1　境界条件の物理的意味

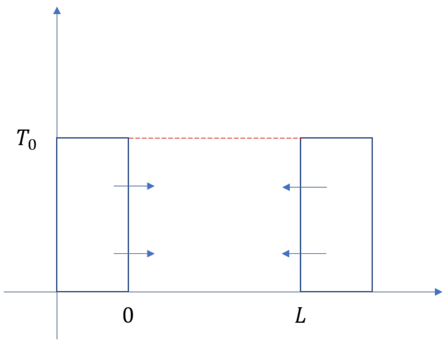
1.1　熱伝導方程式で考えると

　0°C の温度に保たれていた一辺が L の立方体の形をした熱伝導体を時刻 $t=0$ に温度 T_0°C のお湯に浸した。熱伝導体内部の温度分布 T を決定せよ.
式は

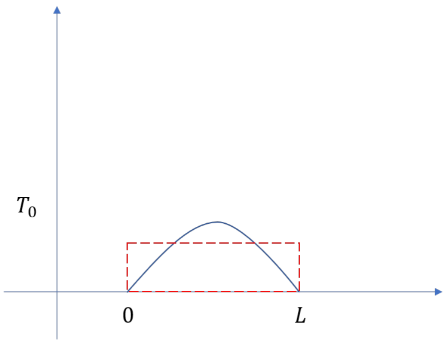
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

となる（一次元方向のみ考える）

1.1.1　熱が自由に出入りする場合 → 温度一定、温度の出入り自由



$t \to \infty$ で熱浴 (周りのお湯) の温度に一致



断熱変化のため温度の流れがない、→ 傾きがない
$\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = 0, \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0$

補足：もし一方が断熱もう一方が熱浴なら？
　一方（熱浴側）から熱の出入りが起こる

1.2　計算をする前に...

　境界条件は扱いやすい（計算しやすい...0 とか）形に！！

条件
表面:$x = 0, L$ で $T(0,t) = T(L,t) = T_0$　　$\Rightarrow \widetilde{T}(x,t) = T(x,t) - T_0$ とすると...
$\widetilde{T}(0,t) = \widetilde{T}(L,t) = 0, \widetilde{T}(x,0) = -T_0$

方程式は変わらず

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial x^2}$$

解法

step1: 解を変数分離して代入
$\widetilde{T} = F(x) \cdot G(t)$
$\to F \cdot \frac{dG}{dt} = \kappa \frac{d^2 F}{dx^2} G$

step2:(一変数のみの関数) = (違う文字の一変数のみの関数) にする
$\Leftrightarrow \frac{1}{\kappa G} \cdot \frac{dG}{dt} = \frac{1}{F} \cdot \frac{d^2 F}{dx^2}$

step3: (変数) = (変数) と恒常的になるため (変数)= 定数 k とする
$\to \frac{d^2 F}{dx^2} = kF, \frac{dG}{dt} = \kappa k G$

step4: 2 つの常微分方程式においてかいを求める（簡単なほうから）$\frac{dG}{dt} = \kappa k G \to \therefore G = Ae^{\kappa k t}$

$$G \to (t \to \infty) \text{ は違うから } k < 0 \text{ ここで } k = -l^2$$

$\therefore F(x) = C_1 \sin lx + C_2 \cos lx$

境界条件 $\widetilde{T}(0,t) = \widetilde{T}(L,t) = 0$ から $\qquad F(x) = C_1 \sin \frac{n\pi}{L} x$

規格化すると... $F(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$ step5: 重ね合わせの原理を用いて解を表し、級数展開の要領で解く

$$\widetilde{T} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot e^{-\kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

初期条件から

$$-T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

両辺に $\sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{m\pi}{L} x$ をかけて $0 \to L$ で x で積分すると、
$(\text{左辺}) = -T_0 \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{m\pi}{L} x dx = ... = T_0 \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{L}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$
$(\text{右辺}) = c_n$

$$\to \widetilde{T} = -T_0 \sum_{m:\text{奇数}}^{\infty} 2T_0 \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{L}{m\pi} \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{m\pi}{L} x \cdot e^{-\kappa \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t}$$

よって

$$T(x,t) = T_0 - \sum_{m:\text{奇数}}^{\infty} \frac{4T_0}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{L} \cdot e^{-\kappa\left(\frac{m\pi}{L}\right)t}$$

結果の意味

徐々に温度が上がり、最終的には周囲の温度と一致する！