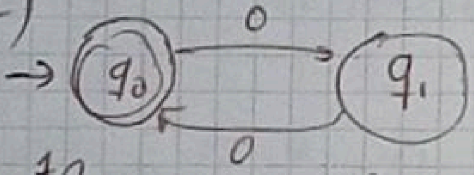
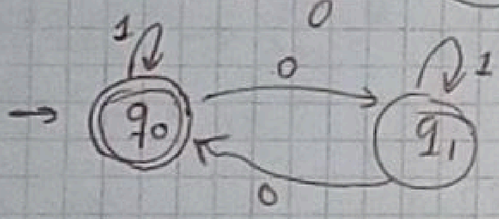
Guía 2)

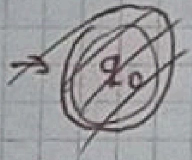
1) a)

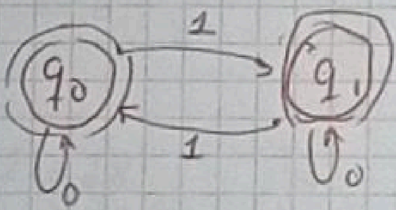


b)

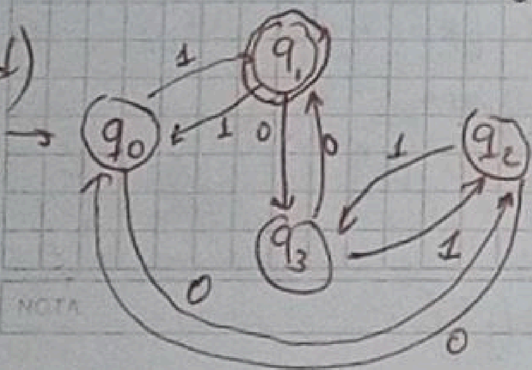


c)





d)



	0	1
q_0	par	par
(q_1	par	impar)
q_2	impar	par
q_3	impar	impar

e) Usando la pista, ~~analiso~~ analito que pasa al agregar un digito al final y como afecta a $\equiv_5$

Sea x un número representado en binario, agregarle un 0 al final lo multiplica por 2 y agregarle un 1 lo multiplica por 2 y le suma 1

