Grafos

Definiciones básicas

- Los **grafos** son un conjunto de vertices y ejes G = (V, E)
- si no aclara no tiene dirección
- No hay selfloops ni varios ejes para un mismo par de nodos (multigrafos)

Tipos de grafos

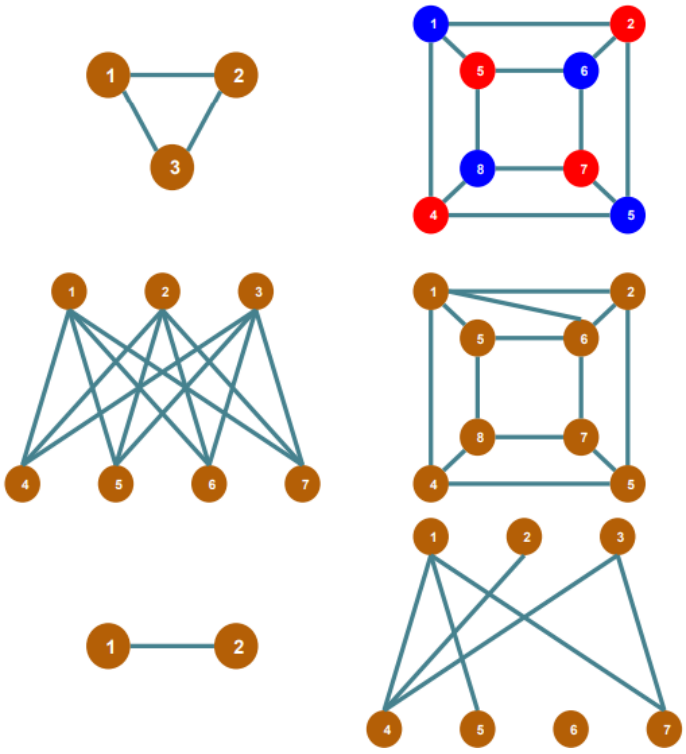
- **Digrafo**: grafo con ejes con dirección (a lo sumo puede tener 2 ejes por par de nodos, uno para la ida y otro para la vuelta)
  - $d_{in}(v)$: grado de entrada de un nodo
  - $d_{out}(v)$: grado de salida de un nodo
  - las aristas E ahora son pares ordenados donde, sea e=(u, v), e se lo llama arco, u cola (desde donde viene) y v cabeza (hacia donde va)
- Dos grafos son isomorfismo si son iguales salvo por el nombre de los nodos (los rotas y quedan igual en distribución)
- **Grafos completos**: (para grafos sin dirección), todos los nodos estan conectados con todos
- **Grafo complemento**: Es el grafo con el mismo conjunto de vertices pero solo tiene las aristas que NO estan en G.
- **Grafo conexo**: (para grafos sin dirección) si existe un camino para todo par de vertices
- **Grafo fuertemente conexo**: (directed graphs) si existe un camino orientado entre todo par de vertices.
- **Grafos bipartitos**: es un grafo cuyos vértices se pueden separar en dos conjuntos disjuntos, de manera que las aristas no pueden relacionar vértices de un mismo conjunto.1

Grafos bipartitos

Definición 12:

- Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** si existen dos subconjuntos V_1 y V_2 de V tal que
  - $V=V_1 \cup V_2$
  - $V_1 \cap V_2=\varnothing$.
  - Para todo $e=(u,v) \in E$, $u \in V_1$ y $v \in V_2$

- Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito completo** con particiones V_1 y V_2, si además todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2.



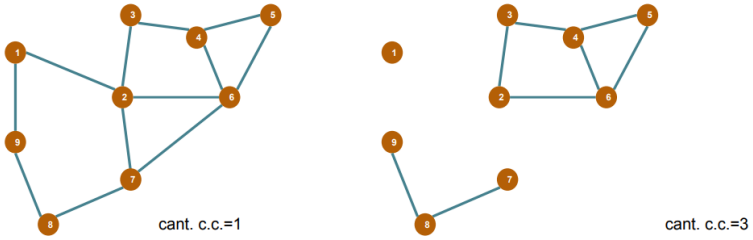
- **Grafos bipartitos completos**: es un grafo bipartito en que todos los vértices de uno de los subconjuntos están relacionados con los del otro subconjunto

