Конспект 04 — Непрерывность

Содержание

Пререквизиты

- предельная точка

Представления о непрерывности

Определение непрерывности

Info

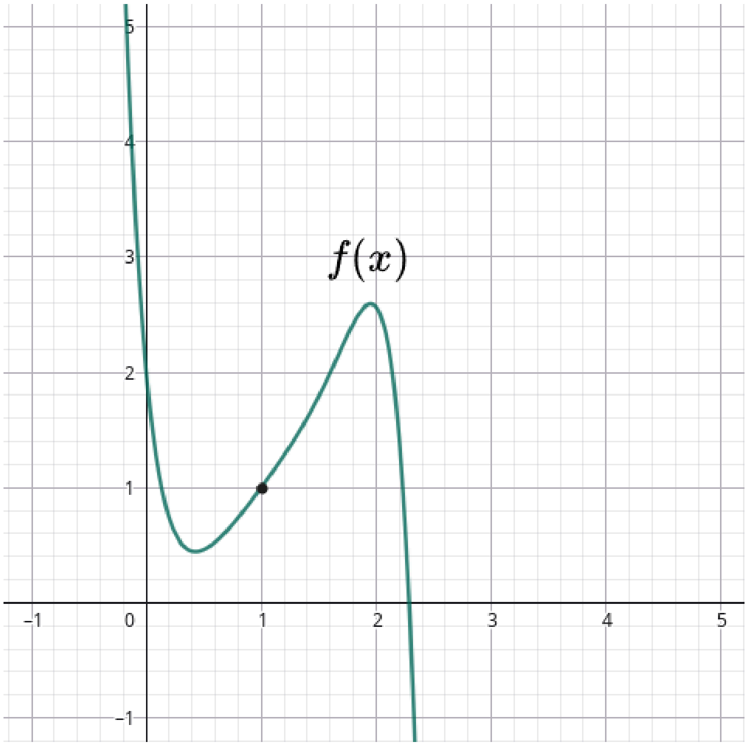
Вещественнозначная функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной** в точке $a \in E$, если

$$\forall V(f(a))\ \exists U_E(a) : f(U_E(a)) \subseteq V(f(a)) \tag{1}$$

Иными словами, функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда для любой окрестности $V(f(a))$ её значения $f(a)$ в точке a найдётся такая окрестность $U_E(a) = U(a) \cap E$, что её образ $f(U_E(a))$ полностью содержится в $V(f(a))$.

В ε-δ форме это условие принимает следующий вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in E : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{2}$$



$f(x)$ непрерывна в точке $a = 1$

Warning

Из этих определений следует, что функция в изолированной точке всегда непрерывна!

Important

В случае, когда имеет смысл говорить о *пределе* функции f в точке a, то есть в случае, когда она определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$, можно ввести следующее условие непрерывности:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{3}$$

Легко заметить, что оно эквивалентно предыдущим. По определению Коши,

$$\forall V(f(a)) \exists \mathring{U}_E(a) : x \in \mathring{U}_E(a) \implies f(x) \in V(f(a)),$$

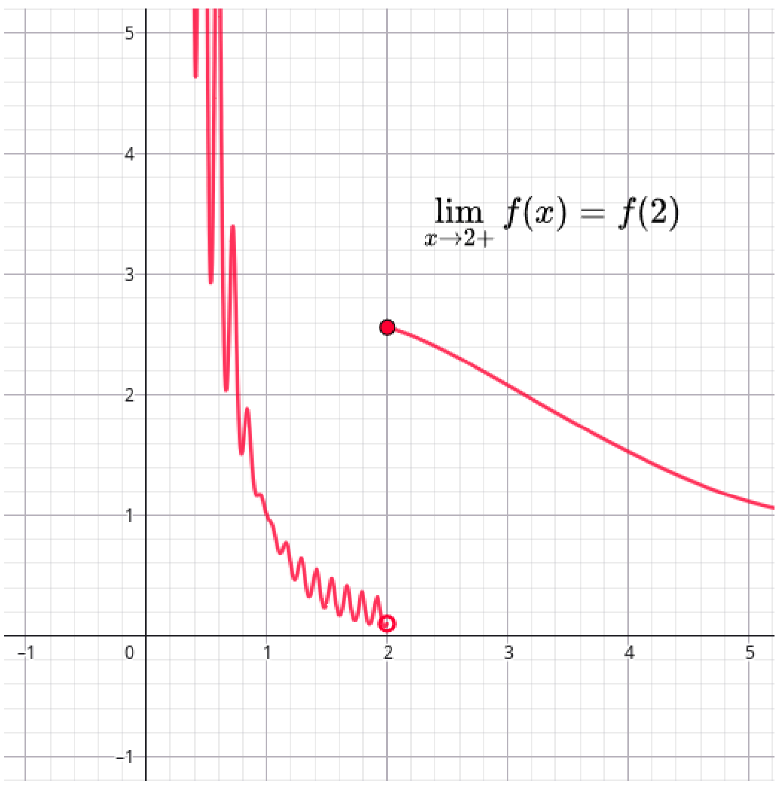
что идентично определению (1) непрерывности.

