

Лекция 04 — Теория порядков

Классификация отношений порядка

Отношение	Характеристика
Препорядок	Рефлексивность и транзитивность
Частичный порядок	Рефлексивность, транзитивность и антисимметричность
Связность	$\forall x, y \in M : (x \neq y) \implies (x R y \vee y R x)$
Линейный порядок	Связное отношение частичного порядка

Частично упорядоченные множества

Info

Частично упорядоченное множество (*partially ordered set, poset*) $\langle S, \leq \rangle$ — множество S с определенным на нем отношением порядка \leq .

Info

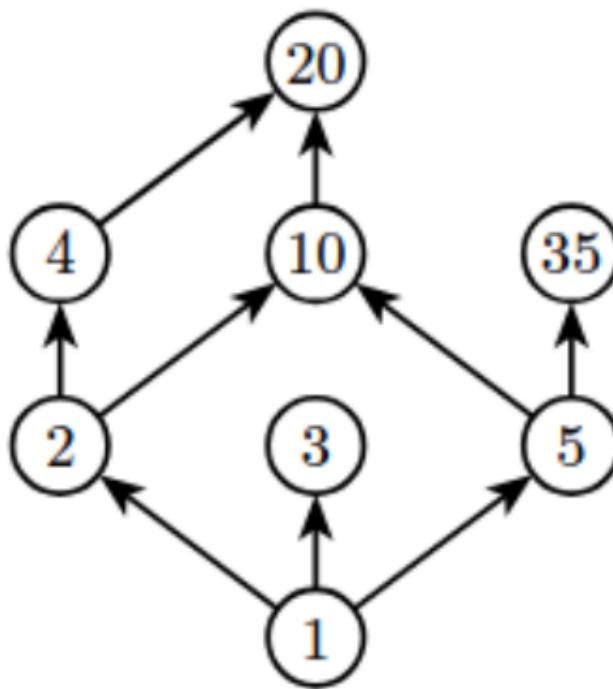
Диаграмма Хассе — визуальное отображение частично упорядоченного множества, где:

- каждый элемент представлен вершиной;
- если $x < y$ и нет такого z что $x < z < y$, то есть ребро $x \rightarrow y$;
- элементы упорядочены вертикально по отношению порядка;
- транзитивные связи опускаются.

Пример диаграммы Хассе для множества D и отношения делимости

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 35\}$$

$$R = |$$



ⓘ Info

В частично упорядоченном множестве $\langle S, \leq \rangle$ элемент $y \in S$ **покрывает** $x \in S$ ($x \lessdot y$), если между ними нет никакого элемента:

$$x \lessdot y \iff (x < y) \wedge \nexists z \in S : x < z < y,$$

где $x < y \iff (x \leq y) \wedge (x \neq y)$ (индуцированный строгий порядок)

Можно заметить, что диаграмма Хассе — это граф отношения покрытия.

Максимальные, минимальные, наибольшие и наименьшие элементы

ⓘ Info

Элемент $m \in S$ называется **максимальным** элементом частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он не меньше всех элементов из этого множества:

$$\forall x \neq m : \overline{m \leq x} \iff \nexists x \neq m (m \leq x)$$

Эквивалентно, $\forall x \in S : (m \leq x) \implies (m = x)$.

(i) Info

Элемент $m \in S$ называется **минимальным** элементом частичного упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он не больше всех элементов из этого множества:

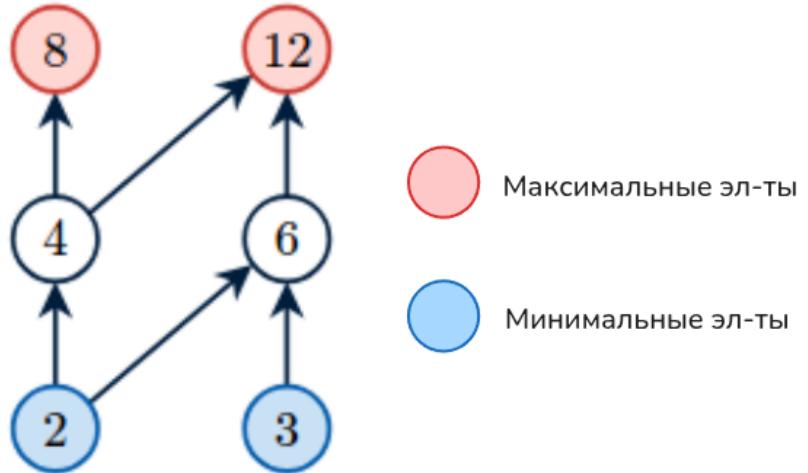
$$\forall x \neq m : \overline{x \leq m} \iff \nexists x \neq m (x \leq m)$$

Эквивалентно, $\forall x \in S : (x \leq m) \implies (x = m)$.