- **subgrafos**:

Definición 9: Subgrafos:

- Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$, un **subgrafo** de es un grafo $H = (V_H, E_H)$ tal que $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G \cap (V_H \times V_H) \Rightarrow$ $H \subseteq G$
- Si $H \subseteq G$ y $H \neq G \Rightarrow H$ es un **subgrafo propio** de G
- Si $H \subseteq G$ y $V_H = V_G \Rightarrow H$ es un **subgrafo generador** de G
- Si $H \subseteq G$ y para todo $u, v \in V_H$ con $e=(u, v) \in E_G$ *entonces también vale* $e=(u, v) \in E_H$ *(tiene todas las aristas que conectan los vértices de H y están en G)* $\Rightarrow H$ es un **subgrafo inducido** de G. H se lo nota $V_{[G]}$

- **Componente conexa**: es un subgrafo conexo maximal (no está incluído estrictamente en otro grafo).



- **Arboles**:
  - Grafo conectado y aciclico
  - si saco una arista, se desconecta
  - si agrego una arista se forma un ciclo

caminos y recorridos

- **Vecindario**: N(v) es el conjunto de nodos de G adyacentes a v
- **grado**: d(v) = |N(v)| es la cantidad de vecinos
- **recorrido**: una secuencia de nodos conectados por aristas (pueden repetir nodos)
- **longitud de un recorrido**: la cantidad de *aristas* que tiene
- **Distancia** entre 2 nodos: el camino mas corto d(u,v). Si no existe es ∞. La distancia de un vertice con si mismo es 0.
- **camino**: un recorrido sin nodos repetidos (tambien se llama camino simple cuando se refiere al recorrido como camino)
- **circuito**: un recorrido que empieza y termina en el mismo nodo
- **ciclo**: un circuito que no repite nodos (se puede decir ciclo al circuito y circuito simple al circuito)
- No es valido un ciclo de longitud 2
- **puente**: es una arista que al quitarla aumenta la cantidad de componentes conexas del grafo

Isomorfismo de grafos:

Definición 13: Isomorfos

Dados $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son **isomorfos** si existe una función biyectiva $f: V \to V$ tq para todo $u,v \in V$:

$$(u,v) \in E \Leftrightarrow (f(u),f(v)) \in E'$$

f: función de isomorfismo, $G = G'$ (abuso de notación)

Proposición 3: Isomorfos

Si dos grafos $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son **isomorfos**, entonces,

1. tienen el mismo número de vértices
2. tienen el mismo número de aristas
3. para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado k (la misma distribución de grado)
4. tienen el mismo número de c.c.
5. para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud k.

Teorema 1: suma de grados

$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$

siendo m la cantidad de aristas del grafo

colorario : la cantidad de nodos con grado impar es par. Esto debido a que la suma de todas las conexiones da un numero impar. Si sumamos 2 pares da par, si sumamos 2 impares de par, por lo que para preservar la paridad tiene que haber una cantidad par de nodos con grado impar.

DFS y BFS

DFS sin stack

```
vector<vector<int>> aristas = ... ;
vector<bool> visitado(n, false);

void dfs(int v) {
  visitado[v] = true;

  for (int u : aristas[v]) {
    if (!visitado[u]) {
      dfs(u)
    }
  }

}
```

DFS con stack

```
vector<vector<int>> aristas = ... ;
vector<bool> visitado(n, false);

void dfs(int v) {
  stack<int> s;
  s.push(v);
  vistados[v] = true

  while (!s.empty()) {
    int v = s.top(); s.pop();

    for (auto u: aristas[v]) {
      if (!visitado[u]) {
        visitado[u] = true;
        s.push(u);
```

```
      }
    }

  }

}
```

BFS con cola

```
vector<vector<int>> aristas = ...;
vector<bool> visitados(n, false);
vector<int> distancia(n);

void bfs(int s) {
  visitados[s] = true
  distancia[s] = 0

  queue<int> q;
  q.push(s);

  while (!q.empty()) {
    int v = q.front(); q.pop();

    for (auto u : aristas[v]) {
      if (!visitado[u]) {
        visitado[u] = true;
        distancia[u] = distancia[v] +1;
        q.push(u);
      }
    }
  }
}
```

