



Introducción

El Equipo de Consultoría de Métodos Numéricos busca desarrollar un software que pueda ser utilizado durante el proceso de construcción de puentes, otorgando información respecto de la seguridad y los costos involucrados que faciliten la toma de decisiones durante el mismo. Como punto de partida, nos concentraremos en un tipo particular de puentes, llamados *Pratt Truss Bridges*. La Figura 1 muestra un ejemplo de este tipo de puentes.



Figure 1: Puente Pratt Truss

Para realizar el análisis, es posible simplificar el problema y realizar el análisis de la estructura en dos dimensiones suponiendo que el peso se distribuye de forma homogénea en la tercera dimensión. El puente debe tener una determinada longitud (*span*), altura (*h*) y se divide en un número par de secciones (*n*) de igual tamaño. La estructura se representa mediante *links* (que modelan los miembros de la estructura) y juntas (puntos donde se unen los links). La Figura 2 muestra un ejemplo del modelo para la estructura. Las juntas son representadas mediante un círculo blanco y los links mediante una línea recta.

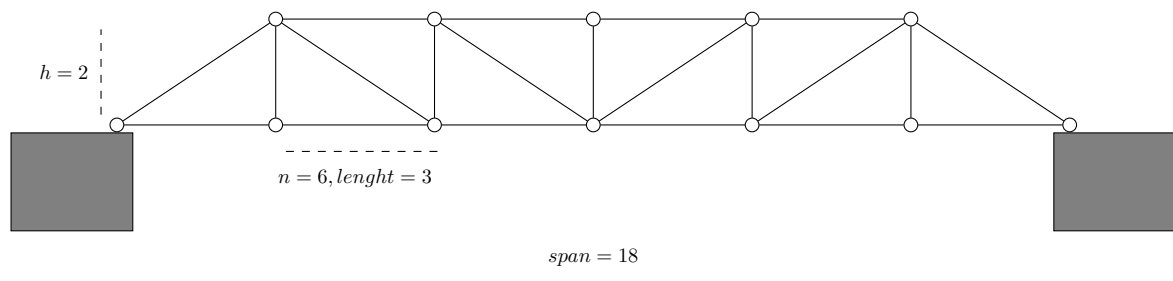


Figure 2: Ejemplo estructura en 2D

La estructura mostrada como ejemplo cuenta un *span* de 18 metros, una altura $h = 2m$ y 6 secciones. Dentro del presente trabajo, analizaremos puentes que tienen exactamente el patrón descrito en el ejemplo en términos de simetría y conformación de la estructura, pero con diferentes valores de *span*, h y n .

Para que la estructura del puente pueda ser utilizada, debe soportar una carga total (conocida) que se distribuye entre las juntas internas inferiores del puente. Este hecho afecta a toda la estructura del puente y por lo tanto los links que conforman la misma deben ser lo suficientemente resistentes para mantener estable la estructura. El objetivo del trabajo es realizar este análisis para distintos tipos de estructuras.

El problema

Dado un puente Pratt Truss con n secciones, la estructura cuenta con $4n - 3$ links y $2n$ juntas. A su vez, para cada uno de las $n - 1$ juntas internas inferiores suponemos que se aplica una carga c_i , $i = 1, \dots, n - 1$. Llamamos F_j a la fuerza ejercida sobre el link j , $j = 1, \dots, 4n - 3$, dada una numeración para los links. Nuestro objetivo es calcular la compresión ($F_i < 0$) o tensión ($F_i > 0$) a cada link de la estructura una vez que las fuerzas se aplican a la estructura.

Además de las fuerzas para cada link, consideramos también otras tres fuerzas soporte que se aplican sobre los extremos inferiores de la estructura. Las llamaremos v_0, v_1 y h_0 . La Figura 3 muestra como se aplican las definiciones a la estructura.