Виды непрерывности

Правая непрерывность

Функция f называется *непрерывной справа* в точке a, если её правосторонний предел в этой точке равен значению в этой точке:

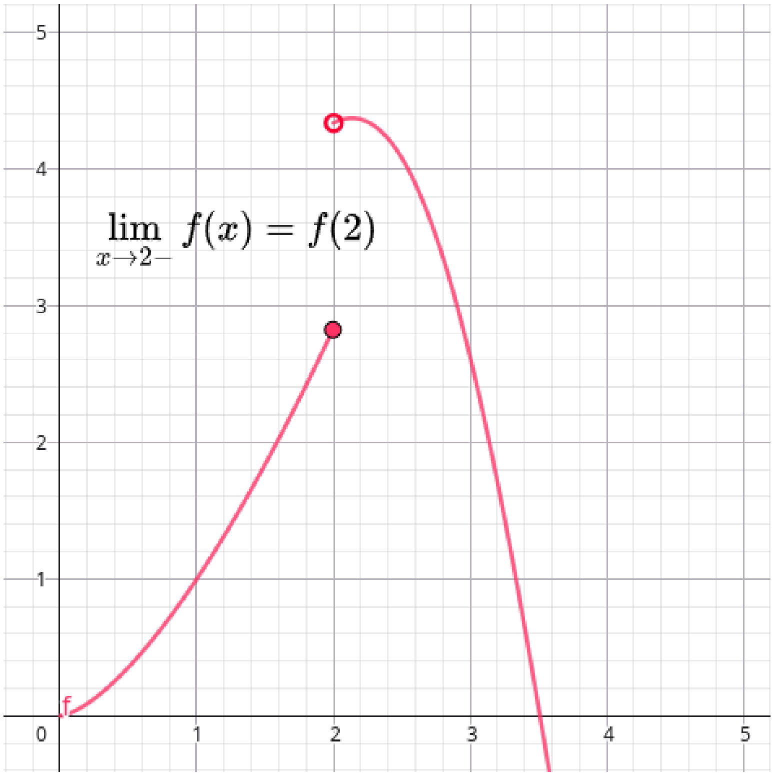
$$f(a+0) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$



