Конспект 02 — Предел последовательности

1. Определение последовательности
2. Базовые свойства:
    1. Финально постоянная сходится
    2. Любая окрестность предела последовательности содержит все её члены за исключением конечного их числа
    3. Предел единственен
    4. Сходящаяся посл-ть ограничена
3. Предельный переход в арифметических операциях
4. Предельных переход в неравенствах
    1. Предельный переход в неравенствах
    2. Теорема о двух милиционерах
5. Бесконечно большие и бесконечно малые
6. Существование предела последовательности
    1. Критерий Коши
    2. Теорема Вейерштрасса
7. Подпоследовательности
    1. Теорема Больцано-Вейерштрасса
8. Частичный, нижний и верхний предел последовательности
    1. Определения
    2. Теоремы

Общие представления о последовательностях

Info

Числовой последовательностью называется функция $f : \mathbb{N} \to X$, областью определения которой является множество целых чисел.

Значения $f(n)$ называются *членами последовательности* и обозначаются x_n. Сама последовательность в связи с этим обозначается $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ или $\{x_n\}$.

Далее везде будут рассматриваться вещественнозначные числовые последовательности $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Info

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом** $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \implies x_n \in V(A)$$

В этом случае говорят, что последовательность *сходится* к A, а саму её называют *сходящейся*. В противном случае последовательность называют *расходящейся*.

Классификация последовательностей

Финально постоянные

Последовательность называется *финально постоянной*, если

$$\exists A, N : \forall n > N : x_n = A$$

Ограниченные

Последовательность называется *ограниченной*, если

$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| < M$$

Бесконечно малые

Последовательность называется *бесконечно малой*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : n > N \implies |x_n| < \varepsilon$$

Иными словами, предел бесконечно малой последовательности равен 0.

Бесконечно большие

Последовательность называется *бесконечно большой*, если

$$\forall M > 0 \, \exists N : n > N \implies |x_n| > M$$

Если при этом верно, что:

- $x_n > M$, то говорят, что предел последовательности равен $+\infty$;
- $x_n < -M$, то говорят, что предел последовательности равен $-\infty$;
- в иных случаях говорят, что предел последовательности равен ∞.

Фундаментальные

Последовательность называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) : n, m > N(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Основные теоремы о пределе последовательности

Базовые свойства предела последовательности

Лемма 1

Финально постоянная последовательность сходится.

Доказательство

Рассмотрим финально постоянную последовательность $\{x_n\}$.
По определению финально постоянной,

$$\exists N_0, M : \forall n > N_0 : x_n = M$$

Зафиксируем N_0 и M. Покажем, что M является пределом $\{x_n\}$.
Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ верно, что

$$\forall n > N_0 : |M - x_n| = 0 < \varepsilon,$$

то есть определение предела выполняется, что и требовалось доказать.

Теорема 1

Предел последовательности единственен.

Доказательство

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$. Допустим, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = B \qquad A \neq B$$

Поскольку $A \neq B$, то существуют некоторые непересекающиеся окрестности этих чисел $V(A)$ и $V(B)$.

По определению,

$$\exists N_1 : n > N_1 \implies x_n \in V(A)$$

$$\exists N_2 : n > N_2 \implies x_n \in V(B)$$

Рассмотрим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Для этого номера верно, что

$$n > N \implies x_n \in V(A) \wedge x_n \in V(B),$$

что противоречит тому, что были выбраны непересекающиеся окрестности. Таким образом, у последовательности не может быть более одного предела, что и требовалось доказать.

Лемма 2

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся в точке A.
Пусть задан $\varepsilon = 1$. По определению,

$$\exists N : n > N \implies x_n \in V(A) \iff |A - x_n| < 1 \implies |x_n| < |A| + 1,$$

то есть все члены последовательности, кроме конечного их числа, ограничены числом $|A| + 1$. Взяв $M > \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |A| + 1\}$, получим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| < M,$$

то есть последовательность ограничена числом M, что и требовалось доказать.

Предельный переход в арифметических операциях

Теорема 2.1

Если заданы две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, где A и B существуют и конечны, то предел последовательности $\{x_n + y_n\}$ существует и равен $A + B$.

Доказательство

Здесь и далее положим $\Delta(x_n) = |A - x_n|, \Delta(y_n) = |B - y_n|$.

