

# Конспект 05 — Функции нескольких переменных

## Содержание

1. Метрическое пространство
  1. Связанные определения
  2. Классификация множеств в  $\mathbb{R}^n$
2. Функции нескольких переменных
  1. Определение
  2. Поверхности второго порядка
  3. Приращение ФНП
  4. Множества уровня
3. Предел ФНП
  1. Определение
  2. Свойства
4. Непрерывность ФНП
5. Дифференцирование ФНП
  1. Частные производные
  2. Полный дифференциал ФНП
  3. Дифференцирование сложной функции
6. Экстремумы ФНП
  1. Локальный экстремум
  2. Условный экстремум
7. Производная по направлению

---

## Метрическое пространство

### Связанные определения

#### Определение

**Расстояние**  $d(x, y)$  между двумя точками  $x$  и  $y$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  определяется следующим образом:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Введение метрики расстояния делает  $\mathbb{R}^n$  *метрическим пространством*.

### Определение

При  $\delta > 0$  множество

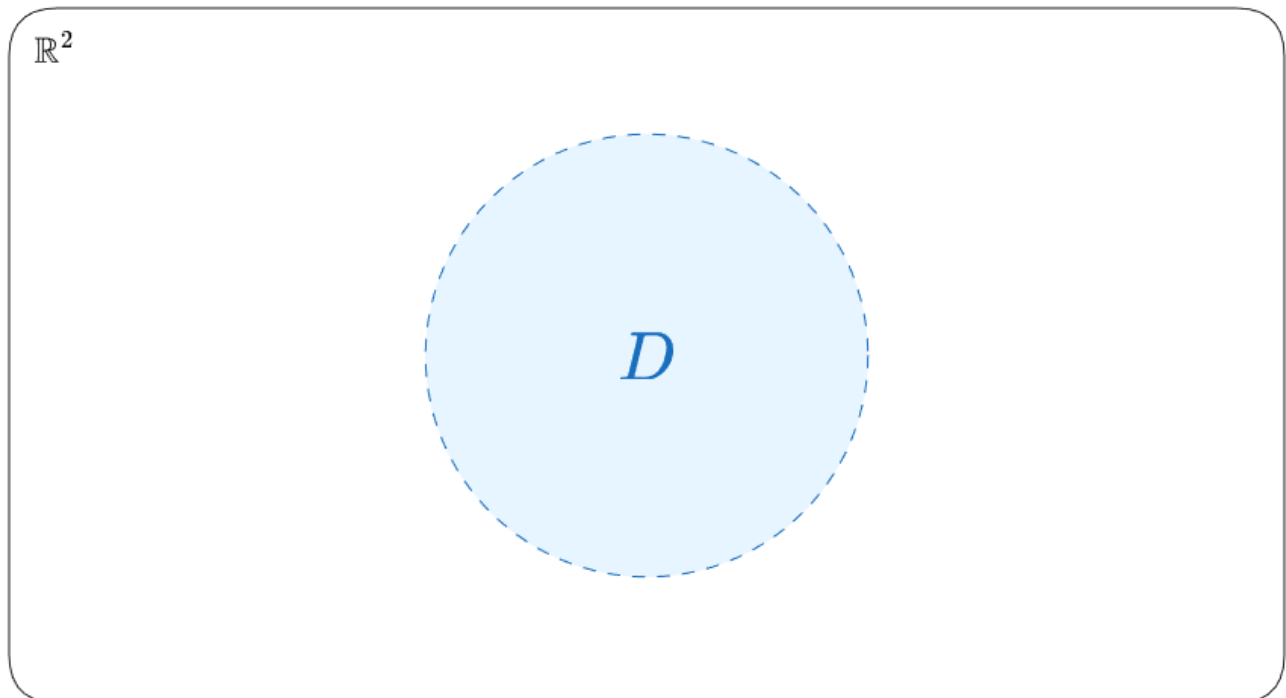
$$B(a; \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < \delta\}$$

называется **шаром** диаметра  $\delta$  с центром в точке  $a$  или также  *$\delta$ -окрестностью* точки  $a$ .

## Классификация множеств в $\mathbb{R}^n$

### 1. Открытые множества

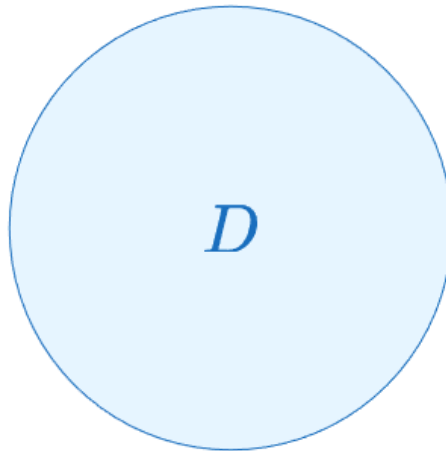
Множество  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  называется *открытым*, если для любой точки  $x \in D$  найдется шар  $B(x; \delta)$  такой, что  $B(x; \delta) \subset D$ :



Шар является открытым множеством.

### 2. Замкнутые множества

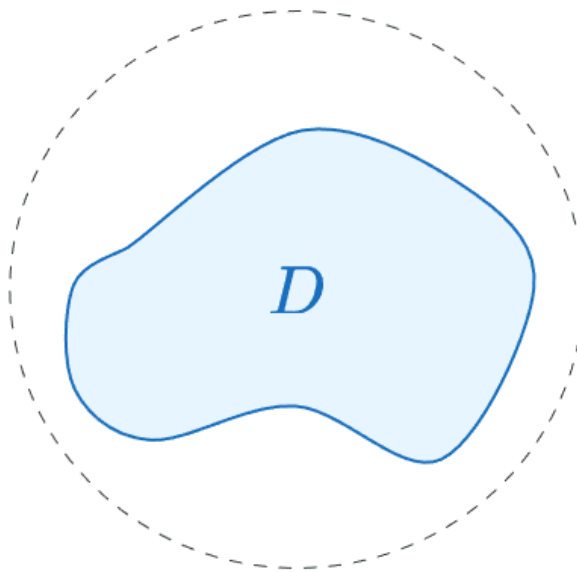
Множество  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  называется *замкнутым*, если его дополнение — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ :

$\mathbb{R}^2$ 

Множество точек, удалённых от точки  $a$  **не более**, чем на  $\delta$ , является замкнутым множеством.

