Теория графов

Основы

Граф — пара $\langle V, E \rangle$, где
- V — конечное множество вершин
- E — множество ребер

Дополнительные обозначения:
- $V(G)$ — множество вершин
- $E(G)$ — множество ребер
- $|V(G)|$ — порядок графа
- $|E(G)|$ — размер графа

Ребра графа — произвольные объекты, представляющие привычные нам ребра в удобном в конкретной задаче виде (например, в неориентированных графах ни к чему хранить их в виде *упорядоченных пар* можно хранить их в виде 2- и 1-множеств). Взаимодействие с ними строятся на функциях, например, для описания взвешенного ориентированного графа можно воспользоваться 3 функциями:

$$\begin{aligned}&\text{begin} : E \to V\\&\text{end} : E \to V\\&\text{weight} : E \to \mathbb{R}\end{aligned}$$

Полезная нотация

Множество всех подмножеств X, имеющих мощность n, можно записать как

$$\binom{X}{n} = \{S \mid S \subseteq X \text{ и } |S| = n\}$$

Заметка об определении графов

Есть несколько способов определить граф

- Наиболее абстрактный способ определить граф, это через функции (написаны выше), тогда E - множество анонимных названий ребер
- Можно прямо в множество ребер пихать не анонимные элементы, а пары элементов (для направленных графов), начало и конец.

  Тогда $E \subseteq V^2$ Мы просто говорим о том, что граф это отношение.

  Для взвешенного графа $E \subseteq V^2 \times \mathbb{R}$
- Для ненаправленных Графов можно сделать то же самое только с неупорядоченными парами.

  Обозначается $E \subseteq \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$

  Несложно видеть, что $C^2_{|V|} = \left|\binom{V}{2}\right|$

Классификация графов

Введем полезные определения

Петля — ребро, начинающееся и заканчивающееся в одной и той же вершние:

$$l \in E : \operatorname{begin}(l) = \operatorname{end}(l)$$

Мультиребро — ребро, для которого в множестве ребер существует его точная копия, неравная ему:

$$m \in E : (\exists m' \in E \setminus \{m\})(\forall f \in F)(f(m') = f(m))$$

Иногда пару мультиребер называют *кратными ребрами*

Теперь легко классифицировать графы, основываясь на наличии в них петель и мультиребер:

Простой граф — граф, среди ребер которого нет **ни петель, ни мультиребер**

Определение внутри курса

Когда Чухарев (и мы следовательно) говорим слово граф, мы имеем в виду простой граф, если не сказано обратного

Мультиграф — граф, среди ребер которого **нет петель** (мультиребра допускаются)

Псевдограф — граф, в котором **допускаются** и мультиребра и петли

Ну и еще один чуть более интересный вид графов и ребер

Гиперребро — ребро, связывающее больше 2 вершин

Гиперграф — граф, содержащий гиперребра

Про вершины

Здесь определения будут поясняться на примере неориентированных и невзвешенных графов, однако обобщить их на другие виды никакой сложности не представляет

Смежные (adjacent) вершины — вершины, между которыми есть ребро — u и v, если $\{u, v\} \in E$

Инцидентное ребро — ребро инцидентно вершине, если оно в нее "приходит" — $e \in E$ инцидентно $u \in V$, если $v \in e$ (так же определяют как обратное, ребро которое выходит из вершины)

Соседние вершины v — множество смежных с v вершин:

$$\{u \mid \{u, v\} \in E\}$$

Степень вершины — количество ее соседей:

$$\deg(u) = |\{v \mid \{u, v\} \in E\}|$$

Граф, к слову тоже имеет степени (даже 2):
- $\delta(G) = \min\limits_{v \in V} \deg v$ — минимальная степень вершины в графе
- $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} \deg v$ — максимальная степень вершины в графе

Степенная последовательность — последовательность степеней вершин графа в порядке невозрастания

