問 1

(1) $\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab, \log_a a^2=2\ (a,b>0)$ を用いると,

$\log_{20} 40+\log_2 10=\log_{20} 400=\log_{20} 20^2=2$

(2) 与えられた式を平方完成すると,

$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9-12=0$

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

よって，$(2,-3)$ を中心とする半径 5 の円であることが分かる.

(3) (i)

$\sin^4\theta+\cos^4\theta$

$=\sin^4\theta+(1-\sin^2\theta)^2$

$=2\sin^4\theta-2\sin^2\theta+1$

$=2t^2-2t+1$ ($t=\sin^2\theta$ として, 範囲を確認すれば $-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ なので $0\leqq t\leqq 1$ である.)

$=2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\geqq\frac{1}{2}$　($t=\frac{1}{2}$ で等号成立.)

したがって、$t=\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる.

$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

二次関数の概形から, $t=0$ または 1 で最大値 1 をとることが分かる.

したがって，$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ で最大値 1 をとる。

(ii) 相互関係式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ を使うことで (1) の形を作れる.

$2\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+2\cos^4\theta$

$=\sin^4\theta+\cos^4\theta+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2$

$=\sin^4\theta+\cos^4\theta+1$

(1) の結果を用いて,

$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ で最小値 $\frac{3}{2}$ をとる。

$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ で最大値 2 をとる.

(4) 条件 ($\ast_1$) を使って, $p,\ q,\ r$ のそれぞれの偶奇によって場合分けする.

(p,q,r) =(偶数, 奇数, 奇数)（パターン 1), (奇数, 偶数, 奇数) (パターン 2),

(奇数, 奇数, 偶数)(パターン 3), (偶数, 偶数, 偶数) (パターン 4)　に分けて考える.

(全部奇数, 組の中で２つ偶数のパターンは、$p-q=r$ の両辺の 2 で割った余りが

異なるので除外される.)

そして偶素数は 2 のみである事実で，(p,q,r)=(2, 奇数, 奇数) (パターン 1),

(奇数, 2, 奇数) (パターン 2), (奇数, 奇数, 2) (パターン 3) とできる.

ここでパターン 4 について, $q>0$ より $p>r$ となるが, 偶素数が 1 つしかない

ことから除外できる.

パターン 1 は, $p<q$ となっている．また, パターン 2 は $q<r$ となっている.

そのため, 条件 ($\ast_2$) に反するので除外される.

よってパターン 3 $(p,q,r)=$ (奇数, 奇数, 2) に限られる.

よって ($*_3$) は, $p+q \leqq 2^5=32$ となり,

$(p,q,r)=(5,3,2),(7,5,2),(13,11,2)$ （これで必要十分である。）

($19+17=36>32$ であるため, これ以上の p,q に対して ($*_3$) を満たさないことが分かる。)

(5) 8 以下の自然数 α と, 0 以上 8 以下の整数 $\beta,\ \gamma$ を用いると, $M_{(n)}=\alpha n^2+\beta n+\gamma$ と書ける. また, 題意より $M_{(n)}=m^2$ であるが, $\alpha n^2+\beta n+\gamma=m^2$ が n についての恒等式とならなければならないから, 自然数 p と, 0 以上の整数 q を用いて $m=pn+q$ と表せる.
よって, $\alpha n^2+\beta n+\gamma=(pn+q)^2$ が成立し, $p,q\leq 2$ の場合のみ調べればよいことに留意すれば, $M=100,121,144,400,441,484$ と求められる. よって, 解答すべき値は 1690 である.

(6) $BD=x$ とすると, $AM=MD=x, CD=2x$ である. $\angle ADB=\theta$ とすれば,
$\triangle ABD$ と $\triangle CDM$ にそれぞれ余弦定理を用いることにより,

$$x^2+4x^2-4x^2\cos\theta=1600$$

$$x^2+4x^2-4x^2\cos\ (180^\circ-\theta)=900$$

を得る. $-\cos\theta=\cos\ (180^\circ-\theta)$ に気をつければ, 2 式を足すことにより $10x^2=2500$ がわかり, $x=5\sqrt{10}$ を得る. $\triangle ADC$ に中線定理を用いると,

$$AC^2+1000=2(900+250)$$

となり, これにより $AC=10\sqrt{13}$ を得る.

