問題C解説

問 1

(1) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ だから，商の微分公式より，

$f'(x)=\frac{(x)'\sqrt{1+x^2}-x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

$=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

$=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(2) $0^\circ<\theta<90^\circ$ とするとき, $\tan(90^\circ-\theta)=\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$. よって, $\tan\theta\cdot\tan(90^\circ-\theta)=1$.

$$\sum_{k=1}^{89}\log\tan k^\circ=\log(\prod_{k=1}^{89}\tan k^\circ)=\log\{(\prod_{k=1}^{44}\tan k^\circ\tan(90^\circ-k^\circ))\tan 45^\circ\}=\log 1=0$$

(3) 与えられた楕円 C_0 に対し, それを原点を中心に正方向に 45° 回転させた楕円を C_1 とする.

C_1 は C_0 を回転移動させたものだから, 面積は等しい． よって，C_1 の面積を求める.

C_1 の焦点の位置を, 複素平面上で求める. C_0 の焦点は $(-3,3),(3,-3)$ であるから, 複素平面上で,

$-3+3i$, $3-3i$ と表せる．よって，C_1 の焦点の位置は, 複素平面上で表すと,

$(3-3i)(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=3\sqrt{2}$

$(-3+3i)(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=-3\sqrt{2}$

となり, xy 平面で表すと, $(3\sqrt{2},0),(-3\sqrt{2},0)$ となる．$\cdots$①

また，C_0 は $(\frac{1}{5},\frac{31}{5})$ を通るから, $(\frac{1}{5}+\frac{31}{5}i)(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=-3\sqrt{2}+\frac{16\sqrt{2}}{5}i$ より，C_1 は $(-3\sqrt{2},\frac{16\sqrt{2}}{5})$ を通る. ①より，C_1 の中心は $(0,0)$ であるから, $a,b>0$ $(a>b)$ を用いて,

$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\cdots$②

と表すことが出来る． また，焦点の x 座標が $\pm 3\sqrt{2}$ だから,

$a^2-b^2=(3\sqrt{2})^2$ $\cdots$③

が成立する. ②式に $(x,y)=(-3\sqrt{2},\frac{16\sqrt{2}}{5})$ を代入すると，$\frac{18}{a^2}+\frac{512}{25b^2}=1$ となる.

③式を代入して整理すると, $25b^4-512b^2-512\cdot 18=0$ となるから，この b^2 の二次方程式を解くと,

$b^2\geq 0$ を満たす解は 32 である. また, ③より，$a^2=50$ である.

C_1 の面積は πab と表せるから, $\pi\cdot 5\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=40\pi$.

(4) $x^7+2x^5+2x^3+x=x(x^2+1)(x^4+x^2+1)$ と因数分解出来ることに注目する。

(与式) $=\int_0^\pi\{(\tan\frac{x}{6})^7+2(\tan\frac{x}{6})^5+2(\tan\frac{x}{6})^3+(\tan\frac{x}{6})\}dx$

$=\int_0^\pi\tan\frac{x}{6}\{(\tan\frac{x}{6})^2+1\}\{(\tan\frac{x}{6})^4+(\tan\frac{x}{6})^2+1\}dx$

$=\int_0^\pi(\tan\frac{x}{6})\{(\tan\frac{x}{6})^4+(\tan\frac{x}{6})^2+1\}\ \frac{1}{(\cos\frac{x}{6})^2}dx$

$=6\int_0^\pi(\tan\frac{x}{6})\{(\tan\frac{x}{6})^4+(\tan\frac{x}{6})^2+1\}(\tan\frac{x}{6})'dx$

$=6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(t+t^3+t^5)dt$

$=6\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{6}t^6\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=6(\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{162})$

$=\frac{65}{54}$

(5) p: 素数, $p < a$ とする．このとき，$a!$ がもつ p の素因数の個数を求める．

このとき，求める個数を T とすると，

$T = \lfloor \frac{a}{p} \rfloor + \lfloor \frac{a}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{a}{p^3} \rfloor + \cdots$　が成り立つ．(ルジャンドルの定理)