### 3. Ограниченные и неограниченные множества

Множество  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  называется *ограниченным*, если существует такая точка  $x_0$  и радиус  $\delta$ , что  $\forall x \in D : d(x, x_0) < \delta$ . Иначе говоря, множество ограничено, если расстояние между любыми двумя его точками представляет собой конечную величину:

 $\mathbb{R}^2$ 

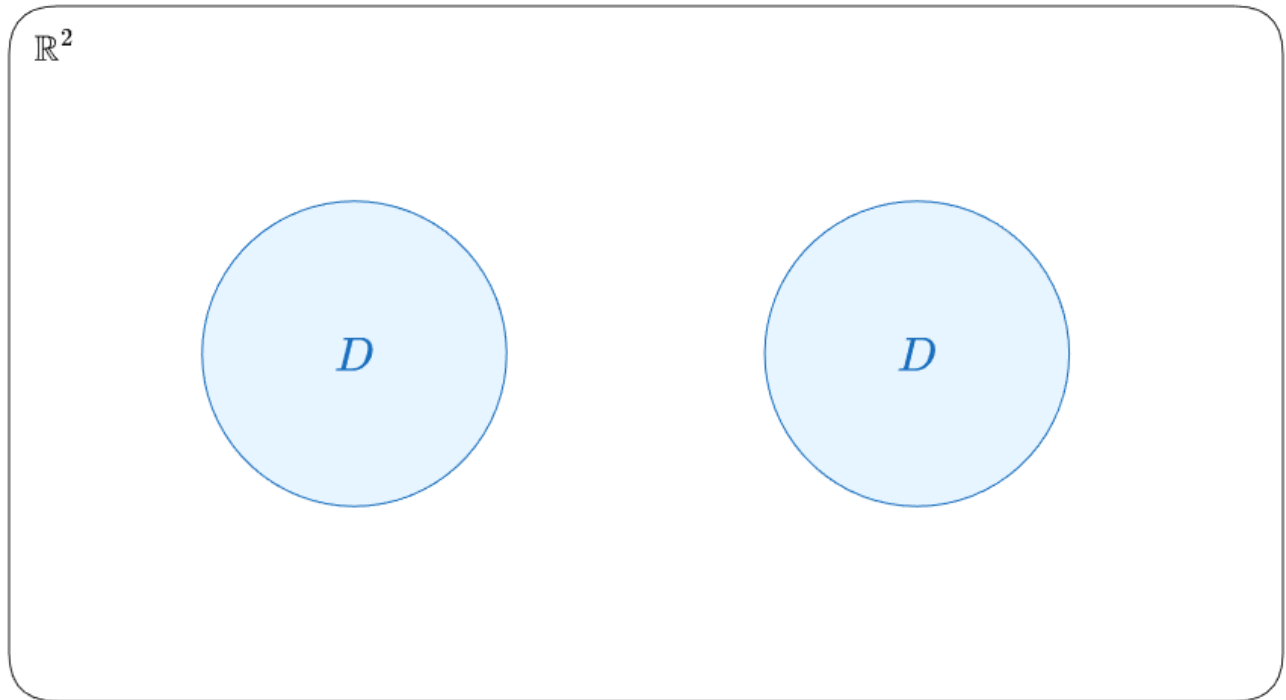
Множество  $D$  ограничено.

Само множество  $\mathbb{R}^2$ , в свою очередь, не ограничено.

Множество, не являющееся ограниченным, называется **неограниченным**.

#### 4. Связные и несвязные множества

Множество  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  называется **несвязным**, если его можно представить объединением нескольких непустых непересекающихся множеств:



Множество  $D$  несвязно.

Множество, не являющееся несвязным, называется **связным**.

##### Определение

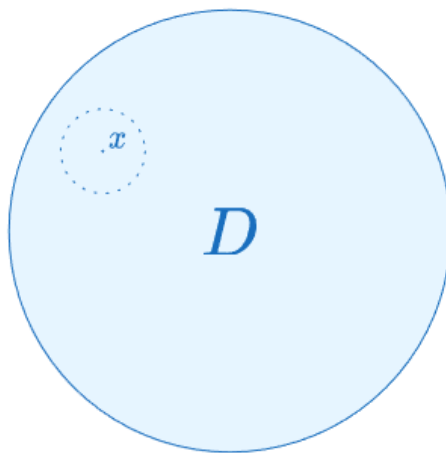
Открытое множество, содержащее точку  $a$ , называется её **окрестностью**.

Из этого определения сразу можно отметить, что  $\delta$ -окрестность, очевидно, является окрестностью.

