

Лекция 03 — Бинарные отношения

Определения

Info

Бинарное отношение R на множествах A и B — подмножество декартова произведения $A \times B$.

Если $R \subseteq A \times B$, мы пишем $a R b$ чтобы обозначить, что $a \in A$ *относится* к $b \in B$. Формально, $a R b \iff \langle a, b \rangle \in R$.

R используется как для обозначения множества пар, так и как предикат.

Warning

Порядок элементов в паре *важен*: $\langle a, b \rangle \in R$ обозначает, что a относится к b , но не наоборот, если только в множестве отношения нет пары $\langle b, a \rangle$.

Info

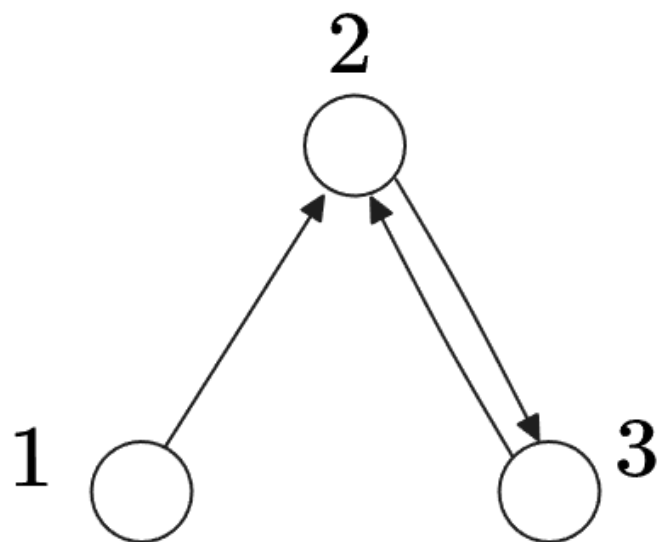
Бинарное отношение $R \subseteq A \times B$ на двух различных множествах называется **гетерогенным**.

Info

Бинарное отношение $R \subseteq M^2$ на одном множестве называется **гомогенным**.

Представление бинарных отношений

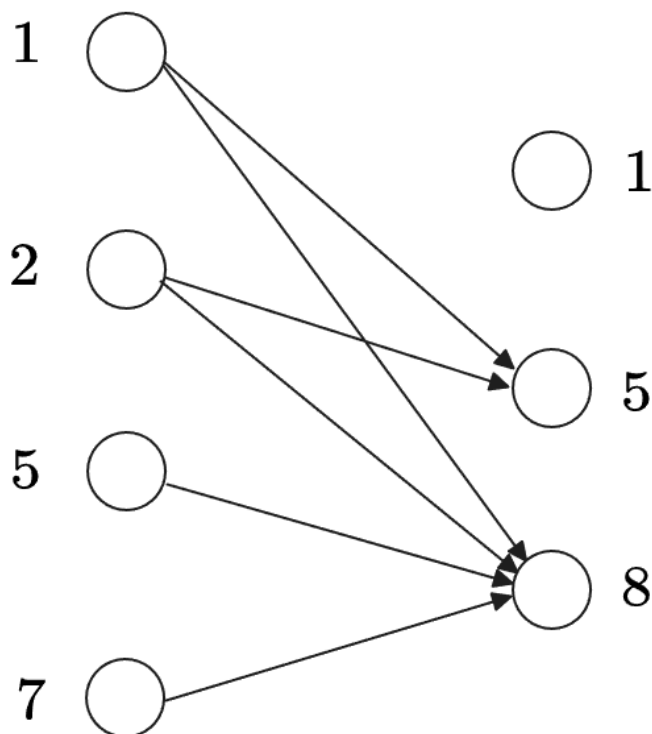
Гомогенное отношение $R \subseteq M^2$ можно представить в виде ориентированного графа, где вершины отвечают за элементы, а каждое ребро $a \rightarrow b$ существует тогда и только тогда, когда $a R b$:



$$M = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}\}$$

Гетерогенное отношение $R \subseteq A \times B$ можно представить в виде ориентированного графа, где вершины левой доли отвечают за элементы из A , вершины правой доли отвечают за элементы B , а каждое ребро $a \in A \rightarrow b \in B$ существует тогда и только тогда, когда $a R b$:



$$A = \{1, 2, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 5, 8\}$$

$$R = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge a < b\}$$

Гетерогенное отношение $R \subseteq A \times B$ можно представить в виде матрицы $M_R = \llbracket R \rrbracket$, где ряды отвечают за элементы A , столбцы отвечают за элементы B , и

