappa\omega}\psi^\beta),\\
j_a &= (\bar\psi_{\alpha\varkappa}\gamma_{a\beta}{}^\alpha \psi^{\beta\varkappa}), & \tilde{j}_a &= (\bar\psi_{\alpha\varkappa}\gamma_{a\beta}{}^\alpha \gamma_{5\delta}{}^\beta \psi^{\delta\varkappa}),\\
\underrightarrow{v}_a^k &= (\bar\psi^\varkappa_\alpha \gamma_{a\beta}{}^\alpha \underrightarrow{\tau}^k_{\varkappa\omega}\psi^{\beta\omega}), & \underrightarrow{a}_a^k &= (\bar\psi^\varkappa_\alpha \gamma_{a\beta}{}^\alpha \gamma_{5\delta}{}^\beta \underrightarrow{\tau}^k_{\varkappa\omega}\psi^{\delta\omega}).
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Далее мы будем по возможности опускать индексы. Здесь $\underrightarrow{\tau}$ — матрицы Паули:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.3.9}$$

Можно записать следующие тождества:

$$s^2 + \underrightarrow{a}^2 = p^2 + \underrightarrow{v}^2 = j_a j^a = \tilde{j}_a \tilde{j}^a, \tag{2.3.10}$$

$$sp - (\underrightarrow{v}\,\underrightarrow{a}) = j_a \tilde{j}^a = (\underrightarrow{v}_a\,\underrightarrow{a}^a) = 0, \tag{2.3.11}$$

$$2(s^2 + p^2) - j_a j^a = (\underrightarrow{v}_a\,\underrightarrow{v}^a) = -(\underrightarrow{a}_a\,\underrightarrow{a}^a), \tag{2.3.12}$$

$$s\,\underrightarrow{v} + p\,\underrightarrow{a} = j_a\,\underrightarrow{v}^a = -\tilde{j}_a\,\underrightarrow{a}^a, \tag{2.3.13}$$

$$[\underrightarrow{v}, \underrightarrow{a}] = j_a\,\underrightarrow{a}^a = \tilde{j}_a\,\underrightarrow{v}^a. \tag{2.3.14}$$

Докажем тождество (2.3.10). Для этого будем применять 2-спинорный формализм:

$$\begin{aligned} j_a j^a &= (j^1)^2 + (j^2)^2 + 2j^1 j^2, \\ p^2 &= (p^1)^2 + (p^2)^2 + 2p^1 p^2, \\ \underset{\rightarrow}{v}^2 &= (s^1)^2 + (s^2)^2 - 2s^1 s^2 + 4\bar{\psi}^2_\alpha \psi^{\alpha 1} \bar{\psi}^1_\beta \psi^{\beta 2}, \\ 2p^1 p^2 - 2s^1 s^2 &= -4(\bar{\pi}^1_A \varphi^{A1} \bar{\pi}^2_B \varphi^{B2} + \bar{\varphi}^1_{A'} \pi^{A'1} \bar{\varphi}^2_{B'} \pi^{B'2}), \\ 4\bar{\psi}^2_\alpha \psi^{\alpha 1} \bar{\psi}^1_\beta \psi^{\beta 2} &= 4\big[(\bar{\pi}^2_A \varphi^{A1} + \bar{\varphi}^2_{A'} \pi^{A'1})(\bar{\pi}^1_B \varphi^{B2} + \bar{\varphi}^1_{B'} \pi^{B'2})\big], \\ 2j^1 j^2 &= \big[(\bar{\pi}^1_A \pi^1_{A'} + \varphi^1_A \bar{\varphi}^1_{A'})(\bar{\pi}^2_A \pi^2_{A'} + \varphi^2_A \bar{\varphi}^2_{A'})\big]. \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Приводя подобные, получим искомое тождество:

$$p^2 + \underset{\rightarrow}{v}^2 = j_a j^a. \tag{2.3.16}$$

Тождество (2.3.10) имеет особое значение, поскольку позволяет записать условие сферы (2.3.1) при условии принятия гипотезы Скирма о спонтанном нарушении киральной симметрии, что эквивалентно граничному условию типа (2.3.2), выделяющему вакуумное состояние $\psi_{\text{вак}} := \psi_\infty$. Будем считать, что вакуум характеризуется нетривиальным значением величины

$$s_{\text{вак}} = (\bar{\psi}_\infty \psi_\infty) = R_0 = \text{const} > 0. \tag{2.3.17}$$

Тогда из (2.3.10) и (2.3.17) следует уравнение «сферы»:

$$\zeta_x^2 = (\bar{\psi} O_x \psi)^2 = j_a j^a =: R^2 \tag{2.3.18}$$

с переменным радиусом R, для которого можно принять ограничение

$$R = \sqrt{j_a j^a} \geqslant |s| \geqslant s_{\text{вак}} = R_0, \tag{2.3.19}$$

а так же использовать обобщающее (2.3.2) граничное условие

$$\zeta_4(r=\infty) = R_0, \qquad \underset{\rightarrow}{\zeta}(r=\infty) = 0. \tag{2.3.20}$$

Здесь было использовано обозначение:

$$\zeta_x = (\bar{\psi} O_x \psi), \qquad O_k = \mathrm{i}\gamma_5 \tau_k, \qquad O_4 = I. \tag{2.3.21}$$

Учитывая (2.3.18), (2.3.19), (2.3.21) преобразуем выражения (2.3.3) и (2.3.4) для топологического заряда и тока.

$$Q = \frac{1}{12\pi^2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{xyzv} \int \frac{\mathrm{d}^3 x}{R^4} \partial_i \zeta^x \partial_j \zeta^y \partial_k \zeta^z \zeta^v, \tag{2.3.22}$$

где $\zeta^x = \phi^x R$. Этот барионный заряд соответствует следующей структуре барионного тока:

$$J^a = \frac{1}{12\pi^2 R^4} \varepsilon^{abcd} \varepsilon_{xyzv} \partial_b \zeta^x \partial_c \zeta^y \partial_d \zeta^z \zeta^v. \tag{2.3.23}$$

Подставим явное выражение для ζ^x в (2.3.23):

$$\begin{aligned} J^a = {} & \frac{1}{6\pi^2 R^4} \varepsilon^{abcd} \varepsilon_{xyzv} \times \\ & \times Re \left\{ \left(\bar{\psi} O^x \partial_b \psi \right) \left(\bar{\psi} O^y \partial_c \psi \right) \left[\left(\bar{\psi} O^z \partial_d \psi \right) + 3 \left(\partial_d \bar{\psi} O^z \psi \right) \right] \right\} \left(\bar{\psi} O^v \psi \right). \end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Из структуры топологического тока (2.3.24) можно записать следующее обобщение лагранжевой плотности (2.3.5):

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{\lambda^2} \left| \left(\bar{\psi} O_x \partial_a \psi \right) \right|^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \left| \left(\bar{\psi} O_x \partial_{[a} \psi \right) \left(\bar{\psi} O_y \partial_{b]} \psi \right) \right|^2. \tag{2.3.25}$$

Можно показать, что в этой модели также выполняется оценка типа (2.3.6) для энергии E. Для плотности топологического заряда справедлива оценка:

$$|J^0| \leqslant \frac{f^2(R)}{\lambda^2} \left|\left(\bar\psi O_z \partial_k \psi\right)\left(\bar\psi O_v \psi\right)\varepsilon^{xyzv}\right|^2 + \\ + \varepsilon^2 g^2(R) \left|\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\left(\bar\psi O_x \partial_{[i}\psi\right)\left(\bar\psi O_y \partial_{j]}\psi\right)\right|^2, \quad (2.3.26)$$

где $f(R)$ и $g(R)$ — произвольные функции, удовлетворяющие ограничению

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} f(R) g(R) = \frac{1}{3\pi^2 R^4}. \qquad (2.3.27)$$

Учитывая (2.3.18) получим

$$\left|\left(\bar\psi O_z \partial_k \psi\right)\left(\bar\psi O_v \psi\right)\varepsilon^{xyzv}\right|^2 = 2\left[R^2\left|\left(\bar\psi O_z \partial_k \psi\right)\right|^2 - \left|\left(\bar\psi O_z \partial_k \psi\right)\left(\bar\psi O_z \psi\right)\right|^2\right],$$
$$\left|\varepsilon^{ijk}\left(\bar\psi O_x \partial_{[i}\psi\right)\left(\bar\psi O_y \partial_{j]}\psi\right)\right|^2 = 2\left|\left(\bar\psi O_x \partial_{[i}\psi\right)\left(\bar\psi O_y \partial_{j]}\psi\right)\right|^2.$$

Тогда для плотности энергии T_0^0 получаем следующую оценку:

$$T_0^0 \geqslant \frac{1}{\lambda^2}\left|\left(\bar\psi O_x \partial_k \psi\right)\right|^2 + \frac{\varepsilon}{4}\left|\left(\bar\psi O_x \partial_{[i}\psi\right)\left(\bar\psi O_y \partial_{j]}\psi\right)\right|^2 \geqslant \\ \geqslant |J^0|\left[2Rf(R)g(R)\right]^{-1} = \frac{3\varepsilon\pi^2}{2\lambda} R^3 |J^0|, \quad (2.3.28)$$

где выбрано $f^{-2} = 3(\varepsilon/\lambda)\pi^2 R^5$, $g = Rf$. Учитывая (2.3.19) получим для энергии оценку

$$E = \int T_0^0 \, \mathrm{d}^3 x \geqslant \frac{3\varepsilon\pi^2}{2\lambda} R_0^3 |Q|, \qquad (2.3.29)$$

которая отличается от (2.3.6) значением постоянного множителя перед $|Q|$. Тут важно подчеркнуть, что этот множитель помимо динамических постоянных ε и λ содержит также вакуумное значение R_0 радиуса «сферы» (2.3.18). Также, можно отказаться от ограничения (2.3.19); тогда в (2.3.29) вместо R_0 войдёт некоторое среднее значение радиуса $< R >\sim R_0$. Таким образом, в любом случае гамильтониан модели линейно оценивается снизу через топологический заряд, что обеспечивает устойчивость минимизаторов энергии в каждом гомотопическом классе.