Analisemos cada caso de la congruencia

$x \equiv_5 0$ | $x \equiv_5 1$ | $x \equiv_5 2$

$2x \equiv_5 0$ | $2x \equiv_5 2$ | $2x \equiv_5 4$

$2x+1 \equiv_5 1$ | $2x+1 \equiv_5 3$ | $2x+1 \equiv_5 0$

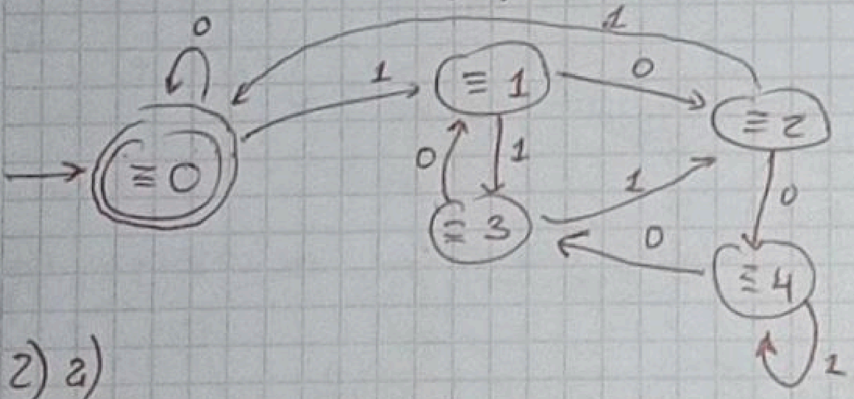
$x \equiv_5 3$ | $x \equiv_5 4$

$2x \equiv_5 1$ | $2x \equiv_5 3$

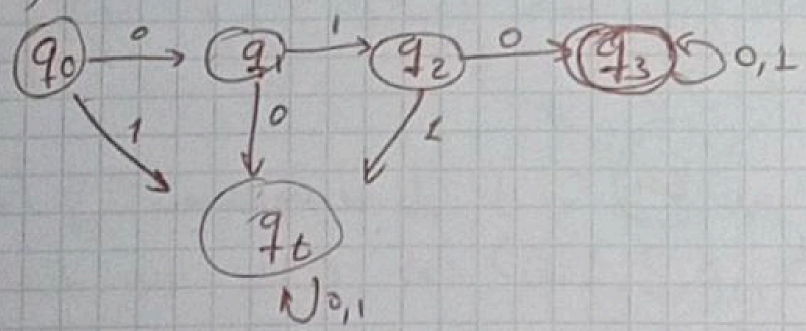
$2x+1 \equiv_5 2$ | $2x+1 \equiv_5 4$

Cada caso marca las transiciones ~~en la lectura de las~~

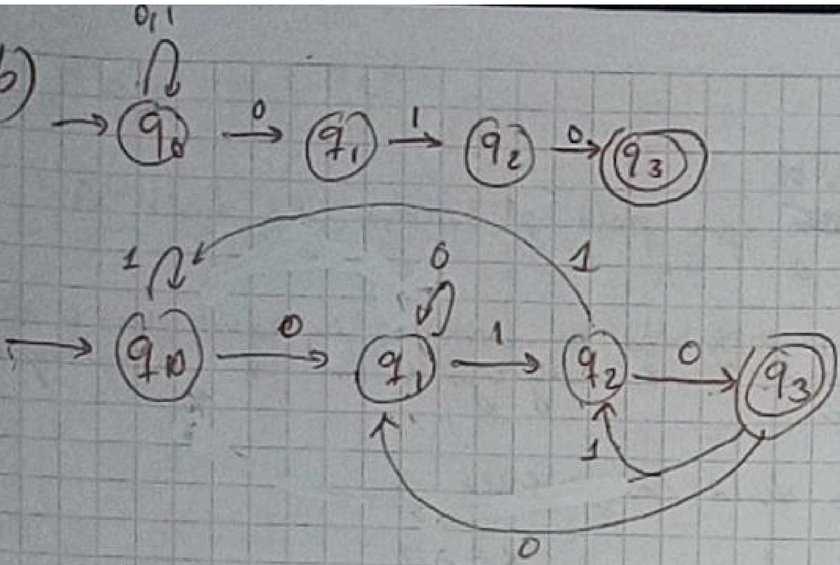
Basicamente es leer la tira de bits de izq a der y transicionar por agregar un bit mas



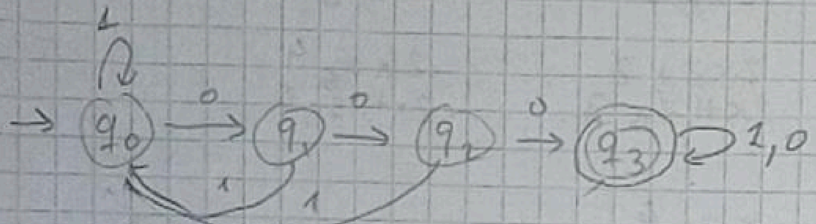
2) a)



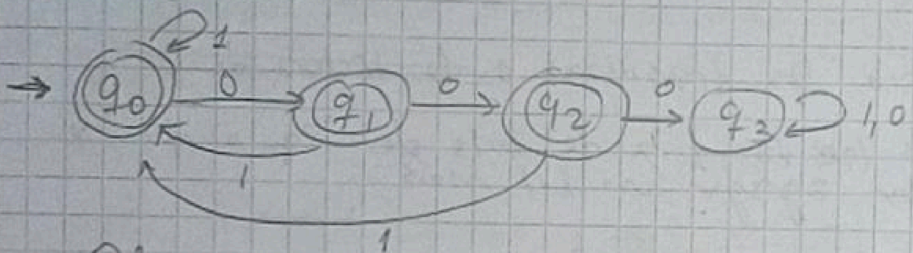
b)