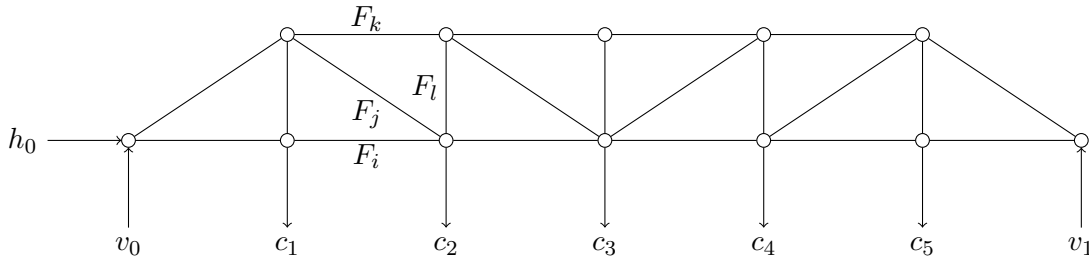


Figure 3: Fuerzas aplicadas sobre la estructura

Para que la estructura se encuentre en equilibrio (es decir, que no se este moviendo) se establece que la fuerza total que se aplica sobre el mismo es cero. Luego, para cada junta, se tienen que cumplir que la suma de las fuerzas que actúan horizontalmente sea cero, y análogamente que la suma de las fuerzas verticales también sea nula, obteniendo dos ecuaciones por cada junta presente en la estructura. Con el objetivo de simplificar el análisis, en este caso suponemos que la carga se aplica solamente sobre las juntas, que los links son perfectamente rectos y que el peso de la estructura es cero.

La Figura 4 muestra el diagrama de fuerzas sobre una junta en particular. Es importante destacar que la fuerza correspondiente al link j , F_j , debe descomponerse en sus componentes vertical y horizontal. Luego, las ecuaciones de equilibrio para la junta son:

$$F_i + F_j \cos(\theta) - F_k = 0 \quad (\text{Horizontal}) \quad (1)$$

$$F_j \sin(\theta) + F_l + c_2 = 0 \quad (\text{Vertical}) \quad (2)$$

Planteando estas ecuaciones para cada junta, obtenemos un total de $4n$ ecuaciones y $4n$ incógnitas ($4n - 3$ correspondientes a las variables F_i y v_0 , v_1 y h_0). Un primer objetivo del trabajo consiste resolver este sistema de ecuaciones utilizando un método directo.

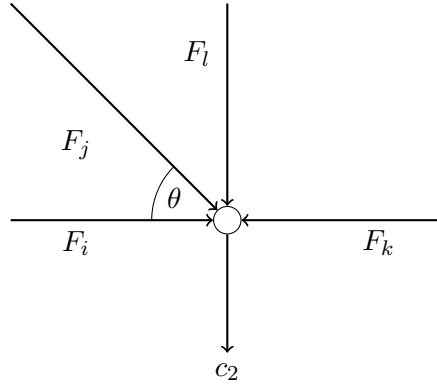


Figure 4: Fuerzas aplicadas sobre una junta

Además de la información sobre la estructura, se tiene como dato un valor máximo de la fuerza que puede resistir cualquier link de la estructura, basándose en los materiales disponibles en el mercado. Se denomina a este valor f_{max} . Una vez calculadas las fuerzas ejercidas sobre cada link, si el valor absoluto de alguna de ellas excediera f_{max} , entonces la estructura no cumple con las condiciones mínimas de seguridad y podría colapsar. Sin embargo, existe la posibilidad de intercalar pilares de concreto intermedios (debajo de las juntas internas inferiores) para contrarrestar este efecto, particionando la estructura original en sub-estructuras. Es importante mencionar que las sub-estructuras deben cumplir con las restricciones de la estructura original (por ejemplo, tener un número par de secciones) y, por lo tanto, se puede realizar exactamente el mismo análisis sobre estructuras más pequeñas. Como contraparte, cada uno de estos pilares es muy costoso y se busca minimizar la utilización de los mismos. Las figura 5 y 6 muestra un ejemplo de una partición posible.

