Лекция 15 — Логики высших порядков

Содержание

"Я реально ничего не знаю."
— Сократ

Категорическая логика

Категорические утверждения

Определение

> Утверждение (также *пропозиция*) называется **категорическим**, если оно устанавливает или отрицает отношение между двумя категория объектов.

Категорическое выражение образуется следующими составляющими:

1. **Субъект** — Категория, описываемая выражением.
2. **Предикат** — Категория, используемая в описании.
3. **Квантор** — Параметр, определяющий, к какому количеству объектов категории относится суждение.
4. **Качество** — Параметр, определяющий, является ли суждение утвердительным или отрицательным.

Стандартные формы

В традиционной логике выделяется четыре стандартных формы категорических утверждений:

A. **Всеобщная утвердительная** — «Все S являются P»

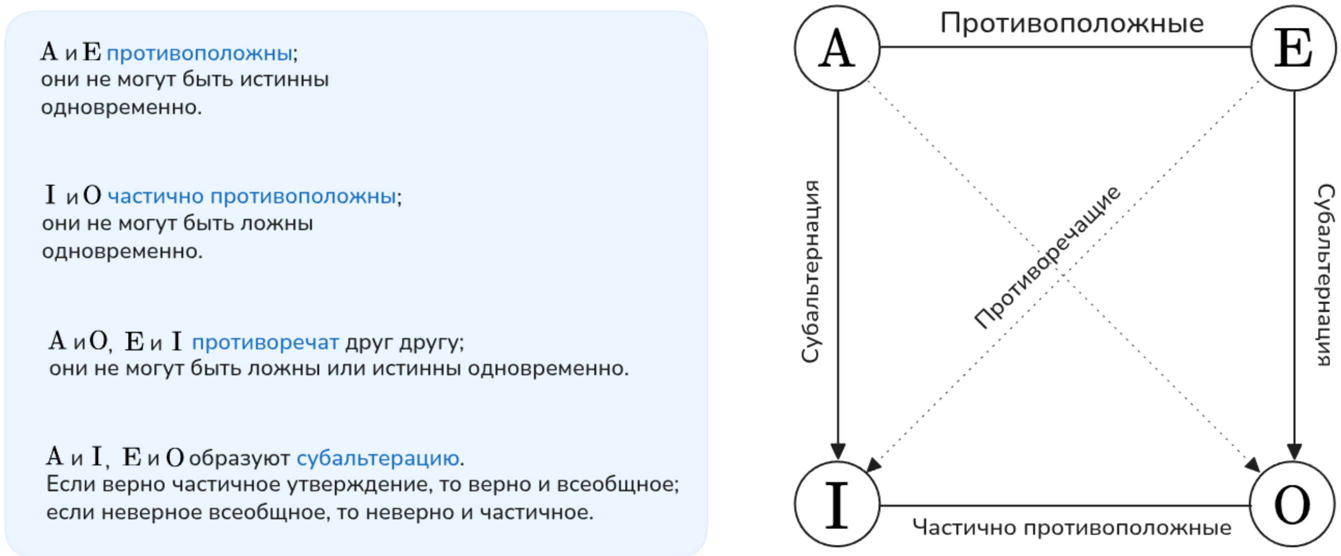
E. **Всеобщная отрицательная** — «Ни один S не является P»

I. **Частичная утвердительная** — «Хотя бы один S является P»

O. **Частичная отрицательная** — «Хотя бы один S не является P»

Эти названия происходят от латинских слов $\mathrm{Affirmo}$ («утверждаю») и Nego («отрицаю»).

Визуальным отображением отношения между этими формами является *логический квадрат*:



Экзистенциальная значимость

Определение

Утверждение вида «S является P» несёт **экзистенциальную значимость**, если из него следует существование хотя бы одного объекта в категории субъекта S.

