問題 A 解答

問 1　(1)

$$\begin{aligned} 21 \times 29 &= (25+4)(25-4) \\ &= 25^2 - 4^2 \\ &= 625 - 16 \\ &= \mathbf{609} \end{aligned}$$

(2) $x = 1, y = 1$ を代入すると，各項の係数の和が求められ，

$$(2+3)^5 = 5^5 = \mathbf{3125}$$

(3) $f(x) = 0$ が $1 \leq x$ で解をもつための必要十分条件は，軸の方程式が $x = -3/2$ であることから，

$$D > 0, \text{かつ } f(1) \leq 0$$

である．ここで，D は二次方程式 $f(x) = 0$ の判別式である．

$$D > 0 \iff 9 - 4a > 0 \iff a < \frac{9}{4}$$

$$f(1) \leq 0 \iff a + 4 \leq 0 \iff a \leq -4$$

だから，上の条件は $a \leq -4$ と同値である．したがって，求める最大値は $\mathbf{-4}$ である．

問 2　(1) **真**：命題の仮定は鋭角三角形の条件である．

(2) **偽**：反例は $f(x) = -1$

(3)　(i) **偽**：真である命題の裏は一般に成り立たない．実際，P を偽，Q を真の命題とすると，命題「P ならば Q である」は真であるが，命題「P でないならば Q でない.」は偽である．

(ii) **真**：命題「P ならば Q である」とその対偶の真偽は一致する．

(iii) **真**：命題「P ならば Q である」と，命題「P かつ Q でない」の

否定は同値だから「P かつ Q でないならば，Q ならば P である」の仮定は偽である．また，含意の命題の仮定が偽ならばその命題は真である．したがって，この命題は真である．

問 3 $DA//BC$ と $\triangle ABC$ が正三角形であることから，$\angle BAD = \angle CAF$ と $AB = AC$ がわかり，A, C, B, E が共円であることから，$\angle ABD = \angle ACF$ がわかるから，$\triangle ABD \equiv \triangle ACF$ であることがわかる．よって，$AD = AF = 5$ を得る．

$\triangle ABC$ の面積は $16\sqrt{3}$，$\triangle ABD$ の面積は $10\sqrt{3}$ であることが計算によりわかるので，$\triangle ABD \equiv \triangle ACF$ より，$\triangle BCF$ の面積は $16\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ と計算できる．

ここで，$\triangle AEF$ に余弦定理を用いることにより $FC = 7$ がわかり，再び円周角の定理より，$\angle AEF = \angle CBF$ と $\angle EAF = \angle BCF$ であることから，$\triangle AEF \sim \triangle CBF$ がわかるので，$\triangle AEF$ の面積は

$$6\sqrt{3} \times \frac{25}{49} = \boldsymbol{\frac{150\sqrt{3}}{49}}$$

となる．

問 4 まず分母を整理してみると，

$$\begin{aligned}(\text{分母}) &= \sqrt{x} - \sqrt{y}(x+y) + 2\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\ &\quad + 8(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - 3(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y + 2\sqrt{xy} + 8 - 3(\sqrt{x} + \sqrt{y})) \\ &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})\{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 3(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 8\}\end{aligned}$$

となる．ここで，$t = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ とおくと，$t > 0$ で，与えられた式は，$t > 0$ の関数 $\varphi(t) = 1/(t^2 - 3t + 8)$ と表せる．$t^2 - 3t + 8 = (t - 3/2)^2 + 23/4$ だから，この関数 φ は $t = 3/2$ のとき，最小値 $23/4$ をとる．

したがって，$M =\mathbf{4/23}$ で，求める条件は $\sqrt{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{y}} = \mathbf{3/2}, \mathbf{x}, \mathbf{y} > \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

問 5　(1) $0 < \theta < 90^\circ$ より，$\sin\theta, \cos\theta, \sin^2\theta, \cos^2\theta > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より，

$$\frac{1}{2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \geq \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

よって，

$$\frac{1}{2} \geq \sin\theta\cos\theta$$

ここで，等号成立条件は $\sin^2\theta = \cos^2\theta$ である．したがって，$\theta = 45^\circ$ のとき $\sin\theta\cos\theta$ は最大値 $\mathbf{1/2}$ をとる．

(2) $AC = x, \angle BAC = \theta$ とおく．このとき，$AD = x\cos\theta, DE = x\sin\theta\cos\theta, EF = x\sin^2\theta\cos\theta, DF = x\sin\theta\cos^2\theta$ より，

$$\begin{aligned} 9 &= \frac{DE^2(1+2DE)}{(EF+DF)^2} \\ &= \frac{x^2\sin^2\theta\cos^2\theta(1+2x\sin\theta\cos\theta)}{x^2\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta)^2} = \frac{1+2x\sin\theta\cos\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta} \end{aligned}$$

だから，$1+2x\sin\theta\cos\theta = 9(1+2\sin\theta\cos\theta)$ より，$(x-9)\sin\theta\cos\theta = 4$ となる．したがって，(1) より $\theta = 45^\circ$ のとき，AC は最小値 $\mathbf{17}$ をとる．