Лемма о рукопожатиях
В любом (неориентированном) графе сумма степеней вершин в 2 раза больше количества ребер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Доказательство

Каждое ребро добавляет к итоговой сумме по 2 (каждым из 2 концов), а значит, пройдясь по всем ребрам получим сумму всех степеней равную $2 \cdot |E|$

QED

Возвращаясь к графам

r-regular граф — граф, в котором каждая вершина имеет степень r

Специальные графы

- **Нулевой** — без вершин
- **Тривиальный** — одна вершина, нет ребер
- **Пустой** ($\overline{K_n}$) — n вершин, нет ребер
- **Полный** (K_n) — n вершин, все соединены между собой
- **Цикл** (C_n) — n вершин в цикле
- **Путь** (P_n) — n вершин в линию

Теорема

Полный (K_n) *граф имеет ровно* $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ *ребер*

Доказательство

Лемма о рукопожатиях:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{2}$$

поскольку в графе n вершин, каждая из которых связана со всеми остальными справедливо, что

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

QED

Способы представления графов

Матрица смежности — для графа с n вершинами матрицей смежности будет матрица размера $n \times n$, элементы которой задаются по следующему правилу

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \ \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

Пара легкопроверяемых фактов:

- Матрицы смежности неориентированных графов симметричны относительно главной диагонали
- В простом графе главная диагональ заполнена нулями

Список смежности — каждой вершине ставится в соответствие множество ее соседей

Подграфы

Подграф — $H = \langle V', E' \rangle$ называется подграфом $G = \langle V, E \rangle$, если множества его вершин и ребер являются подмножествами соответствующих множеств G:

$$H \subseteq G \Longleftrightarrow V' \subseteq V \text{ и } E' \subseteq E$$

Особые виды подграфов:

1. **Spanning** (открыт для предложений перевода) — подграф, содержащий все вершины исходного ($V' = V$)
2. **Induced** (вероятно, порожденный) — подграф $G[S]$, где $S \subseteq V$, в котором есть все ребра, содержащие вершины исходного:

$$E' = \{\{u, v\} \mid u, v \in S \text{ и } \{u, v\} \in E\}$$

Изоморфизм графов

Изоморфные графы – $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, для которых существует биекция $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющая связность:

$$\{u, v\} \in E_1 \Longleftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$

По сути это 2 одинаковых графа, в которых по-разному названы вершины, их структура идентична

Смысл изоморфизма графов

Глазами определить изоморфны ли нарисованные на бумажке графы очень легко (буквально одинаковые графы)

Вся сложность задачи в алгоритмизации этого процесса, чтобы это могла делать машина.

Пути и связность

Пути

Walk (переводить запрещено) — переменная последовательность вершин и ребер.

Замкнутый walk так и называется

Trail (переводить запрещено) — walk, в котором ребра не повторяются.

Замкнутый trail — circuit

Путь (path) — trail, в котором вершины не повторяются.

Замкнутый путь — цикл

Путь (и все остальные) называются замкнутыми если начинаются и заканчиваются в одной и той же вершине (в path допускается только такое повторение вершин)

Длина пути (и проч.) — количество ребер в нем

Расстояние (между u, v) — длина кратчайшего пути между u и v. Если пути не существует, пишут $\mathrm{dist}(u, v) = \infty$

Теорема
Расстояние — метрика

Доказательство

Проверить свойства несложно, доказательство тривиально

QED

Характеристики вершин и графов, связанные с расстоянием

- **Эксцентриситет** вершины — расстояние от нее до самой удаленной вершины ($\operatorname{ecc}(v) = \max\limits_{u \in V} \operatorname{dist}(u, v)$)
- **Радиус** графа — минимальный эксцентриситет его вершин
- **Диаметр** графа — максимальный эксцентриситет его вершин
- **Центр** графа — множество вершин, эксцентриситет которых равен его радиусу

Теорема

$$\operatorname{rad}(G) \le \operatorname{diam}(G) \le 2 \cdot \operatorname{rad}(G)$$

