

Лекция 15 — Логики высших порядков

Содержание

1. Категорическая логика
 1. Категорические утверждения
 2. Стандартные формы
 3. Экзистенциальная значимость
 4. Категорический силлогизм
2. Логика первого порядка
 1. Общие представления
 2. Структура логики первого порядка
 1. Элементарные компоненты
 2. Формулы
 3. Кванторы
 4. Вокабуляр
 3. Структуры
 4. Несколько важных теорем
3. Модальная логика
 1. Общие представления
 2. Синтаксис
 3. Семантика Крипке
 1. Шкала Крипке
 2. Модель Крипке
 3. Истина
 4. Системы аксиом модальной логики

”Я реально ничего не знаю.”

— Сократ

Категорическая логика

Категорические утверждения

Утверждение (также *пропозиция*) называется **категорическим**, если оно устанавливает или отрицает отношение между двумя категория объектов.

Категорическое выражение образуется следующими составляющими:

- | | |
|--------------------|--|
| 1. Субъект | Категория, описываемая выражением. |
| 2. Предикат | Категория, используемая в описании. |
| 3. Квантор | Параметр, определяющий, к какому количеству объектов категории относится суждение. |
| 4. Качество | Параметр, определяющий, является ли суждение утвердительным или отрицательным. |

Стандартные формы

В традиционной логике выделяется четыре стандартных формы категорических утверждений:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| A. Всеобщая утвердительная | «Все S являются P » |
| E. Всеобщая отрицательная | «Ни один S не является P » |
| I. Частичная утвердительная | «Хотя бы один S является P » |
| O. Частичная отрицательная | «Хотя бы один S не является P » |

Эти названия происходят от латинских слов **A**ffirmo («утверждаю») и **N**ego («отрицаю»).

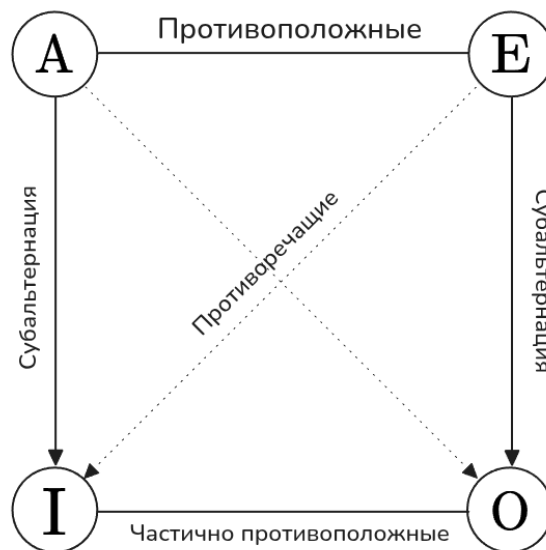
Визуальным отображением отношения между этими формами является *логический квадрат*:

А и Е **противоположны**;
они не могут быть истинны
одновременно.

І и О **частично противоположны**;
они не могут быть ложны
одновременно.

А и О, Е и І **противоречат** друг другу;
они не могут быть ложны или истинны одновременно.

А и І, Е и О образуют **субальтерацию**.
Если верно частичное утверждение, то верно и всеобщное;
если неверное всеобщное, то неверно и частичное.



Экзистенциальная значимость

📌 Определение

Утверждение вида « S является P » несёт **экзистенциальную значимость**, если из него следует существование хотя бы одного объекта в категории субъекта S .

Тогда как в традиционной логике предполагается, что все утверждения несут экзистенциальную значимость, современная логика ставит этот вопрос под сомнение. Таким образом, утверждение

«Все единороги — мифические»

в традиционной логике ложно, поскольку мы предполагаем существование единорогов; в то же время, в современной логике оно *вакуумно истинно*, поскольку единорогов может и не существовать, поэтому это суждение нельзя опровергнуть.

Логический квадрат в приведённом виде корректен лишь в рамках традиционной логики. Если мы рассматриваем категорические выражения с пустыми множествами, то:

- А и Е могут быть одновременно истинны, если множество S пусто;
- І и О могут быть одновременно ложны, если множество S пусто;
- Субальтерация перестаёт работать, поскольку для пустых категорий субъектов верно всеобщное утверждение, однако неверно частное.

