Parametrikus oszcillátor szimulációja

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék

IMSC Házi feladat

Jelek és rendszerek 2 (BMEVIHVAB02 2024/25/1)

Szerző:

Kovács Levente (F5UHYT)

Konzulens:

Dr. Gyimóthy Szabolcs

2025. január 24.

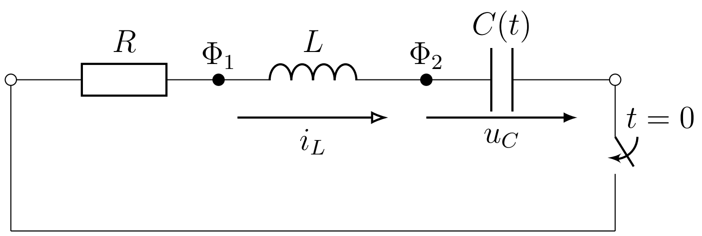
Tartalomjegyzék

Kivonat

A parametrikus oszcillátorok olyan rendszerek, amelyekben az egyik vagy több paraméter időben változik. Az ilyen oszcillátorok fontos szerepet játszanak számos fizikai és mérnöki alkalmazásban. Általánosságban, ha egy olyan (sokszor lineáris, vagy lineáris modellel közelített) fizikai rendszer egyik paraméterét időben periodikus változásra kényszerítjük, amely önmagában magára hagyva is periodikus természetű viselkedést mutat, akkor érdekes jelenségeket figyelhetünk meg többek között a rendszer összenrgiájával és az oszcillációjának amplitúdójával kapcsolatban.

Ebben a feladatban egy elektromos parametrikus oszcillátor, pontosabban egy soros RLC kör szimulációját mutatom be egy általam MATLAB környezetben készített szimuláció segítségével. A szimuláció célja, hogy megvizsgálja és szemléletessé tegye az absztrakt rendszer viselkedését különböző paraméterek és kezdeti feltételek mellett. Az eredményeket LTspice szimulációk segítségével validáltam.

1. RLC kör és matematikai modell



1. ábra. RLC soros rezgőkör.

A szimulációmat egy soros RLC körre végeztem (1. ábra). Az áramkör forrást ugyan nem tartalmaz, de nem energiamentes: $u_C(0) \neq 0$. További kezdeti feltételként megszabtam még továbbá, hogy a tekercs energiamentes állapotban van ($i_L(0) = 0$).

A kondenzátor kapacitását az alábbi (1) időfüggvény írja le:

$$C(t) = C_0 \left[1 + c \cdot \sin(\omega_p t)\right] \tag{1}$$

, melynek deriváltja

$$\frac{dC(t)}{dt} = C' = C_0 \cdot c \cdot \omega_p \cdot \cos(\omega_p t) \tag{2}$$

, ahol C_0 a kondenzátor alap kapacitása, c a kapacitás "pumpálás" amplitúdója, ω_p pedig a körfrekvenciája.

Ennek megfelelően az időfüggő kapacitású kondenzátor karakterisztikája a következő módon kapható:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= \frac{d}{dt}(C(t) \cdot u_c(t)) \\ i_C(t) &= C(t) \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} \cdot u_c(t) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\boxed{i_C = C(t) \cdot u_C' + C' \cdot u_c(t)} \tag{4}$$

Ezzel és a hagyományos (konstans induktivitású) tekercs karakterisztikával ($u_L = Li'_L$) már a Φ_1-es és a Φ_2-es potenciálú csomópontra (1) felírhatjuk a csomóponti egyenleteket:

$$\begin{aligned} \frac{u_C + Li'_L}{R} + i_L = 0 \\ -i_L + Cu'_C + C'u_C = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

, melyekből az Állapotváltozós Leírás Normálalakja (ÁVLNA) könnyedén előállítható:

$$\boxed{\begin{aligned} u'_C &= \frac{i_L}{C} - \frac{C'u_C}{C} \\ i'_L &= -\frac{u_C}{L} - \frac{Ri_L}{L} \end{aligned}} \tag{6}$$

Ezzel megkaptuk a parametrikus oszcillátorunk állapotváltozóit (jelen esetben a kondenzátor u_C feszültségét és a tekercs i_L áramát) leíró differenciálegyenlet-rendszert.