Доказательство

- $\operatorname{rad}(G) \le \operatorname{diam}(G)$ — очевидно из определения
- Пусть $\operatorname{diam}(G) = \operatorname{dist}(u, v)$, а w — один из центров графа, тогда

$$\operatorname{dist}(u, v) \le \underbrace{\operatorname{dist}(u, w)}_{\le \operatorname{rad}(G)} + \underbrace{\operatorname{dist}(w, v)}_{\le \operatorname{rad}(G)} \le 2 \cdot \operatorname{rad}(G)$$

QED

Связность

Связность вершин — вершины связаны если существует путь из одной в дргуую

Связность графа — граф называется связным, если все его вершины связаны

Теорема
Из существования walk следует существование пути

Доказательство

Рассмотрим минимальный (по включению) walk, если есть повторяющиеся вершины получим противоречие — walk не минимальный, откуда следует, что повторяющихся вершин (а значит и ребер) нет, а значит рассмотренный walk — путь (если есть walk короче, также получим противоречие)

QED

Компонента связности — максимальный связный подграф

Эти определения касались неориентированного графа, теперь что касается ориентированного.

Слабая связность — если все ребра считать двунаправленными, граф становится связным

Полусвязность — для любых двух вершин либо сущестует путь $u \to v$ или $v \to u$

Сильная связность — для любых двух вершин существует путь $u \to v$ и $v \to u$

Компонента сильной связности — максимальный сильно связный подграф ориентированного графа

Обхват (girth) графа — длина кратчайшего цикла. Для ацикличного графа $\mathrm{girth}(G) = \infty$

Деревья и леса

Дерево — связный граф без циклов

Лес — граф без циклов

Теорема

Для графа G с n вершинами справедливо, что все следующие факты эквивалентны :

1. *G — дерево*
2. *G связный с $n-1$ ребром*
3. *G ацикличный с $n-1$ ребром*
4. *Любые 2 вершины связаны единственным путем*
5. *G минимально связный (удаление любого ребра нарушает связность)*
6. *G максимально ацикличный (добавление любого ребра порождает цикл)*

Доказательство

Докажем следствие $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 6 \Longrightarrow 1$:

- ($1 \Longrightarrow 2$) Покажем, что не может быть меньше чем $n-1$ ребро. Рассмотрим граф из n вершин без ребер, в нем n компонент связности. Каждое ребро может соединить 2 вершины из одной компоненты связности (не изменить количество компонент связности) или из разных (уменьшить количество компонент связности на 1, если возможно), а значит чтобы граф был связным, нужно не меньше чем $n-1$ ребро. Теперь докажем, что если граф связный, то добавление любого ребра порождает цикл. Пусть добавилось ребро $e = \{u, v\}$, по предположению u и v связаны, то есть теперь есть путь из u в v (уже существовавший, без ребра e) и путь из v в u (по ребру e) — цикл, а значит, если граф с $n-1$ вершиной связный, то больше в дереве быть уже не может (иначе появляется цикл)

- ($2 \implies 3$) Связность включена. Докажем ацикличность — от противного, если есть цикл, удалим ребро, граф должен остаться связным, но тогда в нем будет $n - 2$ ребра, а в предыдущем пункте доказано, что в связном графе хотя бы $n - 1$ ребро $\implies$ в исходном графе циклов не было
- ($3 \implies 4$) Если есть больше 1 пути $u \rightsquigarrow v$, то граф не акцикличный. По индукции докажем связность такого графа:
  - База — граф с 2 вершинами и 1 ребром
  - Добавляем вершину, есть компонента связности и отдельная вершина, добавить можно только между двумя компонентами, иначе получится цикл в основной компоненте, то есть новый граф снова связный
- ($4 \implies 5$) Любое ребро принадлежит какому-то единственному пути между вершинами и его удаление приведет к появлению второй компоненты связности
- ($5 \implies 6$) Если исходный граф не ацикличный, то в нем есть ребро, удаление которого не нарушит связность — противоречие. Также было доказано, что добавление ребра в связный граф ломает ацикличность $\implies$ граф максимальный ацикличный
- ($6 \implies 1$) Ацикличность уже есть. Пусть граф несвязный, тогда добавление ребра между разными компонентами связности, при этом цикла не появится — противоречие