2.3.3. Случай внутренней группы $SU(3)$

Теперь проведём рассмотрение, выбрав в качестве внутренней группы группу $SU(3)$. Тогда полевой переменной будет 12-спинор:

$$\psi \in \mathbb{S}^{\alpha} \times \mathbb{C}^{3}, \qquad \psi^{\alpha\varkappa} = \begin{pmatrix} \psi^{\alpha 1} \\ \psi^{\alpha 2} \\ \psi^{\alpha 3} \end{pmatrix}, \tag{2.3.30}$$

где $\mathbb{S}^{\alpha}$ — пространство дираковских 4-спиноров, $\psi^{\alpha} \in \mathbb{S}^{\alpha}$, $\psi^{\varkappa} \in \mathbb{C}^{3}$.

Составим вещественные билинейные комбинации:

$$\begin{gathered} s = (\bar{\psi}_{\alpha\varkappa}\psi^{\alpha\varkappa}), \qquad p = \mathrm{i}(\bar{\psi}_{\alpha}{\gamma_{5\beta}}^{\alpha}\psi^{\beta}), \\ {\underset{\rightarrow}{v}}^{k} = (\bar{\psi}^{\varkappa}_{\alpha}\,{\underset{\rightarrow}{\lambda}}^{k}_{\varkappa\omega}\psi^{\alpha\omega}), \qquad {\underset{\rightarrow}{a}}^{k} = \mathrm{i}(\bar{\psi}^{\varkappa}_{\alpha}{\gamma_{5\beta}}^{\alpha}\,{\underset{\rightarrow}{\lambda}}^{k}_{\varkappa\omega}\psi^{\beta}), \\ j_{a} = (\bar{\psi}_{\alpha\varkappa}{\gamma_{a\beta}}^{\alpha}\psi^{\beta\varkappa}), \qquad \tilde{j}_{a} = (\bar{\psi}_{\alpha\varkappa}{\gamma_{a\beta}}^{\alpha}{\gamma_{5\delta}}^{\beta}\psi^{\delta\varkappa}), \\ {\underset{\rightarrow}{v}}^{k}_{a} = (\bar{\psi}^{\varkappa}_{\alpha}{\gamma_{a\beta}}^{\alpha}\,{\underset{\rightarrow}{\lambda}}^{k}_{\varkappa\omega}\psi^{\beta\omega}), \qquad {\underset{\rightarrow}{a}}^{k}_{a} = (\bar{\psi}^{\varkappa}_{\alpha}{\gamma_{a\beta}}^{\alpha}{\gamma_{5\delta}}^{\beta}\,{\underset{\rightarrow}{\lambda}}^{k}_{\varkappa\omega}\psi^{\delta\omega}). \end{gathered} \tag{2.3.31}$$

Далее мы будем по возможности опускать индексы. Здесь матрицы $\underset{\rightarrow}{\lambda}$ имеют вид:

$$\begin{gathered} \lambda^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^{4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^{5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^{6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^{7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2.3.32}$$

Можно записать следующие тождества:

$$s^2 + \underrightarrow{a}^2 = p^2 + \underrightarrow{v}^2 = j_a j^a = \tilde{j}_a \tilde{j}^a, \tag{2.3.33}$$

$$sp - (\underrightarrow{v}\,\underrightarrow{a}) = j_a \tilde{j}^a = (\underrightarrow{v}_a\,\underrightarrow{a}^a) = 0, \tag{2.3.34}$$

$$2(s^2 + p^2) - j_a j^a = (\underrightarrow{v}_a\,\underrightarrow{v}^a) = -(\underrightarrow{a}_a\,\underrightarrow{a}^a), \tag{2.3.35}$$

$$s\,\underrightarrow{v} + p\,\underrightarrow{a} = j_a\,\underrightarrow{v}^a = -\tilde{j}_a\,\underrightarrow{a}^a. \tag{2.3.36}$$

Доказательство тождества (2.3.33) аналогично (2.3.15).

В случае группы $SU(3)$, в отличии от предыдущего параграфа, мы будем рассматривать не всю группу, а выделим в ней две подгруппы $SU(3) \supset SU(2)_{(1,2)}$ следующим образом:

$$(1) : \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \tag{2.3.37a}$$

$$(2) : \lambda^2, -\lambda^7, \lambda^5. \tag{2.3.37b}$$

Таким образом, мы будем рассматривать отображение $\mathbb{R}^3 \to S^8 = (\mathbb{R}^3 \to S^3) + (\mathbb{R}^3 \to S^3)$.

Аналогично предыдущему параграфу мы будем выделять тождество (2.3.33), поскольку оно позволяет записать условие сферы (2.3.1) при условии принятия гипотезы Скирма о спонтанном нарушении киральной симметрии, что эквивалентно граничному условию типа (2.3.2), выделяющему вакуумное состояние $\psi_{\text{вак}} := \psi_\infty$. Будем считать, что вакуум характеризуется нетривиальным значением величины

$$s_{\text{вак}} = (\bar{\psi}_\infty \psi_\infty) = R_0 = \text{const} > 0. \tag{2.3.38}$$

Исходя из (2.3.37) перепишем тождество (2.3.33) в виде:

$$s^2 + \sum_{k=1,2,3} (a^{\mathbf{k}})^2 = j_a j^a - \sum_{k \neq 1,2,3} (a^{\mathbf{k}})^2 =: R^2_{(1)}, \tag{2.3.39a}$$

$$s^2 + \sum_{k=2,5,7}(a^{\mathbf{k}})^2 = j_a j^a - \sum_{k\neq 2,5,7}(a^{\mathbf{k}})^2 =: R^2_{(2)}. \tag{2.3.39b}$$

Тогда из (2.3.38) и (2.3.39) следуют уравнения «сферы»:

$$\zeta^2_{(1)x} = (\bar\psi O_{(1)x}\psi)^2 = j_a j^a - \sum_{k\neq 1,2,3}(a^{\mathbf{k}})^2 =: R^2_{(1)}, \tag{2.3.40a}$$

$$\zeta^2_{(2)x} = (\bar\psi O_{(2)x}\psi)^2 = j_a j^a - \sum_{k\neq 2,5,7}(a^{\mathbf{k}})^2 =: R^2_{(2)}. \tag{2.3.40b}$$

с переменными радиусами $R_{(1,2)}$, для которых можно принять ограничение

$$R_{(1)} = \sqrt{j_a j^a - \sum_{k\neq 1,2,3}(a^{\mathbf{k}})^2} \geqslant |s| \geqslant s_{\text{вак}} = R_0, \tag{2.3.41a}$$

$$R_{(2)} = \sqrt{j_a j^a - \sum_{k\neq 2,5,7}(a^{\mathbf{k}})^2} \geqslant |s| \geqslant s_{\text{вак}} = R_0. \tag{2.3.41b}$$

а так же использовать обобщающее (2.3.2) граничное условие

$$\zeta_{4\,(1,2)}(r=\infty) = R_0, \qquad \underrightarrow{\zeta}_{(1,2)}(r=\infty) = 0. \tag{2.3.42}$$

Здесь были использованы обозначения:

$$\zeta_{(1)x} = (\bar\psi O_{(1)x}\psi), \qquad O_{\mathbf{k}} = \mathrm{i}\gamma_5\lambda_{\mathbf{k}}, \qquad O_{4\,(1)} = I, \qquad \mathbf{k} = 1,2,3, \tag{2.3.43a}$$

$$\zeta_{(2)x} = (\bar\psi O_{(2)x}\psi), \qquad O_{\mathbf{k}} = \mathrm{i}\gamma_5\lambda_{\mathbf{k}}, \qquad O_{4\,(2)} = I, \qquad \mathbf{k} = 2,5,7. \tag{2.3.43b}$$

Учитывая (2.3.40), (2.3.41), (2.3.43) преобразуем выражения (2.3.3) и (2.3.4) для топологического заряда и тока.

$$Q_{(1)} = \frac{1}{12\pi^2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{xyzv}\int\frac{\mathrm{d}^3x}{R^4_{(1)}}\partial_i\zeta^x_{(1)}\partial_j\zeta^y_{(1)}\partial_k\zeta^z_{(1)}\zeta^v_{(1)}, \tag{2.3.44a}$$

$$Q_{(2)} = \frac{1}{12\pi^2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{xyzv}\int\frac{\mathrm{d}^3x}{R^4_{(2)}}\partial_i\zeta^x_{(2)}\partial_j\zeta^y_{(2)}\partial_k\zeta^z_{(2)}\zeta^v_{(2)}, \tag{2.3.44b}$$

где $\zeta^x_{(1,2)} = \phi^x R_{(1,2)}$. Этот барионный заряд соответствует следующей структуре барионного тока:

$$J^a_{(1)} = \frac{1}{12\pi^2 R^4_{(1)}}\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{xyzv}\partial_b\zeta^x_{(1)}\partial_c\zeta^y_{(1)}\partial_d\zeta^z_{(1)}\zeta^v_{(1)}, \tag{2.3.45a}$$

$$J^a_{(2)} = \frac{1}{12\pi^2 R^4_{(2)}} \varepsilon^{abcd} \varepsilon_{xyzv} \partial_b \zeta^x_{(2)} \partial_c \zeta^y_{(2)} \partial_d \zeta^z_{(2)} \zeta^v_{(2)}. \tag{2.3.45b}$$

Подставляя явное выражение для $\zeta^x_{(1,2)}$ в (2.3.45) и получая структуры топологического тока, аналогичную (2.3.24) можно записать следующее обобщение лагранжевой плотности (2.3.5):

$$\begin{gathered} \mathfrak{L}_S = \mathfrak{L}_{S\,(1)} + \mathfrak{L}_{S\,(2)}, \\ \mathfrak{L}_{S\,(1,2)} = \frac{1}{\lambda^2} \left| \left(\bar{\psi} O_{x\,(1,2)} \partial_a \psi \right) \right|^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \left| \left(\bar{\psi} O_{x\,(1,2)} \partial_{[a} \psi \right) \left(\bar{\psi} O_y \partial_{b]} \psi \right) \right|^2 . \end{gathered} \tag{2.3.46}$$

Можно показать, что в этой модели также выполняется оценка типа (2.3.6) для энергии E. Для плотности топологического заряда справедлива оценка типа (2.3.26).