По критерию принадлежности множеств выделяются следующие три категории точек:

##### 1. Внутренние точки

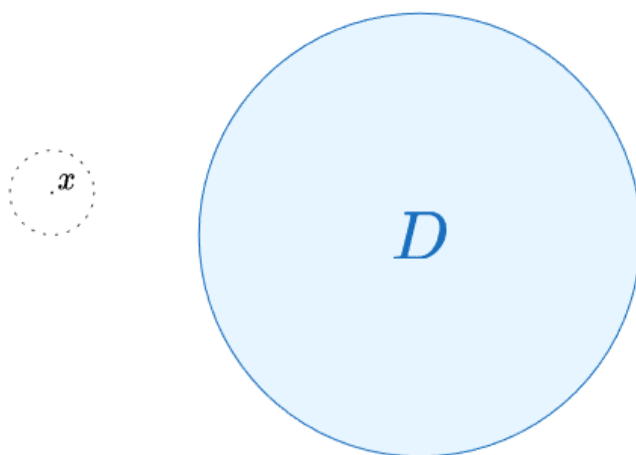
Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  называется *внутренней точкой* множества  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , если она содержится в  $D$  вместе с некоторой своей окрестностью:

$\mathbb{R}^2$ 

$x$  — внутренняя точка множества  $D$ .

## 2. Внешние точки

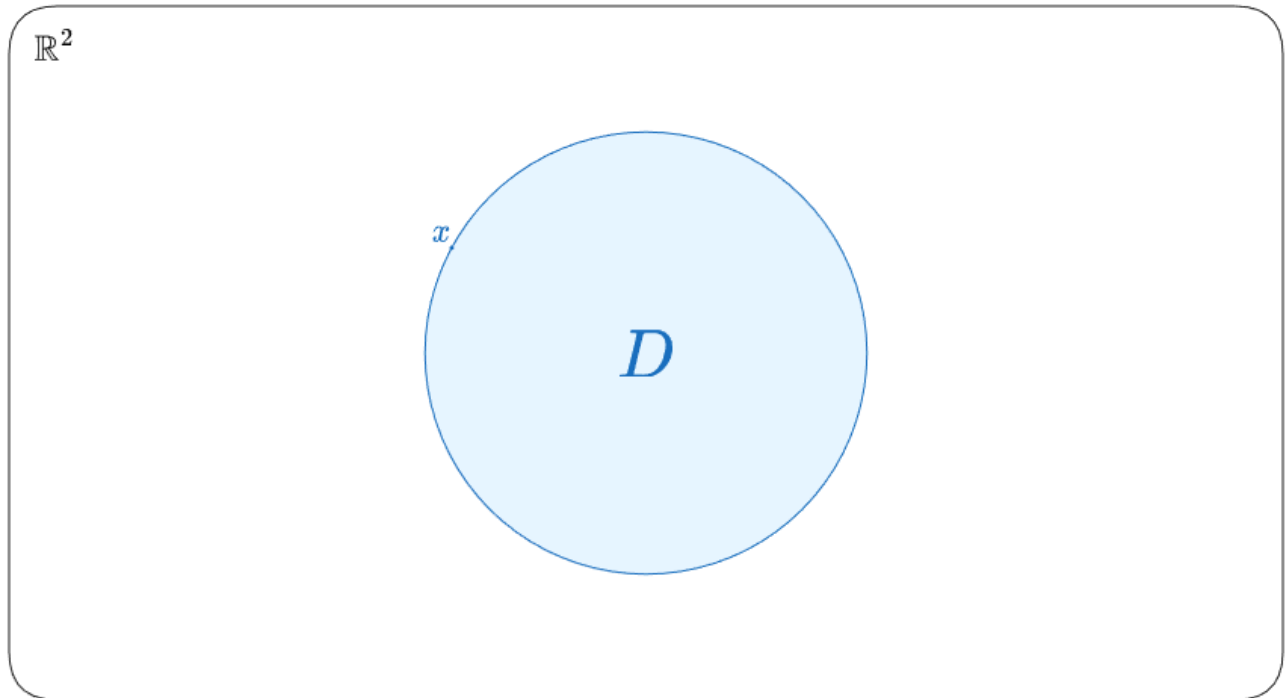
Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  называется *внешней точкой* множества  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , если является внутренней точкой дополнения  $\overline{D}$  множества  $D$ :

 $\mathbb{R}^2$ 

$x$  — внешняя точка множества  $D$ .

## 3. Граничные точки

Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  называется *граничной точкой* множества  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , если она не является ни внутренней, ни внешней его точкой:



$x$  — граничная точка множества  $D$ .

*Примечание.* Замкнутое множество также определяется как множество, содержащее все свои граничные точки, а объединение множества со всеми его предельными точками называют *замыканием*.

## Функции нескольких переменных

### Определение

#### Определение

**Функцией нескольких переменных** (далее — *ФНП*) называется отображение вида

$$f : E \rightarrow \mathbb{R},$$

где  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Функция нескольких переменных, ставящая в соответствие набору координат число, т.е. скаляр, называется *скалярным полем*.

## Поверхности второго порядка

### ❗ Определение

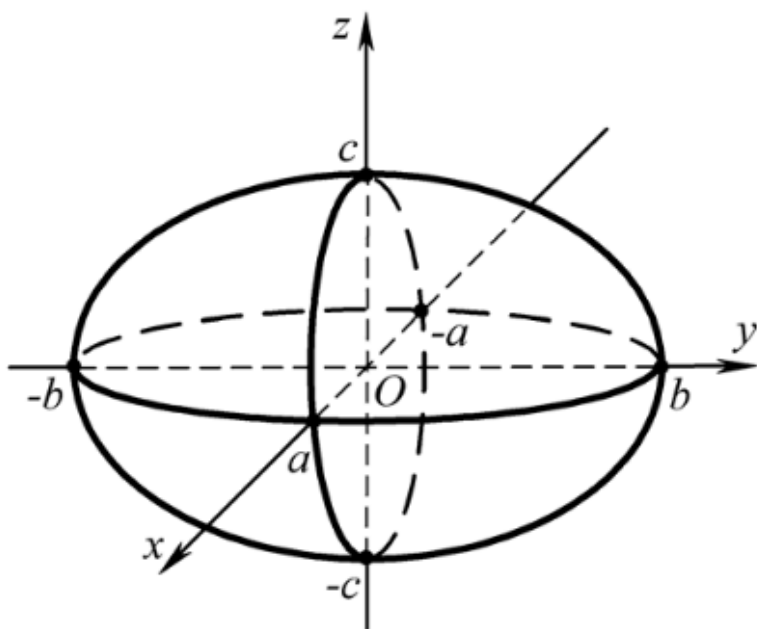
График функции нескольких переменных представляет собой **поверхность** — множество точек пространства.

