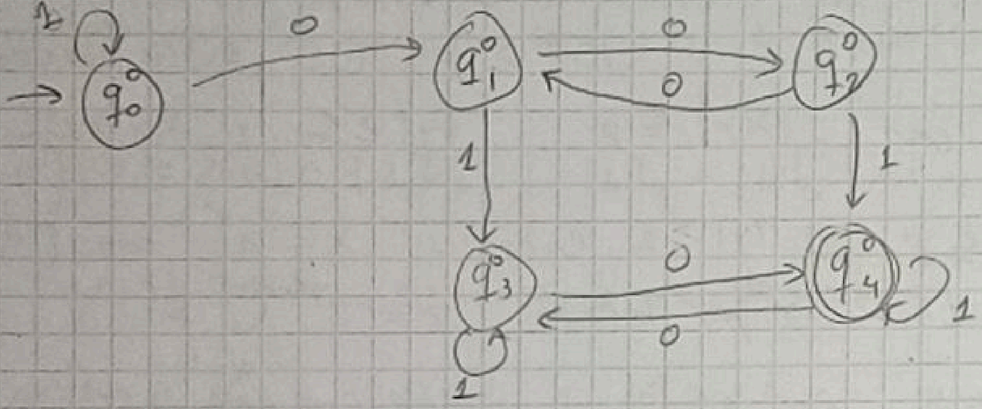
$\delta_0 =$

$Q_0 \setminus \Sigma$	0	1
$q_0^0 = (q_0^1, q_0^2)$	(q_1^1, q_1^2)	(q_0^1, q_0^2)
$q_1^0 = (q_1^1, q_1^2)$	(q_1^1, q_0^2)	(q_2^1, q_1^2)
$q_2^0 = (q_1^1, q_0^2)$	(q_1^1, q_1^2)	(q_2^1, q_0^2)
$q_3^0 = (q_2^1, q_1^2)$	(q_2^1, q_0^2)	(q_2^1, q_1^2)
$q_4^0 = \underbrace{(q_2^1, q_0^2)}_{\text{final}}$	(q_2^1, q_1^2)	(q_2^1, q_0^2)



Practica 3 Pumping

1) a) $L = \{ a^{2n} \mid n \geq 1 \} = \{ aa, aaaa, aaaaaa,$ cant a par $\}$

Supongamos L regular. Por lema de pumping existe $p > 0$ tq para toda cadena $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geq p$ se puede descomponer en $\alpha = xyz$ con

$|xy| \leq p \quad |y| \geq 1 \quad$ y $\quad \forall i \geq 0 \quad xy^iz \in L$

Si encontramos $\alpha \in L$ tq algun pumpeo $\notin L$ entonces demostraremos que no es regular

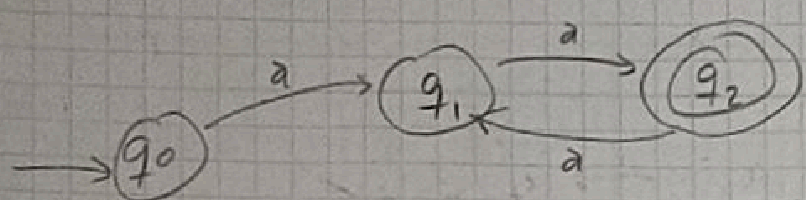
$\alpha = a^{2p}$ tenemos $\alpha \in L$ y $|\alpha| \geq p$

Sea $\alpha = \underset{a^p a^p}{a^{2p}} = xyz$ la descomposición

$x = a^r \quad r \geq 0 \qquad y = a^t \quad t \geq 1 \qquad z = a^{p-r-t}\, a^p$

$xy^0z = a^r a^{p-r-t} a^p = a^{p-t} a^p = a^{2p-t}$ (no llego a nada porque no se si t es par o impar)

Creo que L es regular y un posible autómata sería



b) $L = \{a^n b^n : n \geq 0\} = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb \cdots\}$

Sup L regular, sea $p > 0$ la cte del lema pumping

$\alpha = a^p b^p$ $\quad \alpha \in L$ y $|\alpha| \geq p$ $\therefore$ existe descomp

$\alpha = xyz$ con $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$, $xy^i z \in L$ $\forall i \geq 0$

Como $|xy| \leq p$ y $|y| \geq 1$ entonces $x = a^r$ con $r \geq 0$

$y = a^t$ con $t \geq 1$ y por lo tanto $z = a^{p-r-t} b^p$

Si tomo $i = 0$ $\quad \alpha' = xy^0 z = a^r a^{p-r-t} b^p = a^{p-t} b^p$

Como $t \geq 1$ entonces $p - t \neq p$ $\therefore$ $\alpha' \notin L$

Luego α' debería pertenecer a L por lema de pumping.

