Евклидовы пространства

Некоторые хорошие типы пространств

Метрическое пространство — множество M, на котором задана функция-метрика

$$\rho : M^2 \to \mathbb{R}$$

обладающая следующими свойствами:

- Симметричность: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- Положительноопределенность: $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
- Неравенство треугольника: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Примеры:

- $x, y \in \mathbb{R}$, тогда $\rho(x, y) = |x - y|$
- $x, y \in \mathbb{R}^n$, тогда $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

формула чуть-чуть отъехала, фикса скорее всего не будет

Нормированное пространство — линейное пространство V, в котором задано отображение — норма

$$\|x\| : V \to \mathbb{R}$$

обладающая следующими свойствами:

- Мультипликативность: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Положительноопределенность: $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- Неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Пример:

$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$

Скалярное произведение. Евклидово пространство

Скалярное произведение — функция $(x, y) : V^2 \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

- Билинейность:
  - $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$ — аддитивность
  - $(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda \cdot (x, y)$ — мультипликативность
- Симметричность: $(x, y) = (y, x)$
- Положительноопределенность: $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \iff x = 0$

Евклидово пространство — линейное пространство E, на котором определено скалярное произведение

Размерность Евклидова пространства равна размерности пространства, которое его "порождает" $\dim E = \dim V$

Неравенство Коши-Буняковского

$$(\forall x, y \in E)\Big(|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}\Big)$$

причем равенство достигается $\iff x = \lambda y$

P.S. *В Евклидовом пространстве можно записать как*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Доказательство

Рассмотрим 2 случая:

1. $y = 0$:
   $\left(x, \overline{0}\right) = \left(x, 0 \cdot \overline{0}\right) = 0 \cdot \left(x, \overline{0}\right) = 0$
2. $y \neq 0$:
   Пусть $f(t) = (x + ty, x + ty), t \in \mathbb{R}$, тогда

$$f(t) = (x, x) + t \cdot (x, y) + t \cdot (y, x) + (y, y) \cdot t^2$$
$$f(t) = (y, y) \cdot t^2 + 2(x, y) \cdot t + (x, x)$$

По определению $f(t) = (a, a) \Longrightarrow f(t) \geq 0 \Longrightarrow D \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{D}{4} \geq 0$

Посчитаем дискриминант этого выражения

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0$$
$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$$
$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

QED

В Евклидовом пространстве нормой является квадратный корень из скалярного произведения вектора на него же:

$$(\forall x \in E)\left(\|x\| = \sqrt{(x, x)}\right)$$

Докажем свойства функции-нормы

Доказательство

- $\|x\| \geq 0$ по определению корня
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Возведем левую часть во 2 степень:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2 \cdot (x, y)}_{\leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\|} + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

QED

Типы норм:
1. $\|x\|_2$ — стандартная (евклидова, шаровая, сферическая)
2. $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ — манхэттенская (октоэдрическая)
3. $\|x\|_\infty = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ — кубическая (норма-бесконечность)
4. В $C_{[a,b]}$ тоже есть, как-то через интегралы
5. Норма матрицы — такая же характеристика для матрицы. Для матрицы норму определить следующим образом:
   - Столбцовая

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

   - Строчная

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

- Спектральная (кв. матрица)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)}$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение матрицы $(A^T \cdot A)$

> ***Что такое собственное число***
>
> Как известно, матрицы являются формой записи линейных операторов. Собственным числом матрицы называется произвольное число λ, при котором уравнение
>
> $$Ax = \lambda x$$
>
> имеет ненулевое решение x. То есть, применяя оператор к вектору x мы получим вектор $x' = \lambda x$, который будет коллинеарен исходному

- Норма Фробениуса — квадратный корень из суммы квадратов всех элементов матрицы

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij}\right)^2}$$

Немного об углах между векторами

Вернемся к неавенству Коши-Буняковского:

$$\|(x, y)\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

поделим на левую часть (случай где хоть 1 из векторов нулевой рассматривать не будем):

$$\frac{\|(x, y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Скажем, что

$$\cos\varphi = \frac{\|(x, y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

где φ — угол между векторами x и y, то есть углом между векторами x и y будем называть величину

$$\varphi = \arccos\frac{\|(x, y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Ортонормированная система векторов. Матрица Грама

Ортогональные векторы — векторы, угол между которыми равен 90° (или скалярное произведение которых равно 0)

Ортонормированная система векторов — множество попарно ортогональных векторов $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$, норма каждого из которых равна 1:

$$\begin{cases} (\forall v_i, v_j \in V)\big((v_i, v_j) = 0\big) \\ (\forall v \in V)(\|v\| = 1) \end{cases}$$