Среди поверхностей выделяется особая категория — *поверхности второго порядка*, которые в общем случае задаются уравнением

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Lx + Jy + Kz + H = 0$$

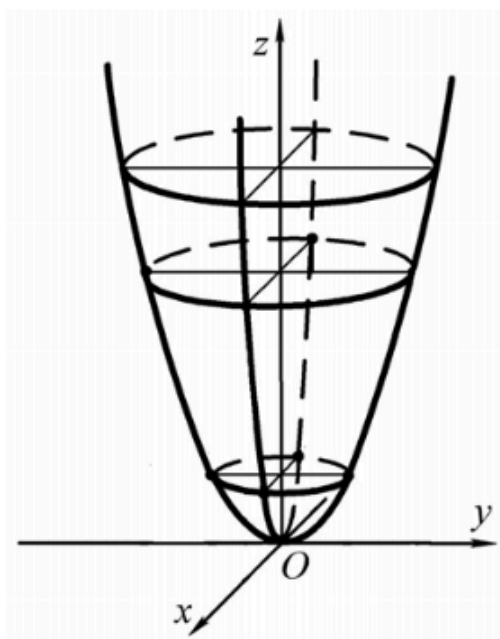
Среди них выделяют, в частности:

#### 1. Эллипсоид



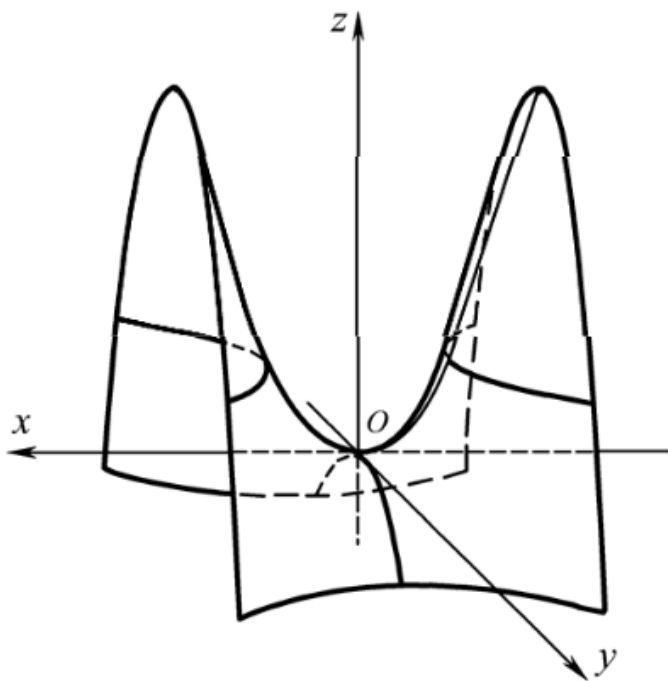
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

#### 2. Эллиптический параболоид



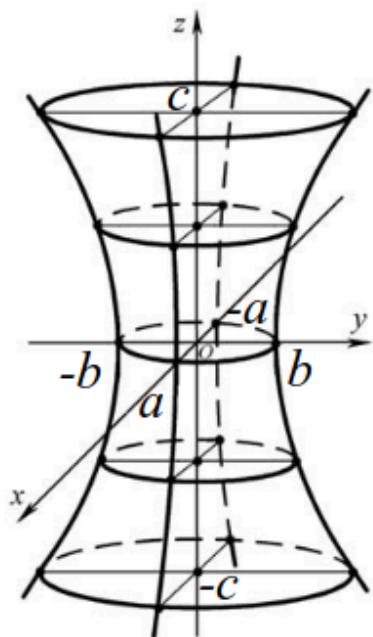
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0).$$

### 3. Гиперболический параболоид



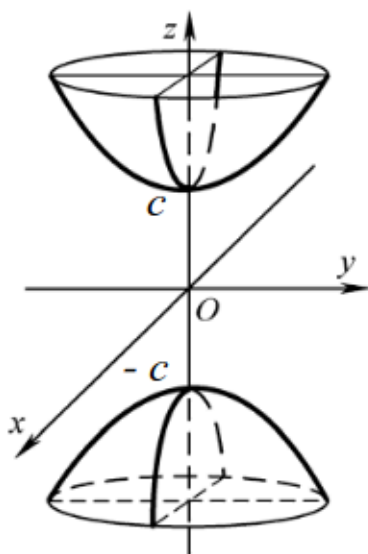
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0).$$

### 4. Однополостный гиперболоид



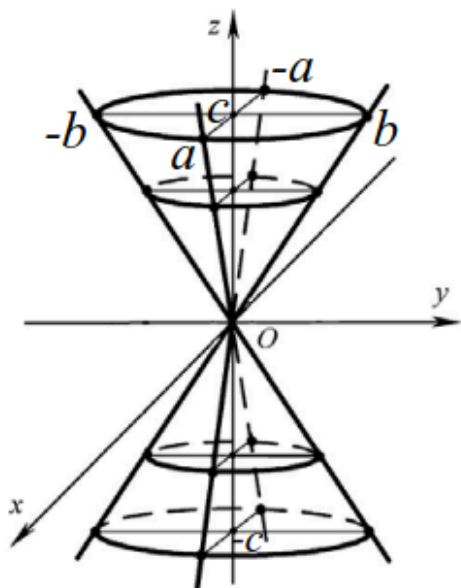
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