Llegamos a una contradicción de asumir que L es regular

c) $L = \{a^m b^n a^{m+n} \mid m, n \geq 1\} = \{ab\,aa, abb\,aaa, aabb\,aaaa \cdots\}$

Sup L reg, $p > 0$

$\alpha = a^p b^p a^{2p}$, $|\alpha| \geq p$ por pump $\alpha = xyz$

$|xy| \leq p$ $\quad |y| \geq 1$ $\quad xy^i z \in L$ $\forall i \geq 0$

Como $|xy| \leq p$ entonces xy solo tiene "a" $\therefore$

$x = a^r$ con $r \geq 0$ $\quad y = a^t$ $\quad t \geq 1$ y $z = a^{p-r-t} b^p a^{2p}$

Si tomamos $i = 0$ $\quad \alpha' = xy^0 z = a^r a^{p-r-t} b^p a^{2p} =$

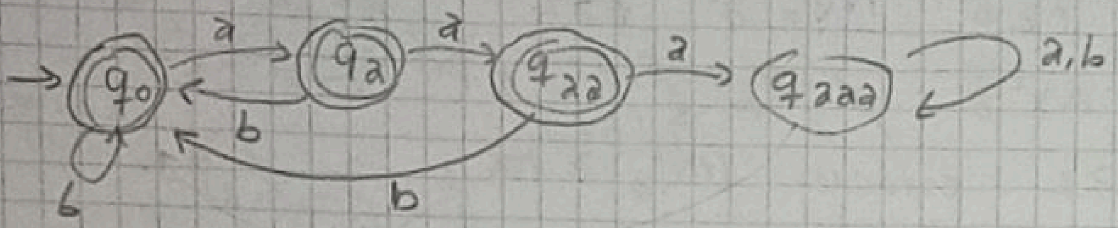
$= a^{p-t} b^p a^{2p}$

Si L fuera regular $\alpha' \in L$.

Para que $\alpha' \in L$ $\quad p - t + p = 2p$ pero como $t \geq 1$ esto no vale

Llegamos a un abs de suponer L regular

d) $\{\omega \in \{a,b\}^* \mid \omega$ no contiene 3 "a" consecutivas$\} = L$



El autómata anterior es determinístico (por lo tanto finito) y solo acepta palabras que no contengan 3 a consecutivas

e) $L = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\} = \{\lambda, abab, abbbabaaa \ldots\}$

Sup L regular, sea p la cte de lema pumping

$\alpha = a^p b^p$ $\quad \alpha \in L$ y $|\alpha| \geq p$ $\therefore$ se puede descomponer en

$\alpha = xyz$ con $|xy| \leq p$ $\quad |y| \geq 1$ y $xy^i z \in L \quad \forall i \geq 0$

Como $|xy| \leq p$ entonces xy solo contiene "a".

$x = a^r$ con $r \geq 0$ $\quad y = a^t$ con $t \geq 1$ $\quad z = a^{p-r-t} b^p$

Luego $\alpha' = xy^0 z$ debería pertenecer a L al ser regular

$xy^0 z = a^r a^{p-r-t} b^p = a^{p-t} b^p$ $\quad$ como $t \geq 1$ $\quad p-t \neq p$

Por lo que $|\alpha'|_a \neq |\alpha'|_b$ y por lo tanto $\alpha' \notin L$.

Llegamos a un abs de suponer L regular

f) $L = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$

Sup L fuera regular, luego

$L^c = \{\omega \in \{a,b\}^*\} \setminus \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b\} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$

sería regular. Pero probamos en (e) que L^c no es regular.