Теорема

Ортогональная система векторов (не содержащая $\overline{0}$) является ЛНЗ

Доказательство

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональная система векторов. Подберем λ_i, такие что

$$y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \overline{0}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} (y, a_i) &= (\lambda_1 a_1, a_i) + (\lambda_2 a_2, a_i) + \ldots + (\lambda_k a_k, a_i) = \\ &= \lambda_1 (a_1, a_i) + \lambda_2 (a_2, a_i) + \ldots + \lambda_k (a_k, a_i) = \\ &= \lambda_i (a_i, a_i) \end{aligned}$$

А поскольку $y = \overline{0}$, получим $(y, a_i) = 0$, откуда

$$\lambda_i (a_i, a_i) = 0$$

а так как $a_i \neq \overline{0}$ (по условию), $(a_i, a_i) \neq 0$ (по определению скалярного произведения), а значит $\lambda_i = 0$. Это верно $\forall i \in [1, k]$, а значит система ЛНЗ.

QED

Теорема Пифагора

В любой ортогональной системе векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *выполняется равенство*

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|a_i\|^2$$

Доказательство

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональная система векторов, тогда

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} a_i\right) = \\
&= (a_1 + a_2 + \ldots + a_k, a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} (a_1, a_i) + \sum_{i=1}^{k} (a_2, a_i) + \ldots + \sum_{i=1}^{k} (a_k, a_i) = \\
&= (a_1, a_1) + (a_2, a_2) + \ldots + (a_k, a_k) = \\
&= \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \ldots + \|a_k\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|a_i\|^2
\end{aligned}$$

QED

Рассмотрим произвольную ЛНЗ систему векторов $S = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в Евклидовом пространстве E^n, она ЛНЗ и их n штук, а значит, является базисом, рассмотрим

$$\begin{aligned}
x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \\
y &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n
\end{aligned}$$

Рассмотрим скалярное произведение (x, y):

$$(x, y) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots x_n e_n, y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n) = \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j)$$

Пусть теперь $(e_i, e_j) = G_{ij}$ (очевидно, G_{ij} — скаляр), тогда

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j G_{ij}$$

Матрица Грама — для системы векторов $S = (e_1, e_2, ..., e_n)$ матрицей Грама называется квадратная матрица G_S размера $n \times n$, где $G_{ij} = (e_i, e_j)$:

$$G_S = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_2, e_n) \\ \dots & & & \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Свойства матрицы Грама:

- $G_S = G_S^T$ (симметричность)
- Положительноопределенность всех главных угловых миноров:

$$(e_1, e_1) \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\dots$$

- Если S — ЛНЗ, то $\det G_S \neq 0$
- Если S — ортогональна, то G_S — диагональная
- Если S — ортонормирована, то G_S — единичная

Теорема

Пусть $S = (e_1, e_2, ..., e_n)$ — базиз E^n и $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, Y$ — координаты векторов x, y в базисе S, тогда

$$(x, y) = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot G_S \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \cdot G_S \cdot Y$$

Доказательство

Для доказательства просто покажем, что такое произведение дает сумму из предыдущего рассуждения:

$$X^T \cdot G_S = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot (e_i, e_1)), ..., \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot (e_i, e_n)) \right)$$

теперь домножим на Y:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot (e_i, e_1)) \cdot y_1 + ... + \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot (e_i, e_n)) \cdot y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j)$$

QED

Ортогонализация

Теорема

Любую ЛНЗ систему можно ортогонализировать

Доказательство

Следующий процесс называется **ортогонализацией Грама-Шмидта**. Его суть заключается в итератианом разложении каждого a_k на 2 составляющие: e_k — новый вектор, ортогональный всем предыдущим, g_k — составляющая a_k, лежащая в линейной оболочке, порождаемой предыдущими векторами, поэтому положим

$$g_k := \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i a_i)$$

то есть

$$a_k = e_k + g_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i a_i)$$

откуда

$$e_k = a_k - g_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i a_i)$$

далее λ заменим на α с другими индексами и для удобства поменяем знак.

Доказательство корректности такого выражения a_k оставим на потом.

Пусть $S = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ЛНЗ, тогда построим ортогональную систему $S_\perp = (e_1, e_2, ..., e_n)$:

1. $e_1 = a_1$
2. Подбираем α_2, такое что $e_2 = a_2 + \alpha_2 e_1$ и $(e_1, e_2) = 0$, распишем:

$$(e_1, e_2) = (e_1, a_2 + \alpha_2 e_1) = (e_1, a_2) + (e_1, \alpha_2 e_1) =$$
$$(e_1, a_2) + \alpha_2 (e_1, e_1) = 0$$

откуда

$$\alpha_2 = -\frac{(e_1, a_2)}{(e_1, e_1)} = -\frac{(e_1, a_2)}{\|e_1\|^2}$$

3. Подбираем α_{32} и α_{31}, чтобы $e_3 = a_3 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{31}e_1$ и $(e_1, e_3) = 0$ и $(e_2, e_3) = 0$, снова выразим α_{31}:

$$\begin{aligned}
&(e_1, e_3) = (e_1, a_3 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2) = \\
&= (e_1, a_3) + \alpha_{31}(e_1, e_1) + \alpha_{32}(e_1, e_2) = \\
&= (e_1, a_3) + \alpha_{31} \cdot \|e_1\|^2 + 0 = 0 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \alpha_{31} = -\frac{(e_1, a_3)}{\|e_1\|^2}
\end{aligned}$$

