Δομές Δεδομένων και Αλγόριθμοι

Χρήστος Γκόγκος

ΤΕΙ Ηπείρου, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής ΤΕ

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015
(Παρουσίαση 6)

Ρυθμοί αύξησης

- Γραμμικός ρυθμός αύξησης: $n, 2n,$
- Πολυωνυμικός ρυθμός αύξησης: n^2, n^3
- Εκθετικός ρυθμός αύξησης: $2^n, e^n, 10^n$
- Ρυθμός αύξησης παραγοντικού: $n!, n^n$

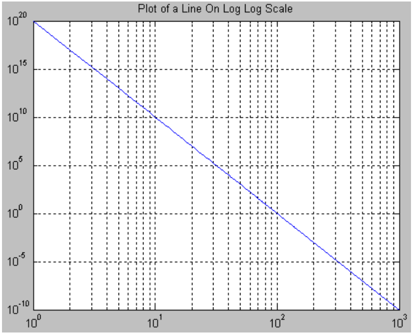
για μέγεθος εισόδου $n = 1000$	
n	10^3
n^2	10^6
n^3	10^9
2^n	10^{300}
e^n	10^{434}
10^n	10^{1000}
$n!$	10^{2566}
n^n	10^{3000}

$$log_b a$$

Λογάριθμος: Πόσες φορές πρέπει να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό b (την βάση) για να φτάσουμε σε έναν αριθμό a
π.χ. $log_2 16 = 4$ διότι $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

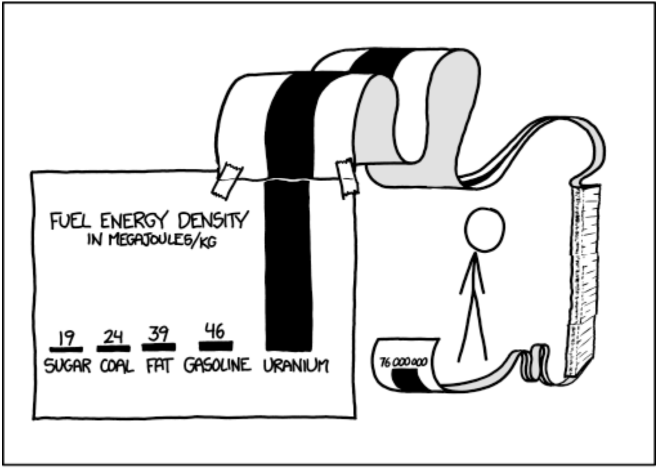
Λογαριθμική κλίμακα

Η λογαριθμική κλίμακα χρησιμοποιείται όταν χρειάζεται να απεικονιστούν ταυτόχρονα μικρές και μεγάλες τιμές σε ένα γράφημα. Σε μια λογαριθμική κλίμακα με βάση το 10 αύξηση μιας μονάδας στην κλίμακα αντιστοιχεί σε δεκαπλασιασμό της αντίστοιχης ποσότητας ενώ μείωση μιας μονάδας στην κλίμακα αντιστοιχεί σε υποδεκαπλασιασμό της αντίστοιχης ποσότητας.



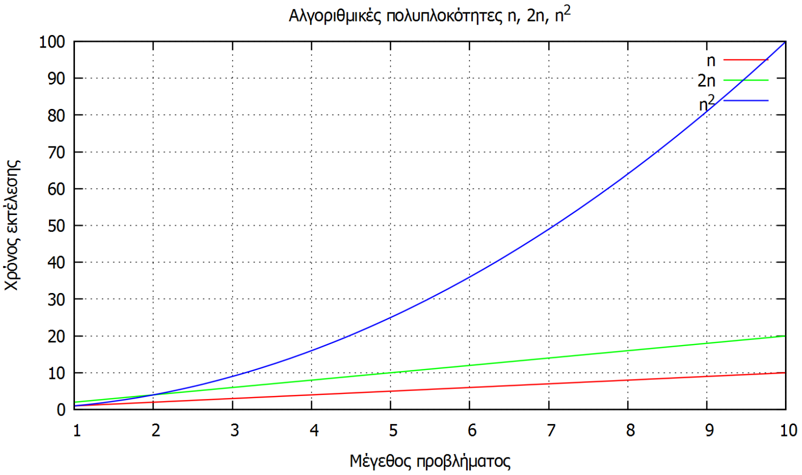
$F(x) = (x^{-10})(10^{20}) \rightarrow log(F(x)) = -10log(x) + 20$