QED

Подвешенное дерево (дерево с корнем) — дерево, в котором одна вершина объявлена *корнем.*

В подвешенном дереве (по опрределению)

- Предок v — это сосед v на пути к корню
- Дети v — сосед v вне пути к графу
- Лист — вершина без детей
- Внутренняя вершина — вершина с хотя бы 1 ребенком

Порожденное дерево — порожденный подграф, являющийся деревом

Теорема
Любой связный граф порождает хотя бы одно дерево

Доказательство

Воспользуемся DFS — если попадаем в вершину в которой уже были удалим последнее (ведущее в нее) ребро, как только алгоритм отработал не останется ни одного цикла, при этом не потеряется связность (удалялись только ребра, порождающие циклы)

QED

Пусть теперь T — дерево, порожденное графом G, для любой вершины $e \in E(G) \setminus E(T)$ граф $T + e$ содержит ровно 1 цикл, называемый фундаментальным циклом e по отношению к дереву T

Prüfer-последовательность — уникальный способ закодировать именованное дерево последовательностью из $n - 2$ названий вершин (при n вершинах)

Алгоритм построения:
1. Выбрать лист с минимальным номером
2. Записать в последовательность его предка
3. Удалить лист
4. Повтоять пока не останется 2 вершины

Формула Кайли
На n вершинах можно построить ровно n^{n-2} labeled деревьев

Доказательство

Если поверить, что Prüfer-последовательность уникально кодирует ровно один граф, то доказательство этого факта очевидно следует из комбинаторики — $n - 2$ места, на каждом из которых стоит одно из n названий вершин: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n-2 \text{ штуки}} = n^{n-2}$

QED

Теория связности

Точка сочленения — вершина, удаление которой увеличивает количество компонент связности

Мост — ребро, удаление которого увеличивает количество компонент связности

u-v разделитель (u-v вершинный срез) — множество вершин $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$, такое что в графе $G - S$ вершины u и v не связаны

u-v реберный срез — множество ребер $F \subseteq E$, при которых в графе $G - F$ вершины u и v лежат в разных компонентах связности

Внутренее непересекающиеся (по вершинам) пути — 2 пути из u в v, которые не имеют общих вершин кроме u и v

Внутренее непересекающиеся (по ребра) пути — 2 пути из u в v, которые не имеют общих вершин ребер

Связность вершин — $\kappa(G)$ минимальное количество вершин, которое нужно удалить, чтобы граф стал несвязным или тривиальным

Связность ребер — $\lambda(G)$ минимальное количество ребер, которое нужно удалить, чтобы граф стал несвязным или тривиальным

k-связный граф — граф называется k-связным, если $\kappa(G) \geq k$. Или, что эквивалентно, в G не меньше k вершин и

$$(\forall S)(|S| < k \Longrightarrow (G - S) - \text{связный})$$

k-реберно-связный граф — граф называется k-реберно-связным, если $\lambda(G) \geq k$. Или, что эквивалентно, в G не меньше k вершин и

$$(\forall F)(|F| < k \Longrightarrow (G - F) - \text{связный})$$

Эйлеровость

Эйлеров путь — путь, включающий в себя все ребра.

Граф, в котором существует эйлеров путь называется **полуэйлеровым**.

Эйлеров цикл — замкнутый эйлеров путь.

Граф, в котором существует эйлеров цикл называется **эйлеровым**.

