Конспект 03 — Предел функции в точке

Содержание

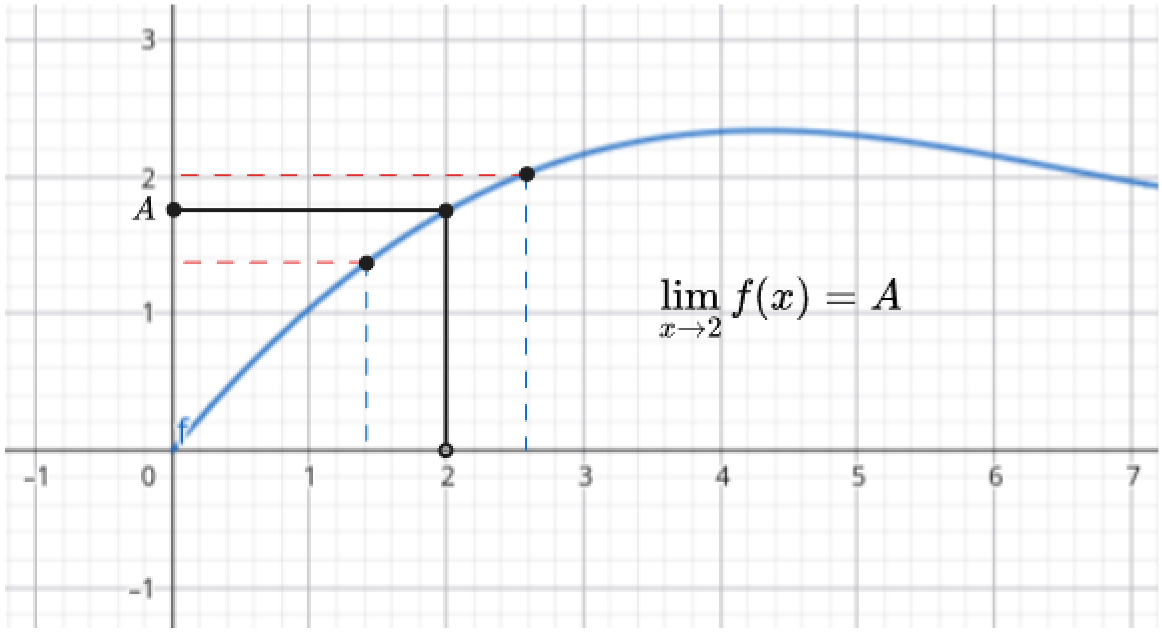
Пререквизиты

- предельная точка
- финально постоянная
- финально ограниченная
- выколотая окрестность

Представления о пределе функции

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$ и x_0 — некоторая *предельная точка* множества E. Зададим вещественнозначную функцию $f : E \to \mathbb{R}$, определённую на E.

Наша основная мотивация — уметь записать, что значит, что при приближении аргумента x к x_0 значения функции $f(x)$ приближаются к некоторому A, которое естественно называть пределом этой функции в точке x_0:



Предел по Коши

ⓘ **Info**

Согласно Коши, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется **пределом функции** f при x стремящемся к x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x \in E : |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Иными словами, A — предел тогда и только тогда, когда для сколь угодно малого положительного ε найдётся такое положительное δ, что при любом x, δ-близком к x_0, значение функции $f(x)$ в точке x будет ε-близко к A.

Important

Если записать определение Коши на языке окрестностей, то оно примет вид

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall V_\varepsilon(A) \ \exists \mathring{U}_E^\delta(x_0) : (x \in \mathring{U}_E^\delta(x_0) \implies f(x) \in V_\varepsilon(A))$$

⚠ **Warning**

Из определения Коши немедленно следует, что функция может иметь предел в точке x_0 даже будучи не определенной в ней.

Предел по Гейне

> **Info**
>
> Согласно Гейне, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется **пределом функции** f при x стремящемся к x_0, если
>
> $$\forall \{x_n\}_{E \setminus \{x_0\}} \to a : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$
>
> Иными словами, A — предел тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$, определенной на множестве $E \setminus \{x_0\}$ и стремящейся к a, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ стремися к A.

Теорема 1

Определения Коши и Гейне равносильны.

