

Конспект 01 — Интегральное исчисление

Содержание

1. Понятие неопределённого интеграла
 1. Первообразная
 2. Свойства неопределённого интеграла
 3. Таблица интегралов
 4. Методы интегрирования
 1. Непосредственное интегрирование
 2. Замена переменной и подстановка
 3. Интегрирование по частям

”Дифференцировать можно и обезьяну научить, а вот интегрировать - это искусство!”

— Конфукций, 239 г. до н.э.

Понятие неопределённого интеграла

Первообразная

ⓘ Определение

Пусть задана функция $f(x)$, определенная и непрерывная на интервале (a, b) .

Функция $F(x)$, дифференцируемая на интервале (a, b) , называется **первообразной** функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x)$$

или, что то же самое,

$$\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

Теорема 1

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции $f(x)$ на интервале (a, b) , то их разность есть постоянная величина.

Доказательство

Введём функцию $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$.

По определению первообразной, имеем

$$\varphi'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Мы знаем, что $\varphi(x)$ как разность дифференцируемых функций есть дифференцируемая функция — тогда, согласно критерию постоянства функции, на любом отрезке, принадлежащем исходному интервалу, выполняется $\varphi(x) = C$, что и требовалось доказать.

ⓘ Определение

Множество всех первообразных функции называется **неопределённым интегралом** и обозначается символом

$$\int f(x)dx,$$

где:

- \int — знак неопределенного интеграла;
- $f(x)$ — подынтегральная функция;
- dx — подынтегральное выражение.

Процесс нахождения неопределенного интеграла называется *интегрированием*.

С геометрической точки зрения график первообразной называется *интегральной кривой*.

#TODO рисунок?

Свойства неопределенного интеграла

°1 Связь интегрирования и дифференцирования

Если $F(x)$ — какая-то первообразная к функции $f(x)$, то по определению имеем

$$d \int f(x)dx = dF(x) = f(x)dx$$

Кроме того, в соответствии с понятием неопределенного интеграла как любой из первообразных, имеем также

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

Эти соотношения устанавливают связь операций дифференцирования и

интегрирования — они взаимно обратны с точностью до константы, возникающей в результате интегрирования.

°2 Линейность неопределённого интеграла

Для любых дифференцируемых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ верно, что

$$\int (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)) dx = a_1 \int f_1(x) dx + a_2 \int f_2(x) dx$$

Доказательство

Докажем в отдельности, что

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (1)$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \quad (2)$$

Из свойства °1 и свойств дифференцирования имеем

$$\int a f(x) dx = \int d(aF(x)) = aF(x) + C = a \int f(x) dx, \quad (1)$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int d(F_1(x) + F_2(x)) = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2 = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

°3 Инвариантность формул интегрирования

Формула первообразной сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции. Формально,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \implies \int f(u) du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Доказательство

Достаточно показать, что формула в дифференциале сохраняет вид при замене переменной. Имеем

$$\int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = |\varphi'(x)| = |u| = \int f(u) du = F(u) + C,$$

что и требовалось доказать.

Следствие.

$$\int f(ax + b)dx = \int \frac{f(ax + b)a dx}{a} = \frac{1}{a} \int f(ax + b)adx = \frac{F(ax + b) + C}{a}$$

Таблица интегралов

Аналогично тому, как ранее была рассмотрена таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций, имеет смысл рассмотреть ряд наиболее часто встречающихся элементарных интегралов:

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \alpha^x \, dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \int \frac{d(a^2 \pm x^2)}{2\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{a+a+x-x}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование подразумевает алгебраические преобразования подынтегральной функции и подынтегрального выражения с целью сведения к одному или нескольким табличным значениям с использованием свойств неопределённого интеграла:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 + x^4} &= \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \\
&= \int \frac{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}{x^2} = \\
&= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) = \\
&= \int \frac{1}{x^2} - \int \frac{1}{1+x^2} = \\
&= -\frac{1}{x} - \arctg x + C
\end{aligned}$$

Замена переменной и подстановка

Из соображений инвариантности интегральных формул мы в определенных случаях можем поступать при нахождении неопределенного интеграла следующим образом: прозвести под знаком интеграла замену, перейдя к новой переменной, а затем, найдя первообразную от неё, перейти к старой переменной путём подстановки её исходного значения:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x dx}{1+x^2} &= \left| t = x^2 + 1 \right| = \\
&= \int \frac{dt}{2t} = \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \\
&= \frac{\ln |t|}{2} + c = \\
&= |t = x^2 + 1| = \\
&= \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + c
\end{aligned}$$

Интегрирование по частям

Теорема (интегрирование по частям)**

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на интервале (a, b) , и функции $u'(x)v(x)$ и $u(x)v'(x)$ имеют первообразные. Тогда

$$v \int u dv = uv - \int v du$$

Доказательство

В силу свойств дифференцирования, имеем

$$uv = \int d(uv) = \int vdu + \int udv \implies \int udv = uv - \int vdu,$$

что и требовалось доказать.

Это означает, что отыскание первообразной функции $u(x)v'(x)$ можно свести к отысканию первообразной функции $u'(x)v(x)$, «перебросив» дифференцирование на другой сомножитель и частично проинтегрировав функцию, выделив при этом член $u(x)v(x)$. В рамках интегрирования по частям можно рассматривать следующий общий вид интеграла:

$$\int P_n(x)f(x) dx,$$

где P_n — ненулевой многочлен от переменной x .

При этом в рамках интегрирования по частям можно выделить следующие категории:

Элементарные функции

Если $f(x)$ — одна из элементарных функций, мы принимаем $u = P_n(x)$ и $dv = f(x) dx$:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{array} \right| = \\ &= x^2 e^x - \int e^x dx^2 = \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \end{array} \right| \\ &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = \\ &= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C = \\ &= e^x (x^2 - 2x + 2) + C \end{aligned}$$

Обратные элементарные функции

Если $f(x)$ — функция, обратная к элементарной, мы принимаем $u = f(x)$ и $dv = P_n(x)dx$:

$$\begin{aligned}
\int \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array} \right| = \\
&= x \ln x - \int x \, d \ln x = \\
&= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = \\
&= x \ln x - x + C
\end{aligned}$$

Возвратный интеграл

Неопределенный интеграл, в процессе вычисления которого мы приходим к нему же, получая интегральное уравнение, называется *возвратным*:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \\
&= a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\
&= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad v = \sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right| = \\
&= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \implies \\
\implies \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}
\end{aligned}$$