Критерий эйлеровости для графа

- **Неориентированный граф**:
  1. Все вершины четной степени — $(\forall v \in V(G))(\deg(v) = 2n)$
  2. Среди всех комопнент связности ребра содержит *не более* чем одна

  Второй пункт является объектом дискуссии — *считать ли тривиальный граф эйлеровым?* если критерий такой, то ответ на вопрос — да, если требовать *ровно* 1 компоненту связноси с ребрами, то нет
- **Ориентированный граф**:
  1. Степени входа и исхода для всех вершин совпадают — $(\forall v \in V(G))(\deg^-(v) = \deg^+(v))$
  2. Среди всех комопнент связности ребра содержит не более чем одна

Гамильтоновость

Гамильтонов путь — путь, включающий в себя все вершины.

Невероятно, но граф, в котором существует гамильтонов путь называется **полугамильтоновым**.

Гамильтонов цикл — замкнутый гамильтонов путь.

Граф, в котором существует гамильтонов цикл называется **гамильтоновым**.

Критерия гамильтоновости, к сожалению, пока никто не обнаружил, однако есть достаточное условие гамильтоновости (неориентированный граф):

- ***Теорема Оре***:

$$n \geq 3 \text{ и } (\forall u, v : \{u, v\} \notin E(G))(\deg(u) + \deg(v) \geq n)$$

Также есть *менее сильная* теорема, которая однако следует из Оре, а значит так же является достаточным уловием. Речь о ***теореме Дирака***:

$$n \geq 3 \text{ и } (\forall v \in V(G))\left(\deg(v) \geq \frac{n}{2}\right)$$

Внимание! На практике нас прогрели — теоремы не эквивалентны! Контр пример имени Чата Джи-Пи-Ти — рассмотрим K_5 (полный граф из 5 вершин $\{a, b, c, d, e\}$), теперь добавим шестую вершину f и ребра из нее в a и e, таким образом получим граф, в котором будет гамильтонов цикл ($f \to a \to b \to c \to d \to e \to f$, проще нарисовать, но я, пожалуй, не буду), однако есть вершина f, для которой $\deg(f) = 2 < \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$, то есть условие Дирака не выполнено (а Оре — выполнено)

Реберная и вершинная двусвязность

Сначала про *реберную* двусвязность

Двусвязные вершины — вершины u и v называются двусвязными, если существует 2 реберно не пересекающихся пути между ними.

Несложно доказать, что отношение “быть реберно двусвязными” на множестве вершин является отношением эквивалентности.

Мост (alt) — ребро, соединяющее 2 компоненты реберной двусвязности.

Теперь про *вершинную*

Двусвязные ребра — ребра, между которыми существует 2 вершинно не пересекающихся пути.

Отношение на множестве ребер — эквивалентность

Блок — компонента вершинной двусвязности

Точка сочленения (alt) — вершина, соединяющая блоки

Полезные теоремы

Неравенство Уитни

Для любого графа

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Доказательство

- $\lambda(G) \leq \delta(G)$. Рассмотрим вершину с минимальной степенью и удалим все инцидентные инцидентные им ребра
- $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. Имея реберный разрез F построим вершиный разрез S, такой что $|S| \leq |F|$. Для этого для каждого ребра $\{a, b\} \in F$ возьмем в S например вершину b, получается что с вершиной будет удалено и ребро $\{a, b\}$, откуда $|S| \leq |F|$ (если в F было несолько ребер, содержащих b, то получим строгое неравенство)

QED

Теорема Менгера (вершинная форма)

Пусть u и v не соседние вершины, тогда максимальное количество вершинно не пересекающихся путей равно минимальному количеству вершин в вершинном u-v разрезе

Доказательство

Пусть первое значение — p, второе — q.

- $p \leq q$ тривиально — пути не пересекаются, возьмем из каждого по одной произвольной вершине (разрез без хотя бы одной вершины из каждого пути будет неполным), а значит вершин в разрезе точно не меньше, чем путей
- $p \geq q$. Такого не делал даже Константин…

QED

Теорема Менгера (реберная форма)

Пусть u и v различные вершины, тогда максимальное количество *реберно не пересекающихся путей равно минимальному количеству ребер в реберном u-v разрезе*

Доказательство

Ну если вдруг кто-то хочет...

