目次

1 光の粒子性と電子の波動性 (第一回 2018/9/18) 2

1.1 Einstein による光の粒子性 2

1.2 物質波 -matter wave- 3

2 波動関数と確率密度関数 (第三回 2018/10/02) 4

2.1 Problem 1.4 / $\Psi(x,t)$ が実数関数 4

2.2 Problem 1.5 / $\Psi(x,t)$ が複素関数 4

3 (第五回 2018/10/16)) 4

3.1 Problem2.1(a) 4

3.2 Problem2.1(b) 5

3.3 Problem2.1(c) 6

1　光の粒子性と電子の波動性 (第一回 2018/9/18)

1.1　Einstein による光の粒子性

1.1.1　光子 -photon-

振動数 ν，波長 λ の電磁波は，「エネルギー

$$E = h\nu \tag{1.1}$$

運動量

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{1.2}$$

の光子の集合体」であるとした．

光子について

$$\lambda = \frac{h}{\nu} \tag{1.3}$$

より (1.2) は，

$$p = h\frac{\nu}{c} \tag{1.4}$$

(1.1)，(1.4) より，

$$E = cp \leftarrow \text{光子について成り立つ} \tag{1.5}$$

1.1.2　(注) 相対論

総エネルギーの式

$$E^2 = {m_0}^2c^4 + p^2c^2 \tag{1.6}$$

（m_0：静止質量，p：mv）運動質量 m は

$$m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \tag{1.7}$$

光子について $v = c$ より $m_0 = 0$ よって $E = pc$ で一致している．

1.1.3　[問] 光子

あるレーザーポインター (出力 5mW 赤色 (λ=650nm))

(1) このレーザ＝の光子の運動量は？

(2) このレーザーから毎秒何個の光子が出ているか？

1.2　物質波 -matter wave-

1.2.1　物質波

de Broglie は光の粒子性を逆に読み，物質が波動を伴うとした．エネルギー E，運動量 p を持つ粒子は，

$$\nu = \frac{E}{h} \tag{1.8}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{1.9}$$

の波動を伴う．（λ は de Broglie 波長）

粒子について

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \tag{1.10}$$

(光子の場合 $\lambda = c/\nu$)
粒子の場合 $\lambda = v/\nu$. v は位相速度.

1.2.2　[問]

ド・ブロイ波長 0.2nm の中性子の速度 v を計算せよ．ただし，中性子の質量 $m = 1.675 \times 10^{27}$kg とする．

1.2.3　光電効果-photoelectric effect-

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W \tag{1.11}$$

$\frac{1}{2}mv^2$ は電子の運動エネルギー，W は仕事関数.

1.2.4　コンプトン効果-Compton effect-

$$\begin{cases} (mv)^2 = \left(\dfrac{n}{\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{\lambda'}\right)^2 - 2\dfrac{n}{\lambda}\dfrac{n}{\lambda'}\cos\theta & (1.12) \\ \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{hc}{\lambda} - \dfrac{hc}{\lambda'} & (1.13) \end{cases}$$

これらから，コンプトン公式

$$(\Delta\lambda \stackrel{\text{def}}{=})\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \tag{1.14}$$

が導ける．なお $\dfrac{h}{mc} = 2.4 \times 10^{-12}$m はコンプトン波長と呼ばれる．

1.2.5　[問] コンプトン効果

$\lambda = 0.124$nm の X 線を用いてコンプトン散乱実験する．散乱された X 線の波長が 1 %伸びるような散乱角 θ を求めよ．

2　波動関数と確率密度関数 (第三回 2018/10/02)

2.1　Problem 1.4 / $\Psi(x,t)$ が実数関数

2.1.1　問題文

Problem 1.4

At time t = 0 a particle is represented by the wave function

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} A\dfrac{x}{a} & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ A\dfrac{(b-x)}{(b-a)} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.1}$$

where A, a, and b are constants.

(a) Normalize Ψ (that is, find A, in terms of a and b).

(b) Sketch Ψ $(x, 0)$, as a function of x.