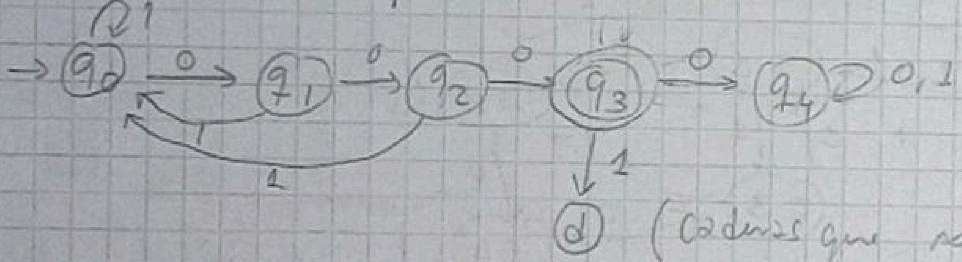
c)



d)

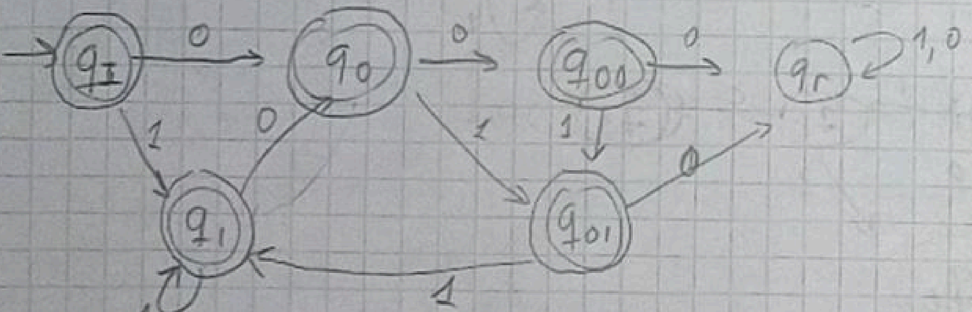


e)

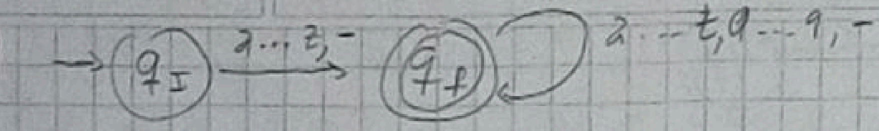


(Cadenas que no contengan 000)

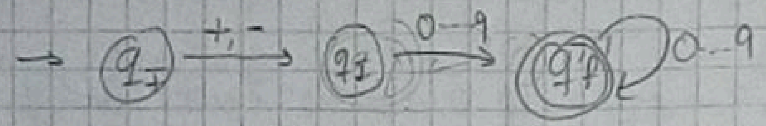
f)



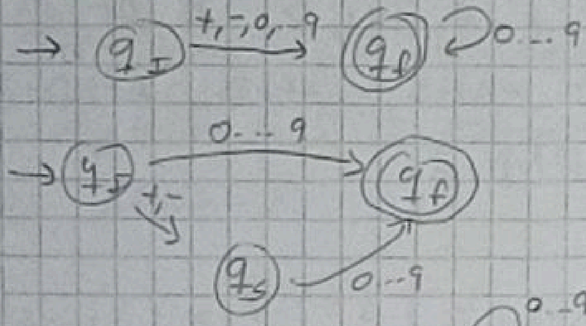
3) a)



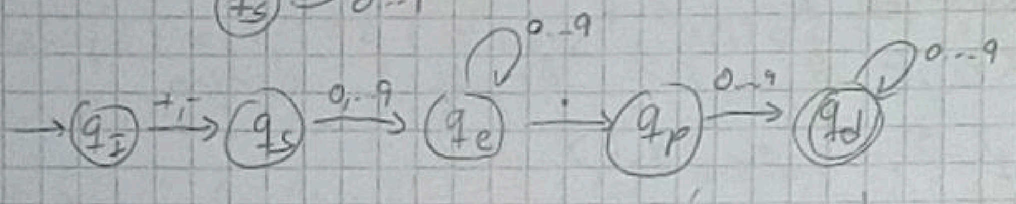
b)



