Лекция 05 — Функции

Содержание

"Весь мир — это функция."
— К. И. Чухарев

Основные понятия

> **Info**
>
> **Функцией** (*total function*) $f : A \to B$ называется бинарное отношение, сопоставляющее каждому элементу из A *ровно один* элемент из B. Формально, условие "ровно один" разбивается на следующие два:
>
> 1. Функциональность (*правая уникальность*, везде уникально) — каждому аргументу соответствует не более одного значения:
>
> $$\forall x_1, x_2 \in A : f(a) = x_1 \land f(a) = x_2 \implies x_1 = x_2$$
>
> 2. Тотальность (*левая тотальность*, везде определено) — каждому аргументу соответствует не менее одного значения:
>
> $$\forall x \in A : \exists y \in B : y = f(x)$$
>
> Отношение, обладающее только свойством функциональности, называется *частичной функцией*.

> **Important**
>
> Для функции $f : A \to B$:

- Множество A — **домен** $\mathrm{Dom}(f)$ или *область определения*;
- Множество B — **кодомен** $\mathrm{Cod}(f)$ или *область прибытия*;
- **Область значений** $\mathrm{Range}(f)$ — множество всех значений, которые f на самом деле принимает:

$$\mathrm{Range}(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\} = \{f(a) \mid a \in A\}$$

Info

Пусть $f : A \to B$ и $S \subseteq A$. **Образ** $f(S)$ множества S под f — это множество всех значений, которая функция принимает на множестве S. Формально,

$$f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$$

Info

Пусть $f : A \to B$ и $T \subseteq B$. **Прообраз** $f^{-1}(T)$ множества T под f — это множество всех аргументов, при которых функция принимает значения из T. Формально,

$$f^{-1}(T) = \{x \in A \mid f(x) \in T\}$$

Свойства функций

Info

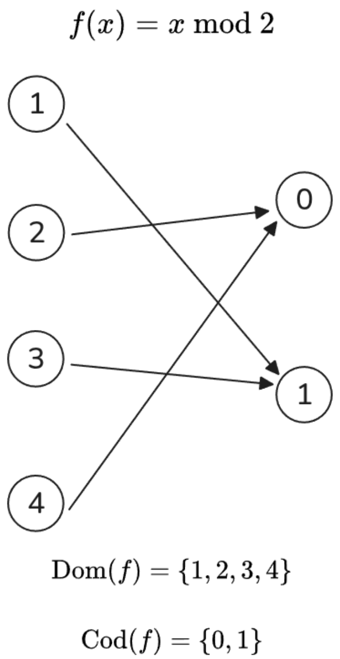
Функция $f : A \to B$ называется **инъекцией** (*лево уникальной*), если каждому значению соответствует не более одного аргумента или, формально,

$$\forall x_1, x_2 \in A : (f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2),$$

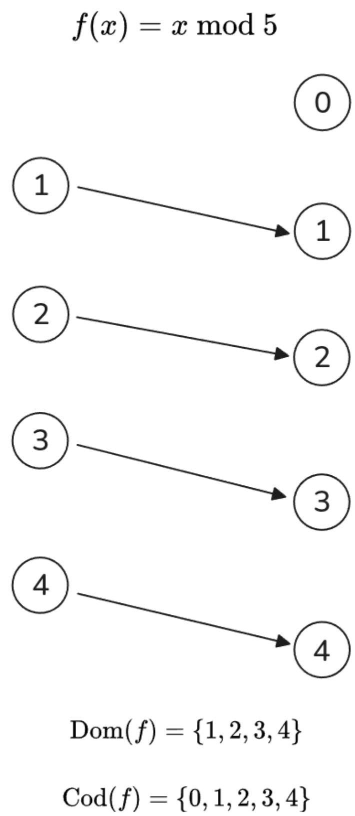
или

$$\forall x_1, x_2 \in A : (x_1 \neq x_2) \implies f(a_1) \neq f(x_2)$$

Замечание. Если отношение не является функцией, но удовлетворяет свойству левой уникальности, то оно называется *инъективным* (но не *инъекцией*!)



