

# Евклидовы пространства

## Некоторые хорошие типы пространств

**Метрическое пространство** — множество  $M$ , на котором задана функция-метрика

$$\rho : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

обладающая следующими свойствами:

- Симметричность:  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- Положительноопределенность:  $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
- Неравенство треугольника:  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

**Примеры:**

- $x, y \in \mathbb{R}$ , тогда  $\rho(x, y) = |x - y|$
- $x, y \in \mathbb{R}^n$ , тогда ...

**Нормированное пространство** — линейное пространство  $V$ , в котором задано отображение — норма

$$\|x\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

обладающая следующими свойствами:

- Мультипликативность:  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Положительноопределенность:  $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$
- Неравенство треугольника:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Пример:**

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p}, \text{ где}$$

## Скалярное произведение. Евклидово пространство

**Скалярное произведение** – функция  $(x, y) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающая следующими свойствами:

- Билинейность:
  - ▶  $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$  – аддитивность
  - ▶  $(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda \cdot (x, y)$  – мультипликативность
- Симметричность:  $(x, y) = (y, x)$
- Положительноопределенность:  
 $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0 \iff x = 0$

**Евклидово пространство** – линейное пространство  $E$ , на котором определено скалярное произведение

Размерность Евклидова пространства равна размерности пространства, которое его “порождает”  $\dim E = \dim V$

### Неравенство Коши-Буняковского

$$(\forall x, y \in E) \left( |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} \right)$$

причем равенство достигается  $\iff x = \lambda y$

*P.S.* В Евклидовом пространстве можно записать как

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

### Доказательство

Рассмотрим 2 случая:

1.  $y = 0$ :  
$$(x, \bar{0}) = (x, 0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot (x, \bar{0}) = 0$$
2.  $y \neq 0$ :

Пусть  $f(t) = (x + ty, x + ty)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , тогда

$$\begin{aligned} f(t) &= (x, x) + t \cdot (x, y) + t \cdot (y, x) + (y, y) \cdot t^2 \\ f(t) &= (y, y) \cdot t^2 + 2(x, y) \cdot t + (x, x) \end{aligned}$$

По определению  $f(t) = (a, a) \Rightarrow f(t) \geq 0 \Rightarrow D \geq 0 \Leftrightarrow \frac{D}{4} \geq 0$

Посчитаем дискриминант этого выражения

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$$

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

**QED**

В Евклидовом пространстве нормой является квадратный корень из скалярного произведения вектора на него же:

$$(\forall x \in E) (\|x\| = \sqrt{(x, x)})$$

Докажем свойства функции-нормы

### Доказательство

- $\|x\| \geq 0$  по определению корня
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . Возведем левую часть во 2 степень:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2 \cdot (x, y)}_{\leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\|} + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

**QED**

Типы норм:

1.  $\|x\|_2$  — стандартная (евклидова, шаровая, сферическая)
2.  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i$  — манхэттенская (октоэдрическая)
3.  $\|x\|_\infty = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  — кубическая (норма-бесконечность)
4. В  $C_{[a, b]}$  тоже есть, как-то через интегралы
5. Норма матрицы — такая же характеристика для матрицы. Для матрицы норму определить следующим образом:
  - Столбцовая

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

- Строчная

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

- Спектральная (кв. матрица)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)}$$

где  $\lambda_{\max}$  — максимальное собственное значение матрицы  $(A^T \cdot A)$

### **Что такое собственное число**

Как известно, матрицы являются формой записи линейных операторов. Собственным числом матрицы называется произвольное число  $\lambda$ , при котором уравнение

$$Ax = \lambda x$$

имеет ненулевое решение  $x$ . То есть, применяя оператор к вектору  $x$  мы получим вектор  $x' = \lambda x$ , который будет коллинеарен исходному

- Норма Фробениуса — квадратный корень из суммы квадратов всех элементов матрицы

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_{ij})^2}$$

## *Немного об углах между векторами*

Вернемся к неавенству Коши-Буняковского:

$$\|(x, y)\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

поделим на левую часть (случай где хоть 1 из векторов нулевой рассматривать не будем):

$$\frac{\|(x, y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Скажем, что

$$\cos \varphi = \frac{\|(x, y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $x$  и  $y$ , то есть углом между векторами  $x$  и  $y$  будем называть величину

$$\varphi = \arccos \frac{\|(x, y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

## Ортонормированная система векторов. Матрица Грама

**Ортогональные векторы** — векторы, угол между которыми равен  $90^\circ$  (или скалярное произведение которых равно 0)

**Ортонормированная система векторов** — множество попарно ортогональных векторов  $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ , норма каждого из которых равна 1:

$$\begin{cases} (\forall v_i, v_j \in V) ((v_i, v_j) = 0) \\ (\forall v \in V) (\|v\| = 1) \end{cases}$$

### Теорема

Ортогональная система векторов (не содержащая  $\bar{0}$ ) является ЛНЗ

### Доказательство

Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — ортогональная система векторов. Подберем  $\lambda_i$ , такие что

$$y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} (y, a_i) &= (\lambda_1 a_1, a_i) + (\lambda_2 a_2, a_i) + \dots + (\lambda_k a_k, a_i) = \\ &= \lambda_1 (a_1, a_i) + \lambda_2 (a_2, a_i) + \dots + \lambda_k (a_k, a_i) = \\ &= \lambda_i (a_i, a_i) \end{aligned}$$

А поскольку  $y = \bar{0}$ , получим  $(y, a_i) = 0$ , откуда

$$\lambda_i (a_i, a_i) = 0$$

а так как  $a_i \neq \bar{0}$  (по условию),  $(a_i, a_i) \neq 0$  (по определению скалярного произведения), а значит  $\lambda_i = 0$ . Это верно  $\forall i \in [1, k]$ , а значит система ЛНЗ.

