1 Определение окна запуска в meet-and-greet

Обозначения:

1. r_1 — исходная орбита нашего спутника
2. r_2 — орбита спутника-цели
3. $\omega(r)$ — угловая скорость (радиан в секунду) на круговой орбите радиуса r
4. τ — время перехода с орбиты r_1 на r_2
5. T — время начала маневра перехода
6. $\alpha(t)$ — положение на орбите (полярный угол, в радианах) нашего спутника в момент времени t
7. $\beta(t)$ — положение на орбите спутника-цели в момент времени t

(T надо найти)

Чтобы попасть в спутник-цель, надо, чтобы в момент завершения перехода на орбиту, совпали положения спутников:

$$\alpha(T+\tau) = \beta(T+\tau) \pm 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\alpha(T+\tau) = \alpha(T) + \pi = \alpha(0) + \pi + \omega(r_1)T$$

$$\beta(T+\tau) = \beta(0) + (T+\tau)\omega(r_2).$$

$$\begin{gathered}\alpha(T+\tau) - \beta(T+\tau) = \\ = \alpha(0) + \pi + \omega(r_1)T - \beta(0) - (T+\tau)\omega(r_2) = \\ T(\omega(r_1) - \omega(r_2)) + (\alpha(0) + \pi - \beta(0) - \tau\omega(r_2)) = \\ Tc_1 + c_2.\end{gathered}$$

Чтобы выполнилось условие попадания спутника в цель, надо чтобы выполнялось

$$Tc_1 + c_2 = 2\pi k$$

.

Обозначим

$$z = \left\{\frac{c_2}{2\pi}\right\},$$

тогда

$$c_2 = 2\pi q + z, \quad q \in \mathbb{Z}$$

Тогда, если положим T таким, что

$$\text{при } c_1 > 0: \quad Tc_1 = 2\pi - z \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi - z}{c_1},$$

$$\text{при } c_1 < 0: \quad Tc_1 = -z \quad \Rightarrow \quad T = \frac{-z}{c_1},$$

то $T > 0$ и выполнится условие:

$$2\pi - z + 2\pi q + z = 2\pi(q+1), \quad \text{или} \quad -z + 2\pi q + z = 2\pi q,$$

и при этом

$$T > 0.$$

2 Коррекция орбиты

Все это неправильно

Обозначения:

1. r — радиус орбиты
2. v — линейная скорость движения спутника по орбите
3. ω — угловая скорость движения спутника по орбите
4. $g(r)$ — гравитационное ускорение на высоте r

Когда спутник летит по круговой орбите, выполняется соотношение

$$g(r) = \frac{v^2}{r}.$$

Допустим, что мы хотим изменить линейную скорость движения спутника по орбите на Δv_τ. Тогда необходимо будет придать дополнительное нормальное ускорение:

$$g(r) + \Delta v_n = \frac{(v + \Delta v_\tau)^2}{r}.$$

Таким образом,

$$\Delta v_n = \frac{(v + \Delta v_\tau)^2}{r} - g(r).$$

Посчитаем, какую линейную скорость надо сообщить спутнику, чтобы изменить его угловую скорость на $\Delta\omega$.

Период обращения спутника можно выразить двумя способами:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{V},$$

откуда

$$v = r\omega,$$

и

$$\Delta v = r\Delta\omega.$$

Таким образом, для изменения угловой скорости на $\Delta\omega$ необходимо изменить линейную скорость на Δv.

Чтобы «догнать» другой спутник на орбите, отстоящий на угол $\Delta\phi$, необходимо в течение секунды изменить угловую скорость на $\Delta\omega$.

3 Активная компенсация ошибки

1. $x(t)$ — положение (радиус-вектор) нашего спутника в момент времени t
2. $y(t)$ — положение спутика-цели в момент времени t
3. x_0 — начальное положение спутника
4. y_0 — начальное положение спутника-цели
5. v_x — начальная скорость спутника (вектор)
6. v_y — начальная скорость спутника-цели (вектор)
7. a_x — гравитационное ускорение спутника (в начальный момент времени)
8. a_y — гравитационное ускорение спутника-цели (в начальный момент времени)
9. α — ускорение спутника, вызванное работой двигателей

В течение одной секунды движение спутников описывается уравнениями:

$$x(t) = x_0 + v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 + \frac{1}{2} \alpha t^2,$$

$$y(t) = y_0 + v_y t + \frac{1}{2} a_y t^2.$$

К концу первой секунду спутники будут иметь скорости

$$v'_x = v_x + a_x t + \alpha,$$

$$v'_y = v_y + a_y t.$$

Необходимо выбрать α таким образом, чтобы быть как можно ближе к цели. Будем искать α исходя из той ситуации, которая будет к концу первой секунды. На следующей секунде все расчеты необходимо будет повторить.