Доказательство

Необходимость (Коши $\to$ Гейне). По определению Коши, для любой ε-окрестности предела всегда найдется такая проколотая δ-окрестность предельной точки, что

$$x \in \mathring{U}_E^{\delta}(x_0) \implies f(x) \in V_\varepsilon(A)$$

Зафиксируем ε и найдём удовлетворяющее определению Коши δ. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{E \setminus \{x_0\}}$, стремящуюся к x_0. По определению,

$$\exists N(\delta) : \forall n > N(\delta) : x_n \in \mathring{U}_E^{\delta}(x_0)$$

Из определения Коши немедленно следует, что при $n > N(\delta)$ также верно, что $f(x_n) \in V_\varepsilon(A)$.
Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что при $n > N$ значения последовательности $\{f(x_n)\}$ лежат в ε-окрестности предела, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.
Поскольку исходная последовательность $\{x_n\}$ была выбрана произвольным образом, то определение Гейне выполняется, что и требовалось доказать.

Достаточность (Гейне $\to$ Коши). Допустим, что выполняется определение Гейне, но не выполняется определение Коши, то есть

$$(\forall \{x_n\}_{E \setminus \{x_0\}} \to x_0 : \lim_{n \to \infty} \{f(x_n)\} = A) \wedge (\lim_{x \to x_0} f(x) \neq A)$$

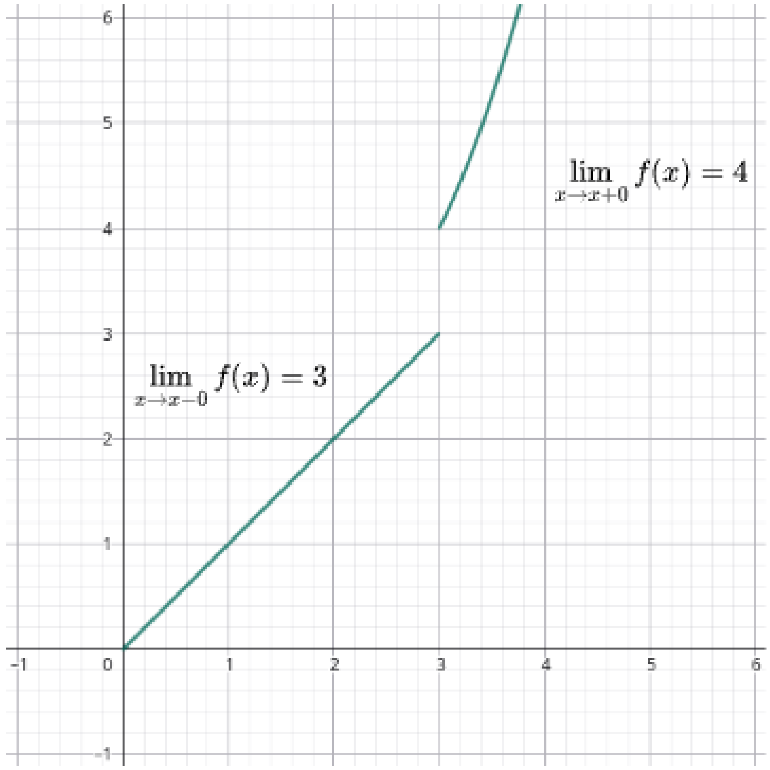
Распишем, что значит, что A не является пределом $f(x)$:

$$\exists V_\varepsilon \, \forall \mathring{U}_E^{\delta} : \exists x \in \mathring{U}_E^{\delta} : f(x) \notin V_\varepsilon$$

> Зафиксируем такое ε, для которого не выполняется определение Коши.
> Для некоторого натурального n рассмотрим $\frac{1}{n}$-окрестность предельной точки. По отрицанию определения Коши в этой окрестности найдётся x_n такое, что $f(x_n) \notin V_\varepsilon(A)$.
> Сформируем последовательность $\{x_n\}$. Поскольку $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$, то, по теореме о двух милиционерах, $\{x_n\}$ сходится к x_0. При этом, по только что доказанному, при выбранном ε ни одно из значений $f(x_n)$ не принадлежит ε-окрестности A, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, что противоречит определению Гейне.
> Таким образом, если выполняется определение Гейне, то обязано выполняться и определение Коши, что и требовалось доказать.

Классификация пределов функций

> **Info**
>
> Предел A функции f в точке x_0 называется **левосторонним**, если
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0) \implies f(x) \in V_\varepsilon(A)$$
>
> Иными словами, A — левосторонний предел тогда и только тогда, когда для всех x, меньших x_0, $f(x)$ лежит в δ-окрестности A.
> Левосторонний предел принято обозначать $f(a-0)$ или $\lim\limits_{x\to a-0}$.
>
> *Правосторонний предел* определяется аналогично с точностью до знаков.



