Лекция 03 — Бинарные отношения

Определения

> Info
>
> **Бинарное отношение** R на множествах A и B — подмножество декартова произведения $A \times B$.
>
> Если $R \subseteq A \times B$, мы пишем $a \mathrel{R} b$ чтобы обозначить, что $a \in A$ *относится* к $b \in B$. Формально, $a \mathrel{R} b \iff \langle a, b \rangle \in R$.
>
> R используется как для обозначения множества пар, так и как предикат.

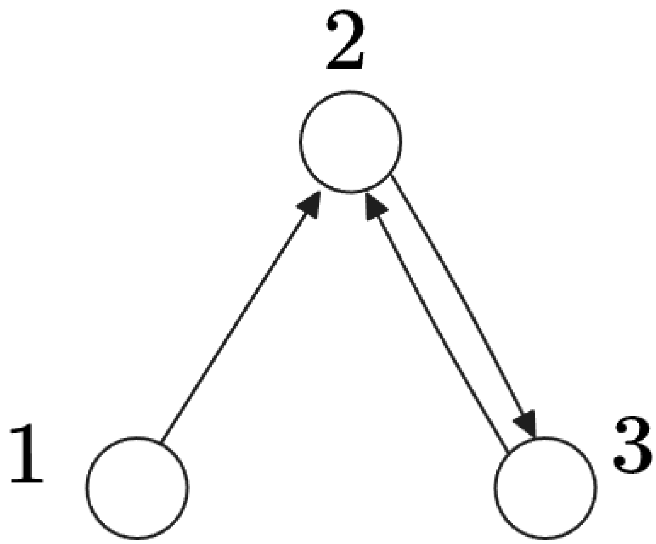
> Warning
>
> Порядок элементов в паре *важен*: $\langle a, b \rangle \in R$ обозначает, что a относится к b, но не наоборот, если только в множестве отношения нет пары $\langle b, a \rangle$.

> Info
>
> Бинарное отношение $R \subseteq A \times B$ на двух различных множествах называется **гетерогенным**.

> Info
>
> Бинарное отношение $R \subseteq M^2$ на одном множестве называется **гомогенным**.

Представление бинарных отношений

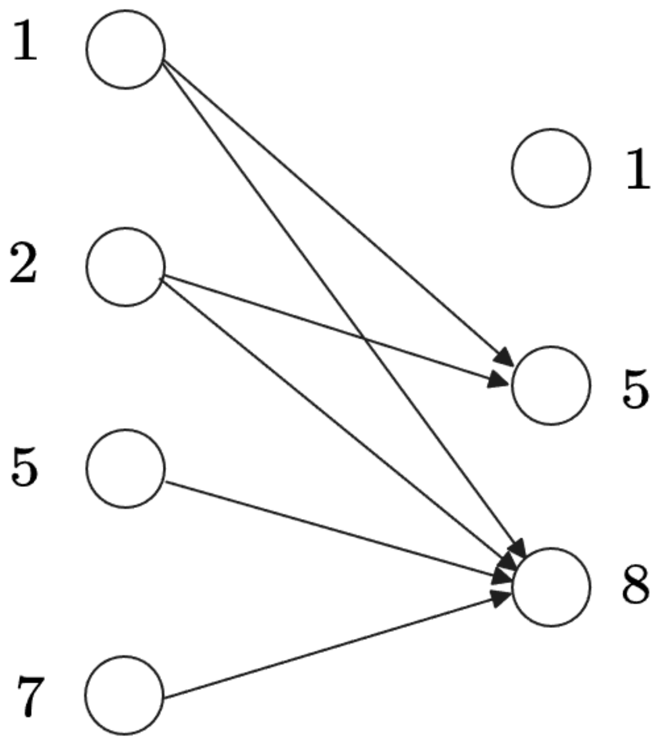
Гомогенное отношение $R \subseteq M^2$ можно представить в виде ориентированного графа, где вершины отвечают за элементы, а каждое ребро $a \to b$ существует тогда и только тогда, когда $a \mathrel{R} b$:



$$M = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}\}$$

Гетерогенное отношение $R \subseteq A \times B$ можно представить в виде ориентированного графа, где вершины левой доли отвечают за элементы из A, вершины правой доли отвечают за элементы B, а каждое ребро $a \in A \to b \in B$ существует тогда и только тогда, когда $a\ R\ b$:



$$A = \{1, 2, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 5, 8\}$$

$$R = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \land b \in B \land a < b\}$$