2. Numerikus megoldás és szimuláció

Az előállított differenciálegyenlet rendszert MATLAB környezetben könnyedén meg lehet oldani.

Először a kódban definiálom az ellenállás R [Ohm], a tekercs induktivitás L [Henry], az alapkapacitás C_0 [Farad], a kondenzátor kezdőfeszültség U_0 [Volt] és a kapacitás pumpálás amplitúdó c (esetlegesen a körfrekvencia ω_p [rad/s]) értékeket. Ezekből a kód kiszámítja az $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$ képlet alapján a soros RLC kör sajátfrekvenciáját és alapesetben beállítja a kapacitáspumpálás körfrekvenciáját ennek a kétszeresére $\omega_p = 2\omega_0$:

```
% Parameterek SI-ben
R = 5;                      % Ellenallas (ohm)
L = 10e-3;                  % Induktivitas (H)
C0 = 10e-6;                 % Alapkapacitas (F)

c = 0.4;                    % Kapacitas valtozas (pumpalas) amplitudoja
U0 = 5;                     % Kezdo feszultseg (V)

omega_0 = 1/sqrt(L*C0);     % Rezonancia korfrekvencia (rad/s)
omega_p = 2 * omega_0;      % Pumpalas korfrekvencia (rad/s)
```

Ezután a kapacitás időfüggvényét és az analitikus úton kapott deriváltját, illetve az ÁVLNA differenciálegyenleteit definiálom:

```
% Differencialegyenlet megoldasa
% Allapotvaltozok: x(1) = U_C (kondenzator feszultsege), x(2) = I (aram)
C_t = @(t) C0 * (1 + c * sin(omega_p * t)); % Kapacitas idofuggvenye
dC_dt = @(t) c * omega_p * C0 * cos(omega_p * t); % Kapacitas idoderivaltja

dxdt = @(t, x) [
    1/C_t(t) * x(2) - dC_dt(t)/C_t(t) * x(1); % dU_C/dt = 1/C(t) * I - dC/dt/C(t) * U_C
    -x(1)/L - R/L * x(2)                       % dI/dt = -U_C/L - R/L * I
    ];
```

Végül a szimuláció időtartama, a kezdeti feltételek ($u_c(0)$ és $i_L(0)$) és az `ode45` solver opciói beállításra kerülnek és meghívom az `ode45` megoldó függvényt.

```
% Idotartomany
tspan = [0, 30e-3]; % Szimulacio idotartama (s)

% Kezdeti feltetelek
x0 = [U0; 0]; % U_C(0) = U0, I(0) = 0

% ode45 opciok (RelTol, AbsTol, MaxStep)
options = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-10,'MaxStep',1e-6, 'Stats', 'on', 'OutputFcn', @odeplot);

% Megoldas ode45-tel
[t, x] = ode45(dxdt, tspan, x0, options);
```

A szimuláció időtartamát akár automatikusan is be lehetne állítani az rezgőkör időállandója alapján ($3\tau \ldots 10\tau$), de ennek megválasztását a felhasználóra hagyom. Az `ode45` függvény alapesetben a Runge-Kutta-módszerrel oldja meg az átadott differenciálegyenlet-rendszert, ám tapasztalataim alapján a beépített funkciója gyakran túl nagy lépésközt választ, ezért szükséges specifikálni a `MaxStep` maximum időlépési közt a szimuláció hoszabb időtartamú stabilitása miatt (alapesetben ez 1 ns-ra van választva), illetve hasznos és érdekes látni, ahogy a solver folyamatában oldja az egyenleteket, így a `'Stats', 'on', 'OutputFcn', @odeplot` opciók is alapesetben definiálva lettek (természetesen ezek nem feltétlenül szükségesek a szimuláció működéséhez).