**QED**

## Теорема Пифагора

В любой ортогональной системе векторов  $a_1, a_2, \dots, a_k$  выполняется равенство

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \|a_i\|^2$$

## Доказательство

Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — ортогональная система векторов, тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k a_i \right\|^2 &= \left( \sum_{i=1}^k a_i, \sum_{i=1}^k a_i \right) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_k, a_1 + a_2 + \dots + a_k) = \\ &= \sum_{i=1}^k (a_1, a_i) + \sum_{i=1}^k (a_2, a_i) + \dots + \sum_{i=1}^k (a_k, a_i) = \\ &= (a_1, a_1) + (a_2, a_2) + \dots + (a_k, a_k) = \\ &= \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \dots + \|a_k\|^2 = \sum_{i=1}^k \|a_i\|^2 \end{aligned}$$

**QED**

Рассмотрим произвольную ЛНЗ систему векторов  $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  в Евклидовом пространстве  $E^n$ , она ЛНЗ и их  $n$  штук, а значит, является базисом, рассмотрим

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \\ y &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n \end{aligned}$$

Рассмотрим скалярное произведение  $(x, y)$ :

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) \end{aligned}$$

Пусть теперь  $(e_i, e_j) = G_{ij}$  (очевидно,  $G_{ij}$  — скаляр), тогда

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j G_{ij}$$

**Матрица Грама** – для системы векторов  $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  матрицей Грама называется квадратная матрица  $G_S$  размера  $n \times n$ , где  $G_{ij} = (e_i, e_j)$ :

$$G_S = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_2, e_n) \\ \cdots & & & \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Свойства матрицы Грама:

- $G_S = G_S^T$  (симметричность)
- Положительноопределенность всех главных угловых миноров:

$$(e_1, e_1) \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

...

- Если  $S$  – ЛНЗ, то  $\det G_S \neq 0$
- Если  $S$  – ортогональна, то  $G_S$  – диагональная
- Если  $S$  – ортонормирована, то  $G_S$  – единичная

### Теорема

Пусть  $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  – базис  $E^n$  и  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $Y$  – координаты векторов  $x, y$  в базисе  $S$ , тогда

$$(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot G_S \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \cdot G_S \cdot Y$$

### Доказательство

Для доказательства просто покажем, что такое произведение дает сумму из предыдущего рассуждения:

$$X^T \cdot G_S = \left( \sum_{i=1}^n (x_i \cdot (e_i, e_1)), \dots, \sum_{i=1}^n (x_i \cdot (e_i, e_n)) \right)$$

теперь домножим на  $Y$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (x_i \cdot (e_i, e_1)) \cdot y_1 + \dots + \sum_{i=1}^n (x_i \cdot (e_i, e_n)) \cdot y_n = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) \end{aligned}$$

**QED**

## Ортогонализация

### Теорема

Любую ЛНЗ систему можно ортогонализировать

### Доказательство

Следующий процесс называется **ортогонализацией Грама-Шмидта**. Его суть заключается в итеративном разложении каждого  $a_k$  на 2 составляющие:  $e_k$  — новый вектор, ортогональный всем предыдущим,  $g_k$  — составляющая  $a_k$ , лежащая в линейной оболочке, порождаемой предыдущими векторами, поэтому положим

$$g_k := \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i a_i)$$

то есть

$$a_k = e_k + g_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i a_i)$$

откуда

$$e_k = a_k - g_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i a_i)$$

далее  $\lambda$  заменим на  $\alpha$  с другими индексами и для удобства поменяем знак.

Доказательство корректности такого выражения  $a_k$  оставим на потом.

Пусть  $S = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ЛНЗ, тогда построим ортогональную систему  $S_\perp = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ :

1.  $e_1 = a_1$
2. Подбирам  $\alpha_2$ , такое что  $e_2 = a_2 + \alpha_2 e_1$  и  $(e_1, e_2) = 0$ , распишем:

$$\begin{aligned}(e_1, e_2) &= (e_1, a_2 + \alpha_2 e_1) = (e_1, a_2) + (e_1, \alpha_2 e_1) = \\(e_1, a_2) + \alpha_2(e_1, e_1) &= 0\end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_2 = -\frac{(e_1, a_2)}{(e_1, e_1)} = -\frac{(e_1, a_2)}{\|e_1\|^2}$$