И аналогично α_{32}:

$$\alpha_{32} = -\frac{(e_2, a_3)}{\|e_2\|^2}$$

Обобщим построение вектора e_k:

$$\begin{aligned}
&e_k = a_k + \alpha_{k1}e_1 + \alpha_{k2}e_2 + \dots + \alpha_{k[k-1]}e_{k-1} = \\
&= a_k + \sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_{ki}e_i)
\end{aligned}$$

выразим α_{ki} из утверждения $(e_i, e_k) = 0$:

$$\begin{aligned}
&(e_i, e_k) = \left(e_i, a_k + \alpha_{k1}e_1 + \alpha_{k2}e_2 + \dots + \alpha_{k[k-1]}e_{k-1}\right) = \\
&= (e_i, a_k) + \alpha_{k1}(e_i, e_1) + \alpha_{k2}(e_i, e_2) + \dots + \alpha_{k[k-1]}(e_i, e_{k-1})
\end{aligned}$$

вспомним, что $i \neq j \Longrightarrow \left(e_i, e_j\right) = 0$ (здесь $i, j < k$, то есть векторы ортогональны), тогда останется

$$(e_i, e_k) = (e_i, a_k) + \alpha_{ki}(e_i, e_i) = (e_i, a_k) + \alpha_{ki} \cdot \|e_i\|^2 = 0$$

откуда получим

$$\alpha_{ki} = -\frac{(e_i, a_k)}{\|e_i\|^2}$$

подставляя коэффициенты в формулу получаем

$$
e_k = a_k - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{(e_i, a_k)}{\|e_i\|^2} \cdot e_i \right)
$$

Таким образом, получается система ЛНЗ векторов $S_\perp = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, в которой все векторы попарно ортогональны, что соответствует определению ортогональности системы $S_\perp$.

QED

Для получения из ортогональной системы $S_\perp$ ортонормированной системы $\mathcal{S}$ каждый вектор нужно нормировать:

$$
q_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}
$$

то есть

$$
\mathcal{S} = \left\{ \frac{e_i}{\|e_i\|} : e_i \in S_\perp \right\}
$$

Теорема

Нам почему-то (товарищи ревьюеры, ваш выход) интересно знать, что

$$
\|e_k\| \leq \|a_k\|
$$

Доказательство

$$
\|e_k\|^2 = (e_k, e_k) = \left(e_k, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{(e_i, a_k)}{\|e_i\|^2} \cdot e_i \right) \right) =
$$
$$
= (e_k, a_k) + \beta_1 (e_k, e_1) + \beta_2 (e_k, e_2) + ... + \beta_{k-1} (e_k, e_{k-1}) =
$$
$$
= (e_k, a_k) \leq \|e_k\| \cdot \|a_k\| \implies \|e_k\| \leq \|a_k\|
$$

QED

QR-разложение матриц

Основано на ортогонализации Грама-Шмидта. Пусть дана матрица A_n, считая каждый столбец матрицы A_n вектором a_i, ортогонализируем систему векторов $S = \{a_i : i \in [1, n]\}$, после чего сразу нормируем векторы, получая (через переходы $a_i \to e_i \to q_i$) ортонормированную систему $\mathcal{S} = \{q_i : i \in [1, n]\}$, построив из q_i как из столбцов матрицу, получим Q_n

Положим $A = QR$ (A дана, Q — найдена). Из равенства легко видеть, что

$$R = Q^{-1} A$$

Как по мне, совсем не очевидный факт

Утверждается, что

$$Q^T \cdot Q = I$$

Доказательство

Обозначим элементы:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & & & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

тогда

$$Q^T = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ \cdots & & & \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

А также обозначим векторы как столбцы Q:

$$v_i = (q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{ni})^T$$

Таким образом получаем

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \cdots & (v_1, v_n) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \cdots & (v_1, v_n) \\ \cdots & & & \\ (v_n, v_1) & (v_n, v_2) & \cdots & (v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

однако мы знаем, что $i \neq j \Longrightarrow (v_i, v_j) = 0$ (система Q ортонормирована), а значит

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|v_2\|^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$$

а поскольку система нормирована, $\|v_i\| = 1 \Longrightarrow \|v_i\|^2 = 1$, то есть

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

К слову, из того, что матрицы квадратные, следует, что

$$Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I \Longrightarrow Q^T = Q^{-1}$$

QED

Пользуясь предыдущим фактом, получаем

$$R = Q^{-1} \cdot A = Q^T \cdot A$$