УДК 531.01
PACS 05.45.Xt

Изучение параметрического возбуждения осцилляторов в зависимости от импеданса и частоты

М. Н. Геворкян, Д. С. Кулябов, Л. А. Севастьянов

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

В статье проведено исследование зависимости решений уравнений Гамильтона для гармонического осциллятора от циклической частоты и импеданса. Проведён численный анализ, а также получено аналитическое решение, подтверждающее численные результаты.

Ключевые слова: импеданс, циклическая частота, осциллятор, параметрический резонанс.

1. Введение

В [1] показано, что именно модуляция импеданса (а не циклической частоты) приводит к резонансу осциллятора. В данной же работе это показано непосредственным решением уравнений Гамильтона. Будем рассматривать двумерный и одномерный гармонический осциллятор. Решение уравнений осуществляется двумя способами: численным (с помощью открытого пакета программ для численных расчётов SciLab) и аналитическим.

2. Постановка задачи

Рассмотрим лагранжиан гармонического осциллятора следующего вида:

$$L(x^i, \dot{x}^i, t) = -\frac{1}{2}K_{ij}x^i x^j + \frac{1}{2}M_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \beta_{ij}x^i\dot{x}^j.$$

Матрицы K_{ij} и M_{ij} симметричные, матрица β_{ij} — произвольная[1] .

Импеданс Z^i_j будет удовлетворять уравнению:

$$(M^{-1})^{kl}Z_{ik}Z_{jl} = K_{ij} \tag{1}$$

Для одномерного случая лагранжиан и гамильтониан можно переписать в виде:

$$L(x, \dot{x}, t) = -\frac{1}{2}K(t)x^2 + \frac{1}{2}m(t)\dot{x}^2 + \beta(t)x\dot{x},$$
$$H(p, x, t) = \frac{1}{2m(t)}(p - x\beta(t))^2 + \frac{1}{2}x^2K(t).$$

Для упрощения используем производящую функцию (штрихованные переменные — новые):

$$\Gamma(p', x, t) = p'x - \frac{1}{2}\beta(t)x^2.$$

Статья поступила в редакцию 1 июня 2009 г.

[1]Названия выбраны так, чтобы быть похожими на коэффициент упругости, массу и магнитную индукцию.

Тогда

$$x' = \frac{\partial \Gamma}{\partial p'}, \quad p = \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, \quad H' = H + \frac{\partial \Gamma}{\partial t}. \tag{2}$$

С помощью получившихся симплектических преобразований:

$$p' = p - \beta(t)x, \quad K'(t) = K(t) + \frac{d\beta}{\mathrm{d}t}, \quad x' = x,$$

перейдём к новым каноническим переменным:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = p\dfrac{\beta(t)}{m(t)} - \left(K(t) + \dfrac{\beta^2(t)}{m(t)}\right)x, \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{p}{m(t)} - \dfrac{\beta(t)}{m(t)}x. \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}t} = -K'(t)x, \\ \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \dfrac{p'}{m(t)}. \end{cases}$$

Определение 1. *Для одномерного осциллятора* ***циклическая частота*** *(или просто частота) есть* $\omega(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{K(t)/m(t)}$, *импеданс* $Z(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{K(t)m(t)}$.

Используя новые обозначения, можно переписать уравнения Гамильтона в виде (штрихи над переменными опускаем):

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\omega(t)Z(t)x(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega(t)}{Z(t)}p(t). \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим два случая параметрического возмущения.

1. Импеданс $Z(t) = \mathrm{const} = Z_0$, а циклическая частота терпит малые возмущения $\omega(t) = \omega_0 + \omega_1 \cos(2\omega_0 t) \quad \omega_1 \ll \omega_0$.
2. Циклическая частота постоянна $\omega(t) = \mathrm{const} = \omega_0$, а импеданс терпит малые возмущения $Z(t) = Z_0 + Z_1 \cos(2\omega_0 t)$.