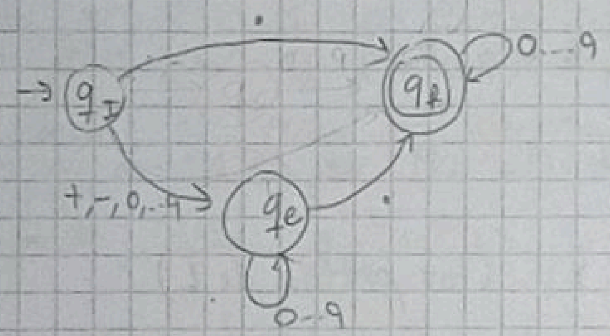
c)



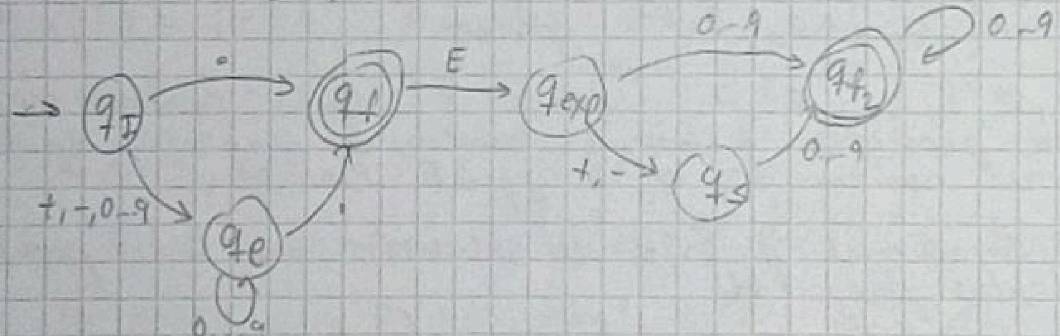
d)



e)



f)



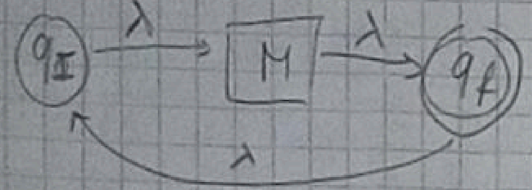
4) a) L^c complemento de L (necesita λ-lambda, completo y det)
de uno de los mismos caract)

Dado un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ necesitamos que esté completo, es decir que esté definido δ para todo estado y símbolo del alfabeto. Si no es así se puede agregar un estado trampa.

Luego $M' = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F' \rangle$ donde $F' = Q \setminus F$

Al invertir los estados finales, las cadenas que acepta M no son aceptadas por M' y viceversa. Luego $L(M') = L^c$

b) L^*, la clausura de Kleene de L $\left(L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n\right)$



Dado $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ el autómata finito de L
Construyo $M' = \langle Q \cup \{q_I, q_f\}, \Sigma, \delta', q_I, \{q_f\} \rangle$ el AF de L^*. La entrada M puede ser AFD, AFND, AFND-λ y el autómata resultante es AFND-λ

c) L^r la reversa de L
Dado $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ AF de L defino
$M' = \langle Q \cup \{q_I\}, \Sigma, \delta', q_I, \{q_0\} \rangle$
donde $\delta'(q_I, \lambda) = F$

$$q_2 \in \delta'(q_1, a) \leftrightarrow q_1 \in \delta(q_2, a)$$

Indistintamente del determinismo de M, M' es AFND-λ.

d) $Ini(L) = \{\overset{\in \Sigma^*}{\alpha} \mid \exists \overset{\in \Sigma^*}{\beta} : \alpha\beta \in L\}$ (los prefijos de L)
Sea $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ defino
$M' = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F' \rangle$ donde F' es el conjunto de estados que pertenece a algún camino de aceptación en M, es decir un camino de q_0 a $q_f \in F$ en M
Así permitimos que prefijos de secuencias aceptadas por M sean aceptadas por M'

e) $Fin(L) = \{\alpha \mid \exists \gamma : \gamma\alpha \in L\}$ (sufijos de L)
$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
$M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F \rangle$
Donde agregamos transiciones desde q_0 hacia todo estado que pertenezca a algún camino de aceptación en M
$\forall q \in Q \quad q \in \delta'(q_0, \lambda) \leftrightarrow q \in$ Algún camino de aceptación (algún camino desde q_0 a q_f en M)

