Лекция 08 — Вполне порядки

Содержание

Вполне порядки

> **Info**
>
> Частично упорядоченное множество $\langle M, \leq \rangle$ называется **вполне упорядоченным**, если в любом его непустом подмножестве $S \subseteq M$ существует *наименьший* элемент:
>
> $$\forall S \subseteq M : (M \neq \varnothing) \implies (\exists m \in S : \forall x \in S : m \leq x)$$
>
> *Замечание*. Любое вполне упорядоченное множество также линейно упорядочено.

> **Принцип вполне упорядочивания**
>
> В любом непустом подмножестве $\mathbb{N}$ существует *наименьший* элемент.

Фундированные отношения

> **Info**
>
> Частично упорядоченное множество $\langle M, \leq \rangle$ называется **фундированным**, если в любом непустом подмножестве $S \subseteq M$ существует *минимальный* элемент:

$$\forall S \subseteq M : (M \neq \varnothing) \implies (\exists m \in S : \forall x \in S : x \nleq m)$$

Трансфинитная индукция

Пусть $\langle S, \prec \rangle$ — фундированное множество. Чтобы показать, что $\forall x \in S : P(x)$, достаточно показать, что

$$\forall x \in S : (\forall y \prec x : P(y)) \implies P(x)$$

Условия восходящих и нисходящих цепей

ⓘ **Info**

Для произвольного частичного порядка $\leq$ определим **индуцированный строгий порядок** $<$ следующим образом:

$$x < y \iff x \leq y \land x \neq y$$

Аналогично, $x < y \implies y > x$.

ⓘ **Info**

Частично упорядоченне множество $\langle S, \leq \rangle$ удовлетворяет **условию нисходящей цепи** (*Descending Chain Condition*), если в нём не существует бесконечно убывающих цепей:

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

Теорема 1

Частично упорядоченное множество $\langle S, \leq \rangle$ удовлетворяет DCC тогда и только тогда, когда оно фундировано.

Доказательство

Достаточность. Допустим, что в $\langle S, \leq \rangle$ существует бесконечно уменьшающаяся цепь $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$. Рассмотрим множество $T = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. По определению фундированности, в нём существует минимальный элемент x_k, однако поскольку он принадлежит бесконечно убывающей цепи, то $\exists x_{k+1} < x_k$. Противоречие.

> *Необходимость*. Рассмотрим непустое подмножество $T \subseteq S$ и выберем произвольный $x_0 \in T$. Если x_0 не является минимальным, то выберем $x_1 \in T : x_1 < x_0$, после чего повторим процесс. Поскольку мы запретили бесконечно убывающие цепи, этот процесс обязательно завершится.

> **Info**
>
> Частично упорядоченное множество $\langle S, \leq \rangle$ удовлетворяет **условию восходящей цепи** (*Ascending Chain Condition*), если в нём не существует бесконечно возрастающих цепей:
>
> $$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

Нётерово отношение

> **Info**
>
> Отношение R такое, что R^{-1} фундировано, называется **нётеровым**.

> **Теорема 2**
>
> Частично упорядоченное множество $\langle S, \leq \rangle$ удовлетворяет ACC тогда и только тогда, когда оно нётерово.
>
> **Доказательство**
>
> $\langle S, \leq \rangle$ нётерово $\iff$ $\langle S, \geq \rangle$ фундировано $\iff$ $\langle S, \geq \rangle$ удовлетворяет DCC $\iff$ $\langle S, \leq \rangle$ удовлетворяет ACC.