Левая непрерывность

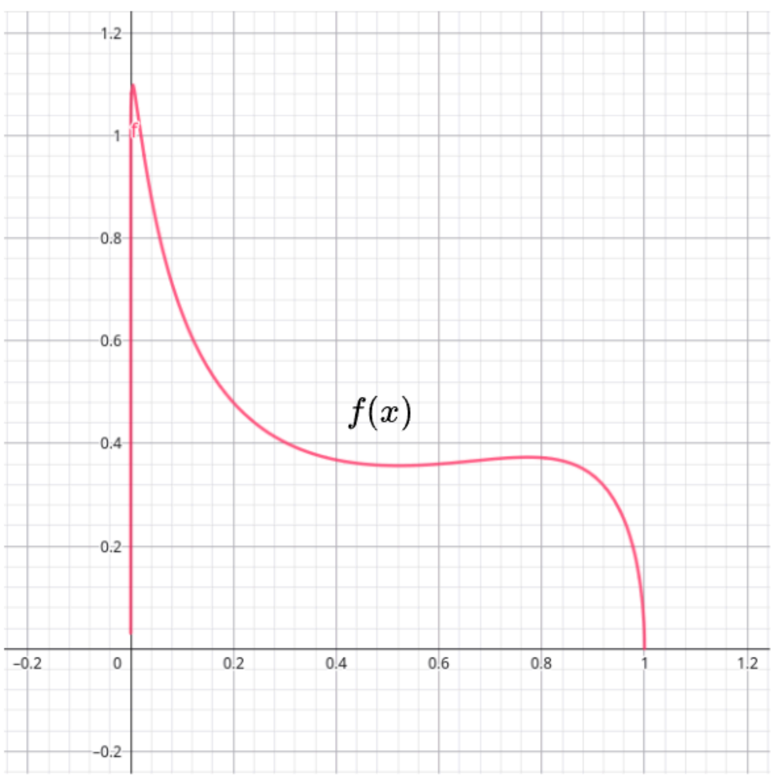
Функция f называется *непрерывной слева* в точке a, если её левосторонний предел в этой точке равен значению в этой точке:

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$



Непрерывность на множестве

Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* $S \subseteq E$, если она непрерывна в каждой из его точек.



$f(x)$ непрерывна на множестве $S = (0..1)$

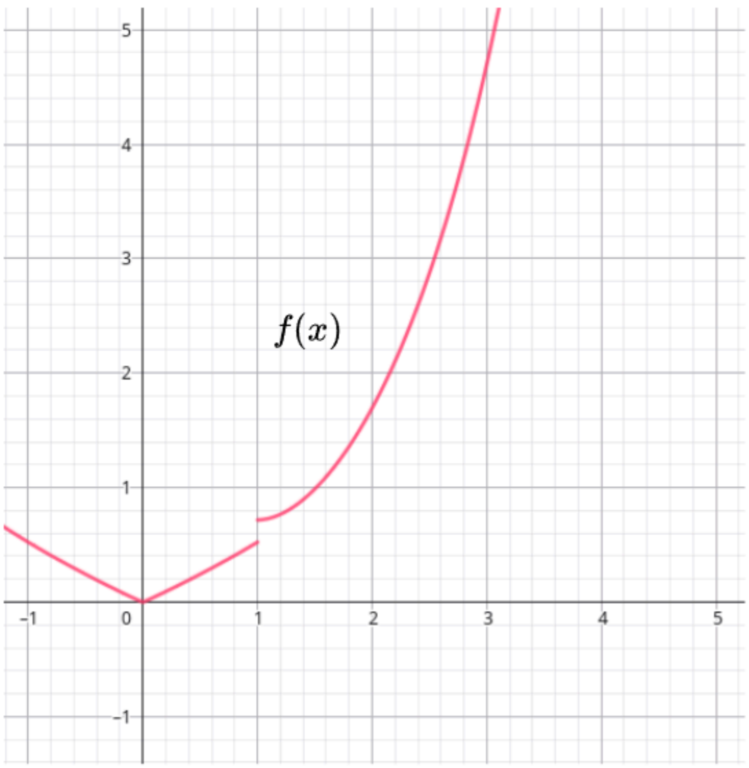
Точки разрыва

Определение точки разрыва

Info

Точка $a \in E$ называется **точкой разрыва** функции $f : E \to \mathbb{R}$, если f не является непрерывной в этой точке:

$$\exists V(f(a)) \forall U_E(a) : \exists x \in U_E(a) : f(x) \notin V(f(a)))$$



$a = 1$ — точка разрыва функции $f(x)$

Классификация точек разрыва

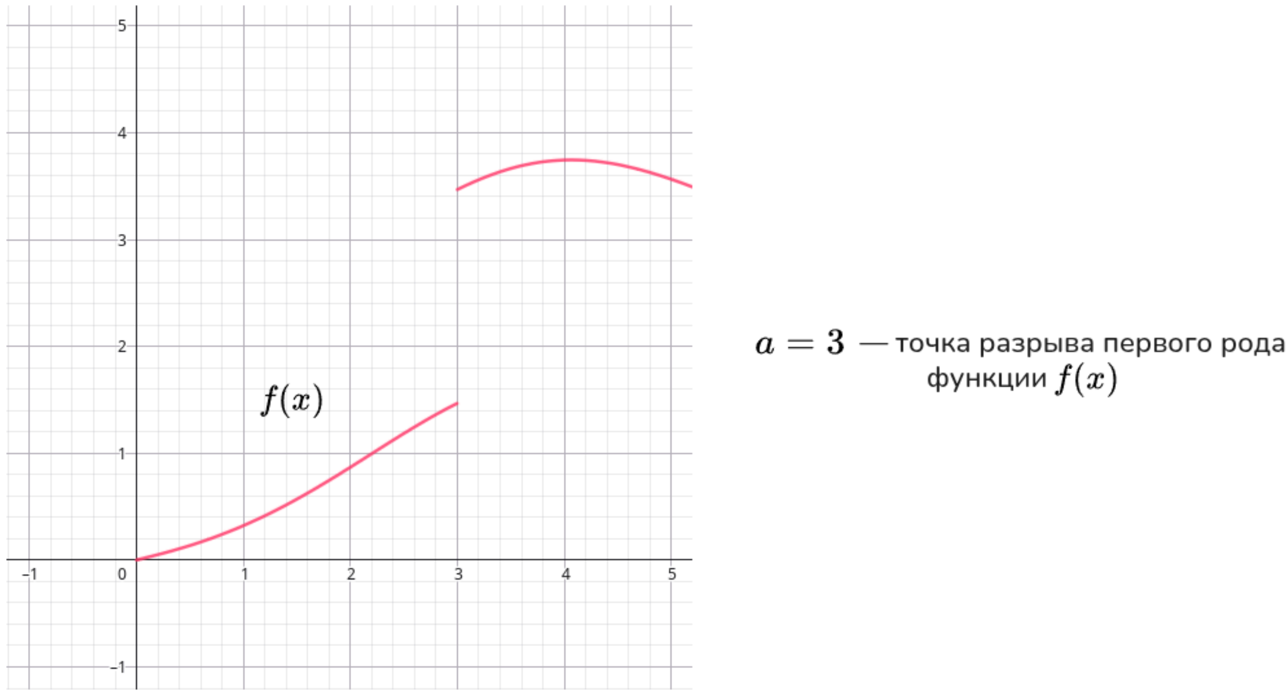
Точки разрыва первого рода

Точка разрыва $a \in E$ называется точкой разрыва *первого рода* или *скачком*, если существуют пределы

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = A$$

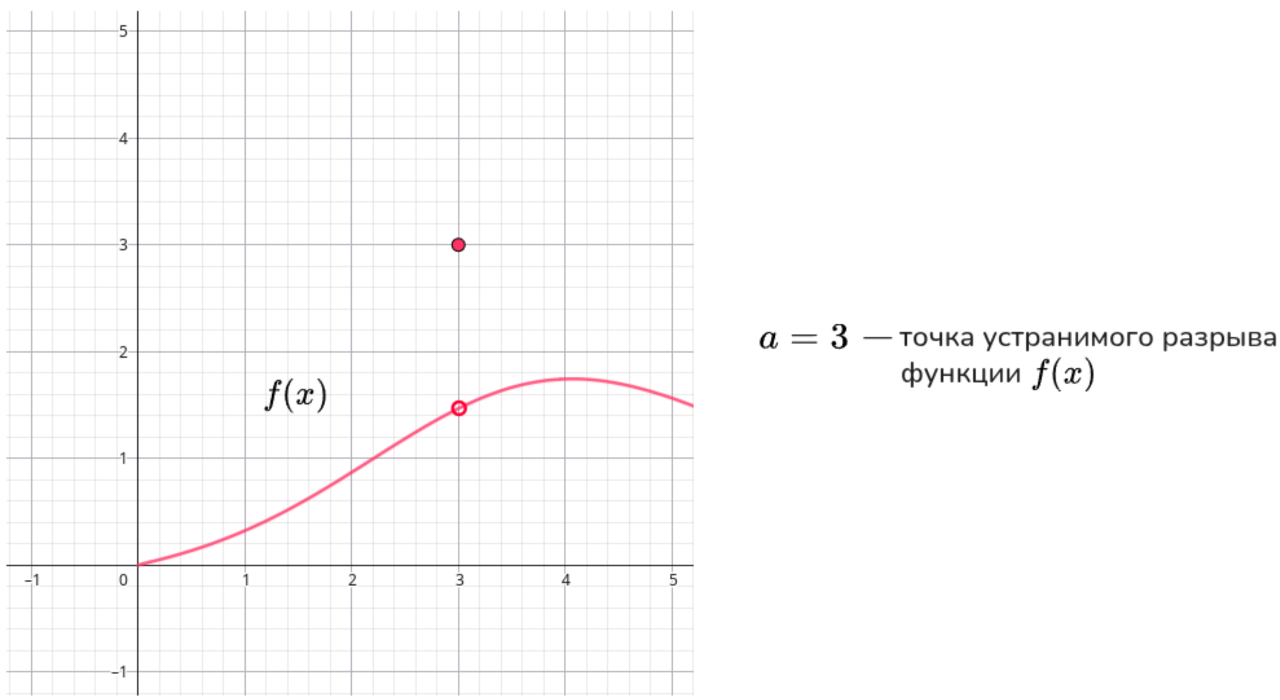
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = B$$