3. Подбираем  $\alpha_{32}$  и  $\alpha_{31}$ , чтобы  $e_3 = a_3 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{31}e_1$  и  $(e_1, e_3) = 0$  и  $(e_2, e_3) = 0$ , снова выразим  $\alpha_{31}$ :

$$\begin{aligned}(e_1, e_3) &= (e_1, a_3 + \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2) = \\&= (e_1, a_3) + \alpha_{31}(e_1, e_1) + \alpha_{32}(e_1, e_2) = \\&= (e_1, a_3) + \alpha_{31} \cdot \|e_1\|^2 + 0 = 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow \alpha_{31} = -\frac{(e_1, a_3)}{\|e_1\|^2}\end{aligned}$$

И аналогично  $\alpha_{32}$ :

$$\alpha_{32} = -\frac{(e_2, a_3)}{\|e_2\|^2}$$

Обобщим построение вектора  $e_k$ :

$$\begin{aligned}e_k &= a_k + \alpha_{k1}e_1 + \alpha_{k2}e_2 + \dots + \alpha_{k[k-1]}e_{k-1} = \\&= a_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_{ki}e_i)\end{aligned}$$

выразим  $\alpha_{ki}$  из утверждения  $(e_i, e_k) = 0$ :

$$\begin{aligned}(e_i, e_k) &= (e_i, a_k + \alpha_{k1}e_1 + \alpha_{k2}e_2 + \dots + \alpha_{k[k-1]}e_{k-1}) = \\&= (e_i, a_k) + \alpha_{k1}(e_i, e_1) + \alpha_{k2}(e_i, e_2) + \dots + \alpha_{k[k-1]}(e_i, e_{k-1})\end{aligned}$$

вспомним, что  $i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$  (здесь  $i, j < k$ , то есть векторы ортогональны), тогда останется

$$(e_i, e_k) = (e_i, a_k) + \alpha_{ki}(e_i, e_i) = (e_i, a_k) + \alpha_{ki} \cdot \|e_i\|^2 = 0$$

откуда получим

$$\alpha_{ki} = -\frac{(e_i, a_k)}{\|e_i\|^2}$$

подставляя коэффициенты в формулу получаем

$$e_k = a_k - \sum_{i=1}^k \left( \frac{(e_i, a_k)}{\|e_i\|^2} \cdot e_i \right)$$

Таким образом, получается система ЛНЗ векторов  $S_\perp = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , в которой все векторы попарно ортогональны, что соответствует определению ортогональности системы  $S_\perp$ .

**QED**

Для получения из ортогональной системы  $S_\perp$  ортонормированной системы  $\mathcal{S}$  каждый вектор нужно нормировать:

$$q_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$$

то есть

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{e_i}{\|e_i\|} : e_i \in S_\perp \right\}$$

### Теорема

*Нам почему-то (товарищи ревьюеры, ваш выход) интересно знать, что*

$$\|e_k\| \leq \|a_k\|$$

### Доказательство

$$\begin{aligned} \|e_k\|^2 &= (e_k, e_k) = \left( e_k, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{(e_i, a_k)}{\|e_i\|^2} \cdot e_i \right) \right) = \\ &= (e_k, a_k) + \beta_1(e_k, e_1) + \beta_2(e_k, e_2) + \dots + \beta_{k-1}(e_k, e_{k-1}) = \\ &= (e_k, a_k) \leq \|e_k\| \cdot \|a_k\| \implies \|e_k\| \leq \|a_k\| \end{aligned}$$

**QED**

## *QR-разложение матриц*

Основано на ортогонализации Грама-Шмидта. Пусть дана матрица  $A_n$ , считая каждый столбец матрицы  $A_n$  вектором  $a_i$ , ортогонализируем систему векторов  $S = \{a_i : i \in [1, n]\}$ , после чего сразу нормируем векторы, получая (через переходы  $a_i \rightarrow e_i \rightarrow q_i$ ) ортонормированную систему  $\mathcal{S} = \{q_i : i \in [1, n]\}$ , построив из  $q_i$  как из столбцов матрицу, получим  $Q_n$ .

Положим  $A = QR$  ( $A$  дана,  $Q$  – найдена). Из равенства легко видеть, что

$$R = Q^{-1}A$$

### **Как по мне, совсем не очевидный факт**

*Утверждается, что*

$$Q^T \cdot Q = I$$

### **Доказательство**

Обозначим элементы:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

тогда

$$Q^T = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

А также обозначим векторы как столбцы  $Q$ :

$$v_i = (q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{ni})^T$$

Таким образом получаем

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \cdots & (v_1, v_n) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \cdots & (v_2, v_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (v_n, v_1) & (v_n, v_2) & \cdots & (v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

однако мы знаем, что  $i \neq j \Rightarrow (v_i, v_j) = 0$  (система  $Q$  ортонормирована), а значит

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|v_2\|^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$$

а поскольку система нормирована,  $\|v_i\| = 1 \Rightarrow \|v_i\|^2 = 1$ , то есть

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

К слову, из того, что матрицы квадратные, следует, что

$$Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$$

**QED**

Пользуясь предыдущим фактом, получаем

$$R = Q^{-1} \cdot A = Q^T \cdot A$$