Теория графов

Основы

Граф — пара $\langle V, E \rangle$, где
- V — конечное множество вершин
- E — множество ребер

Дополнительные обозначения:
- $V(G)$ — множество вершин
- $E(G)$ — множество ребер
- $|V(G)|$ — порядок графа
- $|E(G)|$ — размер графа

Ребра графа — произвольные объекты, представляющие привычные нам ребра в удобном в конкретной задаче виде (например, в неориентированных графах ни к чему хранить их в виде *упорядоченных пар* можно хранить их в виде 2- и 1-множеств). Взаимодействие с ними строятся на функциях, например, для описания взвешенного ориентированного графа можно воспользоваться 3 функциями:

$$\begin{aligned} \text{begin} &: E \to V \\ \text{end} &: E \to V \\ \text{weight} &: E \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Полезная нотация

Множество всех подмножеств X, имеющих мощность n, можно записать как

$$\binom{X}{n} = \{S \mid S \in \mathcal{P}(X) \wedge |S| = n\}$$

такой нотацией можно пользоваться для записи

Заметка о определении графов (DodSTR)

Есть несколько способов определить граф

- Наиболее абстрактный способ определить граф, это через функции(написаны выше) Тогда E - множество анонимных названий ребер
- Можно прямо в множество ребер пихать не анонимные элементы, а пары элементов(для направленных графов), начало и конец.

  Тогда $E \subseteq V^2$ Мы просто говорим о том, что граф это отношение.

  Для взвешенного графа $E \subseteq V^2$✗$\mathbb{R}$
- Для ненаправленных Графов можно сделать тоже самое только с неупорядоченными парами.

  Обозначается $E \subseteq \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$

  $C_{|v|}^2 = \binom{V}{2}$

Классификация графов

Введем полезные определения

Петля — ребро, начинающееся и заканчивающееся в одной и той же вершние:

$$l \in E : \operatorname{begin}(l) = \operatorname{end}(l)$$

Мультребро — ребро, для которого в множестве ребер существует его точная копия, неравная ему:

$$m \in E : (\exists m' \in E \setminus \{m\})(\forall f \in F)(f(m') = f(m))$$

Иногда пару мультиребер называют *кратными ребрами*

Теперь легко классифицировать графы, основываясь на наличии в них петель и мультиребер:

Простой граф — граф, среди ребер которого нет **ни петель, ни мультиребер**

Определение внутри курса (DodSTR)

Когда Чухарев (и мы следовательно) говорим слово граф, мы имеем ввиду простой граф, если не сказано обратного

Мультиграф — граф, среди ребер которого **нет петель** (мультиребра допускаются)

Псевдограф — граф, в котором **допускаются** и мультиребра и петли

Ну и еще один чуть более интересный вид графов и ребер

Гиперребро — ребро, связывающее больше 2 вершин

Гиперграф — граф, содержащий гиперребра

Про вершины

Здесь определения будут поясняться на примере неориентированных и невзвешенных графов, однако обобщить эти их на другие виды никакой сложности не представляет

Связанные (adjacent) вершины — вершины, между которыми есть ребро — u и v, если $\{u, v\} \in E$

Инцидентное ребро — ребро инцидентно вершине, если оно в нее “приходит” — $e \in E$ инцидентно $u \in V$, если $v \in e$

- Часто определяют как обратное, ребро которое выходит из вершины (DodSTR)

Соседние вершины v — множество связанных с v вершин:

$$\{u \mid \{u, v\} \in E\}$$

Степень вершины — количество ее соседей:

$$\deg(u) = |\{v \mid \{u, v\} \in E\}|$$

Граф, к слову тоже имеет степени (даже 2):
- $\delta(G) = \min\limits_{v \in V} \deg v$ — минимальная степень вершины в графе
- $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} \deg v$ — максимальная степень вершины в графе

Степенная последовательность — последовательность степеней вершин графа в порядке невозрастания

Лемма о рукопожатиях (ТЕОРЕМА 1)

В любом (неориентированном) графе сумма степеней вершин в 2 раза больше количества ребер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Доказательство

Каждое ребро добавляет к итоговой сумме по 2 (каждым из 2 концов), а значит, пройдясь по всем ребрам получим сумму всех степеней равную $2 \cdot |E|$

QED

Возвращаясь к графам

r-regular граф — граф, в котором каждая вершина имеет степень r

Специальные графы

- **Нулевой** — без вершин
- **Тривиальный** — одна вершина, нет ребер
- **Пустой** ($\overline{K_n}$) — n вершин, нет ребер
- **Полный** (K_n) — n вершин, все соединены между собой
- **Цикл** (C_n) — n вершин в цикле
- **Путь** (P_n) — n вершин в линию

ТЕОРЕМА 2 (DodSTR)
***Полный** (K_n) граф имеет ровно* $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ *ребер*

Доказательство

Тривиальное **TODO**

QED

Способы представления графов

Матрица смежности — для графа с n вершинами матрицей связности будет матрица размера $n \times n$, элементы которой задаются по следующим правилам

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \ \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

Пара легкопроверяемых фактов:

- Матрицы связности неориентированных графов симметричны относительно главной диагонали
- В простом графе главная диагональ заполнена нулями

Список межности — каждой вершине ставится в соответствие множество ее соседей

Подграфы

Подграф — $H = \langle V', E' \rangle$ называется подграфом $G = \langle V, E \rangle$, если множества его вершин и ребер являются подмножествами соответствующих множеств G:

$$H \subseteq G \Longleftrightarrow V' \subseteq V \text{ и } E' \subseteq E$$

Особые виды подграфов:

1. **Spanning** (открыт для предложений перевода) — подграф, содержащий все вершины исходного ($V' = V$)
2. **Induced** (вероятно, порожденный) — подграф $G[S]$, где $S \subseteq V$, в котором есть все ребра, содержащие вершины исходного:

$$E' = \{\{u, v\} \mid u, v \in S \text{ и } \{u, v\} \in E\}$$

Изоморфизм графов

Изоморфные графы – $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, для которых существует биекция $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющая связность:

$$\{u, v\} \in E_1 \Longleftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$

По сути это 2 одинаковых графа, в которых по-разному названы вершины, их структура идентична

Смысл изоморфизма графов (DodSTR)

Глазами определить изоморфны ли нарисованные на бумажке графы очень легко (буквально одинаковые графы)

Вся сложность задачи в алгоритмизации этого процесса, чтобы это могла делать машина.