Лекция 02 — Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Пререквизиты:

- Поле комплексных чисел
- Алгебраическая запись комплексного числа

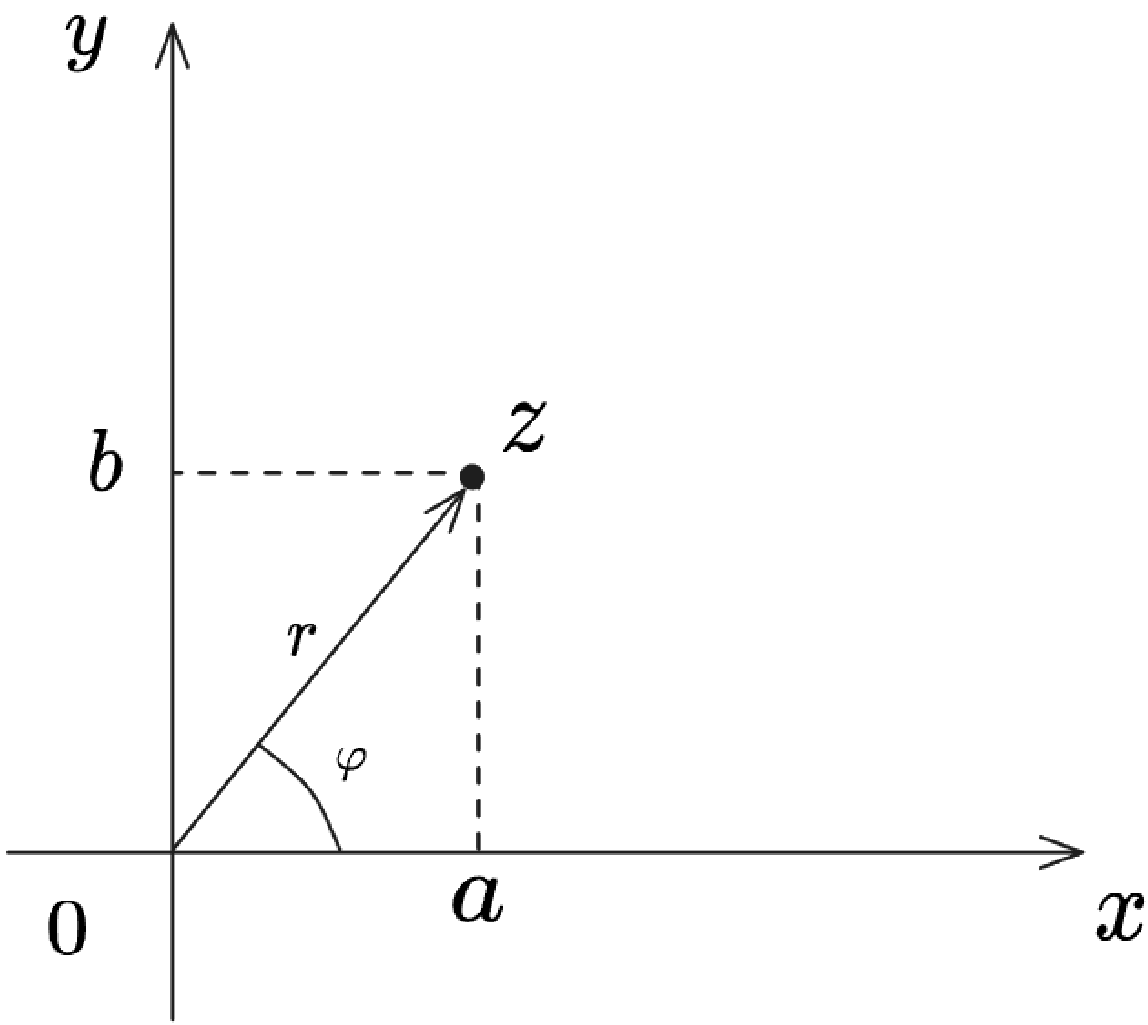
Деление комплексных чисел в алгебраической форме

Для нахождения частного двух комплексных чисел мы должны умножить оба из них на комплексно сопряжённое к делителю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Представим комплексное число $z = a + bi$ в виде точки с координатами (a, b) в декартовой системе координат:



Двумерное пространство, в котором существует это число, называется *комплексной плоскостью*.
Здесь:

- OX — действительная ось
- OY — мнимая ось
- Oz — радиус-вектор комплексного числа z
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль комплексного числа
- $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ — главное значение аргумента комплексного числа.
  $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ для I и IV четвертей; для II четверти $\varphi = \pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$, для III четверти $\varphi = -\pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$.
- $\varphi + 2\pi k$ — аргумент комплексного числа

Info

Представление *ненулевого* комплексного числа в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его **тригонометрической формой**.

Операции с комплексными числами в тригонометрической форме

- Умножение:

$$z_1 \times z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \times r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$

$$= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

- Деление:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2^2(\cos\varphi_2^2 - i\cos\varphi_2\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_2\sin\varphi_2 + \sin\varphi_2^2)} =$$

$$= \frac{r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1))}{r_2^2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

- Возведение в степень (формула Муавра):

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

  Докажем корректность формулы по индукции.

  База: $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^0 = r^0(\cos 0 + i\sin 0) = 1$
  Переход: пусть $\forall n \le k : (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Покажем, что это выполняется для $n = k+1$:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{k+1} = r^k(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \times r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= r^kr(\cos(k\varphi+\varphi) + i\sin(k\varphi+\varphi)) = r^{k+1}(\cos((k+1)\varphi) + i\sin((k+1)\varphi),$$

  что и требовалось доказать.

- Корень n-ной степени: пусть $r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \sqrt[n]{z}$, тогда:

$$(r')^n(\cos n\varphi' + i\sin n\varphi') = r(\cos(\varphi+2\pi k) + i\sin(\varphi+2\pi k)), k \in \mathbb{Z}$$

Выразим r' и φ':

$$(r')^n = r \implies r = \sqrt[n]{r}$$

$$n\varphi' = \varphi + 2\pi k \implies \varphi' = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

отсюда

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

Из этой формулы видно, что:

- корни любой натуральной степени существуют для любого ненулевого комплексного числа
- у корня n-ной степени ровно n различных значений, причём в геометрическом смысле они являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{r}$.

Показательная форма

Info

Представление *ненулевого* комплексного числа в виде $z = re^{i\varphi}$ называется его **показательной формой**.

Показательная форма получается из тригонометрической путём применения *формулы Эйлера*: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Операции с комплексными числами в показательной форме:

- Умножение:

$$z_1 \times z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

- Возведение в степень:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

- Корень n-ной степени:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k \in \mathbb{Z}$$
