Конспект 04 — Дифференциальное исчисление

Содержание

"В психбольнице свихнувшийся математик бегает по коридору и орёт на всех:
— Я вас всех продифференцирую!
Все, естественно, шарахаются от него, и лишь один пациент спокойно сидит на стуле.
Математик орёт ему:
— Я тебя продифференцирую!
— А я экспонента."

— Конфуций, 239 год до н.э.

Основные определения

Дифференцируемые функции

Определение

Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, предельной для множества $E \subseteq \mathbb{R}$, если

$$\exists A, o : \forall h : f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \alpha(h)h,$$

где:

- $x_0 + h \in E$
- A — константа, зависящая от выбранной предельной точки
- $\alpha(h)$ — бесконечно малая функция, зависящая от выбранной предельной точки

Иными словами, функция дифференцируема в точке x_0, если изменение её значения в любой окрестности этой точки линейно с точностью до поправки, бесконечно малой относительно величины h отклонения от точки x_0.

При этом величину $f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x)$ называют *приращением функции* , величину $h = \Delta x$ — *приращением аргумента*.

Определение

Графиком дифференцируемой функции является сплошная линия, называемая **гладкой кривой**.

Определение

Функция называется **дифференцируемой на интервале**, если она дифференцируема в любой его точке.

Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности

Дифференцируемая функция непрерывна.

Доказательство

Рассмотрим произвольную функцию $f\left(x\right)$, дифференцируемую в точке x_0.
По определению дифференцируемости,

$$f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=A\left(x-x_0\right)+o\left(x-x_0\right),$$

откуда

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+A\left(x-x_0\right)+o\left(x-x_0\right)$$

Нетрудно заметить, что при $x\to x_0$ значения $A\left(x-x_0\right)$ и $o\left(x-x_0\right)$ стремятся к 0, а значит, что значение $f\left(x\right)$ стремится к $f\left(x_0\right)$, т.е. функция непрерывна, что и требовалось доказать.

Замечание. Обратное утверждение неверно!
Например, функция $f\left(x\right)=\left|x\right|$ в точке $x_0=0$ непрерывна, но не дифференцируема.

Дифференциал

Определение

Пусть функция $f:E\to\mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0.
Функцию $h\mapsto Ah$, определяющую линейную часть её приращения в точке x_0, называют **дифференциалом** $\mathrm{d}f\left(x_0\right)$ функции f в точке x_0.

Теорема 1

Дифференциал определён однозначно.

Доказательство

Допустим, приращение функции $f(x)$ в точке x_0 представимо в виде:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=A_1h+\alpha_1(h)h$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=A_2h+\alpha_2(h)h$$

$$A_1\neq A_2 \qquad\qquad \alpha_1\neq\alpha_2$$

Рассмотрим разность этих тождеств:

$$(A_1-A_2)h+\alpha_1(h)h-\alpha_2(h)h=0 \implies$$

$$\implies A_1-A_2=\alpha_2(h)-\alpha_1(h)$$

Поскольку α_1 и α_2 — бесконечно малые, то при $h\to 0$ будем иметь

$$\lim_{h\to 0}(A_1-A_2)=\lim_{h\to 0}(\alpha_2(h)-\alpha_1(h)) \implies$$

$$\implies A_1-A_2=0,$$

что и требовалось доказать.

Производная

Определение

Предел отношения приращения функции $f(x)$ к приращению её аргумента в точке x_0 называется её **производной**:

$$f'(x_0)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Соответствующие левосторонний и правосторонний пределы будут называться **левой** и **правой производной** соответственно.

Определение

Функция называется **дифференцируемой на отрезке**, если она дифференцируема на соответствующем интервале и при этом на концах отрезка существуют односторонние производные.

Теорема 2

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

Доказательство

Достаточность.
Запишем определение производной:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Его также можно записать в виде

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h), \quad \alpha(h) \to 0,$$

что равносильно

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(h)h,$$

что в точности повторяет определение дифференцируемости.

Необходимость.
Запишем определение дифференцируемости:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \alpha(h)h$$

Разделим на h (всегда отличное от 0) и получим, что

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \alpha(h),$$

откуда

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A,$$

что в точности повторяет определение производной.

⚠ **Важно!**

Из доказательства теоремы (2) немедленно следуют два крайне важных замечания:

1. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и её приращение имеет вид $Ah + \alpha(h)h$. Тогда производная функции в этой точке равна A.
2. Пусть $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, равную $f'(x_0)$. Тогда дифференциал функции в этой точке равен $f'(x_0)h$.

Геометрический смысл дифференциала и производной

Наводящие соображения

Пусть мы хотим аппроксимировать поведение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 с помощью прямой вида $c_0 + c_1(x - x_0)$. Формально, мы должны подобрать такие коэффициенты c_0 и c_1, что

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Из этого тождества легко заметить, что

$$c_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$c_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0}$$

Если при этом функция непрерывна, то коэффициенты принимают следующий вид:

$$c_0 = f(x_0)$$

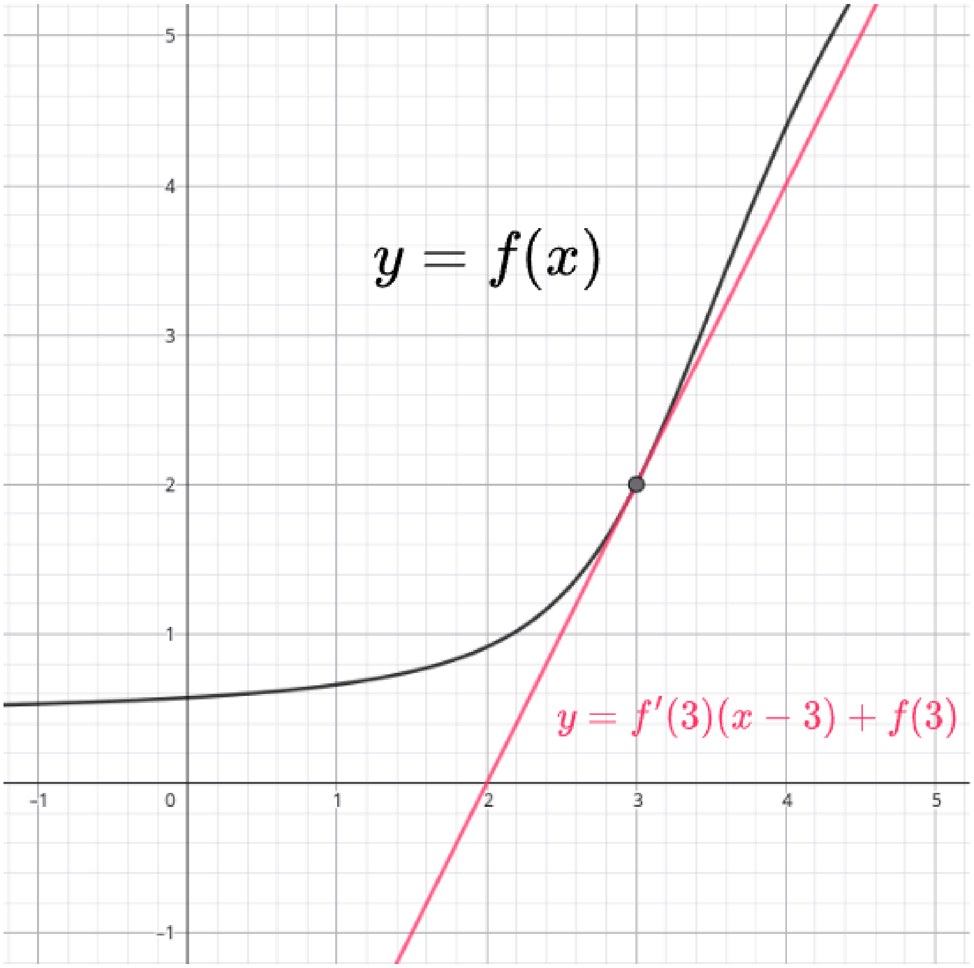
$$c_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Таким образом, верно следующее

> **Утверждение**
>
> Непрерывная функция $f(x)$ допускает линейное приближение тогда и только тогда, когда она дифференцируема, причем наилучшее приближение доставляется функцией вида
>
> $$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Касательная

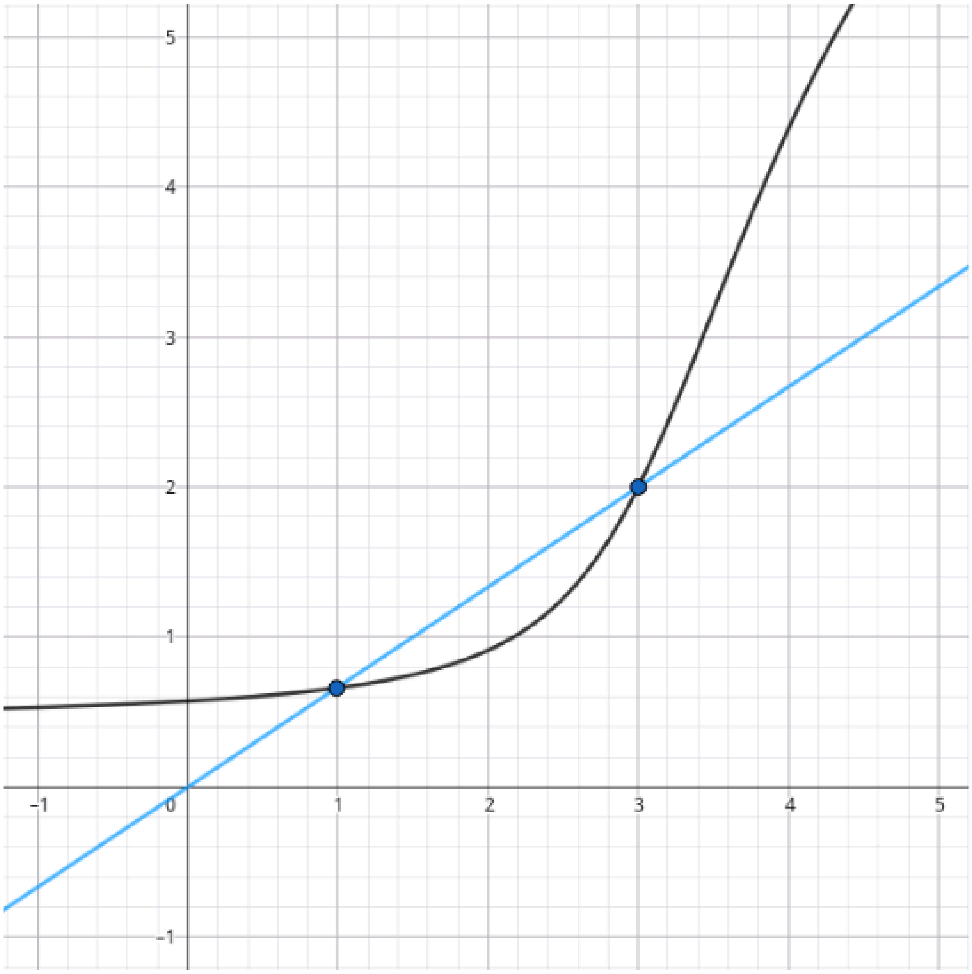
> **Определение**
>
> **Касательной** к графику непрерывной дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x_0 будет являться прямая, заданная уравнением
>
> $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Геометрическое представление касательной

В то время как касательная достаточно нехитро определяется аналитически, существует и другой подход — более геометрический и, вероятно, более наглядный.