Гетерогенное отношение $R \subseteq A \times B$ можно представить в виде матрицы $M_R = [\![R]\!]$, где ряды отвечают за элементы A, столбцы отвечают за элементы B, и

$M_R[i,j] = 1 \iff a_i \, R \, b_j$ и 0 иначе:

$$A = \{1, 2, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 5, 8\}$$

$$R = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \land b \in B \land a < b\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Особые отношения

> **Info**
>
> Для любого множества M мы определяем следующие **особые отношения**:
>
> - Пустое отношение: $\emptyset \subseteq M^2$
> - Отношение идентичности: $I_M = \{\langle x, x \rangle \mid x \in M\}$
> - Универсальное: $U_M = M^2$

Операции на отношениях

Для отношений $R, S \subseteq A \times B$ определим следующие операции:

- Объединение:

$$R \cup S = \{\langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \lor \langle a, b \rangle \in S\}$$

- Пересечение:

$$R \cap S = \{\langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \land \langle a, b \rangle \in S\}$$

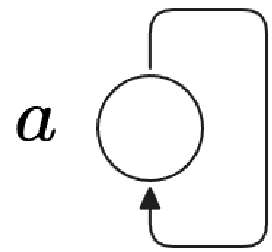
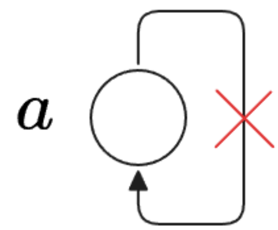
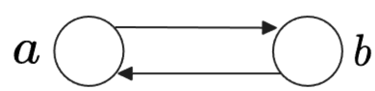
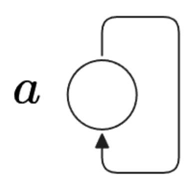
- Дополнение:

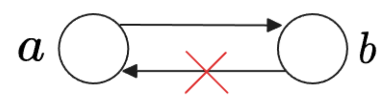
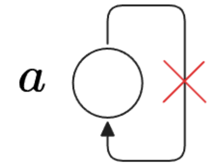
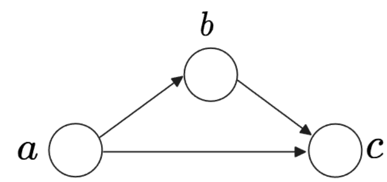
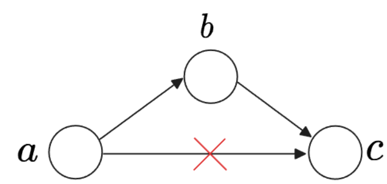
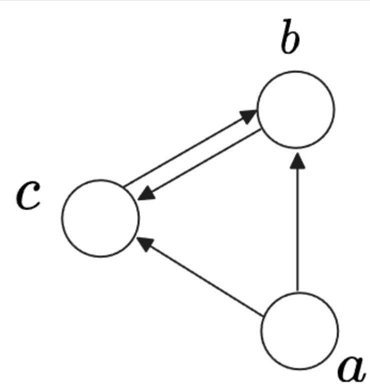
$$\overline{R} = (A \times B) \setminus R$$

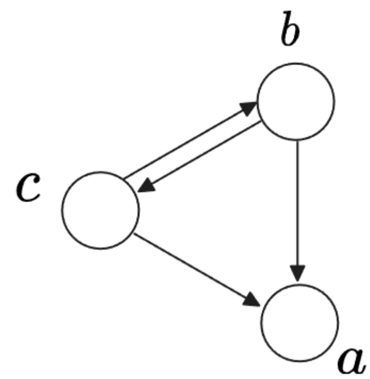
- Конверсия (инверсия, обратное отношение):