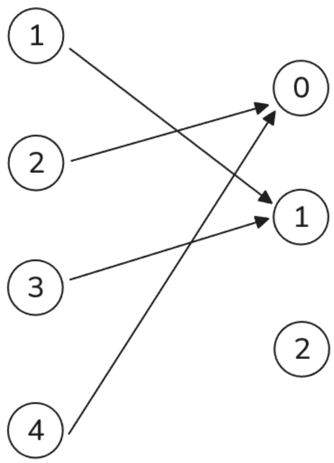
Пример неинъективной функции



Пример инъективной функции

> **Info**
>
> Функция $f : A \to B$ называется **сюръекцией** (*право тотальной*), если каждому значению соответствует не менее одного аргумента или, формально,
>
> $$\forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y$$
>
> *Замечание* 1. Если отношение не является функцией, но удовлетворяет свойству правой тотальности, то оно называется *сюръективным* (но не *сюръекцией*!)
> *Замечание 2*. Для сюръективных функций $Range(f) = Cod(f)$

$f(x) = x \bmod 2$

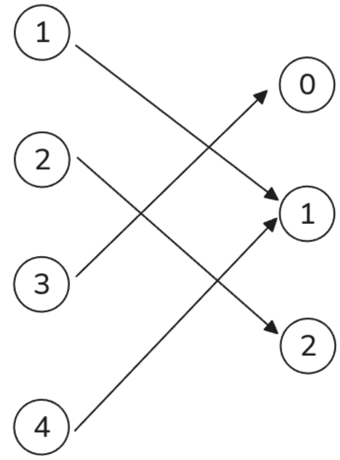


Пример несюръективной функции

$\mathrm{Dom}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathrm{Cod}(f) = \{0, 1, 2\}$

$f(x) = x \bmod 3$



Пример сюръективной функции

$\mathrm{Dom}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathrm{Cod}(f) = \{0, 1, 2\}$

Info

Функция $f : A \to B$ называется **биекцией**, она одновременно инъективная и сюръективная, т.е. каждому аргументу соответствует ровно одно значение.

Info

Функция $f : A \to B$ называется **монотонной**, если она сохраняет отношения порядка. Формально, для двух частично упорядоченных множеств $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ функция $f : A \to B$ считается:

1. *монотонной*, если $x \leq_A y \implies f(x) \leq_B f(y)$
2. *антитонной*, если $x \leq_A y \implies f(x) \geq_B f(y)$

В частности, среди вещественнозначных функций выделяют:

1. монотонно неубывающие: $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
2. монотонно возрастающие: $x < y \implies f(x) < f(y)$
3. монотонно невозрастающие: $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
4. монотонно убывающие: $x < y \implies f(x) \quad f(y)$

Теорема 1

Если $f : \ \to \ $ — монотонно возрастающая или убывающая функция, то она инъективна.

Доказательство

> Рассмотрим произвольные аргументы $x_1 \neq x_2$.
> Если $x_1 < x_2$, то, по определению монотонности, $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_1)\ \ f(x_2)$, то есть, в общем случае, $f(x_1) \neq f(x_2)$.
> Если $x_1\ \ x_2$, то, по определению монотонности, $f(x_1)\ \ f(x_2)$ или $f(x_1) < f(x_2)$, то есть, в общем случае, $f(x_1) \neq f(x_2)$.
>
> Таким образом, $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, что и требовалось доказать.

Info

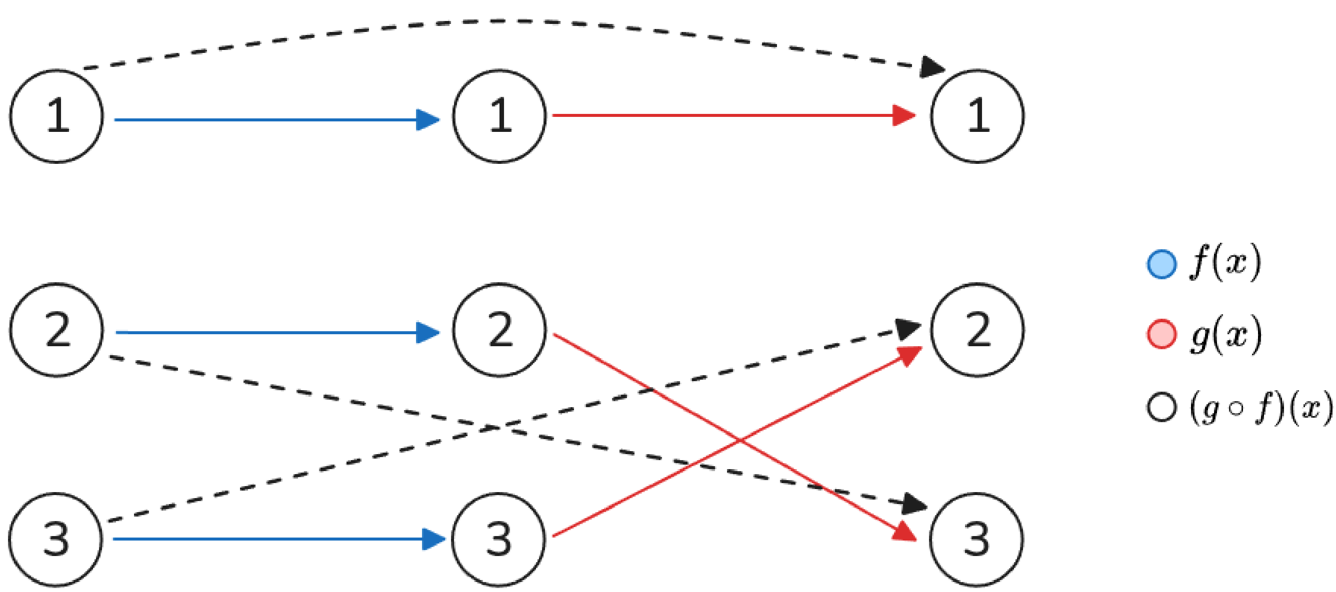
Функция $\mathrm{id}_A : A \to A$ такая, что $id_A(x) = x$ называется **тождественной** (*identity map*).