xkcd Log Scale

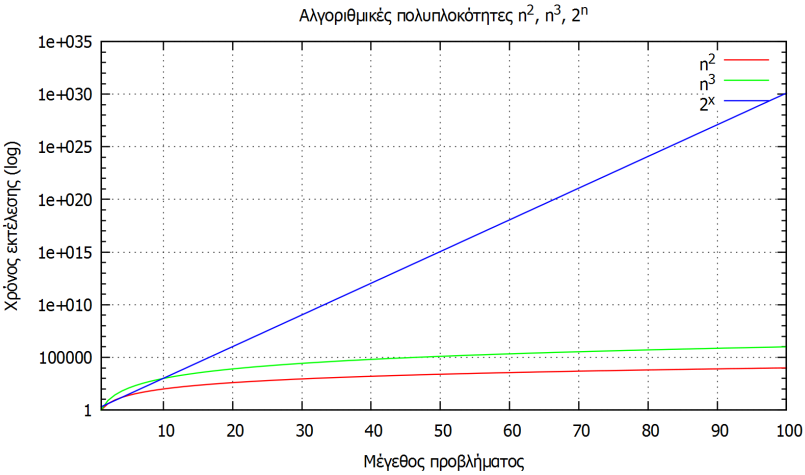


SCIENCE TIP: LOG SCALES ARE FOR QUITTERS WHO CAN'T FIND ENOUGH PAPER TO MAKE THEIR POINT *PROPERLY.*

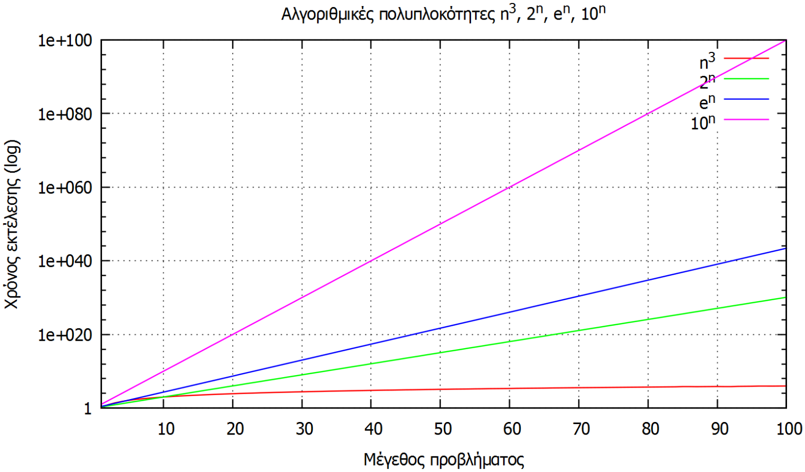
Γραμμική συνάρτηση - Πολυωνυμική (τετραγωνική) συνάρτηση



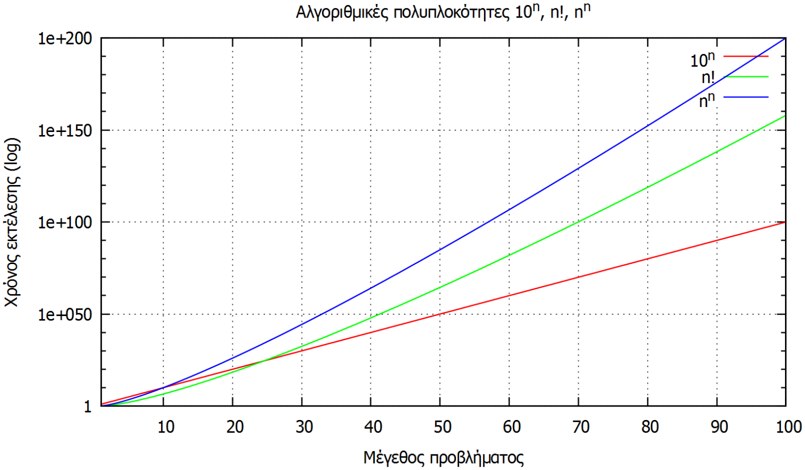
Τετραγωνική συνάρτηση - Κυβική συνάρτηση - Εκθετική συνάρτηση