Тогда как в традиционной логике предполагается, что все утверждения несут экзистенциальную значимость, современная логика ставит этот вопрос под сомнение. Таким образом, утверждение

$$\text{«Все единороги — мифические»}$$

в традиционной логике ложно, поскольку мы предполагаем существование единорогов; в то же время, в современной логике оно *вакуумно истинно*, поскольку единорогов может и не существовать, поэтому это суждение нельзя опровергнуть.

Логический квадрат в приведённом виде корректен лишь в рамках традиционной логики. Если мы рассматриваем категорические выражения с пустыми множествами, то:

- A и E могут быть одновременно истинны, если множество S пусто;
- I и O могут быть одновременно ложны, если множество S пусто;
- Субальтерация перестаёт работать, поскольку для пустых категорий субъектов верно всеобщное утверждение, однако неверно частное.

Категорический силлогизм

Определение

Категорический силлогизм — форма суждения, состоящая из трёх категорических утверждений:

1. бòльшая предпосылка, содержащая предикат вывода;
2. меньшая предпосылка, содержащая субъект вывода;
3. вывод.

Категорический силлогизм работает ровно с тремя терминами: меньший, средний и бòльший:

$$\begin{array}{ll} \text{Все люди смертны.} & \text{(Бòльшая предпосылка)} \\ \text{Сократ — человек.} & \text{(Меньшая предпосылка)} \\ \hline \text{Таким образом, Сократ смертен.} & \text{(Вывод)} \end{array}$$

Здесь бòльший термин P — смертен, меньший S — Сократ, средний M — человек.

В традиционной логике существует 24 формы категорических силлогизмов, которые называются в соответствии с утверждениями, которые их формируют. Комбинация типов высказываний в силлогизме называется *модусом*. Каждому модусу сопоставляется латинское название, гласные в котором соответствуют типам высказываний в нём.

Определение

Фигура определяется положением среднего термина в посылках силлогизма. Традционно выделяется четыре фигуры:

I фигура
(модусы $\text{Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari, Celaront}$)

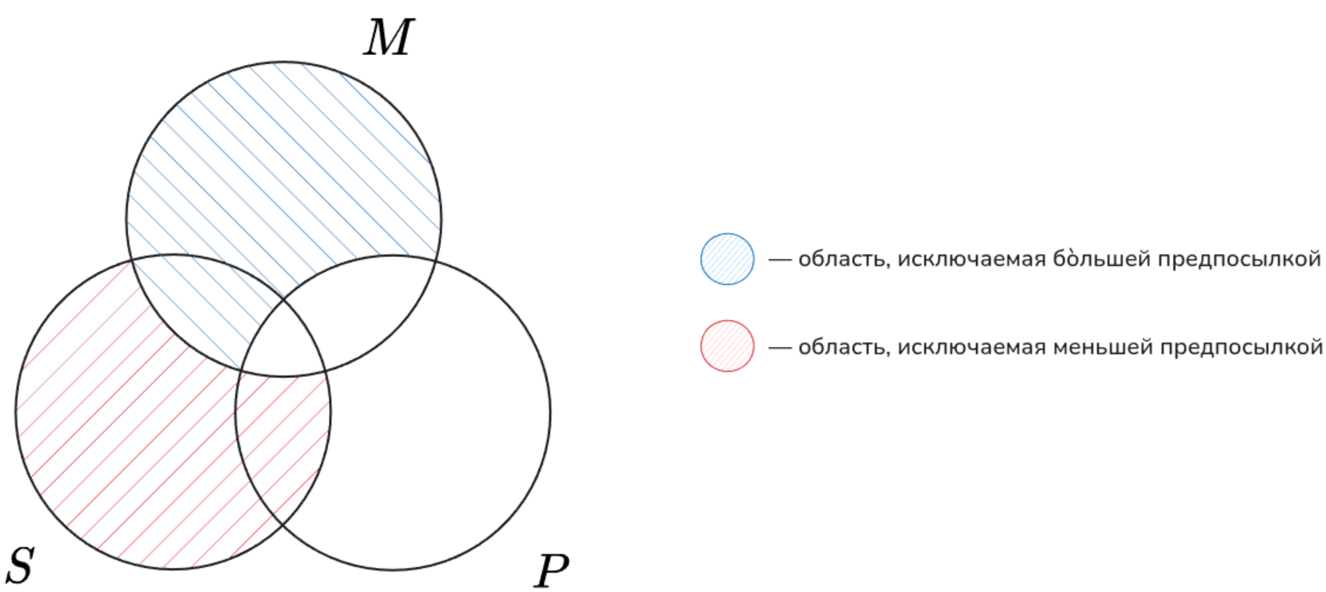
$$\begin{array}{ll} M\text{-}P & \text{(Бòльшая предпосылка)} \\ S\text{-}M & \text{(Меньшая предпосылка)} \\ S\text{-}P & \text{(Вывод)} \end{array}$$

