

Δομές Δεδομένων και Αλγόριθμοι

Χρήστος Γκόγκος

ΤΕΙ Ηπείρου

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015
Παρουσίαση 10. The Master Theorem

The Master Theorem

Έστω μια αναδρομική εξίσωση της μορφής

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \quad f(n) = O(n^d)$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι:

- ❶ a = αριθμός αναδρομικών κλήσεων ≥ 1
- ❷ b = συντελεστής συρρίκνωσης του προβλήματος > 1
- ❸ d = εκθέτης του n για τον αλγοριθμικό χρόνο που απαιτεί το μη αναδρομικό τμήμα του αλγορίθμου

τότε ισχύει:

- $T(n) = O(n^d \log n)$ αν $a = b^d$
- $T(n) = O(n^d)$ αν $a < b^d$
- $T(n) = O(n^{\log_b a})$ αν $a > b^d$

Εφαρμογή του Master Theorem στην ταξινόμηση με συγχώνευση MergeSort

Ποια είναι η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα της MergeSort
 $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$;

Προκύπτει από την αναδρομική σχέση ότι $a = 2, b = 2, d = 1$
Άρα $a = b^d$ καθώς $2 = 2^1$ και συνεπώς η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα είναι $O(n \log n)$

Εφαρμογή του Master Theorem στη δυαδική αναζήτηση (Binary Search)

Ποια είναι η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα της BinarySearch
 $T(n) = T(\frac{n}{2}) + O(1)$;

Προκύπτει από την αναδρομική σχέση ότι $a = 1, b = 2, d = 0$
Άρα $a = b^d$ καθώς $1 = 2^0$ και συνεπώς η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα είναι $O(\log n)$

Ποια είναι η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα της αναδρομικής σχέσης $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n)$;

Προκύπτει από την αναδρομική σχέση ότι $a = 3, b = 2, d = 1$
Άρα $a > b^d$ καθώς $3 > 2^1$ και η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα είναι $O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.58})$

Ποια είναι η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα της αναδρομικής σχέσης $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + O(n^2)$;

Προκύπτει από την αναδρομική σχέση ότι $a = 3, b = 3, d = 2$
Άρα $a > b^d$ καθώς $3 < 2^2 = 4$ και η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα είναι $O(n^3)$