Конспект 07 — Аналитическая геометрия

Содержание

Системы координат

Общие представления

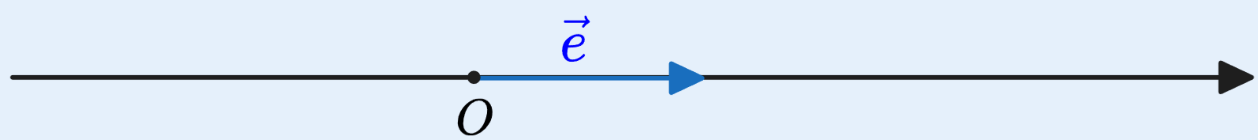
Определение

Биективное отображение $A \to \mathbb{R}^n$, где A — множество точек в геометрическом пространстве, называется **системой координат**.

Координаты на прямой

Определение

Система координат в $\mathbb{R}$, заданная началом координат O и вектором $\vec{e}$ называется **координатной прямой**:



Любые два вектора, принадлежащие координатной прямой, линейно зависимы или, иначе, *коллинеарны*.

Расстояние между точками на прямой

Если заданы две точки M_1 и M_2, имеющие координаты x_1 и x_2 соответственно, расстояние между ними определяется как:

$$|M_1M_2| = |x_1 - x_2|$$

Прямое отношение точек на прямой

Если заданы три точки M_1, M и M_2, имеющие координаты x_1, x и x_2, то их прямое отношение определяется как:

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$$

Зная прямое отношение этих точек, легко выразить x:

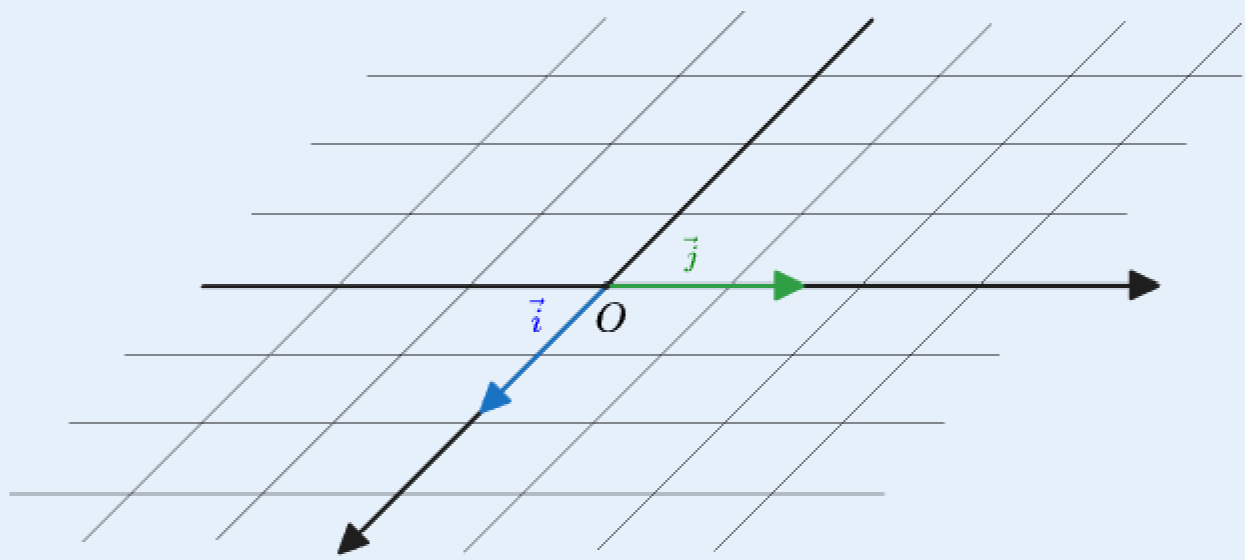
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

Координаты на плоскости

Декартовы координаты

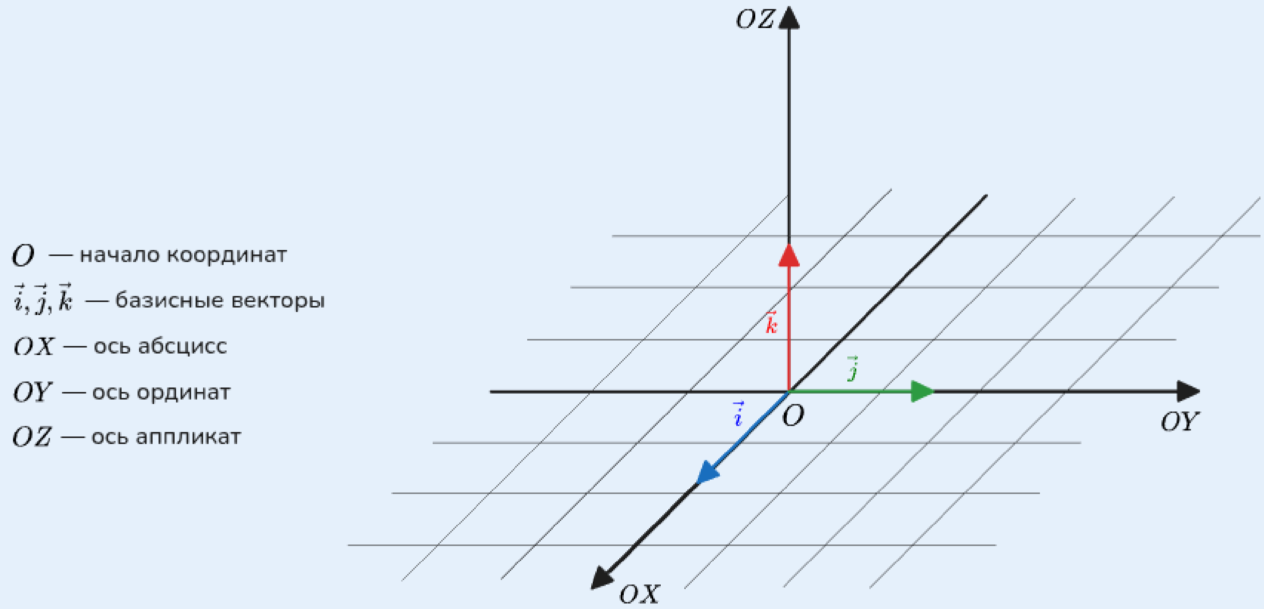
Определение

Система координат в $\mathbb{R}^2$, заданная началом координат O и произвольным базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, в которой произвольная точка выражается как линейная комбинация базисных векторов, называется **декартовой системой координат на плоскости**:



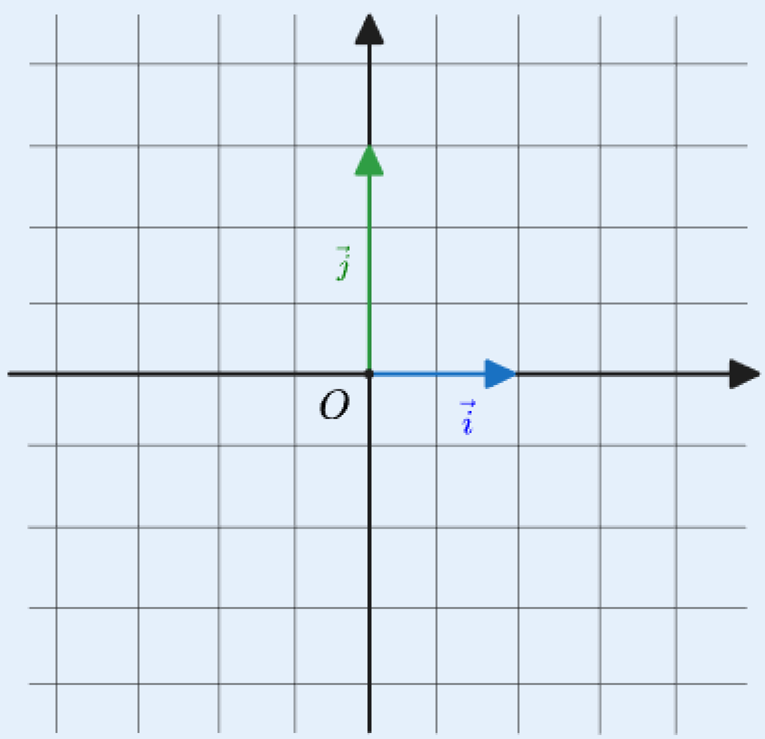
Определение

Прямые, проходящие через начало декартовой системы координат в направлении базисных векторов, называются **осями координат**. Первая ось называется осью *абсцисс*, вторая — осью *ординат*, третья — осью *аппликат*:



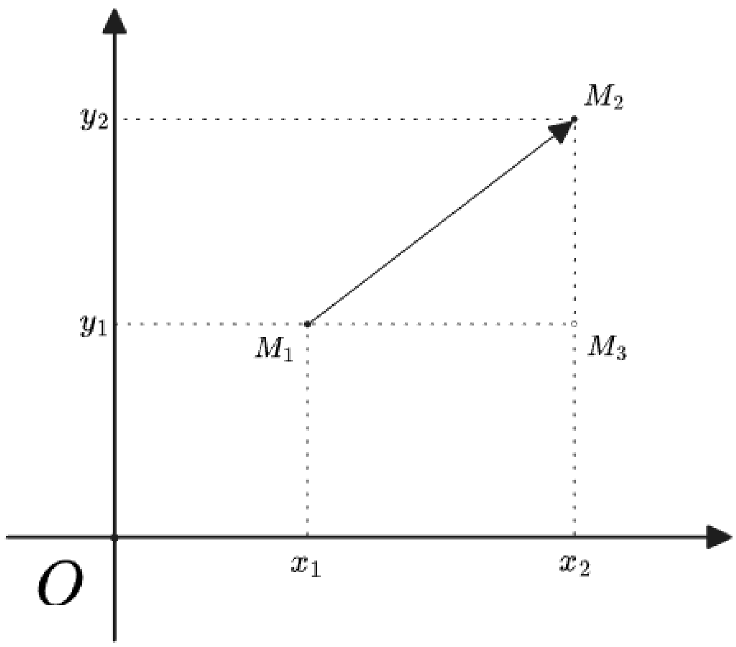
Определение

Декартова система координат, для базисных векторов которой $\vec{e}_1 = \{x_1, y_1\}$ и $\vec{e}_2 = \{x_2, y_2\}$ выполняется условие $x_1 y_2 = x_2 y_1$, называется **ортогональной**:



Расстояние между точками на плоскости

Если в ортонормированной системе координат заданы две точки M_1 и M_2 с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно:



то расстояние между ними выражается как:

$$|M_1M_2| = \sqrt{|M_1M_3|^2 + |M_3M_2|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Определение

Длиной $|\vec{v}|$ вектора $\vec{v}$ называется расстояние от начала координат до соответствующей ему точке.

Нормирование вектора

Любой вектор можно *нормировать по длине*, т.е. получить сонаправленный вектор единичной длины:

$$v' = \left(\frac{v_x}{|v|}; \frac{v_y}{|v|}\right)$$

Вектор v' называется **ортом** вектора v.

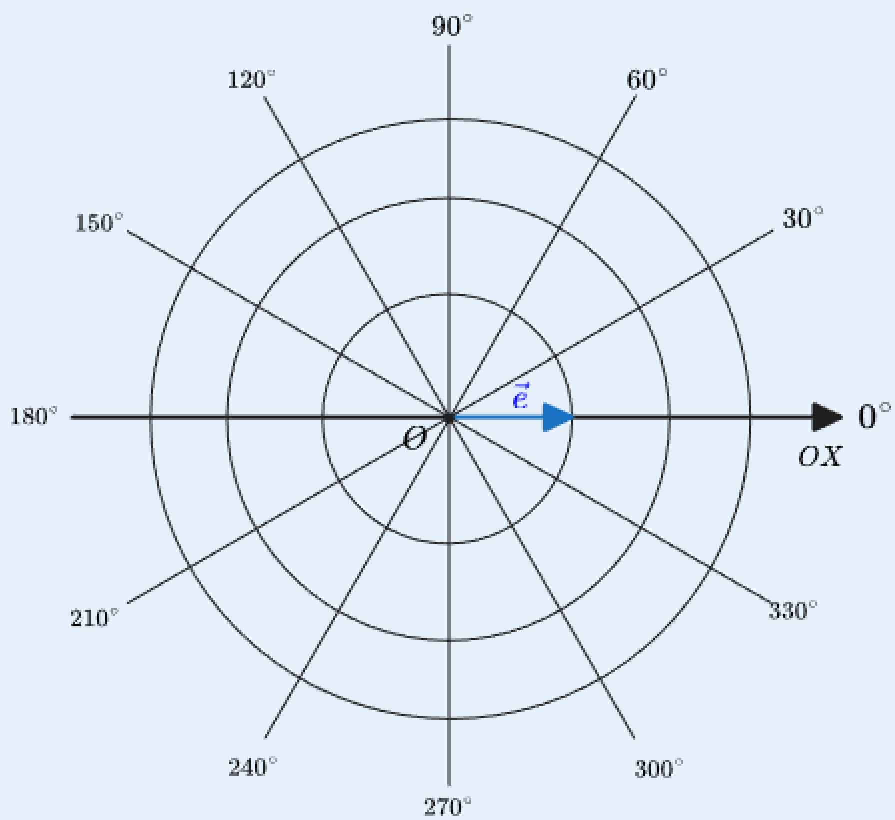
Определение

Ортогональная система координат, в которой базисные векторы имеют единичную длину, называется **ортонормированной**.

Полярные координаты

Определение

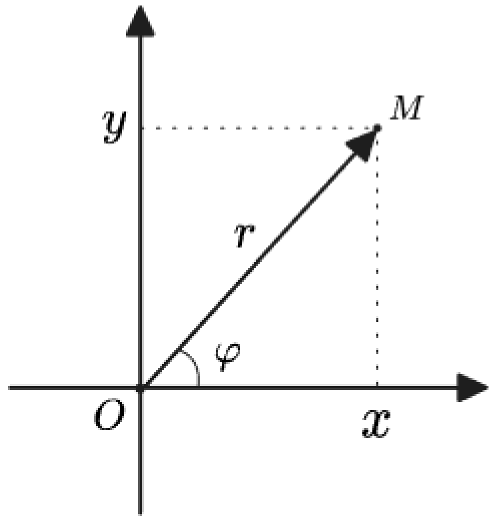
Система координат в $\mathbb{R}^2$, заданная полюсом O и единичным вектором $\vec{e}$, в которой любая точка задаётся двумя параметрами — радиусом r и полярным углом φ — называется **полярной системой координат**:



Координатаня ось OX при этом называется *полярной осью*.

Переход к декартовым координатам

Если в полярных координатах задана точка $M(r, \varphi)$:



то легко видеть, что она будет иметь следующие декартовы координаты:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

Обратный переход также легко осуществить:

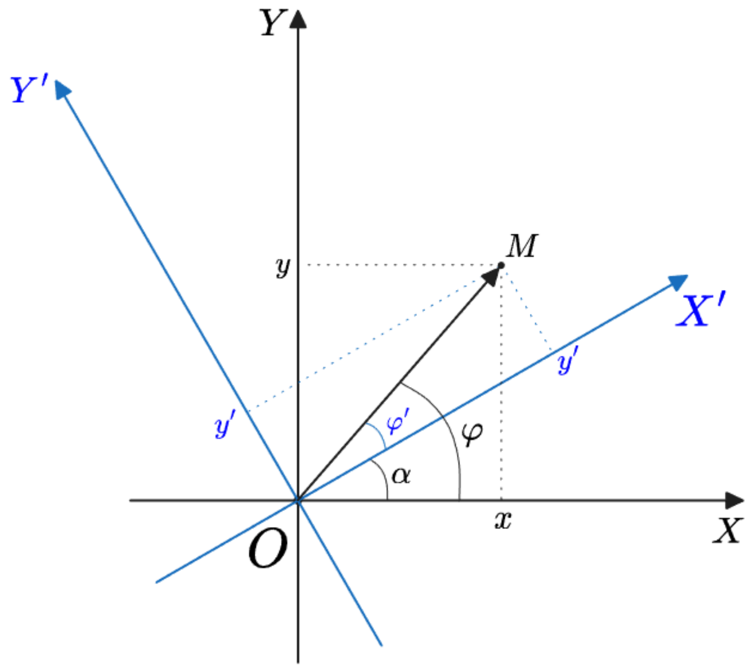
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right)$$

Поворот вектора

Поворот системы координат

Система координат подвергается *повороту*:



Координаты точки $M(x, y)$ будут связаны с координатами, полученными в результате поворота на α против часовой стрелки, следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = \\ &= r\cos(\varphi' + \alpha) = \\ &= r(\cos\varphi'\cos\alpha - \sin\varphi'\sin\alpha) = \\ &= r\cos\varphi'\cos\alpha - r\sin\varphi'\sin\alpha = \\ &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= r\cos\varphi = \\ &= r\cos(\varphi' + \alpha) = \\ &= r(\sin\varphi'\sin\alpha + \cos\varphi'\cos\alpha) = \\ &= r\sin\varphi'\sin\alpha + r\cos\varphi'\cos\alpha = \\ &= y'\sin\alpha + x'\cos\alpha \end{aligned}$$

Можно заметить, что поворот системы координат против часовой стрелки — то же самое, что поворот вектора по часовой стрелке; таким образом, приведенные формулы описывают также и это явление.