問 2

(1) ${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2=1+3+6+10+15=\mathbf{35}$.

(2) 求める組の個数は，$a+b+c+d=4$ を満たす非負整数 (a,b,c,d) の組の個数に等しく，
これは ${}_7\mathrm{C}_3=\mathbf{35}$ 個ある.

(3) まず，(1) と (2) の計算結果が等しくなる理由について考察しよう.
$k\in\{2,3,4,5,6\}$ に対し，${}_k\mathrm{C}_2$ は $a+b+c=k-2$ を満たす非負整数の組 (a,b,c) の個数と等しい．このことから，${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2$ の値は，$a+b+c\leq 4$ を満たす非負整数 (a,b,c) の組の個数に等しく，つまり ${}_7\mathrm{C}_3$ に等しい.
同様にして，$l\in\{3,4,\ldots,112\}$ に対し，${}_l\mathrm{C}_3$ は $a+b+c+d=l-3$ を満たす非負整数の組 (a,b,c,d) の個数と等しいことに注意すると，${}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3+\ldots+{}_{112}\mathrm{C}_3$ の値は，
$a+b+c+d\leq 109$ を満たす非負整数の組 (a,b,c,d) の個数に等しいことがわかる.
これを計算すると，求める値は ${}_{113}\mathrm{C}_4=\mathbf{6438740}$.
なお，このことを一般化すると，$m<n$ なる正整数 m,n に対し $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}{}_k\mathrm{C}_m={}_{n+1}\mathrm{C}_{m+1}$
が成り立つが，これは**ホッケースティック恒等式**と呼ばれている.

問 3

(1) 5 回操作後の $f(x)$ を $f(x)=x^2+ax+b$ と表すと,

$a+b=5,\ 0\le a\le 5,\ 0\le b\le 5\ (a,b:$整数$)$ をみたす.

$x^2+ax+(5-a)=0\cdots$① より, ①の判別式を D とすると, この 2 次方程式が整数解を持つための必要十分条件は $D=a^2-4(5-a)$ が平方数となることである.

このとき, $D=n^2$ なる非負整数 n が存在し, $(a+2)^2-24=n^2$ より, $(a+2+n)(a+2-n)=24$ となるから, (a,n) として取りうる組は, $(5,5),\ (3,1)$ である.

よって, (a,b) として取りうる組は, $(5,0),(3,2)$. したがって, 答えは 2 組である.

(2) $a^2-4(5-a)\ge 0$ を満たせばよいから, a として取りうる値は, $3,4,5$ である.

(a,b) として取りうるのは, $(3,2),(4,1),(5,0)$ である. したがって, 答えは 3 組である.

(3) いくつか例として, 5 回の操作で以下の $f(x)$ をつくる.

$f(x)=x^2+2x+2$ は, $1\to 1\to 3\to 2\to 2$,

$f(x)=x^2+x-2$ は, $1\to 3\to 2\to 2\to 3$

のようにつくることが出来る. 以下, 解答を示す.

選択肢 1 を $(5-i)$ 回行った場合 $(0\le i\le 5)$,

$i=0$ のとき, $a=5,b=0$. $i\ge 1$ のとき, b は $[-i+1,\ i\,]$ に含まれるすべての整数を取ることが出来ることを数学的帰納法により示す.

$i=1$ のとき, a の値は 4 で, 選択肢 2 または選択肢 3 を一度のみ行う. ここで, 選択肢 1 と選択肢 2, 及び選択肢 1 と選択肢 3 を入れ替えても最終的な f は変わらないことに注意する.

選択肢 2 を選択した場合, $b=1$ となり, 選択肢 3 を選択した場合, $b=0$ となる.

i=k $(k\ge 1)$ のとき, b は $[-k+1,\ k\,]$ に含まれるすべての整数を取ることが可能であると仮定し、その状態から選択肢 1 をひとつ選ばなかったことにし, 選択肢 2 もしくは選択肢 3 をひとつ付け足すことを考える. 付け足した後の b の値として取りうるものは, 選択する前の b は $[-k+1,\ k\,]$ 内のすべての整数をとるから, 選択肢 3 を選択することで, $[-k,\ k-1\,]$ 内のすべての整数を取ることが出来る. また, 付け足す前の b の値が $k-1,k$ のときに選択肢 2 を選択すると, b はそれぞれ $k,k+1$ となるから示された.