Problemas que se resuelven con DFS y BFS

1. **¿Es el grafo conexo?**: Recorro con DFS o BFS desde algún nodo (el 0 por ejemplo) y si el vector de visitados no tiene ningún falso, entonces sí es conexo. De lo contrario hay nodos que desde el que comenzamos no podemos llegar.
2. **¿Cuantas componentes conexas tengo?**: Cada vez que recorro el grafo desde un vertice, me marca como visitado los que pertenecen a su componente conexa. Luego me fijo cuales no fueron marcadas, recorro desde la primera no marcada para encotnrar todos los elementos de la otra componente conexa. Repito para obtener todas las componentes conexas.

```
int cant_comp_conexas = 0;
for (int i = 0; i < n; i++>) { // n la cantidad de vertices del grafo
  if (!visitado[i]) {
    cant_comp_conexas++;
    recorro_desde_el_vertice(i); // con dfs o bfs
  }
}
```

3. **¿Hay ciclos? Y si hay, guardame alguno**: Recorro el grafo y en cada paso guardo el padre del nodo actual. Recorro los vecinos del nodo actual v. Para cada vecino u, si no está recorrida le pongo el padre y la recorro, si está recorrida y no es el padre de v, entonces se hay un ciclo desde v hasta ese u

```
vector<int> padres(n, -1);
vector<int> ciclo;
vector<vector<int>> aristas = ...;
int comienzo_ciclo = -1, fin_ciclo = -1;
```

```
queue<int> q;


for (int i = 0; i < n && comienzo_ciclo == fin_ciclo == -1; i++) {
  if (padre[i] == -1) {
    dfs_ciclos(i);
  }
}

if (comienzo_ciclo >= 0) {
  int v = comienzo_ciclo;
  ciclo.push_back(v);

  while (v != fin_ciclo) {
    v = padre[v];
    ciclo.push_back(v);
  }
}



void dfs_ciclos(int s) {
  padre[s] = 0;
  q.push(s);

  while (!q.empty() && comnienzo_ciclo == fin_ciclo == -1) {
    int v = q.top(); q.pop();

    for (auto u : aristas[v]) {
      if (padre[u] == -1) {
        padre[u] = v;
        q.push(u);
      } else if (u != padre[v]) {
        //si la arista no es la que apunta al padre de v, ciclo.
        comienzo_ciclo = v;
        fin_ciclo = u;
        break;
      }
    }
  }
}
```

4. **¿Es un grafo bipartito?**: Recorro el grafo pintando de 2 colores, cuando me encuentro en el recorrido uno del mismo color que su padre, entonces no es bipartito

```
void dfs_bipartito(int v) {
  for (int u : aristas[v]) {
    if (color[u] == -1) {
      // si no esta pintado pinto
      color[u] = 1 - color[v];
      dfs(u);
    } else if (color[u] == color[v]) {
      // si ya esta pintado chequeo
      es_bipartito = false;
    }
  }
}
// llamada
```

```
es_bipartito = true;
color[0] = 0;
dfs_bipartito(0);
```

5. **Cantidad de caminos desde w a v**: Luego de hacer BFS en w, tengo computadas todas las distancias desde w hacia cualquier nodo que tenga un camino con w. Luego para buscar la cantida de caminos, cuento la cantidad de caminos que hay desde los vecinos con distancia menor a v. Cuando la distancia es 0, estoy en el nodo w y hay un solo camino.

```
BFS(w)
cantidad_de_caminos_hasta(v);

int cantidad_de_caminos_hasta(v) {
  if (distancia[v] == 0) return 1;
  if (memo[v] != -1) return memo[v];
  int res = 0;

  for (int vecino : aristas[v]) {
    if (distancia[vecino] + 1 == distancia[v]) {
      res += cantidad_de_caminos_hasta(vecino);
    }
  }

  memo[v] = res;
  return res;
}
```