II фигура
(модусы $\text{Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro, Camestros}$)

$$\begin{array}{ll} P\text{-}M & \text{(Бòльшая предпосылка)} \\ S\text{-}M & \text{(Меньшая предпосылка)} \\ S\text{-}P & \text{(Вывод)} \end{array}$$

III фигура (модусы Darapti, Disamis, Datisi, Felapton Bocardo, Ferison)	M-P (Бо̀льшая предпосылка) M-S (Меньшая предпосылка) S-P (Вывод)
IV фигура (модусы Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison, Camenos)	P-M (Бо̀льшая предпосылка) M-S (Меньшая предпосылка) S-P (Вывод)

Корректность силлогизмов можно проверять при помощи диаграмм Венна. Каждый из трёх терминов изображается в виде отдельного круга, после чего на диаграмму наносятся предпосылки:



Если при этом вывод *неизбежен*, т.е. отражается на диаграмме «сам собой», силлогизм корректен. Если в результате нанесения предпосылок вывод не возникает, силлогизм некорректен.

Предпосылки, представляющие собой частичные утверждения, помечаются на диаграмме крестиком, означающим, что в соответствующей области существует по меньшей мере один элемент.

Логика первого порядка

Общие представления

Категорическая логика имеет ряд критических ограничений:

1. Она работает только с простыми кванторами.
2. Она не может отразить, как именно относятся категории — например, если человек A выше человека B.
3. Каждое утверждение ограничено только двумя категориями.
4. В категорической логике кванторы не могут быть вложенными.
5. В категорической логике возникают противоречия с экзистенциальной значимостью.

В связи с этим возникает концепция *логики первого порядка*:

Определение

Логика первого порядка расширяет категорическую логику путём введения переменных, предикатов, функций и кванторов.

Структура логики первого порядка

Элементарные компоненты

Логика первого порядка состоит из следующих компонентов:

1. **Переменные**	$x, y, z, \ldots$ — объекты из определённой категории
2. **Константы**	$a, b, c, \ldots$ — обозначения для конкретных объектов
3. **Предикаты**	$P, Q, R, \ldots$ — отражения свойств и отношений
4. **Функции**	$f, g, h, \ldots$ — отображения одних объектов в другие
5. **Кванторы**	

$\forall, \exists, \exists!$ — индикаторы общности суждения

6. **Логические связки** — $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \iff$ (аналогично пропозициональной логике)

Важно!

В отличие от предикатов, которые возвращают значения *истины* или *лжи*, функции возвращают *объект*!

Определение

Термин (*term*) — выражение, обозначающее объект и определяемое рекурсивно следующим образом:

1. любая переменная является термином;
2. любая константа является термином;
3. если f — n-арная функция, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ является термом.

Формулы

Определение

Атомарной формулой называется базовое утверждение, которое представляет собой одно из следующего:

1. предикат $P(t_1, \ldots, t_n)$ от n терминов;
2. равенство двух термов.

