LFAC

GUIA 1) 10) c) $L^n L^m = L^{n+m} \quad \forall n, m \geq 0$

$\subseteq$) Sea $\alpha \in L^n L^m \quad \alpha = \beta\gamma$ con $\beta \in L^n \; \gamma \in L^m$

$\beta = \beta_1 \cdots \beta_n$ con $\beta_i \in L$

$\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_m$ con $\gamma_i \in L$

$\beta \cdot \gamma = \beta_1 \cdots \beta_n \gamma_1 \cdots \gamma_m = \alpha_1 \cdots \alpha_{n+m}$ con $\alpha_i \in L$, $1 \leq i \leq n+m$

Por lo tanto $\alpha \in L^{n+m}$

$\supseteq$) $\alpha \in L^{n+m} \rightarrow \alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_{n+m} \quad \alpha_i \in L$

$$\alpha = \underbrace{(\alpha_1 \cdots \alpha_n)}_{\beta}\underbrace{(\alpha_{n+1} \cdots \alpha_{n+m})}_{\gamma} = \beta\gamma$$

con $\beta \in L^n$ y $\gamma \in L^m$ Por lo tanto $\alpha = \beta\gamma \in L^n L^m$

d) $L^n \subseteq L^{n+1} \quad \forall n \geq 0$ Falso $L = \{a\}$

Con $n = 0 \quad L^0 = \{\lambda\} \not\subseteq L^1 = \{a\}$

Tambien $L^2 = \{aa\} \not\subseteq L^3 = \{aaa\}$

e) $L_1 \subseteq L_2 \quad n \geq 0 \rightarrow (L_1)^n \subseteq (L_2)^n$

Verdadero. Sea $\alpha \in (L_1)^n \quad \alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n \quad \alpha_i \in L_1 \subseteq L_2$

Por lo que $\alpha_i \in L_2 \; \therefore \; \alpha_1 \cdots \alpha_n = \alpha \in (L_2)^n$

f) $L_1 \subseteq L_2 \rightarrow (L_1)^* \subseteq (L_2)^*$

Sea $\alpha \in (L_1)^* = \bigcup_{i \geq 0} (L_1)^i \Rightarrow \alpha \in (L_1)^n$ para algún $n \geq 0$

Por e) entonces $\alpha \in (L_2)^n$ y $(L_2)^n \subseteq (L_2)^* \; \therefore \; \alpha \in (L_2)^*$

g) $(L^*)^* = L^*$

$\supseteq$) $L^* = (L^*)^1 \subseteq (L^*)^*$ (también por f $L \subseteq L^* \rightarrow (L^*) \subseteq (L^*)^*$)

$\subseteq$) $\alpha \in (L^*)^* \rightarrow \alpha = \beta_1 \cdots \beta_n$ con $\beta_i \in L^*$ para $n \geq 0$

Cada $\beta_i \in L^{m_i}$ con $m_i \geq 0$. Luego $\alpha \in L^{m_1} \cdots L^{m_n} =$

$= L^{m_1 + \cdots + m_n} \subseteq L^*$

h) $(L^+)^+ = L^*$ falso

Para L tq $\lambda \notin L$ $\lambda \in L^*$ y $\lambda \notin (L^+)^+$

I) $(L^+)^* = L^*$ Verdadero

$\supseteq$) $L^1 \subseteq L^+$ por f $(L^1)^* \subseteq (L^+)^* = (L)^* \subseteq (L^+)^*$

$\subseteq$) $L^+ \subseteq L^*$ por f $(L^+)^* \subseteq (L^*)^* \underset{\text{por g}}{=} L^*$

j) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1)^* \cup (L_2)^*$ falso

$L_1 = \{a\}$ $L_2 = \{b\}$

$abab \in (L_1 \cup L_2)^*$

$(L_1)^* = a^n$ para $n \geq 0$
$(L_2)^* = b^m$ para $m \geq 0$
$\Big\}$ $abab \notin (L_1)^*$, $\notin (L_2)^*$ $\rightarrow$ $abab \notin (L_1)^* \cup (L_2)^*$

k) $(L_1 \cap L_2)^* = (L_1)^* \cap (L_2)^*$ falso

$L_1 = \{a\}$ $L_2 = \{aa\}$

$(L_1 \cap L_2)^* = (\emptyset)^* = \{\lambda\}$
$L_1^* \cap L_2^* = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$
$\Big\} \neq$

L) $(L^2)^* = L^*$ Falso

$L = \{a\}$ $L^2 = \{aa\}$

$L^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$
$(L^2)^* = \{\lambda, aa, aaaa, a^{2n} \mid n \geq 0\}$
$\Big\} \neq$

m) $(L \cup L_2)^* = L^*$

Falso $L = \{a\}$ $L_2 = \{b\}$ $ab \in (L \cup L_2)^*$, $ab \notin L^*$

n) $(L^n)^r = (L^r)^n$ $\forall n \geq 0$ Verdadero

$\subseteq$) $\alpha \in (L^n)^r$ $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^r = \alpha_n^r \cdots \alpha_1^r$ $\alpha_i \in L$, $\alpha_i^r \in L^r$

Por lo tanto $\alpha \in (L^r)^n$

$\supseteq$) $\alpha \in (L^r)^n$ $\alpha = \alpha_1^r \cdots \alpha_n^r = (\alpha_n \cdots \alpha_1)^r \therefore \alpha \in (L^n)^r$

n) $(L^*)^n \doteq (L^n)^*$ Verdadero

Argumento parecido a (n). Debe existir algún $n \geq 0$ y con eso aplicamos (n)

11) a) $Fin(Fin(L_1)) = Fin(L_1)$

$\subseteq$) $\alpha \in Fin(Fin(L_1)) \rightarrow \exists \beta, \gamma \in \Sigma^* : \underbrace{\beta\gamma}_{\varphi}\alpha \in L_1$

Luego $\varphi \in \Sigma^*$ y $\varphi\alpha \in L_1 \therefore \alpha \in Fin(L_1)$

$\supseteq$) $\alpha \in Fin(L_1) \rightarrow \exists \beta \in \Sigma^* : \beta\alpha \in L_1$

Como $\lambda \in \Sigma^* \rightarrow \lambda\beta\alpha \in L_1 \therefore \alpha \in Fin(Fin(L_1))$

b) $Sub(Sub(L_1)) = Sub(L_1)$

$\subseteq$) $\alpha \in Sub(Sub(L_1)) \rightarrow \exists \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \Sigma^* : \underbrace{\beta\gamma}_{\varphi}\alpha\underbrace{\beta'\gamma'}_{\varphi'} \in L_1$

$\therefore \alpha \in Sub(L_1)$

$\supseteq$) $\alpha \in Sub(L_1) \rightarrow \exists \beta, \gamma \in \Sigma^* : \beta\alpha\gamma \in L_1$

$\rightarrow \lambda\beta\alpha\gamma\lambda \in L_1 \therefore \alpha \in Sub(Sub(L_1))$

c) $Fin(L_1 L_2) = Fin(L_2) \cup Fin(L_1) L_2$