Конспект 01 — Основные алгебраические структуры

Алгебраические операции

Определения

> ⓘ **Info**
>
> **Алгебраической операцией**, определенной на множестве M, называется такое соответствие, в силу которого $\forall (a, b), a \in M, b \in M : \exists! c \in M$

Свойства алгебраических операций

Свойство	Определение
Ассоциативность	$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$
Коммутативность	$A \circ B = B \circ A$
Дистрибутивность	$A \times (B \circ C) = (A \times B) \circ (A \times C)$
Существование нейтрального элемента	$\exists N \in M : \forall A \in M : A \circ N = A$
Существование обратного элемента	$\forall A \in M : \exists A^{-1} \in M : A \circ A^{-1} = N$

Алгебраические структуры

> ⓘ **Info**
>
> **Алгебраическая структура** — непустое множество M с введёнными на нем алгебраическими операциями.

Группы

> ⓘ **Info**

Группа — непустое множество G с заданной на нём бинарной операцией $*$, которая удовлетворяет следующим условиям:

- Ассоциативность
- Существование нейтрального элемента
- Существование обратного элемента

Эти три условия называются *аксиомами группы*.
Группа является базовой алгебраической структурой, входящей в состав других более сложных (таких как кольца, поля, векторные пространства и проч.)

ⓘ **Info**

Группа, для которой выполняется условие коммутативности, называется **перестановочной** или **абелевой**.

Простейший пример группы — это множество целых чисел $\mathbb{Z}$, которое является абелевой группой по сложению.

Кольца

ⓘ **Info**

Кольцо — непустое множество S с заданными на нём бинарными операциями $+$ и $\times$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- S — абелева группа по сложению
- Дистрибутивность умножения отн-но сложения

Классификация колец

Название	**Условие**
Коммутативное кольцо	Коммутативность умножения
Ассоциативное кольцо	Ассоциативность умножения
Кольцо без делителей нуля	$\forall a, b \in S : a \times b = 0 \implies a = 0 \lor b = 0$

Название	Условие
Кольцо с единицей	Существование нейтрального элемента относительно умножения
Область целостности (целостное кольцо)	Ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля

Простейший пример кольца — это множество целых чисел $\mathbb{Z}$, которое является областью целостности.

Поля

ⓘ **Info**

Поле — непустое множество F, на котором заданы две бинарные операции: $+$ и $*$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- Коммутативность сложения
- Ассоциативность сложения
- Существование нейтрального элемента относительно сложения
- Существование обратного элемента относительно сложения
- Коммутативность умножения
- Ассоциативность умножения
- Существование нейтрального элемента относительно сложения
- Существование обратного элемента относительно сложения
- Дистрибутивность умножения относительно сложения

Эти девять условий называются *аксиомами поля*.
Нетрудно также заметить, что поле — это кольцо, являющееся абелевой группой по умножению.

Простейший пример поля — это множество вещественных чисел $\mathbb{Q}$.

Сравнительная характеристика алгебраических структур

	Сложение				Умножение				
	Ассоц.	Коммут.	Нейтр.	Обр.	Ассоц.	Коммут.	Нейтр.	Обр.	Дистриб.
Группа	✓	×	✓	✓	—	—	—	—	—
Абелева группа	✓	✓	✓	✓	—	—	—	—	—
Кольцо	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	✓
Ассоц. кольцо	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	✓
Коммут. кол	✓	✓	✓	✓	×	✓	×	×	✓

Поле	Область целостности	Кольцо с единицей	
✓	✓	✓	
✓	✓	✓	
✓	✓	✓	
✓	✓	✓	
✓	✓	×	
✓	✓	×	
✓	✓	✓	
✓	×	×	
✓	✓	✓	