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\}$$

Свойства отношений

Свойство	Определение	Представление
Рефлексивность	$\forall a \in M : a\,R\,a$	 В графе обязаны быть все возможные петли.
Иррефлексивность	$\forall a \in M : a\,\cancel{R}\,a$	 В графе нет петель.
Корефлексивность	$\forall x, y \in A : x\,R\,y \implies x = y$	 Все рёбра в графе — петли.
Симметричность	$\forall a, b \in M : a\,R\,b \implies b\,R\,a$	 В графе обязаны быть все кратные рёбра.
Антисимметричность	$\forall a, b \in M : a\,R\,b \wedge b\,R\,a \implies a = b$	  В графе недопустимы кратные рёбра, но допустимы петли.

Свойство	Определение	Представление
Асимметричность	$\forall a, b \in M : a\,R\,b \implies b \not{R}\, a$	  В графе недопустимы кратные рёбра и петли. Асимметричность = антисимметричность + иррефлексивность
Транзитивность	$\forall a, b, c \in M : a\,R\,b \wedge b\,R\,c \implies a\,R\,c$	 Любая тройка вершин в графе транзитивна.
Антитранзитивность	$\forall a, b, c \in M : a\,R\,b \wedge b\,R\,c \implies a \not{R}\, c$	 В графе нет ни одной транзитивной тройки вершин.
Правая евклидовость	$\forall a, b, c \in M : (a\,R\,c \wedge a\,R\,b) \implies b\,R\,c$	

Свойство	Определение	Представление
Левая евклидовость	$\forall a, b, c \in M : (b \, R \, a \land c \, R \, a) \implies b \, R \, c$	

Отношения эквивалентности

> **Info**
>
> Отношение называется **отношением эквивалентности**, если оно *рефлексивно*, *симметрично* и *транзитивно*.

> **Info**
>
> Пусть есть R — отношение эквивалентности.
> **Классом эквивалентности** называется множество всех элементов, эквивалентных заданному:
>
> $$[x]_R = \{y \in M \mid x \, R \, y\}$$

> **Теорема (1)**
>
> Если $R \subseteq M^2$ — отношение эквивалентности, тогда $\forall x, y \in M : x \, R \, y \iff [x]_R = [y]_R$.

> **Info**
>
> **Quotient set** (*фактор-множество*) — множество всех классов эквивалентности:
>
> $$M/_R = \{[x]_R \mid x \in M\}$$

> **Теорема 2**

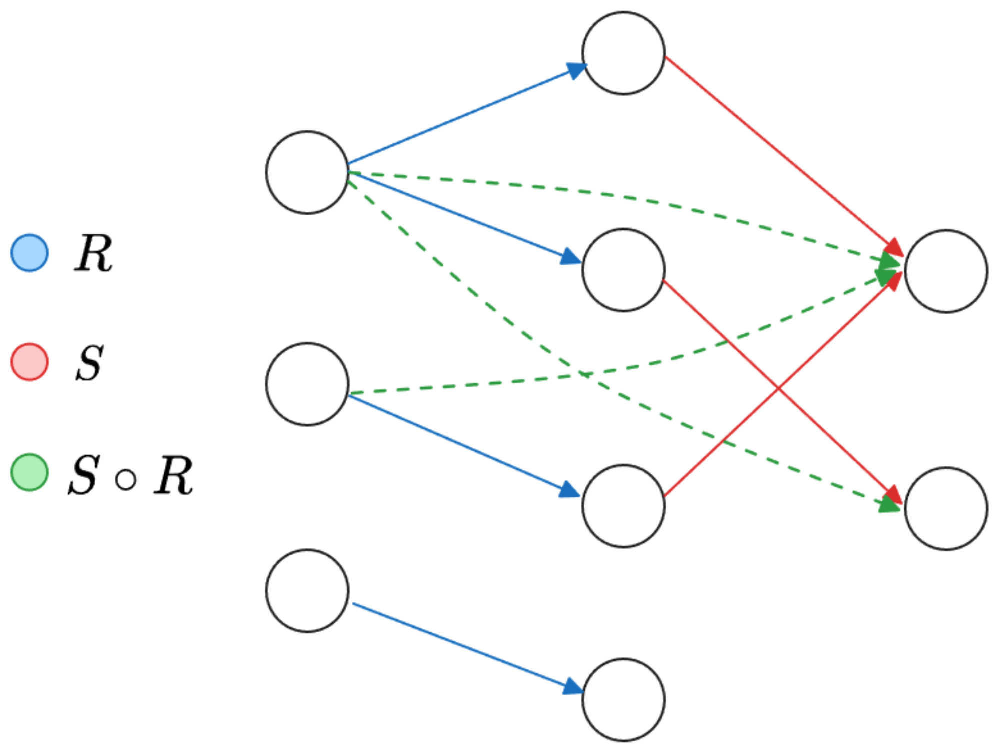
> Каждое отношение эквивалентности $R \subseteq M^2$ соответствует некоторому разбиению M, и наоборот.

