Лекция 04 — Теория порядков

Классификация отношений порядка

Отношение	Характеристика
Препорядок	Рефлексивность и транзитивность
Частичный порядок	Рефлексивность, транзитивность и антисимметричность
Связность	$\forall x, y \in M : (x \neq y) \implies (x \, R \, y \vee y \, R \, x)$
Линейный порядок	Связное отношение частичного порядка

Частично упорядоченные множества

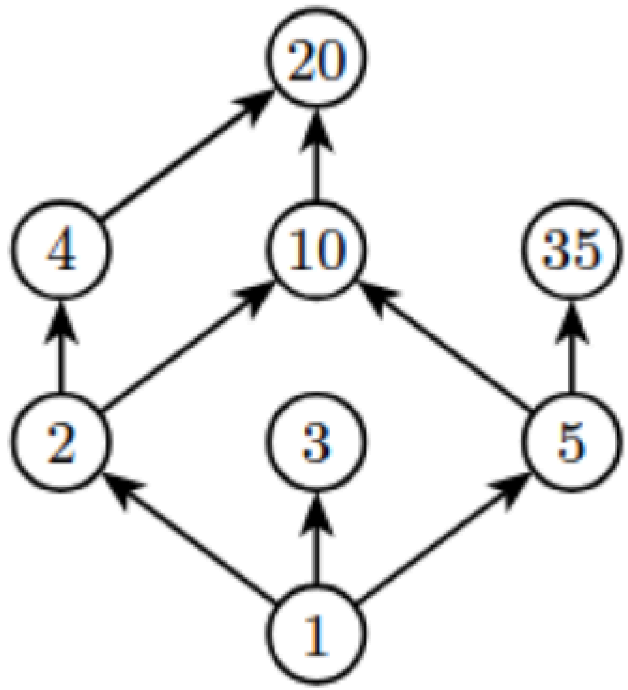
> **Info**
>
> **Частично упорядоченное множество** (*partially ordered set, poset*) $\langle S, \leq \rangle$ — множество S с определенным на нем отношением порядка $\leq$.

> **Info**
>
> **Диаграмма Хассе** — визуальное отображение частично упорядоченного множества, где:
>
> - каждый элемент представлен вершиной;
> - если $x < y$ и нет такого z что $x < z < y$, то есть ребро $x \to y$;
> - элементы упорядочены вертикально по отношению порядка;
> - транзитивные связи опускаются.

Пример диаграммы Хассе для множества D и отношения делимости

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 35\}$$

$$R = |$$



> ⓘ **Info**
>
> В частично упорядоченном множестве $\langle S, \leq \rangle$ элемент $y \in S$ **покрывает** $x \in S$ ($x \lessdot y$), если между ними нет никакого элемента:
>
> $$x \lessdot y \iff (x < y) \land \nexists z \in S : x < z < y,$$
>
> где $x < y \iff (x \leq y) \land (x \neq y)$ (*индуцированный строгий порядок*)
>
> Можно заметить, что диаграмма Хассе — это граф отношения покрытия.

Максимальные, минимальные, наибольшие и наименьшие элементы

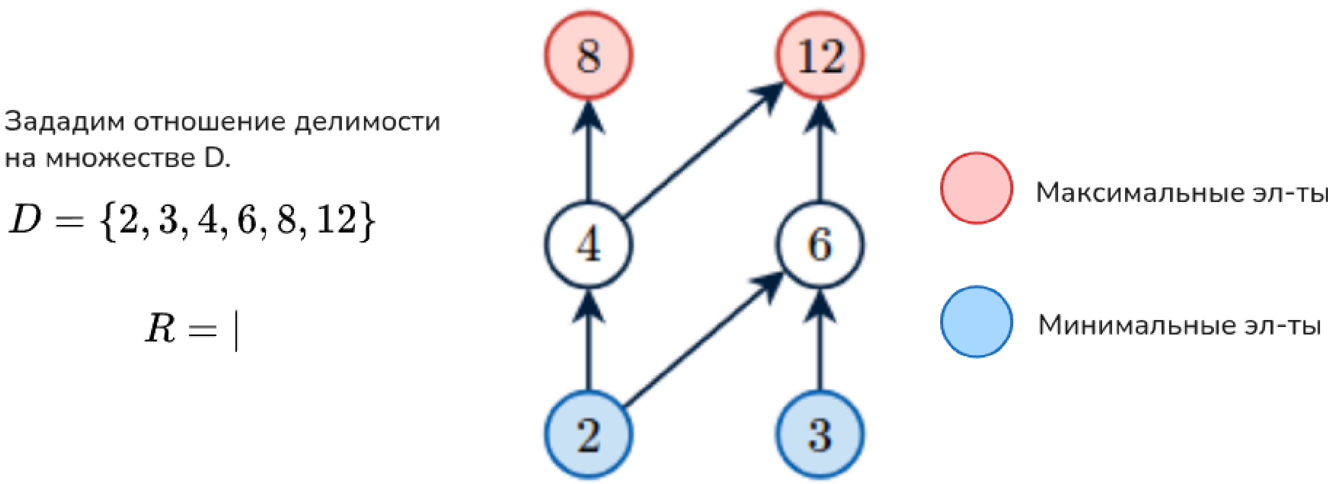
> ⓘ **Info**
>
> Элемент $m \in S$ называется **максимальным** элементом частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он не меньше всех элементов из этого множества:
>
> $$\forall x \neq m : \overline{m \leq x} \iff \nexists x \neq m (m \leq x)$$
>
> Эквивалентно, $\forall x \in S : (m \leq x) \implies (m = x)$/.