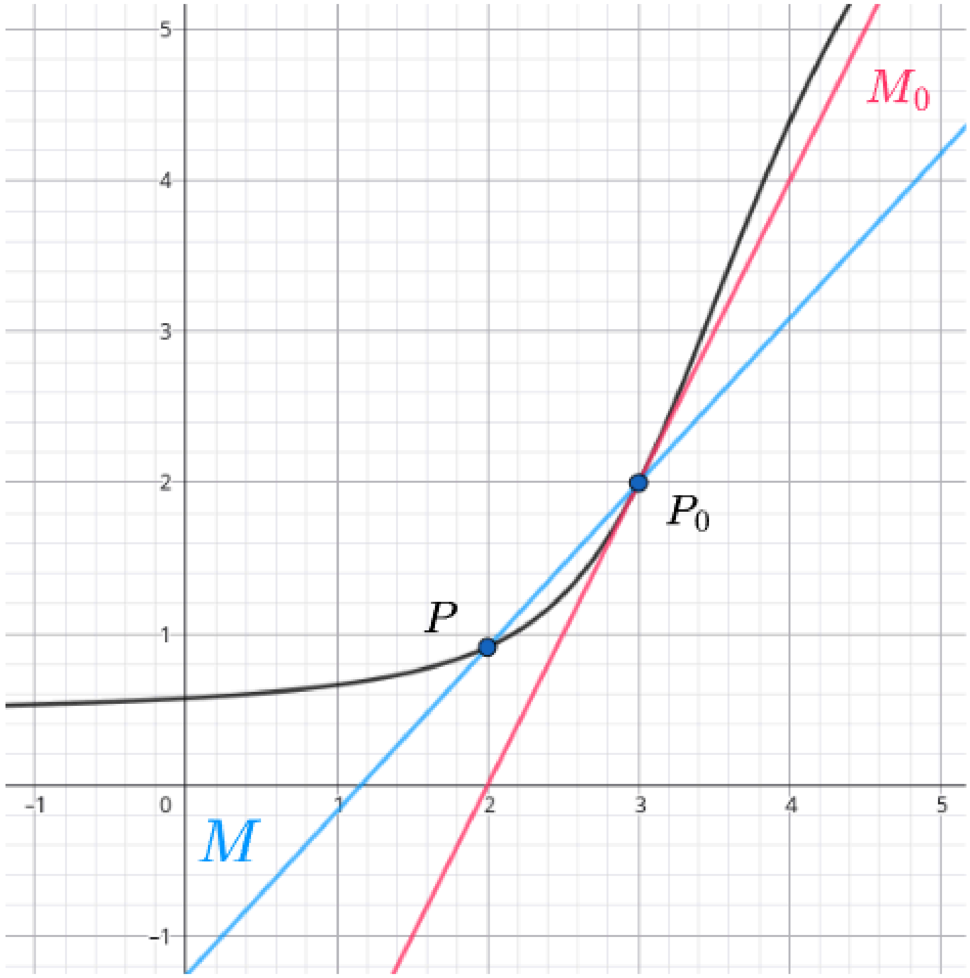
Пусть мы хотим найти касательную к графику некоторой функции $f(x)$ в точке P_0. Рассмотрим произвольную точку P на этом графике, отличную от P_0. Прямая, заданная точками P и P_0, будет называться *секущей*:



Если при этом точку P устремить вдоль кривой к точке P_0, то секущая M будет стремиться к некоторому своему предельному положению, то есть прямой M_0 такой, что угол между ними стремится к 0. Итак,

ⓘ **Определение**

Касательная является предельным положением секущей.



Правила дифференцирования

Определение

Процесс нахождения производной (а равно и дифференциала) функции в точке называется **дифференцированием**.

Далее будет приведён ряд полезных свойств, значительно упрощающих процесс дифференцирования.

> **Дифференцирование суммы**
>
> Если две функции $f : E \to \mathbb{R}$ и $g : E \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x_0, то их сумма также дифференцируема в точке x_0, причём её производная равна $f'(x) + g'(x)$.
>
> **Доказательство**

Производная функции $(f+g)(x_0)$ имеет вид:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)=f'(x_0)+g'(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Дифференцирование произведения

Если две функции $f:E\to\mathbb{R}$ и $g:E\to\mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x_0, то их произведение также дифференцируемо в точке x_0, причём его производная равна $f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Доказательство

Производная функции $(f\times g)(x_0)$ имеет вид:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0+h)g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(g(x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)=$$

$$=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Дифференцирование частного

Если функция $f:E\to\mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, то функция $\frac{1}{f(x)}$ также дифференцируема в точке x_0, причём её производная равна $\frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Доказательство

Производная функции $\frac{1}{f(x_0)}$ имеет вид

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x_0+h)}-\frac{1}{f(x_0)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{f(x_0+h)f(x_0)h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{f(x_0+h)f(x_0)}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Производная частного двух функций, дифференцируемых в точке x_0, равна

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \times \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'(x)}{g} + f(x)g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Замечание

Все три приведённые выше свойства применимы и к дифференциалам в силу их взаимосвязи с производной.

Теорема о дифференцировании сложной функции

Если функция $f : E \to C$ дифференцируема в точке x_0, функция $g : C \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $f(x_0)$, то их композиция дифференцируема в точке x_0, причём её производная равна $g'(f(x)) \times f'(x)$.

Доказательство

По определению дифференцируемости,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(h)h$$

$$g(f(x_0) + t) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(t) + \beta(t)t$$

Определим $\beta(0) = 0$. Это не повлияет на корректность тождества, поскольку согласно определению t полагается отличным от 0, однако наделит β свойством непрерывности в точке 0.

Приняв $t = f(x_0 + h) - f(x_0)$, имеем

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(f(x_0 + h) - f(x_0)) + \beta(f(x_0 + h) - f(x_0))(f(x_0 + h) - f(x_0))$$

Заметив, что $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(h)h$, получим

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) =$$

$$= g'(f(x_0))(f'(x_0)h + \alpha(h)h) + \beta(f(x_0 + h) - f(x_0))(f'(x_0)h + \alpha(h)h) =$$

$$= g'(f(x_0))f'(x_0)h + h\left[g'(f(x_0))\alpha(h) + \beta(f(x_0 + h) - f(x_0))(f'(x_0) + \alpha(h))\right]$$

Теперь заметим, что:

$$g'(f(x_0))\alpha(h) \to 0 \qquad \text{б.м. на константу}$$

$$\beta(f(x_0+h)-f(x_0)) \to 0 \qquad \text{композиция непрерывных функций}$$

$$f'(x_0)+\alpha(h) \to f'(x_0) \qquad \text{константа} + \text{б.м.}$$

Таким образом, выражение принимает вид

$$g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))f'(x_0)h + \gamma h,$$

где γ — бесконечно малая функция. Легко видеть, что $g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, причём её производная равна $g'(f(x_0))f'(x_0)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Отсюда же сразу можно заметить, что дифференциал сложной функции определяется следующим образом:

$$\mathrm{d}(g \circ f) = \mathrm{d}g(\mathrm{d}f(x))$$

Иными словами, *дифференциал композиции есть композиция дифференциалов*.

Инвариантность формы первого дифференциала

Тождество $\mathrm{d}g(f) = g'(f)\mathrm{d}f$ не зависит от того, является ли аргумент f простым (свободная переменная) или сложным (функция)!

Это немедленно следует из доказанного выше.

Дифференцирование обратной функции

Если функции $f : X \to Y$ и $f^{-1} : Y \to X$ взаимно обратны и непрерывны в точках $x_0 \in X$ и $f(x_0) = y_0 \in Y$ соответственно и, кроме того, f дифференцируема в точке x_0, то f^{-1} дифференцируема в точке y_0, причём её производная равна $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство

Поскольку f и f^{-1} взаимно обратны, то $f(x)-f(x_0)$ и $f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)$ не обращаются в нуль при условии $x \neq x_0$. Из их непрерывности можно также заключить, что

$$x \to x_0 \iff y \to y_0,$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

что и требовалось доказать.