3. Численное решение

Рассмотрим теперь каждый из случаев подробнее. Для каждого случая проведём численное решение получившейся системы ОДУ. Все вычисления проводятся при помощи пакета для численных расчётов SciLab.

3.1. Случай постоянного импеданса

Уравнения Гамильтона и начальные условия принимают вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -(\omega_0 + \omega_1 \cos(2\omega_0 t))Z_0 x(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_0 + \omega_1 \cos(2\omega_0 t)}{Z_0}p(t), \\ p(t_0) = p_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

Найдём численное решение при начальных условиях:

$$p_0 = 10, \quad x_0 = 0, \quad \omega_0 = \pi/3, \quad \omega_1 = \omega_0/1000, \quad Z_0 = 4, \quad Z_1 = Z_0/100.$$

Получим решения для импульса $p(t)$ и координаты $x(t)$. Изобразим его для наглядности в виде графика (рис. 1).

Вывод. При модуляции частоты, но постоянном импедансе, не происходит параметрического резонанса.

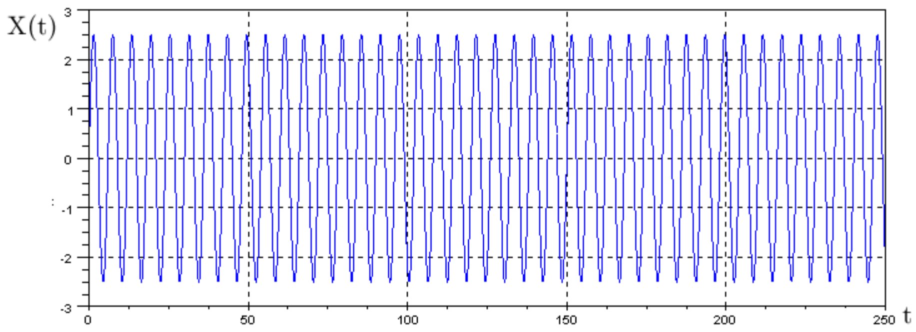

Рис. 1. **Изменение координаты $x(t)$ при модуляции частоты**

3.2. Случай модуляции импеданса

Уравнения Гамильтона приводятся к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -(Z_0 + Z_1 \cos(2\omega_0 t))\omega_0 x(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_0}{Z_0 + Z_1 \cos(2\omega_0 t)} p(t), \\ p(t_0) = p_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

Проведём решение при тех же начальных условиях, что и в первом случае. Аналогичным образом представим полученные результаты в графическом виде (рис. 2).

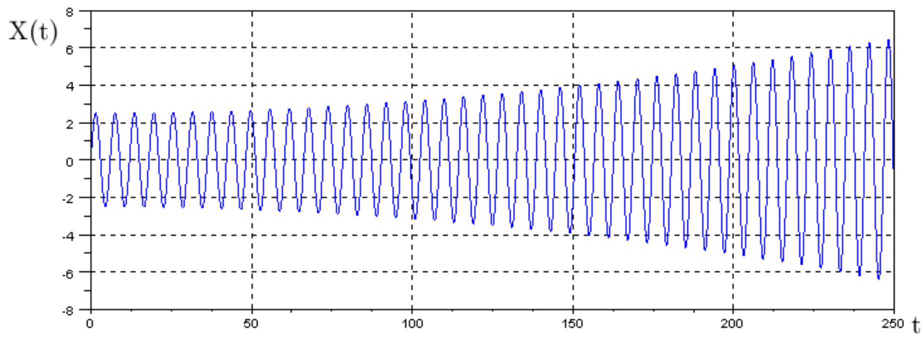

Рис. 2. **Изменение координаты $x(t)$ при модуляции импеданса**

Вывод. При модуляции импеданса даже при постоянной частоте происходит параметрический резонанс.

