

Δομές Δεδομένων και Αλγόριθμοι

Χρήστος Γκόγκος

ΤΕΙ Ηπείρου

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015
Παρουσίαση 9. P vs NP

Δυσκολία επίλυσης υπολογιστικών προβλημάτων

- Κάποια προβλήματα είναι "εύκολα" να λυθούν με την χρήση υπολογιστών ενώ κάποια άλλα είναι δύσκολα.
- "Εύκολα" προβλήματα (tractable): Υπάρχει ή μπορεί να βρεθεί αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να τα επιλύει.
- Δύσκολα προβλήματα (intractable): Προβλήματα στα οποία δεν έχει βρεθεί αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για την επίλυσή τους.

Παραδείγματα εύκολων προβλημάτων

- Ταξινόμηση μιας λίστας αριθμών
- Αναζήτηση μιας λέξης σε ένα κείμενο
- Πρόβλημα εύρεσης της συντομότερης διαδρομής σε ένα γράφο
- Πρόβλημα εύρεσης του ελάχιστου συνεκτικού δένδρου σε ένα γράφο

Παραδείγματα δύσκολων προβλημάτων

- Πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή
- Παραγοντοποίηση σε πρώτους αριθμούς ενός μεγάλου ακεραίου
- Χρονοπρογραμματισμός προσωπικού

Τα προβλήματα απόφασης μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε διαφορετικές ομάδες με συγκρίσιμες πολυπλοκότητες που ονομάζονται κλάσεις πολυπλοκότητας. Οι βασικές κλάσεις πολυπλοκότητας είναι

- P: Είναι το σύνολο των προβλημάτων απόφασης που μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο
- NP: Είναι το σύνολο των προβλημάτων απόφασης στα οποία μια προτεινόμενη λύση μπορεί να επαληθευτεί ότι αποτελεί λύση σε πολυωνυμικό χρόνο. Δηλαδή αν έχουμε τη λύση μπορούμε να επαληθεύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ότι όντως αποτελεί λύση

Παράδειγμα ενός NP προβλήματος

Έστω ότι πρέπει να επιλέξετε 100 από τους 400 φοιτητές ενός Πανεπιστημίου οποίοι θα εισαχθούν στην εστία. Ωστόσο θα πρέπει να ληφθεί υπόψη μια λίστα από ζεύγη "μη συμβατών μεταξύ τους" ατόμων. Στην τελική λύση που θα παρουσιάσετε δεν θα πρέπει να υπάρχουν άτομα που σχηματίζουν κάποιο από τα απαγορευμένα ζευγάρια.

Ο αριθμός των πιθανών λύσεων του προβλήματος είναι $C(400, 100) = \frac{400!}{100!300!}$

Για ένα NP πρόβλημα ισχύει ότι:

- Είναι εύκολο να ελεγχθεί αν μια προτεινόμενη λύση είναι εφικτή.
- Δεν είναι εύκολο να παραχθεί λύση από το μηδέν.

NP complete προβλήματα)

Ένα πρόβλημα απόφασης είναι NP Complete αν:

1. Ανήκει στην κλάση προβλημάτων NP
2. Κάθε πρόβλημα στην κλάση προβλημάτων NP μπορεί να μετασχηματιστεί με έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο σε αυτό (polynomial reducible)

CNF - satisfiability problem

Δίνεται μια λογική έκφραση η οποία αναπαρίσται σε μορφή Conjunctive Normal Form και ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει είσοδος τιμών που να την κάνει Αληθή

$$(x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \& (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_4)$$

Το ερώτημα $P \stackrel{?}{=} NP$

Το ερώτημα $P \stackrel{?}{=} NP$ αφορά το αν όλα τα NP προβλήματα είναι στην πραγματικότητα P προβλήματα. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι άγνωστη προς το παρόν Σε περίπτωση που ισχύει ότι $P=NP$ αυτό θα είχε δραματικές επιπτώσεις στην ταχύτητα με την οποία μπορούν να λυθούν δύσκολα σημαντικά προβλήματα. Η πλειονότητα των επιστημόνων εκτιμά ότι $P \neq NP$.

Το πρόβλημα του σακιδίου (Knapsack)

Έστω ότι έχετε να επιλέξετε από ένα αριθμό αντικειμένων εκείνα τα οποία θα πάρετε μαζί σας. Κάθε αντικείμενο έχει βάρος και αξία. Το πρόβλημα του σακιδίου έχει να κάνει με την επιλογή του συνόλου εκείνου των αντικειμένων που θα έχουν συνολικά την υψηλότερη αξία και δεν θα υπερβαίνουν το βάρος που μπορείτε να αντέξετε κουβαλώντας το σακίδιο.

Το πρόβλημα της διαμέρισης (Partition)

Δεδομένων n θετικών αριθμών να βρεθεί αν υπάρχει διαμερισμός τους σε δύο ξένα υποσύνολα που να έχουν το ίδιο άθροισμα.

Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή (Traveling Salesman Problem)

Ένας πωλητής θέλει να επισκεφτεί όλες τις πόλεις μιας περιοχής και να επιστρέψει στη πόλη από την οποία ξεκίνησε. Ζητείται η διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει έτσι ώστε να διανύσει την μικρότερη δυνατή απόσταση.

Το πρόβλημα χρωματισμού γράφου (Graph Coloring)

Δίνεται ένας γράφος. Ζητείται ο χρωματισμός του έτσι ώστε να μην υπάρχουν 2 γειτονικές κορυφές που να έχουν το ίδιο χρώμα.

Το πρόβλημα του Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού

Ένα πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού αφορά γραμμικές σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και ζητά την εύρεση της βέλτιστης λύσης για μια συνάρτηση στόχο υπό την παρουσία κάποιων περιορισμών. Ορισμένες από τις μεταβλητές μπορούν να λάβουν μόνο ακέραιες τιμές.