Тогда для плотности энергии T^0_0 получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} T^0_0 \geqslant |J^0_{(1)}| \left[2R_{(1)} f(R_{(1)}) g(R_{(1)}) \right]^{-1} + |J^0_{(2)}| \left[2R_{(2)} f(R_{(2)}) g(R_{(2)}) \right]^{-1} = \\ = \frac{3\varepsilon\pi^2}{2\lambda} \left(R^3_{(1)} |J^0_{(1)}| + R^3_{(2)} |J^0_{(2)}| \right), \end{aligned} \tag{2.3.47}$$

где $f(R)$ и $g(R)$ — произвольные функции, удовлетворяющие ограничению

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} f(R) g(R) = \frac{1}{3\pi^2 R^4}, \tag{2.3.48}$$

и выбрано $f^{-2}(R_{(1,2)}) = 3(\varepsilon/\lambda)\pi^2 R^5_{(1,2)}$, $g(R_{(1,2)}) = R_{(1,2)} f(R_{(1,2)})$. Учитывая (2.3.41) получим для энергии оценку

$$E = \int T^0_0 \, \mathrm{d}^3 x \geqslant \frac{3\varepsilon\pi^2}{2\lambda} R^3_0 |Q|, \qquad Q := Q_{(1)} + Q_{(2)}. \tag{2.3.49}$$

Таким образом, как и в случае группы $SU(2)$, гамильтониан модели линейно оценивается снизу через топологический заряд, что и обеспечивает устойчивость минимизаторов энергии в каждом гомотопическом классе.

2.4. Вычисление матричных элементов

Для расчёта матричных элементов в квантовой теории обычно применяют «фейнмановский трюк», заключающийся в преобразовании произведения спиноров в след; в результате получают квадрат матричного элемента. Соответственно возрастает сложность вычислений — количество вычисляемых членов пропорционально n^2. Кроме того, если полный матричный элемент вычисляется как сумма многих диаграмм, или важна информация о фазе, данный метод не применим.

Как альтернатива предлагается вычислять сам матричный элемент. выражен равенствами Рассмотрим два пути: применение 2-спиноров (отказ от тензорных индексов) и применение векторного формализма (отказ от спинорных индексов).

2.4.1. Метод 2-спиноров

Для ликвидации основного препятствия — сложных соотношений для γ-матриц — предлагается использовать 2-спинорный формализм.

Введём вспомогательную нотацию, базирующуюся на знаке в проекторе $1 \pm \gamma_5$ [85]:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \tag{2.4.1}$$

Соответственно γ-матрицы запишутся в виде (см. (2.2.4)):

$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{a\,+} \\ \gamma_{a\,-} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{p}_+ \\ \hat{p}_- & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4.2}$$

где $\hat{p} := p^a\gamma_a$.

Применение 2-спиноров особенно оправдано в случае наличия проекторов $(1\pm\gamma_5)$. Поэтому рассмотрим упрощение вычислений в случае членов вида

$$\bar{\psi}_f\gamma^{a_1}\hat{p}_{(a)}\gamma^{a_2}\hat{p}_{(b)}\cdots\gamma^{a_n}\left[\frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)\right]\psi_i. \tag{2.4.3}$$

Можно выделить два случая — чётное и нечётное количество γ-матриц:

$$\begin{cases}\bar{\psi}_{f\pm}\gamma^{a_1}_{\mp}\hat{p}_{(a)\pm}\gamma^{a_2}_{\mp}\hat{p}_{(b)\pm}\cdots\gamma^{a_n}_{\pm}\psi_{i\pm}, & \text{нечётное количество } \gamma\text{-матриц},\\ \bar{\psi}_{f\mp}\gamma^{a_1}_{\pm}\hat{p}_{(a)\mp}\gamma^{a_2}_{\pm}\hat{p}_{(b)\mp}\cdots\gamma^{a_n}_{\mp}\psi_{i\pm}, & \text{чётное количество } \gamma\text{-матриц}.\end{cases} \tag{2.4.4}$$

Используя 2-спинорное представление γ-матриц, получаем следующие соотношения:

$$\gamma_{a\alpha}{}^{\beta}_{+}\gamma^{a\delta}_{\gamma-} = 2\delta_{\alpha}{}^{\delta}\delta_{\gamma}{}^{\beta}, \tag{2.4.5a}$$

$$\gamma_{a\alpha}{}^{\beta}_{\pm}\gamma^{a\delta}_{\gamma\pm} = 2\left(\delta_{\alpha}{}^{\beta}\delta_{\gamma}{}^{\delta} - \delta_{\alpha}{}^{\delta}\delta_{\gamma}{}^{\beta}\right). \tag{2.4.5b}$$

Для примера докажем (2.4.5a):

$$\varepsilon_{C'A'}\varepsilon_{C}{}^{B}\varepsilon^{C}{}_{G}\varepsilon^{C'D'} = 2\varepsilon_{A'}{}^{D'}\varepsilon_{G}{}^{B}. \tag{2.4.6}$$

Учитывая соответствия

$$\alpha\leftrightarrow A',\quad \beta\leftrightarrow B,\quad \gamma\leftrightarrow G,\quad \delta\leftrightarrow D',$$

получаем исходное выражение.

Таким образом, применяя последовательно (2.4.4) и (2.4.5) мы освобождаемся от γ-матриц и производим вычисления с 2-спинорами.

После вычислений получаются члены типа

$$u^{\dagger}_{f\pm}\hat{p}_{(a)\mp}\hat{p}_{(b)\pm}\ldots\hat{e}_{+\text{ или }-}\ldots u_{i\pm}, \tag{2.4.7}$$

где e — поляризация.

Для получения конкретного результата необходимо выбрать представление спинора. Например, можно использовать стандартное решение, полученное разложением по плоским волнам [2, 5, 6, 27, 37, 54, 59]. Тогда в случае продольной поляризации получим:

$$u_{\pm} = \left(\sqrt{E + \varepsilon m} \pm \varepsilon s \sqrt{E - \varepsilon m}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\sqrt{1 + s\cos\theta} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\sqrt{1 - s\cos\theta} \end{pmatrix}, \tag{2.4.8}$$

где s — спиральность, ε — знак энергии.

Пример вычисления матричного элемента

Вычислим сечение реакции

$$\nu + n \to p + e^{-}, \tag{2.4.9}$$

матричный элемент которой в стандартной (V–A) теории имеет вид

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_e \gamma_a (1 + \gamma_5) \psi_\nu\right) \left(\bar{\psi}_p \gamma^a (g_V + g_A \gamma_5) \psi_n\right). \tag{2.4.10}$$

Используя (2.4.4) и (2.4.5) приведём (2.4.10) к виду:

$$\begin{aligned} M = {} & \frac{2G_F}{\sqrt{2}} \left(u^{\dagger}_{e\alpha+} \gamma_{a\beta-}{}^{\alpha} u^{\beta}_{\nu+}\right) \Big[(g_A - g_V)\left(u^{\dagger}_{p\gamma+} \gamma^{a}_{\delta-}{}^{\gamma} u^{\delta}_{n+} + u^{\dagger}_{p\gamma-} \gamma^{a}_{\delta+}{}^{\gamma} u^{\delta}_{n-}\right) + \\ & + 2g_A u^{\dagger}_{p\gamma+} \gamma^{a}_{\delta-}{}^{\gamma} u^{\delta}_{n+} \Big] = \frac{2G_F}{\sqrt{2}} \Big[(g_V - g_A) u^{\dagger}_{e\alpha+} \gamma_{a\beta-}{}^{\alpha} u^{\beta}_{\nu+} u^{\dagger}_{p\gamma-} \gamma^{a}_{\delta+}{}^{\gamma} u^{\delta}_{n-} + \\ & + (g_V + g_A) u^{\dagger}_{e\alpha+} \gamma_{a\beta-}{}^{\alpha} u^{\beta}_{\nu+} u^{\dagger}_{p\gamma+} \gamma^{a}_{\delta-}{}^{\gamma} u^{\delta}_{n+} \Big] = \\ & = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \Big[(g_V - g_A) u^{\dagger}_{e\alpha\,+} u^{\alpha}_{n\,-} u^{\dagger}_{p\beta\,-} u^{\beta}_{\nu\,+} + \\ & + (g_V + g_A) \left(u^{\dagger}_{e\alpha+} u^{\alpha}_{\nu+} u^{\dagger}_{p\beta+} u^{\beta}_{n+} - u^{\dagger}_{e\alpha+} u^{\alpha}_{n+} u^{\dagger}_{p\beta+} u^{\beta}_{\nu+} \right) \Big]. \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Выберем направляющие углы следующим образом: $\varphi_\nu = \varphi_n = \varphi_p = \varphi_e = 0$, $\theta_\nu = \theta_n = \pi/2$, θ_e и θ_p — произвольные.

Введём спиноры:

$$\begin{gathered}
|s_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
|s_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta_p/2 \\ \sin\theta_p/2 \end{pmatrix}, \quad |s_3\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\theta_e/2 \\ \cos\theta_e/2 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{2.4.12}$$

Тогда можно записать [см. (2.4.8)]:

$$u_{\nu\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{E_\nu + m_\nu} \pm s_\nu \sqrt{E_\nu - m_\nu}\right) |s_0\rangle, \tag{2.4.13}$$

$$u_{n\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{E_n + m_n} \pm s_n \sqrt{E_n - m_n}\right) |s_1\rangle, \tag{2.4.14}$$

$$u_{p\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{E_p + m_p} \pm s_p \sqrt{E_p - m_p}\right) |s_2\rangle, \tag{2.4.15}$$

$$u_{e\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{E_e + m_e} \pm s_e \sqrt{E_e - m_e}\right) |s_3\rangle. \tag{2.4.16}$$

Из (2.4.11) получаем

$$\begin{gathered}
M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{E_e + m_e} + s_e \sqrt{E_e - m_e}\right) \left(\sqrt{E_\nu + m_\nu} + s_\nu \sqrt{E_\nu - m_\nu}\right) \times \\
\times \Big[(g_V - g_A) \left(\sqrt{E_n + m_n} - s_n \sqrt{E_n - m_n}\right) \left(\sqrt{E_p + m_p} - s_p \sqrt{E_p - m_p}\right) \times \\
\times \langle s_3|s_1\rangle \langle s_2|s_0\rangle + \\
+ (g_V + g_A) \left(\sqrt{E_n + m_n} + s_n \sqrt{E_n - m_n}\right) \left(\sqrt{E_p + m_p} + s_p \sqrt{E_p - m_p}\right) \times \\
\times \left(\langle s_3|s_0\rangle \langle s_2|s_1\rangle - \langle s_3|s_1\rangle \langle s_2|s_0\rangle\right)\Big] = \\
= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{E_e + m_e} + s_e \sqrt{E_e - m_e}\right) \left(\sqrt{E_\nu + m_\nu} + s_\nu \sqrt{E_\nu - m_\nu}\right) \times \\
\times \Big[(g_V - g_A) \left(\sqrt{E_n + m_n} - s_n \sqrt{E_n - m_n}\right) \left(\sqrt{E_p + m_p} - s_p \sqrt{E_p - m_p}\right) \times \\
\times \cos\theta_e/2 \cos\theta_p/2 -
\end{gathered}$$

$$- (g_V + g_A) \left(\sqrt{E_n + m_n} + s_n\sqrt{E_n - m_n}\right) \left(\sqrt{E_p + m_p} + s_p\sqrt{E_p - m_p}\right) \times$$
$$\times \left(\sin\theta_e/2 \cos\theta_p/2 + \cos\theta_e/2 \cos\theta_p/2\right)\Big]. \quad (2.4.17)$$

Таким образом мы получили существенное (порядок: n вместо n^2) сокращения количества вычисляемых членов, кроме того, все они имеют достаточно простой вид.