Композиция отношений

ⓘ **Info**

Композиция двух отношений $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ определяется как

$$R;S = S \circ R = \{\langle a, c\rangle \mid \exists b \in B : (a\ R\ b) \wedge (b\ S\ c)\}$$



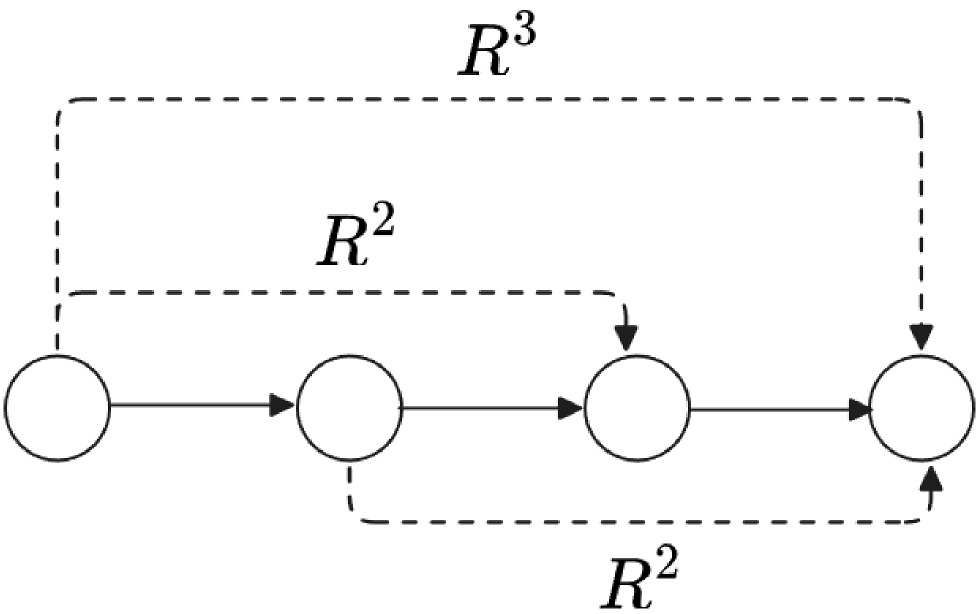
Степени отношения

ⓘ **Info**

Для гомогенного отношения $R \subseteq M^2$ мы опредялеяем его **степени** как:

- $R^0 = I_M$ (отнош-е идентичности)
- $R^1 = R$

- $R^n = R^{n-1} \circ R$



Замыкание

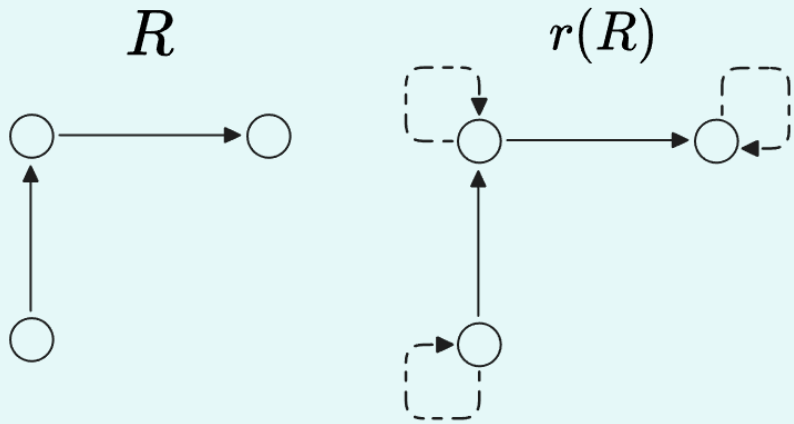
ⓘ Info

Замыканием отношения R по свойству P называется минимальное надмножество R, удовлетворяющее свойству P.