Категорический силлогизм

❗ Определение

Категорический силлогизм — форма суждения, состоящая из трёх категорических утверждений:

1. бóльшая предпосылка, содержащая предикат вывода;
2. меньшая предпосылка, содержащая субъект вывода;
3. вывод.

Категорический силлогизм работает ровно с тремя терминами: меньший, средний и бóльший:

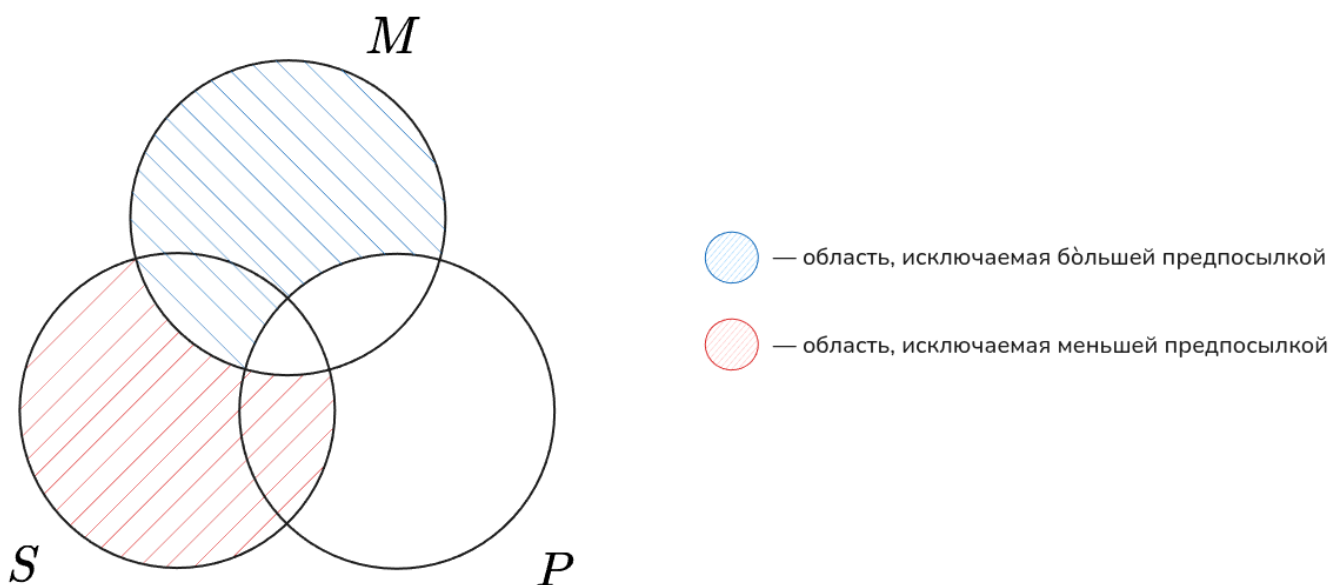
Все люди смертны.	(Бóльшая предпосылка)
Сократ — человек.	(Меньшая предпосылка)
<hr/>	
Таким образом, Сократ смертен.	(Вывод)

Здесь бóльший термин P — смертен, меньший S — Сократ, средний M — человек.

В традиционной логике существует 24 формы категорических силлогизмов, которые называются в соответствии с утверждениями, которые их формируют.

Корректность силлогизмов можно проверять при помощи диаграмм Венна.

Каждый из трёх терминов изображается в виде отдельного круга, после чего на диаграмму наносятся предпосылки:



Если при этом вывод *неизбежен*, т.е. отражается на диаграмме «сам собой», силлогизм корректен. Если в результате нанесения предпосылок вывод не возникает, силлогизм некорректен.

Предпосылки, представляющие собой частичные утверждения, помечаются на диаграмме крестиком, означаящим, что в соответствующей области существует по меньшей мере один элемент.

Логика первого порядка

Общие представления

Категорическая логика имеет ряд критических ограничений:

1. Она работает только с простыми кванторами.
2. Она не может отразить, как именно относятся категории — например, если человек A выше человека B .
3. Каждое утверждение ограничено только двумя категориями.
4. В категорической логике кванторы не могут быть вложенными.
5. В категорической логике возникают противоречия с экзистенциальной значимостью.

В связи с этим возникает концепция *логики первого порядка*:

Определение

Логика первого порядка расширяет категорическую логику путём введения переменных, предикатов, функций и кванторов.

