Лекция 06 — Кардинальность

Содержание

Основные понятия

> ⓘ **Info**
>
> **Кардинальность** (*мощность*) $|X|$ множества X — мера его размера.
> Если множество конечно, то кардинальность равна количеству его элементов.
> Если множество бесконечно, то кардинальность определяет "тип" его бесконечности.

> ⓘ **Info**
>
> Два множества A и B называются **равномощными** ($A \approx B$), если существует биекция $f : A \to B$.

> **Теорема 1**
>
> Равномощность — отношение эквивалентности.
>
> **Доказательство**

Рефлексивность. id_A, где $\mathrm{id}_A(x) = x$, является биекций, откуда $A \approx A$.

Симметричность. Если существует биекция $f : A \to B$, то существует и обратная к ней биекций $f^{-1} : B \to A$, то есть $A \approx B \implies B \approx A$.

Транзитивность. Если существуют биекции $f : A \to B$ и $g : B \to C$, то их композиция $g \circ f : A \to C$ также биективна, то есть $A \approx B \land B \approx C \implies A \approx C$.

Поскольку выполняются все три необходимых условия, то отношение равномощности действительно является отношением эквивалентности, что и требовалось доказать.

Бесконечные множества

Info

Множество X называется **бесконечным по Дедекинду**, если какое-либо его строгое подмножество $Y \subset X$ ему равномощно, т.е. существует *биекция* между X и Y или, эквивалентно, существует инъективная, но не сюръективная функция $f : X \to X$

Info

Множество S называется **счётным**, если оно либо конечно, либо имеет кардинальность $\aleph_0$, то есть существует биекция $f : S \to \mathbb{N}$.

Теорема 2

1. Любое подмножество счётного множества счётно.
2. Объединение любого количества счётных множеств счётно.
3. Декартово произведение двух счётных множеств счётно.

Доказательство остаётся в качестве упражнения читателю.

Info

Множество называется **несчётным**, если оно бесконечно, но не счётно (не существует биекции с $\mathbb{N}$)

Диагональный аргумент Кантора

> 🔥 **Important**
>
> **Диагональный аргумент Кантора** — это способ доказательства несчётности множества, заключающийся в следующем:
>
> 1. предположим существование биекции между S и $\mathbb{N}$
> 2. пронумеруем все элементы S
> 3. сконструируем такой элемент, который не будет затронут нумерацией
> 4. придём к противоречию, показывающему невозможность существования биекции

Сравнение кардинальностей

> ⓘ **Info**
>
> Кардинальность A **меньше или равна** кардинальности B ($A \quad B$), если существует *инъекция* $f : A \to B$.

> ⓘ **Info**
>
> Кардинальность A **меньше** кардинальности B ($A \quad B$), если существует *инъекция* $f : A \to B$, но не существует биекции.

> **Теорема Кантора**
>
> $\forall A : A \quad P(A)$
>
> **Доказательство**
> Поскольку существует инъекция $f : A \to P(A)$, $f(x) = \{x\}$, то $A \quad P(A)$. Покажем, что $A \quad P(A)$.
> Допустим, что существует биекция $g : A \to P(A)$.
> Рассмотрим множество $\ = \{x \in A \mid x \notin g(x)\}$. Заметим, что $\ \subseteq A$, то есть $\ \in P(A)$.
> Поскольку g — сюръекция, то $\exists y \in A : g(y) = \ $.
> Если $y \in \ $, то, по определению , $y \notin g(y) \iff y \notin \ $. Противоречие.
> Если $y \notin \ $, то, по определению , $y \in g(y) \iff y \in \ $. Противоречие.
> Таким образом, биекции $f : A \to P(A)$ не может существовать, а это значит, что $A \quad P(A)$, что и требовалось доказать.

> **Теорема Кантора-Бернштейна-Шрёдера**
>
> $(A \quad B) \land (B \quad A) \implies A \approx B$
>
> **Доказательство** достаточно нетривиально, чтобы быть интересным в качестве упражнения для читателя.