Определение

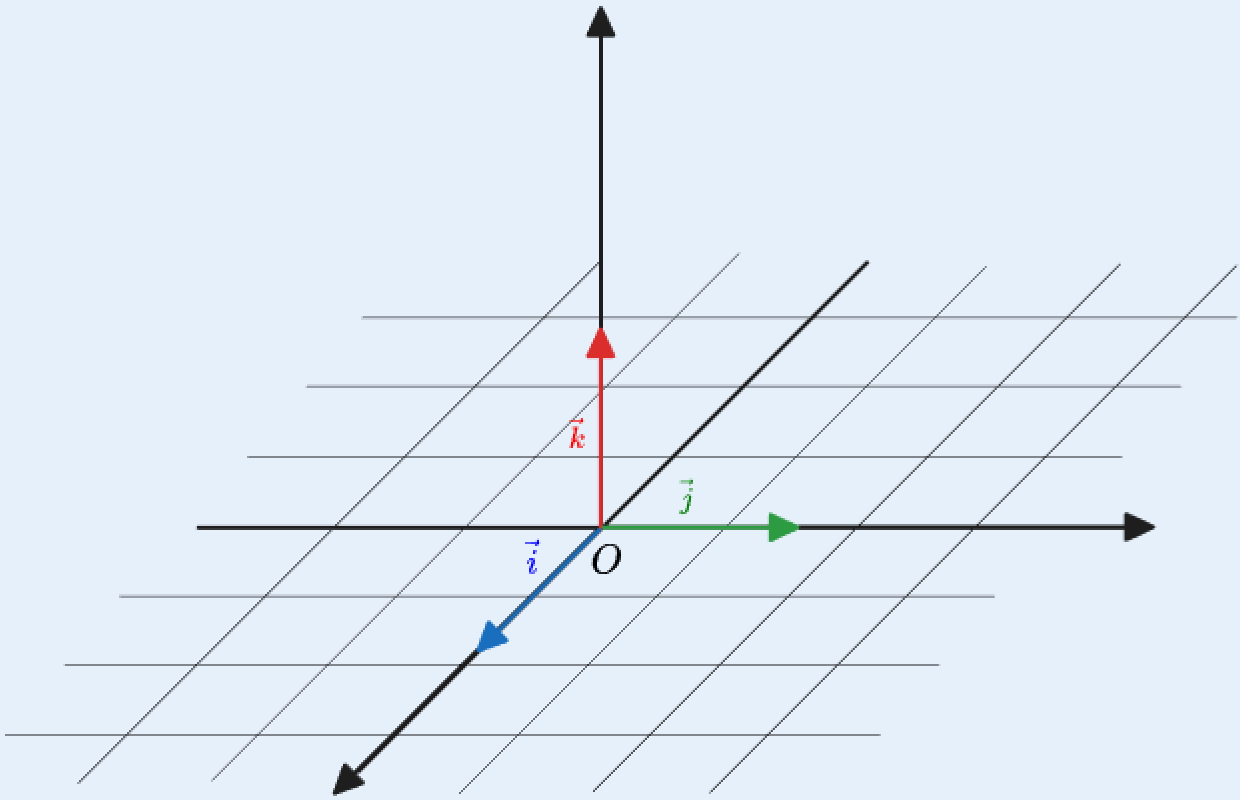
Если в декартовой системе координат на плоскости ось ординат повёрнута по часовой стрелке относительно оси абсцисс, то такая система имеет **правую ориентацию**, в противном случае — **левую ориентацию**.

Системы координат в пространстве

Декартовы координаты в пространстве

Определение

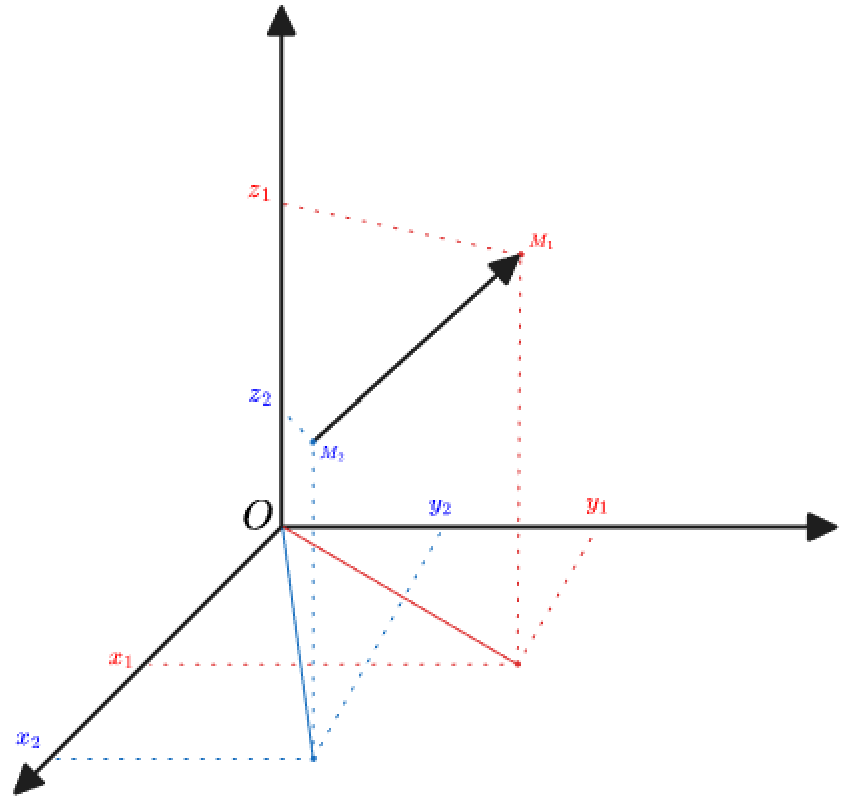
Система координат в $\mathbb{R}^3$, заданная началом координат O и произвольным базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, называется **декартовой системой координат в пространстве**:



Далее будут рассмотрены только ортонормированные системы координат в пространстве.

Расстояние между точками в пространстве

Если в декартовом пространстве заданы две точки M_1 и M_2, имеющие координаты (x_1, y_1, z_2) и (x_2, y_2, z_2) соответственно:



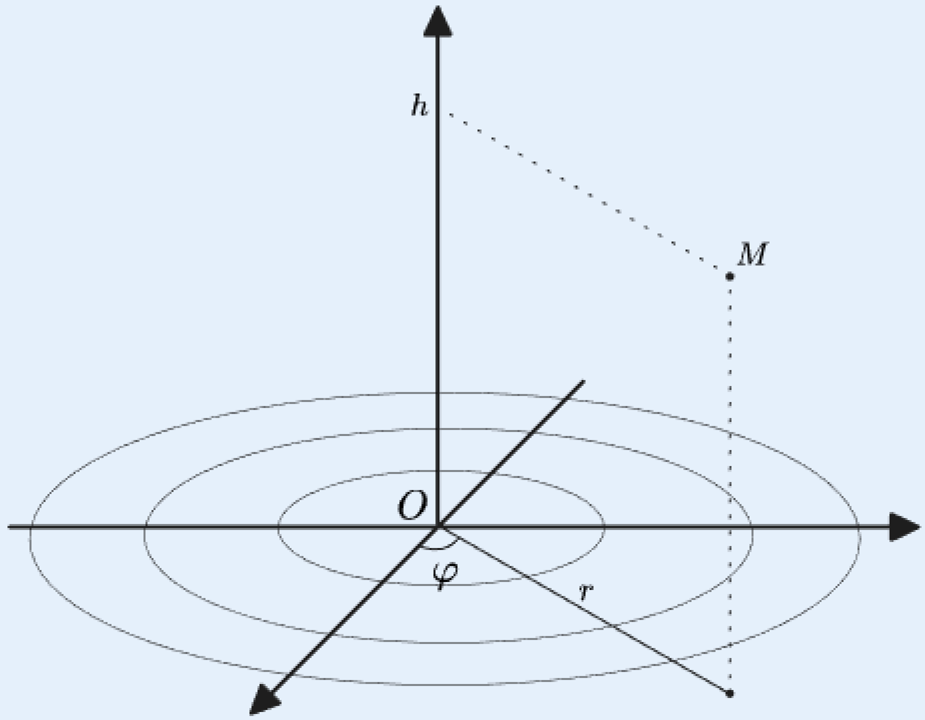
то расстояние между ними выражается как:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_2)^2}$$