Luego L no es regular.

g) $L = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a < |\omega|_b \}$

$\alpha = a^p b^{p+1}$ $\quad \alpha \in L \quad |\alpha| \geq p$

$x = a^r \quad r \geq 0 \qquad y = a^t \quad t \geq 1 \qquad z = a^{p-r-t} b^{p+1}$

$\alpha' = x y^2 z = \cancel{a^r} \cancel{a^t} a^t a^{\cancel{p-r-t}} b^{p+1} = a^{p+t} b^{p+1}$

Como $t \geq 1$ entonces $|\alpha'|_a \geq |\alpha'|_b \therefore \alpha' \notin L$

L no es regular

h) $L = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid \omega = \omega^r \}$

$\alpha = a^p b^p b^p a^p \qquad \alpha = \alpha^r \therefore \alpha \in L$

$|\alpha| \geq p$

$|xy| \leq p \quad |y| \geq 1 \qquad x = a^r \quad r \geq 0 \qquad y = a^t \quad t \geq 1$

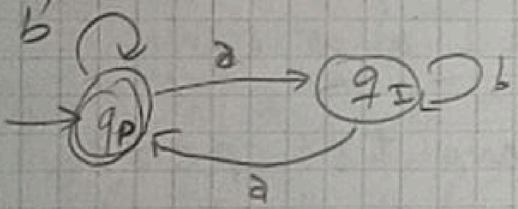
$z = a^{p-r-t} b^p b^p a^p$

$\alpha' = x y^0 z = a^r a^{p-r-t} b^p b^p a^p = a^{p-t} b^p b^p a^p$

Como $t \geq 1 \quad p-t \neq p$ y $\alpha' \neq (\alpha')^r \therefore \alpha' \notin L$

L no es regular

I) $L = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a$ es par$\}$



A es un AFD cuyo lenguaje es L

J) $L = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid \big| |\omega|_a - |\omega|_b \big| \leq 1 \}$

$\alpha = a^p b^p \qquad \alpha \in L \qquad |\alpha| \geq p \qquad \alpha = xyz$

$x = a^r \quad r \geq 0$

$y = a^t \quad t \geq 1$

$z = a^{p-r-t} b^p$

$\alpha' = x y^3 z = a^r (a^t)^3 a^{p-r-t} b^p$

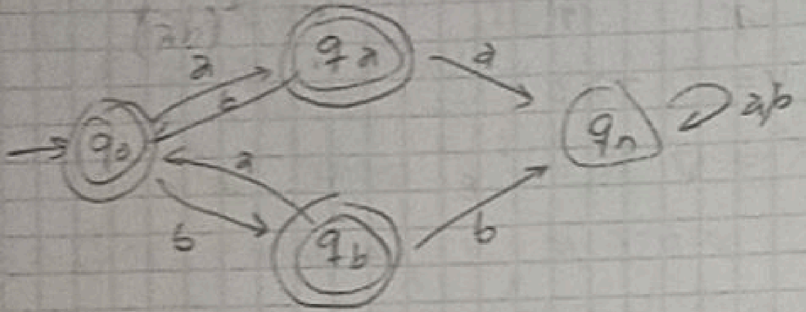
$= a^{p+2t} b^p$

Como $t \geq 1 \qquad |\alpha'|_a - |\alpha'|_b = 2t \geq 2 \therefore \alpha' \notin L$

NOTA

1) $K = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid \forall$ prefijo γ de ω $||\gamma|_a - |\gamma|_b| \leq 1 \}$

A:



$L(A) = K$

2) $L = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid \forall$ prefijo γ de ω $||\gamma|_a - |\gamma|_b| \leq 1 \wedge |\omega|_a = |\omega|_b \}$

El conjunto de lenguajes regulares está cerrado por unión, intersección y complemento