A végső eredmény, amely a `[t, x]` vektor(ok)-ban vannak tárolva ki is lesz plotolva.

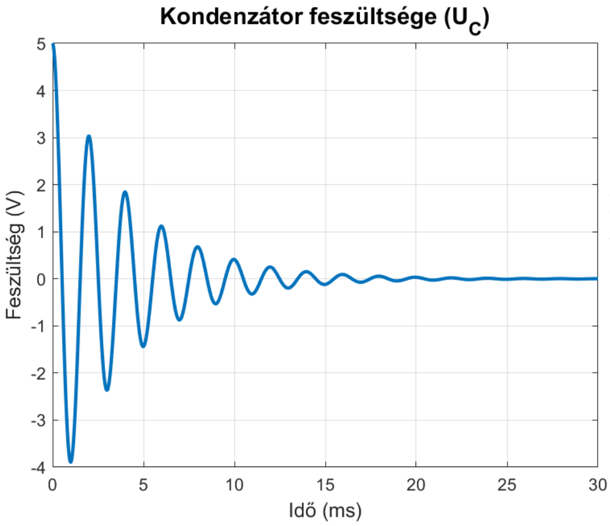
3. A körfrekvenciák és a működés viszonya

3.1. Szimuláció

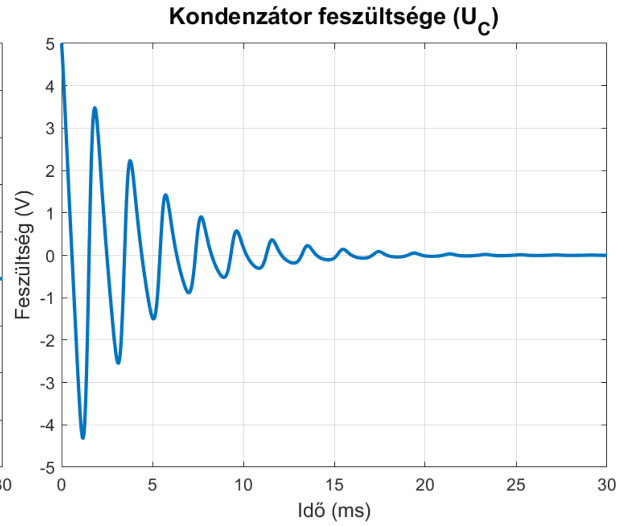
A szimuláció elsődleges célja a töltéspumpálás $C(t)$ ω_p és a rezgőkör (konstans C_0 kapacitás esetén) ω_0 sajátfrekvenciája közötti viszonyának és a kialakuó oszcilláció viselkedésének vizsgálata.

Vizsgálataim a kondenzátor feszültségének időfüggvényére fókuszáltak. A szimulációt az alábbi paraméterekkel végeztem el 4 különböző ω_p/ω_0 arányra:

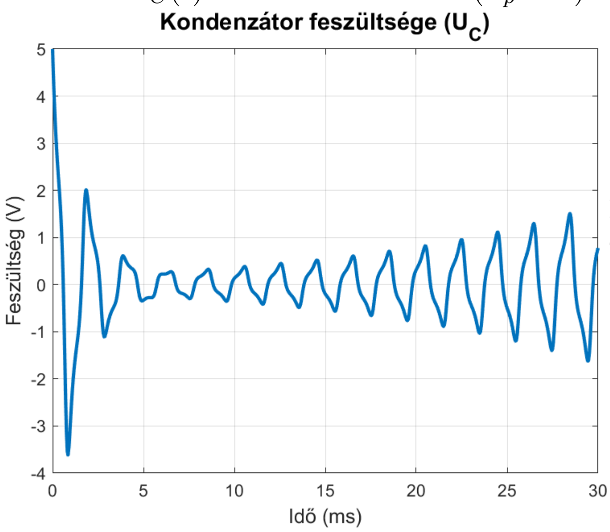
- $R = 5\Omega$
- $L = 10mH$
- $C_0 = 10\mu F$
- $c = 0.4$
- $u_C(0) = 5V$