6. **Cantidad de puentes de un grafo**: Un puento es una arista que al quitarla aumenta la cantidad de componentes conexas del grafo En el recorrido DFS puedo tener 3 estados para cada vertice: Empecé a recorrer, terminé de recorrer, no lo recorrí. Según estos estados podemos clasificar a las aristas según el arbol generado por el DFS. Dado un momento del recorrido en un vertice V, vamos a ver todos sus vecinos. Si el vecino no lo recorrí, entonces la arista es un tree-edge (pertenece al arbol DFS). Si no, y si no es el padre, entonces es un back-edge (conecta con un ancestro) y no pertenece al arbol DFS. Una back-edge no es un puente Una arista es un puente si es un tree-edge y no tiene una back-edge "que la cubra". La cantidad de back-edges que cubre a una arista v de su padre es $\sum_{\text{w hijo de v}} cubren(w) - backEdgesQueTerminanEn(v) + backEdgesQueEmpiezanEn(v)$ *backEdgesQueTerminanEn(v)*: aristas que no estan en el DFS que empiezan en algun decendiente de v y que terminan conectado en v. *backEdgesQueEmpiezanEn(v)*: aristas que empiezan en v y van hacia algun ancestro de v.

- **Complejidad**: $O(n+m)$

```
vector<int> memo(n, -1);
int NO_LO_VI = 0, EMPECE_A_VER = 1, TERMINE_DE_VER = 2;
vector<int> estado(n, NO_LO_VI);
vector<vector<int>> tree_edges(n), backEdgesQueTerminanEn(n), backEdgesQueEmpiezanEn(n);

void dfs_puentes(int v, int p = -1) {
  estado[v] = EMPECE_A_VER;
  for (int u : aristas[v]) {
    if (estado[u] == NO_LO_VI) {
      tree_edges[v].push_back(u);
      dfs_puentes(u, v);
    } else if (u != p) {
      backEdgesQueEmpiezanEn[v]++;
      backEdgesQueTerminanEn[u]++;
    }
  }
  estado[v] = TERMINE_DE_VER;
}

int cubren(int v, int p = -1) {
```

```
  if (memo[v] != -1) return memo[v];
  int res = 0;

  for (int hijo : tree_edges[v]) {
    if (hijo != p) {
      res += cubren(hijo, v);
    }
  }

  res -= backEdgesQueTerminanEn[v];
  res += backEdgesQueEmpiezanEn[v];
  memo[v] = res;
  return res;
}

int componentes = 0, cant_puetnes = 0;

for (int i = 0; i < n; i++) {
  if (estado[i] != NO_LO_VI) {
    dfs_puentes(i);
    componentes++;
  }
}
for (int i = 0; i < n; i++) {
  if (cubren(i) == 0){
    cant_puentes++;
  }
}
// Por cada componente conexa hay una raiz que no lo cubre nadie,
// pero no cuenta para aristas puente
cant_puentes -= componentes
```

7. **Topological sort**: Dado un grafo acíclico dirigido G, es una ordenación lineal de todos los nodos de G que satisface que si G contiene la arista dirigida uv entonces el nodo u aparece antes del nodo v. En grafos con ciclos no hay orden topológico. (Se ordenan los nodos en orden de precedencia)

```
vector<lista<int>> aristas = ...;
vector<bool> visitado(bool, false)
vector<int> vertices_ordenados;
stack<int> res;

for (int i = 0; i < n; i++) {
  if (!visitado[i]) {
    dfs_topological_sort(i);
  }
}

for(int i = 0; i < n; i++) {
  vertices_ordenados.push_back(res.pop());
}

void dfs_topological_sort(int v) {
  visitado[v] = true;

  for (auto u : aristas[v]) {
    if (!visitado[u]) {
      dfs_topological_sort(u);
    }
```

```
  }
  res.push(v);

}
```

Arboles

Definiciones

- **Árbol**: T (grafo conexo sin circuitos simples)
- **Hoja**: u d(u) = 1 (un vertice con grado 1)
- **Raíz**: Algún vértice elegido
- **Bosque**: Conjunto de árboles (componentes conexas)
- **Árbol trivial**: T con n=1 y m=0

Equivalencias (cada una implica la otra)

1. G es un árbol (grafo conexo sin circuitos simples).
2. G es un grafo sin circuitos simples y e una arista tq e $\notin$ E. G+e = (V, E+{e}) tiene exactamente un circuito simple, y ese circuito contiene a e. Es decir, si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.
3. $\exists$ exactamente un camino simple entre todo par de nodos.
4. G es conexo, pero si se quita cualquier arista queda un grafo no conexo. Es decir, si saco cualquier arista se desconecta, o toda arista es puente