Производные и дифференциалы элементарных функций

В таблице ниже записаны производные и дифференциалы функций, с которыми наиболее часто приходится работать при решении задач анализа:

Функция	Ограничения	Производная	Дифференциал
const	—	0	0
x	—	1	$\mathrm{d}x=x$
x^α	$x>0, a\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$
a^x	$x\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$	$a^x\ln a$	$a^x\ln a\ \mathrm{d}x$
e^x	—	e^x	$e^x\mathrm{d}x$
$\log_a x$	$x\in\mathbb{R}^+, a>0, a\neq 1$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{\mathrm{d}x}{x\ln a}$
$\ln x$	$x\in\mathbb{R}\setminus 0, a>0, a\neq 1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\sin x$	—	$\cos x$	$\cos x\ \mathrm{d}x$
$\cos x$	—	$-\sin x$	$-\sin x\ \mathrm{d}x$
$\mathrm{tg}\ x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\ x$	$x\neq\pi k, k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\|x\|<1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\|x\|<1$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\ x$	—	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg}\ x$	—	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$
$\mathrm{sh}\ x$	—	$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{ch}\ x\ \mathrm{d}x$
$\mathrm{ch}\ x$	—	$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{sh}\ x\ \mathrm{d}x$
$\mathrm{th}\ x$	—	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\mathrm{cth}\ x$	$x\neq 0$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x}$

Приведём доказательства этих формул.

1. Производная $\ln x$

$$
\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{y}{x(e^y - 1)} = \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

2. Производная $\log_a x$

$$
\begin{aligned}
(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \\
&= \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \\
&= \frac{1}{x \ln a}
\end{aligned}
$$

3. Производная e^x

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^x \left(e^h - 1\right)}{h} = \\
&= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \\
&= e^x
\end{aligned}
$$

4. Производная a^x

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= (e^{x \ln a})' = \\
&= a^x \times (x \ln a)' = \\
&= a^x \ln a
\end{aligned}
$$

5. Производная x^α

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' =$$

$$= e^{a \ln x} \times (\alpha \ln x)' =$$

$$= x^{\alpha} \times \frac{\alpha}{x} =$$

$$= \alpha x^{\alpha - 1}$$

6. Производная $\sin x$

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(h \sin x \frac{\cos h - 1}{h^2} \right) + \cos x \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h}{h} \right) =$$

$$= \cos x$$

7. Производная $\cos x$

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\cos x \frac{\cos h - 1}{h} \right) - \lim_{h \to 0} \left(\sin x \frac{\sin h}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(h \cos x \frac{\cos h - 1}{h^2} \right) - \sin x \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h}{h} \right) =$$

$$= -\sin x$$

8. Производная $\operatorname{tg} x$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$$

$$= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

9. Производная $\operatorname{ctg} x$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

10. Производная $\arcsin x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin \arcsin x)'} =$$

$$= \frac{1}{\cos \arcsin x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

11. Производная $\arccos x$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos \arccos x)'} =$$

$$= -\frac{1}{\sin \arccos x} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \arccos x}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12. Производная $\operatorname{arctg} x$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x)'} =$$

$$= \cos^2 \operatorname{arctg} x =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg} x}{\sin^2 \operatorname{arctg} x} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \operatorname{arctg} x}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2 \operatorname{arctg} x + \cos^2 \operatorname{arctg} x}{\cos^2 \operatorname{arctg} x}} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg} x + 1} =$$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

13. Производная $\operatorname{arcctg} x$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{1}{(\operatorname{ctg} \operatorname{arcctg} x)'} = \\
&= -\sin^2 \operatorname{arcctg} x = \\
&= -\frac{\operatorname{ctg}^2 \operatorname{arcctg} x}{\cos^2 \operatorname{arcctg} x} = \\
&= -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \operatorname{arcctg} x}} = \\
&= -\frac{1}{\frac{\sin^2 \operatorname{arcctg} x + \cos^2 \operatorname{arcctg} x}{\sin^2 \operatorname{arcctg} x}} = \\
&= -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \operatorname{arcctg} x} = \\
&= -\frac{1}{x^2 + 1}
\end{aligned}
$$

Производные высших порядков

Определение

Производной n-го порядка называется функция, продифференцированная n раз. Формально,

$$
f^{(0)}(x) = f(x) \qquad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)
$$

Формула Лейбница

Для дифференцируемых n раз функций u и v верно, что

$$
(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m)}
$$

Доказательство

Докажем по индукции.

База. При $n = 0$ имеем:

$$
uv = uv
$$

Переход. Пусть утверждение верно при $k = n$. Покажем, что в таком случае оно верно и для $k = n + 1$. По предположению,

$$
\begin{aligned}
(uv)^{(n+1)} &= \left((uv)^{(n)}\right)' = \\
&= \left(\sum_{m=0}^{n} C_m^n u^{(n-m)} v^{(m)}\right)' = \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(u^{(n-m)} v^{(m)}\right)' = \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(u^{(n-m+1)} v^{(m)} + u^{(n-m)} v^{(m+1)}\right) = \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m+1)} v^{(m)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m+1)} \overset{k=m+1}{=} \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m+1)} v^{(m)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)} = \\
&= u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) u^{(n-k+1)} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{((n+1)-k)} v^{(k)},
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

Дифференцирование неявных функций

Определение

Функция, заданная уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

называется **неявной функцией**.

Дифференцирование неявных функций зиждется на правиле дифференцирования сложных функций — зависимость y от x условно выражается как $y = f(x)$, поэтому y

дифференцируется именно как сложная функция от x, из-за чего при взятии производной возникают множители y', которые в дальнейшем можно выразить.