и по крайней мере один из них не равен $f(a)$.



Точки устранимого разрыва

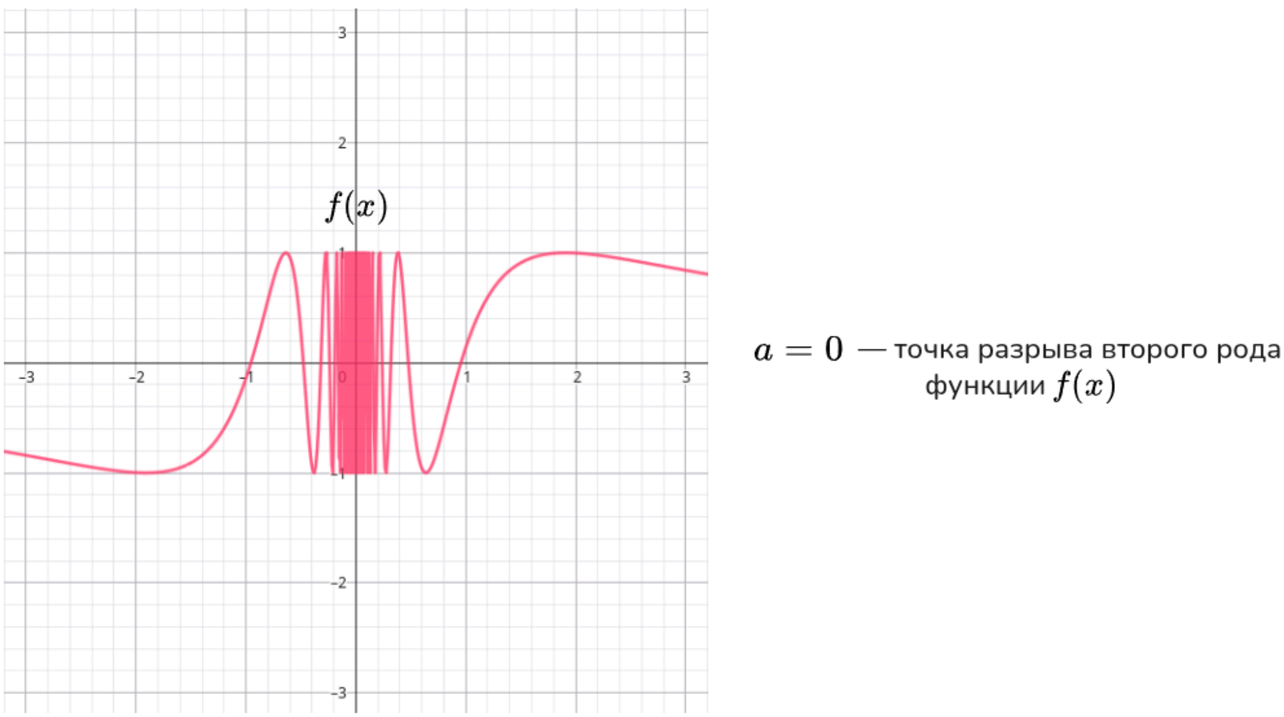
Точка разрыва $a \in E$ называется точкой *устранимого разрыва* функции $f : E \to \mathbb{R}$, если существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и при этом $A \neq f(a)$.