Определение

В логике первого порядка **равенство** — предикат, означающий «тот же объект, что и».
Он обладает следующими свойствами:

1. **Рефлексивность**	$\forall x : (x = x)$
2. **Симметричность**	$\forall x, y : (x = y) \to (y = x)$
3. **Транзитивность**	$\forall x, y, z : (x = y) \wedge (y = z) \to (x = z)$
4. **Тождество неразличимых** (принцип Лейбница)	$\forall x, y : (x = y) \to (\varphi(x) \iff \varphi(y)$

ⓘ **Определение**

Формула первого порядка определяется рекурсивно:

1. Каждая атомарная формула — формула первого порядка.
2. Отрицание формулы первого порядка — формула первого порядка.
3. Если φ и ψ — формулы первого порядка, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \iff \psi)$ — также формулы первого порядка.
4. Если φ — формула первого порядка, а x — переменная, то $(\forall x : \varphi)$ и $(\exists x : \varphi)$ — также формулы первого порядка.

Кванторы

В логике первого порядка выделяются следующие кванторы:

Квантор всеобщности $\forall$ утверждает свойство, которое выполняется для *каждого* объекта в категории	$\forall x : P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots$
Квантор существования $\exists$ утверждает свойство, которое выполняется *хотя бы для одного* объекта в категории	$\exists x : P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots$

Квантор единственности $\exists!$ утверждает свойство, которое выполняется *ровно для одного* объекта в категории

$$\exists! x : P(x) \equiv \exists x : (P(x) \land \forall y : [P(y) \to (y = x)]$$

> **Определение**
>
> Если переменная встречается в выражении в области действия квантора, она называется **связанной**. В противном случае она называется **свободной**:
>
> $$P(x) \land \forall x : Q(x)$$
>
> В этом примере x в $P(x)$ свободен, а в $Q(x)$ — связан.

> **Определение**
>
> Формула, в которой нет свободных переменных, называется **предложением** (*закрытой формулой*). Если в формуле встречается хотя бы одна свободная переменная, она называется *открытой*.

При работе с кванторами полезно знать следующие правила:

1° **Законы де Моргана**

$$\begin{aligned} \neg \forall x : \varphi(x) &\equiv \exists x : \neg \varphi(x) \\ \neg \exists x : \varphi(x) &\equiv \forall x : \neg \varphi(x) \end{aligned}$$

2° **Дистрибутивность**
Важно: не работает в остальных случаях!

$$\begin{aligned} \forall x : (\varphi(x) \land \psi(x)) &\equiv (\forall x : \varphi(x)) \land (\forall x : \psi(x \\ \exists x : (\varphi(x) \lor \psi(x)) &\equiv (\forall x : \varphi(x)) \lor (\exists x : \psi(x \end{aligned}$$

3° **Перемещение**
Если x связан в ψ, кванторы можно перемещать

$$\begin{aligned} (\forall x : \varphi(x)) \land \psi &\equiv \forall x : (\varphi(x) \land \psi) \\ (\exists x : \varphi(x)) \land \psi &\equiv \exists x : (\varphi(x) \land \psi) \\ (\forall x : \varphi(x)) \lor \psi &\equiv \forall x : (\varphi(x) \lor \psi) \\ (\exists x : \varphi(x)) \lor \psi &\equiv \exists x : (\varphi(x) \lor \psi) \end{aligned}$$

> **Определение**
>
> Формула находится в **пренексной нормальной форме**, если все кванторы в ней находятся в начале. Формально, она имеет вид

$$Q_1 x_1 : Q_2 x_2 : \ldots Q_n x_n : \psi,$$

где $Q_i \in \{\forall, \exists, \exists!\}$, а ψ — свободная от кванторов *матрица*.

Каждая формула в логике первого порядка имеет единственную пренексную нормальную форму.