Структура логики первого порядка

Элементарные компоненты

Логика первого порядка состоит из следующих компонентов:

1. Переменные

x, y, z, \dots — объекты из определённой категории

2. Константы

a, b, c, \dots — обозначения для конкретных объектов

3. Предикаты

P, Q, R, \dots — отражения свойств и отношений

4. Функции

f, g, h, \dots — отображения одних объектов в другие

5. Кванторы

$\forall, \exists, \exists!$ — индикаторы общности суждения

6. Логические связи

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \iff$ (аналогично пропозициональной логике)

Важно!

В отличие от предикатов, которые возвращают значения *истины* или *лжи*, функции возвращают *объект*!

Определение

Термин (*term*) — выражение, обозначающее объект и определяемое рекурсивно следующим образом:

1. любая переменная является термином;
2. любая константа является термином;
3. если f — n -арная функция, а t_1, \dots, t_n — термы, то $f(t_1, \dots, t_n)$ является термом.

Формулы

Определение

Атомарной формулой называется базовое утверждение, которое представляет собой одно из следующего:

1. предикат $P(t_1, \dots, t_n)$ от n терминов;
2. равенство двух термов.

Определение

В логике первого порядка **равенство** — предикат, означающий «тот же объект, что и».

Он обладает следующими свойствами:

1. **Рефлексивность**

$$\forall x : (x = x)$$

2. **Симметричность**

$$\forall x, y : (x = y) \rightarrow (y = x)$$

3. **Транзитивность**

$$\forall x, y, z : (x = y) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)$$

4. **Тождество неразличимых**
(принцип Лейбница)

$$\forall x, y : (x = y) \rightarrow (\varphi(x) \iff \varphi(y))$$

Определение

Формула первого порядка определяется рекурсивно:

1. Каждая атомарная формула — формула первого порядка.
2. Отрицание формулы первого порядка — формула первого порядка.
3. Если φ и ψ — формулы первого порядка, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \iff \psi)$ — также формулы первого порядка.
4. Если φ — формула первого порядка, а x — переменная, то $(\forall x : \varphi)$ и $(\exists x : \varphi)$ — также формулы первого порядка.

Кванторы

В логике первого порядка выделяются следующие кванторы:

Квантор всеобщности \forall

утверждает свойство, которое выполняется для *каждого* объекта в категории

$$\forall x : P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots$$

Квантор существования \exists

утверждает свойство, которое выполняется *хотя бы для одного* объекта в категории

$$\exists x : P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots$$

Квантор единственности $\exists!$

утверждает свойство, которое выполняется *ровно для одного* объекта в категории

$$\exists! x : P(x) \equiv \exists x : (P(x) \wedge \forall y : [P(y) \rightarrow (y = x)])$$

Определение

Если переменная встречается в выражении в области действия квантора, она называется **связанной**. В противном случае она называется **свободной**:

$$P(x) \wedge \forall x : Q(x)$$

В этом примере x в $P(x)$ свободен, а в $Q(x)$ — связан.

Определение

Формула, в которой нет свободных переменных, называется **предложением** (*закрытой формулой*). Если в формуле встречается хотя бы одна свободная переменная, она называется *открытой*.

При работе с кванторами полезно знать следующие правила:

1° Законы де Моргана

$$\begin{aligned}\neg \forall x : \varphi(x) &\equiv \exists x : \neg \varphi(x) \\ \neg \exists x : \varphi(x) &\equiv \forall x : \neg \varphi(x)\end{aligned}$$

2° Дистрибутивность

Важно: не работает в остальных случаях!

$$\begin{aligned}\forall x : (\varphi(x) \wedge \psi(x)) &\equiv (\forall x : \varphi(x)) \wedge (\forall x : \psi(x)) \\ \exists x : (\varphi(x) \vee \psi(x)) &\equiv (\exists x : \varphi(x)) \vee (\exists x : \psi(x))\end{aligned}$$

3° Перемещение

Если x связан в ψ , кванторы можно

$$\begin{aligned}(\forall x : \varphi(x)) \wedge \psi &\equiv \forall x : (\varphi(x) \wedge \psi) \\ (\exists x : \varphi(x)) \wedge \psi &\equiv \exists x : (\varphi(x) \wedge \psi)\end{aligned}$$

перемещать

$$\begin{aligned}(\forall x : \varphi(x)) \vee \psi &\equiv \forall x : (\varphi(x) \vee \psi) \\ (\exists x : \varphi(x)) \vee \psi &\equiv \exists x : (\varphi(x) \vee \psi)\end{aligned}$$

📌 Определение

Формула находится в **пренексной нормальной форме**, если все кванторы в ней находятся в начале. Формально, она имеет вид

$$Q_1x_1 : Q_2x_2 : \dots Q_nx_n : \psi,$$

где $Q_i \in \{\forall, \exists, \exists!\}$, а ψ — свободная от кванторов *матрица*.