$a = p^m (m$: 自然数) と表せるとき，ルジャンドルの定理より，

$$T = p^{m-1} + p^{m-2} + \cdots + 1 = \frac{p^m - 1}{p-1}\ ,$$

$a = \sum_{j=0} b_j p^j \ (0 \leq b_j \leq p-1)$ と表せるとき，

$$T = \sum_{j=0} b_j \ (p^{j-1} + p^{j-2} + \cdots + 1) = \frac{1}{p-1} \sum_{j=0} b_j (p^j - 1) \cdots (*)$$

が成り立つ．この事実を用いてこの問題を解く．

$n = 1$ のとき，$a_1 = \frac{1}{1} = 1$. 以降，$n \geq 2$ とし、n を素因数分解して，

$n = {p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \cdots {p_m}^{e_m}$　(p_i: 素数，$p_1 < p_2 < \cdots < p_m$，e_i : 自然数) と表す．

このとき，a_n の分子と分母の p_i の素因数の個数を比較する．

$$(\text{分母}) = n^{n^n} = ({p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \cdots {p_m}^{e_m})^{n^n} = {p_1}^{e_1 n^n} {p_2}^{e_2 n^n} \cdots {p_m}^{e_m n^n}$$

より，分母に含まれる p_i の素因数の個数は，$e_i n^n$ 個である．

ここで，自然数 $P_i = \frac{n^n}{{p_i}^{e_i n^n}} = {p_1}^{e_1 n} {p_2}^{e_2 n} \cdots {p_{i-1}}^{e_{i-1} n} p_{i+1}{}^{e_{i+1} n} \cdots {p_m}^{e_m n}$ をおく．

P_i を，$P_i = \sum_{j=0} c_{ij} {p_i}^j \ (0 \leq c_{ij} < p_i, c_{ij}$: 整数) と表すとする. このとき，

$$e_i n^n = e_i {p_i}^{e_i n^n} \sum_{j=0} c_{ij} {p_i}^j = e_i \sum_{j=0} c_{ij} {p_i}^{j + e_i n^n} \text{ となる．}$$

$(n^n)! = (\sum_{j=0} c_{ij} {p_i}^{j+e_i n^n})!$ に含まれる P_i の素因数の個数は，(∗) より，$\frac{1}{p_i - 1} \sum_{j=0} c_{ij} ({p_i}^{j+e_i n^n} - 1)$

と表せる. よって，分子に含まれる p_i の素因数の個数は，$\frac{7}{p_i - 1} \sum_{j=0} c_{ij} ({p_i}^{j+e_i n^n} - 1)$ となる．

ゆえに，(分子に含まれる p_i の素因数の個数)$\geq$ (分母に含まれる p_i の素因数の個数)

$\Leftrightarrow \frac{7}{p_i - 1} \sum_{j=0} c_{ij} ({p_i}^{j+e_i n^n} - 1) \geq e_i \sum_{j=0} c_{ij} {p_i}^{j+e_i n^n}$

$\Leftrightarrow (\frac{7}{p_i - 1} - e_i) \sum_{j=0} c_{ij} {p_i}^{j+e_i n^n} \geq \frac{7}{p_i - 1} \sum_{j=0} c_{ij} \cdots (**)$

各 j について $0 \leq c_{ij}$ より、$\sum_{j=0} c_{ij} = 0$ が成り立つと仮定すると，$P_i = 0$ より，$n^n = 0$ となり不適.

よって，(∗∗) の右辺は 0 よりも大きい.

同様に，$\sum_{j=0} c_{ij} {p_i}^{j+e_i n^n} > 0$ だから，$\frac{7}{p_i - 1} > e_i \cdots (***)$　が成り立つ．

よって，(∗∗)⇒(∗∗∗) が成立する．

(∗∗∗) を仮定すると，e_i は自然数より，$\frac{7}{p_i - 1} - e_i \geq \frac{1}{p_i - 1}$ であるから，$p_i \geq 2$，$e_i n^n > 3$ に注意して，

$$(\frac{7}{p_i - 1} - e_i) \sum_{j=0} c_{ij} {p_i}^{j+e_i n^n} \geq \frac{{p_i}^3}{p_i - 1} \sum_{j=0} c_{ij} {p_i}^{j + (e_i n^n - 3)} > \frac{7}{p_i - 1} \sum_{j=0} c_{ij}$$

よって，(∗∗∗) ⇒ (∗∗) が成立する. ゆえに，(∗∗) と (∗∗∗) は同値である．

(∗∗∗) を満たすような p_i, e_i について求める．

$e_i \geq 1$ より, $7 > p_i - 1$. よって, $p_i \leq 7$.