#### 5. Двуполостный гиперболоид



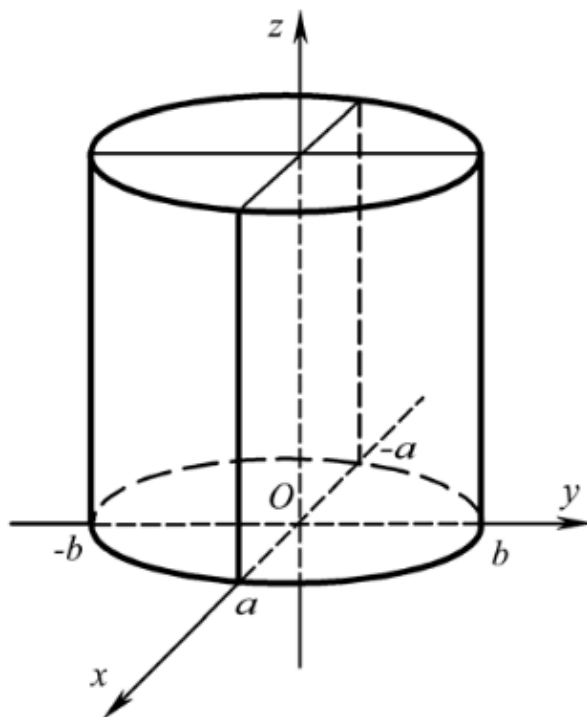
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

#### 6. Конус



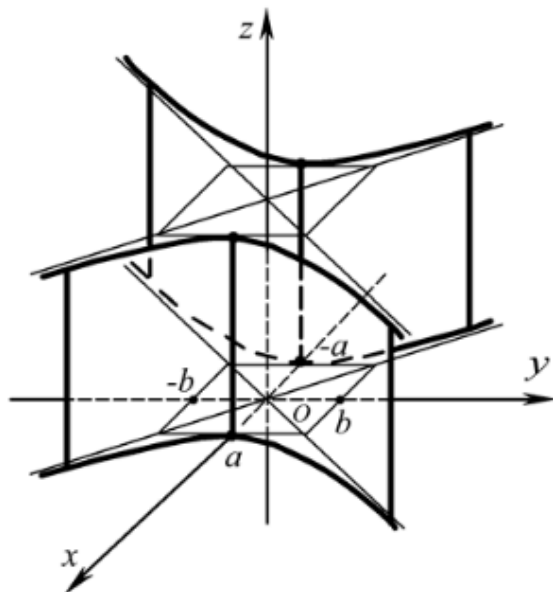
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

#### 7. Эллиптический цилиндр



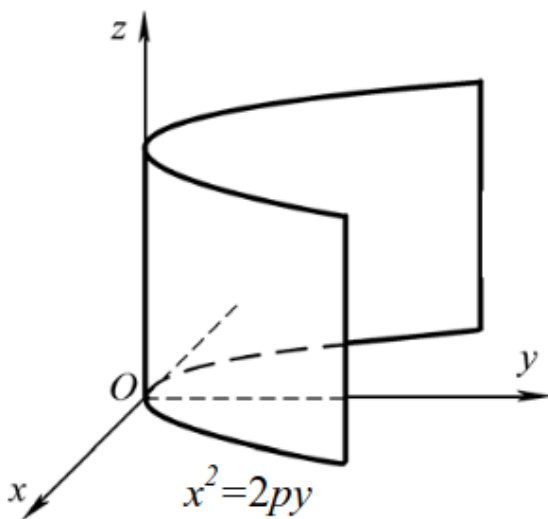
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

#### 8. Гиперболический цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

### 9. Параболический цилиндр



$$x^2 = \pm 2py.$$

## Приращение ФНП

### 📘 Определение

**Полное приращение**  $\Delta z$  функции нескольких переменных  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  характеризует меру изменения её значения в зависимости от изменения аргументов и определяется как

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1 + \dots + x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

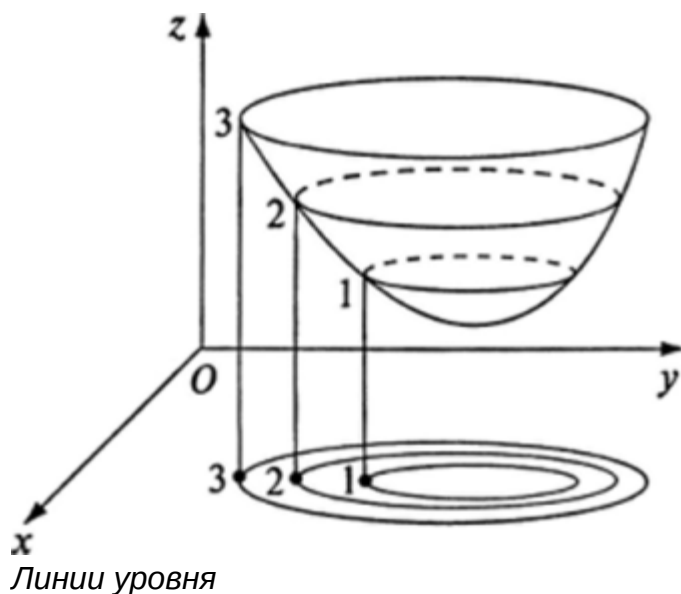
Приращение, учитывающее изменение только одного аргумента, называется **частным**:

$$\Delta z_{x_i} = f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

## Множества уровня

### Определение

Решения уравнения  $f(x_1, \dots, x_n) = c$  называются **множествами уровня**. В случае двух переменных они называются **линиями уровня**, в случае трех — **поверхностями уровня**.