Пусть задан произвольный $\varepsilon > 0$.
По определению,

$$\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \implies \Delta(x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2 \implies \Delta(y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Для этого номера верно, что

$$n > N(\varepsilon) \implies \Delta(x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \land \Delta(y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Заметим, что при $n > N$

$$|(A+B) - (x_n + y_n)| = |(A - x_n) + (B - y_n)| \leq \Delta(x_n) + \Delta(y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то есть определение предела выполняется, что и требовалось доказать.

Теорема 2.2

Если заданы две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, где A и B существуют и конечны, то предел последовательности $\{x_n \times y_n\}$ существует и равен $A \times B$.

Доказательство

Пусть задан произвольный $\varepsilon > 0$.
По определению,

$$\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \implies \Delta(x_n) < \min\Big\{1,\ \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}\Big\}$$

$$\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \implies \Delta(y_n) < \min\Big\{1,\ \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}\Big\}$$

Рассмотрим $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Для этого номера верно, что

$$n > N(\varepsilon) \implies \Delta(x_n) < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}\} \land \Delta(y_n) < \min\{\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}\}$$

$$|x_n| \leq |A| + \Delta(x_n) \leq |A| + 1$$

Заметим, что

$$|x_n \times y_n - A \times B| = |x_n \times y_n - x_n \times B + x_n \times B - A \times B| = |x_n(y_n - B) + B(x_n - A)| \leq$$

$$\leq |x_n||y_n - B| + |B||x_n - A|$$

При $n > N(\varepsilon)$ это равенство принимает вид:

$$|x_n + y_n - A \times B| \leq (|A|+1) \times \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} + |B| \times \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} < \varepsilon,$$

то есть определение предела выполняется, что и требовалось доказать.

Теорема 2.3

Если заданы две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, где A и B существуют и конечны, при этом $B \neq 0$ и $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0$ то предел последовательности $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ существует и равен $\frac{A}{B}$.

Доказательство

Поскольку ранее был доказан пункт (2) теоремы, теперь достаточно продемонстрировать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{B}$$

Будем также полагать, что $B > 0$, поскольку в противном случае искомый предел, как видно из пункта (2) теоремы, можно вычислить как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n \times \frac{1}{-y_n} \times -1\right),$$

в результате чего B станет положительным.

Итак, рассмотрим произвольный $\varepsilon > 0$.
По определению,

$$\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \implies |B - y_n| < \frac{B^2 \varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \implies |B - y_n| < \frac{B}{2} \iff \frac{B}{2} < y_n < \frac{3B}{2}$$

Рассмотрим $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Для этого номера верно, что

$$n > N(\varepsilon) \implies |B - y_n| < \frac{B^2 \varepsilon}{2} \land y_n > \frac{B}{2}$$

Заметим, что

$$\left|\frac{1}{B} - \frac{1}{y_n}\right| = \left|\frac{y_n - B}{By_n}\right| = \frac{|y_n - B|}{By_n} < \frac{\frac{B^2\varepsilon}{2}}{\frac{B^2}{2}} = \varepsilon,$$

то есть определение предела выполняется, что и требовалось доказать.

Предельный переход в неравенствах

Теорема 3

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} = B$. Тогда:

1. если $A < B$, то существует номер N такой, что для любого $n > N$ верно $x_n < y_n$;
2. если существует номер N такой, что для любого $n > N$ верно $x_n < y_n$, то $A \leq B$.

Доказательство

Пункт (1). Пусть $A < B$. Возьмём C такое, что $A < C < B$. По определению,

$$\exists N_1 : n > N_1 \implies |A - x_n| < C - A \iff 2A - C < x_n < C$$

$$\exists N_2 : n > N_2 \implies |B - y_n| < B - C \iff C < y_n < 2B - C$$

Рассмотрим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Для этого номера верно, что

$$n > N \implies x_n < C < y_n,$$

что и требовалось доказать.

Пункт (2). Пусть существует номер N_0 такой, что $n > N \implies x_n < y_n$. Предположим, что при этом $A > B$. По доказанному в пункте (1), существует N_1 такое, что $n > N_1 \implies x_n > y_n$. Рассмотрим $N = \max\{N_1, N_2\}$ и незамедлительно придём к противоречию. Это значит, что $A \leq B$, что и требовалось доказать.

Теорема о двух милиционерах

Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ — последовательности такие, что при любом $n > N \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $x_n < y_n < z_n$. Если при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, то предел $\{z_n\}$ существует и равен A.