$p_i = 2$ のとき, $e_i < 7$，$p_i = 3$ のとき，$e_i \leq 3$, $p_i = 5$ のとき, $e_i = 1$, $p_i = 7$ のとき, $e_i = 1$.

ここで, a_n が整数 ⇔ すべての i について (∗∗) が成立 ⇔ すべての i について (∗∗∗) が成立

となるから, つまり, $n=\prod_i {p_i}^{e_i}$ と表せるとき, すべての i について (∗∗∗) が成り立つような最大の n を見つければよく, その値は, $n=2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7=60480$ である.

(6) 一般に, F を f の原始関数とすると,

$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\gamma^\delta f(x)dx=(F(\beta)-F(\alpha))+(F(\delta)-F(\gamma))=(F(\delta)-F(\alpha))+(F(\beta)-F(\gamma))$
$=\int_\alpha^\delta f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$

が成り立つ. これを問題に対して繰り返し用いる.

ここで, $f(x)=\frac{\log x}{x^2-x+1}dx$ とおく.$\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{1}{\tan x}$ に注意して計算を進める.

$$\sum_{k=1}^{8}\int_{\tan\frac{2k-1}{34}\pi}^{\tan\frac{2k}{34}\pi} f(x)dx=\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k+1}\int_{\tan\frac{k}{34}\pi}^{\tan\frac{17-k}{34}\pi} f(x)dx=\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k+1}\int_{\tan\frac{k}{34}\pi}^{\frac{1}{\tan\frac{k}{34}\pi}} f(x)dx$$

どの項も, 積分区間の始点と終点が逆数の関係 $A=\pm\int_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\frac{\log x}{x^2-x+1}dx$ になっている状態に持ち込めた.

A に対し、$x=\frac{1}{t}$ で置換積分する.

$A=\pm\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{\log(\frac{1}{t})}{(\frac{1}{t})^2-(\frac{1}{t})+1}(-\frac{1}{t^2})dt=\pm\int_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\frac{-\log t}{t^2-t+1}dt=\mp\int_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\frac{\log t}{t^2-t+1}dt=-A$. よって, $A=0$ である.

α に, $\alpha=\tan\frac{1}{34}\pi,\tan\frac{2}{34}\pi,\ \cdots\ \tan\frac{8}{34}\pi$ と入れていけば, どの項も 0 になるということがわかる.

よって, 求める答えは, $0+0+0+0+0+0+0+0=0$

問 2

$\triangle ABC\equiv\triangle AED$ となる点 E を 凸四角形 $ABCD$ の外側に定めると,

$\angle BAE=60^\circ$ かつ $AB=AE$ だから, $\triangle ABE$ は正三角形となる. ここで, $\angle AEB=\angle BCA=60^\circ$ であるから, 4 点 A,B,C,E は同一円周上にある. また, 五角形 $ABCDE$ は線対称だから, 四角形 $BCDE$ は等脚台形であり,5 点 A,B,C,D,E は同一円周上にあることと,$EC=BD=8$ がわかる. よって, 円周角の定理より, $\angle BDA=\angle BCA=60^\circ$ を得る.

$\triangle ABD$ に注目すると, 簡単な計算より、$AD=AC=4\sqrt{3}+4$ がわかる. 有名事実より

$BC+EC=AC$ であるから, 求める長さは, $BC=AC-EC=(4\sqrt{3}+4)-8=4\sqrt{3}-4$.

問 3

(1) $f(x)=x^3+(\frac{3}{2}t^2-1)x^2+(t^3+3t^2)x+4=xt^3+(\frac{3}{2}x^3+3x)t^2+(x^3-x^2+4)$

より, x を固定して t で微分すると,

$\frac{\delta}{\delta t}f(x)=3xt^2+(3x^2+6x)t=3xt\{t+(x+2)\}$

よって, $x\geq 0$ のときの f の t に対する増減表をかくと, $x+2>1$ より,

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\frac{\delta}{\delta t}f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+4$	↘	x^3-x^2+4	↗	$x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+4$

のようになる. また, $x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+4<x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+4$ である.

