

1 境界条件の物理的意味

1.1 熱伝導方程式で考えると

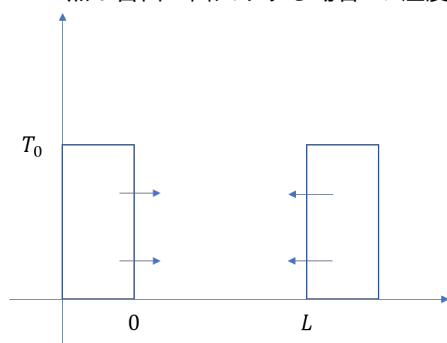
0°C の温度に保たれていた一辺が L の立方体の形をした熱伝導体を時刻 $t = 0$ に温度 $T_0^{\circ}\text{C}$ のお湯に浸した。熱伝導体内部の温度分布 T を決定せよ。

式は

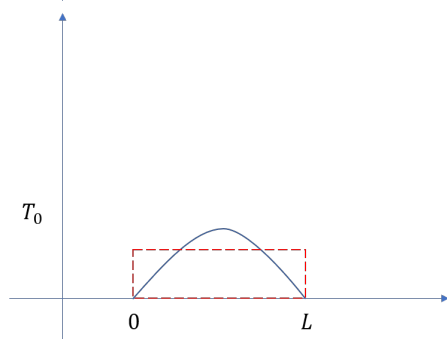
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

となる（一次元方向のみ考える）

1.1.1 熱が自由に出入りする場合 → 温度一定、温度の出入り自由



$t \rightarrow \infty$ で熱浴（周りのお湯）の温度に一致



断熱変化のため温度の流れがない、→ 傾きがない

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$$

補足：もし一方が断熱もう一方が熱浴なら？

一方（熱浴側）から熱の出入りが起こる

1.2 計算をする前に...

境界条件は扱いやすい（計算しやすい...0 とか）形に！！

条件

表面: $x = 0, L$ で $T(0, t) = T(L, t) = T_0 \Rightarrow \tilde{T}(x, t) = T(x, t) - T_0$ とすると...

$\tilde{T}(0, t) = \tilde{T}(L, t) = 0, \tilde{T}(x, 0) = -T_0$

方程式は変わらず

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}$$

解法

step1: 解を変数分離して代入

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= F(x) \cdot G(t) \\ \rightarrow F \cdot \frac{dG}{dt} &= \kappa \frac{d^2 F}{dx^2} G\end{aligned}$$

step2: (一変数のみの関数) = (違う文字の一変数のみの関数) にする

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\kappa G} \cdot \frac{dG}{dt} = \frac{1}{F} \cdot \frac{d^2 F}{dx^2}$$

step3: (変数) = (変数) と恒常的になるため (変数) = 定数 k とする

$$\rightarrow \frac{d^2 F}{dx^2} = kF, \frac{dG}{dt} = \kappa kG$$

step4: 2つの常微分方程式において解を求める (簡単なほうから) $\frac{dG}{dt} = \kappa kG \rightarrow \therefore G = Ae^{\kappa kt}$

$$G \rightarrow (t \rightarrow \infty) \text{ は違うから } k < 0 \text{ ここで } k = -l^2$$

$$\therefore F(x) = C_1 \sin lx + C_2 \cos lx$$

$$\text{境界条件 } \tilde{T}(0, t) = \tilde{T}(L, t) = 0 \text{ から } F(x) = C_1 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

規格化すると... $F(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$ step5: 重ね合わせの原理を用いて解を表し、級数展開の要領で解く

$$\tilde{T} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot e^{-\kappa (\frac{n\pi}{L})^2 t}$$

初期条件から

$$-T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

両辺に $\sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{m\pi}{L} x$ をかけて $0 \rightarrow L$ で x で積分すると、

$$(\text{左辺}) = -T_0 \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{m\pi}{L} x dx = \dots = T_0 \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{L}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

$$(\text{右辺}) = c_n$$

$$\rightarrow \tilde{T} = -T_0 \sum_{m:\text{奇数}} 2T_0 \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{L}{m\pi} \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{m\pi}{L} x \cdot e^{-\kappa (\frac{m\pi}{L})^2 t}$$

よって

$$T(x, t) = T_0 - \sum_{m: \text{奇数}}^{\infty} \frac{4T_0}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{L} \cdot e^{-\kappa \left(\frac{m\pi}{L}\right)t}$$

結果の意味

徐々に温度が上がり、最終的には周囲の温度と一致する！