Κυβική συνάρτηση - Εκθετικές συναρτήσεις



Εκθετική συνάρτηση - Συναρτήσεις παραγοντικού



Ασυμπτωτικός συμβολισμός

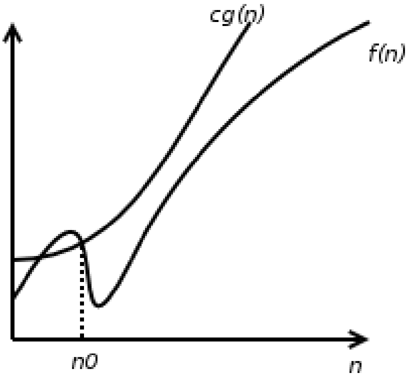
Προτάθηκε από τον D. Knuth το 1976

Ο ασυμπτωτικός συμβολισμός είναι ένας χρήσιμος τρόπος εκτίμησης της χρονικής ή χωρικής πολυπλοκότητας ενός αλγορίθμου για μεγάλα στιγμιότυπα προβλημάτων.

Τοποθετεί ένα άνω όριο κόστους στην εκτέλεση του αλγορίθμου

Ο συμβολισμός Ο

Η $f(n) = O(g(n))$ αν υπάρχουν θετικές σταθερές c, n_0 τέτοιες ώστε $f(n) \leq cg(n)$ για κάθε $n \geq n_0$



$f(n) = O(g(n))$ αν

$$\lim_{n \to \inf} \frac{f(n)}{g(n)} = c$$

όπου c είναι μια σταθερά

Πρακτική θεώρηση του συμβολισμού O

Μια συνάρτηση $f(n)$ είναι $O(g(n))$ αν για επαρκώς μεγάλα n η $f(n)$ είναι άνω φραγμένη από ένα πολλαπλάσιο του $g(n)$

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = 2n + 10$ είναι $O(n)$

Αν η $f(n) = 2n + 10$ είναι $O(n)$ θα πρέπει να υπάρχουν θετικές θετικές σταθερές c, n_0 έτσι ώστε να ισχύει
$2n + 10 \leq cn \quad \forall n \geq n_0$

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = 2n + 10$ είναι $O(n)$

Αν η $f(n) = 2n + 10$ είναι $O(n)$ θα πρέπει να υπάρχουν θετικές θετικές σταθερές c, n_0 έτσι ώστε να ισχύει
$2n + 10 \leq cn \quad \forall n \geq n_0$
$(c - 2)n \geq 10 \rightarrow n \geq \frac{10}{c-2}$
Μπορούμε να επιλέξουμε $c = 3$ και $n_0 = 10$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω ανισότητα

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = n^2$ δεν είναι $O(n)$

Αν η $f(n) = n^2$ ήταν $O(n)$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι $n^2 \leq cn$ για κάποιες θετικές σταθερές c και n_0 και $\forall n \geq n_0$

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = n^2$ δεν είναι $O(n)$

Αν η $f(n) = n^2$ ήταν $O(n)$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι $n^2 \leq cn$ για κάποιες θετικές σταθερές c και n_0 και $\forall n \geq n_0$
Όμως αν ισχύει $n^2 \leq cn \rightarrow n \leq c$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά c μεγαλύτερη ή ίση από οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο των ακεραίων τιμών (άτοπο άρα δεν ισχύει η αρχική υπόθεση ότι η n^2 ήταν $O(n)$).

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = 2^{n+5}$ είναι $O(2^n)$

Αν η $f(n) = 2^{n+5}$ είναι $O(2^n)$ θα πρέπει να ισχύει ότι
$2^{n+5} \leq c2^n \qquad \forall n \geq n_0$ για κάποιες θετικές σταθερές c και n_0

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = 2^{n+5}$ είναι $O(2^n)$

Αν η $f(n) = 2^{n+5}$ είναι $O(2^n)$ θα πρέπει να ισχύει ότι
$2^{n+5} \leq c2^n \qquad \forall n \geq n_0$ για κάποιες θετικές σταθερές c και n_0
Ισχύει ότι $2^{n+5} = 2^n 2^5 = 2^n 32$. Άρα αν επιλεγεί ως c η τιμή 32 και ως n_0 η τιμή 1 τότε ισχύει ότι $2^{n+5} <= 32 \cdot 2^n \qquad \forall n \geq 1$