よって, C_t の軌跡と $x=x(0\leq x\leq 5)$ の共通部分は, $(x,\ x^3-x^2+4)$ と $(x,\ x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+4)$ の線分の $0\leq x\leq 5$ における集合である. よって, 求める面積は,

$\int_0^5\{(x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+4)-(x^3-x^2+4)\}dx=\int_0^5(\frac{3}{2}x^2+4x)dx=\left[\frac{1}{2}x^3+2x^2\right]_0^5=\frac{225}{2}$

(2) $f(x)$ に $t=-(x+2)$ を代入したものを $L(x)$ とする.

$L(x) = \frac{1}{2}x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ となる. x を固定し, t に対する f の増減を確認する.

(Ⅰ) $x = 0$ のとき、$f(x) = 4$.

このとき、D に含まれる領域は存在しない.

(Ⅱ) $0 < x \leq 5$ のとき,

t	$\cdots$	$-(x+2)$	$\cdots$	0	$\cdots$
$\frac{\delta}{\delta t}f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$L(x)$	$\searrow$	$x^3 - x^2 + 4$	$\nearrow$

よって, x 座標が $x(0 < x \leq 5)$ であるとき,D に含まれるような (x, y) の条件は,$y = f(x)$ となるような異なる実数 t が 3 つ存在すればよいから, $x^3 - x^2 + 4 < y < L(x)$ である.

(Ⅲ) $-2 < x < 0$ のとき

t	$\cdots$	$-(x+2)$	$\cdots$	0	$\cdots$
$\frac{\delta}{\delta t}f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$L(x)$	$\nearrow$	$x^3 - x^2 + 4$	$\searrow$

となるから, (Ⅱ) と同様にして、D に含まれるような (x, y) の条件は,$L(x) < y < x^3 - x^2 + 4$ であることがわかる.

(Ⅳ) $x = -2$ のとき

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$\frac{\delta}{\delta t}f(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$L(x)$	$\searrow$

となるから、このとき, D に含まれる領域は存在しない.

(Ⅴ) $-5 \leq x < -2$ のとき,

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$-(x+2)$	$\cdots$
$\frac{\delta}{\delta t}f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$x^3 - x^2 + 4$	$\nearrow$	$L(x)$	$\searrow$

となるから, D に含まれるような (x, y) の条件は, $x^3 - x^2 + 4 < y < L(x)$ である.

よって、$R(s) = L(s) - (s^3 - s^2 + 4) = \frac{1}{2}s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 4s$ とおき、求める面積を S とすると,

$S = \int_{-5}^{-2}\{L(s) - (s^3 - s^2 + 4)\}ds - \int_{-2}^{0}\{L(s) - (s^3 - s^2 + 4)\}ds + \int_{0}^{5}\{L(s) - (s^3 - s^2 + 4)\}ds$

$\quad = (\int_{-5}^{-2} R(s)ds + \int_{2}^{5} R(s)ds) + (-\int_{-2}^{0} R(s)ds + \int_{0}^{2} R(s)ds)$

$R_1(s) = 3s^3 + 4s, R_2(s) = \frac{1}{2}s^4 + 6s^2$ とおくと、$R(s) = R_1(s) + R_2(s)$ であり、R_1 は奇関数,

R_2 は偶関数. よって、以下が成り立つ.

$\quad \int_{-2}^{0} R_2(s)ds = \int_{0}^{2} R_2(s)ds$

$\quad \int_{-2}^{0} R_1(s)ds + \int_{0}^{2} R_1(s)ds = 0, \int_{-5}^{0} R_1(s)ds + \int_{0}^{5} R_1(s)ds = 0$ より、

$\quad \int_{-5}^{-2} R_1(s)ds + \int_{2}^{5} R_1(s)ds = 0$

これを用いて計算すると

$S = (\int_{-5}^{-2} R_1(s)ds + \int_{2}^{5} R_1(s)ds) + (-\int_{-2}^{0} R_1(s)ds + \int_{0}^{2} R_1(s)ds)$

$\quad +(\int_{-5}^{-2} R_2(s)ds + \int_{2}^{5} R_2(s)ds) + (-\int_{-2}^{0} R_2(s)ds + \int_{0}^{2} R_2(s)ds)$