ⓘ **Info**

Функция $f(x) : A \to B$ называется **бесконечно большой** при $x \to x_0$, если верно одно из следующих утверждений:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, то есть

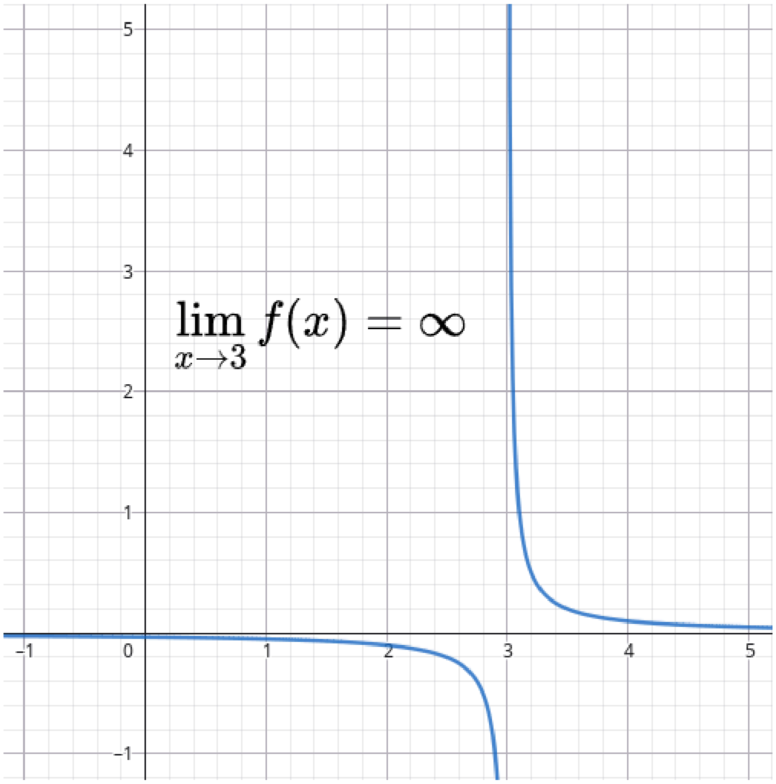
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A : x \in \mathring{U}_E^{\delta}(x_0) \implies f(x) > \varepsilon$$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, то есть

$$\forall \varepsilon < 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A : x \in \mathring{U}_E^{\delta}(x_0) \implies f(x) < \varepsilon$$

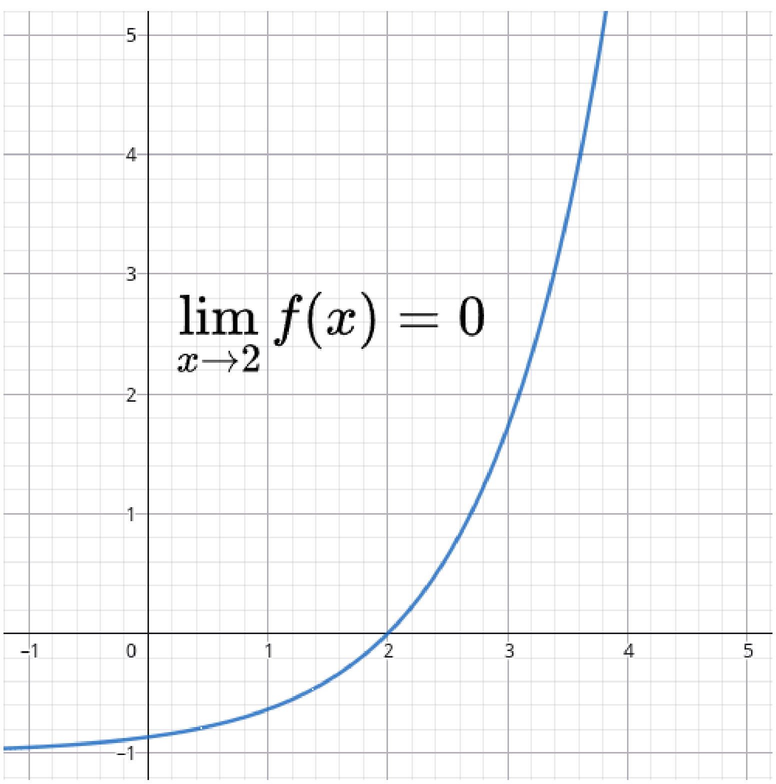
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A : x \in \mathring{U}_E^{\delta}(x_0) \implies |f(x)| > \varepsilon$$



ⓘ **Info**

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} = 0$.



Основные теоремы о пределе функции

Базовые свойства

Лемма 1

Если при $x \to x_0$ фунцкия $f(x)$ финально постоянна и принимает значение A, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Доказательство

По определению финально постоянной функции,

$$\exists \mathring{U}_E(x_0) : x \in \mathring{U}_E(x_0) \implies f(x) = A$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ верно, что $|f(x) - A| = 0 < 0 + \varepsilon$, то есть $f(x) \in V_\varepsilon(A)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2

Если $\exists A \in \overline{R} : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то при $x \to x_0$ функция $f(x)$ финально ограничена.

