Евклидовы пространства

Некоторые хорошие типы пространств

Метрическое пространство — множество M, на котором задана функция-метрика

$$\rho : M^2 \to \mathbb{R}$$

обладающая следующими свойствами

- $\rho(x, y) \geq 0$
- $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Примеры:

- $x, y \in \mathbb{R}$, тогда $\rho(x, y) = |x - y|$
- $x, y \in \mathbb{R}^n$, тогда …

Нормированное пространство — линейное пространство V, в котором задано отображение — норма

$$\|x\| : V \to \mathbb{R}$$

обладающая следующими свойствами

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Пример:

$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p}$, где

Скалярное произведение. Евклидово пространство

Скалярное произведение — функция $(x, y) : V^2 \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами

- $(x, y) = (y, x)$
- $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
- $(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda \cdot (x, y)$
- $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Евклидово пространство — линейное пространство E, на котором определено скалярное произведение

Размерность Евклидова пространства равна размерности пространства, которое его "порождает" $\dim E = \dim V$

Неравенство Коши-Буняковского

$$(\forall x, y \in E)\Big(|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}\Big)$$

причем равенство достигается $\Longleftrightarrow x = \lambda y$

Доказательство

Рассмотрим 2 случая:

1. $y = 0$:
   $\big(x, \overline{0}\big) = \big(x, 0 \cdot \overline{0}\big) = 0 \cdot \big(x, \overline{0}\big) = 0$
2. $y \neq 0$:
   Пусть $f(t) = (x + ty, x + ty), t \in \mathbb{R}$, тогда

$$f(t) = (x, x) + t \cdot (x, y) + t \cdot (y, x) + (y, y) \cdot t^2$$
$$f(t) = (y, y) \cdot t^2 + 2(x, y) \cdot t + (x, x)$$

По определению $f(t) = (a, a) \Longrightarrow f(t) \geq 0 \Longrightarrow D \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{D}{4} \geq 0$

Посчитаем дискриминант этого выражения

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$$

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

QED

В Евклидовом пространстве нормой является корень скалярного произведения векторы на него же:

$$(\forall x \in V)\left(\|x\| = \sqrt{(x, x)}\right)$$

Докажем свойства функции-нормы

Доказательство

- $\|x\| \geq 0$ по определению корня
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Возведем левую часть во 2 степень:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2 \cdot (x, y)}_{\leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\|} + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

QED

Типы норм:

1. $\|x\|_2$ — стандартная (евклидова, шаровая, сферическая)
2. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ — манхэттенская (октоэдрическая)
3. $\|x\|_\infty = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ — кубическая (норма-бесконечность)
4. В $C_{[a,b]}$ тоже есть, как-то через интегралы
5. Норма матрицы — такая же характеристика для матрицы. Для матрицы норму определить следующим образом:
   - Столбцовая

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

   - Строчная

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

- Спектральная (кв. матрица)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)}$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение матрицы $(A^T \cdot A)$

Что такое собственное число

Как известно, матрицы являются формой записи линейных операторов. Собственным числом матрицы называется произвольное число λ, при котором уравнение

$$Ax = \lambda x$$

имеет ненулевое решение x. То есть, применяя оператор к вектору x мы получим вектор $x' = \lambda x$, который будет коллинеарен исходному

- Норма Фробениуса — квадратный корень из суммы квадратов всех элементов матрицы

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij}\right)^2}$$

Немного об углах между векторами

Вернемся к неавенству Коши-Буняковского:

$$\|(x,y)\| \le \|x\| \cdot \|y\|$$

поделим на левую часть (случай где хоть 1 из векторов нулевой рассматривать не будем):

$$\frac{\|(x,y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1$$

Скажем, что

$$\cos\varphi = \frac{\|(x,y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

где φ — угол между векторами x и y, то есть углом между векторами x и y будем называть величину

$$\varphi = \arccos\frac{\|(x,y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Ортонормированная система векторов

Ортогональные векторы — векторы, угол между которыми равен 90° (или скалярное произведение которых равно 0)

Ортонормированная система векторов — множество попарно ортогональных векторов $V = \{v_1, v_2, ...\}$, норма каждого из которых равна 1:

$$\begin{cases} (\forall v_i, v_j \in V)\big((v_i, v_j) = 0\big) \\ (\forall v \in V)(\|v\| = 1) \end{cases}$$

Теорема

Ортонормированная система векторов ЛНЗ

Доказательство

TBD

QED