Propiedades

- **Lema 1**: La unión entre dos caminos simples distintos entre u y v contiene un circuito simple.
- **Lema 2**: Sea G = (V, E) un grafo conexo y e=(v,u) $\in$ E. G - e = (V, E {e}) es conexo $\iff$ e $\in$ C : circuito simple de G. (e=(v,u) $\in$ E es puente $\iff$ e no pertenece a un circuito simple de G).
- **Lema 3**: Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.
- **Lema 4**: Sea G = (V, E) un árbol $\Rightarrow$ m = n - 1 (m = |E| n = |V|) (dem: inducción en n, sacas una hoja y la volves a poner)
- **Colorario 1**: Sea G un *bosque* con c c.c. $\Rightarrow$ m = n - c
- **Colorario 2**: Sea G un *grafo* con c c.c. $\Rightarrow$ m $\geq$ n - c

Mas equivalencias (teorema 2?)

1. G es un árbol (grafo conexo sin circuitos simples).
2. G es un grafo sin circuitos simples y m = n - 1
3. G es un grafo conexo y m = n - 1

Árbol generador

Un árbol generador (AG) de un grafo G es un subgrafo que tiene el mismo conjunto de vértices y es un árbol

Teorema 4: 1. Todo G conexo tiene al menos un AG. 2. Si G conexo tiene un sólo AG entonces es un árbol. 3. T=(V, E_T) es AG de G=(V, E). Sea e=E E_T (no está en el árbol) tq T' = T+e-f = (V, E $\cup$ {e} {f}) con f una arista del único circuito que se forma al agregar e (de T+e) $\Rightarrow$ T' es otro AG de G.

Árbol generador mínimo

Dado un grafo G=(V, E, w) con $w : E \longrightarrow R$ una función de costo para cada arista - Costo del AGM T: $w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$ (la suma de los costos de las aristas del AGM) - AGM es el AG para el cual $\sum_T w$ es mínima. - Para los grafos no pesados todo AG es AGM porque w=1 $\Rightarrow \sum_T w = m = n-1$ - También puede haber varios AGM. Prim y Kruskal son 2 algoritmos para obtener AGMs

Prim

- *Invariante*: tenemos un árbol de i aristas que es subgrafo de algún AGM. *Inicialización*: empezamos con un solo vértice v arbitrario. *Iteración*: agregamos, de las aristas que podemos agregar y seguir teniendo un arbol, la mas

barata (Algoritmo goloso)

- **complejidad**: Hay implementaciones en $O(m * log(n)) y O(n^2)$

```
vector<int> prim(int raiz, vector<lista<int>> ady) {
  vector<int> costo_vertices(n, inf);
  vector<int> padres_vertices(n, -1);
  vector<bool> elementos_en_cola(n, true);
  // los vertices se numeran de 1..n
  padres_vertices[raiz] = 0;
  costo_vertices[raiz] = 0;

  // encolo todos los elementos en un min heap,
  // cada elemento es un par <costo, elemento>
  min_heap<pair<int, int>> Q; // el algoritmo de heapify es lineal, O(V)
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    Q.insert(pair<int, int>(inf, i));
  }
  // O(V*log(V) + E*log(V)) por cada vertice, desencolo una vez, +, por cada arista
  // (en el peor caso) hago un cambio en la cola de prioridad
  while (!Q.empty()) {
    int w = Q.getMin(); Q.extractMin();
    elementos_en_cola[w] = false;

    for (auto v : ady[w]) {
      /* cuando agrego una arista al arbol generado en la iteración actual,
       éste puede tener aristas hacia algún nodo que ya estaba en el arbol
       pero con un costo menor.
       A--2--B
         |   /
         4  1
         | /
         C
        Si empezamos en A, agregamos las aristas A-B y A-C. Luego en el tope de la cola
        queda B y vemos que tiene una arista B-C que tiene un coste menor que lo
        computado hasta ahora (4 > 1), por lo que lo actualizamos y obtenemos el AGM con costo 3
      */
      if (elementos_en_cola[v] && costo_vertice(v) > costo(arista(w,v))) {
        costo_vertice[v] = costo(arista(w,v));
        padres_vertices[v] = w;
        Q.decreaseKey(pair<int,int>(costo_vertice[v], v));
      }
    }
  }
  return padres_vertices;
}
```

