

Теория графов

Основы

Граф — пара $\langle V, E \rangle$, где

- V — конечное множество вершин
- E — множество ребер

Дополнительные обозначения:

- $V(G)$ — множество вершин
- $E(G)$ — множество ребер
- $|V(G)|$ — порядок графа
- $|E(G)|$ — размер графа

Ребра графа — произвольные объекты, представляющие привычные нам ребра в удобном в конкретной задаче виде (например, в неориентированных графах ни к чему хранить их в виде *упорядоченных пар* можно хранить их в виде 2- и 1-множеств). Взаимодействие с ними строятся на функциях, например, для описания взвешенного ориентированного графа можно воспользоваться 3 функциями:

$\text{begin} : E \rightarrow V$

$\text{end} : E \rightarrow V$

$\text{weight} : E \rightarrow \mathbb{R}$

Полезная нотация

Множество всех подмножеств X , имеющих мощность n , можно записать как

$$\binom{X}{n} = \{S \mid S \subseteq X \text{ и } |S| = n\}$$

Заметка об определении графов

Есть несколько способов определить граф

- Наиболее абстрактный способ определить граф, это через функции (написаны выше), тогда E - множество анонимных названий ребер
- Можно прямо в множество ребер пихать не анонимные элементы, а пары элементов (для направленных графов), начало и конец.

Тогда $E \subseteq V^2$ Мы просто говорим о том, что граф это отношение.

Для взвешенного графа $E \subseteq V^2 \times \mathbb{R}$

- Для ненаправленных Графов можно сделать то же самое только с неупорядоченными парами.

Обозначается $E \subseteq \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$

Несложно видеть, что $C_{|V|}^2 = \left| \binom{V}{2} \right|$

Классификация графов

Введем полезные определения

Петля — ребро, начинающееся и заканчивающееся в одной и той же вершине:

$$l \in E : \text{begin}(l) = \text{end}(l)$$

Мультиребро — ребро, для которого в множестве ребер существует его точная копия, неравная ему:

$$m \in E : (\exists m' \in E \setminus \{m\})(\forall f \in F)(f(m') = f(m))$$

Иногда пару мультиребер называют *кратными ребрами*

Теперь легко классифицировать графы, основываясь на наличии в них петель и мультиребер:

Простой график — график, среди ребер которого нет **ни петель, ни мультиребер**

Определение внутри курса

Когда Чухарев (и мы следовательно) говорим слово график, мы имеем в виду простой график, если не сказано обратного

Мультиграф — график, среди ребер которого **нет петель** (мультиребра допускаются)

Псевдограф — график, в котором **допускаются** и мультиребра и петли

Ну и еще один чуть более интересный вид графов и ребер

Гиперребро — ребро, связывающее больше 2 вершин

Гиперграф — граф, содержащий гиперребра

Про вершины

Здесь определения будут поясняться на примере неориентированных и невзвешенных графов, однако обобщить их на другие виды никакой сложности не представляет

Смежные (adjacent) вершины — вершины, между которыми есть ребро — u и v , если $\{u, v\} \in E$

Инцидентное ребро — ребро инцидентно вершине, если оно в нее “приходит” — $e \in E$ инцидентно $u \in V$, если $v \in e$ (так же определяют как обратное, ребро которое выходит из вершины)

Соседние вершины v — множество смежных с v вершин:

$$\{u \mid \{u, v\} \in E\}$$

Степень вершины — количество ее соседей:

$$\deg(u) = |\{v \mid \{u, v\} \in E\}|$$

Граф, к слову тоже имеет степени (даже 2):

- $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg v$ — минимальная степень вершины в графе
- $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg v$ — максимальная степень вершины в графе

Степенная последовательность — последовательность степеней вершин графа в порядке невозрастания

Лемма о рукопожатиях

В любом (неориентированном) графе сумма степеней вершин в 2 раза больше количества ребер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Доказательство

Каждое ребро добавляет к итоговой сумме по 2 (каждым из 2 концов), а значит, пройдясь по всем ребрам получим сумму всех степеней равную $2 \cdot |E|$

QED

Возвращаясь к графикам

r-regular graph — график, в котором каждая вершина имеет степень r

Специальные графы

- **Нулевой** — без вершин
- **Тривиальный** — одна вершина, нет ребер
- **Пустой (\bar{K}_n)** — n вершин, нет ребер
- **Полный (K_n)** — n вершин, все соединены между собой
- **Цикл (C_n)** — n вершин в цикле
- **Путь (P_n)** — n вершин в линию