3.3. Двумерный случай

Случай двумерного осциллятора отличается от одномерного лишь увеличением числа уравнений и возможностью модуляции частоты и импеданса по осям x и y разными способами. Из (1) видно, что если считать матрицы $(M^{-1})^{ij}$ и K_{ij} диагональными, то и матрица импеданса Z_{ij} будет диагональной. Уравнения

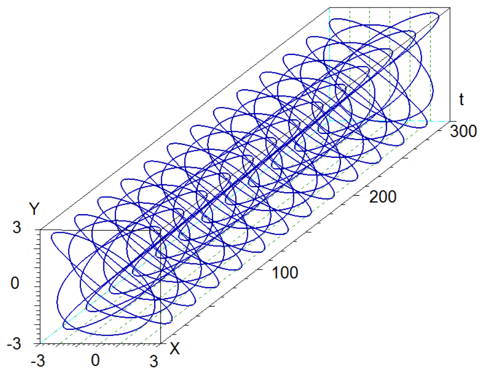

Рис. 3. **Изменение координат при модуляции частоты (двумерный случай)**

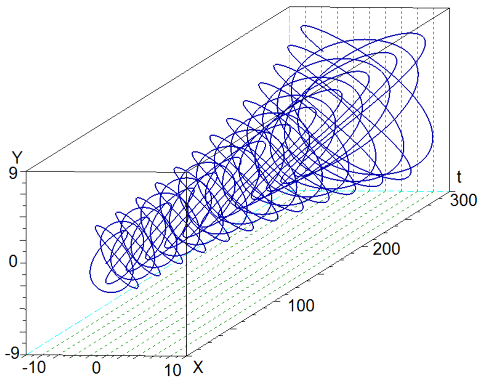

Рис. 4. **Изменение координат при модуляции импеданса (двумерный случай)**

Гамильтона приводятся к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = -\omega_x(t) Z_x(t) x(t), & \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_x(t)}{Z_x(t)} p_x(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = -\omega_y(t) Z_y(t) y(t), & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_y(t)}{Z_y(t)} p_y(t). \end{cases}$$

Численное решение даёт аналогичные одномерному случаю результаты (рис. 3 и 4).

4. Аналитическое решение

Решим теперь (3) аналитически, не учитывая члены второго порядка малости. Продифференцируем первое уравнение системы по t, в результате получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2} = -\omega'(t) Z(t) x(t) - \omega(t) Z'(t) \omega(t) - \omega(t) Z(t) \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega(t)}{Z(t)} p(t). \end{cases} \tag{4}$$

Из первого уравнения (3): $x(t) = -\frac{1}{\omega(t) Z(t)} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, а из второго $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega(t)}{Z(t)} p(t)$. Исключая из первого уравнения (4) координату, получим:

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} + \frac{Z'(t)}{Z(t)} \right) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \omega^2(t) p(t) = 0. \tag{5}$$

Аналогичным образом можно получить уравнение для координаты $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{Z'(t)}{Z(t)} - \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \right) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2(t) x(t) = 0. \tag{6}$$

Будем решать уравнение (6) при следующем параметрическом возмущении.

$$\omega(t) = \omega_0 = \mathrm{const}, \quad Z(t) = Z_0 + Z_1 \cos(2\omega_0 t), \quad Z_1 \ll Z_0.$$

Учитывая, что:

$$\frac{-2Z_1\omega_0\sin(2\omega_0 t)}{Z_0+Z_1\cos(2\omega_0 t)} \approx -2\omega_0\frac{Z_1}{Z_0}\sin 2\omega_0 t \quad \text{т.к.} \quad |Z_1\cos 2\omega_0 t| \ll |Z_0|$$

получим уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega\frac{Z_1}{Z_0}\sin(2\omega_0 t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Сделаем замену $x(t) = u(t)z(t)$, описанную в приложении **??**. Получим:

$$P(t) = -2\omega_0\frac{Z_1}{Z_0}\sin 2\omega_0 t, \quad Q(t) = \omega_0^2, \quad u(t) = \exp\left(-2\omega_0^2\frac{Z_1}{Z_0}\cos 2\omega_0 t\right),$$
$$I(t) = Q(t) - \frac{1}{4}P^2(t) - \frac{1}{2}P'(x) = \omega_0^2 - \omega_0^2\frac{Z_1^2}{Z_0^2}\sin^2(2\omega_0 t) + 2\omega_0^2\frac{Z_1}{Z_0}\cos(2\omega_0 t).$$