Important

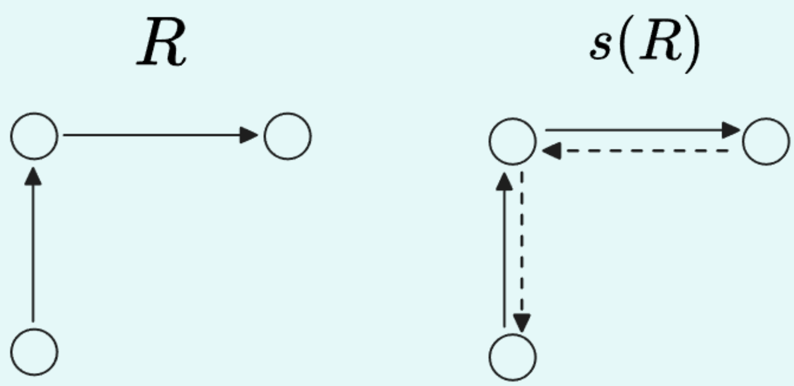
Рефлексивным замыканием $r(R)$ отношения $R \subseteq M^2$ называется минимальное рефлексивное надмножество R:

$$r(R) = R \cup I_M$$



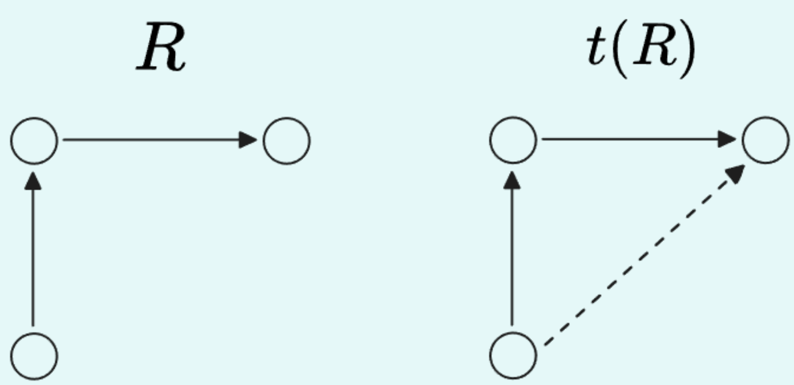
Симметричным замыканием $s(R)$ отношения $R \subseteq M^2$ называется минимальное симметричное надмножество R:

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$



Транзитивным замыканием $t(R)$ отношения $R \subseteq M^2$ называется минимальное транзитивное надмножество R:

$$t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$



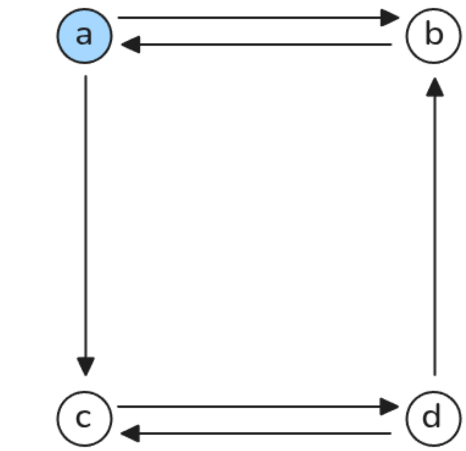
Алгоритм Уоршелла

Алгоритм Уоршелла заключается в построении транзитивного замыкания путём последовательного выбора элементов множества и добавления связей $\langle a, c \rangle$ таких, что на момент текущей итерации в отношении есть связи $\langle a, i \rangle$ и $\langle i, b \rangle$, где i — элемент, рассматриваемый на текущей итерации.