Доказательство

По определению Коши,

$$\forall V(A)\ \exists \mathring{U}_E(x_0) : x \in \mathring{U}_E(x_0) \implies f(x) \in V(A) \iff A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

откуда $|f(x)| < |A| + \varepsilon$, т.е. f финально ограничена числом $|A| + \varepsilon$ в некоторой окрестности x_0, что и требовалось доказать.

Лемма 3

Если $\exists A \in \overline{R} : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ финально ограничена.

Доказательство

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
По определению Коши,

$$\exists \mathring{U}_E(x_0) : x \in \mathring{U}_E(x_0) \implies |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$$

Далее простыми преобразованиями получим, что

$$\frac{|A|}{2} > |f(x) - A| = |A - f(x)| \geq |A| - |f(x)|,$$

откуда

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2} \implies \frac{1}{f(x)} < \frac{2}{|A|},$$

т.е. $\frac{2}{|A|}$ финально ограничивает $\frac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$, что и требовалось доказать.

Лемма 4

Если $\exists A \in \overline{R} : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$, то существует окрестность $\mathring{U}_E(x_0)$, все точки которой имеют тот же знак, что и A.

Доказательство

По определению Коши,

$$\exists \mathring{U}_E(x_0) : x \in \mathring{U}_E(x_0) \implies A - \frac{|A|}{2} < x < A + \frac{|A|}{2}$$

Если при этом $A > 0$, то неравенство принимает вид

$$\frac{A}{2} < x < \frac{3A}{2} \implies x > \frac{A}{2} > 0$$

Если при этом $A < 0$, то неравенство принимает вид

$$\frac{3A}{2} < x < \frac{A}{2} \implies x < \frac{A}{2} < 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2

Предел функции в точке единственен.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B, A \neq B$.
Рассмотрим непересекающиеся окрестности $V'(A) \cap V''(B) = \emptyset$.
По определению,

$$\exists \mathring{U}'_E(x_0) : x \in \mathring{U}'_E \implies f(x) \in V'(A)$$

$$\exists \mathring{U}''_E : x \in \mathring{U}''_E \implies f(x) \in V''(B)$$

Рассмотрим $\mathring{U}_E = \mathring{U}'_E \cap \mathring{U}''_E$. Для этой окрестности верно, что

$$x \in \mathring{U}_E \implies f(x) \in V' \wedge f(x) \in V'',$$

что противоречит тому, что окрестности не пересекаются.
Таким образом, функция не может иметь двух различных пределов в одной точке, что и требовалось доказать.

Леммы о бесконечно малых и бесконечно больших

Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \implies \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty, \forall x \in \mathring{U}(x_0) : f(x) \neq 0$
b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \implies \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Доказательство

Часть (a). Зафиксируем произвольное M и рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{M}$. По определению Коши,

$$\forall \varepsilon : \exists \mathring{U}_E^{\delta}(x_0) : x \in \mathring{U}_E^{\delta}(x_0) \implies |f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{M},$$

откуда немедленно следует, что

$$\frac{1}{|f(x)|} > M,$$

что и требовалось доказать.

Часть (b). Зафиксируем произвольное ε и рассмотрим $M = \frac{1}{\varepsilon}$. По определению Коши,

$$\forall \varepsilon : \exists \mathring{U}_E^{\delta}(x_0) : x \in \mathring{U}_E^{\delta}(x_0) \implies |f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon},$$

откуда немедленно следует, что

$$\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5

Сумма бесконечно малых при $x \to x_0$ есть бесконечно малая при x_0.

Доказательство

Рассмотрим произвольные бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $f(x)$ и $g(x)$.
Пусть задан $\varepsilon > 0$. По определению,

$$\exists \mathring{U}'_E : x \in \mathring{U}'_E \implies |f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists \mathring{U}''_E : x \in \mathring{U}''_E \implies |g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Рассмотрим $\mathring{U}_E = \mathring{U}'_E \cap \mathring{U}''_E$. Для этой окрестности верно, что

$$x \in \mathring{U}_E \implies |f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \wedge \ |g(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

то есть при заданном ε найдётся такая окрестность $\mathring{U}_E$, что при $x \in \mathring{U}_E$ все значения $f(x) + g(x)$ принадлежат ε-окрестности нуля, что и требовалось доказать.

Лемма 6

Произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ на финально ограниченную при $x \to x_0$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство

Рассмотрим произвольную бесконечно малую при $x \to x_0$ функцию $f(x)$ и финально ограниченную при $x \to x_0$ функцию $g(x)$.

