

# Теория графов

## Основы

**Граф** — пара  $\langle V, E \rangle$ , где

- $V$  — конечное множество вершин
- $E$  — множество ребер

Дополнительные обозначения:

- $V(G)$  — множество вершин
- $E(G)$  — множество ребер
- $|V(G)|$  — порядок графа
- $|E(G)|$  — размер графа

Ребра графа — произвольные объекты, представляющие привычные нам ребра в удобном в конкретной задаче виде (например, в неориентированных графах ни к чему хранить их в виде *упорядоченных пар* можно хранить их в виде 2- и 1-множеств). Взаимодействие с ними строится на функциях, например, для описания взвешенного ориентированного графа можно воспользоваться 3 функциями:

$\text{begin} : E \rightarrow V$

$\text{end} : E \rightarrow V$

$\text{weight} : E \rightarrow \mathbb{R}$

### Полезная нотация

Множество всех подмножеств  $X$ , имеющих мощность  $n$ , можно записать как

$$\binom{X}{n} = \{S \mid S \subseteq X \text{ и } |S| = n\}$$

### Заметка об определении графов

Есть несколько способов определить граф

- Наиболее абстрактный способ определить граф, это через функции (написаны выше), тогда  $E$  - множество анонимных названий ребер
- Можно прямо в множество ребер пихать не анонимные элементы, а пары элементов (для направленных графов), начало и конец.

Тогда  $E \subseteq V^2$  Мы просто говорим о том, что граф это отношение.

Для взвешенного графа  $E \subseteq V^2 \times \mathbb{R}$

- Для ненаправленных Графов можно сделать то же самое только с неупорядоченными парами.

Обозначается  $E \subseteq \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$

Несложно видеть, что  $C_{|V|}^2 = \left| \binom{V}{2} \right|$

## Классификация графов

Введем полезные определения

**Петля** — ребро, начинающееся и заканчивающееся в одной и той же вершине:

$$l \in E : \text{begin}(l) = \text{end}(l)$$

**Мультиребро** — ребро, для которого в множестве ребер существует его точная копия, неравная ему:

$$m \in E : (\exists m' \in E \setminus \{m\})(\forall f \in F)(f(m') = f(m))$$

Иногда пару мультиребер называют *кратными ребрами*

Теперь легко классифицировать графы, основываясь на наличии в них петель и мультиребер:

**Простой граф** — граф, среди ребер которого нет **ни петель, ни мультиребер**

### Определение внутри курса

Когда Чухарев (и мы следовательно) говорим слово граф, мы имеем в виду простой граф, если не сказано обратного

**Мультиграф** — граф, среди ребер которого **нет петель** (мультиребра допускаются)

**Псевдограф** — граф, в котором **допускаются** и мультиребра и петли

Ну и еще один чуть более интересный вид графов и ребер

*Гиперребро* — ребро, связывающее больше 2 вершин

*Гиперграф* — граф, содержащий гиперребра

## Про вершины

Здесь определения будут поясняться на примере неориентированных и невзвешенных графов, однако обобщить их на другие виды никакой сложности не представляет

**Смежные (adjacent) вершины** — вершины, между которыми есть ребро —  $u$  и  $v$ , если  $\{u, v\} \in E$

**Инцидентное ребро** — ребро инцидентно вершине, если оно в нее “приходит” —  $e \in E$  инцидентно  $u \in V$ , если  $v \in e$  (так же определяют как обратное, ребро которое выходит из вершины)

**Соседние вершины  $v$**  — множество смежных с  $v$  вершин:

$$\{u \mid \{u, v\} \in E\}$$

**Степень вершины** — количество ее соседей:

$$\deg(u) = |\{v \mid \{u, v\} \in E\}|$$

Граф, к слову тоже имеет степени (даже 2):

- $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg v$  — минимальная степень вершины в графе
- $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg v$  — максимальная степень вершины в графе

**Степенная последовательность** — последовательность степеней вершин графа в порядке невозрастания

### Лемма о рукопожатиях

В любом (неориентированном) графе сумма степеней вершин в 2 раза больше количества ребер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

### Доказательство

Каждое ребро добавляет к итоговой сумме по 2 (каждым из 2 концов), а значит, пройдясь по всем ребрам получим сумму всех степеней равную  $2 \cdot |E|$

***QED***

## Возвращаясь к графам

***r-regular граф*** — граф, в котором каждая вершина имеет степень  $r$

### Специальные графы

- Нулевой — без вершин
- Тривиальный — одна вершина, нет ребер
- Пустой ( $\overline{K}_n$ ) —  $n$  вершин, нет ребер
- Полный ( $K_n$ ) —  $n$  вершин, все соединены между собой
- Цикл ( $C_n$ ) —  $n$  вершин в цикле
- Путь ( $P_n$ ) —  $n$  вершин в линию

### Теорема

**Полный ( $K_n$ ) граф имеет ровно  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  ребер**

### Доказательство

Лемма о рукопожатиях:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$
$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{2}$$

поскольку в графе  $n$  вершин, каждая из которых связана со всеми остальными справедливо, что

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

**QED**

## Способы представления графов

**Матрица смежности** — для графа с  $n$  вершинами матрицей смежности будет матрица размера  $n \times n$ , элементы которой задаются по следующему правилу

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Пара легкопроверяемых фактов:

- Матрицы смежности неориентированных графов симметричны относительно главной диагонали
- В простом графе главная диагональ заполнена нулями

**Список смежности** — каждой вершине ставится в соответствие множество ее соседей



## Подграфы

**Подграф** —  $H = \langle V', E' \rangle$  называется подграфом  $G = \langle V, E \rangle$ , если множества его вершин и ребер являются подмножествами соответствующих множеств  $G$ :

$$H \subseteq G \iff V' \subseteq V \text{ и } E' \subseteq E$$

Особые виды подграфов:

1. **Spanning** (открыт для предложений перевода) — подграф, содержащий все вершины исходного ( $V' = V$ )
2. **Induced** (вероятно, порожденный) — подграф  $G[S]$ , где  $S \subseteq V$ , в котором есть все ребра, содержащие вершины исходного:

$$E' = \{\{u, v\} \mid u, v \in S \text{ и } \{u, v\} \in E\}$$

# Изоморфизм графов

*Изоморфные графы* —  $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$  и  $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ , для которых существует биекция  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , сохраняющая связность:

$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$

По сути это 2 одинаковых графа, в которых по-разному названы вершины, их структура идентична

## *Смысл изоморфизма графов*

Глазами определить изоморфны ли нарисованные на бумажке графы очень легко (буквально одинаковые графы)

Вся сложность задачи в алгоритмизации этого процесса, чтобы это могла делать машина.