Лекция 04 — Теория порядков

Классификация отношений порядка

Отношение	Характеристика
Препорядок	Рефлексивность и транзитивность
Нестрогий частичный порядок	Рефлексивность, транзитивность и антисимметричность
Строгий частичный порядок	Иррефлексивность, транзитивность и асимметричность
Слабая связность	$\forall x, y \in M : (x \neq y) \implies (x \, R \, y \lor y \, R \, x)$
Связность	$\forall x, y \in M : x \, R \, y \lor y \, R \, x$
Нестрогий линейный порядок	Связное отношение нестрогого частичного порядка
Строгий линейный порядок	Слабо связное отношение строгого частичного порядка

Частично упорядоченные множества

Info

Частично упорядоченное множество (*partially ordered set, poset*) $\langle S, \leq \rangle$ — множество S с определенным на нем отношением порядка $\leq$.

Info

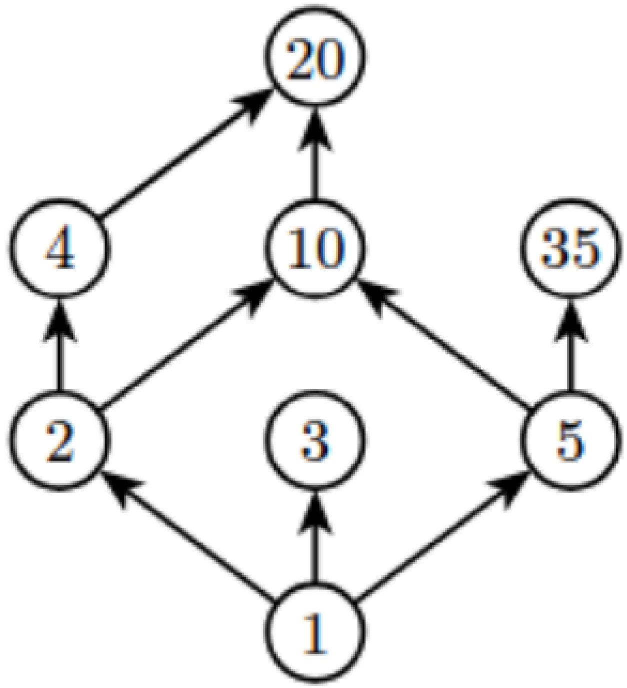
Диаграмма Хассе — визуальное отображение частично упорядоченного множества, где:

- каждый элемент представлен вершиной;
- если $x < y$ и нет такого z что $x < z < y$, то есть ребро $x \to y$;
- элементы упорядочены вертикально по отношению порядка;
- транзитивные связи опускаются.

Пример диаграммы Хассе для множества D и отношения делимости

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 35\}$$

$$R = |$$



> **Info**
>
> В частично упорядоченном множестве $\langle S, \leq \rangle$ элемент $y \in S$ **покрывает** $x \in S$ ($x \lessdot y$), если между ними нет никакого элемента:
>
> $$x \lessdot y \iff (x < y) \wedge \nexists z \in S : x < z < y,$$
>
> где $x < y \iff (x \leq y) \wedge (x \neq y)$ (*индуцированный строгий порядок*)
>
> Можно заметить, что диаграмма Хассе — это граф отношения покрытия.