Рассмотрим алгоритм дифференцирования неявной функции на примере функции $x^3 + y^3 = 6xy$:

1. **Дифференцирование относительно x**

$$(x^3 + y^3)' = (6xy)'$$

$$(x^3)' + (y^3)' = 6(xy)'$$

$$3x^2 + 3y^2 y' = 6(y + xy')$$

2. **Группировка**

$$3y^2 y' - 6xy' = 6y - 3x^2$$

$$y'(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2$$

3. **Выражение производной**

$$y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

Экстремумы функции

Определения

Определение

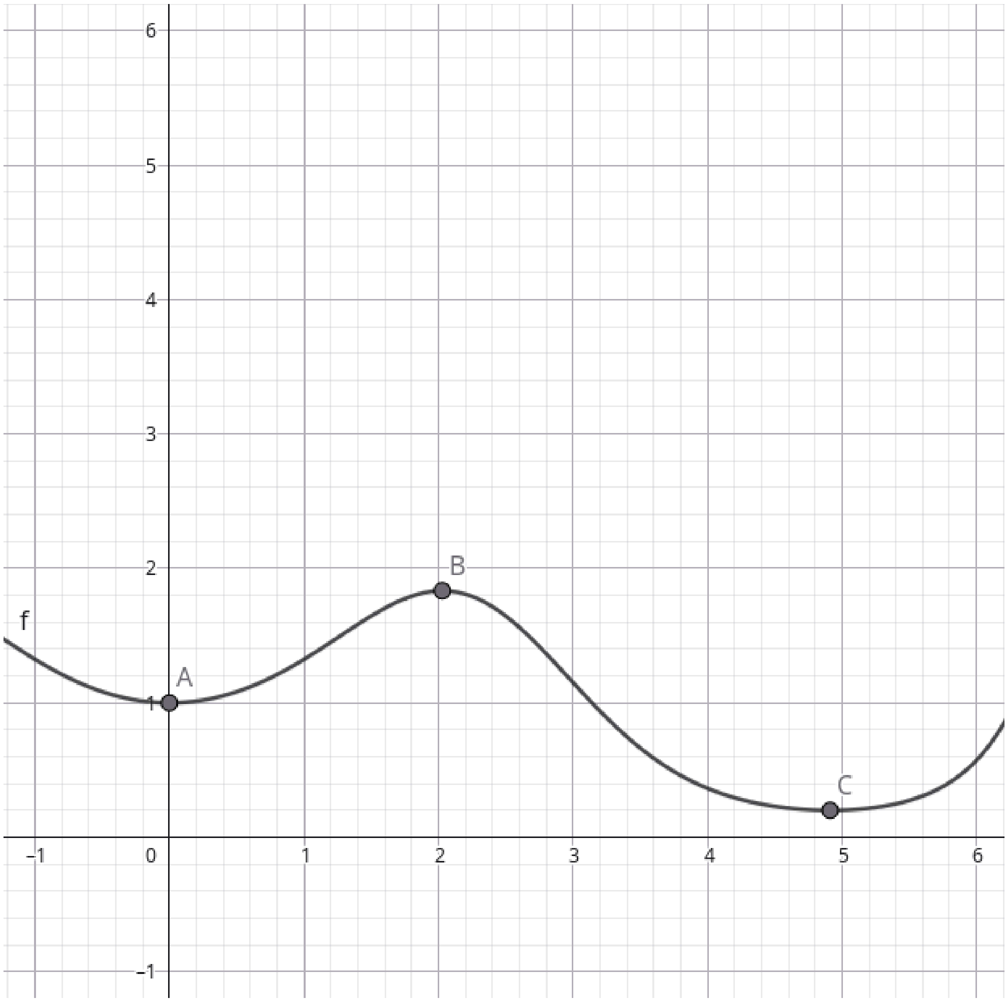
Точка x_0 называется **точкой локального минимума**, если существует такая окрестность $U_E(x_0)$ такая, что

$$\forall x \in U_E(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$$

Если при этом имеет место строгое неравенство, x_0 называется точкой *строгого* локального минимума.

Значение функции в этой точке называется её **локальным минимумом**.

Определения *точки (строгого) локального максимума* и *локального максимума* эквивалентны с точностью до знаков.



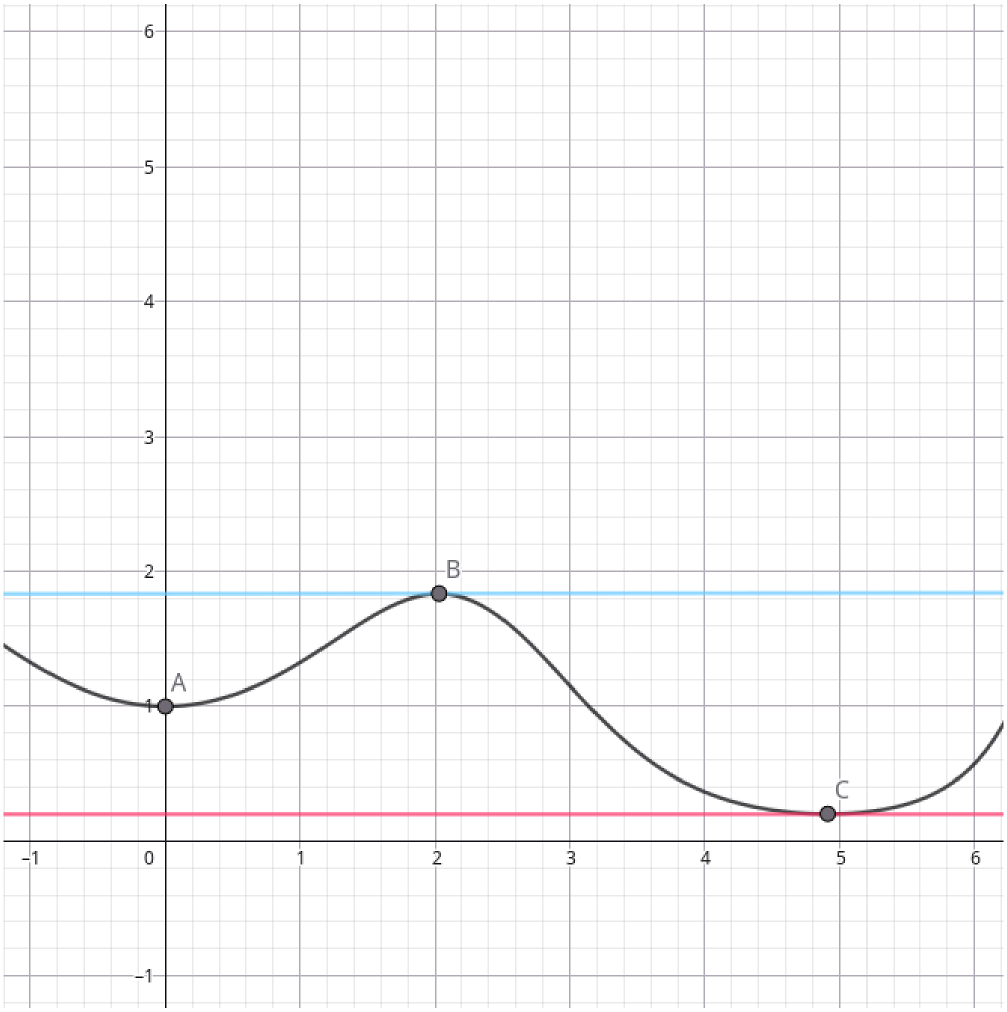
Определение

Точки локальных минимума и максимума функции называются **точками экстремума**. Токи экстремума, предельные как для множества E_-, так и для множества E_+, точками *внутреннего экстремума*.