- **complejidad**: $O(V + V * log(V) + E * log(V)) = O(E * log(V)) = O(m * log(n))$. Si el grafo tiene una cantidad mayor o igual de aristas que de vertices y usando binary heap y lista de adyacencias. Se puede mejorar con fibonacci heap a $O(m + n * log(n))$.
- **Implementación** $O(n^2)$: consiste en hacer n veces buscar la arista (de las que todavia no se agregaron) con minimo costo a agregar. (la cátedra dió una implementación)

Kruskal

- Consiste en ordenar todas las aristas de menor a mayor según la función de w (peso o costo). Luego, inicialmente, todos los elementos forman su propia componente conexa y voy uniendolos recorriendo en orden de menor a mayor costo las aristas del grafo. Las agrego al bosque si no generan un ciclo, es decir si sus extremos no pertenecen a la misma cc.

- *Invariante*: tenemos un bosque generador de i aristas que es subgrafo de alg´un AGM.
- *Invariante alternativo*: tenemos un bosque generador de i aristas que es mpiinimo entre los bosques de i aristas.
- *Obs*: El primer invariante no implica al invariante alternativo. Pensar un ejemplo.
- *Inicialización*: empezamos con todos los v´ertices y ninguna arista.
- *Iteración*: agregamos, de las aristas que podemos agregar y seguir teniendo un bosque (no generan ciclos), la m´as barata

- **complejidad**: Hay implementaciones en $O(m * log(n))$ y $O(n^2)$. La siguiente es $O(m * log(n))$

```
struct DSU {
    DSU(int n){
        padre = vector<int>(n);
        for(int v = 0; v < n; v++) padre[v] = v;
        tamano = vector<int>(n,1);
    }
    // dado un vértice me devuelve a qué componente conexa pertenece
    int find(int v){
        while(padre[v] != v) v = padre[v];
        return v;
    }
    // une las componentes conexas de u y v
    void unite(int u, int v){
        u = find(u); v = find(v);
        if(tamano[u] < tamano[v]) swap(u,v);
        //ahora u es al menos tan grande como v
        padre[v] = u;
        tamano[u] += tamano[v];
    }

    vector<int> padre;
    vector<int> tamano;

    //tamano[v] <= n
    //INV: si padre[v] != v entonces tamano[padre[v]] >= 2*tamano[v]
};

void kruskal(vector<tuple<int,int,int>>& E, int n){
    long long res = 0;
    sort(E.begin(),E.end());
    DSU dsu(n);

    int aristas = 0;
    for(auto [w,u,v] : E){
        //u y v estan en distinta cc?
        if(dsu.find(u) != dsu.find(v)){
            dsu.unite(u,v);
            res += w;
            aristas++;
        }
        if(aristas == n-1) break;
    }

    if(aristas == n-1) cout<<res<<'\n';
    else cout<<"IMPOSSIBLE\n";
}

int main(){
    int n,m;
```

```
    cin>>n>>m;
    vector<tuple<int,int,int>> E(m); //(costo,u,v)
    // lleno la lista de aristas y llamo a kruskal
    kruskal(E,n);

    return 0;
}
```

Para el parcial

- Según si el grafo es denso o raro conviene usar Prim o Kruskal. Aún así para los parciales pueden asumir que tienen un algoritmo mágico que resuelve AGM en $O(min(m * log(n), n^2))$. También existen versiones de Prim y Kruskal para grafos ralos/densos

Algoritmo de tarjan para puntos de articulación (o puentes)

Dado un grafo G = (V, E), un **punto de articulación** "v", es un vertice que tal que si lo removemos junto con sus aristas conectadas a él, el grafo se desconecta.