ⓘ **Info**

Элемент $m \in S$ называется **минимальным** элементом частичного упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он не больше всех элементов из этого множества:

$$\forall x \neq m : \overline{x \leq m} \iff \nexists x \neq m (x \leq m)$$

Эквивалентно, $\forall x \in S : (x \leq m) \implies (x = m)$.

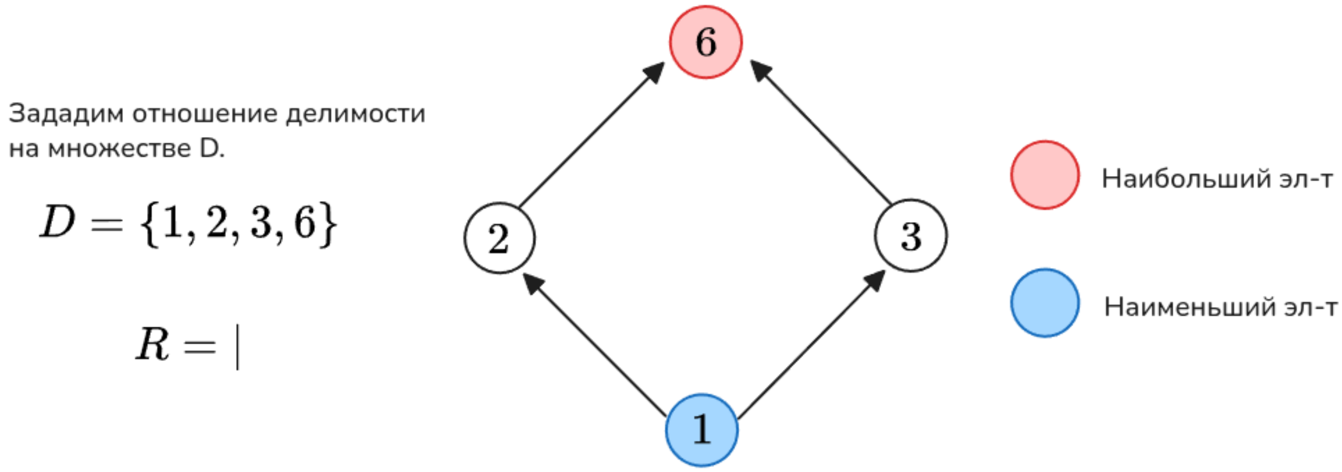


ⓘ **Info**

Элемент $g \in S$ называется **наибольшим** элементом частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он больше либо равен всем элементам этого множества, т.е. $\forall x \in S : x \leq g$

ⓘ **Info**

Элемент $g \in S$ называется **наименьшим** элементом частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$, если он меньше либо равен всем элементам этого множества, т.е. $\forall x \in S : g \leq x$



> ⚠ **Warning**
>
> Если наибольший или наименьший элементы существуют, то они *единственны*.

> **Important**
>
> Ключевое различие между максимальным и наибольшим (минимальным и наименьшим) элементами в том, что наибольший элемент обязан быть сравнимым со всеми остальными, в то время как максимальный может вообще не быть сравним ни с чем.
> Менее формально, максимальный элемент — это *локальный* максимум, а наибольший — *глобальный*.

Дуальное множество

> **Info**
>
> Частично упорядоченное множество $\langle S, \geq \rangle$ называется **дуальным** к $\langle S, \leq \rangle$, если $x \leq y \iff y \geq x$.

> ⚠ **Warning**
>
> В дуальном множестве минимальный элемент станет максимальным, наименьший - — наибольшим, и наоборот.

Цепи и антицепи

Info

Цепь — подмножество $C \subseteq \langle M, \leq \rangle$ такое, что любые два элемента в нём сравнимы. Формально, $\forall x, y \in C : (x \leq y \vee y \leq x)$.

Warning

Цепь — линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества.

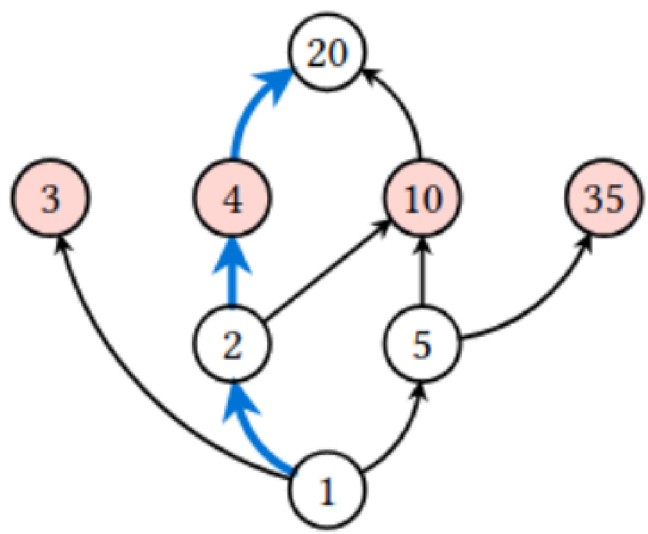
Info

Антицепь — подмножество $C \subseteq \langle M, \leq \rangle$ такое, что любые два различных элемента в нём не сравнимы. Формально, $\forall x, y : (x \neq y) \implies (x \nleq y \wedge y \nleq x)$

Зададим отношение делимости на множестве D.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 35\}$$

$$R = |$$



Примеры цепей:

$1, 2, 4, 20$ (максимальная цепь)

$1, 5, 20$

Примеры антицепей:

$3, 4, 10, 35$ (максимальная антицепь)

$3, 2, 35$

#TODO: Теорема Дилуорса