Теоремы Ферма и Ролля

Теорема Ферма

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке внутреннего экстремума x_0, то её производная в этой точке равна нулю:



Доказательство

По определению дифференцируемости в точке x_0,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\alpha(h)h$$

Перепишем это соотношение в виде

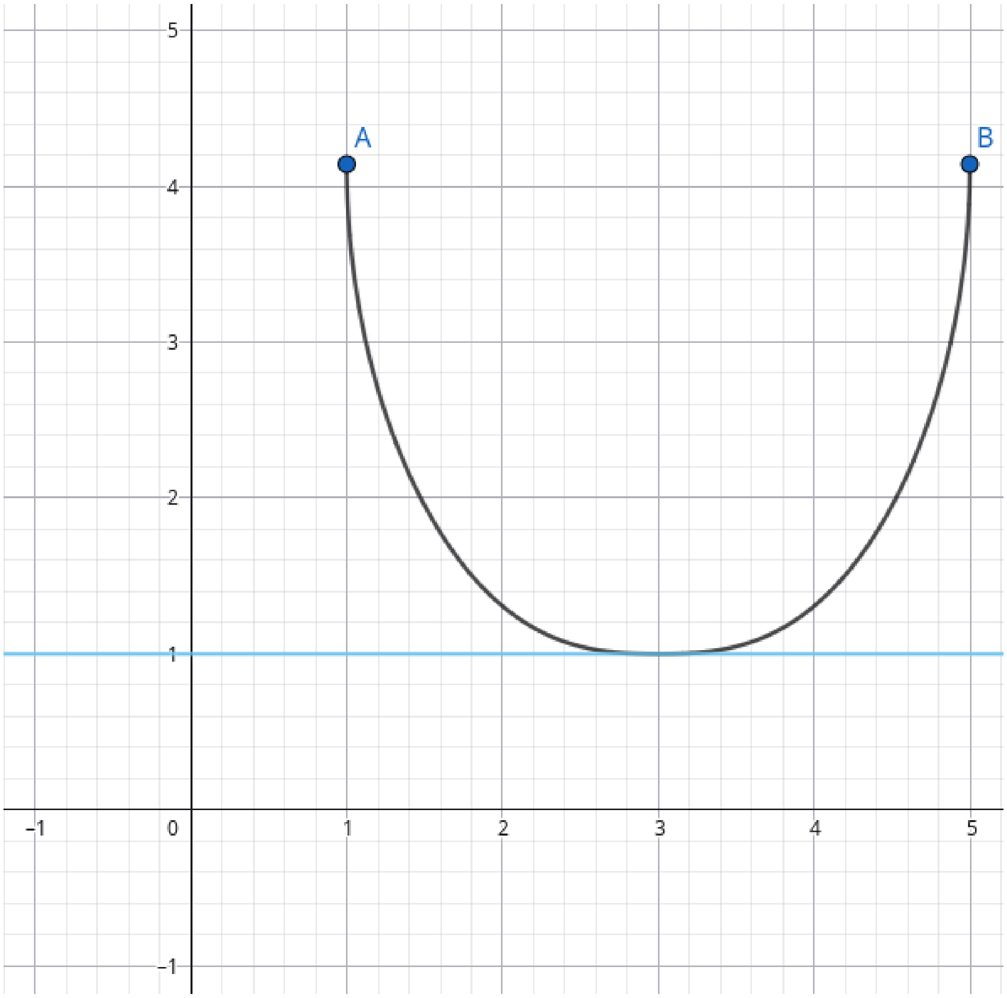
$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\left[f'(x_0)+\alpha(h)\right]$$

Поскольку x_0 — точка экстремума, то левая часть либо неотрицательна, либо неположительна для всех достаточно малых h.

Предположим, что $f'(x_0)\neq 0$. Тогда при достаточно малых h величина $f'(x_0)+\alpha(h)$ имеет тот же знак, что и $f'(x_0)$. При этом непосредственно h может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поскольку мы рассматриваем внутренний экстремум. Таким образом, в малых окрестностях точки 0 правая часть тождества меняет свой знак, в то время как знак левой обязан быть постоянным. Противоречие.

Теорема Ролля

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), причём $f(a) = f(b)$, то найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$:



Доказательство

Поскольку функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдутся точки x_m и x_M, в которых она принимает своё минимальное и максимальное значение f_{min} и f_{max} соответственно.
Если при этом $f_{min} = f_{max}$, то функция постоянна, и утверждение очевидно. В противном случае хотя бы одна из точек x_m и x_M должна лежать внутри интервала (a, b), поскольку значения на концах отрезка $[a, b]$ совпадают. Применим к этой точке теорему Ферма и получим, что утверждение выполняется.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Конечные приращения

Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Нетрудно заметить, что она дифференцируема на интервале (a, b), непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает равные значения. Применив теорему Ролля, найдём точку c такую, что

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

что и требовалось доказать.

Приведем несколько важных следствий из теоремы Лагранжа:

1° **Признак монотонности функции**

Если в любой точке конечного интервала производная неотрицательна, то функция монотонно неубывает на этом интервале.

Доказательство

Согласно теореме Лагранжа,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Если при этом $f'(c) \geq 0$, то знак левой части должен быть неотрицательным, откуда фунция монотонно неубывает на заданном отрезке.

Примечание. Аналогичные рассуждения можно проделать и для строгой монотонности, и для невозрастающих функций.

2° **Критерий постоянства функции**

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция постоянна на нём тогда и только тогда, когда её производная равна нулю в любой точке интервала (a, b).

Доказательство

Поскольку *необходимость* очевидна, продемонстрируем *достаточность*. Согласно теореме Лагранжа,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Если при этом производная равна нулю, то имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \implies f(x_2) = f(x_1),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Из этого можно сделать важный вывод: если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ двух функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают на некотором промежутке, то на этом промежутке их разность есть постоянная функция.