$A - B = A \cap B^c$ por lo que también está cerrado por diferencia

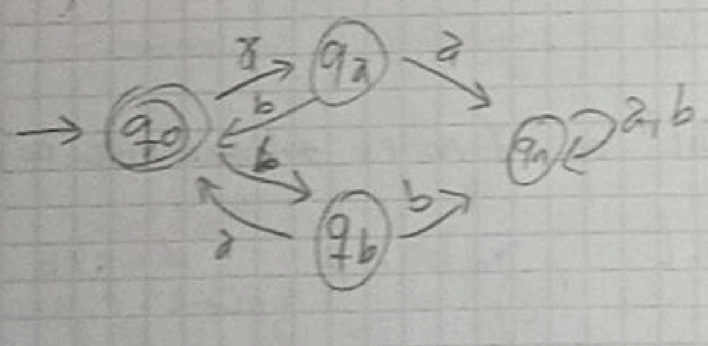
$A \cup B - A = (A \cup B) \cap A^c = A \cap A^c \cup B \cap A^c = B \cap A^c$

L_r $\quad L_{nr}$ $\qquad L = L_r \cup L_{nr}$ es no regular

sup L regular. $\quad L - L_r$ regular

$\underbrace{L - L_r}_{\text{regular}} = (L_r \cup L_{nr}) - L_r = \cancel{L_{nr} \ldots}\ \underbrace{L_{nr} - L_r}_{\text{regular}}$

A:



$L(A) = L$

m) $L = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid \forall$ prefijo γ de ω $|\gamma|_a \geq |\gamma|_b \}$

$\alpha = a^p b^p$

$\alpha \in L$ $\quad |\alpha| \geq p$

$\alpha = xyz$ $\quad |xy| \leq p$ $\quad |y| \geq 1$ $\quad xy^iz \in L \quad \forall i \geq 0$

$x = a^r \quad r \geq 0 \quad y = a^t \quad t \geq 1 \quad z = a^{p-r-t} b^p$

Tomando $i = 0$ $\quad \alpha' = a^r a^{p-r-t} b^p = a^{p-t} b^p$

Luego como $t \geq 1$ $\quad p-t < p$ y por lo tanto $|\alpha'|_a < |\alpha'|_b$

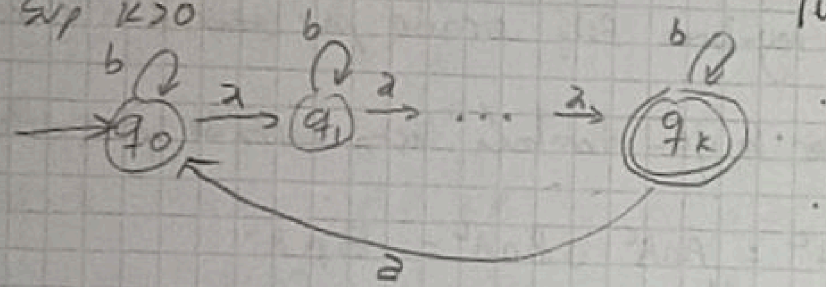
y α' es un prefijo de sí mismo, por lo que $\alpha' \notin L$

Luego L no es regular

n) $k \in \mathbb{N}$ $\quad L_k = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a$ divisible por $k \}$

$|\omega|_a \equiv_k 0$

Sup $k > 0$



ñ) $L = \{ \omega\omega \mid \omega \in \{a,b\}^* \}$

$\alpha = a^p b a^p b$ $\quad \alpha \in L$

$x = a^r \quad r \geq 0 \quad y = a^t \quad t \geq 1 \quad z = a^{p-r-t} b a^p b$

$\alpha' = x y^0 z = a^{p-t} b a^p b$ $\quad$ como $t \geq 1$ $\quad a^{p-t} b \neq a^p b$

Entonces $\alpha' \notin L$ $\quad L$ no es regular

símbolo de alfabeto

o) $L = \{ \omega \# \gamma \mid \omega, \gamma \in \{a,b\}^*$ y γ no es subcadena de $\omega \}$

$\alpha = a^p \# a^{p+1}$ $\quad \alpha \in L$ $\quad$ y $|\alpha| \geq p$ $\quad \alpha = xyz$

$x = a^r \quad r \geq 0 \quad y = a^t \quad t \geq 1 \quad z = a^{p-r-t} \# a^{p+1}$

$\alpha' = x y^2 z = \cancel{a^r a^t} a^t \cancel{a^{p-r-t}} \# a^{p+1} = a^{p+t} \# a^{p+1}$

