

Лекция 03 — Числовые последовательности

Числовые последовательности

Info

Числовая последовательность (далее — ч.п.) — это функция, которая множеству натуральных чисел ставит в соответствие множество вещественных чисел и обозначается $\{x_n\} : x_n = f(n), n \in N$, где:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ — элементы числовой последовательности
- x_n — общий член числовой последовательности

Классификация последовательностей

Название	Определение
Ограниченные	$\exists M > 0 : \forall n \in N : x_n \leq M$
Неограниченные	$\forall M > 0 : \exists n \in N : x_n > M$
Возрастающие	$\forall n \in N : x_n < x_{n+1}$
Убывающие	$\forall n \in N : x_n > x_{n+1}$
Невозрастающие	$\forall n \in N : x_n \leq x_{n+1}$
Неубывающие	$\forall n \in N : x_n \geq x_{n+1}$
Строго монотонные	Возрастающие и убывающие
Монотонные	Неубывающие и невозрастающие

Info

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой** (далее — б.м.), если $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) : |x_n| < \varepsilon$.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1. сумма и разность сколько угодно б.м. ч.п. есть б.м. ч.п.;
2. произведение сколько угодно б.м. ч.п. есть б.м. ч.п.;

3. произведение постоянной величины на б.м. ч.п. есть б.м. ч.п..

Info

Числовая последовательность $x\{n\}$ называется **бесконечно большой** (далее — б.б.), если $\forall M > 0 : \exists N(M) : \forall n > N(M) : |x_n| > M$

Теорема (1) о связи б.м. и б.б. ч.п.

Если $\{x_n\}$, где $x_n \neq 0$, является б.б. ч.п., то обратная величина $\{\frac{1}{x_n}\}$ будет являться б.м. ч.п..

Теорема (2), обратная к т. (1)

Если $\{y_n\}$, где $y_n \neq 0$, является б.м. ч.п., то обратная величина $\{\frac{1}{y_n}\}$ будет являться б.б. ч.п..

Свойства бесконечно больших последовательностей:

1. сумма двух б.б. ч.п. одного знака есть б.б. ч.п. того же знака, что и слагаемые;
2. произведение двух б.б. ч.п. есть б.б. ч.п.;
3. произведений постоянной величины на б.б. ч.п. есть б.б. ч.п..

Предел числовой последовательности

Определение

Число $a \in R$ называется **пределом** числовой последовательности, если $\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$, и обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$

Определение

Последовательность, для которой существует предел $a \in R$, называется **сходящейся** в точке a .

Замечание 1: добавление или исключение из последовательности конечного числа её членов не влияет на её сходимость.

Замечание 2: если $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$, то имеет

место равенство $x_n = a + \alpha_n$, где α_n — общий член бесконечно малой ч.п. $\{\alpha_n\}$.

Замечание 3:

- если $\{x_n\}$ — б.м. ч.п., то $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = 0$, и наоборот;
- если $\{x_n\}$ — б.б. ч.п., все элементы которой имеют один знак, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \pm\infty$, и наоборот.

Теорема (3) о "сжатой" последовательности

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\} = a$ и $\exists N : \forall n \geq N : x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = a$.

Доказательство

$x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$; тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1, N_2 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon, \forall n > N_2 : |y_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда $\forall n > N : a - \varepsilon < x_n, y_n < a + \varepsilon$.

Учитывая, что $x_n \leq z_n \leq y_n$, имеем $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$, т.е. a удовлетворяет определению предела для $\{z_n\}$, что и требовалось доказать.

Теорема (4) (признак Вейерштрасса)

Ограниченная и монотонная последовательность есть последовательность сходящаяся.

#доказать

Теорема (5)

Сходящаяся числовая последовательность имеет один предел.

Доказательство

Допустим, что $x_n \rightarrow a$ и $x_n \rightarrow b$, при $n \rightarrow \infty$ причём $a \neq b$.

Тогда $x_n = a + \alpha_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n \rightarrow 0, \beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Представим разность $x_n - x_n = 0$ как $(a + \alpha_n) - (b + \beta_n) = (a - b) + (\alpha_n - \beta_n) = 0$.

Отсюда $a - b = \beta_n - \alpha_n$, а так как $a \neq b$, то $\beta_n - \alpha_n \neq 0$, то есть общий член б.м. ч.п.

$\{\beta_n - \alpha_n\}$ равен постоянной величине, отличной от нуля. Это противоречит определению б.м. ч.п..

Значит, числовая последовательность не может иметь более одного предела, что и требовалось доказать.

Теорема (6)

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится в точке a , последовательность $\{y_n\}$ сходится в точке b и при этом $x_n < y_n$, то имеет место неравенство $a \leq b$.

Доказательство

Допустим, что $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$, причём $a > b$.

Тогда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Согласно предположению теоремы, $x_n < y_n$, то есть $a + \alpha_n < b + \beta_n$. Отсюда

$a - b < \beta_n - \alpha_n$, тогда поскольку $a > b$, то $a - b > 0$, соответственно $0 < a - b < \beta_n - \alpha_n$, то есть общий член б.м. ч.п. $\{\beta_n - \alpha_n\}$ всегда больше постоянной величины, отличной от нуля. Это противоречит определению б.м. ч.п..

Значит, при $x_n < y_n$ всегда $a \leq b$, что и требовалось доказать.

Теорема также справедлива для $x_n \leq y_n$ [#доказать](#)

Замечание. При переходе к пределу в неравенстве $x_n < y_n$ мы всё ещё можем получить тождество $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Теорема (7).

Если ч.п. $\{x_n\}$ имеет своим пределом число $a > p$, то $\exists N : \forall n > N : x_n > p$

Доказательство: выберем произвольное ε , удовлетворяющее неравенству

$0 < \varepsilon < a - p$. По данному ε найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon$, то есть $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Учитывая, что $a - p > \varepsilon \implies a - \varepsilon > p$, $x_n > a - \varepsilon$ получим, что $x_n > a - \varepsilon > p \implies x_n > p$, что и требовалось доказать.

Теорема (8)

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство

Пусть $x_n \rightarrow a$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$

Известно, что $|x_n| - |a| \leq |x_n - a|$ и, следовательно, $|x_n| - |a| < \varepsilon$, или $x_n < |a| + \varepsilon$.

Пусть $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a| + \varepsilon\}$, тогда $\forall n : |x_n| \leq M$, то есть M ограничивает $\{x_n\}$, что и требовалось доказать.

Теорема (10)

Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Доказательство

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда $x_n + y_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$

Т.к. $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — б.м. ч.п., то $x_n + y_n \rightarrow a + b$ при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Теорема (11)

Предел разности равен разности пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Доказательство

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда $x_n - y_n = (a - b) + (\alpha_n - \beta_n)$.

Т.к. $\{\alpha_n - \beta_n\}$ — б.м. ч.п., то $x_n - y_n \rightarrow a - b$ при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Теорема (12)

Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Доказательство

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда $x_n y_n = ab + a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n \beta_n$.

Т.к. $\{a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n \beta_n\}$ — б.м. ч.п., то $x_n y_n \rightarrow ab$ при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Следствие 1: постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Cx_n) = C \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Следствие 2: предел целой полож. степени равен степени ее предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^k$$

Теорема (13)

Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

#доказать

Теорема (14)

Числовая последовательность $\{x_n\} = \{(1 - \frac{1}{n})^n\}$ имеет предел.

Предел такой последовательности называется *неперовым числом* или **числом e** .

#доказать