Теорема Коши

Теорема Коши

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), то найдётся точка $a < c < b$ такая, что

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

или, если при этом $g(x) \neq 0$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f'(t)(g(b) - g(a)) - g'(t)(f(b) - f(a))$$

Нетрудно заметить, что она дифференцируема на интервале (a, b), непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает равные значения. Применив теорему Ролля, найдём точку c такую, что

$$F(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Формулы Тейлора и Маклорена

Наводящие соображения

Пусть дан полином $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$. По формуле Лейбница,

$$P_n^{(0)}(0) = c_0$$

$$P_n^{(1)}(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + nc_n x^{n-1}$$

$$P_n^{(2)}(x) = 2c_2 + 6c_3 x + \dots + n(n-1)c_n x^{n-1}$$

$$\dots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n! c_n$$

Таким образом, значение этого полинома можно записать в виде

$$P_n(x) = P_n^{(0)}(0) + \frac{1}{1!} P_n^{(1)}(0) x + \frac{1}{2!} P_n^{(2)}(0) x^2 + \dots + \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(0) x^n = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(0) \frac{1}{k!} x^k \qquad (1)$$

Поскольку нас часто интересует аппроксимация значений функции в окрестности точки x_0 при помощи многочлена $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$, попробуем связать эти два явления.

Формула Тейлора

Определение

Если нам дана функция $f(x)$, дифференцируемая n раз в точке x_0, мы можем записать многочлен вида

$$\sum_{k=0}^{n} f_n^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x - x_0)^k,$$

производные которого до порядка n будут совпадать с соответствующими производными функции $f(x)$. Этот многочлен называется **полиномом Тейлора** порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение

Величина уклонения значения полинома Тейлора от значения функции

$$r_n(x_0) = f(x_0) - \sum_{k=0}^{n} f_n^{(n)}(x_0) \frac{1}{k!} (x - x_0)^k$$

называется n-м **остаточным членом формулы Тейлора**.

Теорема об остаточном члене

Если функция f и первые её n производных непрерывны на отрезке с концами x_0 и x и при этом на соответствующем интервале функция дифференцируема $n+1$ раз, то для произвольной функции φ, непрерывной на этом отрезке и имеющей ненулевую производную на соответствующем интервале, найдётся лежащая между x_0 и x точка c такая, что

$$r_n(x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n$$

Доказательство

На отрезке I с концами x_0 и x рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - P_n(t; x)$$

от аргумента t. В полной форме она имеет вид:

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f'(t)}{n!}(x-t)^n\right]$$

Из условия теоермы и определения функции F легко заметить, что она непрерывна на отрезке I и дифференцируема на соответствующем ему интервале, причём

$$F'(t) = -\left[f'(t) + \left(\frac{f^{(2)}(t)(x-t) - f'(t)}{1!}\right) + \left(\frac{f^{(3)}(x-t)^2 - 2f^{(2)}(t)}{2!}\right) + \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}\right.$$

Заметим, что все члены, кроме последнего, сокращаются. Тогда имеем:

$$F'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Применив теорему Коши к функциям F и φ, найдём такую точку c, что

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)}$$

Заметив, что $F(x) - F(x_0) = -r_n(x_0)$ и подставив выражение для $F'(c)$, имеем

$$r_n(x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n,$$

что и требовалось доказать.

Теорема об остаточном члене позволяет вывести следующие представления $r_n(x_0)$:

1° **Формула Коши остаточного члена**

> Подставив $\varphi(t) = x - t$, имеем
>
> $$r_n(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0)$$

> 2° **Формула Лагранжа остаточного члена**
>
> Подставив $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, имеем
>
> $$r_n(x_0) = \frac{(x-x)^{n+1} - (x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$$

При вычислении пределов точность заданных выше форм остаточного члена может быть излишней, поэтому вводится

> **Теорема** *(Форма Пеано)*
>
> Если функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$, определённая на отрезке E с концом x_0 имеет в точке x_0 все производные порядка до n включительно, причём $\forall 0 \leq i \leq n : \varphi^{(i)}(x_0) = 0$, то
>
> $$\varphi(x) = o((x-x_0)^n),\ x \to x_0$$
>
> **Доказательство**
>
> Докажем по индукции.
>
> *База*. При $n = 1$ утверждение следует из определения дифференцируемости, согласно которому
>
> $$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$
>
> и, поскольку $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$, имеем
>
> $$\varphi(x) = o(x-x_0),$$
>
> что и требовалось докахать.
>
> *Переход*. Пусть увержление верно при $n = k-1 \geq 1$. Покажем, что в таком случае оно верно и для $n = k \geq 2$.
> Поскольку $k \geq 2$, функция $\varphi(x)$ имеет на E производную $\varphi'(x)$ и, по условию,
>
> $$\varphi'(x_0) = (\varphi')'(x_0) = \cdots = (\varphi')^{(k-1)}(x_0) = 0$$
>
> Таким образом, по предположению индукции,
>
> $$\varphi'(x) = o((x-x_0)^{k-1})$$
>
> Применив теорему Лагранжа, найдём такую точку $c \in E$, что
>
> $$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(c)(x-x_0) = \alpha(c)(x-x_0)^{k-1}(x-x_0),$$

где $\alpha(c) \to 0$ при $x \to x_0$ и $|c - x_0| < |x - x_0|$, то есть

$$|\varphi(x)| \le |\alpha(c)||x - x_0|^{k-1}|x - x_0|,$$

откуда имеем

$$\varphi(x) = o((x - x_0)^k),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Заметим, что $r_n(x_0)$ удовлетворяет условию теоремы по определению полинома Тейлора, т.к. его производные совпадают с производными соответствующей ему функции. Отсюда

$$r_n(x_0) = o((x - x_0)^n)$$

Подытоживая, имеем:

Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, её можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x_0)$$

Если при этом она $n + 1$ раз дифференцируема на интервале с концами x_0 и x, то:

- $r_n(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)(x - c)^n(x - x_0)$ — *форма Коши*
- $r_n(x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}$ — *форма Лагранжа*

Если при этом она n раз дифференцируема на соответствующем интервале, то:

- $r_n(x_0) = o((x - x_0)^n)$ — *форма Пеано*

Формула Тейлора при $x_0 = 0$ также часто называется *формулой Маклорена*.