$= 0 + (2\int_0^2 R_1(s)ds) + (2\int_2^5 R_2(s)ds) + 0$
$= 2\left[\frac{3}{4}s^4 + 2s^2\right]_0^2 + 2\left[\frac{1}{10}s^5 + 2s^3\right]_2^5 = \frac{5633}{5}$

問 4

(1) ある n 個の並んだマス目のうち, まず h マス選び, 1 から h を左から順に並べ, 残りの $(n-h)$ マスに左から小さい順に $h+1$ から n を並べればよく, このうち 1 通りは 1 回の操作終了することになるので除く. この場合の数は, ${}_nC_h - 1$ 通り. これらを $0 \leq h \leq n$ まで足し合わせて,

$$\sum_{h=0}^{n}({}_nC_h - 1) = 2^n - (n+1) = 2^n - n - 1.$$

(2) (1) と同様に n 個のマス目に対して, まず h マスを選び, 1 から h を順に並べ, 次に残りの $n-h$ マスから m マスを選び $h+1$ から $h+m$ を順に並べ, 残った $n-h-m$ マスに残りの数を埋めていく.
ちょうど 3 回で終わらせるため, $1 \leq h \leq n-1,\ 1 \leq m \leq n-h-1$ とすると, 2 回以内で終了するのは, $2\,!\,{}_nC_{k+m} - 1$ 通り. この場合の数を $N(h,m)$ とすると, $N(h,m) = {}_nC_h \cdot {}_{n-h}C_m - 2{}_nC_{h+m} + 1$ 通り.
ここで, $h+m = l$ とすると, $2 \leq l \leq n-1$ で, $N(h,m) = \frac{n!}{h!(l-h)!(n-l)!} - 2{}_nC_l + 1$ とかけ,
これを $M(h,l)$ とかく.
ある n 以下の自然数 l に対し, h を $1 \leq h \leq l-1$ までで $M(h,l)$ を総和して,

$$\sum_{k=1}^{l-1} M(h,l) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{n!}{h!(l-h)!(n-l)!} - 2{}_nC_l + 1$$
$$= \frac{n!}{(n-l)!\ l!}\sum_{h=1}^{l-1} {}_lC_h - 2\sum_{h=1}^{l-1} {}_nC_l + (l-1)$$
$$= {}_nC_l \cdot (2^l - 2) - 2(l-1){}_nC_l + (l-1) \text{ を得る.}$$

$$\sum_{l=2}^{n-1}\{{}_nC_l(2^l-2) - 2(l-1){}_nC_l + (l-1)\}$$
$$= \{(2+1)^n - 2^n - n\cdot 2 - 1\} - 2(2^n - 1 - n - 1) - \sum_{l=2}^{n-1} 2(l-1){}_nC_l + \frac{1}{2}(n-2)(n+1) - (n-2)$$
$$= 3^n - 2^n - 2n - 1 - 2\cdot 2^n + 4 + 2n + \frac{1}{2}(n-2)(n+1) - n + 2 - \sum_{h=2}^{n-1} 2(l-1){}_nC_h$$
$$= 3^n - 3 - 2^n + 3 + \frac{1}{2}(n-2)(n+1) - n + 2 - \{\sum_{h=0}^{n} 2(l-1){}_nC_h\} - 2(n-1) + 2$$
$$= 3^n - 3\cdot 2^n + 3 + \tfrac{1}{2}(n-2)(n+1) - n + 2 - (n\cdot 2^n - 2 - 2^n - 2n + 4)$$
$$= 3^n - (n+1)2^n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n \text{ 通り.}$$

問 5

まず，$P_1 = (1,0)$ ，すなわち $\alpha = 0$ の場合を考える．
P_2 が xy 座標平面上の領域 $x^2 + y^2 = 1$ に含まれるという条件から，P_2 の存在範囲は，(図 1) の赤線の部分 (端点を含む) となる．また，P_3 は P_2 を中心とする半径 1 の円の円周上にあるから，P_3 の存在範囲は，(図 2) の斜線部分 (境界を含む) のようになる．ただし，(図 2) の赤線で囲まれた領域 ($(-1,0)$ を通る弧の部分の境界と $(0,\pm\sqrt{3})$ と $(0,0)$ は含まず，それ以外の境界を含む) に含まれる点を通るような P_2 を中心とする半径 1 の円は 2 通り存在することに注意する．点 $(\frac{1}{2},0)$ は (図 2) の斜線部に含まれていないから，$\alpha = 0$ のときは条件を満たさないことがわかる．