2.4.2. Векторный формализм

Проведём аналогичные выкладки на основании рассмотренного ранее векторного формализма. В данном формализме фактически происходит замена спинора на агрегат, состоящий из двух комплексных изотропных 3-векторов:

$$\psi \mapsto \begin{pmatrix} \vec{F}^{(+)} \\ \vec{F}^{(-)} \end{pmatrix}. \quad (2.4.18)$$

Но поскольку данное преобразование нелинейное, то мы заменяем не сам вектор, а комбинации типа

$$\left(\bar{\psi}_f \gamma_{\mathbf{a}} \psi_i\right). \quad (2.4.19)$$

Используя обозначения п. 2.4.1, учитывая (2.4.4) и проводя покомпонентные вычисления, получаем:

$$\bar{\psi}_{f+} \gamma_{\mathbf{a}-} \psi_{i+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathrm{i}\sqrt{\bar{\vec{F}}_f^{(+)} \vec{F}_i^{(+)}}, \frac{\left[\bar{\vec{F}}_f^{(+)}, \vec{F}_i^{(+)}\right]}{\sqrt{\bar{\vec{F}}_f^{(+)} \vec{F}_i^{(+)}}} \right), \quad (2.4.20a)$$

$$\bar{\psi}_{f-} \gamma_{\mathbf{a}+} \psi_{i-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathrm{i}\sqrt{\bar{\vec{F}}_f^{(-)} \vec{F}_i^{(-)}}, -\frac{\left[\bar{\vec{F}}_f^{(-)}, \vec{F}_i^{(-)}\right]}{\sqrt{\bar{\vec{F}}_f^{(-)} \vec{F}_i^{(-)}}} \right). \quad (2.4.20b)$$

Таким образом, вычисления сводятся к приведению исходного выражения к виду типа (2.4.4) и дальнейшим расчётам вида (2.4.20). Конретное представление векторов $\vec{F}^{(+)}$ и $\vec{F}^{(-)}$ можно получить из представления спинора ψ (например (2.4.8)) с помощью формул (2.1.21) (см. также [12, 14, 58]).

Для примера можно рассмотреть вычисление матричного элемента (2.4.10) для реакции (2.4.9). Приведём только его запись в общем виде, без конкретных вычислений:

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[(g_V - g_A) \frac{\left(\bar{\vec{F}}_e^{(-)}, \vec{F}_\nu^{(-)}\right)\left(\bar{\vec{F}}_p^{(+)}, \vec{F}_n^{(+)}\right) - \left[\bar{\vec{F}}_e^{(-)}, \vec{F}_\nu^{(-)}\right]\left[\bar{\vec{F}}_p^{(+)}, \vec{F}_n^{(+)}\right]}{\sqrt{\left(\bar{\vec{F}}_e^{(-)}, \vec{F}_\nu^{(-)}\right)\left(\bar{\vec{F}}_p^{(+)}, \vec{F}_n^{(+)}\right)}} + \right.$$
$$\left. + (g_V + g_A) \frac{\left(\bar{\vec{F}}_e^{(-)}, \vec{F}_\nu^{(-)}\right)\left(\bar{\vec{F}}_p^{(-)}, \vec{F}_n^{(-)}\right) + \left[\bar{\vec{F}}_e^{(-)}, \vec{F}_\nu^{(-)}\right]\left[\bar{\vec{F}}_p^{(-)}, \vec{F}_n^{(-)}\right]}{\sqrt{\left(\bar{\vec{F}}_e^{(-)}, \vec{F}_\nu^{(-)}\right)\left(\bar{\vec{F}}_p^{(-)}, \vec{F}_n^{(-)}\right)}} \right]. \quad (2.4.21)$$

Сравнивая формулы (2.4.21) и (2.4.11) можно отметить, что выкладки в векторном формализме представляются нам более громоздкими.

3. Устойчивость самогравитирующих солитонов

Рассматривается влияние гравитации на устойчивость самогравитирующих солитонов в скалярной нелинейной электродинамике.

Первый параграф является кратким введением в теорию устойчивости. Вводится понятие устойчивости, рассматриваются разные типы устойчивости (энергетическая, линейная, ляпуновская), взаимосвязь между ними.

Во втором параграфе кратко рассматривается понятие солитона, даётся введение в физическую постановку задачи. Рассмотрены самосогласованная плоско-симметричная система гравитационного, скалярного и электромагнитного полей с лагранжианом взаимодействия, явным образом зависящим от потенциалов электромагнитного поля (индуцированная нелинейность). Получены точные решения кинкового типа с локализованной плотностью энергии и конечной полной энергией.

В третьем параграфе решения исследованы на устойчивость. Установлена линеаризованная неустойчивость этих решений, при этом показано, что учет собственного гравитационного поля не меняет характера неустойчивости, по сравнению со случаем, когда гравитационное поле не учитывается.

3.1. Основные положения теории устойчивости

Нелинейные уравнения находят широкое применение во многих областях современной физики: нелинейной оптике, физике плазмы, теории твёрдого тела, механике сплошных сред, теории гравитации. Отличительной чертой разнообразных нелинейных процессов является возможность образования локализованных структур, обладающих устойчивостью. Эти структуры, получившие название солитонов, стали предметом пристального внимания математиков, что в конце концов привело к созданию новой области математической физики — теории солитонов [19, 43, 56, 61, 71].

Одной из важных задач теории солитонов является изучение их устойчивости [44]. На практике обычно ограничиваются исследованием линеаризованной устойчивости, когда рассматриваются малые возмущения солитонов, подчиняющиеся линейным уравнениям. Такой подход не всегда даёт правильный ответ, как было установлено ещё в классической работе А. М. Ляпунова, который и разработал строгий метод исследования устойчивости, получивший название прямого метода.

Устойчивость является одним из практически важных понятий, возникающих при изучении реальных динамических систем. Качественно она связана с требованием непрерывности изучаемого движения системы по отношению к каким-либо её возмущениям, природа которых может быть неизвестной. В зависимости от типа этих возмущений различают несколько видов устойчивости.

Пусть $\varphi(t, \vec{x})$ — многокомпонентная полевая функция со значениями в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемая как элемент некоторого банахового пространства B и подчиняющаяся эволюционному уравнению

$$\partial_t \varphi = \hat{F}(\varphi), \tag{3.1.1}$$

где $\hat{F}$ — некоторый нелинейный оператор. Будем предполагать, что уравнение (3.1.1) при заданных начальных условиях $\varphi_{t=0} = \varphi_0(\vec{x})$ допускает единственное решение солитонного типа

$$\varphi(t, \vec{x}) = \hat{S}_t[\varphi_0], \tag{3.1.2}$$

где $\hat{S}_t$ — эволюционный оператор с полугрупповыми свойствами, т. е.

$$\hat{S}_{t_1}\big[\hat{S}_{t_2}[\varphi_0]\big] = \hat{S}_{t_1+t_2}[\varphi_0], \qquad t_i \geqslant 0. \tag{3.1.3}$$

Понятие устойчивости заданного невозмущённого движения $\varphi = u = u(t, \vec{x})$ тесно связано с корректностью задачи Коши по Адамару. Введём две метрики в пространстве функций, описывающих возмущение поля [24]

$$\xi(t, \vec{x}) = \varphi t, \vec{x} - u(t, \vec{x}). \tag{3.1.4}$$

Пусть метрика $\rho_0(\xi)$ задаёт расстояние в пространстве начальных возмущений ξ_0, а метрика $\rho(\xi)$ — в пространстве текущих возмущений ξ. Будем считать, что метрика ρ_0 сильнее, чем ρ:

$$\rho_0(\xi) \geqslant \rho. \tag{3.1.5}$$

Определение 3.1. Задача Коши для уравнения (3.1.1) называется корректной по Адамару, если $\forall t \in [0, T], T < \infty(\rho_0(\xi_0) \to 0. \supset \rho(\xi) \to 0)$.

Хорошо известен пример Адамара некорректной задачи Коши для уравнения

$$\partial_t^2\varphi + \partial_x^2\varphi = 0 \tag{3.1.6}$$

на отрезке $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, со следующими начальными и граничными условиями:

$$\varphi(t, \pm\pi/2) = \varphi(0, x) = 0, \quad \partial_t\varphi(0, x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\cos nx, \quad n = 2k + 1.$$

Тогда решение задачи Коши для (3.1.6) имеет вид

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\cos nx\,\mathrm{sh}\,nt. \tag{3.1.7}$$

Если выбрать $\rho = \rho_0 = \sup_x\big[|\xi| + |\partial_t\xi|\big]$, то при $n \to \infty$

$$\rho_0(\varphi_0) = \sup_x\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}|\cos nx|\right) = \mathrm{e}{-}\sqrt{n} \to 0$$

и в то же время, согласно (3.1.7), для всякого $t > 0$

$$\rho(\varphi) = \sup_x\left[\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}|\cos nx|(\mathrm{sh}\,nt + n\,\mathrm{ch}\,nt)\right] \to \infty.$$

Вообще говоря, корректность задачи Коши зависит от выбора метрик, в чем мы вскоре убедимся на многих примерах.