Цилиндрические координаты

Определение

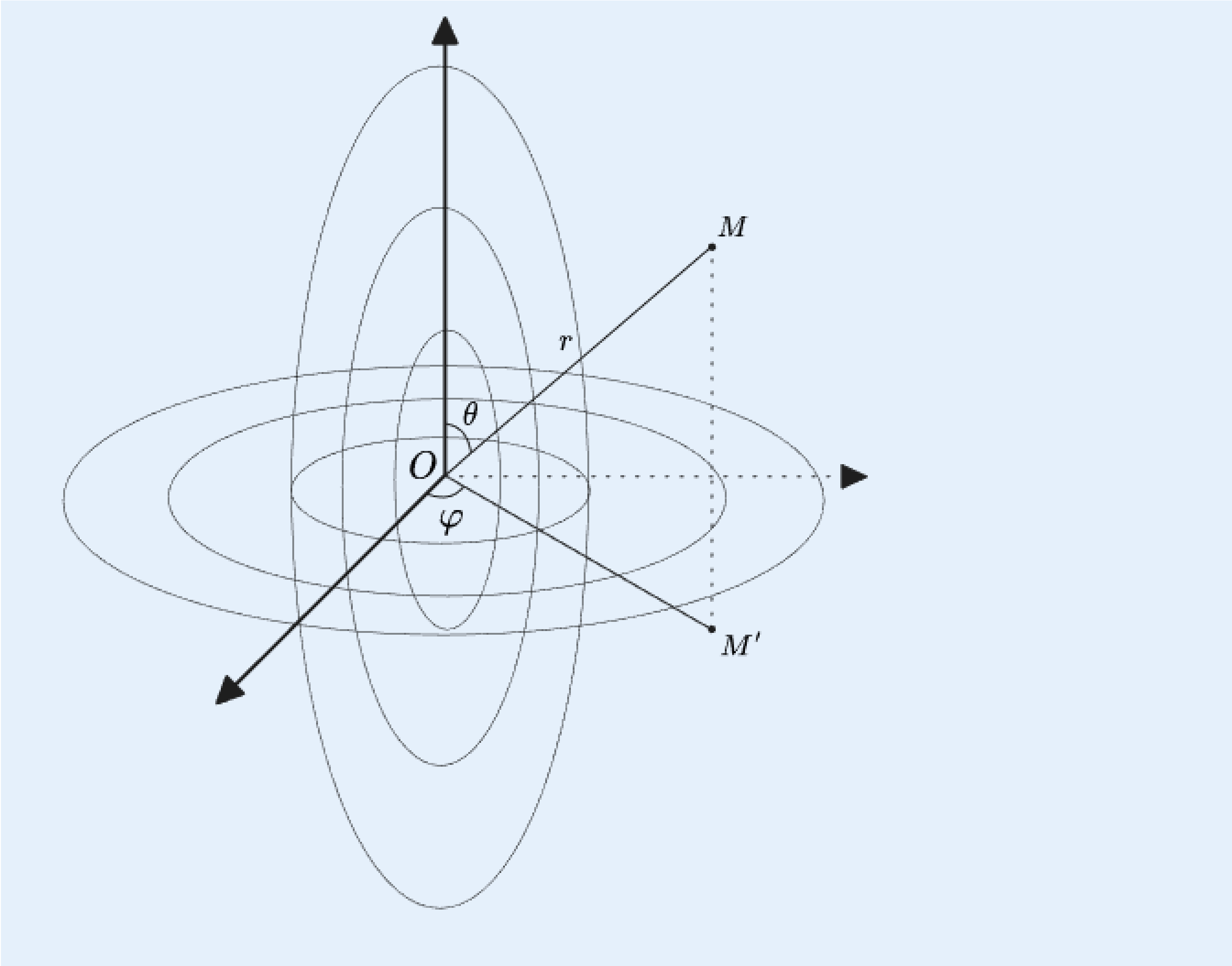
Система координат в $\mathbb{R}^3$, являющаяся полярной по осям абсцисс и ординат и декартовой по оси аппликат, называется **цилиндрической**:



Сферические координаты

Определение

Система координат в $\mathbb{R}^3$, в которой каждая точка определяется тройкой чисел (r, φ, θ) — радиусом, углом долготы и углом широты — называется **сферической**:



Переход к декартовым координатам

Если в сферических координатах задана точка $M(r, \varphi, \theta)$, то легко видеть, что её проекция M' будет иметь координаты $(r\sin\theta, \varphi)$, а значит, что точка M будет иметь декартовы координаты вида:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

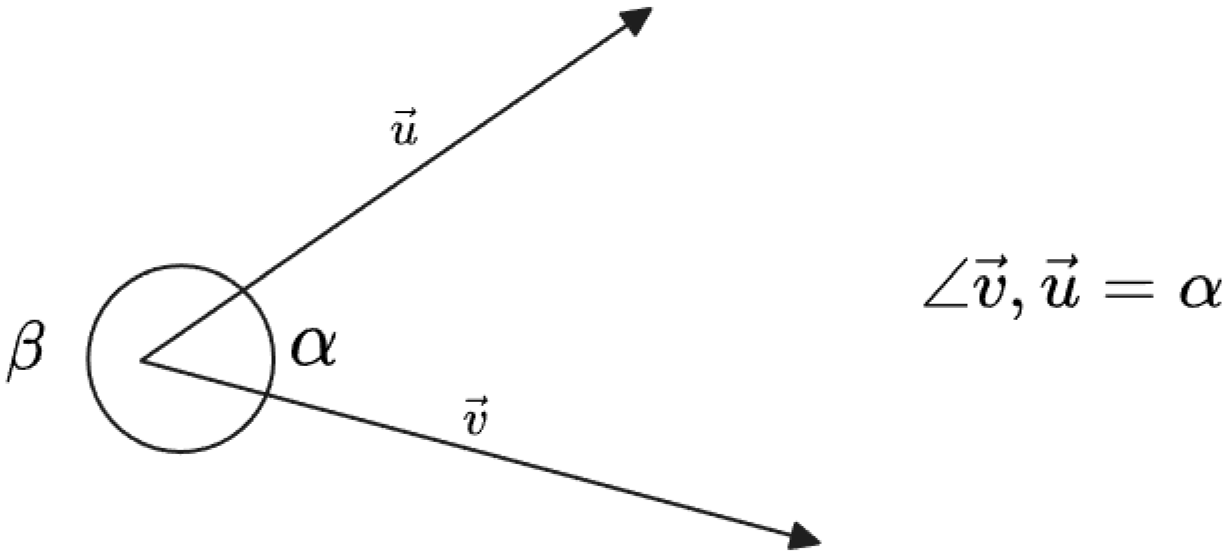
$$z = r\cos\theta$$

Векторная алгебра

Вектор в пространстве

Угол между векторами

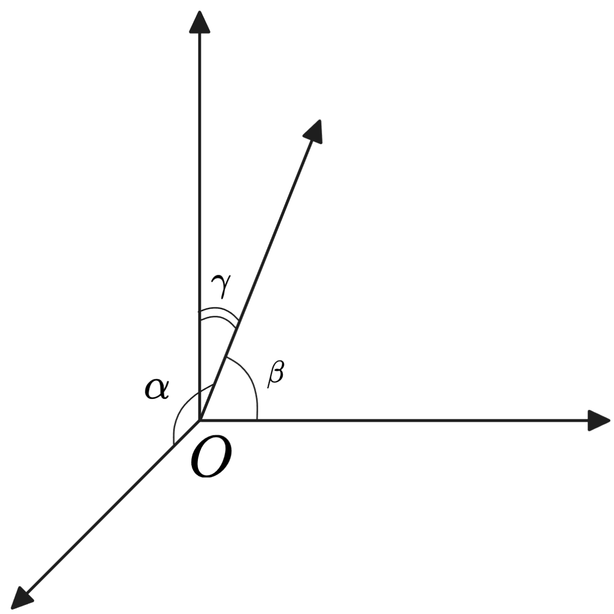
Углом между двумя векторами называется наименьший из углов, на которые необходимо повернуть один из них так, чтобы их направление совпало:



Векторы, угол между которыми составляет 90°, называются *ортогональными*.

Направляющие косинусы

Направление вектора в n-мерной декартовой системе координат однозначно задаётся n значениями $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma, \ldots$ — косинусами углов, которые вектор образует с положительными направлениями координатных осей:

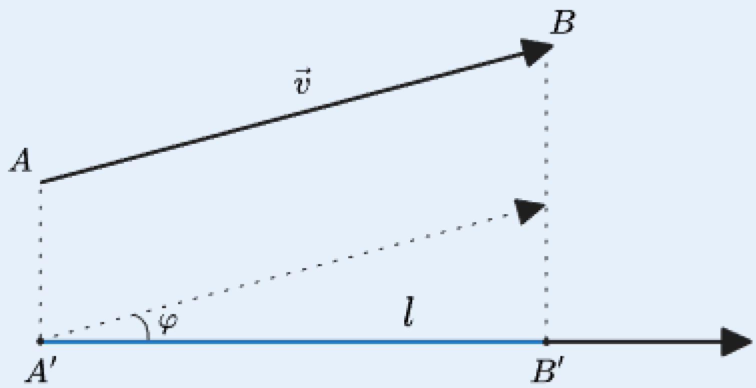


Эти значения называются **направляющими косинусами**.

Проекция вектора

ⓘ Определение

Скалярная величина $\text{пр}_l\vec{v}$, равная произведению длины вектора $\vec{v}$ на косинус угла $\angle l, \vec{v}$, называется **проекцией** вектора $\vec{v}$ на ось l:



$$|A'B'| = |\vec{v}| \cos\varphi = \text{пр}_l\vec{v}$$

Свойства проекций

0° **Проекция орта**

Проекция единичного вектора $\vec{e}$ на произвольную ось l представляет собой косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l\vec{e} = \cos\varphi$$

Это свойство было доказано ранее при рассмотрении перехода от полярных координат к декартовым.