次に，$\alpha = t\ (0 < t < 2\pi)$ の場合を考えると，P_3 の存在範囲は，(画像 2) の斜線部を，原点を中心として反時計回りに t だけ回転させたものとなるから，特に $(\frac{1}{2}, 0)$ が，(画像 2) の赤線に囲まれた部分を除いた斜線部 (赤線部の境界を含まず，それ以外の境界を含む) を反時計回りに t だけ回転させたものに含まれていればよい．すなわち，$(\frac{1}{2}\cos t, -\frac{1}{2}\sin t)$ が，(画像 2) の赤線に囲まれた部分を除いた斜線部 (赤線部の境界を含まず，それ以外の境界を含む) に含まれていればよい．
このとき，xy 座標平面上において，$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ と $(x - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$ と
$(x - \frac{1}{2})^2 + (x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$ の交点の座標に着目すればよく，計算により，
$\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8} \leq \sin\alpha \leq 1$ ，$-1 \leq \sin\alpha \leq -\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$ と，$\frac{1 - 3\sqrt{5}}{8} < \cos\alpha \leq \frac{1 + 3\sqrt{5}}{8}$ がわかる．

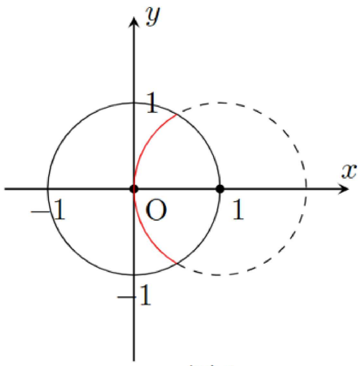


図 1

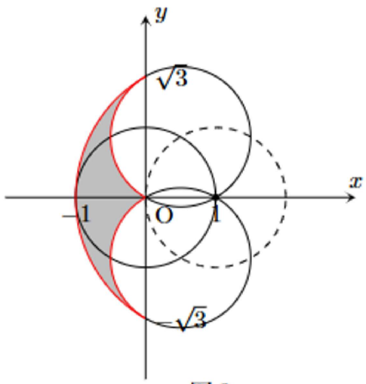


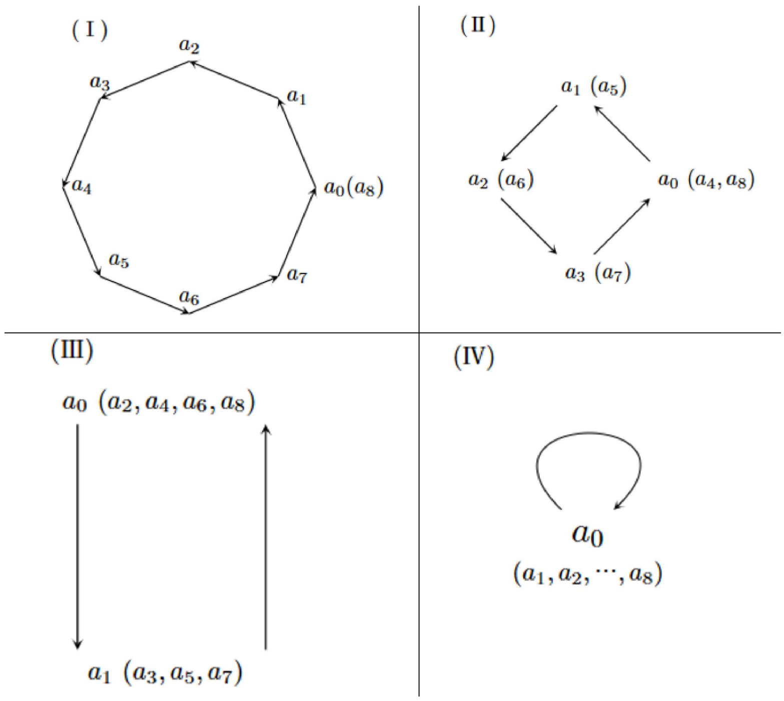
図 2

問 6

(1) $a_m = f(z, a_{m-1}) = f(z, f(z, a_{m-2})) = f(z^2, a_{m-2}) = \cdots = f(z^m, a_0)$ より，
$a_8 = f(z^8, a_0) = f(1, w) = w$