## Предел ФНП

### Определение

#### Определение

Точка  $a \in \mathbb{R}^n$  называется **предельной** для множества  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , если для любой её окрестности  $O(a)$  пересечение  $E \cap O(a)$  есть бесконечное множество.

#### Определение

Число  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  называется **пределом** функции нескольких переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$  в предельной точке  $M_0(x_1, \dots, x_n)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall M(x_1, \dots, x_n) : d(M, M_0) < \delta \implies |f(M) - A| < \varepsilon$$

Свойства пределов ФНП не будут подробно рассмотрены (это можно пометить #TODO, но вряд ли это клеймо когда-либо отсюда пропадет). Стоит отметить, что для них верна, например, та же арифметика пределов, что и для функций одной переменной — это легко доказать. Некоторые другие (но далеко не все!) рассмотренные ранее свойства пределов также остаются валидными в случае нескольких переменных.

Тогда как предел функции одной переменной подразумевает стремление к предельной точке только с двух сторон (вспоминаем левосторонний и правосторонний пределы), в случае нескольких переменных количество путей, по которым функция может стремиться к точке, бесконечно. Существование предела ФНП подразумевает, что по любому из этих направлений функция стремится к одному и тому же значению. Это позволяет, например, легко доказывать, что предела нет: достаточно найти хотя бы один контрпример, который подойдёт к любой окрестности предельной точки.

## Повторные пределы

### Важно!

Предел функции нескольких переменных ни в коем случае не следует путать с *повторным пределом*:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

Из существования двойного предела не следует существование повторных, и наоборот — даже если повторные существуют и совпадают, двойного может не существовать.

Примером первого случая является функция

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

для которой справедливо равенство  $f(x, y) \leq |x|$ , откуда в силу теоремы о двух милиционерах  $f(x, y) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Тем не менее, предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y},$$

как известно, не определён.

Примером второго случая является функция

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

оба повторных предела которой в точке  $(0, 0)$  определены и равны 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

В это же время, её двойного предела не существует: при  $y = x$  имеем  $\frac{2x^2}{2x^2} \rightarrow 1$ ; при  $y = x^2$  имеем  $\frac{2x^3}{x^2 + x^4} \rightarrow 0$ .

## Непрерывность ФНП

### Определение 1

Функция нескольких переменных  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , называется **непрерывной** в точке  $M_0$ , если

$$\forall V(f(M_0)) \exists U_E(M_0) : f(U_E(M_0)) \subseteq V(f(M_0))$$

Иными словами, ФНП непрерывна, если для любой окрестности  $V(f(M_0))$  значения этой функции в точке  $M_0$  найдётся такая окрестность  $U_E(M_0)$  этой точки в множестве  $E$ , образ которой  $f(U_E(M_0))$  полностью содержится в  $V(f(M_0))$ .

Заметим, что это определение абсолютно идентично уже знакомому нам определению непрерывности функции единственной переменной, и заключим

### Определение 2

Функция нескольких переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$ , определённая в точке  $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$  и в некоторой её окрестности, называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_0^1 \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_0^n}} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_0^1, \dots, x_0^n)$$

### Определение

Функция непрерывна в ограниченной замкнутой области  $D$ , если она непрерывна во всех её внутренних и граничных точках, причем в граничных точках  $M_0$  она стремится к  $f(M_0)$  вдоль любого пути, принадлежащего  $D$ .

Значительный ряд доказанных ранее свойств непрерывных функций легко переносится на случай нескольких переменных — в частности,

- сумма, разность, произведение, частность и композиция непрерывных ФНП есть непрерывная ФНП;
- ФНП, непрерывная в ограниченной замкнутой области, ограничена в ней;
- ФНП, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в ней своего наибольшего и наименьшего значения (в этой области);

Отдельно следует доказать следующее утверждение:

### Теорема о промежуточном значении

Если функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в связной ограниченной замкнутой области  $E$  и принимает в точках  $a, b \in E$  значения  $A$  и  $B$  соответственно, для любого  $A < C < B$  то найдётся такая точка  $c \in E$ , что  $f(c) = C$ .

### Доказательство

Пусть  $\Gamma : I \rightarrow E$  — путь, являющийся таким непрерывным отображением отрезка  $[\alpha, \beta]$ , что  $\Gamma(\alpha) = a, \Gamma(\beta) = b$ . Такой путь существует в силу связности  $E$ . Функция  $f \circ \Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ , как композиция непрерывных функций, непрерывна, поэтому на отрезке  $[\alpha, \beta]$  найдётся такая точка  $\gamma$ , что  $f \circ \Gamma(\gamma) = C$ . Положив  $c = \Gamma(\gamma)$ , имеем  $c \in E$  и  $f(c) = C$ .

## Дифференцирование ФНП

### Частные производные

#### Определение

**Частной производной** функции  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  по переменной  $x_i$  называется предел вида

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z_{x_i}}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f(x_1, \dots, x_n)$$

Если функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  имеет частную производную по переменной  $x_i$ , то эта частная производная вновь является некоторой функцией от  $n$  переменных, которая, в свою очередь, может иметь частную производную по некоторой переменной  $x_j$ .

### 📘 Определение

**Частной производной  $k$ -го порядка** функции  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  по  $k$  (возможно, совпадающим) переменным  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  называется частная производная вида

$$\frac{\partial^k z}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$$

Частные производные высших порядков, раскладываемые хотя бы по двум различным переменным, называются *смешанными*:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \text{ — не смешанная} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \text{ — смешанная}$$

### Теорема Шварца

Для того, чтобы смешанные производные функции нескольких переменных  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  в точке  $M_0$ , отличающиеся только порядком дифференцирования, совпадали, достаточно, чтобы они были непрерывны.