Вокабуляр

Определение

Вокабуляр Σ — все обозначения, необходимые для перевода естественного языка на язык логики первого порядка. Формально, вокабуляр состоит из:

- константных обозначений;
- предикатов;
- функций.

При переводе в логику первого порядка выделяются два основных паттерна:

«Все S являются P»	$\forall x : S(x) \to P(x)$
«Некоторые S являются P»	$\exists x : S(x) \land P(x)$

Структуры

Определение

Структура $M = \langle D, \mathcal{J} \rangle$ состоит из:

- *домена* D — непустого множества объектов
- *интерпретации* $\mathcal{J}$, наделяющей символы смыслом:
  - каждая константа c соотносится с некоторым объектом домена;
  - каждый n-арный предикат P соотносится с некоторым отношением $\mathcal{J}(P) \subseteq D^n$
  - каждая n-арная функция f соотносится с функцией $\mathcal{J}(f) : D^n \to D$

Например, структура для простой арифметики может иметь следующий вид:

- $D = \mathbb{N}$
- $\mathcal{J}(0) = 0$
- $\mathcal{J}(S)(n) = n + 1$
- $\mathcal{J}(\text{Even}) = \{0, 2, 4, \ldots\}$

ⓘ **Определение**

Назначение переменных $\sigma[x \mapsto d]$ — отображение, сопоставляющее каждой переменной некоторый элемент домена.

ⓘ **Определение**

Отношение удовлетворения $M, \sigma \vDash \varphi$ определяется рекурсивно:

- $M, \sigma \vDash P(t_1, \ldots, t_n)$, если $([\![t_1]\!]_\nu, \ldots, [\![t_n]\!]_\nu) \in \mathcal{J}(P)$
- $M, \sigma \vDash \forall x : \varphi$, если $M, \sigma[x \mapsto d] \vDash \varphi$ верно для *всех* $d \in D$.
- $M, \sigma \vDash \exists x : \varphi$, если $M, \sigma[x \mapsto d] \vDash \varphi$ верно *хотя бы для одного* $d \in D$.

Если $M \vDash \varphi$ выполняется:

- для любой структуры, то формула φ *валидна*;
- для какой-либо структуры, то формула φ *удовлетворима*;
- ни для одной структуры, то формула φ *неудовлетворима*.

ⓘ **Определение**

Набор предложений в логике первого порядка называется **теорией**.

Структура M является **моделью** теории T, если $M \vDash \varphi$ верно для любого $\varphi \in T$.

Несколько важных теорем

> **Обоснованность и полнота**
>
> $$\Gamma \vdash \varphi \quad \to \quad \Gamma \vDash \varphi \tag{1}$$
>
> $$\Gamma \vDash \varphi \quad \to \quad \Gamma \vdash \varphi \tag{2}$$
>
> Иными словами, логика первого порядка *обоснована* (1) и *полна* (2).

> **Теорема о компактности**
>
> Множество предложений Γ удовлетворимо тогда и только тогда, когда удовлетворимо конечное подмножество Γ.
>
> Эта теорема гласит, что логика первого порядка не различает понятия сколь угодно больших конечных и бесконечных множеств, из-за чего некоторые утверждения и доказательства построить невозможно.

> **Теорема Лёвенгейма — Сколема**
>
> Если конечная теория имеет бесконечную модель, то она имеет модели любой бесконечной кардинальности.
>
> *Парадокс Сколема*: аксиомы ZFC могут быть выражены при помощи логики первого порядка даже несмотря на то, что она подтверждает существование несчетных множеств!

> **Теорема Чёрча — Тьюринга**
>
> Логика первого порядка *неразрешима*: не существует алгоритма, который проверяет валидность произвольного выражения первого порядка.
>
> Тем не менее, отдельные фрагменты логики первого порядка остаются разрешимыми, пусть и с некоторыми ограничениями: пропозициональная логика, выражения только с унарными предикатами или не более чем с двумя переменными и проч.

Модальная логика

#TODO