Так как слагаемое $\omega_0^2\frac{Z_1^2}{Z_0^2}\sin^2(2\omega_0 t)$ имеет второй порядок малости, то им можно пренебречь. Поэтому получаем:

$$I(t) = \omega_0^2(1 + 2\frac{Z_1}{Z_0}\cos 2\omega_0 t).$$

Исходное уравнение преобразовалось к виду:

$$\frac{d^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2(1 + h\cos 2\omega_0 t)z(t) = 0, \quad h \overset{\text{not}}{=} 2\frac{Z_1}{Z_0} \ll 1 \tag{7}$$

Это однородное линейное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами. Аналогичное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид: $z''(t) + \omega_0^2 z(t) = 0$ и решение: $z(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$, поэтому будем искать решение уравнения (7) с помощью метода вариации постоянных в виде:

$$z(t) = a(t)\cos\omega_0 t + b(t)\sin\omega_0 t.$$

Подставим $z(t)$ в исходное уравнение. Второй член преобразуется к виду:

$$\omega_0^2(1 + h\cos(2\omega_0 t))z(t) = a(t)\omega_0^2\cos\omega_0 t + b(t)\omega_0^2\sin\omega_0 t + \\ + h\omega_0^2 a(t)\cos(2\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + h\omega_0^2 b(t)\cos(2\omega_0 t). \tag{8}$$

Последние два слагаемых в выражении (8) можно упростить, отбросив слагаемые второго порядка малости.

В результате уравнение (7) преобразуется к виду:

$$(a''(t) + 2b'(t)\omega_0 - h\omega_0^2 a(t))\cos\omega_0 t + (b''(t) - 2\omega_0 a'(t) + h\omega_0^2 b(t))\sin\omega_0 t = 0.$$

Равенство нулю возможно только, если оба сомножителя при cos и sin одновременно обратятся в ноль, т.е. если выполняется система:

$$\begin{cases} a''(t) + 2b'(t)\omega_0 - h\omega_0^2 a(t) = 0, \\ b''(t) - 2\omega_0 a'(t) + h\omega_0^2 b(t) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Это система линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Будем искать её решение в виде:

$$a(t) = k_1 e^{\lambda t}, b(t) = k_2 e^{\lambda t}.$$

Подставив в (9) получаем:

$$\begin{cases} \lambda^2 k_1 + 2\lambda k_2\omega_0 - h\omega_0^2 k_1 = 0, \\ \lambda^2 k_2 - 2\lambda k_1\omega_0 + h\omega_0^2 k_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda^2 - h\omega_0^2)k_1 + 2\lambda\omega_0 k_2 & = 0, \\ \quad -2\lambda\omega_0 k_1 + (\lambda^2 + h\omega_0^2)k_2 & = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - h\omega_0^2 & 2\lambda\omega_0 \\ -2\lambda\omega_0 & \lambda^2 + h\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^4 - h^2\omega_0^4 + 4\omega_0^2\lambda^2 = 0.$$

Оно имеет 4 различных корня — два действительных и два комплексных:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_{1,2} = \pm\omega_0 A, \\ \lambda_{3,4} = \pm i\omega_0 B. \end{array}\right. \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} A \overset{\text{not}}{=} \sqrt{\sqrt{h^2+4} - 2}, \\ B \overset{\text{not}}{=} \sqrt{\sqrt{h^2+4} + 2}. \end{array}$$