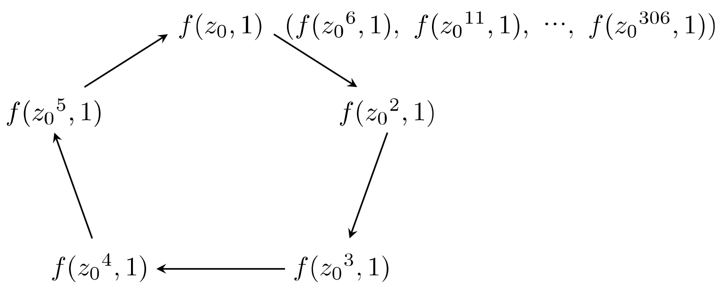
(2) $a_5 = f(z, a_4) = f(z, a_0) = a_1 = i$，$a_6 = f(z, a_5) = f(z, a_1) = a_2 = -1$,
$a_7 = f(z, a_6) = f(z, a_2) = a_3 = -i$, $a_8 = 1$

(3) $a' = f(z, a)$ を $a \to a'$ と表すと，
数列 $\{a_0,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\}$ は下の図のような互いに相異なる元で構成されるループをつくる．
$a_1 \neq a_0$ より，構成されるループは (Ⅰ) , (Ⅱ) , (Ⅲ) のいずれかの型であり，そのすべてで a_0 と異なるのは a_1, a_3, a_5, a_7 の 4 つである. よって, $m = 1, 3, 5, 7$.



(4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=i(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$ より, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,i)=f(i,f(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,i))=f(i,-1)=1.$
$(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=1$ より, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,1)=(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,f(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,i))=f(1,i)=i.$

(5) $n=310,\ z_0=\cos\frac{2}{310}\pi+i\sin\frac{2}{310}\pi$ とすると, C_{310} の元は, $z_0,\ {z_0}^2,\ \cdots,\ {z_0}^{310}$ と表される. したがって, $\{f(z,1)\mid z\in C_{310}\}=\{f(z_0,1),\ f({z_0}^2,1),\cdots,\ f({z_0}^{310},1)\}$ と表せ, $O(310,1)=5$ であるから,



※ $a^{'}=f(z_0,a)\ \Leftrightarrow\ a\to a^{'}$

のループを構成することがわかる. よって, $S(310,1)=62.$

(6) (5) で見たように, $O(n,w_0)$ はループを構成する. 互いに相異なる元の個数, $S(n,w_0)$ はループの回数を表す. したがって, $n,\ O(n,w_0),\ S(n,w_0)$ の間には, 関係式 $n=O(n,w_0)\cdot S(n,w_0)$ が成り立つ.
したがって, $n=11\cdot 181=1991$

(7) p: 素数より, $z\in C_p$ $(z\neq 1)$ のとき, C_p の元は $z,z^2,\cdots,z^p$ と表せる.
よって, $\{f(z,1),f(z^2,1),\cdots,f(z^p,1)\}=\{f(z,1)|z\in C_p\}$ であり, 条件より $O(p,1)=p$ となればよいので, 関係式より $S(p,1)=\frac{p}{O(p,1)}=1.$ すなわち, $f(z,1)\neq 1$ $(z\neq 1)$ となる.
このとき, 任意の $m=1,\ \cdots,\ p$ について $f(z^{m+1},1)\neq f(z^m,1)$ であるが, 任意の $w\in C_p$ はある

$m = 1, \cdots, p$ を用いて $w = f(z^m, 1)$ と表せるので $f(z, w) \neq w\ (z \neq 1)$ が分かる.
逆に, $f(z, w) \neq w\ (z \neq 1)$ のとき $S(p, 1) = 1,\ O(p, 1) = p$ となる.
したがって, 求める条件は, $f(z, w) \neq w\ (z \neq 1)$.