# Линейный оператор. Матрица линейного оператора

***Оператор*** — отображение $\mathcal{A} : L_1 \to L_2$, где $L_1, L_2$ — линейные пространства.

Обозначения:
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ — операторы
- $A, B, C, \ldots$ — матрицы операторов

***Линейный оператор*** — оператор $\mathcal{A} : V \to W$ ($V, W$ — линейные пространства над полем $F$), для которого верны следующие свойства ($x, y \in V, \alpha \in F$):
- Аддитивность: $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$
- Однородность: $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \cdot \mathcal{A}(x)$

Или, что эквивалентно, должно быть верным равенство

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot \mathcal{A}(x) + \beta \cdot \mathcal{B}(y)$$

***Линейное преобразование (пр-ва $V$)*** — линейный оператор $\mathcal{A} : V \to V$

***Примеры ЛО***

- **Нулевой** ($\mathcal{O} : V \to W$) — $\mathcal{O}(x_V) = \overline{0}_W$
- **Тождественный** ($\mathcal{I} : V \to V$) — $\mathcal{I}(x_V) = x_V$
- **Оператор проецирования (проектор)**:
  Пусть $V = L_1 \oplus L_2$, тогда если $x \in V, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$, то $x = x_1 + x_2$. Тогда *проектор* обозначаенный $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}$ будет проецировать $x \in V$ на подпространство $L_1$ параллельно подпространству $L_2$. Проектор $\mathcal{P}_{L_1}^{\perp L_2}$ будет проецировать $x \in V$ на подпространство $L_1$ перпендикулярно $L_2$
- **Оператор дифференцирования** ($\mathcal{D} : P[x]_n \to P[x]_{n-1}$):
  Отображение введено как пример (это пространства многочленов

степени не выше $n$ и $n - 1$ соответственно). Отображение невероятно нетривиально:

$$\mathcal{D}(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) =$$
$$a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_1$$

- **Оператор интегрирования** ($\mathcal{S} : C[a, b] \to \mathbb{R}$ – опять как пример): $C[a, b]$ – пространство функций, непрерывных на $[a, b]$. Скажем что $\forall f(x) \in C[a, b]$

$$\mathcal{S}(f(x)) = \int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

- **Какой-то матричный** ($\mathcal{A} : M_p \to M_p$): $M_p$ – пространство квадратных матриц $p \times p$. Определим $\forall X \in M_p$ и произвольной (но фиксированной) $A \in M_p$

$$\mathcal{A}(X) = A \cdot X$$

по свойствам произведения матриц

$$\mathcal{A}(\alpha X + \beta Y) = A \cdot (\alpha X + \beta Y) = A \cdot \alpha X + A \cdot \beta Y =$$
$$\alpha(A \cdot X) + \beta(A \cdot Y) = \alpha \cdot \mathcal{A}(X) + \beta \cdot \mathcal{A}(Y)$$

- **Оператор поворота** ($R_\varphi : V \to V$) – поворачивает пространство на угол $\varphi$ (что бы это не значило)

# *Матрица линейного оператора*

Рассмотрим $\mathcal{A} : V \to W$, где

- $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ — базис $V$
- $\{u_i\}_{i=1}^{m}$ — базис $W$

Пусть $A$ — матрица ЛО $\mathcal{A}$. Воздействуем оператором $\mathcal{A}$ на каждый вектор из базиса $V$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(e_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + ... + \alpha_{1m}u_m \\
&\mathcal{A}(e_2) = \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + ... + \alpha_{2m}u_m \\
&... \\
&\mathcal{A}(e_n) = \alpha_{n1}u_1 + \alpha_{n2}u_2 + ... + \alpha_{nm}u_m
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & & & \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

это матрица перехода $A_{e \to u}$ (из базиса $e$ в базис $u$)

***Матрица перехода*** — матрицей перехода из базиса $e$ в базис $u$ ($A_{e \to u}$ или $A_e^u$) называется матрица, столбцы которой являются координатами базисных векторов $e_i$ в базисе $u$

***Свойства матрицы ЛО***

- $(\forall \mathcal{A} : V \to V)(\forall x \in V)(\forall \alpha \in F)$
  1. $(\mathcal{A}(x))_e = A_e x$
  2. Матрица единичного (нулевого) оператора — единичная (нулевая) матрица
  3. Матрица суммы ЛО равна сумме матриц этих операторов
  4. $\alpha\mathcal{A} = \alpha \cdot Ax$
  5. $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(x) = (A \cdot B)x$
  6. Пусть матрицы перехода между базисами обозначены $P_{e \to u}, P_{u \to e}$, тогда

$$A_u = P_{u \to e} \cdot A_e \cdot P_{e \to u} \Longrightarrow P_{e \to u} A_u = A_e \cdot P_{e \to u}$$

7. Определитель и ранг не зависят от базиса

**Теорема**

*Задание ЛО равносильно заданию его матрицы в фиксированной паре базисов*

**Доказательство**

TBD

*QED*