Если при этом a — единственная точка разрыва, то для того, чтобы получить непрерывную функцию, достаточно положить

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \wedge x \neq a \\ A, & x = a \end{cases}$$

> Легко заметить, что устранимый разрыв является частным случаем разрыва первого рода.

> **Точки разрыва второго рода**
>
> Точка разрыва $a \in E$ называется точкой разрыва *второго рода*, если хотя бы один из пределов
>
> $$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$$
>
> $$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$$
>
> не существует или бесконечен.
>
> 
>

Кусочная непрерывность

Info

Функция f называется **кусочно непрерывной на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна в любой его точке за исключением, быть может, конечного числа точек устранимого разрыва, а также имеет односторонние пределы в точках a и b.

Функция f называется **кусочно непрерывной на интервале**, в том числе бесконечном, если она непрерывна на любом принадлежащем ему отрезке.

P.S. с большой вероятностью это определение некорректное. Оно принципиально приведено в той форме, в которой было дано на лекции. Возможно, в дальнейшем оно будет пересмотрено.

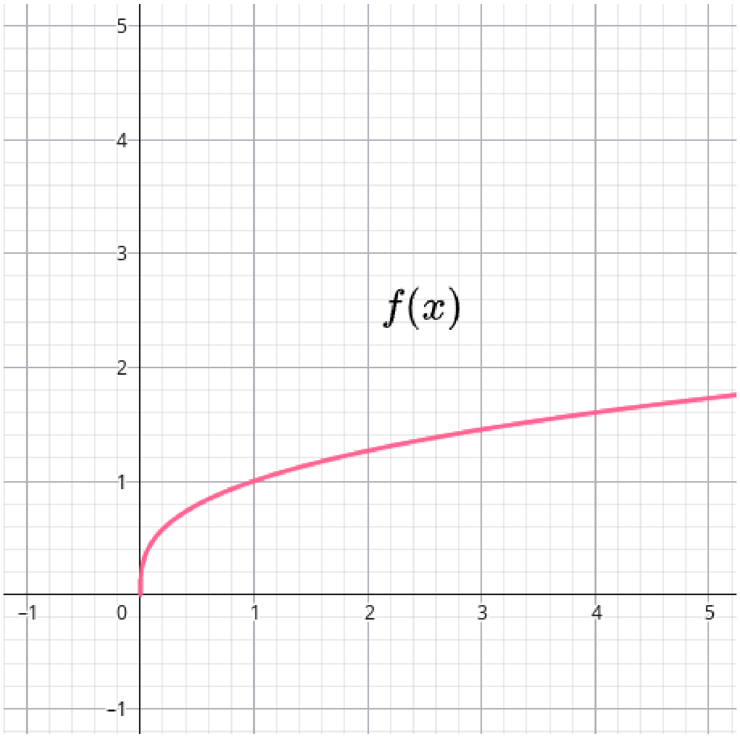
Равномерная непрерывность

Info

Вещественнозначная функция $f : E \to \mathbb{R}$ называетася **равномерно непрерывной** на множестве $S \subseteq E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in S : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