Определение 3.2. Солитонное решение u называется устойчивым в смысле Ляпунова по метрикам ρ_0, ρ, если $\forall\varepsilon > 0\exists\delta(\varepsilon) > 0\forall t(\rho_0(\xi_0) < \delta. \supset \rho(\xi) < \varepsilon)$.

Таким образом, корректность по Адамару есть устойчивость на конечном интервале времени T.

Особенно существенную роль играет выбор метрик при рассмотрении многомерных распределенных систем, когда уже не работают простые формулы типа Даламбера и гладкость начальных условий чрезвычайно важна. Поэтому начальную метрику в общем случае и необходимо выбирать более жесткой [см. (3.1.5)]. Однако, введение пары метрик не является необходимым, а проистекает, скорее, из практических возможностей анализа устойчивости, когда приходится следить за эволюцией лишь части переменных. В значительной степени это обусловлено и спецификой прямого метода Ляпунова, в котором о свойствах изучаемой динамической системы приходится судить по свойствам специальным образом подбираемых функций (функционалов) Ляпунова или Четаева, что и приводит к естественной потере информации. В связи с этим часто говорят об устойчивости по части переменных.

Во многих случаях рассматривается динамическая устойчивость (при возмущающих силах), когда возмущение вводится в правую часть уравнения (3.1.1), т. е. полагается

$$\partial_t\varphi - \hat{F}(\varphi) = \hat{f}(\varphi). \tag{3.1.8}$$

Если задать метрику ρ_f для возмущения $\hat{f}(\varphi)$ $\rho_f = \rho_f\big[\hat{f}(\varphi)\big]$, то разумно следующее определение

Определение 3.3. Решение u уравнения (3.1.1) устойчиво по метрикам ρ, ρ_0, ρ_f при постоянно действующих возмущениях (3.1.8), если $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_1(\varepsilon) > 0, \delta_2(\varepsilon) > 0 \forall t (\rho_0(\xi_0) < \delta_1, \rho_f\big[\hat{f}(\varphi)\big] < \delta_2. \supset \rho(\xi) < \varepsilon)$.

Существует и более грубое определение устойчивости — по Лагранжу.

Определение 3.4. Решение u устойчиво по Лагранжу, если $\exists\delta > 0 \forall t(\rho_0(\xi_0) < \delta. \supset \rho(\xi) < \infty)$.

Таким образом по Лагранжу достаточно ограниченности возмущений в любой момент времени.

Применяется также и более тонкое понятие — асимптотическая устойчивость.

Определение 3.5. Решение u асимптотически устойчиво по Ляпунову, если оно устойчиво и $\rho(\xi) \to 0$ при $t \to \infty$.

Как вытекает из определения 3.5, асимптотическая устойчивость характерна для систем с диссипацией или же для неавтономных систем.

Подчеркнем, что исторически именно А. М. Ляпунов дал первое строгое определение устойчивости [21], тогда как до него она понималась скорее качественно, как общее свойство возмущенного движения либо обнаруживать тенденцию к возвращению к невозмущенному движению, либо оставаться в его окрестности. До Ляпунова наибольшее развитие получили дифференциальные методы исследования устойчивости, вытекающие из рассмотрения уравнений малых колебаний (Даламбер, Лагранж), решения которых представлялись в виде тригонометрических рядов по времени. Требование устойчивости по Лагранжу сводилось тогда к ограниченности последних, т.е. Лагранж пользовался принципом вещественности частот. При этом он сформулировал экстремально — энергетический критерий устойчивости равновесия — как требование существования изолированного минимума потенциальной энергии (теорема Лагранжа).

Следует отметить, что в физике солитонов приходится иметь дело не с одним солитонным решением $u(t,x)$, а с некоторым их множеством $U = \{u\}$, задаваемым обычно групповыми параметрами α, т.е.

$$U = \left\{\hat{T}_g(\alpha)u | g \in G\right\}, \tag{3.1.9}$$

где G — группа симметрии задачи, $\hat{T}_g$ — оператор представления. В таком случае устойчивость называется орбитальной, а текущая метрика ρ понимается уже как $\inf_{u\in U}\rho(\varphi - u)$, т.е. как расстояние от возмущенного решения φ до множества U — орбиты группы G.

Необходимость рассмотрения орбитальной устойчивости связана с проблемой нулевых мод, порождаемых симметрией задачи. Исторически эта проблема впервые встретилась в задаче трех тел небесной механики как проблема нулевых корней, отвечающих равномерному вращению системы в целом (лагранжева треугольника), очевидно, не влияющему на ее устойчивость. Именно в процессе анализа подобных задач Э. Дж. Раус (1875) сформулировал понятие устойчивости конфигурации и установившегося движения [39], обобщением которых и является устойчивость траектории, или орбитальная устойчивость. Проблема нулевых мод в задаче трех тел была решена Н. Е. Жуковским, исследовавшим орбитальную устойчивость путем введения специальных (подвижных) координат, позволившего исключить время из уравнений движения и тем самым избавиться от нулевых корней.

Следует также различать устойчивые множества и аттракторы $\mathcal{A}$ (инвариантные притягивающие множества), для которых $\rho(\xi) \to 0$ при $t \to \infty$. Ясно, что асимптотически устойчивое множество — это притягивающее и устойчивое множество одновременно. Однако множество может быть притягивающим и неустойчивым, так как для конечных промежутков времени $\rho(\xi)$ может возрастать, хотя при $t \to \infty$ $\rho(\xi) \to 0$. В связи со сказанным возникает важное понятие устойчивости по модулю аттрактора, которой обладают широкие классы систем (даже неустойчивых в обычном смысле).

На практике часто ограничиваются линеаризованными уравнениями

$$\partial_t \xi = \hat{A}\xi = \hat{F}'(u)\xi. \tag{3.1.10}$$

Устойчивость для линейной задачи (3.1.10) называется линеаризованной устойчивостью, или устойчивостью в первом приближении, а для полного уравнения (3.1.1) — нелинейной устойчивостью. Ясно, что из нелинейной устойчивости следует устойчивость в первом приближении, но в более слабой метрике, обратное же верно, если только $\forall\lambda \in \sigma(\hat{A})(\mathrm{Re}\lambda < 0)$, где $\sigma(\hat{A})$ — спектр оператора $\hat{A}$ (диссипативный оператор). При этом говорят о спектральной устойчивости, если $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$, и о нейтральной, если $\mathrm{Re}\lambda = 0$.

Из линеаризованной устойчивости вытекает спектральная, так как если бы было $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то существовали бы растущие моды. Обратное неверно, что подтверждается следующим примером из механики. Гамильтониан $H = p^2/2 + q^4/4$ приводит к уравнению движения $\ddot{q} = -q^3$, для которого линеаризованное уравнение $\ddot{\xi} = 0$ имеет спектр $\lambda = 0$ (нейтральная устойчивость), отвечающий линейно растущей моде $\xi = at + b$, т.е. наблюдается линеаризованная неустойчивость, хотя исходная система нелинейно устойчива. Таким образом, линеаризованная система оказывается устойчивой только по скоростям, или в более слабой метрике.

Хорошо известно также, что из спектральной неустойчивости для широкого класса систем вытекает нелинейная неустойчивость.

Часто используют также понятие формальной, или энергетической устойчивости, когда существует закон сохранения

$$E = \int F(\varphi, \dot{\varphi}, \nabla\varphi)\, \mathrm{d}x = \mathrm{const} \qquad (3.1.11)$$

либо закон эволюции $\dot{E} \leqslant 0$, такие, что в окрестности изучаемого решения $\delta E = 0$, $\delta^2 E > 0$. Ясно, что из энергетической устойчивости вытекает линеаризованная устойчивость, так как в силу линейных уравнений эволюции $\delta^2 \dot{E} \leqslant 0$, и для получения устойчивости достаточно взять $\rho = \rho_0 = \delta^2 E$. Однако обратное неверно. Рассмотрим пример из механики, когда гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left[p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 - q_1^2 q_2^2\right] = E = \text{const}.$$

Линеаризованная устойчивость в этом примере очевидна (два независимых осциллятора), но квадратичная форма $\delta^2 H = \delta p_1^2 + \delta q_1^2 - \delta p_2^2 - \delta q_2^2$ знакопеременна.

Подчеркнем, что в конечномерной теории (механические системы с конечным числом степеней свободы) энергетическая устойчивость при условии аналитичности гамильтониана влечет за собой устойчивость по Ляпунову в малом, как это вытекает из теоремы Ляпунова об устойчивости. При этом из $\delta^2 E > 0$ следует, что $E > E_0$ в некоторой окрестности. Однако для бесконечномерной теории (распределенные системы) это не так, т.е. из $\delta^2 E > 0$ еще не вытекает, что $E > E_0$ в некоторой окрестности. Типичный пример:

$$E = \int dx\left[(\nabla\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^4 + \varphi^2\right]$$

.

Наконец, говорят об устойчивости в целом, или глобальной устойчивости, если система устойчива для любых как угодно больших значений ρ. Это наиболее сильная устойчивость.

Сформулируем основную теорему прямого метода.

Теорема 3.1 (Ляпунова–Мовчана об устойчивости). *Для устойчивости решения $u \in U$ по метрикам ρ_0, ρ необходимо и достаточно, чтобы в некоторой его окрестности $\rho_0 < \alpha$ существовал функционал Ляпунова $V[\varphi]$ со свойствами:*

1. *V — положительно определён по $\rho(\xi)$;*

2. V непрерывен по ρ_0;

3. V не растёт со временем вдоль движения.

Основной критерий неустойчивости даётся следующей теоремой.

Теорема 3.2 (Четаева–Мовчана о неустойчивости). *Для неустойчивости решения $u \in U$ по метрикам ρ_0, ρ необходимо и достаточно, чтобы в некоторой его окрестности $\rho_0 < \alpha$ существовал функционал Четаева $W[\varphi]$ со свойствами:*

1. W непрерывен по ρ_0;

2. W ограничен по ρ;

3. W растёт со временем в области $W > 0$.

3.2. Кинки в системе взаимодействующих скалярного, электромагнитного и гравитационного полей

Хорошо известно, что многие нелинейные полевые модели, отвечающие как одному самодействующему полю, так и системе нескольких взаимодействующих полей, допускают существование локализованных структур солитонного типа, часто рассматриваемых как образы протяженных элементарных частиц [86]. Среди такого рода систем безусловно необходимо выделить взаимодействующие скалярные, электромагнитные и гравитационные поля как наиболее распространенные в природе.