Пусть задан $\varepsilon > 0$. По определению финально ограниченной,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \mathring{U}'_E : x \in \mathring{U}'_E \implies |g(x)| < M$$

По определению Коши,

$$\exists \mathring{U}''_E : x \in \mathring{U}''_E \implies |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Рассмотрим $\mathring{U}_E = \mathring{U}'_E \cap \mathring{U}''_E$. Для этой окрестности верно, что

$$x \in \mathring{U}_E \implies |g(x)| < M \ \wedge \ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

откуда

$$|f(x) \times g(x)| \leq |f(x)| \times |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \times M < \varepsilon,$$

то есть при заданном ε найдётся такая окрестность $\mathring{U}_E$, что при $x \in \mathring{U}_E$ все значения $f(x) \times g(x)$ принадлежат ε-окрестности 0, что и требовалось доказать.

Замечание. Деление на M является корректной операций, поскольку из неравенства $|g(x)| < M$ следует $M \neq 0$.

Следствие. Поскольку по лемме (2) бесконечно малая является финально ограниченной, то произведение бесконечно малых также является бесконечно малой.

Лемма 7

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где α — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. По определению Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \mathring{U}_E(x_0) : x \in \mathring{U}_E(x_0) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Рассмотрим $\alpha(x) = f(x) - A$.
Поскольку

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \mathring{U}_E(x_0) : x \in \mathring{U}_E(x_0) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon,$$

то $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. При этом $A + \alpha(x) = A + f(x) - A = f(x)$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где α — бесконечно малая при $x \to x_0$. Покажем, что предел этой функции при $x \to x_0$ равен A, то есть

$$\forall V_\varepsilon(A) \exists \mathring{U}_E^\delta(x_0) : x \in \mathring{U}_E^\delta(x_0) \implies (A + \alpha(x)) \in V_\varepsilon(A)$$

Запись $(A + \alpha(x)) \in V_\varepsilon(A)$ можно представить в следующем виде:

$$|A + \alpha(x) - A| < \varepsilon \iff |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Заметим, что это условие означает, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке x_0, что выполняется по определению. Таким образом, подходящая проколотая δ-окрестность всегда найдётся, а значит, определение предела выполняется, что и требовалось доказать.

Лемма 8

Если две бесконечно большие при $x \to x_0$ имеют один знак, их сумма есть бесконечно большая при $x \to x_0$ того же знака.

Доказательство

Рассмотрим произвольные бесконечно большие при $x \to x_0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ положительного знака (для отрицательного знака рассуждения аналогичны).

Пусть задан $M > 0$. По определению Коши,

$$\exists \mathring{U}'_E(x_0) : x \in \mathring{U}'_E(x_0) \implies f(x) > \frac{M}{2}$$

$$\exists \mathring{U} + E''(x_0) : x \in \mathring{U}''_E(x_0) \implies g(x) > \frac{M}{2}$$

Рассмотрим $\mathring{U}_E = \mathring{U}'_E \cap \mathring{U}''_E$. Для этой окрестности верно, что

$$x \in \mathring{U}_E \implies f(x) > \frac{M}{2} \wedge g(x) > \frac{M}{2},$$

откуда

$$f(x) + g(x) > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 9

Если предел сходящейся, но не бесконечно малой при $x \to x_0$ функции имеет тот же знак, что и предел некоторой бесконечно большой при $x \to x_0$, то их произведение есть бесконечно большая при $x \to x_0$ того же знака.

Доказательство

Рассмотрим произвольную сходящуюся при $x \to x_0$ функцию $f(x)$ с пределом , отличным от нуля и бесконечно большую при $x \to x_0$ функцию $g(x)$, причём предел обоих функций имеет положительный знак (для отрицательного знака рассуждения аналогичны).

Пусть заданы $M > 0$ и $\varepsilon = \frac{A}{2}$. По определению Коши,

$$\exists \mathring{U}'_E : x \in \mathring{U}'_E \implies (|f(x) - A| < \frac{A}{2} \iff \frac{A}{2} < f(x) < \frac{3A}{2})$$

$$\exists \mathring{U}''_E : x \in \mathring{U}''_E \implies g(x) > \frac{2M}{A}$$

Рассмотрим $\mathring{U}_E = \mathring{U}'_E \cap \mathring{U}''_E$. Для этой окрестности верно, что

$$x \in \mathring{U}_E \implies f(x) > \frac{A}{2} \wedge g(x) > \frac{2M}{A},$$

откуда

> $$f(x) \times g(x) > \frac{A}{2} \times \frac{2M}{A} = M,$$
>
> что и требовалось доказать.