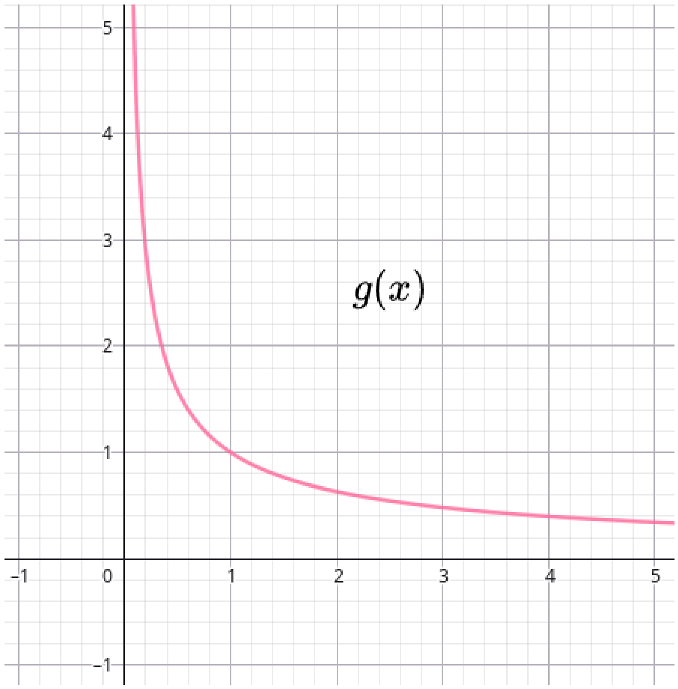
Иными словами, функция f равномерно непрерывна на множестве S тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для любых точек x_1 и x_2, расстояние между которыми меньше δ, расстояние между значениями функции в них меньше ε.



$f(x)$ равномерно непрерывна

Легко заметить, что если функция равномерно непрерывна на множестве, то она также просто непрерывна на нём: достаточно положить $x_2 = a$, как мы получим определение (1) непрерывности, которое, очевидно, будет выполняться для любой точки рассматриваемого множества.

Ключевое отличие между этими видами непрерывности заключается в том, что при изучении функции на предмет равномерной непрерывности мы выбираем δ, зависящий только от значения ε и одинаковый для всех точек, в то время как определение обычной непрерывности подразумевает зависимость в том числе и от выбранной точки a. Отсюда следует, что, конечно, не любая непрерывная функция равномерно непрерывна:



$g(x)$ непрерывна, но не равномерно непрерывна

Свойства непрерывной функции

Ключевое свойство предела непрерывной функции

Из определения (3) можно вывести, что если f непрерывна в точке a и определена в какой-то её окрестности, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x),$$

то есть *непрерывные функции и только они перестановочны с операцией предельного перехода*.

Теорема 1 (Локальные свойства непрерывной функции)

1. Если функция непрерывна в точке a, она финально ограничена в ней.
2. Если функция непрерывна в точке a, то в некоторой окрестности $U_E(a)$ все точки имеют тот же знак, что и a.
3. Сумма, произведение и частное (при условии $g(x) \neq 0$) функций, непрерывных в точке a и определённых в некоторой её окрестности, определены в некоторой окрестности точки a и непрерывны в ней.
4. Если функция $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $b \in Y$, а функция $f : E \to Y$ такова, что $f(a) = b$ и при этом непрерывна в точке a, то их композиция $g \circ f$ определена на E и непрерывна в точке a.

Доказательство

Доказательство теоремы сводится к рассмотрению двух случаев:

1. Если точка a изолирована, то доказательство тривиально.
2. Если функция определена в некоторой окрестности точки a, то доказательство сводится к доказательству соответствующих утверждений для предела функции, что уже было проделано ранее.

Единственное замечание, которое следует сделать, касается пункта (4). Дело в том, что непрерывность вовсе не гарантирует выполнение условия (3) теоремы о композиции функций. Однако можно заметить, что в ситуации, когда обе композируемые функции непрерывны, это условие перестаёт быть необходимым — теорема остаётся корректной и без него. Это несложное наблюдение читателю предлагается осознать самостоятельно.

Глобальные свойства непрерывной функции

Теорема Больцано-Коши о нулях непрерывной функции

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то внутри отрезка найдётся по крайней мере одна точка c такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство

Положим, что $f(a) < 0, f(b) > 0$. Доказательство обратного случая идентично с точностью до знаков.

Рассмотрим следующий алгоритм:

1. Разделим исходный отрезок $[a, b]$ пополам точкой x_0. Если при этом $f(x_0) = 0$, то искомая точка найдена, и алгоритм завершает работу.
2. В противном случае заметим, что на концах одного из образовавшихся отрезков $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$ значения функции вновь имеют разные знаки, и повторим алгоритм для него.