Como $t \geq 1$ $\quad a^{p+1}$ es subcadena de a^{p+t}, luego $\alpha' \notin L$

Entonces L no es regular

p) $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\} = \{a, aa, aaaa, aaaaaaaa, \dots\}$

$\alpha = a^{2^p} = a^2(a^2)^{p-1}$ $\quad \alpha \in L$ y $|\alpha| \geq p$

$x = a^r \quad r \geq 0 \quad y = a^t \quad t \geq 1 \quad z = a^{2^p - r - t}$

$|xy| \leq p$

Sea $\alpha' = xy^2z = a^{2^p - r - t + r + 2t} = a^{2^p + t}$

Notemos que $1 \leq t \leq p$ Luego

$2^p + t \geq 2^p + 1 > 2^p$

$2^p + t \leq 2^p + p < 2^p + 2^p = 2^{p+1}$

Entonces $2^p < 2^p + t < 2^{p+1}$ y $a^{2^p+t} \notin L$ al no ser una cantidad de a potencia de 2

q) $\{(ba)^n (ab)^m \mid n \leq m\} = L$

$\alpha = (ba)^p (ab)^p \in L$

- Y empieza en b y termina en b

$x = (ba)^* \quad y = (ba)^* b \quad z = a(ba)^*(ab)^p$

Con $\alpha' = xyyz = (ba)^*(ba)^*\underline{b\,(b}a)^* a(ba)^*(ab)^p$

Tenemos 2 b seguidas $\therefore \alpha' \notin L$

- Y empieza con b y termina con a

$x = (ba)^* \quad y = (ba)^+ \quad z = (ba)^*(ab)^p$

$\alpha' = xyyz = (ba)^p(ba)(ab)^p \notin L$ ya que hay más (ba) que (ab)

- Y empieza con a y termina con b

$x = (ba)^* b \quad y = a(ba)^* b \quad z = a(ba)^*(ab)^p$

$\alpha = xyyz$ agrego un (ba) más y entonces $\alpha' \notin L$

- Y empieza a termina a

$x = (ba)^* b \quad y = a(ba)^* \quad z = (ba)^*(ab)^p$

con $i=0$ queda o una b sola, o una b seguida de otra $\therefore \alpha' \notin L$

r) $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0 \wedge n \neq m\}$

~~$L^c = \{w \in \{a,b\}^*\} \setminus \{a^n b^m \mid n \neq m \; n, m \geq 0\} =$~~

~~$= \{a^n b^m \mid n = m \vee n > m \vee m < m$~~

Sabemos que los lenguajes regulares están cerrados por complemento.
Luego L es regular si y solo si L^c es regular.

Supongamos L^c regular. Por Lema pumping existe $p > 0$

$\alpha = a^p b^p \qquad \alpha \in L^c \;\; y \;\; |\alpha| \geq p$

$x = a^r \quad r \geq 0$

$y = a^t \quad t \geq 1$

$z = a^{p-r-t} b^p \qquad$ con $i = 0$ sea $\alpha' = x y^0 z = a^{p-t} b^p$

$p - t \neq p$ ya que $t \geq 1$ por lo que $\alpha' \notin L^c$

Luego L^c no es regular

s) $\Sigma = \{a, b, c\} \qquad L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0 \wedge n \neq m\} \cup \{c^{3s} \mid s \geq 0\}$

Mismo argumento que r.

No es regular $\qquad \alpha = a^p b^p \in L^c$ y se puede pumpear y ver que el resultado con $i=0$ no pertenece a L^c.

t) $k \in \mathbb{N}_0 \qquad \mathcal{L}_k = \{a^n b^{n+k} \mid n \geq 0\} \cup \{b^s \mid s \geq 0\}$

Con $k = 0 \qquad \mathcal{L}_0 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^s \mid s \geq 0\}$

Sup $\mathcal{L}_0$ reg por lema de pumping existe $p > 0$ tq

Para todo $\alpha \in \mathcal{L}_0$ que cumple $|\alpha| \geq p$ se puede descomponer en

$\alpha = xyz \quad$ con $\quad |xy| \leq p \quad |y| \geq 1 \quad y \quad \forall i \geq 0 \;\; x y^i z \in \mathcal{L}_0$