Максимальные, минимальные, наибольшие и наименьшие элементы

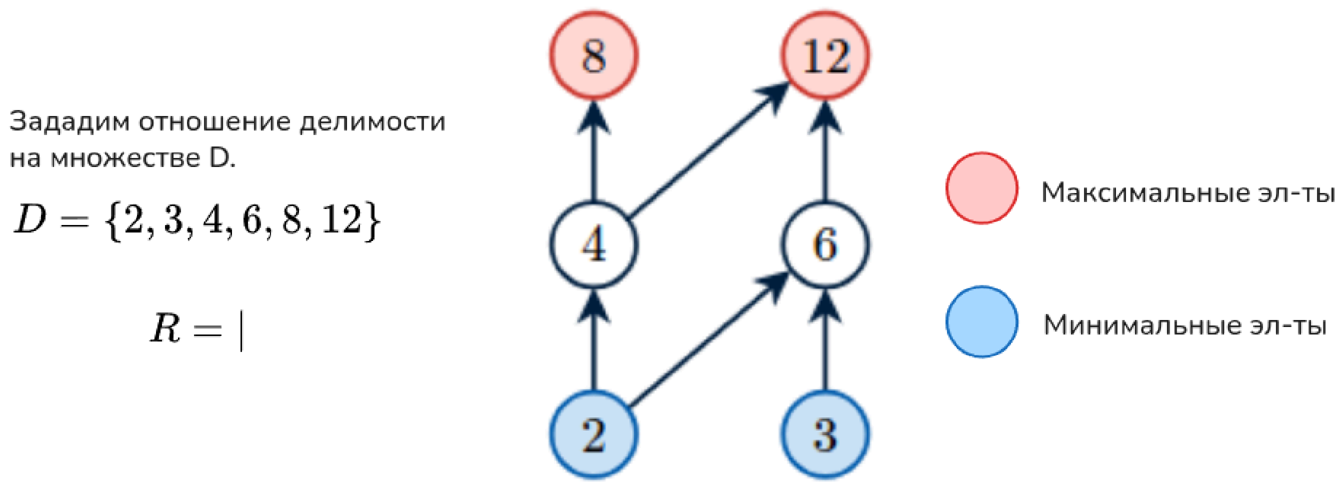
> **Info**
>
> Элемент $m \in S$ называется **максимальным** элементом частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он не меньше всех элементов из этого множества:
>
> $$\forall x \neq m : \overline{m \leq x} \iff \nexists x \neq m (m \leq x)$$
>
> Эквивалентно, $\forall x \in S : (m \leq x) \implies (m = x)$/.

Info

Элемент $m \in S$ называется **минимальным** элементом частичного упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он не больше всех элементов из этого множества:

$$\forall x \neq m : \overline{x \leq m} \iff \nexists x \neq m (x \leq m)$$

Эквивалентно, $\forall x \in S : (x \leq m) \implies (x = m)$.

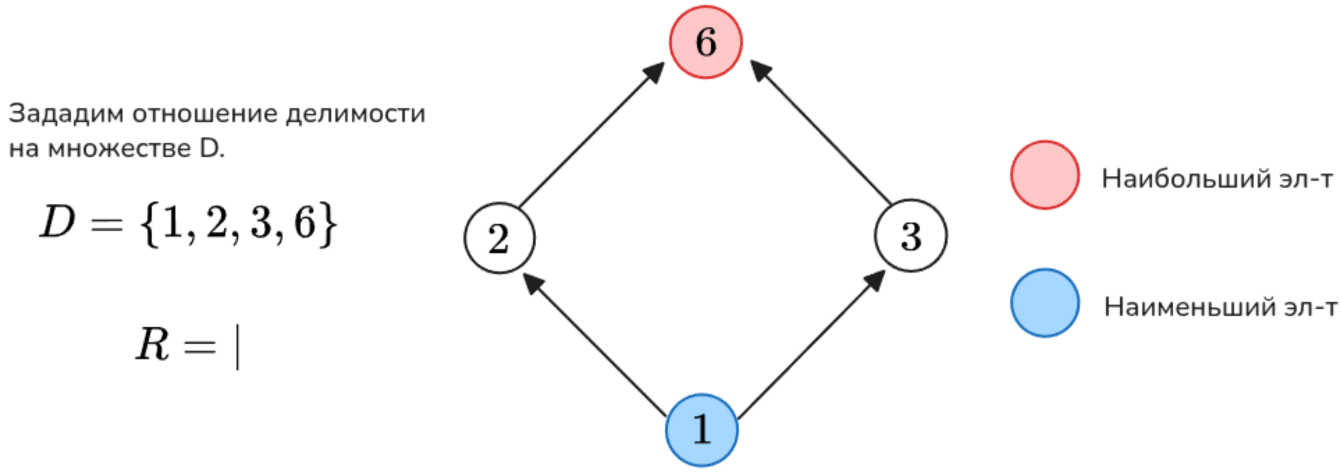


Info

Элемент $g \in S$ называется **наибольшим** элементом частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он больше либо равен всем элементам этого множества, т.е. $\forall x \in S : x \leq g$

Info

Элемент $g \in S$ называется **наименьшим** элементом частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он меньше либо равен всем элементам этого множества, т.е. $\forall x \in S : g \leq x$



⚠ **Warning**

Если наибольший или наименьший элементы существуют, то они *единственны*.