Теорема

Полный (K_n) график имеет ровно $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ребер

Доказательство

Лемма о рукопожатиях:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$
$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{2}$$

поскольку в графике n вершин, каждая из которых связана со всеми остальными справедливо, что

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

QED

Способы представления графов

Матрица смежности — для графа с n вершинами матрицей смежности будет матрица размера $n \times n$, элементы которой задаются по следующему правилу

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Пара легкопроверяемых фактов:

- Матрицы смежности неориентированных графов симметричны относительно главной диагонали
- В простом графе главная диагональ заполнена нулями

Список смежности — каждой вершине ставится в соответствие множество ее соседей

Подграфы

Подграф — $H = \langle V', E' \rangle$ называется подграфом $G = \langle V, E \rangle$, если множества его вершин и ребер являются подмножествами соответствующих множеств G :

$$H \subseteq G \iff V' \subseteq V \text{ и } E' \subseteq E$$

Особые виды подграфов:

1. **Spanning** (открыт для предложений перевод) — подграф, содержащий все вершины исходного ($V' = V$)
2. **Induced** (вероятно, порожденный) — подграф $G[S]$, где $S \subseteq V$, в котором есть все ребра, содержащие вершины исходного:

$$E' = \{\{u, v\} \mid u, v \in S \text{ и } \{u, v\} \in E\}$$

Изоморфизм графов

Изоморфные графы – $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, для которых существует биекция $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющая связность:

$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$

По сути это 2 одинаковых графа, в которых по-разному названы вершины, их структура идентична

Смысл изоморфизма графов

Глазами определить изоморфны ли нарисованные на бумажке графы очень легко (буквально одинаковые графы)

Вся сложность задачи в алгоритмизации этого процесса, чтобы это могла делать машина.

Пути и связность

Пути

Walk (переводить запрещено) — переменная последовательность вершин и ребер.

Замкнутый walk так и называется

Trail (переводить запрещено) — walk, в котором ребра не повторяются.

Замкнутый trail — circuit

Путь (path) — trail, в котором вершины не повторяются.

Замкнутый путь — цикл

Путь (и все остальные) называются замкнутыми если начинаются и заканчиваются в одной и той же вершине (в path допускается только такое повторение вершин)

Длина пути (и проч.) — количество ребер в нем

Расстояние (между u, v) — длина кратчайшего пути между u и v .

Если пути не существует, пишут $\text{dist}(u, v) = \infty$

Теорема

Расстояние — метрика

Доказательство

Проверить свойства несложно, доказательство тривиально

QED

Характеристики вершин и графов, связанные с расстоянием

- **Эксцентриситет** вершины — расстояние от нее до самой удаленной вершины ($\text{ecc}(v) = \max_{u \in V} \text{dist}(u, v)$)
- **Радиус** графа — минимальный эксцентриситет его вершин
- **Диаметр** графа — максимальный эксцентриситет его вершин
- **Центр** графа — множество вершин, эксцентриситет которых равен его радиусу

Теорема

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$$

Доказательство

- $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G)$ — очевидно из определения
- Пусть $\text{diam}(G) = \text{dist}(u, v)$, а w — один из центров графа, тогда

$$\text{dist}(u, v) \leq \underbrace{\text{dist}(u, w)}_{\leq \text{rad}(G)} + \underbrace{\text{dist}(w, v)}_{\leq \text{rad}(G)} \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$$

QED

Связность

Связность вершин — вершины связаны если существует путь из одной в другую

Связность графа — граф называется связным, если все его вершины связаны

Теорема

Из существования walk следует существование пути

Доказательство

Рассмотрим минимальный (по включению) walk, если есть повторяющиеся вершины получим противоречие — walk не минимальный, откуда следует, что повторяющихся вершин (а значит и ребер) нет, а значит рассмотренный walk — путь (если есть walk короче, также получим противоречие)

QED

Компонента связности — максимальный связный подграф

Эти определения касались неориентированного графа, теперь что касается ориентированного.