よって, 5 回操作後の a,b について取りうるのは,

$i=0$ のとき, $a=5,b=0$. $i=1$ のとき, $a=4,b=0,1$. $i=2$ のとき, $a=3,\ b=-1,0,1,2$.

$i=3$ のとき, $a=2,b=-2,-1,0,1,2,3$. $i=4$ のとき, $a=1,b=-3,-2,-1,0,1,2,3,4$.

$i=5$ のとき, $a=0,b=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5$.

$x^2+ax+b=0$ の二次方程式の判別式を D とすると, $f(x)=0$ が 5 回操作後に整数解を持つための必要十分条件は, $D=a^2-4b$ が平方数となることである.

これを満たすような (a,b) は, $(5,0),(4,0),(3,0),(3,2),(2,0),(2,1),(1,0),(1,-2),(0,0),(0,-1),(0,-4)$ である. よって, 答えは 11 個である.

(4) $f(x)=0$ が実数解を持つための必要十分条件は, $D\ge 0$ である.

$1\le i\le 5$ のとき, $D\ge 0\Leftrightarrow (5-i)^2-4b\ge 0\Leftrightarrow b\le \frac{1}{4}(5-i)^2$

よって, $i>0$ のとき, b のとりうる値の個数は, $[-i+1,\max\{i,\frac{1}{4}(5-i)^2\}]$ に含まれる整数の個数である. $i=0$ のとき $(a,b)=(5,0)$ で, 1 個である. $i\ge 1$ のとき, 上の範囲を参照すると,

$i=1$ のとき, $a=4, b\in[0,1]$ より 2 個, $i=2$ のとき, $a=3, b\in[-1,2]$ より 4 個, $i=3$ のとき, $a=2, b\in[-2,1]$ より 4 個, $i=4$ のとき, $a=1, b\in[-3,\frac{1}{4}]$ より 4 個, $i=5$ のとき, $a=0, b\in[-4,0]$ より 5 個であるから, $1+2+4+4+4+5=20$ より, 答えは **20** 個.

問 4

(1) t 経過後, 点 P の x 座標が 0 である確率を a_t, 1 である確率を b_t, -1 である確率を c_t とする.
このとき, $a_0=1,\ b_0=0, c_0=0$ となる. また, $a_{t+1}=\frac{1}{2}(a_t+b_t+c_t)=\frac{1}{2}$ より,
求める確率は,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\ (t\geq 1) \\ 1\ (t=0) \end{cases}$$

となる.

(2) t 経過後, 点 P が O にいる確率を p_t, 点 A,C,E,G のいずれかにいる確率を q_t, 点 B,D,F,H のいずれかにいる確率を r_t とする.
$p_0=1,\ q_0=0,\ r_0=0$ で, 漸化式を立てると, $p_{t+1}=\frac{1}{2}q_t,\ q_{t+1}=p_t+r_t,\ r_{t+1}=\frac{1}{2}q_t$ となる.
$p_t+q_t+r_t=1$ より, $q_{t+1}=1-q_t$. $q_{t+1}-\frac{1}{2}=-(q_t-\frac{1}{2})$ より, $q_t-\frac{1}{2}=(-1)^t(q_0-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}(-1)^t$
よって, $q_t=\frac{1-(-1)^t}{2}$. $t\geq 1$ のとき, $p_t=\frac{1}{2}q_{t-1}=\frac{1}{4}\{1-(-1)^{t-1}\}$
したがって, 求める確率は,

$$\begin{cases} 1\ (t=0) \\ 0\ (t:\text{奇数}) \\ \frac{1}{2}\ (t:\text{偶数}) \end{cases}$$

となる.

問 5

(1) $529<n<576$ を満たす正整数 n の数を求めればよく，これは **46** 個である.

(2) $\sqrt{530}-23>\sqrt{531}-\sqrt{530}>\ldots>24-\sqrt{575}$ に注意すると,

$$1=24-23=(24-\sqrt{575})+(\sqrt{575}-\sqrt{574})+\ldots+(\sqrt{530}-23)<47(\sqrt{530}-23)$$

より，$23+\frac{1}{47}<\sqrt{530}$ を得る．これと (2) の問題文中の主張を合わせると,
特に $\frac{43}{2024}<\frac{1}{47}$ より，$\sqrt{530}$ は区間 **43** に含まれていることがわかる.