Sea $\alpha = a^p b^p \qquad x = a^r \quad r \geq 0 \qquad y = a^t \quad t \geq 1$

$z = a^{p-r-t} b^p \qquad$ con $i = 0 \qquad \alpha' = xz = a^{p-t} b^p$

Luego $\alpha' \notin \mathcal{L}_0$ ya que $p - t \neq p$ y $\alpha' \notin \{b^s \mid s \geq 0\}$ ya que $p > 0$

NOTA

Con $k \geq 0$

$$\mathcal{L}_k = \underbrace{\{a^n b^{n+k} \mid n \geq 0\}}_{\mathcal{L}_k^1} \cup \underbrace{\{b^s \mid s \geq 0\}}_{\mathcal{L}^2}$$

Sup $\mathcal{L}_k$ regular $\exists p>0$ $\forall \alpha \in \mathcal{L}_k$ $|\alpha| \geq p$ $\alpha = xyz$

$|xy| \leq p$ $|y| \geq 1$ $\forall i \geq 0$ $xy^i z \in \mathcal{L}_k$

Sea $\alpha = a^p b^{p+k}$ $\alpha \in \mathcal{L}_k \wedge |\alpha| \geq p$

$x = a^r$ $r \geq 0$ $y = a^t$ $t \geq 1$ $z = a^{p-r-t} b^{p+k}$

Con $i = k+2$ $\alpha' = x(y)^{k+2} z = a^r a^t (a^t)^{k+1} a^{p-r-t} b^{p+k}$

$= a^{p+t(k+1)} b^{p+k}$

Como $t \geq 1$ entonces $t(k+1) \geq k+1 > k$

entonces $\alpha' \notin \mathcal{L}_k^1$, y como α' tiene "a" al $p>0$ entonces $\alpha' \notin \mathcal{L}^2$ $\therefore$ $\alpha' \notin \mathcal{L}_k$ y $\mathcal{L}_k$ no es regular

v) $\Sigma = \{(,)\}$ $L =$ Lenguaje de paréntesis balanceados

$\alpha = (^p)^p$ $\alpha \in L$ $|\alpha| \geq p$

$x = (^r$ $r \geq 0$ $y = (^t$ $t \geq 1$

$z = (^{p-r-t})^p$

Con $i=0$ $\alpha' = xz = (^r (^{p-r-t})^p = (^{p-t})^p$

$\alpha' \notin L$ ya que $t \geq 1$ Luego L no es regular

u) $\Sigma = \{a, b, c\}$ $L = \{a^m b^n c^s \mid m \neq n \vee m \neq s\}$

Si L fuera reg L^c también

$\alpha = a^p b^p c^p \in L^c$ $|\alpha| \geq p$

$x = a^r$ $r \geq 0$ $y = a^t$ $t \geq 1$ $z = a^{p-r-t} b^p c^p$

$i=0$ $\alpha' = xz = a^{p-t} b^p c^p$ $\therefore$ $\alpha' \in L \Leftrightarrow \alpha' \notin L^c$

Luego L^c no es regular $\therefore$ L no es regular

w) $L=\{(ab)^n a^m \mid n$ multiplo de $m\}$

$\exists\, r \in \mathbb{N} \quad n = r\, m$ $\quad m \in \{1, \text{divisores de } n\}$

$\alpha = (ab)^p a^p \qquad \alpha \in L \ \wedge \ |\alpha| \geq p$

- Y empieza en a y termina en b

$x=(ab)^* \qquad y=(ab)^+ \qquad z=(ab)^* a^p$

$x=(ab)^r \quad r\geq 0 \qquad y=(ab)^t \quad t\geq 1 \qquad z=(ab)^{p-r-t} a^p$

Si tomamos $i=0 \qquad \alpha' = xz = (ab)^{p-t} a^p$

Como $t\geq 1$ entonces $p-t<p$ por lo que $p-t$ no es multiplo de p y $\alpha' \notin L$.

