

Práctica 1: Lenguajes

Versión del 28 de agosto de 2024

Ejercicio 1. Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto. Hallar:

$$\Sigma^0, \Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^*, \Sigma^+, |\Sigma|, |\Sigma^0|$$

($|A|$ indica la cantidad de elementos de A).

Ejercicio 2. Decidir si, dado $\Sigma = \{a, b\}$, vale:

$$\lambda \in \Sigma, \lambda \subseteq \Sigma, \lambda \in \Sigma^+, \lambda \in \Sigma^*, \Sigma^0 = \lambda, \Sigma^0 = \{\lambda\}$$

Ejercicio 3. Sea $\alpha = abb$ una cadena. Calcular:

$$\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \prod_{k=0, \dots, 3} \alpha^k = \alpha^0 \cdot \alpha^1 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^3, \alpha^r$$

Ejercicio 4. Sean las cadenas $\alpha = abb$ y $\beta = acb$. Calcular:

$$\alpha\beta, (\alpha\beta)^r, \beta^r, \beta^r\alpha^r, \lambda\alpha, \lambda\beta, \alpha\lambda\beta, \alpha^2\lambda^3\beta^2$$

Ejercicio 5. Dado un alfabeto Σ , sean $x, y \in \Sigma$ y $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Demostrar que:

$$a. |x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$$

$$b. |\alpha^r| = |\alpha|$$

$$c. |\alpha x \beta| = |x \alpha \beta|$$

$$d. |\alpha.\alpha| = 2|\alpha|$$

$$e. (\alpha.\beta)^r = \beta^r.\alpha^r$$

$$f. (\alpha^r)^r = \alpha$$

$$g. (\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r$$

($|\alpha|$ indica la longitud de la cadena α).

Ejercicio 6. Dar ejemplos de cadenas que pertenezcan a los siguientes lenguajes:

$$a. \mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$b. \mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

$$c. \mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 1\}$$

$$d. \mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 0\}$$

$$e. \mathcal{L} = \{a^n (ac)^p (bab)^q \mid n \geq 0 \wedge q = p + 2 \wedge p \geq 1\}$$

$$f. \mathcal{L} = \{a, b\}^3 \cap \Lambda$$

$$g. \mathcal{L} = \{\alpha\alpha^r \mid \alpha \in \{a, b\}^+\}$$

$$h. \mathcal{L} = \{\alpha \in \{a, b\}^+ \mid \alpha = \alpha^r\}$$

Ejercicio 7. Definir por comprensión los siguientes lenguajes:

- a. $\mathcal{L}_1 = \{ab, aabb, aaabbb, \dots\}$
- b. $\mathcal{L}_2 = \{aab, aaaabb, aaaaaabbb, \dots\}$
- c. $\mathcal{L}_3 = \{aaabccc, aaaabcccc, aaaaaabccccc, \dots\}$

(donde el «crecimiento» en la cantidad de cada símbolo es lineal en cada caso).

Ejercicio 8. Dados $\mathcal{L}_1 = \{a, bc\}$, $\mathcal{L}_2 = \{aaa, bc\}$, y siendo $\Lambda = \{\lambda\}$, calcular:

- a. $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$
- b. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$
- c. $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2$
- d. $\mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2)^0$
- e. $\mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2)^2$
- f. $\mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2)^+$
- g. $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^+$
- h. $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^*$
- i. $\mathcal{L}_1 \cdot \Lambda \cdot \mathcal{L}_2$
- j. $\mathcal{L}_1 \emptyset \mathcal{L}_2$
- k. $(\mathcal{L}_1)^r$
- l. $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^r$

Ejercicio 9. Determinar el complemento de los siguientes lenguajes, considerando los alfabetos indicados en cada caso.

- a. $\mathcal{L} = \Lambda$ para $\Sigma = \{a, b\}$
- b. $\mathcal{L} = \{\lambda, a\}$ para $\Sigma = \{a\}$ y $\Sigma = \{a, b\}$
- c. $\mathcal{L} = \{b\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$
- d. $\mathcal{L} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$ para $\Sigma = \{a\}$ y $\Sigma = \{a, b\}$
- e. $\mathcal{L} = \{\alpha_1 b \alpha_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, b\}^* \wedge |\alpha_1| > |\alpha_2|\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

Ejercicio 10. Sea \mathcal{L} , \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 lenguajes cualesquiera. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, demostrarlas. Si no, dar un contraejemplo.

- a. $\mathcal{L}^+ \subseteq \mathcal{L}^*$
- b. $\mathcal{L}^+ \subsetneq \mathcal{L}^*$
- c. $\mathcal{L}^n \mathcal{L}^m = \mathcal{L}^{n+m}$ para todo $n, m \geq 0$
- d. $\mathcal{L}^n \subseteq \mathcal{L}^{n+1}$ para todo $n \geq 0$
- e. $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2, n \geq 0 \implies (\mathcal{L}_1)^n \subseteq (\mathcal{L}_2)^n$
- f. $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \implies (\mathcal{L}_1)^* \subseteq (\mathcal{L}_2)^*$
- g. $(\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L}^*$
- h. $(\mathcal{L}^+)^+ = \mathcal{L}^*$
- i. $(\mathcal{L}^+)^* = \mathcal{L}^*$
- j. $(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^* = (\mathcal{L}_1)^* \cup (\mathcal{L}_2)^*$
- k. $(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)^* = (\mathcal{L}_1)^* \cap (\mathcal{L}_2)^*$
- l. $(\mathcal{L}^2)^* = \mathcal{L}^*$
- m. $(\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_2)^* = \mathcal{L}^*$
- n. $(\mathcal{L}^n)^r = (\mathcal{L}^r)^n$ para todo $n \geq 0$
- ñ. $(\mathcal{L}^*)^r = (\mathcal{L}^r)^*$

Ejercicio 11. Siendo:

- $\text{Sub}(\mathcal{L})$: subcadenas del lenguaje \mathcal{L} .
- $\text{Ini}(\mathcal{L})$: subcadenas iniciales (prefijos) del lenguaje \mathcal{L} .
- $\text{Fin}(\mathcal{L})$: subcadenas finales (sufijos) del lenguaje \mathcal{L} .

Demostrar que, si \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son lenguajes:

- a. $\text{Fin}(\text{Fin}(\mathcal{L}_1)) = \text{Fin}(\mathcal{L}_1)$
- b. $\text{Sub}(\text{Sub}(\mathcal{L}_1)) = \text{Sub}(\mathcal{L}_1)$
- c. $\text{Fin}(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2) = \text{Fin}(\mathcal{L}_2) \cup \text{Fin}(\mathcal{L}_1) \mathcal{L}_2$
- d. $\text{Ini}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \text{Ini}(\mathcal{L}_1) \cup \text{Ini}(\mathcal{L}_2)$
- e. $\text{Fin}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \text{Fin}(\mathcal{L}_1) \cup \text{Fin}(\mathcal{L}_2)$
- f. $\text{Ini}(\text{Sub}(\mathcal{L}_1)) = \text{Sub}(\text{Ini}(\mathcal{L}_1)) = \text{Fin}(\text{Sub}(\mathcal{L}_1)) = \text{Sub}(\text{Fin}(\mathcal{L}_1)) = \text{Sub}(\mathcal{L}_1)$