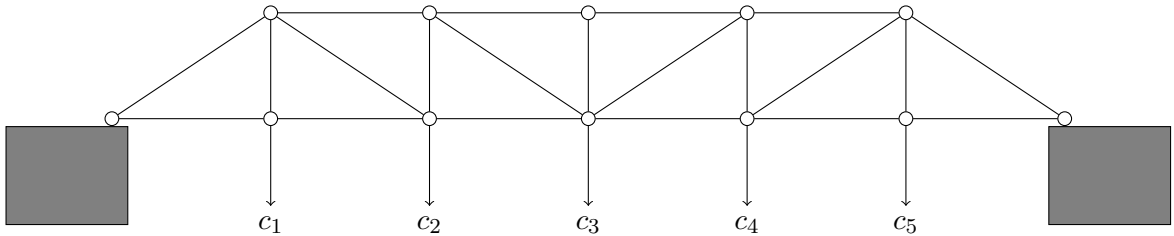


Figure 5: Estructura original

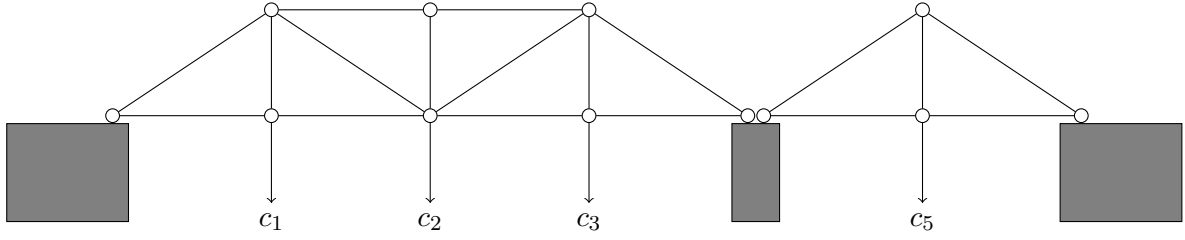


Figure 6: Estructura particionada.

El costo total del puente, que llamaremos c_{total} , se calcula en base a los costos parciales de cada sub-estructura sumado al costo de construcción de los pilares. Dada una sub-estructura e (es decir, un puente Pratt Truss sin pilares en las juntas internas inferiores) el costo parcial, cp_e , será proporcional a la máxima fuerza ejercida y la longitud del mismo. Luego, cp_e se computa como

$$cp_e = \max_{\substack{i \text{ link} \\ i \in e}} |F_i| \left(\sum_{\substack{i \text{ link} \\ i \in e}} l_i \right),$$

donde l_i es la longitud de link i perteneciente a la estructura e . Además, se cuenta con un costo fijo de construcción de pilares, que llamaremos C . Sean e_1, \dots, e_k las sub-estructuras seguras (es decir, ninguna de las fuerzas aplicadas sobre sus respectivos links excede f_{max}), el costo total del puente se calcula como

$$c_{\text{total}} = \sum_{i=1}^k cp_{e_i} + (k-1)C.$$

El segundo objetivo del trabajo es, mediante esta técnica de inserción de pilares de concreto, obtener una estructura que sea considerada segura para su utilización buscando minimizar el costo total de la misma.

Enunciado

El trabajo práctico consiste en proveer una herramienta que, dados el $span$, h , y n , formule el sistema de ecuaciones provisto por las condiciones de equilibrio y calcule la fuerza ejercida sobre cada uno de los links de la estructura en dos dimensiones de un puente Pratt Truss.

Los requisitos mínimos a cumplir son los siguientes:

- Formular el sistema lineal de forma tal que la matriz resultante cumpla la propiedad de ser banda p, q , donde estos valores deben estar acotados por una constante.
- Implementar el método de Eliminación Gaussiana con pivoteo parcial. Para ello, considerar que al aplicar este método sobre una matriz banda p, q , en el peor caso la matriz resultante tendrá bandas $p, q+p$. Demostrar este resultado, y utilizarlo para almacenar el sistema de forma eficiente en términos de memoria utilizada.

- Realizar experimentos computacionales comparativos analizando como evoluciona el valor absoluto de la maxima fuerza ejercida sobre alguno de los links de la estructura en función del *span* (fijando h y los valores de c_i) y de los valores de c_i (fijando el *span* y h) para distintos valores de n , además de cualquier otro experimento que considere pertinente.
- Basándose en el análisis anterior, proponer un método heurístico que permita simular el agregado de pilares de concreto mediante la partición de la estructura original en sub-estructuras, de forma tal que el puente sea seguro, buscando minimizar el costo total de construcción del puente.

Competencia

La cátedra realizará una competencia donde se analizarán los resultados obtenidos por los distintos grupos sobre distintas instancias del problema donde la estructura original no es segura. El programa provisto por cada grupo será analizado en la competencia y se armará un ranking en función de los resultados obtenidos. El primer puesto será reconocido con el premio *Listos para usar casco* y también habra una distinción para el segundo puesto. Las condiciones de la competencia serán publicadas el Lunes 23 de Septiembre de 2013.

Aclaración: La nota de los trabajos es independiente de los resultados de esta competencia y depende únicamente del trabajo realizado.

Fechas de entrega

- *Formato Electrónico:* Domingo 6 de Octubre de 2013, hasta las 23:59 hs, enviando el trabajo (informe + código) a la dirección `metnum.lab@gmail.com`. El subject del email debe comenzar con el texto [TP2] seguido de la lista de apellidos de los integrantes del grupo.
- *Formato físico:* Lunes 7 de Octubre de 2013, de 17 a 18 hs.

Importante: El horario es estricto. Los correos recibidos después de la hora indicada serán considerados re-entrega.