Доказательство

Пусть задан произвольный $\varepsilon > 0$.
По определению,

$$\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \implies x_n \in V_\varepsilon(A) \iff A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$$

$$\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \implies y_n \in V_\varepsilon(A) \iff A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon$$

Рассмотрим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Для этого номера верно, что

$$A - \varepsilon < x_n < z_n < y_n < A + \varepsilon,$$

т.е. при $n > N$ z_n лежит в ε-окрестности A, что и требовалось доказать.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших

Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$

Доказательство

Часть (а). Зафиксируем произвольное M и рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{M}$. По определению,

$$\exists N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \implies x_n < \frac{1}{M},$$

откуда немедленно следует, что

$$\frac{1}{x_n} > M,$$

что и требовалось доказать.

Часть (b). Зафиксируем произвольное ε и рассмотрим $M = \frac{1}{\varepsilon}$. По определению,

$$\exists N(M) : n > N(M) \implies x_n > \frac{1}{\varepsilon,}$$

откуда немедленно следует, что

$$\frac{1}{x_n} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3

Сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательностей.

Доказательство

Рассмотрим произвольные бесконечно малые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Пусть задан произвольный $\varepsilon > 0$. По определению,

$$\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \implies |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \implies |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Для этого номера верно, что

$$n > N(\varepsilon) \implies |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Заметим, что тогда

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. определение бесконечно малой последовательности выполняется, что и требовалось доказать.

Лемма 4

Произведение бесконечно малой последовательности на финально ограниченную последовательность если бесконечно малая последовательность.

Доказательство

Рассмотрим произвольную бесконечно малую последовательность $\{x_n\}$ и финально ограниченную последовательность $\{y_n\}$.
Пусть задан произвольный $\varepsilon > 0$. По определению,

$$\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \implies |y_n| < M$$

$$\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \implies |y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Рассмотрим $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Для этого номера верно, что

$$n > N(\varepsilon) \implies |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \wedge |y_n| < M$$

Заметим, что тогда

$$|x_n \times y_n| = |x_n| \times |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon,$$

т.е. определение бесконечно малой последовательности выполняется, что и требовалось доказать.

Замечание. Деление на M является корректной операций, поскольку из неравенства $|y_n| < M$ следует $M \neq 0$.

Следствие. Поскольку по лемме (2) сходящаяся последовательность финально ограничена, то произведение бесконечно малых последовательностей также бесконечно мало.

Лемма 5

Если две бесконечно большие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют один знак, то их сумма является бесконечно большой последовательностью того же знака.

Доказательство

Положим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Доказательство обратного случая проводится по аналогии.

Пусть задан $M > 0$. По определению,

$$\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \implies x_n > \frac{M}{2}$$

$$\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \implies y_n > \frac{M}{2}$$

Рассмотрим $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Для этого номера верно, что

$$n > N(\varepsilon) \implies x_n > \frac{M}{2} \wedge y_n > \frac{M}{2}$$

Заметим, что тогда

$$|x_n + y_n| = x_n + y_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} > M,$$

т.е. определение бесконечно большой последовательности выполняется, что и требовалось доказать.

Лемма 6

Если две бесконечно большие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют один знак, то их произведение является бесконечно большой последовательностью того же знака.

Доказательство

Положим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Доказательство обратного случая проводится по аналогии.

Пусть задано $M > 0$. По определению,

$$\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \implies x_n > M$$

$$\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \implies y_n > 1$$

Рассмотрим $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Для этого номера верно, что

$$n > N(\varepsilon) \implies x_n > M \wedge y_n > 1$$

Заметим, что тогда

$$|x_n \times y_n| = x_n \times y_n > M \times 1 = M,$$

т.е. определение бесконечно большой последовательности выполняется, что и требовалось доказать.

Существование предела последовательности

Критерий Коши

Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$.

Необходимость. Допустим, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.
Пусть задан произвольный $\varepsilon > 0$. По определению,

$$\exists N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \implies |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда для любых $n, m > N$ верно, что

$$|x_n - x_m| = |x_n - A + A - x_m| \le |x_n - A| + |x_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то есть сходящаяся последовательность фундаментальна.

Достаточность. Допустим, $\{x_n\}$ фундаментальна.
Пусть задан произвольный $\varepsilon > 0$. По определению,

$$\exists N(\varepsilon) : m, k \ge N \implies |x_m - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Фиксировав $m = N$, получим, что при любом $k > N$

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_k < x_N + \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

Поскольку существует лишь конечное число членов последовательности с номерами, не превосходящими N, то фундаментальная последовательность ограничена.