(c) Where is the particle most likely to be found, at $t = 0$?

(d) What is the probability of finding the particle to the left of a? Check your result in the limiting cases $b = a$ and $b = 2a$.

(e) What is the expectation value of x?

2.1.2　解答

(a)Ψ を規格化せよ．Point 〜〜を使う.

$$\rho = |\Psi|^2 = \tag{2.2}$$

(b)

2.2　Problem 1.5 / $\Psi(x,t)$ が複素関数

3　(第五回 2018/10/16))

3.1　Problem2.1(a)

3.1.1　subsubsection name

時間に依存しない Schrödinger equationTime-Indpendent Schrödinger equation(TISE)

TISE:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{3.1}$$

$\psi(x)$ が規格化可能のとき，E は実数であることを示せ．(ちなみに今後，ポテンシャル $V(x)$ は明示されない限り実数関数．（ちなみにちなみに V が複素関数になるのは特殊な研究をするときなどだけらしい）)

3.1.2

TISE の両辺の左から ψ^* をかけて $-\infty\sim\infty$ で積分

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}dx+\int_{-\infty}^{\infty}V(x)\psi^*\psi(x)dx=E\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi(x)dx \tag{3.2}$$

今，ψ は規格化可能より，$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx=1$(=右辺).

また，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}dx \tag{3.3}$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}([\psi^*\frac{d\psi}{dx}]_{[}^{\infty}-\infty]-\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{d\psi^2}{dx})(\frac{d\psi}{dx})dx) \tag{3.4}$$

$$=\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx \tag{3.5}$$

よって，

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\hbar^2}{2m}|\frac{d\psi}{dx}|^2+V(x)|\psi|^2)dx \tag{3.6}$$

（積分の中身の二項はそれぞれ実数）よって E は実数.

3.2 Problem2.1(b)

3.2.1 subsubsection name

(注)ψ_1 と ψ_2 が同じ E に対する TISE の解であるとする．つまり

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_1+V\psi_1=E\psi_1 \tag{3.7}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_2+V\psi_2=E\psi_2 \tag{3.8}$$

(編注　↑右辺 E はそれぞれ黄色で強調)

(証明)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}(C_1\psi_1+C_2\psi_2)+V(C_1\psi_1+C_2\psi_2) \tag{3.9}$$

$$=C_1(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_1+V\psi_1)+C_2(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_2+V\psi_2) \tag{3.10}$$

$$=C_1E\psi_1+C_2E\psi_2 \tag{3.11}$$

$$=E(C_1\psi_1+C_2\psi_2) \tag{3.12}$$

(編注　最後の行の E は黄色で強調）

3.2.2 subsubsection name

TISE:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi + V\psi = E\psi \tag{3.13}$$

V, E は real
複素共役をとると，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi^* + V\psi^* = E\psi^* \tag{3.14}$$

ψ, ψ^* はそれぞれ共に同じ E に対する解である．

$$Z = a + bi \tag{3.15}$$
$$Z^* = a - bi \tag{3.16}$$
$$Z + Z^* = 2a = 2Re[Z] \tag{3.17}$$
$$Z - Z^* = 2bi \tag{3.18}$$

今，以下の線型結合を考える

$$\psi_+(x) = \psi(x) + \psi^*(x) \tag{3.19}$$
$$\psi_-(x) = (\psi(x) - \psi^*(x))i \tag{3.20}$$

これらは，同じ E に対する TISE を満たす．

$\psi_+^*(x) = \psi_+(x)(3.21)$

$\psi_-^*(x) = \psi_-(x)(3.22)$ より，$\psi_+(x)$ と $\psi_-(x)$ は実数関数．
また，

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(\psi_+ - i\psi_-) \tag{3.23}$$

どんな ψ も，2 つの実関数 $\psi_+(x)$ と $\psi_-(x)$ の線型結合で表せる．

3.3 Problem2.1(c)

3.3.1 subsubsection name

$\psi(x)$ が TISE の解とする

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi + V\psi = E\psi \tag{3.24}$$

〜〜とすると（式）