Práctica 6: Autómatas de Pila y Pumping para lenguajes libres de contexto

Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad, FCEN-UBA

Primer Cuatrimestre 2025

Ejercicio 1. Para cada uno de los siguientes lenguajes, construir un autómata de pila que los acepte. Hacer una versión determinística en los casos en que sea posible.

a. $\{a^n b^n\}$.

b. $\{a^n b^m \mid m > n\}$.

c. $\{a^n b^m \mid m \neq n\}$.

d. $\{\omega \# \omega^r \mid \omega \in \{a, b\}^*\}$.

e. $\{\omega \omega^r \mid \omega \in \{a, b\}^*\}$.

f. $\{\omega \mid \omega \in \{a, b\}^* \wedge \omega = \omega^r\}$.

g. $\{\omega \mid \omega \in \{a, b\}^* \wedge \omega \neq \omega^r\}$.

h. $\{\omega \mid \omega \in \{a, b\}^* \wedge \omega_a = \omega_b\}$.

i. $\{\omega \mid \omega \in \{a, b\}^* \wedge \omega_a > \omega_b\}$.

j. $\{\omega \mid \omega \in \{a, b\}^* \wedge \omega_a \neq \omega_b\}$.

k. $\{\omega \mid \omega \in \{a, b\}^* \wedge \omega_a = 2\omega_b\}$.

l. $\{a^n b^m c^k \mid n \neq m \vee m \neq k\}$.

m. $\{a^n b^m \mid m = 2n\} \cup \{a^n c^m \mid n = 2m\}$.

n. Cadenas de paréntesis balanceados.

Ejercicio 2. Sea el autómata de pila $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\rangle$, donde:

$$Q = \{q_0, q_1\}, \qquad \Sigma = \{a, b, c\}, \qquad \Gamma = \{Z_0, A, B, C\}, \qquad F = \{q_0\},$$

$$\delta : \begin{array}{lcllcl} \delta(q_0, a, Z0) & = & (q_1, AZ_0) & \delta(q_0, b, Z_0) & = & (q_1, BZ_0) \\ \delta(q_1, a, A) & = & (q_1, AC) & \delta(q_1, b, B) & = & (q_1, BC) \\ \delta(q_1, c, A) & = & (q_1, \lambda) & \delta(q_1, c, B) & = & (q_1, \lambda) \\ \delta(q_1, c, C) & = & (q_1, \lambda) & \delta(q_1, \lambda, Z_0) & = & (q_0, Z_0) \end{array} .$$

Definir por comprensión el lenguaje generado por M.

Ejercicio 3. Dadas dos cadenas α y β, decimos que α es una subcadena *no contigua* de β si todos los caracteres de α aparecen en β exactamente en el mismo orden, pero de forma no necesariamente contigua. Por ejemplo, ab, aba y aaa son subcadenas no contiguas de $aabba$.

Sea $\mathcal{L}$ el siguiente lenguaje.

$$\mathcal{L} = \{\alpha\#\beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^* \text{ y } \alpha^r \text{ es una subcadena no contigua de } \beta\}.$$

Dar un autómata de pila que reconozca $\mathcal{L}$. ¿Es un autómata determinístico?

Ejercicio 4. Dado el alfabeto $\{\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow\}$, podemos interpretar una cadena como una serie de pasos a dar sobre una cuadrícula. Por ejemplo, siguiendo la cadena $\leftarrow\leftarrow\leftarrow\downarrow$, terminamos tres pasos al oeste y un paso al sur del lugar donde comenzamos.

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de las cadenas que terminan dos pasos al norte del punto inicial (sin importar cuántos pasos al este o al oeste), y en las que un paso al sur nunca es inmediatamente seguido por un paso al este. Por ejemplo, $\downarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow$ es una cadena de $\mathcal{L}$, mientras que $\rightarrow\downarrow\rightarrow$ y $\uparrow\downarrow\rightarrow\uparrow\uparrow$ no lo son.

Dar un autómata de pila que reconozca $\mathcal{L}$. ¿Es un autómata determinístico?

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje sobre $\{(a, b, "[", "]", ",")\}$ cuyas cadenas son listas no vacías de elementos separados por comas y encerrados entre corchetes, siendo cada elemento una cadena $\alpha \in \{a,b\}^*$ tal que $\alpha_a = 1 + \alpha_b$. Dar un autómata de pila que reconozca $\mathcal{L}$.

Ejercicio 6. Demostrar que el lenguaje $\mathcal{L} = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ no es libre de contexto.

Ejercicio 7. Demostrar que el lenguaje $\mathcal{L} = \{a^i b^j c^k : 0 \leq i \leq j \leq k\}$ no es libre de contexto.

Ejercicio 8. Demostrar que el lenguaje $\mathcal{L} = \{a^i b^j c^i d^j : i, j \geq 0\}$ no es libre de contexto.

Ejercicio 9. Demostrar que el lenguaje $\mathcal{L} = \{\omega\omega : \omega \in \{0,1\}^*\}$ no es libre de contexto.

Ejercicio 10. Demostrar que el lenguaje $\mathcal{L} = \{\omega\omega^r\omega : \omega \in \{0,1\}^*\}$ no es libre de contexto.