$M_R[i, j] = 1 \iff a_i R b_j$ и 0 иначе:

$$A = \{1, 2, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 5, 8\}$$

$$R = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge a < b\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Особые отношения

Info

Для любого множества M мы определяем следующие **особые отношения**:

- Пустое отношение: $\emptyset \subseteq M^2$
- Отношение идентичности: $I_M = \{\langle x, x \rangle \mid x \in M\}$
- Универсальное: $U_M = M^2$

Операции на отношениях

Для отношений $R, S \subseteq A \times B$ определим следующие операции:

- **Объединение**:

$$R \cup S = \{\langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \vee \langle a, b \rangle \in S\}$$

- **Пересечение**:

$$R \cap S = \{\langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \wedge \langle a, b \rangle \in S\}$$

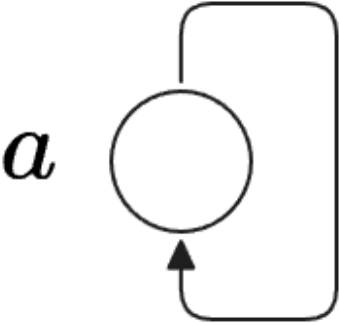
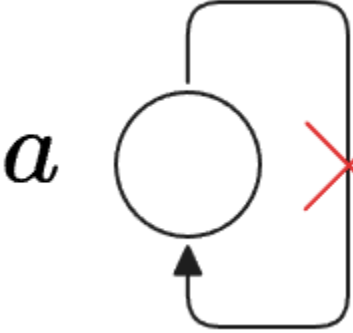
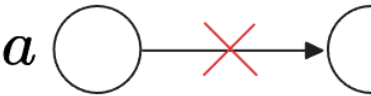


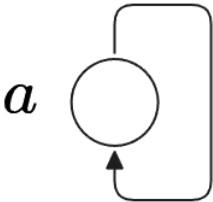
- **Дополнение**:

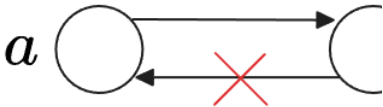
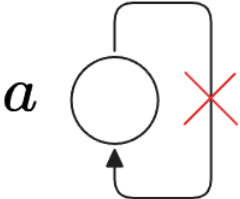
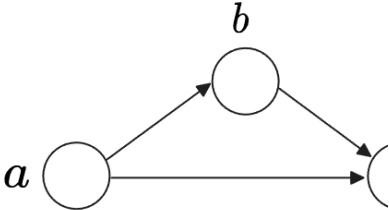
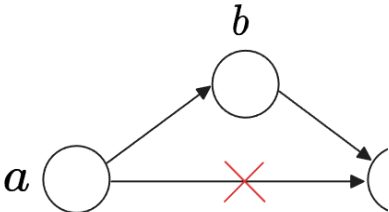
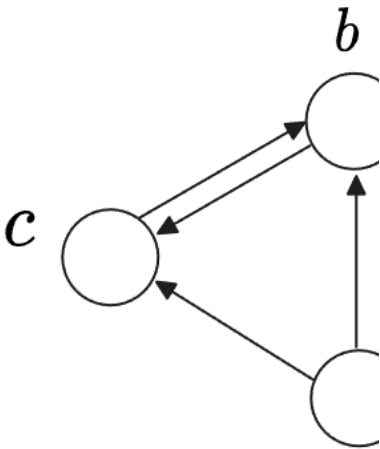
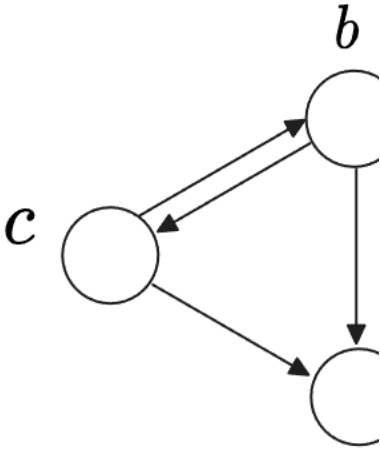
$$\overline{R} = (A \times B) \setminus R$$

- **Конверсия** (инверсия, обратное отношение):

$$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \}$$

Свойства отношений

Свойство	Определение	Представление
Рефлексивность	$\forall a \in M : a R a$	
Иррефлексивность	$\forall a \in M : a \not R a$	
Корефлексивность	$\forall x, y \in A : x R y \implies x = y$	
Симметричность	$\forall a, b \in M : a R b \implies b R a$	
Антисимметричность	$\forall a, b \in M : a R b \wedge b R a \implies a = b$	 