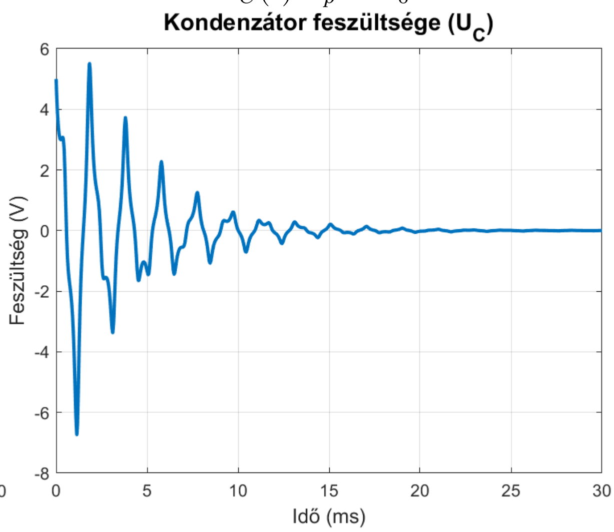
2. ábra. $u_C(t)$ konstans C esetén ($\omega_p = 0$).



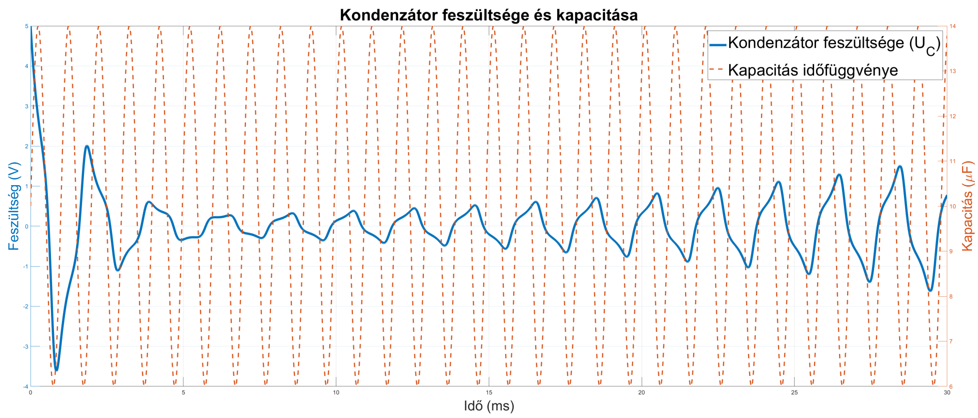
3. ábra. $u_C(t)$ $\omega_p = \omega_0$ esetén.



4. ábra. $u_C(t)$ $\omega_p = 2\omega_0$ esetén.



5. ábra. $u_C(t)$ $\omega_p = 3\omega_0$ esetén.



6. ábra. A kondenzátor kapacitásának időfüggvénye $C(t)$ $\omega_p = 2\omega_0$ esetén.