Слабая связность — если все ребра считать двунаправленными, граф становится связным

Полусвязность — для любых двух вершин либо существует путь $u \rightarrow v$ или $v \rightarrow u$

Сильная связность — для любых двух вершин существует путь $u \rightarrow v$ и $v \rightarrow u$

Компонента сильной связности — максимальный сильно связный подграф ориентированного графа

Обхват (girth) графа — длина кратчайшего цикла. Для ациклического графа $\text{girth}(G) = \infty$

Деревья и леса

Дерево — связный граф без циклов

Лес — граф без циклов

Теорема

Для графа G с n вершинами справедливо, что все следующие факты эквивалентны :

1. G — дерево
2. G связный с $n - 1$ ребром
3. G ациклический с $n - 1$ ребром
4. Любые 2 вершины связаны единственным путем
5. G минимально связный (удаление любого ребра нарушает связность)
6. G максимально ациклический (добавление любого ребра порождает цикл)

Доказательство

Докажем следствие $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$:

- ($1 \Rightarrow 2$) Покажем, что не может быть меньше чем $n - 1$ ребро.
Рассмотрим граф из n вершин без ребер, в нем n компонент связности. Каждое ребро может соединить 2 вершины из одной компоненты связности (не изменить количество компонент связности) или из разных (уменьшить количество компонент связности на 1, если возможно), а значит чтобы граф был связным, нужно не меньше чем $n - 1$ ребро. Теперь докажем, что если граф связный, то добавление любого ребра порождает цикл. Пусть добавилось ребро $e = \{u, v\}$, по предположению u и v связаны, то есть теперь есть путь из u в v (уже существовавший, без ребра e) и путь из v в u (по ребру e) — цикл, а значит, если граф с $n - 1$ вершиной связный, то больше в дереве быть уже не может (иначе появляется цикл)

- **Дальше лень**

Как-то же можно там... подумать что-ли

QED

Подвешенное дерево (дерево с корнем) — дерево, в котором одна вершина объявлена *корнем*.

В подвешенном дереве (по определению)

- Предок v — это сосед v на пути к корню
- Дети v — сосед v вне пути к графу
- Лист — вершина без детей
- Внутренняя вершина — вершина с хотя бы 1 ребенком

Порожденное дерево — порожденный подграф, являющийся деревом

Теорема

Любой связный граф порождает хотя бы одно дерево

Доказательство

Воспользуемся DFS — если попадаем в вершину в которой уже были удалим последнее (ведущее в нее) ребро, как только алгоритм отработал не останется ни одного цикла, при этом не потеряется связность (удалялись только ребра, порождающие циклы)

QED

Пусть теперь T — дерево, порожденное графом G , для любой вершины $e \in E(G) \setminus E(T)$ граф $T + e$ содержит ровно 1 цикл, называемый фундаментальным циклом e по отношению к дереву T

Prüfer-последовательность — уникальный способ закодировать именованное дерево последовательностью из $n - 2$ названий вершин (при n вершинах)

Алгоритм построения:

1. Выбрать лист с минимальным номером
2. Записать в последовательность его предка
3. Удалить лист
4. Повтоять пока не останется 2 вершины

Формула Кайли

На n вершинах можно построить ровно n^{n-2} labeled деревьев

Доказательство

Если поверить, что Prüfer-последовательность уникально кодирует ровно один граф, то доказательство этого факта очевидно следует из комбинаторики — $n - 2$ места, на каждом из которых стоит одно из n названий вершин: $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{n-2 \text{ штуки}} = n^{n-2}$

QED

Теория связности

Точка сочленения — вершина, удаление которой увеличивает количество компонент связности

Мост — ребро, удаление которого увеличивает количество компонент связности

u - v разделитель (u - v вершинный срез) — множество вершин $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$, такое что в графе $G - S$ вершины u и v не связаны

u - v реберный срез — множество ребер $F \subseteq E$, при которых в графе $G - F$ вершины u и v лежат в разных компонентах связности

Внутреннее непересекающиеся (по вершинам) пути — 2 пути из u в v , которые не имеют общих вершин кроме u и v

Внутреннее непересекающиеся (по ребра) пути — 2 пути из u в v , которые не имеют общих вершин ребер

Связность вершин — $\kappa(G)$ минимальное количество вершин, которое нужно удалить, чтобы граф стал несвязным или тривиальным

Связность ребер — $\lambda(G)$ минимальное количество ребер, которое нужно удалить, чтобы граф стал несвязным или тривиальным

***k*-связный граф** — граф называется k -связным, если $\kappa(G) \geq k$. Или, что эквивалентно, в G не меньше k вершин и

$$(\forall S)(|S| < k \implies (G - S) \text{ — связный})$$

***k*-реберно-связный граф** — граф называется k -реберно-связным, если $\lambda(G) \geq k$. Или, что эквивалентно, в G не меньше k вершин и

$$(\forall F)(|F| < k \implies (G - F) \text{ — связный})$$