Свойство	Определение	Представление
Асимметричность	$\forall a, b \in M : a R b \implies b \not R a$	 
Транзитивность	$\forall a, b, c \in M : a R b \wedge b R c \implies a R c$	
Антитранзитивность	$\forall a, b, c \in M : a R b \wedge b R c \implies a \not R c$	
Правая евклидовость	$\forall a, b, c \in M : (a R c \wedge a R b) \implies b R c$	
Левая евклидовость	$\forall a, b, c \in M : (b R a \wedge c R a) \implies b R c$	

Отношения эквивалентности

Info

Отношение называется **отношением эквивалентности**, если оно *рефлексивно*, *симметрично* и *транзитивно*.

Info

Пусть есть R — отношение эквивалентности.

Классом эквивалентности называется множество всех элементов, эквивалентных заданному:

$$[x]_R = \{y \in M \mid x R y\}$$

Теорема (1)

Если $R \subseteq M^2$ — отношение эквивалентности, тогда $\forall x, y \in M : x R y \iff [x]_R = [y]_R$.

Info

Quotient set (разбиение на классы эквивалентности) — множество всех классов эквивалентности:

$$M/R = \{[x]_R \mid x \in M\}$$

Теорема 2

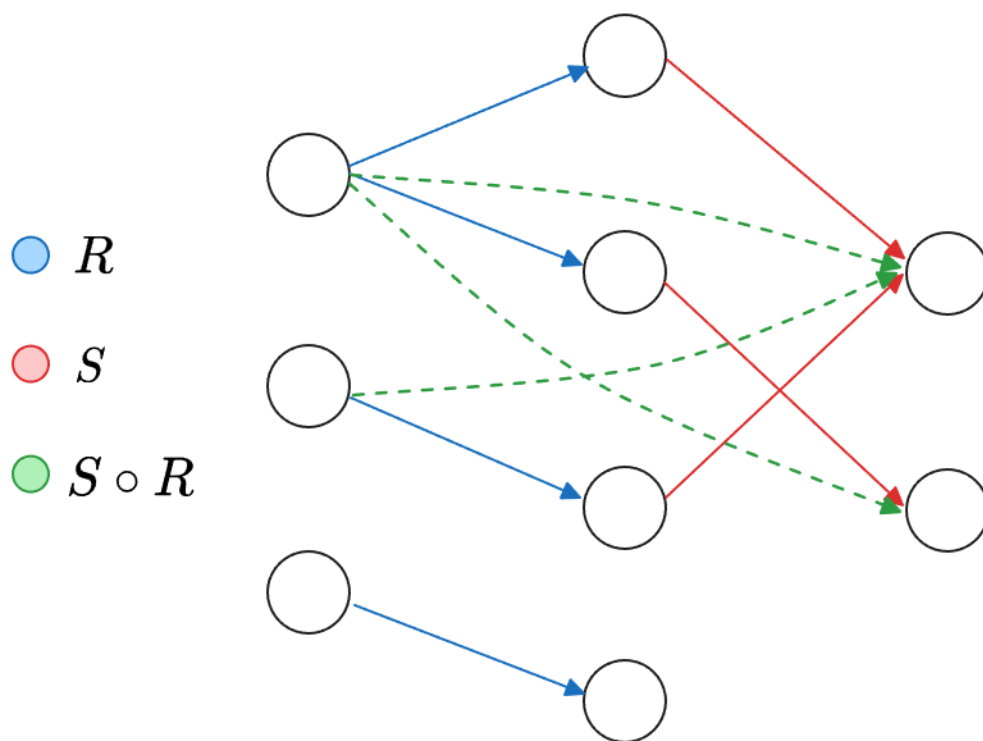
Каждое отношение эквивалентности $R \subseteq M^2$ соответствует некоторому разбиению M , и наоборот.

Композиция отношений

Info

Композиция двух отношений $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ определяется как

$$R; S = S \circ R = \{\langle a, c \rangle \mid \exists b \in B : (a R b) \wedge (b S c)\}$$



Степени отношения

Info

Для гомогенного отношения $R \subseteq M^2$ мы определяем его **степени** как:

- $R^0 = I_M$ (отнош-е идентичности)
- $R^1 = R$
- $R^n = R^{n-1} \circ R$