3.2. Eredmények

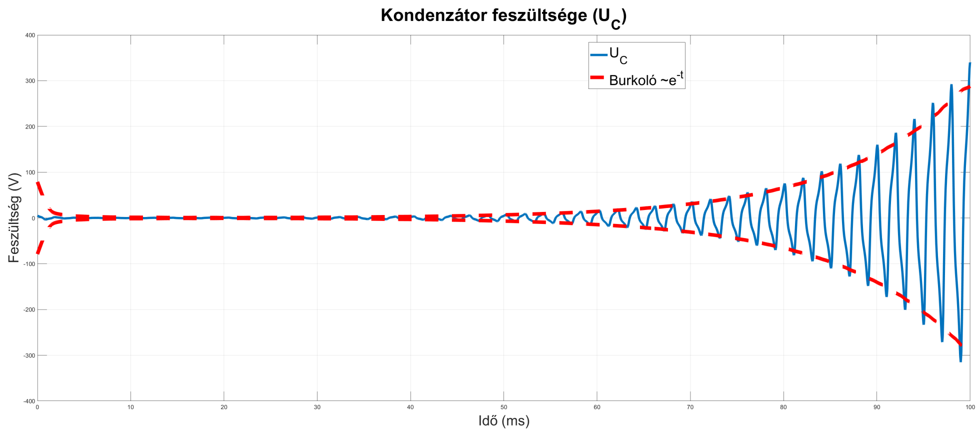
Megfigyelések

A szimulációs eredmények érdekes jelenségeket mutatnak a különböző ω_p/ω_0 arányok esetén.

- **Konstans kapacitás ($\omega_p = 0$):** A 2. ábrán látható, hogy a kondenzátor feszültsége csillapodó rezgést mutat, amely a klasszikus RLC kör viselkedésének felel meg.
- $\boldsymbol{\omega_p = \omega_0}$: A 3. ábrán a kapacitás időbeli változásától függetlenül hasonló jelenséget figyelhetünk meg.
- $\boldsymbol{\omega_p = 2\omega_0}$: A 4. ábrán látható, hogy a kondenzátor feszültsége először csökken, majd **exponenciális növekedésnek indul**.
- $\boldsymbol{\omega_p = 3\omega_0}$: Az 5. ábrán látható, hogy a kondenzátor feszültsége ismét csillapodó rezgést mutat, hasonlóan a konstans kapacitás esetéhez.

Parametrikus rezonancia, gerjesztési feltételek

A jelenség, amit a 4. ábrán megfigyelhetünk egyértelműen magyarázható. Eleinte a kondenzátor feszültségének beesését figyelhetjük meg (7 ms-ig), ami a kezdőfeltételeknek köszönhető. Mivel a tekercs energiamentes bekapcsoláskor ($i_L(0) = 0$), ezért a kondenzátorban tárolt energia egyy része átalakul a tekercsben mágneses térben tárolt energiává.



7. ábra. Hosszabb szimuláció (100 ms) $\omega_p = 2\omega_0$ esetén.

Az utána következő ($t \gtrsim 7ms$) időtartományban a kondenzátor feszültsége exponenciális növekedésnek indul (7. ábra). Ebből egyértelműen látszik, hogy a rendszer teljes energiája növekszik. A többi szimulációból egyértelműen látszik az is, hogy ahhoz, hogy többlet energiával lássuk el a rendszert (többel, mint ami a csillapító ellenálláson disszipálódik), bizonyos feltételeknek meg kell felelnie a paraméter gerjesztésének.

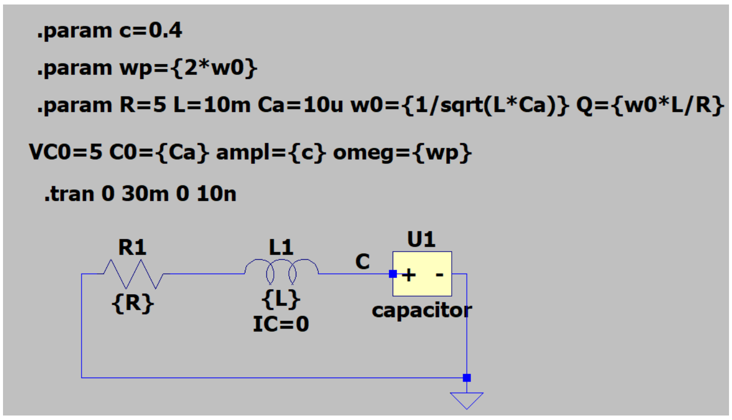
Az egyik ilyen feltétel az a körfrekvenciák arányára vonatkozik. A legerősebb parametrikus gerjesztés (vagyis a rendszer legtöbb többlet energiával való ellátása) akkor lehetséges, ha a paraméter modulációjának két teljes periódusa lezajlik az alap rendszer rezgéseinek 1 periódusa alatt [1]. Ebből megfogalmazhatunk a körfrekvenciák arányára is egy feltételt:

$$\boxed{\begin{array}{l} T_p = nT_0/2 \\ \omega_p = 2\omega_0/n \end{array}} \tag{7}$$