Important

Ключевое различие между максимальным и наибольшим (минимальным и наименьшим) элементами в том, что наибольший элемент обязан быть сравнимым со всеми остальными, в то время как максимальный может вообще не быть сравним ни с чем.
Менее формально, максимальный элемент — это *локальный* максимум, а наибольший — *глобальный*.

Дуальное множество

Info

Частично упорядоченное множество $\langle S, \geq \rangle$ называется **дуальным** к $\langle S, \leq \rangle$, если $x \leq y \iff y \geq x$.

⚠ **Warning**

В дуальном множестве минимальный элемент станет максимальным, наименьший -— наибольшим, и наоборот.

Цепи и антицепи

> **Info**
>
> **Цепь** — подмножество $C \subseteq \langle M, \leq \rangle$ такое, что любые два элемента в нём сравнимы. Формально, $\forall x, y \in C : (x \leq y \vee y \leq x)$.

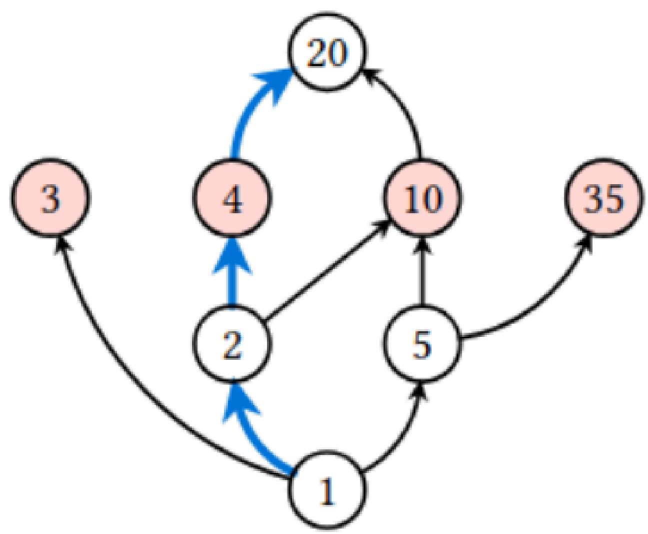
> **Warning**
>
> Цепь — линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества.

> **Info**
>
> **Антицепь** — подмножество $C \subseteq \langle M, \leq \rangle$ такое, что любые два различных элемента в нём не сравнимы. Формально, $\forall x, y : (x \neq y) \implies (x \nleq y \wedge y \nleq x)$

Зададим отношение делимости
на множестве D.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 35\}$$

$$R = |$$



Примеры цепей:

$1, 2, 4, 20$ (максимальная цепь)

$1, 5, 20$

Примеры антицепей:

$3, 4, 10, 35$ (максимальная антицепь)

$3, 2, 35$

> **Теорема Дилворта**
>
> Минимальное количество β цепей, необходимое для покрытия произвольного частично упорядоченного множества S, равно размеру α максимальной антицепи в нём.

Доказательство

1. $\alpha \leq \beta$
   Предположим, что S разбивается на k цепей $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Выберем произвольную антицепь A. Поскольку её элементы попарно несравнимы, каждая цепь содержит не более одного элемента из A, то есть $|A| \leq k$. Поскольку это верно для любой антицепи и для любого разбиения, то закономерно получаем $\alpha \leq \beta$, что и требовалось доказать.
2. $\beta \leq \alpha$
   Сконструируем разбиение на цепи размера α следующим образом. Начнём с $\mathcal{C} = \varnothing$, и до тех пор, пока S непусто, будем проделывать следующее:

   1. Выберем максимальный элемент $x \in S$
   2. Построим цепь C, оканчивающуюся в x, путём последовательного добавления к ней сначала самого x, а после — максимального предка $y \in S \setminus C$, меньшего текущего конца цепи C.
   3. Добавим цепь C в разбиение $\mathcal{C}$ и удалим все её элементы из S.

   Из алгоритма построения следует, что:
   1. Каждый элемет $\mathcal{C}$ — это цепь;
   2. Цепи в $\mathcal{C}$ покрывают всё множество S;
   3. Каждая цепь включает в себя ровно один из элементов максимальной антицепи A, т.е. $|\mathcal{C}| = \alpha$.

Таким образом, S может быть покрыто α цепями, то есть $\beta \leq \alpha$, что и требовалось доказать.