Конспект 00 — Вспомогательные утверждения

Содержание

Несколько важных лемм

> **Неравенство Бернулли**
>
> $$(1+\alpha)^n \leq 1+n\alpha \qquad \alpha \geq -1, n \in \mathbb{N}$$
>
> **Доказательство**
>
> Докажем по индукции.
>
> **База**. При $n=1$ имеем
>
> $$(1+\alpha)^1 = 1+\alpha = 1+1\times\alpha,$$
>
> то есть утверждение, очевидно, выполняется.
>
> **Переход**. Пусть утверждение верно для $n=k$. Покажем, что в таком случае оно верно и для $n=k+1$.
> По предположению,
>
> $$(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k \times (1+\alpha) \geq (1+k\alpha)(1+\alpha) = 1+(k+1)\alpha+k\alpha^2 > 1+(k+1)\alpha,$$
>
> что и требовалось доказать.

> **Лемма о вложенных отрезках**
>
> #TODO

Лемма о конечном покрытии

#TODO

Лемма о предельной точке

#TODO

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

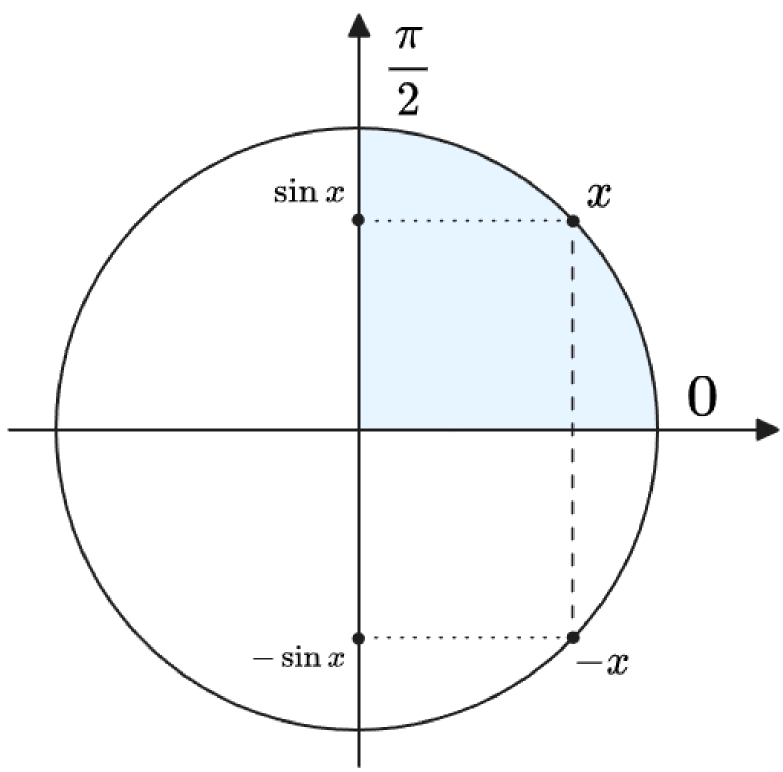
Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство

Поскольку нас интересует поведение функции в некоторой окрестности точки 0, положим $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Заметим также, что и синус, и линейная функция нечётны — это значит, что их отношение чётно — и положим $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Построим тригонометрическую окружность:



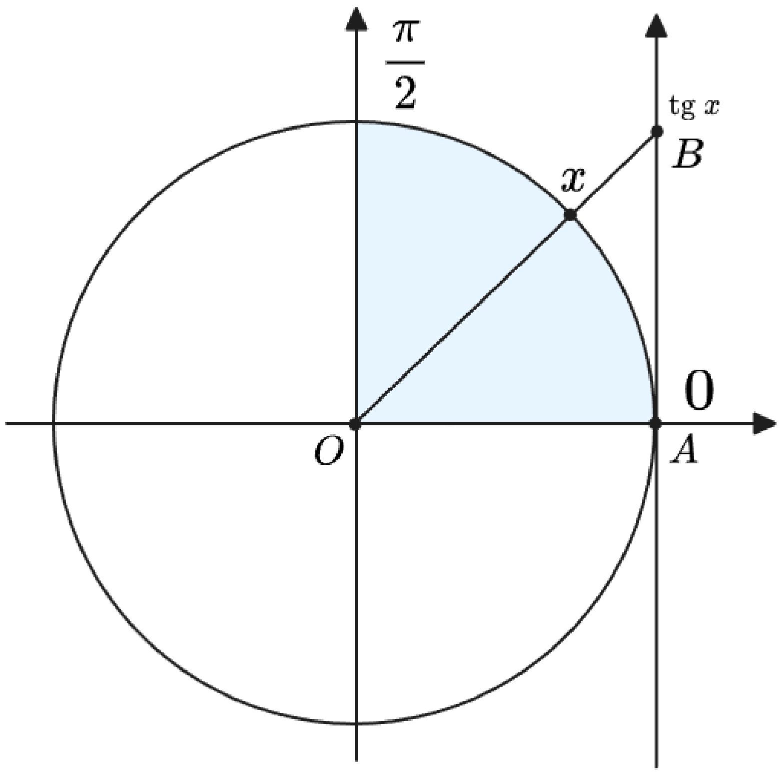
Отметим на ней точку x и соответствующую точку $\sin x$. Если теперь отметить противоположные точки $-x$ и $-\sin x$, то можно заметить следующее: расстояние между x и $-x$ — это длина некоторой дуги, а расстояние между $\sin x$ и $-\sin x$ — длина хорды, стягивающей эту дугу. Зная, что длина такой хорды не превосходит длины дуги, имеем

$$|\sin x - (-\sin x)| \leq |x - (-x)| \iff |2\sin x| \leq |2x| \iff |\sin x| \leq |x|$$

Поскольку на выбранном интервале $\sin x > 0, x > 0$, имеем $\sin x \leq x$, то есть

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Проведём ось тангенсов:



Заметим, что круговой сегмент OAx целиком содержится в треугольнике OAB.
Площадь этого сегмента составит $\frac{x}{2\pi} \times \pi = \frac{x}{2}$.
Площадь треугольника OAB составит $\frac{1 \times \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, откуда имеем

$$\frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{2} \iff x \leq \operatorname{tg} x \iff \cos x \leq \frac{\sin x}{x}$$

В итоге имеем

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

откуда, по теореме о двух милиционерах, $\frac{\sin x}{x} \to 0$ при $x \to 0$.

Следствия

Следствие 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Доказательство

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)=\frac{1}{2}$$

Следствие 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

Доказательство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)=1$$

Второй замечательный предел

Лемма 1

Последовательность $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел.

Доказательство

Разложением по формуле бинома Ньютона приводим выражение к следующему виду:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-(k-1))}{k!\times n^k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

Заметим, что с увеличением n:

1. множители в числителе каждого из слагаемых увеличиваются, причем знаменатель остаётся незименным — это значит, что слагаемые увеличиваются;
2. число слагаемых увеличивается,

то есть значение n-го члена последовательности увеличивается, а значит, что она монотонно возрастает.

Заметим также, что значение числителя каждого из слагаемых не превышает 1, то есть

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

При помощи индукции нетрудно показать, что для натуральных k всегда выполнено $k! \ge 2^{k-1}$. Тогда имеем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \le 3,$$

то есть последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Поскольку ранее мы показали, что она монотонно возрастает, то, по теореме Вейерштрасса, она имеет конечный предел, что и требовалось доказать.

Определение

Предел последовательности $a_n = \{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$ называется **неперовым числом** или **числом Эйлера** (числом e).

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство

Положим $n \le x \le n+1$. Тогда имеем

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \times 1 = e$$

Таким образом,

$$e \le \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le e,$$

откуда, по теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, что и требовалось доказать.

Следствия

Второй замечательный предел можно обобщить следующим образом:

$$\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e$$

$$\lim_{\beta(x)\to 0}(1+\beta(x))^{\frac{1}{\beta(x)}}=e$$

Используя это знание, выведем несколько полезных вспомогательных пределов.

> **Следствие 1**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$
>
> **Доказательство**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

> **Следствие 2**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$
>
> **Доказательство**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\left(\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}\right)^{-1}=1$$

> **Следствие 3**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$
>
> **Доказательство**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(y+1)}=\ln a$$

> **Следствие 4**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$
>
> **Доказательство**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln a}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x\ln a}=\frac{1}{\ln a}$$

Следствие 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Доказательство

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x,y \to 0} \frac{y\alpha \ln(x+1)}{x \ln(y+1)} =$$

$$= \lim_{x,y \to 0} \left(\frac{y}{\ln(y+1)} \times \frac{\ln(x+1)}{x} \times \alpha \right) = \alpha$$