В настоящей работе рассмотрены безмассовое скалярное, электромагнитное и гравитационное поля с лагранжианом взаимодействия, явно зависящим от потенциалов электромагнитного поля [63]. В этом случае при исключении из системы уравнений скалярной полевой функции получается уравнение электромагнитного поля с индуцированной нелинейностью, содержащей потенциалы электромагнитного поля. Такое взаимодействие представляет интерес в связи с тем, что в статической сферически-симметричной метрике соответствующая система уравнений как в плоском случае, так и с учетом собственного гравитационного поля имеет регулярные локализованные решения — солитоны. При этом на пространственной бесконечности решения электромагнитного поля переходят в решения обычной линейной электродинамики. Это означает, что зависимость от потенциалов проявляется только локально, в области локализации частицы, где электромагнитное поле ненаблюдаемо [55]. Введение в уравнения электродинамики явной зависимости от потенциалов связано с тем, что уравнения калибровочно-инвариантной нелинейной электродинамики не имеют регулярных решений [46]. Как будет нами показано, предложенная модель допускает существование решений кинкового типа с локализованной энергией и зарядом. Такая конфигурация отвечает сильно поляризованной системе, в которой положительные и отрицательные заряды локализуются в соседних областях. Как и следовало ожидать, такая система оказывается сильно неустойчивой.

С физической точки зрения данная задача может служить моделью двойного электрического слоя, возникающего в кильватерной волне космической струны [79, 80, 92, 94].

Лагранжиан системы взаимодействующих скалярного, электромагнитного и гравитационных полей выберем в виде

$$L = \frac{R}{2\varkappa} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\Psi(I), \tag{3.2.1}$$

где R — скалярная кривизна, $\varkappa$ — эйнштейновская гравитационная постоянная, $I = A_\alpha A^\alpha$, $\Psi = 1+\lambda\Phi(I)$, λ — параметр взаимодействия, Φ — некоторая произвольная функция. При $\lambda = 0$ получаем самосогласованную систему скалярного и электромагнитного полей с минимальной связью.

Статическая плоско-симметричная метрика используется в форме:

$$ds^2 = e^{2\gamma(x)}dt^2 - e^{2\alpha(x)}dx^2 - e^{2\beta(x)}\left(dy^2 + dz^2\right), \tag{3.2.2}$$

где скорость света $c = 1$, а функции α, β, γ зависят только от одной пространственной переменной x. Поскольку плоско-симметричная метрика определяется только двумя независимыми функциями, то накладывается координатное условие

$$\alpha = 2\beta + \gamma. \tag{3.2.3}$$

Уравнения Эйнштейна для метрики (3.2.2) при координатном условии (3.2.3) имеют вид:

$$G_0^0 = e^{-2\alpha}\left(2\beta'' - 2\gamma'\beta' - \beta'^2\right) = -\varkappa T_0^0, \tag{3.2.4}$$

$$G_1^1 = e^{-2\alpha}\left(2\gamma'\beta' + \beta'^2\right) = -\varkappa T_1^1, \tag{3.2.5}$$

$$G_2^2 = e^{-2\alpha}\left(\beta'' + \gamma'' - 2\gamma'\beta' - \beta'^2\right) = -\varkappa T_2^2, \tag{3.2.6}$$

$$G_2^2 = G_3^3, \qquad T_2^2 = T_3^3. \tag{3.2.7}$$

Запишем уравнения скалярного и электромагнитного полей:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\nu\mu}\varphi_{,\mu}\Psi\right) = 0, \tag{3.2.8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}F^{\nu\mu}\right) - \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\Psi_I A^{\nu} = 0, \tag{3.2.9}$$

где $\Psi_I = d\Psi/dI$.

Тензор энергии–импульса взаимодействующих полей определяется выражением

$$T^{\nu}_{\mu} = \varphi_{,\mu}\varphi^{,\nu}\Psi(I) - F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha} + \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\Psi_I A^{\nu}A_{\mu} - \\ - \delta^{\nu}_{\mu}\left[-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\right)\Psi(I)\right]. \tag{3.2.10}$$

Так как полевые функции зависят от одной пространственной переменной x, то электромагнитное поле описывается одной компонентой вектор-потенциала $A_0 = A(x)$ и одной составляющей тензора поля $F_{10} = dA/dx$, при этом $I = A_{\alpha}A^{\alpha} = g^{00}A_0^2 = e^{-2\gamma}A^2(x)$.

Уравнение скалярного поля (3.2.8) в метрике (3.2.2) записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dx}(\varphi'\Psi) = 0. \tag{3.2.11}$$

Уравнение (3.2.11) имеет решение

$$\varphi'(x) = CP(I), \tag{3.2.12}$$

где $P(I) = 1/\Psi(I)$, C — постоянная интегрирования.

Компоненты тензора энергии-импульса имеют вид:

$$T^0_0 = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}\left[C^2P(I) + e^{-2\gamma}A'^2 + 2C^2P_I(I)e^{-2\gamma}A^2\right], \tag{3.2.13}$$

$$T^1_1 = -T^2_2 = -T^3_3 = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}\left[C^2P(I) + e^{2\gamma}A'^2\right], \tag{3.2.14}$$

где $P_I = dP/dI$, $A' = dA/dx$.

Уравнение электромагнитного поля (3.2.9) в метрике (3.2.2) с учетом (3.2.12) принимает вид

$$\left(e^{-2\gamma}A'\right)' - C^2 P_I e^{-2\gamma} A = 0. \tag{3.2.15}$$

Сумма уравнений Эйнштейна (3.2.5) и (3.2.6) с учетом (3.2.14) приводит к уравнению

$$\beta'' + \gamma'' = 0, \tag{3.2.16}$$

имеющему решение

$$\beta(x) = -\gamma(x) + Ex, \qquad E = \text{const}. \tag{3.2.17}$$

Сумма уравнений Эйнштейна (3.2.4) и (3.2.5) дает уравнение

$$\beta'' = -\frac{\varkappa e^{-2\gamma}}{2}\left[A'^2 + C^2 P_I A^2\right]. \tag{3.2.18}$$

При подстановке $AP_I e^{-2\gamma}$ из (3.2.15) в (3.2.18) получаем уравнение

$$\beta'' = -\frac{\varkappa}{2}\left(AA'e^{-2\gamma}\right)'. \tag{3.2.19}$$

Учитывая (3.2.16) для $\gamma(x)$ находим аналогичное уравнение:

$$\gamma'' = \frac{\varkappa}{2}\left(AA'e^{-2\gamma}\right)'. \tag{3.2.20}$$

Первый интеграл уравнения (3.2.20) имеет вид

$$\gamma' = \frac{\varkappa}{2}AA'e^{-2\gamma} + k, \tag{3.2.21}$$

где k — постоянная интегрирования. Рассмотрим частный случай $k = 0$. Тогда уравнение (3.2.21) вновь интегрируется:

$$e^{2\gamma} = \frac{\varkappa}{2}A^2 + H, \qquad H = \text{const}. \tag{3.2.22}$$

Подставляем (3.2.22) в (3.2.15):

$$\left(\frac{A'}{\varkappa A^2/2+H}\right)' - C^2 P_I \frac{A}{\varkappa A^2/2+H} = 0. \qquad (3.2.23)$$

Поскольку $dI/dx = 2HAA'/(\varkappa A^2/2+H)^2$, то, умножая (3.2.23) на $A'/(\varkappa A^2/2+H)$, получаем уравнение в полных дифференциалах, 1-й интеграл которого имеет вид

$$\left(\frac{A'}{\varkappa A^2/2+H}\right)^2 - \frac{C^2}{H}P(I) = C_1, \qquad C_1 = \text{const}. \qquad (3.2.24)$$

Рассмотрим решение уравнения (3.2.24) при $C_1 = 0$. Тогда окончательно имеем:

$$\int \frac{dA}{(\varkappa A^2/2+H)\sqrt{P(I)}} = \pm\frac{C(x+x_1)}{\sqrt{H}}, \qquad x_1 = \text{const}. \qquad (3.2.25)$$

Энергия взаимодействующих электромагнитного и скалярного полей на единицу площади (y,z) определяется выражением

$$E_f = \int T_0^0 \sqrt{-{}^3g}\, dx = \\ = \frac{1}{2}\int \left[C^2P(I) + e^{-2\gamma}A'^2 + 2C^2P_I I\right] e^{-\alpha+2\beta} dx. \qquad (3.2.26)$$

При подстановке в (3.2.26) равенства

$$e^{-2\gamma}A'^2 = \frac{C^2}{H}P(I)e^{2\gamma}, \qquad (3.2.27)$$

получаемого из (3.2.24), а также

$$dx = \frac{\sqrt{H}}{C}\frac{e^{-2\gamma}}{\sqrt{P}}\, dA, \qquad (3.2.28)$$

получаемого из (3.2.27), равенство (3.2.26) примет вид

$$E_f = \frac{C\sqrt{H}}{2}\int \left[\sqrt{P}\left(1+\frac{e^{2\gamma}}{H}\right) + \frac{2IP_I}{\sqrt{P}}\right] e^{-3\gamma} dA. \qquad (3.2.29)$$

Поскольку $I = e^{-2\gamma}A^2 = A^2/\left(\varkappa A^2/2 + H\right)$, то

$$e^{-3\gamma}dA = \frac{d\sqrt{I}}{H}. \tag{3.2.30}$$

Подставляя (3.2.30) в (3.2.29), окончательно получаем выражение для энергии поля:

$$E_f = \frac{C}{2\sqrt{H}} \int \left[\sqrt{P}\left(1 + \frac{e^{2\gamma}}{H}\right) + \frac{2IP_I}{\sqrt{P}}\right] d\sqrt{I}. \tag{3.2.31}$$

При этом плотность энергии имеет вид

$$T_0^0\sqrt{-^3g} = \frac{1}{2}\left[C^2P(I) + e^{-2\gamma}A'^2 + 2C^2P_I I\right] e^{-\gamma}. \tag{3.2.32}$$

Определим теперь плотность электрического заряда ρ_e и величину полного заряда Q.