Каждая формула в логике первого порядка имеет единственную пренексную нормальную форму.

Вокабуляр

📌 Определение

Вокабуляр Σ — все обозначения, необходимые для перевода естественного языка на язык логики первого порядка. Формально, вокабуляр состоит из:

- константных обозначений;
- предикатов;
- функций.

При переводе в логику первого порядка выделяются два основных паттерна:

$$\text{«Все } S \text{ являются } P\text{»} \qquad \forall x : S(x) \rightarrow P(x)$$

$$\text{«Некоторые } S \text{ являются } P\text{»} \qquad \exists x : S(x) \wedge P(x)$$

Структуры

📌 Определение

Структура $M = \langle D, \mathcal{J} \rangle$ состоит из:

- *домена* D — непустого множества объектов
- *интерпретации* \mathcal{J} , наделяющей символы смыслом:

- каждая константа c соотносится с некоторым объектом домена;
- каждый n -арный предикат P соотносится с некоторым отношением $\mathcal{J}(P) \subseteq D^n$
- каждая n -арная функция f соотносится с функцией $\mathcal{J}(f) : D^n \rightarrow D$

Например, структура для простой арифметики может иметь следующий вид:

- $D = \mathbb{N}$
- $\mathcal{J}(0) = 0$
- $\mathcal{J}(S)(n) = n + 1$
- $\mathcal{J}(\text{Even}) = \{0, 2, 4, \dots\}$

📌 Определение

Назначение переменных $\sigma[x \mapsto d]$ — отображение, сопоставляющее каждой переменной некоторый элемент домена.

📌 Определение

Отношение удовлетворения $M, \sigma \models \varphi$ определяется рекурсивно:

- $M, \sigma \models P(t_1, \dots, t_n)$, если $(\llbracket t_1 \rrbracket_\sigma, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_\sigma) \in \mathcal{J}(P)$
- $M, \sigma \models \forall x : \varphi$, если $M, \sigma[x \mapsto d] \models \varphi$ верно для всех $d \in D$.
- $M, \sigma \models \exists x : \varphi$, если $M, \sigma[x \mapsto d] \models \varphi$ верно хотя бы для одного $d \in D$.

Если $M \models \varphi$ выполняется:

- для любой структуры, то формула φ *валидна*;
- для какой-либо структуры, то формула φ *удовлетворима*;
- ни для одной структуры, то формула φ *неудовлетворима*.

📌 Определение

Набор предложений в логике первого порядка называется **теорией**.

Структура M является **моделью** теории T , если $M \models \varphi$ верно для любого $\varphi \in T$.

Несколько важных теорем

Обоснованность и полнота

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \Gamma \models \varphi \quad (1)$$

$$\Gamma \models \varphi \rightarrow \Gamma \vdash \varphi \quad (2)$$

Иными словами, логика первого порядка *обоснована* (1) и *полна* (2).

Теорема о компактности

Множество предложений Γ удовлетворимо тогда и только тогда, когда удовлетворимо конечное подмножество Γ .

Эта теорема гласит, что логика первого порядка не различает понятия сколь угодно больших конечных и бесконечных множеств, из-за чего некоторые утверждения и доказательства построить невозможно.

Теорема Лёвенгейма — Сколема

Если конечная теория имеет бесконечную модель, то она имеет модели любой бесконечной кардинальности.

Парадокс Сколема: аксиомы ZFC могут быть выражены при помощи логики первого порядка даже несмотря на то, что она подтверждает существование несчетных множеств!

Теорема Чёрча — Тьюринга

Логика первого порядка *неразрешима*: не существует алгоритма, который проверяет валидность произвольного выражения первого порядка.

Тем не менее, отдельные фрагменты логики первого порядка остаются разрешимыми, пусть и с некоторыми ограничениями: пропозициональная логика, выражения только с унарными предикатами или не более чем с двумя переменными и проч.

Модальная логика

#TODO