1° **Умножение на скаляр**

Если в декартовой системе координат задан вектор $\vec{v} = (x, y)$, то для любого ненулевого скаляра λ верно, что

$$\text{пр}_l\left(\lambda\vec{v}\right) = \lambda\,\text{пр}_l\vec{v}$$

Доказательство

Если $\lambda > 0$, имеем

$$\text{пр}_l\left(\lambda\vec{v}\right) = |\lambda\vec{v}| \cos\varphi = \left|\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)}\right| \cos\varphi = |\lambda||\vec{v}| \cos\varphi = \lambda\,\text{пр}_l\vec{v},$$

что и требовалось доказать.
При $\lambda < 0$ косинус поменяет знак, и аналогичными рассуждениями мы получим

$$\text{пр}_l\left(\lambda\vec{v}\right) = -|\lambda|\text{пр}_l\vec{v} = \lambda\,\text{пр}_l\vec{v},$$

что и требовалось доказать.

2° **Проекция на координатную ось**

Проекция вектора на координатную ось равняется соответствующей его координате:

$$\text{пр}_{OX}\vec{v} = \vec{v}_x$$

$$\text{пр}_{OY}\vec{v} = \vec{v}_y$$

Доказательство

Из свойств 0° и 1° имеем:

$$\begin{aligned} \text{пр}_{OX}\vec{v} = \text{пр}_{OX}\left(\lambda\vec{e}\right) = \\ = \lambda\,\text{пр}_{OX}\vec{e} = \\ = \lambda\cos\varphi = \\ = \vec{v}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{пр}_{OY}\vec{v} = \text{пр}_{OY}\left(\lambda\vec{e}\right) = \\ = \lambda\,\text{пр}_{OY}\vec{e} = \\ = \lambda\cos(90^\circ - \varphi) = \\ = \lambda\sin\varphi = \\ = \vec{v}_y, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Свойство легко обобщить на бо̀льшие размерности, если рассуждать при этом с точки зрения направляющих косинусов.

3° **Проекция суммы**

Проекция суммы равна сумме проекций:

$$\text{пр}_{\vec{a}}\left(\vec{v} + \vec{u}\right) = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{v} + \text{пр}_{\vec{a}}\vec{u}$$

Это свойство обобщается на произвольное количество векторов:

$$\text{пр}_{\vec{a}}\sum_{i=0}^{n}\vec{v}_i = \sum_{i=0}^{n}\text{пр}_{\vec{a}}\vec{v}_i$$

Доказательство

Повернём систему координат так, чтобы ось l была координатной (к примеру, осью абсцисс). Тогда, согласно свойству 2°,

$$
\begin{aligned}
\text{пр}_l\left(\vec{v}+\vec{u}\right) = \left(\vec{v}+\vec{u}\right)_x = \\
= \vec{v}_x + \vec{u}_x = \\
= \ \text{пр}_l\vec{v} + \text{пр}_l\vec{u},
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

Произведение векторов

Скалярное произведение

Определение

Скалярным произведением векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$ называется скаляр, определяемый как произведение модуля первого вектора на проекцию второго вектора на первый:

$$
\vec{v}\cdot\vec{u} = \left(\vec{v},\vec{u}\right) = |\vec{v}|\ \text{пр}_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\varphi
$$

Свойства скалярного произведения

0° **Ортогональные векторы**

Если для некоторых векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$ выполняется $(\vec{v},\vec{u}) = 0$, то верно одно из следующего:

- $\vec{v}$ — нулевой вектор;
- $\vec{u}$ — нулевой вектор;
- $\cos\varphi = 0 \implies \vec{v}$ перпендикулярен $\vec{u}$.

Доказательство тривиально.

1° **Коммутативность**

Для любых двух векторов $\vec{v}$, $\vec{u}$ верно, что

$$
(\vec{v},\vec{u}) = (\vec{u},\vec{v})
$$

Доказательство тривиально.

2° **Линейность**

Для любых трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно, что:

$$
(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})
$$

Доказательство

По определению,

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = |\vec{c}|\ \text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) =$$

$$= |\vec{c}|(\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}) =$$

$$= |\vec{c}|\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}|\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b} =$$

$$= (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если заданы векторы $\vec{v}$ и $\vec{u}$, то для любого ненулевого скаляра λ верно, что

$$(\lambda\vec{v},\vec{u}) = (\vec{v},\lambda\vec{u}) = \lambda(\vec{v},\vec{u})$$

3° **Ортонормированный базис**

Векторы ортонормированного базиса удовлетворяют следующим тождествам:

$$(\vec{e}_i,\vec{e}_i) = 1 \qquad\qquad (\vec{e}_i,\vec{e}_j) = 0$$

Это напрямую следует из определения.

4° **Скалярное произведение в координатах**

Если в ортонормированных декартовых координатах заданы два вектора $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$, то верно, что

$$(\vec{v},\vec{u}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_2z_2$$

Это свойство обобщается на произвольные размерности.

Доказательство

Разложим векторы по ортонормированному базису:

$$\vec{v} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{u} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

По определению,

$$(\vec{v}, \vec{u}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$\begin{aligned}
&= x_1x_2(\vec{i}, \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i}, \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i}, \vec{k}) + \\
&+ y_1x_2(\vec{j}, \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j}, \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j}, \vec{k}) + \\
&+ z_1x_2(\vec{k}, \vec{i}) + z_1y_2(\vec{k}, \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k}, \vec{k}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_1x_2 \cdot 1 + x_1y_2 \cdot 0 + x_1z_2 \cdot 0 + \\
&+ y_1x_2 \cdot 0 + y_1y_2 \cdot 1 + y_1z_2 \cdot 0 + \\
&+ z_1x_2 \cdot 0 + z_1y_2 \cdot 0 + z_1z_2 \cdot 0 =
\end{aligned}$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

что и требовалось доказать.

Векторное произведение

Определение

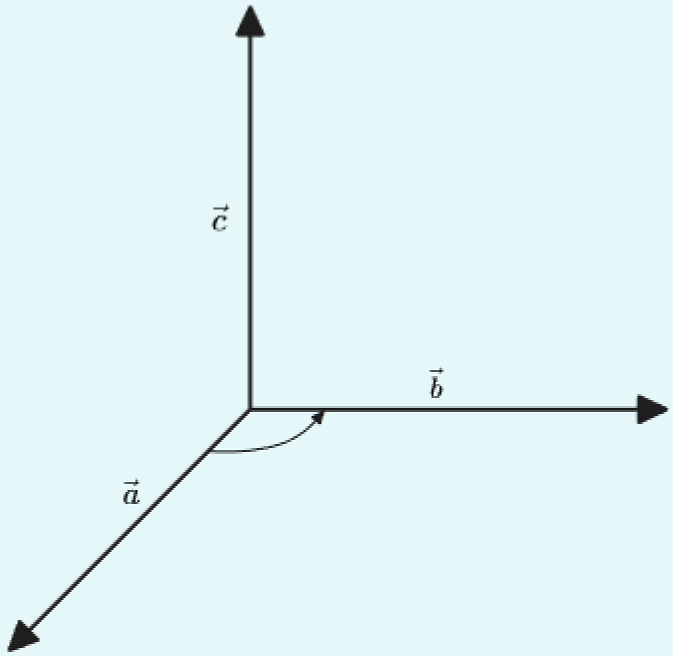
Векторным произведением векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая;
- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$ (площадь параллелограмма, натянутого на векторы)

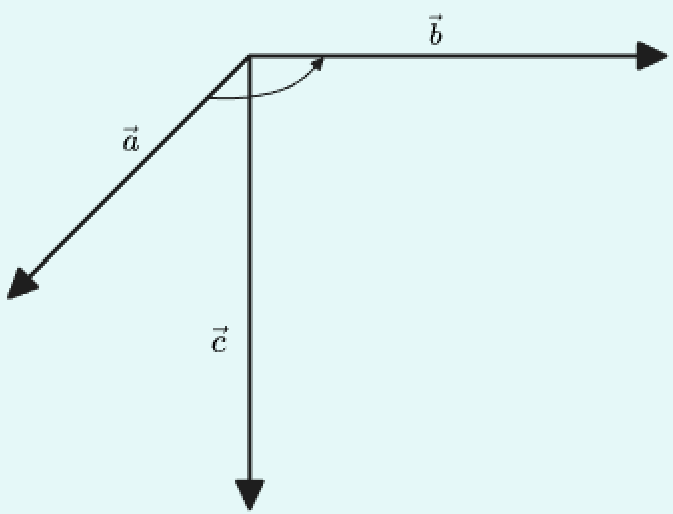
Векторное произведение обозначается $\vec{v} \times \vec{u}$ или $[\vec{v}, \vec{u}]$.

Замечание

Тройка векторов называется *правой*, если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ относительно конца вектора $\vec{c}$ осуществляется *против часовой стрелки*:



В противном случае тройка называется *левой*:



Векторное произведение определено таким образом, чтобы всегда образовывать правую тройку векторов.

Свойства векторного произведения

> 0° **Коллинеарные векторы**
>
> Если для некоторых векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$ выполняется $[\vec{v}, \vec{u}] = 0$, то верно одно из следующего:
>
> - $\vec{v}$ — нулевой вектор;
> - $\vec{u}$ — нулевой вектор;

- $\sin\varphi = 0 \implies \vec{v}$ коллинеарен $\vec{u}$.

Доказательство тривиально.