NOTA

f) $Sub(L) = \{\alpha : \exists(\beta,\gamma) : \gamma\alpha\beta \in L\}$ (Subcadenas de L)

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q^0, F\rangle$ $\quad$ $M' = \langle Q \cup \{q_I, q_f\}, \Sigma, \delta', q_I, \{q_f\}\rangle$

Donde $q_I \xrightarrow{\lambda} q$ para todo $q \in Q$ que pertenezca a algún camino de aceptación en M. y $q \xrightarrow{\lambda} q_f$

Así permitimos iniciar por cualquier caracter de una palabra del lenguaje aceptado por M y terminar con los caracteres siguientes sin completar toda la palabra

M' es AFND-λ

g) $Max(L) = \{\alpha \in L \mid \forall \omega \in \Sigma^+, \alpha\omega \notin L\}$ (cadenas maximales de L)

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$

$M' = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F'\rangle$ con $F' \subseteq F$

donde $q \in F'$ si no existe camino de aceptación en M desde q_0 que pase por q pero no termine en q.

Es decir, si tengo un camino de aceptación en M que empieza por q_0 y pasa por varios estados finales $q_{f_1} \dots q_{f_k}$, en ese orden, sólo $q_{f_k} \in F'$

h) $Min(L) = \{\alpha \in L : \nexists\, \omega_1, \omega_2 : \alpha = \omega_1\omega_2 \wedge \omega_1 \in L \wedge \omega_2 \neq \lambda\}$

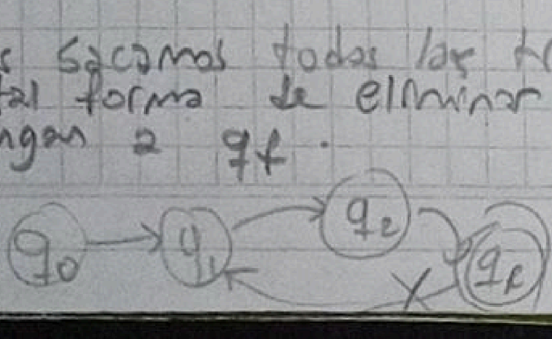
$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$

$M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F'\rangle$ $\quad$ $F' \subseteq F$

Donde F' es el subconjunto de estados finales q_f de M tales que no existe otro estado final entre q_0 y q_f de las cadenas aceptadas de M (L)

Es decir, para caminos en M que pasan por varios estados finales $q_{f_1} \dots q_{f_k}$ nos quedamos con q_{f_1}

Además sacamos todas las transiciones salientes de $q_f \in F'$ de tal forma de eliminar potenciales ciclos que contengan a q_f.



i) $L_T = \{\alpha \in \Sigma^* : \exists(\omega_1 \in L, \omega_2 \in \Sigma^*) : \alpha = \omega_1 \omega_2\} = L \cdot \Sigma^*$

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

$M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F \rangle$

Agrego a cada estado final una transición a sí mismo para todos los símbolos del alfabeto.

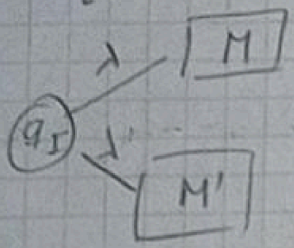
5) a) $L_1 \cup L_2$

Sea M el AF de L_1 y M' el AF de L_2 defino M_2

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \quad M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$

$M_2 = \langle Q \cup Q' \cup \{q_I\}, \Sigma, \delta_2, q_I, F \cup F' \rangle$

Donde δ_2 tiene las transiciones de δ y δ' y $\delta_2(q_I, \lambda) = \{q_0, q_0'\}$



b) ~~$L_1 \cap L_2$~~ Otra forma es definiendo pares como estados

$Q_3 = Q \times Q' \qquad M_3 = \langle Q_3, \Sigma, \delta_3, r_0, F_3 \rangle$

$\delta_3((q,p), a) = \{(q', p') : q' \in \delta(q,a) \wedge p' \in \delta'(p,a)\}$
$= (\delta(q,a), \delta'(p,a))$

$r_0 = (q_0, q_0')$

$F_3 = \{(q', p') : q' \in F \vee p' \in F'\}$

Esto funciona ya que queremos que si hay un camino de aceptación en M o M' entonces queremos que haya uno en M_3.