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя

Пусть функции $f : E \to \mathbb{R}$ и $g : E \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на интервале (a, b), причём на всём интервале $g(x) \neq 0$, и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Тогда в каждом из следующих случаев:

1. $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to a+0$
2. $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$ при $x \to a+0$

имеет место тождество

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Замечание. Теорема также справедлива и для случая $x \to b-0$.

Доказательство

Если $g'(x) \neq 0$, то на основании теоремы Ролля можно заключить, что $g(x)$ строго монотонна. Значит, уменьшив, если нужно, рассматриваемый интервал, мы можем полагать, что $g(x) \neq 0$ на (a, b). Для любых x и y из этого интервала по теореме Коши найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Это тождество можно записать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{h'(c)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \tag{1}$$

При $x \to a+0$ согласованно с изменением x будем стремить y к $a+0$ так, чтобы при этом

$$\frac{f(y)}{g(x)} \to 0 \qquad \wedge \qquad \frac{g(y)}{g(x)} \to 0$$

В любом из вариантов $1.$ и $2.$ это, очевидно, можно сделать: в первом случае просто будем стремить y к a быстрее, чем x, а во втором мы можем вообще не производить никаких манипуляций, позволяя знаменателю устремляться в бесконечность.

Так как $x < c < y$, то вместе с $x \to 0$ и $y \to 0$ неизбежно $c \to 0$. Отсюда правая и, очевидно, левая части тождества (1) стремятся к A, что и требовалось доказать.

Выпуклость функции

ⓘ **Определение**

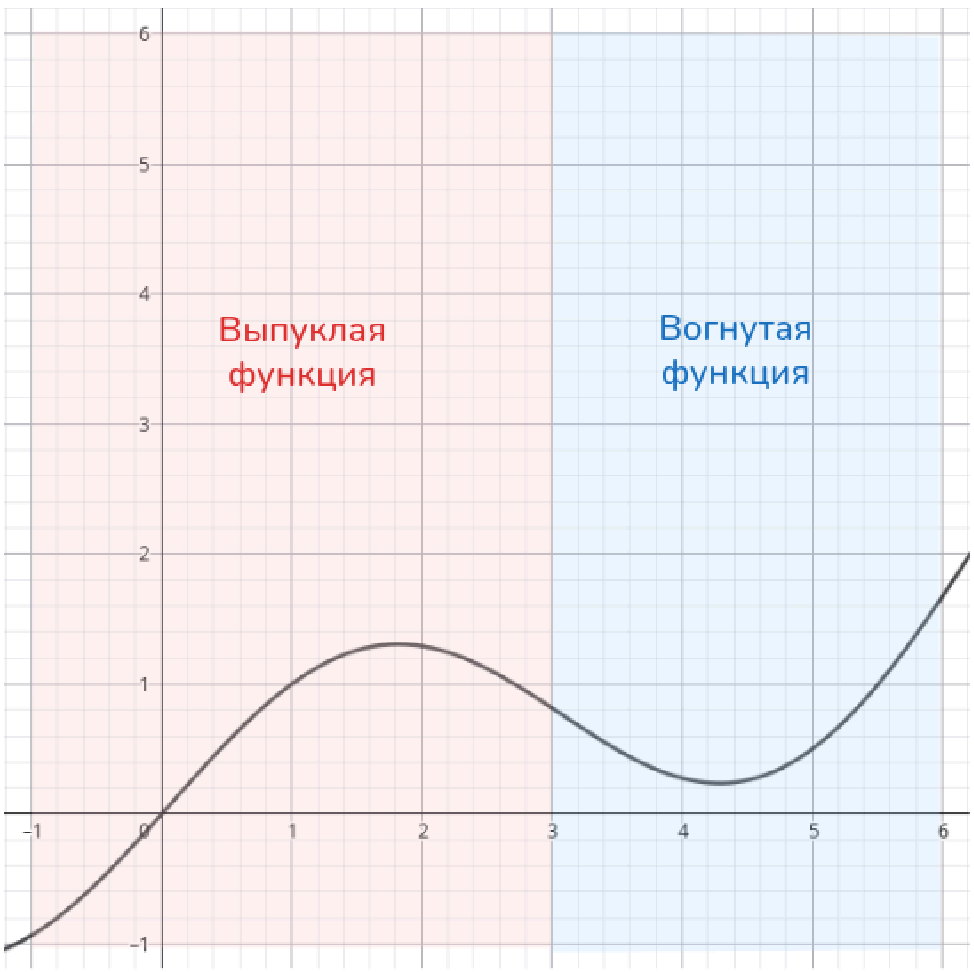
Функция f называется **выпуклой** вверх на интервале (a, b), если в любой точке $x \in (a, b)$ график касательной лежит выше графика функции. Формально,

$$\Delta f(x) \leq \mathrm{d}f(x) \tag{1}$$

или, эквивалентно,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \leq f'(x)\Delta x \tag{2}$$

Определение *вогнутой* функции, т.е. выпуклой вниз, аналогично с точностью до знаков.



Критерий выпуклости функции

Для того, чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$, дифференцируемая на интервале (a, b), была выпукла на нём, необходимо и достаточно, чтобы её производная невозрастала на этом интервале.

Доказательство

Необходимость. Прежде всего заметим, что если верно условие

$$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x \leq 0 \iff f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \leq 0,$$

то мы имеем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0), \quad x < x_0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0), \quad x > x_0$$

Таким образом, для любой тройки $a < x_1 < x < x_2 < b$ имеем

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leq f'(x) \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \implies \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{1}$$

Если при этом функция дифференцируема на (a, b), мы можем поочерёдно устремить x к x_1 и x_2, получив при этом

$$f'(x_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_2)$$

что демонстрирует монотонное невозрастание производной.

Достаточность. Рассмотрим произвольную тройку $a < x_1 < x < x_2 < b$.
Применив теорему Лагранжа к отрезкам $[x_1, x]$ и $[x, x_2]$, найдём на них такие точки c_1 и c_2, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$$

Так как $c_1 < c_2$, имеем $f'(c_1) \geq f'(c_2)$, откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Заметим, что мы получили условие (1), эквивалентное условию выпуклости функции.

Следствие. Функция выпукла на интервале тогда и только тогда, когда её производная второго порядка на этом интервале неположительна.

Примечание. Обратное утверждение для вогнутых функций, очевидно, также верно.

Определение

Точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что функция $f(x)$ вогнута на интервале (a, x_0) и выпукла на интервале (x_0, b) (*или наоборот*), называется **точкой перегиба**.

Из критерия выпуклости легко видеть, что аналитическое условие точки перегиба имеет вид $f''(x_0) = 0$.