Лекция 14 — Основы формальной логики

Содержание

1. Пропозициональная логика
2. Семантика
    1. Интерпретации и оценки
    2. Семантическая классификация выражений
    3. Логическая эквиваленция
    4. Семантическое следствие
3. Системы формальных доказательств
    1. Общие представления
    2. Естественная дедукция
        1. Правила естественной дедукции
        2. Нотация Фитча
    3. Обоснованность и полнота

"Я знаю, что ничего не знаю."
— Сократ

Пропозициональная логика

Определение

Логика — учение об обоснованных рассуждениях.

Определение

Формальная логика — способ реализации логики при помощи символьной записи.

Определение

Пропозициональная логика — простейшая формальная логика, работающая с выражениями, принимающими значения true и false.

Структура пропозициональной логики $\mathcal{L}$ образована следующими составляющими:

1. **Переменные** $\quad P, Q, R, \ldots \quad$ или $\quad p_1, p_2, p_3, \ldots$
2. **Логические связки** $\quad \neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \Longleftrightarrow$
3. **Знаки пунктуации** $\quad (\;)$
4. **Константы** (*опционально*) $\quad \top \ (\text{true}) \quad \bot \ (\text{false})$

Приоритет операций

В пропозициональной логике вводится следующий приоритет операций:

$$\overset{1}{(\neg)} > \overset{2}{(\wedge)} > \overset{3}{(\vee)} > \overset{4}{(\rightarrow)} > \overset{5}{(\Longleftrightarrow)}$$

Определение

Формальное логическое выражение, или же **well-formed formula (WFF)**, определяется индуктивно:
6. Логические переменные являются WFF.
7. Константы являются WFF.
8. Если φ является WFF, то $\neg\varphi$ является WFF.
9. Если φ и ψ являются WFF, то $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ и $\varphi \Longleftrightarrow \psi$ также являются WFF.

Никакое другое выражение, не удовлетворяющее этим правилам, не является WFF.

Семантика

Интерпретации и оценки

Определение

Интерпретацией называется функция

$$\nu : V \to \mathbb{B},$$

сопоставляющая каждой переменной из набора V истинное или ложное значение.

Определение

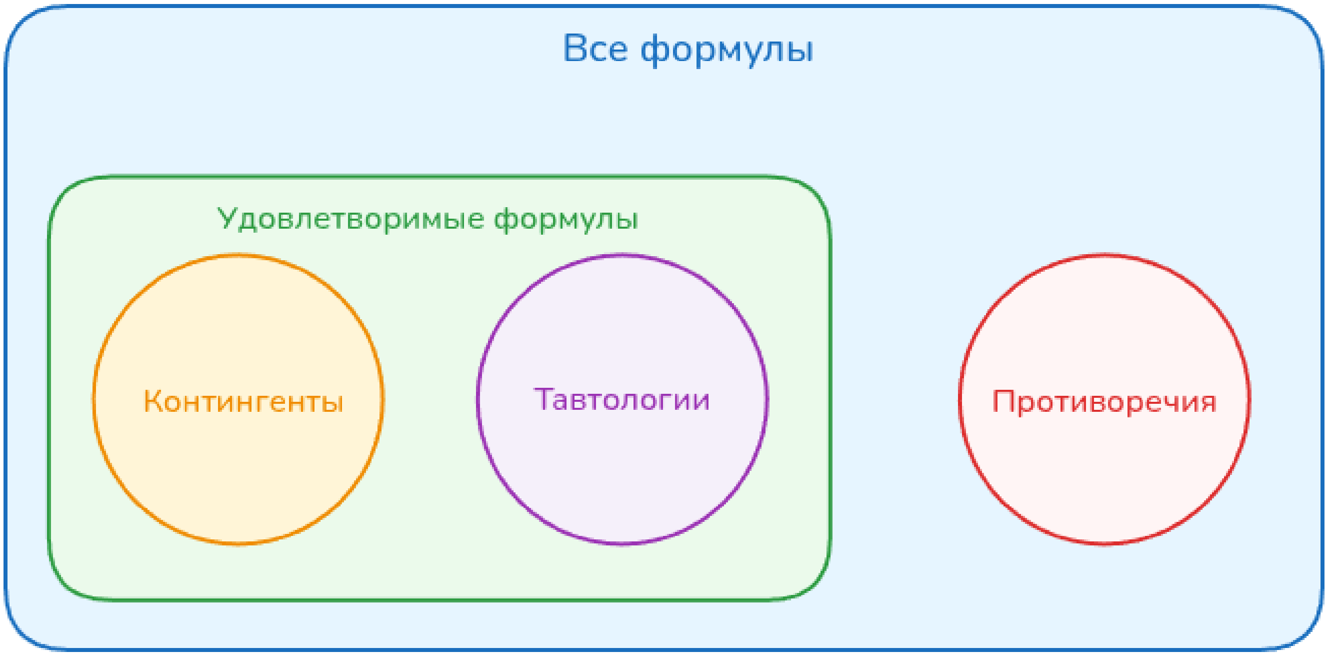
Оценка (*evaluation*) $[\![\varphi]\!]_\nu$ выражения φ в интерпретации ν определяется рекурсивно:

- оценка $[\![P]\!]_\nu$ любой переменной P равна $\nu(P)$;
- оценка константы равна её значению;
- оценка операции выводится согласно определению этой операции.