Арифметика пределов

Идентично тому, как устроена арифметика пределов последовательностей, пределы суммы, произведения и частного функций равны соответственно сумме, произведению и частному их пределов. Это немедленно следует из теоремы (1).

Впрочем, полезно уметь доказывать эти свойства обособленно. Это можно сделать, в точности повторив соответствующие доказательства для последовательностей, однако далее будет приведён более элегантный способ, использующий некоторые знания о бесконечно малых.

> **Теорема 3**
>
> Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, где A и B существуют и конечны, то верно следующее:
>
> 1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$
> 2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \times g(x)) = A \times B$
> 3. Если $B \neq 0$ и $\forall x \in E : g(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$
>
> **Доказательство**
>
> 1. По лемме (7),
>
> $$f(x) + g(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x)$$
>
>   По лемме (5),
>
> $$A + B + \alpha(x) + \beta(x) = A + B + \gamma(x)$$
>
>   По лемме (7),
>
> $$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} (A + B + \gamma(x)) = A + B,$$
>
>   что и требовалось доказать.
> 2. По лемме (7),
>
> $$f(x) \times g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = AB + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$
>
>   По леммам (5) и (6),
>
> $$AB + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x) = AB + \gamma_1(x) + \gamma_2(x) + \gamma_3(x) = AB + \gamma(x)$$

По лемме (7),

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to x_0} (AB + \gamma(x)) = AB,$$

что и требовалось доказать.

3. По леммам (5) и (7),

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{B(A + \alpha(x)) - A(B + \beta(x))}{Bg(x)} =$$

$$= \frac{1}{B} \times \frac{1}{g(x)} \times (BA + B\alpha(x) - AB - A\beta(x)) = \frac{1}{B} \times \frac{1}{g(x)} \times \gamma'(x)$$

По леммам (3) и (6),

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \gamma(x)$$

По лемме (7),

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} (\frac{A}{B} + \gamma(x)) = \frac{A}{B},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4 (Предел композиции)

Если для функций $f : E \to Y$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ верно, что:

1. предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ существует и конечен;
2. предел $\lim\limits_{y \to A} g(y) = B$ существует и конечен;
3. существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}_E(x_0)$ точки x_0 на множестве E определения функции f, что $\forall x \in \mathring{U}_E(x_0) : f(x) \neq A$,

то предел их композиции $(g \circ f) : E \to \mathbb{R}$ в точке x_0 существует и равен B.

Доказательство

Зафиксируем произвольную окрестность $V(B)$ предела функции g в точке A. По определению Коши,

$$\exists \mathring{U}_Y(A) : y \in \mathring{U}_Y(A) \implies g(y) \in V(B)$$

При этом, по условию (3) теоремы и определению Коши,

$$\exists \mathring{U}_E(x_0) : x \in \mathring{U}_E(x_0) \implies f(x) \in \mathring{U}_Y(A)$$

Объединив эти два наблюдения, получим, что

$$\exists \mathring{U}_E(x_0) : x \in \mathring{U}_E(x_0) \implies g(f(x)) \in V(B),$$

что и требовалось доказать.

Предельный переход в неравенствах

Теорема 5

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то:

1. если $A < B$, то существует окрестность $\mathring{U}_E(x_0)$ такая, что для любой её точки выполнено неравенство $f(x) < g(x)$;
2. если существует окрестность $\mathring{U}_E(x_0)$ такая, что для любой её точки выполнено неравенство $f(x) < g(x)$, то $A \le B$.

Доказательство

Пункт (1). Пусть $A < B$. Возьмем произвольное C такое, что $A < C < B$.
По определению Коши,

$$\exists \mathring{U}'_E : x \in \mathring{U}'_E \implies |f(x) - A| < C - A$$

$$\exists \mathring{U}''_E : x \in \mathring{U}''_E \implies |g(x) - B| < B - C$$

Отсюда

$$A - C < f(x) - A < C - A \iff 2A - C < f(x) < C$$

$$C - B < g(x) - B < B - C \iff C < g(x) < 2B - C$$

Рассмотрим $\mathring{U}_E = \mathring{U}'_E \cap \mathring{U}''_E$. Для этой окрестности верно, что

$$x \in \mathring{U}_E \implies f(x) < C < g(x),$$

что и требовалось доказать.

Пункт (2). Пусть существует окрестность $\mathring{U}'_E(x_0)$ такая, что для любой её точки выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.
Предположим, что при этом $A > B$. По доказанному в пункте (1), существует окрестность $\mathring{U}''_E(x_0)$ такая, что для любой её точки выполнено неравенство $f(x) > g(x)$.
Рассмотрим $\mathring{U}_E(x_0) = \mathring{U}'_E(x_0) \cap \mathring{U}''_E(x_0)$ и незамедлительно придём к противоречию. Это значит, что $A \le B$, что и требовалось доказать.