Композиция функций

Info

Композицией функций $f : A \to B$ и $g : B \to C$ $g \circ f$ называется функция $g \circ f : A \to C$ такая, что

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$



Important

1. Композиция **не** коммутативна.
2. Композиция ассоциативна.

3. Нейтральный элемент — функция идентичности:

$$\mathrm{id}_B \circ f = f$$

$$g \circ \mathrm{id}_A = g$$

4. Композиция сохраняет свойства композируемых функций (инъективность, сюръективность, биективность).

Info

Степень f^n функции $f : A \to A$ определяется следующим образом:

$$f^0 = id_A$$

$$f^{n1} = f \circ f^n = f^n \circ f$$

Замечание 1. Это определение также применимо к функциям вида $f : X \to Y$, где $Y \subseteq X$.
Замечание 2. Чтобы избежать путаницы со степенями значений $(f(x))^n$, можно использовать обозначение $f^{\circ n}$.

Обратная функция

Info

Функция $f^{-1} : B \to A$ называется **обратной** к $f : A \to B$, если

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Теорема 2

Обратная функция $f^{-1} : B \to A$ существует тогда и только тогда, когда исходная функция $f : A \to B$ биективна.

Доказательство

Необходимость. Покажем, что если для функции f существует обратная функция f^{-1}, то f — биекция.

- *Инъективность*. Рассмотрим x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) = f(x_2)$. Применив обратную функцию к обеим частям тождества, получим, что

$$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)),$$

откуда, по определению обратной функции, $x_1 = x_2$. Таким образом, f — это инъекция, что и требовалось доказать.
- *Сюръективность*. Рассмотрим $y \in B$ и $x \in A$ такое, что $x = f^{-1}(y)$. По определению обратной функции,

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y,$$

то есть f — сюръекция, что и требовалось доказать.

Поскольку f инъективна и сюръективна, то f — биекция, что и требовалось доказать.

Достаточность. Покажем, что если f — биекция, то существует обратная функция f^{-1}.
По определению, для любого значения y функции f существует ровно один его прообраз x. Определим $f^{-1}(y) = x$, где x — прообраз y. В таком случае, по определению

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

т.е. f^{-1} — действительно обратная функция, что и требовалось доказать.

Таким образом, теорема доказана.

Important

Если заданы биективные функции $f : A \to B$ и $g : B \to C$, то верно, что:

1. f^{-1} — биекция.
2. $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A$
3. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_B$
4. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$

Характеристическая функция

Info

Характеристическая функция (индикатор) ${}_s : A \to \{0, 1\}$ определяется следующим образом:

$${}_S(x) = \begin{cases}1, x \in S \\ 0, x \quad S\end{cases}$$

Менее формально, характеристическая функция определяет принадлежность элемента x множеству S.

Important

Для любых $A, B \subseteq U$:

1. ${}_{A \cap B} = {}_A \times {}_B$
2. ${}_{A \cup B} = {}_A$
3. ${}_{\overline{A}} = 1 - {}_A$
4. ${}_{AB} = {}_A \ {}_B - 2 \times {}_A \times {}_B$
5. ${}_\varnothing = 0, {}_U = 1$