Распределение заряда найдем из уравнения (3.2.9):

$$j^\alpha = -\varphi_{,\gamma}\varphi^{,\gamma}\Psi_I A^\alpha. \tag{3.2.33}$$

Для статического электрического поля из (3.2.33) выводим

$$j^0 = -C^2e^{-2(\alpha+\gamma)}P_I A. \tag{3.2.34}$$

Хронометрически-инвариантная плотность заряда определяется следующим образом:

$$\rho_e = \frac{j^0}{\sqrt{g^{00}}} = -C^2e^{-2\alpha-\gamma}P_I A. \tag{3.2.35}$$

Заряд Q определяется равенством

$$Q = \int \rho_e\sqrt{-^3g}\,dx. \tag{3.2.36}$$

Выберем $P(I)$ в виде

$$P(I) = (1 - \lambda I)^2, \tag{3.2.37}$$

где λ — параметр взаимодействия. Подставляя (3.2.37) в (3.2.15), получаем уравнение

$$\left(e^{-2\gamma} A'\right)' + 2\lambda C^2 e^{-2\gamma} A - 2\lambda^2 C^2 e^{-4\gamma} A^3 = 0. \tag{3.2.38}$$

Подставляя (3.2.37) в (3.2.25), находим решение уравнения (3.2.38):

$$A(x) = \sqrt{\frac{H}{\lambda - \varkappa/2}}\,\mathrm{th}\,bx, \tag{3.2.39}$$

где $b = \sqrt{C^2(\lambda - \varkappa/2)}$, $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$. Потенциал (3.2.39) — всюду регулярная функция, стремящаяся к конечным значениям $\pm\sqrt{H/(\lambda - \varkappa/2)}$ при $x \to \pm\infty$.

При подстановке (3.2.39) в (3.2.32) получаем выражение для $e^{2\gamma}$:

$$e^{2\gamma} = \frac{H\lambda}{\lambda - \varkappa/2}\left(1 - \frac{\varkappa}{2\lambda}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\, bx}\right). \tag{3.2.40}$$

Из (3.2.40) следует, что если H выбрать так, что

$$H\lambda = \lambda - \frac{\varkappa}{2} > 0, \tag{3.2.41}$$

то при $x \to \pm\infty, e^{2\gamma} \to 1$. Таким образом, при всех значениях x $e^{2\gamma}$ — всюду регулярная функция.

Уравнение Эйнштейна (3.2.5) есть первый интеграл системы уравнений (3.2.4) и (3.2.6). Оно имеет вид

$$-\gamma'^2 + E^2 = -\frac{\varkappa}{2}\left[-C^2 P(I) + e^{-2\gamma} A'^2\right], \tag{3.2.42}$$

где E — постоянная, входящая в (3.2.17). При подстановке в это уравнение $P(I)$ из (3.2.37), а также $A(x)$ из (3.2.39) и $e^{2\gamma}$ из (3.2.40) получим тождество при условии $E=0$. Отсюда и из (3.2.17) следует

$$\beta(x) \equiv -\gamma(x). \tag{3.2.43}$$

Рассмотрим распределение плотности энергии $T_0^0\sqrt{-^3g}$. Для полученного решения оно имеет вид

$$\begin{aligned} T_0^0\sqrt{-^3g} &= \\ &= \frac{1}{2}\left[C^2(1-\lambda I)^2 + e^{-2\gamma}A'^2 - 4C^2(1-\lambda I)\lambda I\right] e^{-\gamma} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{C^2(1-\sigma^2)}{\operatorname{ch}^2 bx - \sigma}\left[\frac{1-\sigma^2}{\operatorname{ch}^2 bx - \sigma^2} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 bx} - \frac{4\operatorname{sh}^2 bx}{\operatorname{ch}^2 bx - \sigma^2}\right] e^{-\gamma}, \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

где $\sigma^2 = \varkappa/2\lambda < 1$.

Из (3.2.44) следует, что плотность энергии локализована:

$$T_0^0\sqrt{-^3g} \to 0, \qquad \text{при } x \to \pm\infty. \tag{3.2.45}$$

Энергия E_f взаимодействующих A_μ и φ полей определяется выражением

$$\begin{aligned} E_f = \int_{-\infty}^{\infty} T_0^0\sqrt{-^3g}\,dx &= \\ &= \frac{\lambda C}{2(\varkappa/2)^{3/2}}\left[\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} - \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{2}\ln\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.2.46}$$

Из (3.2.46) следует, что для всех $0 < \sigma < 1$, E_f — конечная положительная величина.

Рассмотрим распределение плотности заряда ρ_e для полученного решения. Из (3.2.35) имеем

$$\rho_e = \frac{2C^2\sqrt{\lambda}(1-\sigma^2)\operatorname{sh} bx}{\operatorname{ch}^2 bx\sqrt{\operatorname{ch}^2 bx - \sigma^2}}. \tag{3.2.47}$$

Из (3.2.47) следует, что

$$\rho_e = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \pm\infty. \tag{3.2.48}$$

Поскольку ρ_e нечетная функция, то заряд Q, вычисленный по формуле (3.2.36), равен нулю.

3.3. Устойчивость решений

Теперь проведём исследование наших решений на устойчивость.

К сожалению процесс исследования на устойчивость не так уж просто алгоритмизировать. Представляется возможным действовать методом поэтапного приближения, т. е. применять разные методы до тех пор, пока какой-нибудь не даст результата. Применим в начале более простые методы, чтобы получить предварительное представление о характере устойчивости. Далее, основываясь на полученных данных, мы будем применять более точные (и сложные) методы.

Поскольку нашей целью является изучение влияния гравитации на устойчивость, представляется целесообразным рассмотреть два случая: без гравитации и с ее учетом.

Итак, вначале случай без гравитации. В этом случае мы имеем лагранжиан

$$L = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\Psi(I) \tag{3.3.1}$$

и уравнения движения (3.2.8) и (3.2.9).

Полевые функции зависят только от одной пространственной координаты x. Соответственно выпишем явно уравнения (3.2.8) и (3.2.9) для возмущённых решений.

Отсюда видно, что моды A_2 и A_3 отделяются (из симметрии задачи),а моды A_0 и A_1 — зацеплены. Без ограничения общности исключим моды A_2 и A_3 из рассмотрения.

Введем обозначения для возмущений:

$$a_0 := \delta A_0, \quad a_1 := \delta A_1, \quad \xi := \delta\varphi. \tag{3.3.2}$$

Первоначально рассмотрим энергетическую устойчивость (см. стр. 60).

Для дальнейших расчётов нам понадобится вторая вариация действия [1]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta^2 S = \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{2}(a_0' - \dot{a}_1)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 - \xi'^2)\frac{1}{(1-\lambda A_0^2)^2} - \\ - \frac{4\lambda\varphi' A_0}{(1-\lambda A_0^2)^3}\xi' a_0 - a_0^2\frac{\lambda\varphi'^2}{(1-\lambda A_0^2)^4}(1-5\lambda A_0^2) + \frac{\lambda\varphi'^2}{(1-\lambda A_0^2)^3}a_1^2\Big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Отсюда запишем вторую вариацию энергии:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta^2 E = \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{2}(a_0' - \dot{a}_1)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \xi'^2)\frac{1}{(1-\lambda A_0^2)^2} - \\ - a_0^2\frac{\lambda\varphi'^2}{(1-\lambda A_0^2)^4}(1-5\lambda A_0^2) - \frac{\lambda\varphi'^2}{(1-\lambda A_0^2)^3}a_1^2\Big]\,dx.\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Знакопеременность выражения для второй вариации энергии наводит на мысль о возможной неустойчивости.

Наилучшее решение для нас — найти теперь функционал Четаева (Теорема 3.2). Поскольку теорема неконструктивна, то эта задача нетривиальна. Мы выбирали функционал Четаева в виде

$$W = -\delta^2 E F, \tag{3.3.5}$$

где функционал F подбирается так, чтобы $F > 0, \dot{F} > 0$ при $\delta^2 E \leqslant -\delta_1 < 0$.

К сожалению нам не удалось подобрать функционал Четаева. Поэтому было решено было рассмотреть линеаризованную устойчивость (см. стр. 59).

Выпишем линеаризованные уравнения движения для возмущений.

$$(a_0' - \dot{a}_1)' + \frac{4\lambda\varphi' A_0}{(1-\lambda A_0)^3}\xi' + \frac{2\lambda\varphi'^2}{(1-\lambda A_0^2)^4}(1 - 5\lambda A_0^2)a_0 = 0, \tag{3.3.6}$$

$$(\dot{a}_1 - a_0')^{\cdot} - \frac{2\lambda\varphi'^2}{(1-\lambda A_0^2)^3}a_1 = 0, \tag{3.3.7}$$

$$\frac{\ddot{\xi}}{(1-\lambda A_0^2)^2} - \left(\frac{1}{(1-\lambda A_0^2)^2}\right)' - \left(\frac{4\lambda\varphi' A_0}{(1-\lambda A_0^2)^3}a_0\right)' = 0. \tag{3.3.8}$$

В частности, выделим уравнение для возмущения моды A_1 (3.3.7).

Представляя $\dot{a}_0'$ как источник, решение уравнения (3.3.7) запишем в виде

$$a_1 = a_1^{(0)} + a_1^{(1)},$$

где $a_1^{(1)}$ — частное решение неоднородного уравнения, $a_1^{(0)}$ — решение однородного уравнения. Нетрудно видеть, что $a_1^{(0)}$ возрастает экспоненциально с течением времени. Отсюда можно сделать вывод о неустойчивости исходного решения.

Далее рассмотрим случай с гравитацией. Поскольку неустойчивость была обусловлена поведением возмущения моды A_1, то представляется вполне естественным исследовать поведение этого члена и в случае с гравитацией.

Запишем уравнение движения для возмущения моды A_1:

$$(\dot{a}_1 - a_0')^{\cdot} = \frac{2\lambda\varphi'^2}{(1-\lambda A_0^2)^3}a_1 - 4A_0'\delta\alpha. \tag{3.3.9}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, но в отношении уравнения (3.3.9), и представляя $\dot{a}_0' - 4A_0'\delta\alpha$ как источник, приходим к растущей моде a_1, как и в случае без гравитации.