### Доказательство

Докажем теорему для случая смешанных производных второго порядка.

Будем проводить все рассуждения в шаре  $B(M_0; r)$ , являющемся окрестностью точки  $M_0$ . Нам необходимо проверить, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(h_1, h_2) = f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y) - f(x, y + h_2) + f(x, y),$$

где смещение  $h$  полагается достаточно малым, а именно таким, что  $M_0 + h \in B(M_0; r)$ .  $F(h_1, h_2)$  можно рассмотреть как разность  $\varphi(1) - \varphi(0)$ , где

$$\varphi(t) = f(x + th_1, y + h_2) - f(x + th_1, y)$$

и, воспользовавшись теоремой Лагранжа, найти, что

$$F(h_1, h_2) = \varphi'(t_1) = \partial_x f(x + t_1 h_1, y + h_2) h_1 - \partial_x f(x + t_1 h_1, y) h_1$$

Аналогичным образом применяя теорему Лагранжа к получившейся разности, имеем

$$F(h_1, h_2) = \partial_{yx} f(x + \theta_1 h_1, y + \theta_2 h_2) h_2 h_1$$

Если же разложить  $F$  как разность  $\tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0)$ , теми же преобразованиями получим

$$F(h_1, h_2) = \partial_{yx} f(x + \theta_1 h_1, y + \theta_2 h_2) h_2 h_1 = \partial_{xy} f(x + \tilde{\theta}_1 h_1, y + \tilde{\theta}_2 h_2) h_1 h_2$$

Воспользовавшись непрерывностью рассматриваемых частных производных в точке  $(x, y)$ , при  $h \rightarrow 0$  имеем

$$\partial_{yx} f(x, y) = \partial_{xy} f(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Обобщить теорему легко, пользуясь принципом математической индукции. Пусть она выполняется для всех порядков до  $n$  включительно. Для порядка  $n + 1$  имеем

$$\partial_{x_{i_1} \dots x_{i_{n+1}}} f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \partial_{x_{i_1}(x_{i_2} \dots x_{i_{n+1}})} f(x_1, \dots, x_{n+1}),$$

откуда индексы с  $i_2$  по  $i_{n+1}$  можно произвольно переставлять в силу предположения индукции. Тогда нам необходимо лишь показать, что перестановке также подвергаются индексы  $i_1$  и  $i_2$ . Поскольку

$$\partial_{x_{i_1} \dots x_{i_{n+1}}} f(x_1, \dots, x_n) = \partial_{x_{i_1} x_{i_2}} (\partial_{x_{i_3} \dots x_{i_{n+1}}} f(x_1, \dots, x_{n+1})),$$

эта опция также следует из предположения индукции. Таким образом, теорема доказана.

## Полный дифференциал ФНП

### 📌 Определение

Функция нескольких переменных  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется **дифференцируемой** в точке  $M_0$ , предельной для множества  $E \subseteq \mathbb{R}$ , если

$$\exists A, \alpha : \forall h : f(M_0 + h) - f(M_0) = L(h) + o(\rho),$$

где:

- $h$  — вектор приращений аргументов,  $M_0 + h \in E$
- $L$  — линейная относительно  $h$  функция, зависящая от выбранной предельной точки
- $o(\rho)$  — бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем расстояние  $\rho = d(M_0, M_0 + h)$

В случае двух переменных полное приращение дифференцируемой функции принимает вид

$$\Delta f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

### Определение

Пусть функция нескольких переменных  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $M_0$ . Функцию  $L(h)$ , определяющую линейную часть её приращения в точке  $M_0$ , называют **полным дифференциалом**  $df(M_0)$  функции  $f$  в точке  $M_0$ .

### Определение

Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных есть **касательная плоскость**  $\omega$ , заданная следующим соотношением:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

Из определения дифференцируемости видно, что такая плоскость достаточно точно аппроксимирует график функции в точке  $(x_0, y_0)$ , то есть отклонение точки  $(x, y, z(x, y))$  этой плоскости от точки  $(x, y, f(x, y))$  графика функции есть величина, бесконечно малая сравнительно величины смещения их координат  $(x, y)$  от координат  $(x_0, y_0)$ .

## Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности

Дифференцируемая функция нескольких переменных непрерывна.

### Доказательство

Рассмотрим произвольную функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ , дифференцируемую в точке  $M_0$ . По определению дифференцируемости,

$$f(M_0 + h) - f(M_0) = L(h) + o(\rho),$$

откуда

$$f(M_0 + h) = f(M_0) + L(h) + o(\rho)$$

Нетрудно заметить, что при  $h \rightarrow 0$  значения  $L(h)$  и  $o(\rho)$  стремятся к 0, а значит, что значение  $f(M_0 + h)$  стремится к  $f(M_0)$ , т.е. функция непрерывна, что и требовалось доказать.

*Замечание.* Обратное утверждение неверно, поскольку не выполняется уже в одномерном случае.

### Необходимое условие дифференцируемости

Если функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  дифференцируема в точке  $M_0$ , то в этой точке она имеет частные производные по каждой переменной, причём её дифференциал однозначно определяется этими частными производными:

$$df(M_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$$

### Доказательство

Рассмотрим функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ , дифференцируемую в точке  $M_0$ . По определению,

$$f(M_0 + h) - f(M_0) = L(h) + o(\rho)$$

Нам необходимо доказать, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = L(h)_i$$

Положим все приращения аргументов, за исключением  $\Delta x_i$ , равными нулю. Тогда имеем

$$f(x_0, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_n) = L(h)_i \Delta x_i + o(\Delta x_i)$$

Зная это, найдём частную производную по переменной  $x_i$ :

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{x_i}}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{L(h)_i \Delta x_i + o(\Delta x_i)}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} L(h)_i + \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x_i)}{\Delta x_i} = L(h)_i,$$

что и требовалось доказать.