QED

Следующие штуки называют следствиями из теоремы Менгера

Глобальная вершинная связность

Граф k-вершинно связный $\Longleftrightarrow$ все пары вершин между собой k-связны (вершинно)

Глобальная реберная связность

Граф k-реберно связный $\Longleftrightarrow$ все пары вершин между собой k-связны (реберно)

Теорема (снова Уитни)

Граф с хотя бы 3 вершинами двусвязный тогда и только тогда, когда любые 2 вершины лежат в цикле

Доказательство

- ($\Rightarrow$) есть минимум 2 не пересекающихся пути, объединим их и получим цикл
- ($\Leftarrow$) есть цикл, удалим любую вершину, путь все равно останется $\Longrightarrow$ граф *минимум* 2-связный

QED

BC-дерево (block-cut tree) — граф, который дерево и

1. Есть вершины-блоки и вершины-точки сочленения

2. Вершины разных типов являются соседями, если точка сочленения лежит в блоке (получается, граф двудольный — в одной доле блоки, в другой точки сочленения)

Остров — компонента реберной двусвязности

Мостовое (островное) дерево — дерево, в котором все вершины обхединены в острова и каждый остров связан с другим не более чем 1 ребром

Двудольные графы и паросочетания

Двудольный граф — граф называется двудольным, если

$$V(G) = X \sqcup Y$$

причем

$$(\forall x \in X)(\nexists x \in x')(\{x, x'\} \in E(G)) \text{ и аналогично для } Y$$

Можно обозначать как

$$G = \langle X \sqcup Y, E \rangle$$

Теорема

Граф двудольный $\Longleftrightarrow$ *в нем нет циклов нечетной длины*

Доказательство

- ($\Rightarrow$) От противного — пусть есть цикл нечетной длины, заметим, что каждый раз проходя по ребру мы переходим из одной доли в другую, пусть цикл это $u \rightsquigarrow v \to u$, получается, что путь $u \rightsquigarrow v$ сожержит четное число ребер (переходов между долями), значит u и v в одной доле, но между ними существует путь — противоречие
- ($\Leftarrow$) Будем считать граф связным (иначе просто проделаем алгоритм в каждой компоненте). Возьмем произвольную вершину r, остальные разобьем на 2 группы:

$$X \coloneqq \{u : d(r, u) = 2t\} \text{ (расстояние до } r \text{ четно)}$$
$$Y \coloneqq \{u : d(r, u) = 2t + 1\} \text{ (расстояние до } r \text{ нечетно)}$$

От противного докажем, что нет ребра внутри множеств X и Y — пусть $\exists u, v \in X : \{u, v\} \in E(G)$, тогда рассмотрим пути $r \rightsquigarrow u$ и $r \rightsquigarrow v$, пусть они не совпадают начиная с некоторой вершины w, будем теперь смотреть на пути $w \rightsquigarrow u$ и $w \rightsquigarrow v$, рассмотрим цикл $(w \rightsquigarrow u) \to v \rightsquigarrow w$, длина такого цикла равна $d(w, u) + d(u, v) + 1$, очевидно, $d(w, u) \equiv d(w, v) \mod 2$ (иначе вершины не могут одновременно лежать в X), то есть $d(w, u) = 2t_1 + r, d(w, v) = 2t_2 + r$, где $r \in \{0, 1\}$, тогда длина цикла

$$2t_1 + r + 2t_2 + r + 1 = 2(t_1 + t_2 + r) + 1 \equiv 1 \mod 2$$

то есть цикл имеет нечетную длину — противоречие (мы считаем, что таких циклов нет)

QED

Полный двудольный граф — двудольный граф с максимальным количеством ребер

Паросочетания

Паросочетание — $M \subseteq E$, множество попарно не пересекающихся ребер.