Таким образом, можно сделать вывод, что гравитация не изменяет характера устойчивости полученного решения.

Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в диссертации:

1. Предложена простая методика перехода от формализма дираковских 4-спиноров к лоренцевым 2-спинорам.

2. Предложен метод вычисления матричных элементов, базирующийся на 2-спинорном формализме.

3. Показывается эффективность спинорного формализма в рассмотрении спиноризованного варианта киральной модели Скирма для групп $SU(2)$ и $SU(3)$.

4. Установлена линейная неустойчивость кинковых решений системы взаимодействующих скалярного, электромагнитного и гравитационного полей в статической плоско-симметричной метрике.

Литература

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз. — 1961.

2. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. — М.: Наука. — 1969.

3. Лизин И. М., Шелепин Л. А. Канонический метод расчёта эффектов для частиц с произвольным спином // Ядерная физика. — Т. 9, Вып. 2 (1969), С. 440–450.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука. — 1973.

5. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М. — 1976.

6. Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. — Т. 1,2. — М.: Наука. — 1978.

7. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука. — 1978.

8. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика. — М.: Высшая школа. — 1980. — 335 с.

9. Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. Гравитация. — Киев: Наукова думка. — 1985. — 198 с.

10. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Введение в риманову геометрию. — С-Пб.: Наука. — 1994.

11. Рыбаков Ю. П., Фарраж Н. Аби Спинорная реализация киральной модели Скирма // Вестник РУДН. — № 4, Вып. 1 (1996), С. 59–64.

12. Джена Р., Морис Н. М. Волновая функция произвольно поляризованного электрона в тензорной формулировке // Вестник РУДН. — № 2 (1994), С. 117–121.

13. Данилова И. Н., Ндахайо Ф. Эффективные заряды и токи в уравнении Рейфлера для нейтрино // Вестник РУДН. — № 2 (1994), С. 132–136.

14. Буликунзира С., Самсоненко Н. В. Тензорное описание частиц со спином 1/2 // Вестник РУДН. — № 2 (1994), С. 104–116.

15. Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир. — 1968.

16. Хокинг С., Эллис Д. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир. — 1976.

17. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука. — 1981.

18. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. — Т. 1. — М.: Мир. — 1987.

19. Абловитц М., Сегур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир. — 1987.

20. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. — Т. 2. — М.: Мир. — 1988.

21. Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости. — М.–Л.: ГИТТЛ. — 1949.

22. Рашевский П. К. Теория спиноров // УМН. — Т. X, Вып. 2 (64) (1955), с 1.

23. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. — М.: Физматгиз. — 1958.

24. Мовчан А. А. Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикл. мат. мех. — Т. 24, № 6 (1960), С. 988–1001.

25. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. — М.: Физматгиз. — 1961.

26. Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. — М.: Физматгиз. — 1963.

27. Тирринг Вальтер Е. Принципы квантовой электродинамики. — М.: Высшая школа. — 1964. — 226 с.

28. Малкин И. Г. Теория устойчивости. — М.: Наука. — 1966. — 531 с.

29. Иваненко Д. Д., под ред. Гравитация и топология. — М. — 1966.

30. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука. — 1967.

31. Биленький С. М. Введение в диаграммную технику Фейнмана. — М.: Атомиздат. — 1971. — 214 с.

32. Зубов В. И. Устойчивость движения. — М.: Высшая школа. — 1973. — 272 с.

33. Иваненко Д. Д., под ред. Квантовая гравитация и топология. Сборник статей. — М. — 1973.

34. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука. — 1974.

35. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука. — 1974.

36. Уэллс Р. О. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. — М.: Мир. — 1976.

37. Соколов А. А. Квантовая механика. — М.: Наука. — 1979.

38. Желнорович В. А. Теория спиноров и её применение в физике и механике. — М.: Наука. — 1982.

39. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. — Т. II. — М.: Наука. — 1983. — 544 с.

40. Рыбаков Ю. П. // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. — Вып. 14 (1984), с 161.

41. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. — М.: Наука. — 1984.

42. Рыбаков Ю. П. Структура частиц в нелинейной теории поля. — М.: Изд. УДН. — 1985. — 80 с.

43. Филиппов А. Т. Многоликий солитон. — М.: Наука. — 1986.

44. Рыбаков Ю. П. Устойчивость многомерных солитонов в киральных моделях и гравитации // Итоги науки и техники. — Т. 2 (1991), С. 56–111.

45. Кассандров В. В. Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика. — М.: Изд. РУДН. — 1992. — 148 с.

46. Шикин Г. Н. Основы теории солитонов в общей теории относительности. — М., Издательство «УРСС». — 1995. — 88 с.

47. Ндонтчуэнг Мойо Морис 1995. — Новый метод вычисления матричных элементов процессов с поляризованными фермионами. — РУДН.

48. Картан Э. Теория спиноров. — М.: ИЛ. — 1947.

49. Шевалле К. Теория групп Ли. — Т. 1,2,3. — М.: ИЛ. — 1948, 1958.

50. Картан Э. Пространства аффинной, проективной, конформной связности. — Казань: Изд-во КГУ. — 1962.

51. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. — Т. 1–4. — М.: Наука. — 1965–1967.

52. Пенроуз Р. Структура пространства-времени. — М.: Мир. — 1972.

53. Меллер К. Теория относительности. — М.: Атомиздат. — 1975.

54. Дирак П. Лекции по квантовой механике. — М.: Наука. — 1981.

55. Паули В. Теория относительности. — М.: Наука. — 1983.

56. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. — М.: Мир. — 1985.

57. Канатчиков И. // Изв. АН Эст. ССР, Физика–Математика. — (1989).

58. Буликунзира С. 1994. — Тензорный формализм описания фермионов и новый метод вычисления матричных элементов. — РУДН.

59. Берестецкий А. Б., и др. Релятивистская квантовая теория. — М.: Наука. — 1968.

60. Боголюбов Н. Н., и др. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука. — 1969.

61. Захаров В. Е., и др. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука. — 1980.

62. Иваненко Д. Д., и др. Групповые, геометрические и топологические методы в теории поля. — М.: Изд-во Московского ун-та. — 1983.

63. Бронников К. А., и др. Самогравитирующие солитоноподобные конфигурации с векторным полем // Препринт Института ядерных исследований. — № П–0381 (1984), с 18.

64. Иваненко Д. Д., и др. Калибровочная теория гравитации. — М.: Изд-во МГУ. — 1985. — 141 с.

65. Дубровин Б. А., и др. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука. — 1986.

66. Соколов А. А., и др. Калибровочные поля. — М.: МГУ. — 1989. — 260 с.

67. Березин А. В., и др. Кватернионы в релятивистской физике. — Минск: Наука и техника. — 1989.

68. Маханьков В. Г., и др. Модель Скирма и солитоны в физике адронов. — Дубна. — 1989.

69. Маханьков В. Г., и др. Модель Скирма и сильные взаимодействия (К 30-летию создания модели Скирма) // Успехи физических наук. — Т. 162, № 2 (1992).

70. Мизнер Ч., и др. Гравитация. — Т. 1–3. — М.: Мир. — 1977.

71. Додд Р., и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир. — 1988.

72. Нелинейная спинорная теория. — М.: ИЛ. — 1954.

73. Bergman P. G. Two-component spinors in general relativity // Phys. Rev. — V. 107 (1957), pp. 624–629.

74. Blade W. L., Lehle H. An introduction to spinors // Rev. Mod. Phys. — V. 25 (1953), pp. 714–728.

75. Brauer R., Weyl H. Spinors in n dimensions // Am. J. Math. — V. 57 (1935), pp. 425–449.

76. Chevalley C. The Algebraic Theory of Spinors. — New York: Columbia University Press. — 1954.

77. Geroch R. Spinor stucture of space-time in general relativity I // J. Math. Phys. — V. 9 (1968), pp. 1739–1744.

78. Geroch R. Spinor stucture of space-time in general relativity II // J. Math. Phys. — V. 11 (1970), pp. 343–348.

79. Hara T., Migoshi Sh. Flare-up of the Universe after $z \approx 10^2$ for cosmic string model // Pr. Th. Phys. — V. 78, № 5 (1987).

80. Hindmarsh M. B., Kibble T. W. Cosmic Strings // Rep. on Progress in Physics. — V. 58 (1995), pp. 427–562.

81. Laporte O., Unlenbeck G. E. Application of Spinor Analisys to the Maxwell and Dirac Equations // Phys. Rev. — V. 37 (1931), pp. 1380–1552.

82. Penrose R. An Analysis of the Structure of Space-time. — Cambridge University. — 1966.

83. Reifler F. // J. Math. Phys. — V. 25, № 4 (1984), p. 1088.

84. Shrödinger E. Space-time structures. — Cambridge. — 1960.

85. Sirlin A. // Nucl. Phys. — V. B192 (1981), p. 93.

86. Skyrme T. H. R. A unified field theory of mesons and barions // Nuclear Physics. — V. 31, № 4, pp. 556–569.

87. Skyrme T. H. R. Meson theory and nuclear matter // Proc. Roy. Soc. — V. A230, № 1181 (1955), pp. 277–286.

88. Skyrme T. H. R. A nonlinear theory of strong interaction // Proc. Roy. Soc. — V. A247, № 1249 (1958), pp. 260–278.

89. Sommers P. // J. Math. Phys. — V. 21, № 10 (1979), p. 2569.

90. Veblen O. Geometry of Four-Components Spinors // Proc. Nat. Acad. Sci. — V. 19 (1933), pp. 503–517.

91. Veblen O. Geometry of Two-Components Spinors // Proc. Nat. Acad. Sci. — V. 19 (1933), pp. 462–474.

92. Vilenkin A. Cosmic Strings // Phys. Rev. — V. D24 (1981), pp. 2082–2089.

93. Whittaker E. T. On the Relations of the Tensor-calculus to the Spinor-calculus // Proc. Roy. Soc. London. — V. A158 (1937), pp. 38–46.

94. Zeldovich Ya. B. // M. Not. R. Astron. Soc. — V. 192 (1980), p. 663.