Если α выбрать таким образом, чтобы минимизировать $|x(1) - y(1)|$, то это приведет к тому, что будет значительная разница скоростей v'_x, v'_y, и на следующей секунде спутник наберет большую скорость, и начнется резонасная осцилляция скорости спутника, которая в конце приведет к тому, что у спутника не хватит топлива на очередную коррекцию.

Поэтому, будем выбирать α таким образом, чтобы минимизировать как погрешность положения, так и погрешность скорости:

$$|x(1) - y(1)|^2 + \left|v'_x - v'_y\right|^2 \to \min.$$

Распишем:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(1) - y(1) & = & \underbrace{x_0 - y_0 + v_x - v_y + \frac{1}{2} a_x - \frac{1}{2} a_y}_{p} + \frac{1}{2}\alpha \\ v'_x - v'_y & = & \underbrace{v_x - v_y + a_x - a_y}_{q} + \alpha \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x(1) - y(1) & = & p + \frac{1}{2}\alpha \\ v'_x - v'_y & = & q + \alpha \end{cases}$$

Таким образом, задача нахождения α записывается в виде

$$(p_x + \frac{1}{2}\alpha_x)^2 + (p_y + \frac{1}{2}\alpha_y)^2 + (q_x + \alpha_x)^2 + (q_y + \alpha_y)^2 \to \min,$$

где $p_x, p_y, q_x, q_y, \alpha_x, \alpha_y$ — x- и y-компоненты векторов.

Отдельно минимизируем выражения, зависящие от α_x и α_y:

$$\begin{cases} (p_x + \frac{1}{2}\alpha_x)^2 + (q_x + \alpha_x)^2 & \to & \min \\ (p_y + \frac{1}{2}\alpha_y)^2 + (q_y + \alpha_y)^2 & \to & \min \end{cases}$$

Рассмотрим выражение, зависящее от α_x:

$$(p_x + \frac{1}{2}\alpha_x)^2 + (q_x + \alpha_x)^2 \to \min$$

Перепишем его в виде

$$\alpha_x^2(\frac{1}{4} + 1) + \alpha_x(p_x + 2q_x) + (p_x^2 + q_x^2) \to \min$$

Это выражение задает параболу с ветвями, уходящими вверх. Минимум это параболы — вершина параболы, соответствующая значению

$$\alpha_x = -\frac{p_x + 2q_x}{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5}q_x - \frac{2}{5}p_x.$$

Аналогично,

$$\alpha_y = -\frac{4}{5}q - \frac{2}{5}p.$$

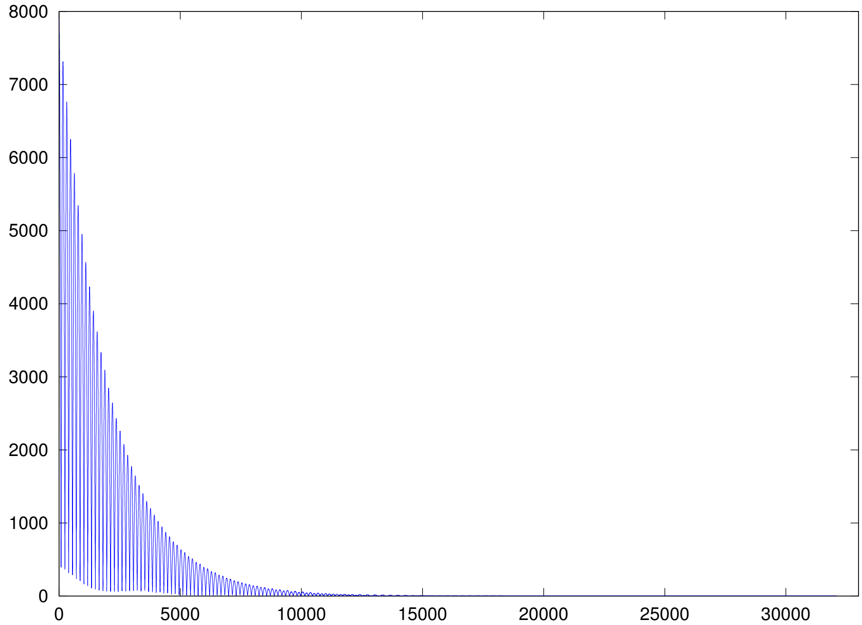
Таким образом,

$$\alpha = -\frac{4}{5}q - \frac{2}{5}p,$$

где

$$p = x_0 - y_0 + v_x - v_y + \frac{1}{2}a_x - \frac{1}{2}a_y,$$
$$q = v_x - v_y + a_x - a_y.$$

График зависимости расстояния от спутника до цели от времени при использовании активной компенсации:



8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000