Теорема о двух милиционерах

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$ и при этом $\forall x \in E : f(x) \leq r(x) \leq g(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = A$.

Доказательство

Пусть задан $\varepsilon > 0$.
По определению Коши,

$$\exists \mathring{U}'_E(x_0) : x \in \mathring{U}'_E \implies A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

$$\exists \mathring{U}''_E(x_0) : x \in \mathring{U}''_E(x_0) \implies A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$$

Рассмотрим $\mathring{U}_E = \mathring{U}'_E \cap \mathring{U}''_E$. Для этой окрестности верно, что

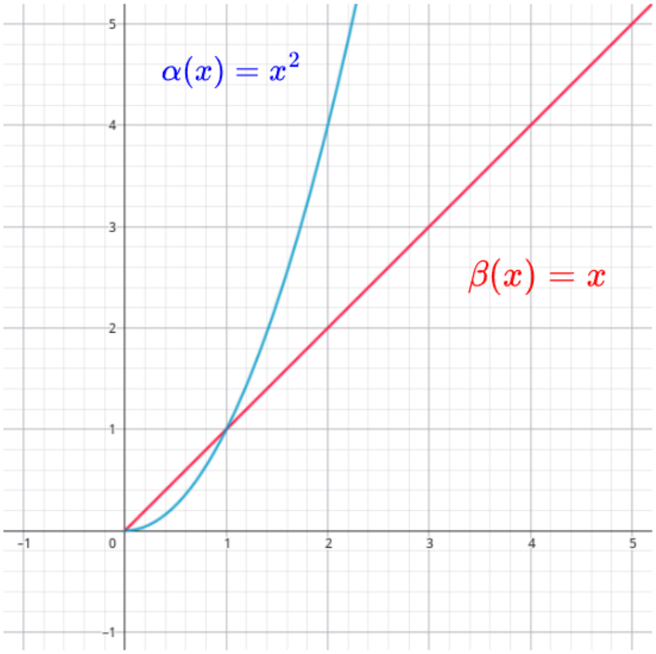
$$x \in \mathring{U}_E \implies A - \varepsilon < f(x) \leq r(x) \leq g(x) < A + \varepsilon,$$

то есть при x, лежащем в окрестности $\mathring{U}_E$, значения $r(x)$ лежат в ε-окрестности A. Поскольку ε был выбран произвольно, то определение предела выполняется, что и требовалось доказать.

Сравнение бесконечно малых

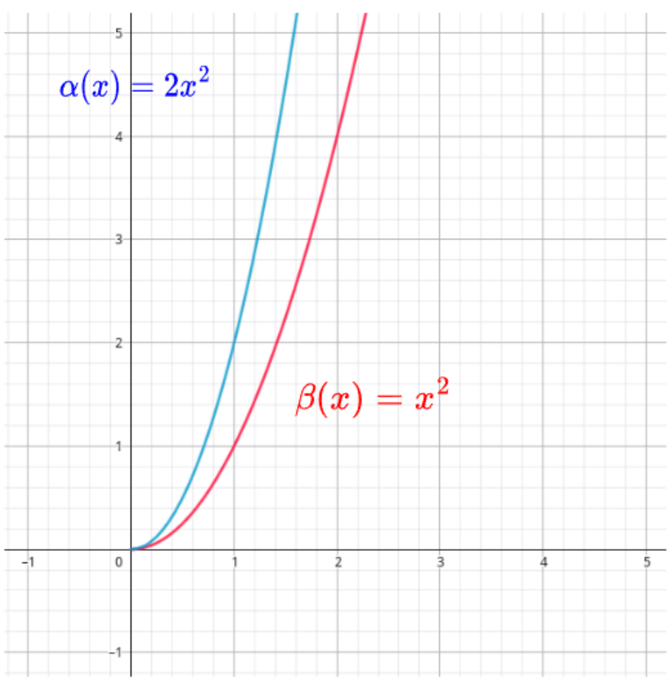
Info

Бесконечно малую при $x \to x_0$ функцию α называют функцией **более высокого порядка малости**, чем бесконечно малая при $x \to x_0$ функция β, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. При этом пишут $\alpha \equiv o(\beta)$ или $\alpha \prec \beta$.



$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0 \implies \alpha \prec \beta$$

> ⓘ **Info**
>
> Бесконечно малую при $x \to x_0$ функцию α называют функцией **одного порядка малости** с бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией β, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \in \mathbb{R} \neq 0$.
>
> При этом пишут $\alpha \equiv O(\beta)$ или $\alpha \asymp \beta$.