Теперь для любого $n \in \mathbb{N}$ мы можем положить $a_n = \inf\limits_{k \ge n} x_k, b_n = \sup\limits_{k \ge n} x_k$.

Из определений видно, что $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ (поскольку при переходе к меньшему множеству нижняя грань не уменьшается, а верхняя не увеличивается), то есть значения a_n и b_n образуют последовательность вложенных отрезков. По одноименной

лемме, у них есть по меньшей мере одна общая точка A.
По определению, при любом натуральном n верно, что

$$a_n \leq A \leq b_n,$$

а при $k \geq n$ верно, что

$$a_n \leq x_k \leq b_n,$$

то есть

$$|A - x_k| \leq b_n - a_n \tag{2}$$

Из неравенства (1) получаем, что при $n > N$

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leq a_n \leq x_k \leq b_n \leq x_N + \frac{\varepsilon}{3},$$

поскольку если бы выполнялось, например, $a_n < x_N - \frac{\varepsilon}{3}$, то мы могли бы уточнить нижнюю границу, что привело бы к противоречию. Аналогичные рассуждения применимы и к правой части неравенства.

Несложными преобразованиями получаем, что

$$-a_n \leq \frac{\varepsilon}{3} - x_N$$

$$b_n \leq x_n + \frac{\varepsilon}{3},$$

то есть

$$b_n - a_n \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \tag{3}$$

Сравнивая результаты (2) и (3), получим, что

$$|A - x_k| \leq b_n - a_n < \varepsilon,$$

то есть для некоторого N верно, что любой x, больший N, лежит в ε-окрестности A. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный A, что и требовалось доказать.

Теорема Вейерштрасса

Монотонная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена.

Доказательство

Необходимость. То, что любая сходящаяся последовательность ограничена, было доказано в лемме (2).

Достаточность. Рассмотрим произвольную ограниченную сверху монотонную последовательность $\{x_n\}$ и положим, что она неубывает. Доказательство остальных случаев проводится по аналогии.

Поскольку множество значений $\{x_n\}$ ограничено, оно имеет верхнюю грань $s = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$. По определению,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : |s - x_N| < \varepsilon$$

Поскольку при этом последовательность неубывает, то это утверждение можно усилить:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : n > N \implies |s - x_n| < \varepsilon,$$

то есть для s выполняется определение предела последовательности $\{x_n\}$, что и требовалось доказать.

Подпоследовательности

Общие представления

Info

Если задана последовательность $\{x_n\}$ и некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, то последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Всякая ограниченная последовательность содержит в себе сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство

Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность $\{x_n\}$ и множество её значений E.

Если E конечно, то существует по меньшей мере одна точка $x_0 \in E$ и последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ номеров такая, что $x_0 = x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots$.

Последовательность $\{x_{n_k}\}$ постоянно и, очевидно, сходится в точке x_0.

Если E бесконечно, то по соответствующей лемме оно имеет по меньшей мере одну предельную точку x_0.
По определению,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_N : |x_N - x_0| < \varepsilon$$

Пусть n_k выбрано так, что $|x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k}$. Заметим, что если исключить из последовательности конечное число её членов, то x_0 не перестанет быть предельной точкой. Это означает, что найдётся

$$n_{k+1} > n_k : |x_{n_{k+1}} - x_0| < \frac{1}{k+1}$$

Поскольку последовательность $\{n_k\}$ строго возрастает, а $\{\frac{1}{k}\} \to 0$, то последовательность $\{x_{n_k}\}$ стремится к x_0, что и требовалось доказать.

Частичный предел

Inf

Число $A \in \overline{R}$, равное $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k$, называется **нижним пределом** $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} k_n$ последовательности $\{x_n\}$.

Inf

Число $A \in \overline{R}$, равное $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$, называется **верхним пределом** $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} k_n$ последовательности $\{x_n\}$.

Info

Число $A \in \overline{R}$ называется **частичным пределом** последовательности $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$.

Лемма 7

Нижний и верхний пределы являются соответственно наименьшим и наибольшим из её частичных пределов.

Доказательство

> #TODO

> **Теорема 4**
>
> Последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходится любая её подпоследовательность.
>
> **Доказательство**
>
> #TODO