Παράδειγμα 4

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ είναι $O(n^k)$

$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \leq$
$|a_k| n^k + |a_{k-1}| n^{k-1} + \cdots + |a_1| n + |a_0| \leq$
$|a_k| n^k + |a_{k-1}| n^k + \cdots + |a_1| n^k + |a_0| n^k$
Άρα για $c = |a_k| + |a_{k-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$ και $n_0 = 1$ ισχύει ότι
$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \leq c n^k \qquad \forall n \geq 1$

Παράδειγμα 5

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = 2^{5n}$ δεν είναι $O(2^n)$

Αν η $f(n) = 2^{5n}$ ήταν $O(2^n)$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι
$2^{5n} \leq c2^n \qquad \forall n \geq n_0$ για κάποιες θετικές σταθερές c και n_0

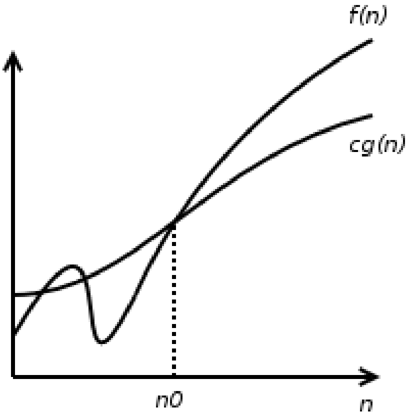
Παράδειγμα 5

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = 2^{5n}$ δεν είναι $O(2^n)$

Αν η $f(n) = 2^{5n}$ ήταν $O(2^n)$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι
$2^{5n} \leq c2^n \qquad \forall n \geq n_0$ για κάποιες θετικές σταθερές c και n_0
Όμως αν ισχύει $2^{5n} \leq c2^n \rightarrow \frac{2^{5n}}{2^n} \leq \frac{c2^n}{2^n} \rightarrow 2^{4n} \leq c$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά c μεγαλύτερη ή ίση από μια αυθαίρετα μεγάλη τιμή η οποία μπορεί να σχηματιστεί επιλέγοντας κατάλληλο n (άτοπο άρα δεν ισχύει η αρχική υπόθεση ότι η $f(n) = 2^{5n}$ είναι $O(2^n)$).

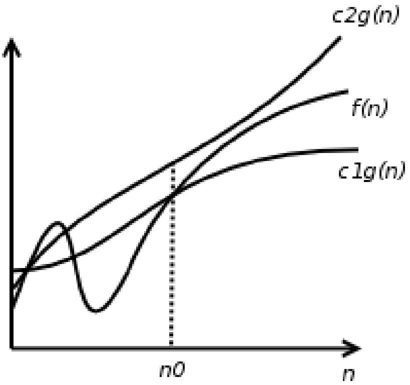
Ο συμβολισμός Ω

Η $f(n) = \Omega(g(n))$ αν υπάρχουν θετικές σταθερές c, n_0 τέτοιες ώστε $f(n) \geq cg(n)$ για κάθε $n \geq n_0$
δηλαδή για επαρκώς μεγάλα n ισχύει ότι το $f(n)$ είναι κάτω φραγμένο από ένα πολλαπλάσιο του $g(n)$



Ο συμβολισμός Θ

Η $f(n) = \Theta(g(n))$ αν υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2, n_0 τέτοιες ώστε
$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ για κάθε $n \geq n_0$
δηλαδή για επαρκώς μεγάλα n ισχύει ότι το $f(n)$ είναι φραγμένο από πάνω και από κάτω από πολλαπλάσια του $g(n)$



Οι συμβολισμοί ο, ω, θ

Οι συμβολισμοί ο, ω, θ διαφέρουν από τους αντίστοιχους Ο, Ω, Θ στο ότι είναι αυστηρότεροι καθώς επιβάλλουν για κάθε σταθερά $c > 0$ να υπάρχει σταθερά n_0 έτσι ώστε να ισχύει η κατά περίπτωση ανισότητα
Για παράδειγμα στην περίπτωση του συμβολισμού ο θα πρέπει να ισχύει ότι $f(n) \leq cg(n)$ για κάθε θετική σταθερά c και για κάθε $n \leq n_0$

Αναφορές

- http://cs.anu.edu.au/~Alistair.Rendell/Teaching/apac_comp3600/module1/growth_of_functions.xhtml
- http://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_scale
- http://xkcd.com/1162/