, ahol $n = 1, 2, \ldots$ és a legerősebb erősítés $n = 1$ esetén van, **vagyis** $\boldsymbol{\omega_p = 2\omega_0}$.

További feltételek fogalmazhatók meg a paraméter gerjesztésének c amplitúdójára (többek között az $\alpha = \frac{R}{2L}$ csillapítási tényező és az ún. Q minőségi tényező segítségével) és fázisára is , de ezek a feladat vizsgálati körén kívül esnek.

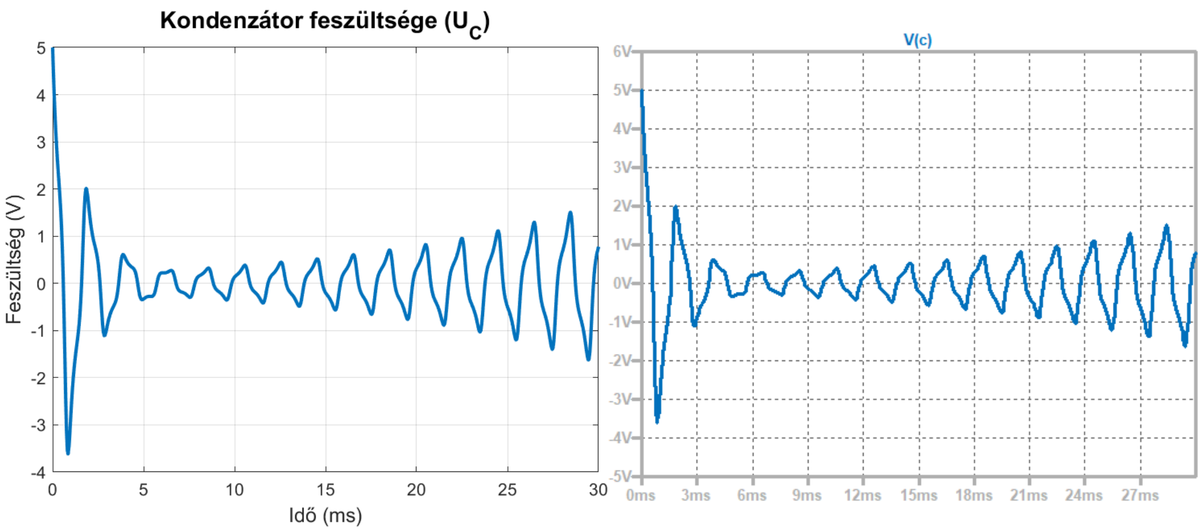
Validáció



8. ábra. LTSpice kapcsolási rajz és használt paraméterek.

Az eredményeimet és a MATLAB szimuláció helyességét egy LTSpice szimulációval validáltam. A változó kapacitású kondenzátort az alábbi subcircuit-tel valósítottam meg:

```
.subckt capacitor + - params: VC0=0 C0=1n ampl=0.1 omeg=0.0632G
.func C(time) {C0*(1+ampl*sin(omeg*time))}
hvolt + - value={(sdt(I(hvolt))+VC0*C(0))/C(time)}
.ends
```



9. ábra. MATLAB szimuláció (bal) és LTSpice validáció (jobb).

Ábrák jegyzéke

Hivatkozások

[1] Eugene I Butikov. Parametric excitation of a linear oscillator. *European Journal of Physics*, 25:535–554, 2004.