- Solución por fuerza bruta: ir sacando de a un vertice (y luego volver a ponerlo) y comprobar con DFS o BSF si el grafo siendo conexo. Costo $O(n * (n + m))$

Algoritmo de tarjan para puntos de articulación

Se basa en DFS por lo que tiene costo $O(n + m)$. El algoritmo usa 4 arreglos: - **visitado**: para tener un seguimiento de los vertices visitados - **momento_descubrimiento**: momento en el DFS llegó por primera vez al vertice (se tiene una variable global *tiempo* que por cada vertice visitado se incrementa en 1 y empieza en 0) - **mínimo_descubrimiento_alcanzable**: guarda para cada vertice, el mínimo tiempo de descubrimiento que se puede alcanzar desde el subarbol enraizado desde el vertice (tanto por tree edges como por backedges). - **padre**: para guardar cual es el padre de cada vertice en el recorrido. La raiz tiene padre "-1"

Se inicializan los 3 con largo igual a n y todos en -1. Se empieza el DFS desde un vertice cualquiera y por cada vertice "u" alcanzado:

- Se marca u como visitado, se setea su momento de descubrimiento y se aumenta la variable tiempo.
- Por cada vecino v de u:
    1. si v no está visitado, setear el padre de v como u y expandir el dfs hacia v. Cuando vuelva de la recursión de v, setear el minimo_momento_visita de u como el min(minimo_momento_visita[u], minimo_momento_visita[v])
    2. Si u no es la raiz y mínimo_descubrimiento_alcanzable[v] >= momento_descubrimiento[u] siginifica que desde el subarbol de v no hay ninguna arista que conecte con un ancestro de u (es decir, que tenga un momento de descubrimiento menor a u). Y por lo tanto u es un punto de articulación.
    3. Si u era la raiz y tiene al menos 2 hijos, entonces es un punto de articulación.

```
from collections import defaultdict

class Graph:
   def __init__(self, vertices):
       self.V = vertices
       self.graph = defaultdict(list)

   def add_edge(self, u, v):
       self.graph[u].append(v)
       self.graph[v].append(u)

   def dfs(self, u, visited, discovery_time, low, parent, time, articulation_points):
       visited[u] = True
       discovery_time[u] = time
       low[u] = time # mínimo_descubrimiento_alcanzable
       children = 0
```

```
        for v in self.graph[u]:
            if not visited[v]:
                parent[v] = u
                children += 1
                self.dfs(v, visited, discovery_time, low, parent, time + 1, articulation_points)

                low[u] = min(low[u], low[v])

                if parent[u] == -1 and children > 1:
                    articulation_points.add(u)
                elif parent[u] != -1 and low[v] >= discovery_time[u]:
                    articulation_points.add(u)
            elif v != parent[u]:
                low[u] = min(low[u], discovery_time[v])

    def find_articulation_points(self):
        visited = [False] * self.V
        discovery_time = [-1] * self.V
        low = [-1] * self.V
        parent = [-1] * self.V
        time = 0
        articulation_points = set()

        for u in range(self.V):
            if not visited[u]:
                self.dfs(u, visited, discovery_time, low, parent, time, articulation_points)

        return list(articulation_points)
```

Algoritmo de tarjan para puentes

Es una idea similar a la anterior, dado un vertice v en el recorrido DFS, por cada vecino u nos fijamos que no haya una backedge en el subarbol de u que vaya a un ancestro de v. O lo que sería que si el subarbol u tiene un minimo_descubrimiento_alcanzable más grande que el momento de descubrimiento de v entonces la arista (v, u) es un puente. - Complejidad: $O(n + m)$

```
int n; // number of nodes
vector<vector<int>> adj; // adjacency list of graph
vector<bool> visited;
vector<int> tin, low; // momento_descubrimiento, mínimo_descubrimiento_alcanzable
int timer;

// p: padre (parent)
void dfs(int v, int p = -1) {
    visited[v] = true;
    tin[v] = low[v] = timer++;
    for (int to : adj[v]) {
        if (to == p) continue;
        if (visited[to]) {
            low[v] = min(low[v], tin[to]);
        } else {
            dfs(to, v);
            low[v] = min(low[v], low[to]);
            if (low[to] > tin[v])
                IS_BRIDGE(v, to);
        }
    }
```

```
}

void find_bridges() {
    timer = 0;
    visited.assign(n, false);
    tin.assign(n, -1);
    low.assign(n, -1);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (!visited[i])
            dfs(i);
    }
}
```