Семантическая классификация выражений

Все формальные логические выражения можно классифицировать согласно их поведению в *любой* интерпретации:

1. **Тавтология** ($\vDash \varphi$)	Выражение истинно в любой интерпретации.
2. **Противоречие**	Выражение ложно в любой интерпретации.
3. **Контингент**	Существуют как такие интерпретации, при которых выражение истинно, так и такие, при которых оно ложно.
4. **Удовлетворимое выражение**	Выражение истинно хотя бы при одной интерпретации.



Логическая эквиваленция

ⓘ **Определение**

Две формулы φ и ψ **логически эквивалентны**, если их оценки совпадают при любой интерпретации:

$$\varphi \equiv \psi \quad \text{iff} \quad \forall \nu : [\![\varphi]\!]_\nu = [\![\psi]\!]_\nu$$

Легко видеть, что это условие также можно записать как $\vDash \varphi \iff \psi$.

Как и в булевой алгебре, в пропозициональной логике существует ряд законов, позволяющих упрощать выражения:

Идентичность
$P \land \top \equiv P$
$P \lor \bot \equiv P$

Доминирование
$P \lor \top \equiv \top$
$P \land \bot \equiv \bot$

Коммутативность
$P \land Q \equiv Q \land P$
$P \lor Q \equiv Q \lor P$

Дополнение
$P \land \neg P \equiv \bot$
$P \lor \neg P \equiv \top$

Идемпотентность
$P \land P \equiv P$
$P \lor P \equiv P$

Ассоциативность
$(P \land Q) \land R \equiv P \land (Q \land R)$
$(P \lor Q) \lor R \equiv P \lor (Q \lor R)$

Поглощение
$P \land (P \lor Q) \equiv P$
$P \lor (P \land Q) \equiv P$

Законы де Моргана
$\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q$
$\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$

Исключение импликации

$P \to Q \equiv \neg P \wedge Q$
$\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$

Двойное отрицание
$\neg\neg P \equiv P$

Контрапозиция
$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$

Экспорт
$(P \wedge Q) \to R \equiv P \to (Q \to R)$

Исключение эквиваленции
$P \iff Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
$P \iff Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

Дистрибутивность
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Семантическое следствие

ⓘ **Определение**

Формула φ **семантически следует** из набора Γ, если любая интерпретация, удовлетворяющая всем формулам из Γ, также удовлетворяет φ:

$$\Gamma \vDash \varphi \quad \text{iff} \quad \forall \nu : (\forall \psi \in \Gamma : [\![\psi]\!]_\nu = \text{true}) \to [\![\varphi]\!]_\nu = \text{true}$$

Теорема о семантической дедукции

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vDash \varphi \to \psi$$

Доказательство

Достаточность.
Пусть при интерпретации ν верно $[\![\xi]\!]_\nu = \text{true}$ при $\xi \in \Gamma$. В таком случае всегда, когда верно φ, верно и ψ, т.е. $[\![\varphi]\!]_\nu = \text{true} \to [\![\psi]\!]_\nu = \text{true}$, или $[\![\varphi \to \psi]\!] = \text{true}$. Заметим, что, согласно только что сказанному, это следует из набора $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Необходимость.
ППусть при интерпретации ν верно $[\![\xi]\!]_\nu = \text{true}$ при $\xi \in \Gamma$. В таком случае всегда верно $[\![\varphi \to \psi]\!]_\nu$. Если при этом также $[\![\varphi]\!]_\nu = \text{true}$, то, по определению импликации, $[\![\psi]\!]_\nu = \text{true}$. Таким образом, ψ семантически следует из $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Системы формальных доказательств

ⓘ **Определение**

Система доказательств — набор аксиом и правил вывода, позволяющий получать новые истинные выражения из существующих.

ⓘ **Определение**

Доказательство утверждения φ из набора предпосылок Γ — это конечная последовательность формул, оканчивающаяся φ, в которой каждая формула:

- определена как аксиома, или
- является предпосылкой, или
- получается из предыдущих формул применением правил вывода.

Если доказательство существует, это обозначается $\Gamma \vdash \varphi$. Если $\Gamma = \varnothing$, такое доказательство называется *теоремой* и обозначается $\vdash \varphi$.

ⓘ **Определение**

Выражение ψ **синтаксически следует** из выражения φ, если его можно доказать из φ в некоторой системе доказательств.

