Конспект 02 — Поле комплексных чисел

Содержание

"Сегодня будем изучать то, чего не может быть."
— И. В. Аржанцев

Алгебраическая форма комплексного числа

Определение

Определение

Комплексным числом называется выражение $z = a + bi$, где:

- $a \in \mathbb{R}$ — *вещественная часть* числа z;
- $b \in \mathbb{R}$ — *мнимая часть* числа z;
- i — *мнимая единица*; $i^2 = -1$.

Непосредственно запись $z = a + bi$ называется *алгебраической* формой записи комплексного числа.

Легко показать, что множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел образует *поле*.

Простые операции с комплексными числами

Сложение и вычитание

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Умножение

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда:

$$z_1 \times z_2 = (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) =$$

$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Комплексное сопряжение

Определение

Число $\overline{z} = a - bi$ называется **комплексно сопряженным** к числу $x = a + bi$.

Свойства комплексного сопряжения

Лемма 1

Комплексно сопряжённое к сумме есть сумма комплексно сопряжённых.

Доказательство

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда имеем:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} =$$

$$= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i =$$

$$= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) =$$

$$= \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2

Комплексно сопряжённое к произведению есть произведение комплексно сопряжённых.

Доказательство

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда имеем:

$$\overline{z_1} \times \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) \times (a_2 - b_2 i) =$$

$$= a_1 a_2 - a_1 b_2 i - a_2 b_1 i - b_1 b_2 =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i =$$

$$= \overline{z_1 \times z_2},$$

что и требовалось доказать.

Деление комплексных чисел

Деление

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$, причём $z_2 \neq 0$. Тогда:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} =$$

$$= \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

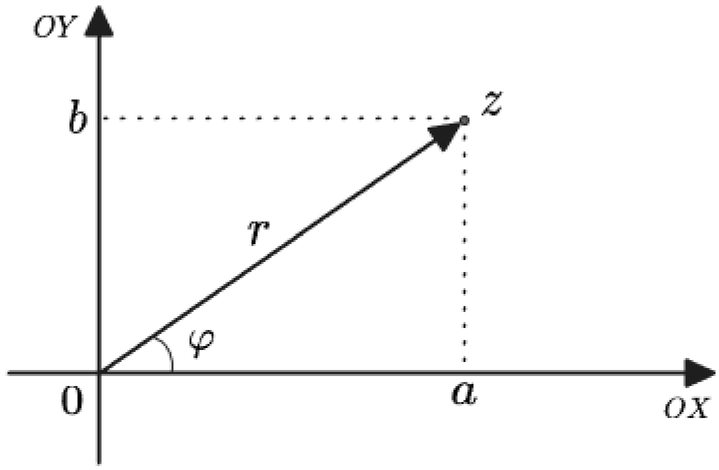
$$= \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2}{a_2^2 - a_2 b_2 i + a - 2 b_2 i + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Комплексная плоскость

Геометрическое представление

Комплексное число $z = a + bi$ можно представить в виде точки (a, b) в декартовой системе координат:



Определение

Угол вида $\varphi + 2\pi k$ называется **аргументом** $\arg z$ комплексного числа z, а непосредственно угол φ — *главным значением* аргумента.

В зависимости от расположения радиус-вектора Oz, аргумент принимает следующие значения:

- I и IV четверти — $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$
- II четверть — $\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$
- III четверть — $-\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$

Важно!

Аргумент нуля не определён.

Определение

Длина $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ радиус-вектора Oz называется **модулем** $|z|$ комплексного числа z.

Определение

Двумерное пространство, в котором существуют комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Определение

Представление ненулевого (NB!) комплексного числа в виде $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi i)$ называется **тригонометрической формой** его записи.

Операции в тригонометрической форме

Умножение

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 i), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 i)$. Тогда:

$$z_1 \times z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 i)r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 i) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 i + \cos\varphi_2\sin\varphi_1 i - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + (\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)i) =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)i)$$

Деление

Пусть задано комплексное число $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi i)$. Тогда:

$$z \times z^{-1} = 1(\cos 0 + \sin 0 i) \implies z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)i)$$

Отсюда немедленно следует, что если заданы два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 i), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 i)$, то:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \varphi_2)i)$$

Возведение в степень (формула Муавра)

Пусть задано комплексное число $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi i)$ и целое число n. Тогда:

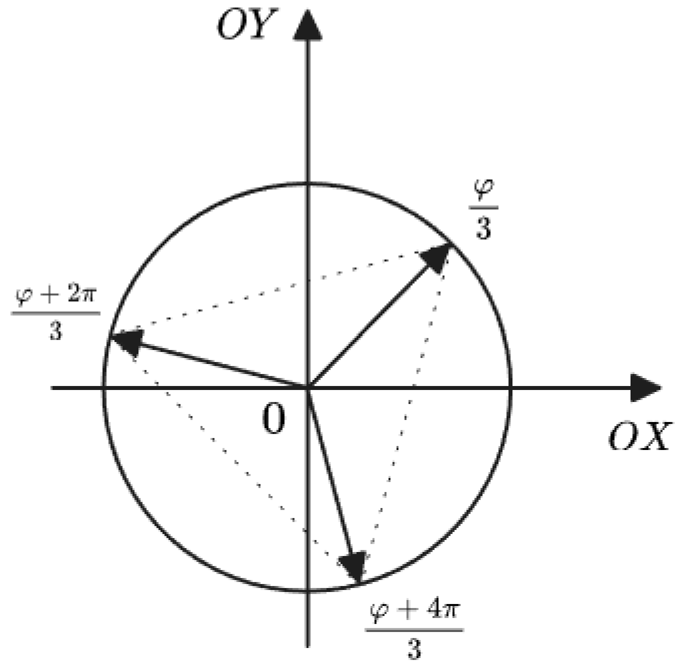
$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)i)$$

Корень n-ной степени

Пусть задано комплексное число $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi i) \neq 0$ и натуральное число n. Тогда:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = r(\cos\varphi + \sin\varphi i) \implies \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) + \sin(\frac{\varphi + 2\pi k}{n})i), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Из этой формулы видно, что у любого ненулевого комплексного числа всегда существует ровно n корней n-ной степени. В геометрическом смысле эти корни являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{z}$:



Замечание

Сложение и вычитание комплексных чисел в тригонометрической форме не определяется никаким особым образом.

Показательная форма комплексного числа

Определение

Определение

Представление ненулевого (NB!) комплексного числа в виде $z = re^{i\varphi}$ называется **показательной формой** его записи.

Показательная форма получается из тригонометрической путём применения формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi i$$

Операции в показательной форме

Умножение

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда:

$$z_1 \times z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Деление

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Возведение в степень

Пусть задано комплексное число $z = re^{i\varphi}$ и целое число n. Тогда:

$$z^n = r^n e^{i\varphi n}$$

Корень n-ной степени

Пусть задано комплексное число $z = re^{i\varphi}$ и натуральное число n. Тогда:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$