Зададим отношение делимости на множестве D.

$$D = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$$

$$R = |$$



(i) Info

Элемент $g \in S$ называется **наибольшим** элементом частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он больше либо равен всем элементам этого множества, т.е.
 $\forall x \in S : x \leq g$

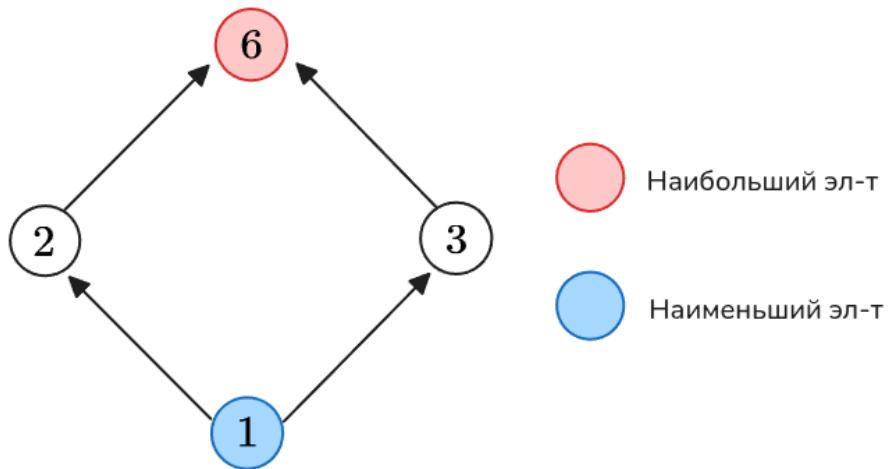
(i) Info

Элемент $g \in S$ называется **наименьшим** элементом частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он меньше либо равен всем элементам этого множества, т.е.
 $\forall x \in S : g \leq x$

Зададим отношение делимости на множестве D.

$$D = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$R = |$$



⚠ Warning

Если наибольший или наименьший элементы существуют, то они *единственны*.

🔥 Important

Ключевое различие между максимальным и наибольшим (минимальным и наименьшим) элементами в том, что наибольший элемент обязан быть сравнимым со всеми остальными, в то время как максимальный может вообще не быть сравним ни с чем.

Менее формально, максимальный элемент — это локальный максимум, а наибольший — глобальный.

Дуальное множество

ⓘ Info

Частично упорядоченное множество $\langle S, \geq \rangle$ называется **дуальным** к $\langle S, \leq \rangle$, если $x \leq y \iff y \geq x$.

⚠ Warning

В дуальном множестве минимальный элемент станет максимальным, наименьший — наибольшим, и наоборот.

Цепи и антицепи

Info

Цепь — подмножество $C \subseteq \langle M, \leq \rangle$ такое, что любые два элемента в нём сравнимы.
Формально, $\forall x, y \in C : (x \leq y \vee y \leq x)$.

Warning

Цепь — линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества.

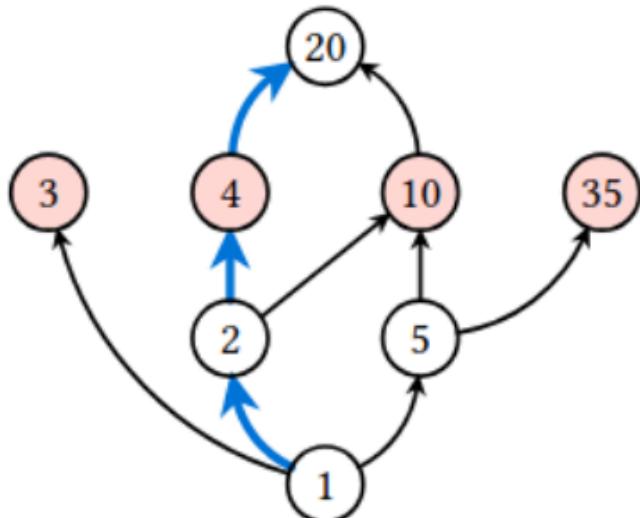
Info

Антицепь — подмножество $C \subseteq \langle M, \leq \rangle$ такое, что любые два различных элемента в нём не сравнимы. Формально, $\forall x, y : (x \neq y) \implies (x \not\leq y \wedge y \not\leq x)$

Зададим отношение делимости
на множестве D.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 35\}$$

$$R = |$$



Примеры цепей:

1, 2, 4, 20 (максимальная цепь)

1, 5, 20

Примеры антицепей:

3, 4, 10, 35 (максимальная антицепь)

3, 2, 35

#TODO : Теорема Дилуорса