1° **Кососимметричность**

Для любых двух векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$ верно, что

$$[\vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}]$$

Доказательство

Это напрямую исходит из условия правого направления тройки. Если изменить порядок операндов, то и их векторное произведение должно изменить направление, чтобы это ограничение продолжило выполняться.

2° **Линейность**

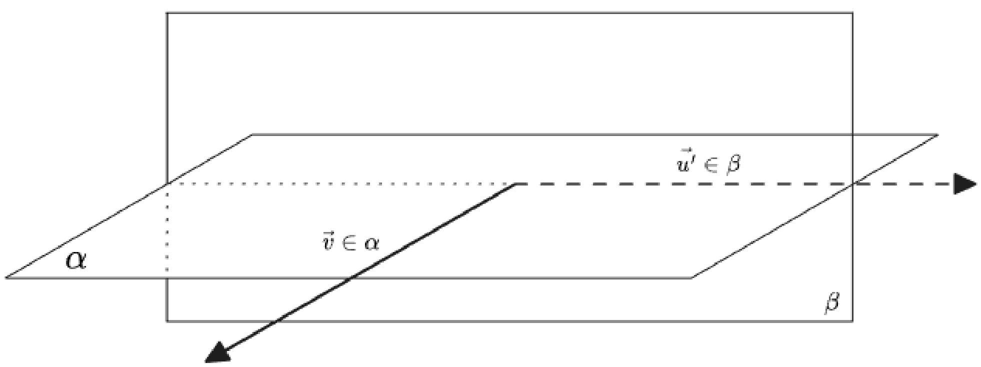
Для любых трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно, что:

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$$

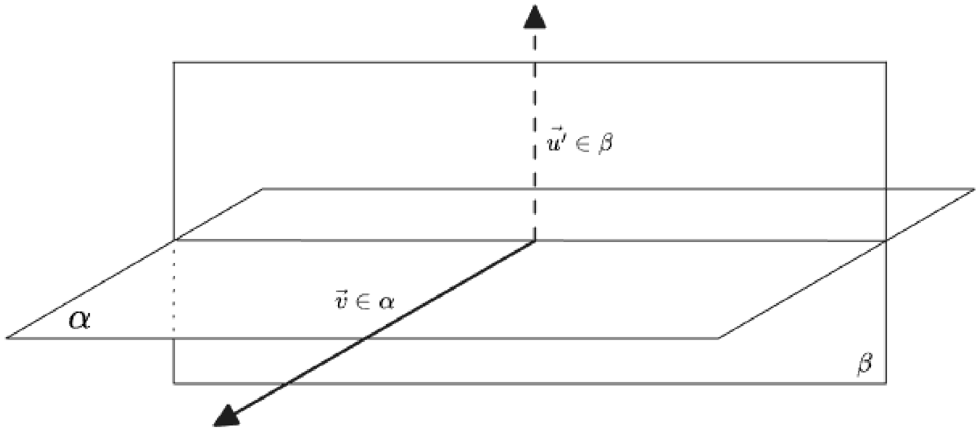
Доказательство

Векторное произведение $\vec{v} \times \vec{u}$ можно интерпретировать как применение к вектору $\vec{v}$ линейного оператора, который:

1. строит проекцию $\vec{u}'$ вектора $\vec{u}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{v}$:



2. поворачивает проекцию на 90° так, чтобы удовлетворялось условие правой направленности:



3. растягивает $\vec{u}'$ так, чтобы удовлетворялось условие длины.

Легко заметить, что каждая из этих линейна, а значит их композиция также линейна, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Из свойства кососимметричности имеем

$$[\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}]$$

Следствие 2. Если заданы векторы $\vec{v}$ и $\vec{u}$, то для любого ненулевого скаляра λ верно, что

$$[\lambda\vec{v}, \vec{u}] = [\vec{v}, \lambda\vec{u}] = \lambda[\vec{v}, \vec{u}]$$

3° **Ортонормированный базис**

Векторные произведения базиса ортонормированного пространства удовлетворяют следующим тождествам:

	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

Это напрямую следует из определения.

4° **Векторное произведение в координатах**

Если в ортонормированных декартовых координатах заданы два вектора $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$, то верно, что

$$[\vec{v}, \vec{u}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Это свойство обобщается на произвольные размерности.

Доказательство

Разложим векторы по ортонормированному базису:

$$\vec{v} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{u} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

По определению,

$$= [x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}] =$$

$$\begin{aligned} &= x_1x_2(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2[\vec{i},\vec{j}] + x_1z_2[\vec{i},\vec{k}] + \\ &+ y_1x_2[\vec{j},\vec{i}] + y_1y_2[\vec{j},\vec{j}] + y_1z_2[\vec{j},\vec{k}] + \\ &+ z_1x_2[\vec{k},\vec{i}] + z_1y_2[\vec{k},\vec{j}] + z_1z_2[\vec{k},\vec{k}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x_1x_2 \cdot 0 + x_1y_2 \cdot k - x_1z_2 \cdot j - \\ &- y_1x_2 \cdot k + y_1y_2 \cdot 0 + y_1z_2 \cdot i + \\ &+ z_1x_2 \cdot j - z_1y_2 \cdot i + z_1z_2 \cdot 0 = \end{aligned}$$

$$= x_1y_2k - x_1z_2j - y_1x_2k + y_1z_2i + z_1x_2j - z_1y_2i =$$

$$= i(y_1z_2 - z_1y_2) + j(z_1x_2 - x_1z_2) + k(x_1y_2 - y_1x_2) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

что и требовалось доказать.

Смешанное произведение

Определение

Смешанным произведением векторов $\vec{v}$, $\vec{u}$ и $\vec{w}$ называется скалярное произведение векторного произведения $[\vec{v},\vec{u}]$ и вектора $\vec{w}$:

$$\vec{v}\vec{u}\vec{w} = (\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = ([\vec{v},\vec{u}],\vec{w})$$

С геометрической точки зрения смешанное произведение определяет объём параллелипипеда, образованного операндами.

Свойства смешанного произведения

1° **Ориентация тройки**

Для любых трёх векторов $\vec{v}$, $\vec{u}$ и $\vec{w}$ верно, что если $([\vec{v},\vec{u}],\vec{w}) > 0$, то они образуют правую тройку, иначе — левую.

Доказательство тривиально.

2° **Компланарные векторы**

Если для некоторых векторов $\vec{v}$, $\vec{u}$ и $\vec{w}$ выполняется $[\vec{v}, \vec{u}] = 0$, то верно одно из следующего:

- один из векторов $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$ — нулевой;
- $\vec{v}$ и $\vec{u}$ коллинеарны;
- $\vec{v}$, $\vec{u}$ и $\vec{w}$ *компланарны*, т.е. лежат в одной плоскости.

Доказательство тривиально.

3° **Перестановки операндов**

Для любых трёх векторов $\vec{v}$, $\vec{u}$ и $\vec{w}$ верно, что:

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{w}, \vec{a}, \vec{b})$$

Доказательство

Изменения знака смешанного произедения следуют из доказанных ранее свойств скалярного и векторного произведений.

4° **Смешанное произведение в координатах**

Если в ортонормированных декартовых координатах заданы три вектора $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, то верно, что

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство

По доказанным ранее свойствам,

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \left(\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), (x_3, y_3, z_3) \right) =$$

$$= x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

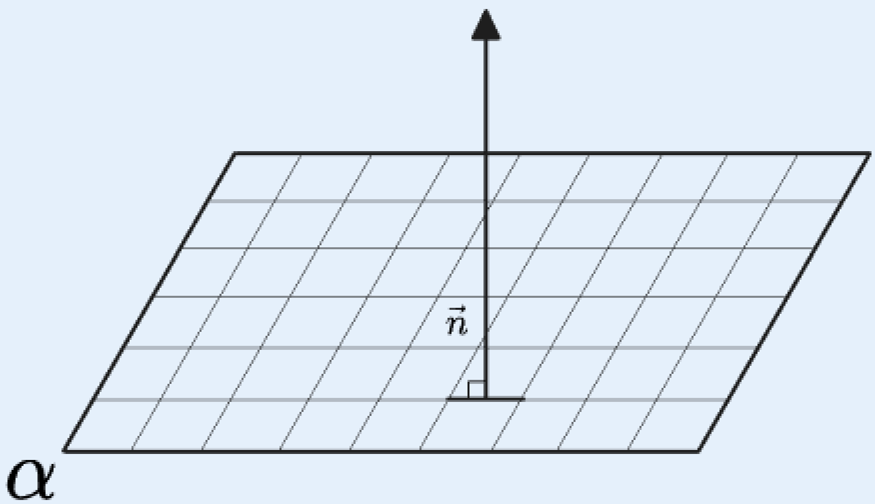
что и требовалось доказать.

Аналитическая геометрия в пространстве

Плоскость в пространстве

Определение

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярный плоскости α, т.е. перпендикулярный любой прямой, проходящей в этой плоскости, называется **нормальным вектором** к плоскости α:



Уравнения плоскости

1. **Уравнение связки плоскостей**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Это уравнение получается путём раскрытия скалярного произведения $(\vec{n}, \vec{MM_0})$ и задаёт плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

2. **Общее уравнение плоскости**

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Это уравнение получается простым раскрытием скобок в уравнении связки плоскостей для конкретной точки и нормального вектора.