Si tengo un camino de aceptación $q_0 \cdots q_n$ en M con $q_n \in F$ entonces $\exists\ (q_n, p') \in F_3$ y existe transiciones entre

b) $L_1 \cap L_2$

$M_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F^1 \rangle \qquad M_2 = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F^2 \rangle$

Defino M_3 como $\langle Q_3, \Sigma, \delta_3, q_0^3, F^3 \rangle$ donde

$Q_3 = Q_1 \times Q_2$

$\delta_3((q,p), a) = \{(r,s) : r \in \delta_1(q,a) \wedge s \in \delta_2(p,a)\}$

$q \in Q_1,\ p \in Q_2,\ a \in \Sigma$

$q_0^3 = (q_0^1, q_0^2)$

$F = \{(r,s) : r \in F^1 \wedge s \in F^2\}$

Si para una cadena existe camino de aceptación en M_1 y M_2 entonces existe camino de aceptación en M_3

Por como están definidas las transiciones, si hay camino de aceptación en M_1 y M_2 $q_0^1 \ldots q_n^1$ y $q_0^2 \ldots q_n^2$ respectivamente con $q_n^1 \in F^1$ y $q_n^2 \in F^2$ entonces en M_3 tenemos el camino $(q_0^1, q_0^2), (q_1^1, q_1^2) \ldots (q_n^1, q_n^2)$.

c) $L_1 \cdot L_2$

$M_3 = \langle Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta_3, q_0^3, F^3 \rangle$

$q_0^3 = q_0^1$

$F^3 = F_2$

$\delta_3(q, \lambda) = q_0^2$ con $q \in F^1$

$\rightarrow \boxed{M_1} \rightarrow \boxed{M_2}$ sacando los estados finales de M_1

d) $L_1 \setminus L_2$

6) a) $\left((q,\alpha) \vdash^* (r,\lambda) \wedge (q,\alpha) \vdash^* (s,\lambda) \right) \Rightarrow r=s$

Por inducción en α

- $\alpha = \lambda$

$(q,\lambda) \vdash^* (r,\lambda) \wedge (q,\lambda) \vdash^* (s,\lambda) \rightarrow q = r = s$ por ser AFD

- $\alpha = a.\beta$ HI: $\left((q',\beta) \vdash^* (r,\lambda) \wedge (q',\beta) \vdash^* (s,\lambda) \right) \Rightarrow r=s$

$(q, a.\beta) \vdash^* (r,\lambda) \wedge (q, a.\beta) \vdash^* (s,\lambda) \rightarrow$

$\rightarrow (q', \beta) \vdash^* (r,\lambda) \wedge (q',\beta) \vdash^* (s,\lambda) \xrightarrow{HI} r=s$ ☑

b) $\left((q,\alpha) \vdash^* (q_1,\lambda) \wedge (q_1,\beta) \vdash^* (r,\lambda) \right) \rightarrow (q,\alpha\beta) \vdash^* (r,\lambda)$

$(q,\alpha\beta) \vdash^* (q_1,\beta)$ por hipótesis y determinismo. Luego
$(q_1,\beta) \vdash^* (r,\lambda)$ por hipótesis. Entonces vale $(q,\alpha\beta) \vdash^* (r,\lambda)$

c) $(q,\alpha\beta) \vdash^* (r,\lambda) \rightarrow \exists q_1 \left((q,\alpha) \vdash^* (q_1,\lambda) \wedge (q_1,\beta) \vdash^* (r,\lambda) \right)$