### Дифференцирование неявной функции

Если задана неявная функция  $F(x, y(x)) = 0$ , для неё верно следующее соотношение:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Отсюда легко выразить производную функции  $y(x)$ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

В случае, когда в неявной функции  $F(x, y, z(x, y)) = 0$  имеет место зависимость сразу от двух переменных, её частные производные аналогичными рассуждениями

выражаются как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Для этого достаточно продифференцировать эту функцию по первой и по второй переменной соответственно:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

## Дифференцирование сложной функции

### Полная производная

Пусть задана функция двух переменных  $z = f(x, y)$  такая, что  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$ , причем  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемы в точке  $t$  и  $f$  дифференцируема в точке  $M(x, y)$ .

В силу дифференцируемости  $f$ , имеем

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \gamma(x, y, \Delta x, \Delta y), \quad \gamma(x, y, \Delta x, \Delta y) = o(\rho),$$

откуда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\gamma(x, y, \Delta x, \Delta y)}{\Delta t} \right)$$

Заметим, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\rho} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t} = \left| \begin{array}{l} \Delta t \rightarrow 0 \iff \\ \iff \Delta \rho \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\rho} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2}$$

Первый предел здесь равняется 0 в силу  $\gamma = o(\rho)$ , второй предел существует и конечен в силу дифференцируемости обеих функций в точке  $t$ , а значит, что их произведение равно 0. Отсюда имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Это значение называется **полной производной** сложной функции нескольких переменных.

В случае, когда вложенные функции зависят от нескольких переменных, частные производные вычисляются аналогично. Пусть задана функция

$z = f(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , для которой соблюдаются все ранее обозначенные

условия; тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

### 🔗 Инвариантность формы первого дифференциала

Как видно из определения полной производной, дифференциал сложной функции нескольких переменных имеет вид

$$df(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Зная необходимое условие дифференцируемости, легко заметить, что если бы  $x_i, \dots, x_n$  были свободными, а не зависимыми переменными, эта запись бы никак не изменилась.

## Экстремумы ФНП

### Локальный экстремум

#### 📌 Определение

Точка  $M_0$  называется **точкой локального минимума** функции нескольких переменных  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , если существует окрестность  $U(M_0)$  такая, что

$$\forall M \in U_E(M_0) : f(M) > f(M_0)$$

Определение *точки локального максимума* эквивалентно с точностью до знаков.

#### Необходимое условие экстремума

Чтобы функция нескольких переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$ , определенная в точке  $M_0$  и в некоторой её окрестности, имела локальный экстремум в этой точке, необходимо, чтобы все её частные производные в этой точке были равны нулю или бесконечности или не существовали:

$$\forall 1 \leq i \leq n : \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \vee \frac{\partial f}{\partial x_i} = \infty \vee \frac{\partial f}{\partial x_i} \nexists$$

### Доказательство

Рассмотрим функцию  $\varphi(x_1) = f(x_1, M_0^2, \dots, M_0^n)$ , определенную, в силу условий теоремы, в окрестности  $U(M_0)$  точки  $M_0$ . В точке  $M_0^1$  функция  $\varphi(x_1)$  имеет локальный экстремум, и поскольку

$$\varphi'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0),$$

в силу теоремы Ферма имеем  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0$ . Аналогичными рассуждениями для каждой из переменных доказывается исходное утверждение теоремы.

### Достаточное условие экстремума

Пусть функция двух переменных  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $M_0$  и имеет частные производные до 3<sup>го</sup> порядка. Тогда если определитель

$$\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = AC - B^2$$

1.  $> 0$ , то  $M_0$  — точка экстремума, причём при  $A > 0$   $M_0$  — точка минимума, при  $A < 0$  — максимума;
2.  $< 0$ , то  $M_0$  — не точка экстремума;
3.  $= 0$ , то требуется дополнительное исследование.

### Доказательство

нет.

## Условный экстремум

### Определение

**Условный экстремум** — наибольшее или наименьшее значение функции нескольких переменных, которое она принимает при условии, что ее аргументы подчинены дополнительным ограничениям, которые записаны в форме *уравнений связи*:

$$\begin{cases} z = f(x, y) & (\text{функция}) \\ \varphi = \varphi(x, y) & (\text{уравнение связи}) \end{cases}$$

### Метод множителей Лагранжа

Для поиска условного экстремума используется вспомогательная *функция Лагранжа*, которая в общем случае представляется линейной комбинацией функции  $f$  и уравнений связи  $\varphi$  с коэффициентами  $\lambda_i$ :

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

Найти непосредственно сам экстремум можно, приравняв к нулю все частные производные функции Лагранжа и решив получившуюся систему.

### Доказательство

не-а.

## Производная по направлению

### ❗ Определение

**Градиент**  $\text{grad } f$  (также  $\nabla f$  — этот символ носит название *набла*) — несвободный вектор, который показывает направление наибольшего возрастания скалярного поля в точке  $M_0$ :

$$\nabla f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Полный дифференциал можно записать как скалярное произведение градиента и вектора смещений аргументов:

$$df = (\nabla f, h)$$

Поскольку при движении по линиям уровня  $df = 0$ , можно заключить, что, поскольку вектор  $h$  направлен по касательной к линии уровня, градиент перпендикулярен линии уровня.

### Производная по направлению

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$ , точка  $M_0$  и выходящий из неё вектор  $\vec{e}$ . Тогда производная функции  $f$ , отражающая скорость её изменения при движении в направлении этого вектора, вычисляется как

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \lim_{\Delta e \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\Delta e \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\rho} = \nabla f \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}$$