3. **Нормальное уравнение плоскость**

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + c\cos\gamma + |d| = 0$$

Это уравнение получается путём нормирования коэффициентов общего уравнения плоскости.

4. **Уравнение плоскости в «отрезках»**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Это уравнение получается путём переноса коэффициента D в общем уравнении прямой в правую часть и деления на $-D$. Соответственно,

$$a = \frac{-D}{A} \qquad b = \frac{-D}{B} \qquad c = \frac{-D}{C}$$

Плоскость, заданная таким уравнением, проходит через три точки на осях координат:

$$M_1(a, 0, 0)$$

$$M_2(0, b, 0)$$

$$M_3(0, 0, c)$$

5. **Уравнение плоскости по трём точкам**

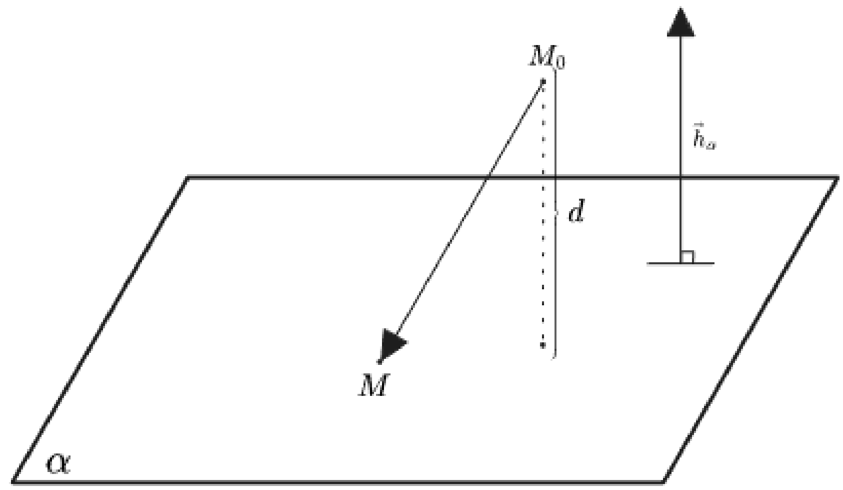
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Если заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, а также произвольная точка плоскости $M(x, y, z)$, то условие существования плоскости, проходящей через эти три точки, эквивалентно условию компланарности векторов $M\vec{M}_1$, $M\vec{M}_2$ и $M\vec{M}_3$.

Точка и плоскость

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки M_0 до плоскости α определяется как модуль проекции вектора $M_0M, M \subset \alpha$ на нормальный вектор $\vec{n}_\alpha$:



Формально,

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}_\alpha} \vec{M_0 M}| =$$

$$= |\vec{M_0 M}| |\cos \varphi| =$$

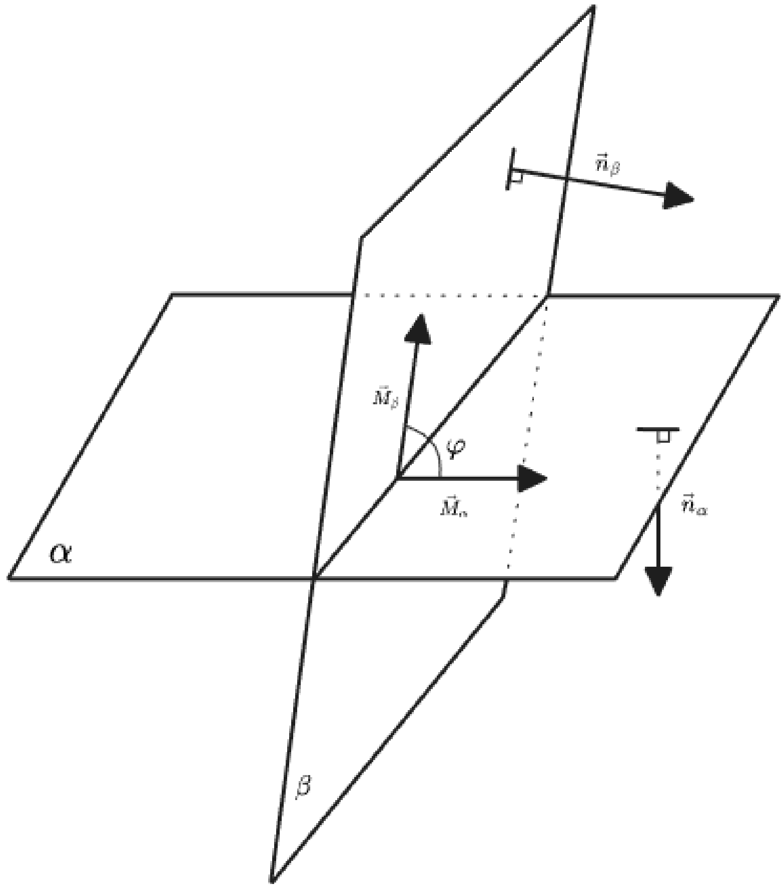
$$= \frac{|(\vec{M_0 M}, \vec{n}_\alpha)|}{|\vec{n}_\alpha|} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Угол между плоскостями

Из школьного курса геометрии читателю известно, что угол между плоскостями — это угол между двумя прямыми, принадлежащими этим плоскостям и перпендикулярными линии пересечения:



Можно теперь заметить, что:

$$\angle \vec{M}_\alpha \vec{M}_\beta = \varphi$$

$$\angle \vec{M}_\beta \vec{n}_\beta = \angle \vec{M}_\alpha \vec{n}_\alpha = 90^\circ$$

Если рассмотреть четырёхугольник, образованный векторами $\vec{M}_\alpha$, $\vec{M}_\beta$, $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}\beta$ (или противонаправленными к ним), получим, что

$$\angle \vec{n}_\alpha \vec{n}_\beta = \varphi \qquad \text{или} \qquad \angle \vec{n}_\alpha \vec{n}_\beta = 180 - \varphi$$

Таким образом, косинус угла между плоскостями можно найти как модуль косинуса между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}$$

Это позволяет проверять плоскости на ортогональность и параллельность.

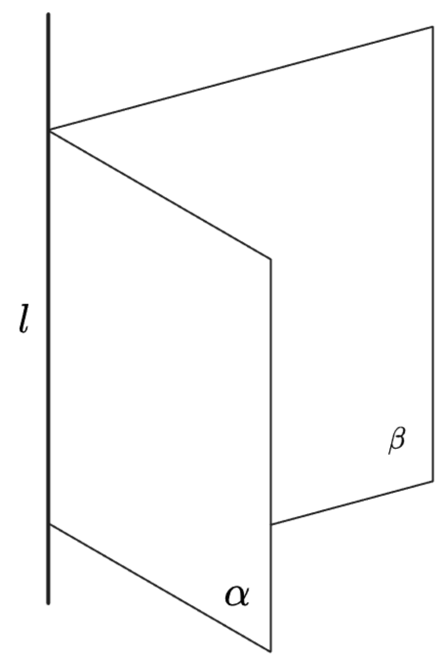
Прямая в пространстве

Уравнения прямой

1. **Общее уравнение прямой**

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

В общем виде множество точек прямой задаётся как решение СЛАУ, отвечающей за пересечение двух плоскостей:



Нормальные векторы $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$ перпендикулярны любой прямой, лежащей в α и в β соответственно, включая прямую l. Таким образом, её направляющий вектор $\vec{S}$ должен быть перпендикулярен им обоим, и поэтому выражается как их векторное произведение:

$$\vec{S} = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = \lambda(m, n, p), \quad \lambda \neq 0$$

2. **Параметрическое уравнение прямой**

$$\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$$

Это уравнение позволяет определить прямую по точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющему вектору $\vec{S}(m, n, p)$ и представляет собой буквально запись условия коллинеарности соответствующих векторов:

$$\vec{M_0M} = t\vec{S} \implies (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

3. **Каноническое уравнение прямой**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

Это уравнение получается из параметрического путём деления соответствующих уравнений на m, n и p соответственно.

Важно отметить случай, когда одна из координат направляющего вектора равняется 0. Это означает, что прямая перпендикулярна соответствующей координатной оси. Конечно, никакого деления на 0 не происходит; в этом случае условно полагается $c = c_0$, и каноническое уравнение формально становится системой.