Por inducción en el tamaño de α y β

- $\alpha = \lambda$ y $\beta = \lambda$: $(q,\lambda) \vdash^* (r,\lambda)$ $\therefore$ $q_1 = q = r$
- $\alpha = \lambda$ y $|\beta| \geq 1$: $(q,\beta) \vdash^* (r,\lambda)$ entonces
 $(q,\lambda) \vdash^* (q_1,\lambda)$ con $q_1 = q$ y $(q_1,\beta) \vdash^* (r,\lambda)$ por hipótesis
- $|\alpha| \geq 1$ y $\beta = \lambda$
 $(q,\alpha) \vdash^* (r,\lambda)$ si tomamos $q_1 = r$ entonces vale
 $(q,\alpha) \vdash^* (q_1,\lambda) \wedge (\underset{r}{q_1},\underset{\lambda}{\beta}) \vdash^* (r,\lambda)$

Creo que no hace falta

- $|\alpha| \geq 1$ y $|\beta| \geq 1$
 $(q,\alpha\beta) \vdash^* (r,\lambda)$ esto implica (por definición de $\vdash^*$) que partiendo del estado q se puede consumir toda la cadena $\alpha\beta$ hasta llegar a el estado r.

Entonces tiene que existir necesariamente q_1 y q_1' tq
 $(q_1', \alpha_n\beta) \vdash (q_1,\beta)$ donde q_1' es el estado al que llega por consumir todas las letras menos la última de α (α_n). Es decir debe existir q_1 tq $(q,\alpha) \vdash^* (q_1,\lambda) \wedge (q_1,\beta) \vdash^* (r,\lambda)$

HOJA N°

FECHA

Esto último $(q_1, \beta) \vdash^* (r, \lambda)$ por hipótesis de que consumir toda la cadena nos deja en el estado r $(q, \alpha\beta) \vdash^* (r, \lambda)$

d) $(q, \alpha) \vdash^n (r, \lambda) \longleftrightarrow |\alpha| = n$

$\leftarrow$) si $|\alpha| = n$, se deben consumir sus n caracteres, por lo que se necesitan n transiciones y se llega a algún estado r. por ser un autómata determinístico (y supongo que completo)

$\rightarrow$) Por ser un autómata determinístico y completo (si no se agrega el estado trampa), si se consumen todos los caracteres de α en n transiciones, entonces $|\alpha| = n$

e) $(q, \alpha) \vdash^* (q, \lambda) \rightarrow \forall i \in \mathbb{N} ((q, \alpha^i) \vdash^* (q, \lambda))$

Por inducción en n.

- $n = 0$: $\alpha^0 = \lambda$ vale que $(q, \lambda) \vdash (q, \lambda)$

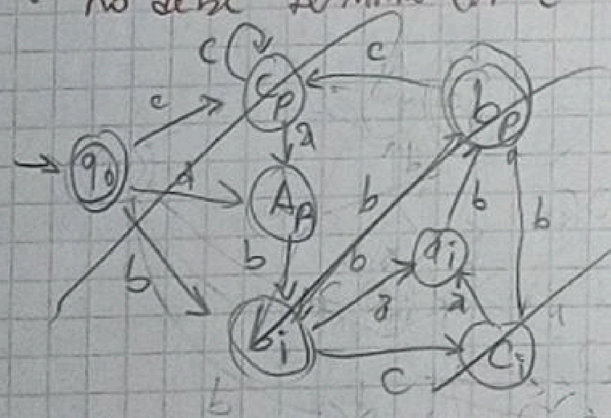
- Sup vale para $i < n$ $i \in \mathbb{N}$

qvq $(q, \alpha^n) = (q, \alpha \cdot \alpha^{n-1}) \vdash^* (q, \lambda) \longleftrightarrow$