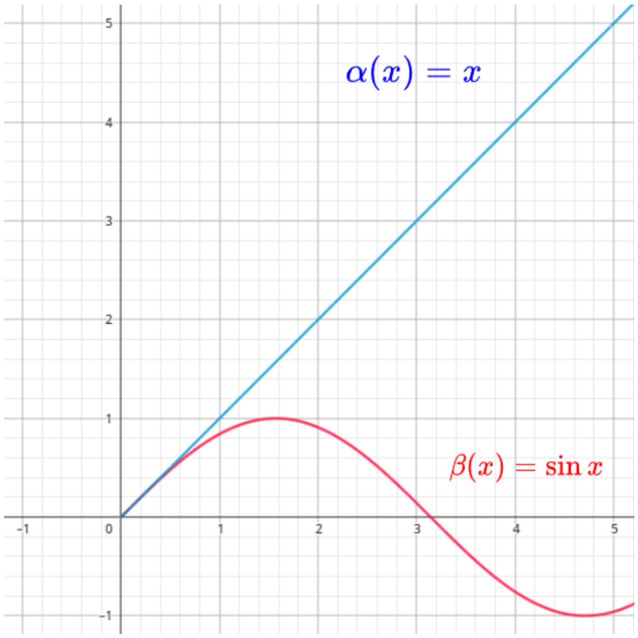


$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2} = 2 \implies \alpha \asymp \beta$$

> ⓘ **Info**

Бесконечно малую при $x \to x_0$ функцию α называют **эквивалентной** бесконечно малой при $x \to x_0$ функции β, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

При этом пишут $\alpha \sim \beta$.



$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \implies \alpha \sim \beta$$

Свойства и теоремы

Лемма 10

Отношение эквивалентности бесконечно малых является бинарным отношением эквивалентности. Иными словами, оно рефлексивно, симметрично и транзитивно:

$$\alpha \sim \alpha \tag{a}$$

$$\alpha \sim \beta \implies \beta \sim \alpha \tag{b}$$

$$\alpha \sim \beta \land \beta \sim \gamma \implies \alpha \sim \gamma \tag{c}$$

Доказательство

Рефлексивность. Очевидно, что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.

Симметричность. По условию леммы,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

Поскольку функция $f(x) = x^{-1}$ непрерывна в точке $x = 1$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=(\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta})^{-1}=1^{-1}=1,$$

что и требовалось доказать.

Транзитивность. По условию леммы,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\gamma}=1$$

Воспользовавшись теоремой (3), получим, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim_{x\to x_0}(\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\gamma})=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}\times\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\gamma}=1\times 1=1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6

Если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ существует и конечен, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ существует и равен $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Доказательство

По условию теоремы,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$$

Воспользовавшись теоремой (3) и леммой (10), получим, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\times\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\times\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=1\times 1=1,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 11

Две бесконечно малые эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность является бесконечно малой более высокого порядка, чем исходные.

Доказательство

Необходимость. Пусть $\alpha\sim\beta$ при $x\to x_0$. По определению,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

Воспользовавшись теоремой (3) и леммой (10), получим, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\Big)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-\frac{\beta(x)}{\beta(x)}\Big)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta(x)}=1-1=0,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. По условию леммы,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\beta}=0$$

Воспользовавшись теоремой (3), получим, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}(\frac{\alpha-\beta}{\beta}+1)=0+1=1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема Вейерштрасса

Если монотонная функция $f:E\to\mathbb{R}$ финально ограничена в точке x_0, то она имеет односторонний предел в этой точке.

Доказательство

Положим, что f монотонно неубывает. Доказательство остальных случаев проводится по аналогии.

Поскольку f финально ограничена, то

$$\exists\mathring{U}_E(x_0):x\in\mathring{U}_E(x_0)\implies f(x)<M=\sup_{x<x_0}f(x)\neq+\infty$$

По определению супремума,

$$\forall\varepsilon>0:\exists x_1>0:M-f(x_1)<\varepsilon$$

Поскольку при этом функция монотонно неубывает, то это утверждение можно усилить:

$$\forall\varepsilon>0\;\exists x_1>0:(x_1<x<x_0)\implies M-f(x)<\varepsilon$$

Приняв x_0-x_1 за δ, получим, что

$$\forall\varepsilon>0\;\exists\delta>0:(x_0-\delta<x<x_0)\implies M-f(x)<\varepsilon,$$

> то есть M является левосторонним пределом f в точке x_0, что и требовалось доказать.