$4.$ **Уравнение прямой по двум точкам**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то по ним можно однозначно определить направляющий вектор

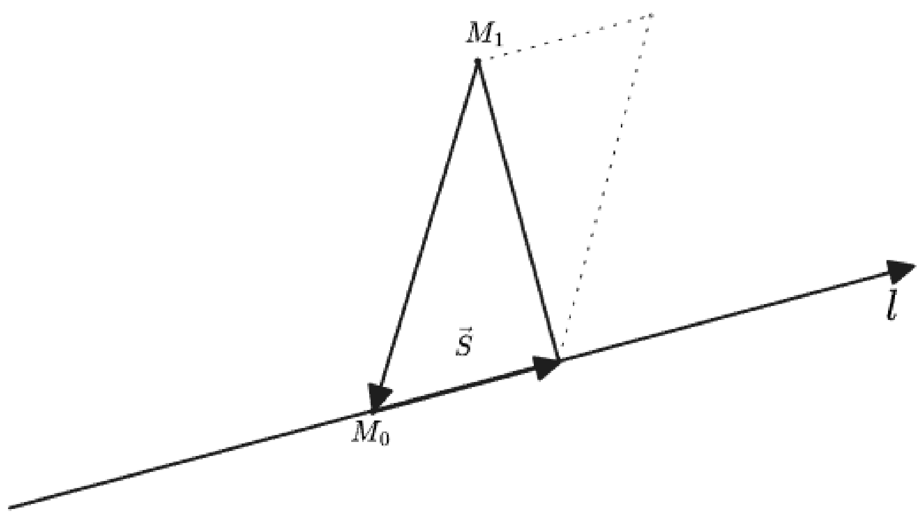
$$\vec{S}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

после чего подставить его в каноническое уравнение.

Точка и прямая

Расстояние от точки до прямой

Если зафиксировать точку $M_1 \not\subset l$ и точку M_0 из уравнения прямой, то расстояние от M_1 до l будет являться высотой параллелограмма, образованного вектором $M_1\vec{M}_0$ и направляющим вектором прямой:

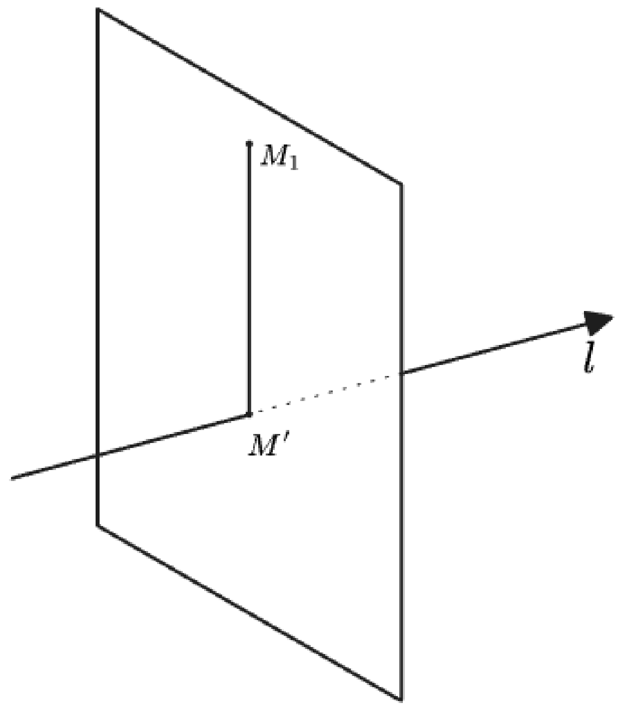


Формально,

$$d = \frac{|(M_1\vec{M}_0, \vec{S})|}{|\vec{S}|}$$

Проекция точки на прямую

Чтобы найти проекцию M' точки M_1 на прямую l, достаточно построить вспомогательную плоскость, перпендикулярную этой прямой и проходящую через точку M_1. Пересечение этой плоскости с прямой и будет проекцией точки M_1:

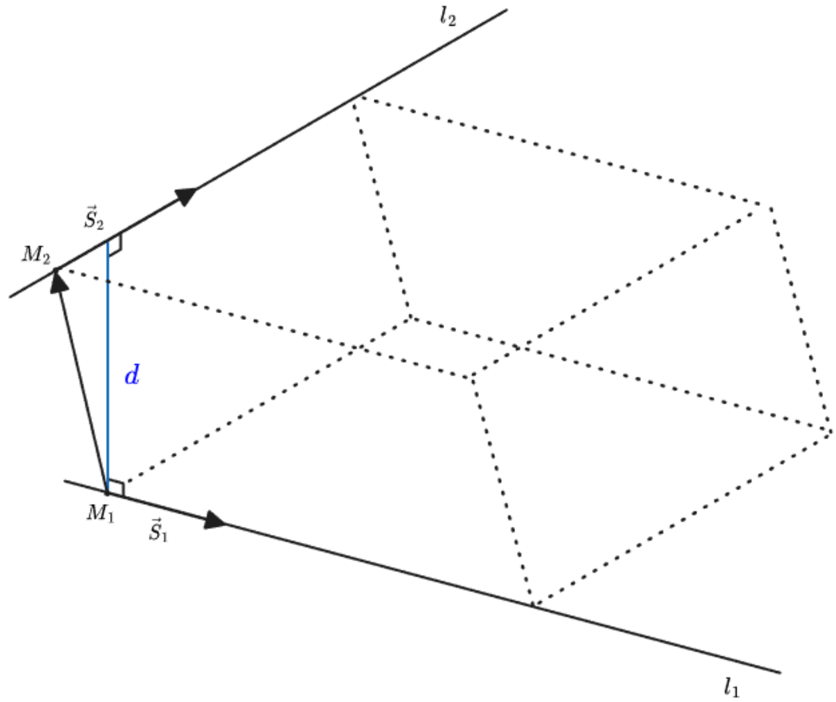


Это также позволяет найти расстояние до прямой как длину вектора $\vec{M_1M'}$.

Взаимное расположение прямых

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 можно найти как высоту параллелограмма, образованного векторами $\vec{M_1M_2}$, $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$:



Формально,

$$d = \frac{|(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{M_1 M_2})|}{|[\vec{S}_1, \vec{S}_2]|}$$

Угол между прямыми

Углом между прямыми будем считать угол между их направляющими векторами. Соответственно,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{S}_1, \vec{S}_2)}{|\vec{S}_1||\vec{S}_2|}$$

Прямая и плоскость

Взаимное расположение прямой и плоскости

Точка пересечения прямой и плоскости

Чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, можно подставить значения из параметрчиеского уравнения прямой в общее уравнение плоскости:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0,$$

откуда

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) \implies t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

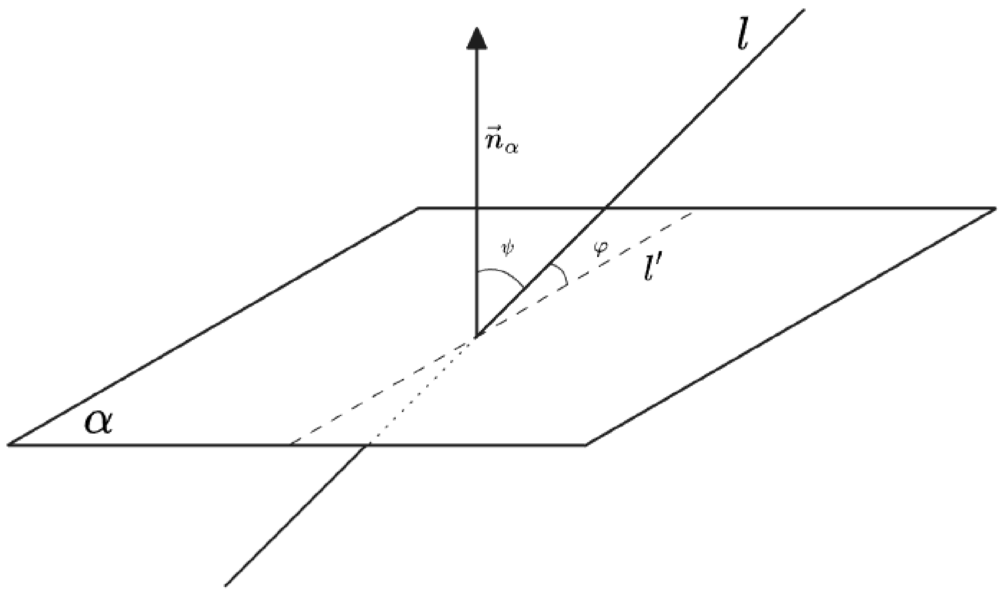
Подставив этот коэффициент обратно в параметрическое уравнение прямой, получим координату точки пересечения. Если при этом знаменатель отличен от нуля, такая точка существует и единственна. В противном случае прямая параллельна плоскости, и

- если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то она принадлежит плоскости;
- в противном случае она не принадлежит плоскости.

Взаимное расположение прямой и плоскости также удобно проверять при помощи векторных произведений направляющего и нормального векторов.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью определяется как угол между прямой и её проекцией на эту плоскость:



Заметим, что $\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \cos\psi$; отсюда легко видеть, что

$$\sin\varphi = \frac{(\vec{n}_\alpha, \vec{S})}{|\vec{n}_\alpha||\vec{S}|}$$

Плоскость, проходящая через две прямые

Если заданы две нескрещивающиеся (NB!) прямые $l_1(M_1, \vec{S}_1)$ и $l_2(M_2, \vec{S}_2)$, то условие существования плоскости, проходящей через эти прямые, эквивалентно условию компланарности векторов $\vec{M_1M}$, $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение можно также записать в *векторной форме*:

$$(x-x_1)\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} + (y-y_1)\begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix} + (z-z_1)\begin{vmatrix} m_1 & n1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$