- Y empieza con a y termina con a

$x=(ab)^* \qquad y=(ab)^* a \qquad z= b(ab)^* a^p$

Si tomo $i=0$ la palabra resultante o tiene 2 "b" seguidas o empieza por b. En ambos casos no pertenece al lenguaje

- Y empieza con b y termina con b

$x=(ab)^* a \qquad y= b(ab)^* \qquad z=(ab)^* a^p$

Si tomo $i=2 \qquad \alpha' = (ab)^* a\, b(ab)^* b(ab)^* (ab)^* a^p$

quedan 2 "b" seguidas y no pertenece al lenguaje

- Y empieza con b y termina con a

$x=(ab)^* a \qquad y= b(ab)^* \underline{a} \qquad z= b(ab)^* a^p$

Si $i=0$ queda $\alpha' = (ab)^* ab\,(ab)^* a^p$ y la cantidad de ab resultante es uno menos, por lo que no es multiplo de p. Entonces no pertenece al lenguaje

En los cuatro casos llegamos a un absurdo de suponer que L es regular.

tiene prueba de no regular

tiene prueba de regular

x) $L = \{ a^n \gamma \mid n \geq 1,\ \gamma \in \{a,b\}^* \ |\gamma| \leq n \} \cup \{ b^n a^m \mid n \equiv 1 \bmod 3,\ m \geq 1 \}$

$\alpha = a^p a^p \qquad \alpha \in L \qquad |\alpha| \geq p$

$x = a^r \quad r \geq 0 \qquad y = a^t \quad t \geq 1 \qquad z = a^{p-r-t} a^p$

Con $i=0$ $\qquad \alpha' = xz = a^{p-t} a^p$

Como $t \geq 1$ $\quad p-t < p$ por lo que no pertenece al primer conjunto, y al no tener b tampoco al segundo conjunto

Luego $\alpha' \notin L \rightarrow L$ no es regular por absurdo

2) $L = \{ a^i b^j \mid i > j \vee i \text{ es par} \}$

a) Dem cumple

$\forall \alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2 \longrightarrow \exists (x,y,z): (\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall i \ xy^iz \in L)$

Sea $\alpha \in L$ con $|\alpha| \geq 2$ $\qquad \alpha = a^i b^j$ tal que $i > j \vee i$ es par

- $i = 2 \qquad j = 0$

  $x = \lambda \quad z = \lambda \quad y = aa \qquad \forall i \ y^i$ siempre tiene a par

- i par mayor a 2 $\quad j = 0$

  $x = \lambda \quad y = aa \quad z = (a)^+ \qquad |z|_a$ es par

  Luego $\forall i \quad y^i z$ tiene cant a par $\therefore$ pertenece a L

- i par $\quad i < j$

  $\alpha = a^i b^j$

  $x = \lambda \quad y = aa \quad z = a^* b^j \qquad |z|_a$ es par

  Luego $\forall i \quad y^i z$ tiene cant par de a $\therefore \in L$

- i impar $\quad i > j$

  $x = \lambda \quad y = a \quad z = a^* b^j$

  Al bombear agrego más a y mantengo $i > j$

  Con $i=0$ la cant de a se vuelve par

• $i > j$ i par
Por lo menos hay 2 a
$x = a$ $y = aa$ $z = a^{i-3} b^j$
Al pumpear la cant de a sigue siendo par

b) Dem L no es regular.
Si L fuera regular entonces L^c sería regular.
Sup L^c es regular, $\exists p > 0$ del lema pumping
$\alpha = a^p b^{2p+1}$ $\alpha \in L^c$ al tener cant a impar y cant de b mayor a cant a
$|\alpha| \geq p$
$x = a^r$ $r \geq 0$ $y = a^t$ $t \geq 1$ $z = a^{p-r-t} b^{2p+1}$

$\alpha' = x y^{2p+1} z = (a^t)^{2p+1} a^{p-t} b^{2p+1} = a^{2pt+t} a^{p-t} b^{2p+1}$

$\cancel{t} + 2pt + p - \cancel{t} = \cancel{p(2t+2t}$ $2pt + p \geq 2p + 2$
ya que $t \geq 1$ y $p > 0$
Luego hay mas cant de a que de b, por lo que $\alpha' \notin L^c$. Entonces L^c no es regular.
Finalmente L no es regular

NOTA