- **Максимальное** — добавлять не получается
- **Наибольшее** — наибольшая мощность множеств
- **Совершенное** — покрывает все ребра

Множество соседей — для графа $G(X \sqcup Y, E)$ и $S \subseteq X$ определим

$$N(S) = \{y \in Y \mid \exists x \in S : \{x, y\} \in E\}$$

Теорема Холла

В двудольном графе существует совершенное паросочетание M, покрывающее всё X тогда и только тогда, когда

$$(\forall S \subseteq X)(|N(S)| \geq |S|) - \textit{выполнено услове Холла}$$

Доказательство

- ($\Leftarrow$) Каждая вершина в S поставлена в соответствие единственной вершине из паросочетания M, положим

  $$M(S) = \{v : u \in M \text{ и } \{u, v\} \in M\}$$

  то есть, $|M(S)| = |S|$ (исходя из прошлого факта), так же очевидно, что $M(S) \subseteq N(S) \Longrightarrow |N(S)| \geq |M(S)| = |S|$
- ($\Rightarrow$) Докажем по индукции ($n = |X|$):
  - База: $n = 1 \Longleftrightarrow X = \{x\}$, условие Холла говорит, что $N(S) \geq 1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \exists y \in Y : \{x, y\} \in E(G)$, скажем, что $M = \{\{x, y\}\}$
  - Шаг поделим на 2 случая (пусть $\forall G$ и $|X| < n$ все верно):
    1. $(\forall S \subset X)(|N(S)| \geq |S| + 1)$
    2. $(\exists S_0 \subset X)(|N(S_0)| = |S_0|)$
  - Случай 1. Рассмотрим произвольное ребро $\{x, y\} \in E(G)$ и рассмотрим граф $G' = G - \{x, y\}$ и $X' = X \setminus \{x\}$. Проверим условие Холла для G' для $S' \subseteq X'$:
    - В G было верно, что $|N_G(S')| \geq |S'| + 1$ ($S' \subset X$)

- Удаление y из Y уменьшает $N_G(S)$ не больше чем на 1
- Из предыдущих рассуждений получаем

$$|N_{G'}(S')| \geq |N_G(S')| - 1 \geq |S'| + 1 - 1 = |S'|$$

То есть для G' верно, что существует паросочетание M', покрывающее всё X'. Но тогда $M' = M \cup \{x, y\}$ покрывает X — шаг индукции доказан

- Случай 2. Подграф $G[S_0 \sqcup N(S_0)]$ удовлетворяет критерию Холла (мощность меньше n), а значит $\exists M_1 : M_1$ покрывает S_0. Положим $G' := G - S_0 - N(S_0)$, $X' = X \setminus S_0$. Проверим критерий Холла для G' и X'. Пусть $A \subseteq X \implies A \cap S_0 = \varnothing$.
  - В G (по критерию Холла) $N_G(A \sqcup S_0) \geq |A \sqcup S_0| = |A| + |S_0|$
  - Но $N_G(A \sqcup S_0) = N_G(A) \sqcup N_G(S_0) = N_G(A) \sqcup N(S_0)$
  - Откуда $|N_G(A)| + \underbrace{|N(S_0)|}_{|S_0|} \geq |A| + |S_0| \implies |N_G(A)| \geq |A|$
  - Из определений следует, что $|N_{G'}(A)| = |N_G(A)| \geq |A|$

  По индукции $\exists M_2 : M_2$ покрывает X'. Откуда $M = M_1 \cup M_2$ покрывает $S_0 \cup X' = X$

QED

Вершинное покрытие $- R \subseteq V(G)$, такое что каждое ребро инцидентно хотя бы одной вершине из R

Реберное покрытие $- F \subseteq E(G)$, такое что каждая вершина инцидентна хотя бы одному ребру из F