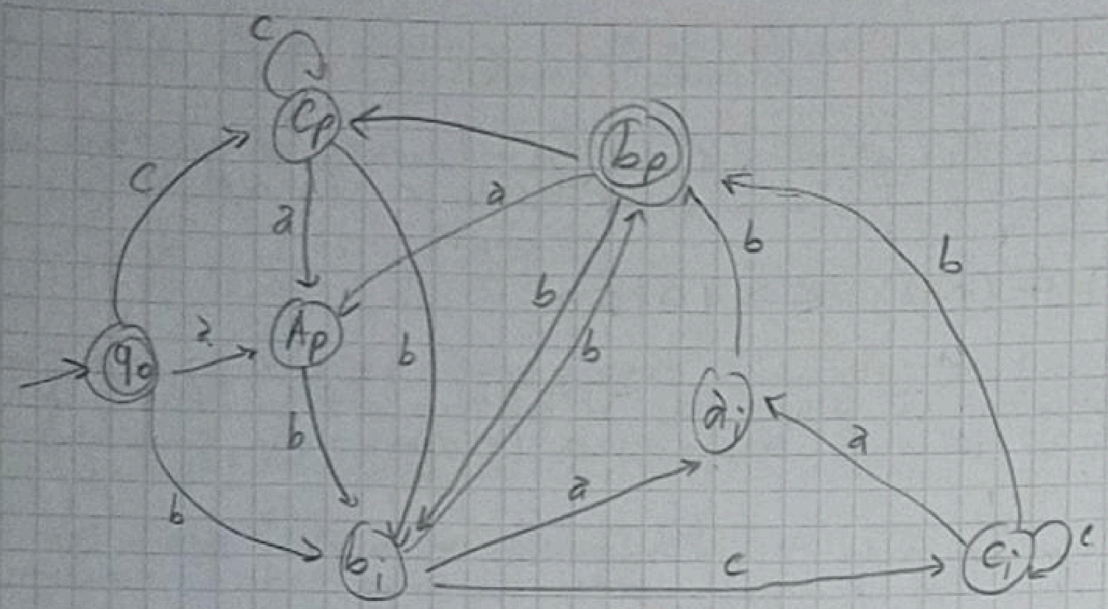
$(\exists s) ((q, \alpha) \vdash^* (s, \lambda) \wedge (s, \alpha^{n-1}) \vdash^* (q, \lambda)$

y por HI dicho s existe y $s = q$

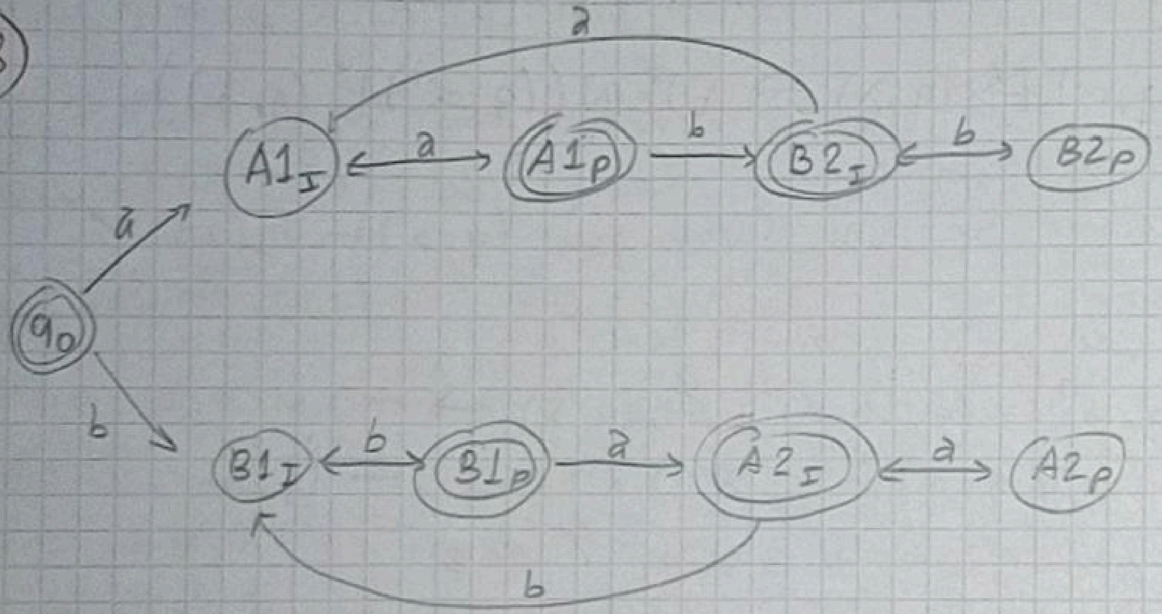
7) · a seguido de b $\Sigma = \{a, b, c\}$
· #b par
· no debe terminar en c



NOTA



8)



NOTA