Можно выделить две основные категории систем доказательств:

Система доказательств по Гильберту
· Множество схем аксиом
· Мало правил вывода
· Исторически важна, но муторна на практике: доказательства сложны и часто
неинтуитивны

Естественная дедукция (*Генцен*)
· Нет аксиом!
· Множество правил вывода, которые позволяют вводить и исключать логические связки

Естественная дедукция

Правила естественной дедукции

Как уже было обозначено, естественная дедукция предполагает две основных категории правил вывода:

> **Введение** (*Introduction*)

Позволяет доказать формулу с данной связкой в качестве главного оператора

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \psi\end{array}}{\varphi \land \psi}$$

Исключение (*Elimination*)

Позволяет вывести новые утверждения, используя формулу с данной связкой

$$\frac{\varphi \land \psi}{\varphi}$$

Ниже приведены основные из правил, использующихся при доказательстве формальных утверждений:

Reiteration

m	$\mathcal{A}$	
$\therefore$	$\mathcal{A}$	R m

Explosion

m	$\bot$	
$\therefore$	$\mathcal{A}$	X m

Conditional

i	$\mathcal{A}$	
j	$\mathcal{B}$	
$\therefore$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\to$I i–j

Modus ponens

i	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
j	$\mathcal{A}$	
$\therefore$	$\mathcal{B}$	MP i, j

Conjunction

i	$\mathcal{A}$	
j	$\mathcal{B}$	
$\therefore$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\wedge$I i, j

m	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	
$\therefore$	$\mathcal{A}$	$\wedge$E m
$\therefore$	$\mathcal{B}$	$\wedge$E m

Contraposition

m	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
$\therefore$	$\neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}$	Contra m

Modus tollens

i	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
j	$\neg\mathcal{B}$	
$\therefore$	$\neg\mathcal{A}$	MT i, j

Biconditional

i	$\mathcal{A}$	
j	$\mathcal{B}$	
k	$\mathcal{B}$	
l	$\mathcal{A}$	
$\therefore$	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	$\leftrightarrow$I i–j, k–l

i	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	
j	$\mathcal{A}$	
$\therefore$	$\mathcal{B}$	$\leftrightarrow$E i, j

i	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	
j	$\mathcal{B}$	
$\therefore$	$\mathcal{A}$	$\leftrightarrow$E i, j

Disjunction

m	$\mathcal{A}$	
$\therefore$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\vee$I m

m	$\mathcal{A}$	
$\therefore$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{A}$	$\vee$I m

m	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
i	$\mathcal{A}$	
j	$\mathcal{C}$	
k	$\mathcal{B}$	
l	$\mathcal{C}$	
$\therefore$	$\mathcal{C}$	$\vee$E m, i–j, k–l

Negation

i	$\neg\mathcal{A}$	
j	$\mathcal{A}$	
$\therefore$	$\bot$	$\neg$E i, j

i	$\mathcal{A}$	
j	$\bot$	
$\therefore$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg$I i–j

Indirect proof

i	$\neg\mathcal{A}$	
j	$\bot$	
$\therefore$	$\mathcal{A}$	IP i–j

Double negation

m	$\neg\neg\mathcal{A}$	
$\therefore$	$\mathcal{A}$	$\neg\neg$E m

Law of excluded middle

i	$\mathcal{A}$	
j	$\mathcal{B}$	
k	$\neg\mathcal{A}$	
l	$\mathcal{B}$	
$\therefore$	$\mathcal{B}$	LEM i–j, k–l

Disjunctive syllogism

i	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
j	$\neg\mathcal{A}$	
$\therefore$	$\mathcal{B}$	DS i, j

i	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
j	$\neg\mathcal{B}$	
$\therefore$	$\mathcal{A}$	DS i, j

Hypothetical syllogism

i	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
j	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	
$\therefore$	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$	HS i, j

De Morgan Rules

m	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	
$\therefore$	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	DeM m

m	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	
$\therefore$	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	DeM m

m	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	
$\therefore$	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	DeM m

m	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	
$\therefore$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	DeM m

Green: basic rules.
Orange: derived rules.

More rules can be found in the "forall x: Calgary" book (p. 406).

Нотация Фитча

Нотация Фитча предлагает структурированный формат доказательств в системе естественной дедукции. Горизонтальные линии разделяют предпосылки от выводов; отступ отделяет область под-доказательства. Каждая строка нумеруется и подкрепляется соответствующим правилом вывода:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & P \to Q & \text{Premise} \\ 2 & Q & \text{Premise} \\ \hline \therefore & Q & \text{MP}(1,2) \end{array}$$

Обоснованность и полнота

Определение

Система доказательств **обоснована**, если любая выводимая формула семантически корректна:

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \vDash \varphi$$

Иными словами, в обоснованной системе нельзя доказать неверное утверждение.

Теорема

Естественная дедукция обоснована.

Доказательство

#TODO

Определение

Система доказательств **полна**, если любая семантически корректная формула выводима:

$$\Gamma \vDash \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$$

Иными словами, в полной системе можно доказать любое истинное утверждение.

Теорема

Естественная дедукция полна.

Доказательство

#TODO (доказательства супер важны, он сто процентов спросит их на экзе, в презе про них оч много расписано)