Ищем k_1, k_2 для каждого λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$

$$\lambda_1 = \omega_0 A \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2A}{A^2+h} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -\omega_0 A \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2A}{A^2+h} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = i\omega_0 A \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2iB}{h-B^2} \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = -i\omega_0 A \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2iB}{h-B^2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы (9) имеет вид:

$$\begin{cases} a(t) = C_1 e^{\omega_0 At} + C_2 e^{-\omega_0 At} + C_3 e^{i\omega_0 Bt} + C_4 e^{-i\omega_0 Bt}, \\ b(t) = \left(\dfrac{2A}{A^2+h}\right) C_1 e^{\omega_0 At} - \left(\dfrac{2A}{A^2-h}\right) C_2 e^{-\omega_0 At} + \\ \qquad + \left(\dfrac{2iB}{h-B^2}\right) C_3 e^{i\omega_0 Bt} - \left(\dfrac{2iB}{h-B^2}\right) C_4 e^{-i\omega_0 Bt}. \end{cases}$$

Выражая через тригонометрические и гиперболические функции, получим:

$$\begin{cases} a(t) = K_1 \operatorname{ch}(\omega_0 At) + K_2 \operatorname{sh}(\omega_0 At) + K_3 \cos(\omega_0 Bt) + K_4 \sin(\omega_0 Bt), \\ b(t) = \left(\dfrac{2A}{A^2+h}\right)(K_1 \operatorname{sh}\omega_0 At + K_2 \operatorname{ch}\omega_0 At) + \\ \qquad + \left(\dfrac{2B}{B^2-h}\right)(K_3 \sin\omega_0 Bt - K_4 \cos\omega_0 Bt). \end{cases}$$

5. Заключение

Было проведено численное и аналитическое решение системы ОДУ для гармонического осциллятора. Целью работы было получение результатов статьи [1] непосредственным решением системы ОДУ. Повторим ещё раз основной результат. *При модуляции частоты, но постоянном импедансе не происходит параметрического резонанса, однако при модуляции импеданса даже при постоянной частоте происходит параметрический резонанс.* Двумерный случай подробно не рассматривался (так как отличается от одномерного лишь числом уравнений), однако численные решения для него также были получены. Решение, полученное аналитически для случая модуляции импеданса, подтверждает численные результаты.

6. Приложение. Преобразование линейного ОДУ второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим преобразование уравнения [2]:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{10}$$

Сделаем замену $y = u(x)z(x) \implies y' = u'(x)z(x) + u(x)z'(x) \Rightarrow y'' = u''(x)z(x) + 2u'(x)z'(x) + u(x)z''(x)$. Уравнение 10 преобразуется к виду:

$$u(x)z''(x) + (P(x)u(x) + 2u'(x))z'(x) + (u''(x) + P(x)u'(x) + Q(x)u(x))z(x) = 0.$$

Пусть $P(x)u(x) + 2u'(x) = 0$, отсюда узнаем $u(x)$: $2du(x) = -P(x)u(x)\mathrm{d}x \Rightarrow$

$$u(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int P(x)\mathrm{d}x\right).$$

Найдя первую и вторую производные от $u(x)$ уравнение 10, можно привести к виду:

$$z''(x) + \left(-\frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x) + Q(x)\right)z(x) = 0.$$

$Q(x) - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x) + Q(x) = I(x)$ — *инвариант* уравнения.

Литература

1. *Зельдович Б. Я.* Импеданс и параметрическое возбуждение осцилляторов // УФН. — 2008.
2. *В.В.Степанов*. Курс дифференциальных уравнений. — Едиториал УРСС, 2004.

UDC 531.01
PACS 05.45.Xt

A Study of Impedance, Frequency and Parametric Excitation of Oscillators

M. N. Gevorkyan, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

One dimensional and tow dimensional harmonic oscillators are described. According to B. I. Zeldovich article the definition of impedance is introduced. Exploration of small parametric oscillations of impedance and frequency is made. By numerical solution of lineal ODE systems (for 1D and 2D case) it was shown, that impedance plays the key role in the parametric resonance phenomena.

Key words and phrases: harmonic oscillator, parametric resonance, impedance.