Рассмотрим принцип действия алгоритма на примере следующего отношения:

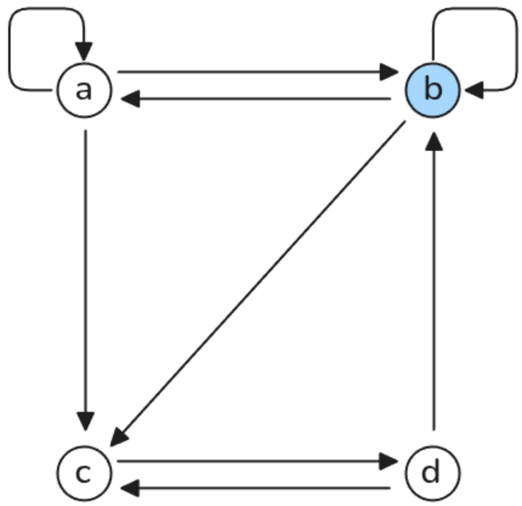
$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, c \rangle\}$$

Итерация 0



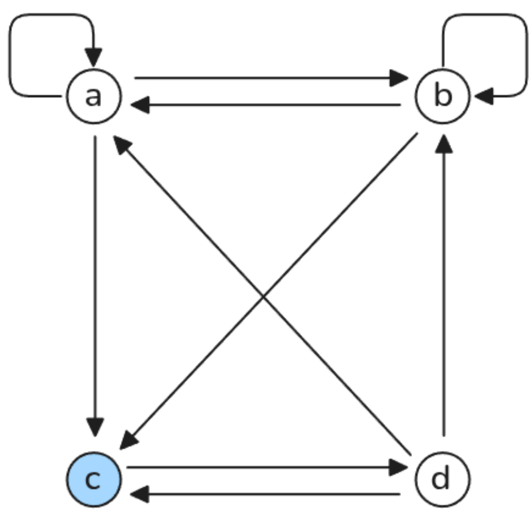
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Итерация 1



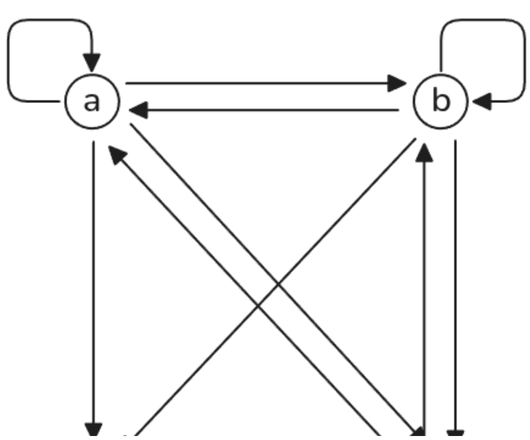
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Итерация 2

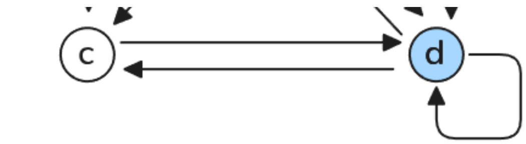


$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

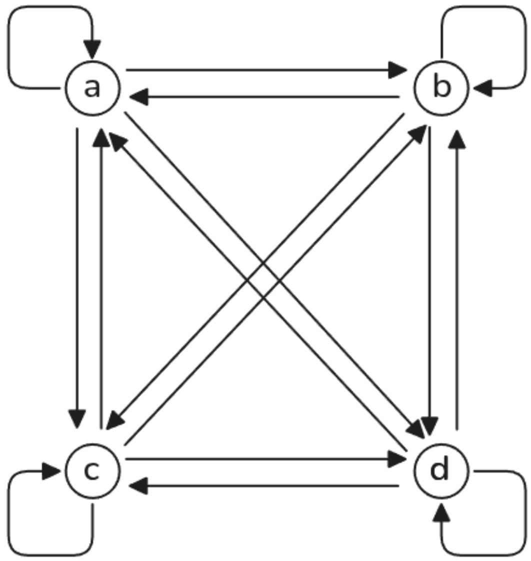
Итерация 3



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Итерация 4



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$