В результате работы алгоритма либо найдётся точка x_n такая, что $f(x_n) = 0$, что немедленно докажет предположение теоремы, либо сформируется бесконечная последовательность $\{I_n\}$ вложенных отрезков такая, что

$$\forall [a_n, b_n] \in \{I_n\} : f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Согласно лемме о вложенных отрезках, существует точка c такая, что

$$\forall [a_n, b_n] \in \{I_n\} : a_n < c < b_n$$

Поскольку длина каждого следующего отрезка меньше длины предыдущего, мы можем сказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

В силу непрерывности,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \le 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \ge 0,$$

откуда $f(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема о промежуточном значении

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения A и B соответственно, то для любого C, лежащего между A и B, найдётся точка c такая, что $f(c) = C$.

Доказательство

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. В силу теоремы (1), φ также будет непрерывна на отрезке $[a, b]$; при этом $\varphi(a) \times \varphi(b) = (A - C) \times (B - C) < 0$, то есть $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ имеют различные знаки. Воспользуемся теоремой о нулях непрерывной функции и получим, что

$$\exists c : \varphi(c) = f(c) - C = 0 \iff f(c) = C,$$

что и требовалось доказать.

Теорема об ограниченности непрерывной функции

Функция f, непрерывная на отрезке $E = [a, b]$, ограничена на нём.

Доказательство

По пункту (1) теоремы (1), для любой точки c_k заданного отрезка найдётся интервал (m_k, M_k), на котором функция будет ограничена. По лемме о конечном покрытии, существует конечная система из n таких интервалов, целиком покрывающая отрезок E. Тогда для любой точки $x \in E$ верно, что

$$\min\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \le f(x) \le \max\{M_1, M_2, \ldots, M_n\},$$

то есть f ограничена на отрезке $[a, b]$, что и требовалось доказать.

Теорема Вейерштрасса о максимальном значении

Если функция f непрерывна на отрезке $E = [a, b]$, то существуют точки x_m и x_M, в которых функция принимает значение, соответственно минимальное и максимальное на этом отрезке.

Доказательство

Докажем теорему для максимального значения. Доказательство для минимального значения проводится по аналогии.

Рассмотрим $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$ и предположим, что $\forall x \in E : f(x) < M$. Тогда функция $\varphi(x) = M - f(x)$, в силу определения M, может принимать значения, сколь угодно близкие к нулю, при этом ни в одной точке не обращается в ноль. По пункту (3) теоремы (1), функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ непрерывна, при этом, как только что было продемонстрировано, не является ограниченной, что противоречит теореме об ограниченности непрерывной функции. Таким образом, $\exists x \in E : f(x) = M$, что и требовалось доказать.

Теорема Кантора-Гейне о равномерной непрерывности (также **Теорема Кантора**)

Функция f, непрерывная на отрезке $E = [a, b]$, равномерна непрерывна на нём.

Доказательство

Допустим, f не является равномерно непрерывной на заданном отрезке. Это означает, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Зафиксируем любое подходящее значение ε.
Рассмотрим последовательность $\{\frac{1}{n}\}_{\mathbb{N}}$. Приняв в качестве δ n-тый элемент последовательности, получим $x_1^{(n)}$ и $x_2^{(n)}$ такие, что

$$|x_1^{(n)} - x_2^{(n)}| < \frac{1}{n}$$

$$|f(x_1^{(n)}) - f(x_2^{(n)}| \geq \varepsilon$$

Рассмотрим последовательность $\{x_2^{(n)}\}$. По определению, все её члены — это вещественные числа из некоторого отрезка; иными словами, она ограничена. Это позволяет нам выделить из неё сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{(n_k)}\} \to x_0 \in E$.

Построим соответствующую подпоследовательность $\{x_1^{(n_k)}\}$ (элементы $\{x_1^{(n)}\}$ с теми же индексами k). Заметим, что

$$|x_1^{(n_k)} - x_0| = |x_1^{(n_k)} - x_2^{(n_k)} + x_2^{(n_k)} - x_0| \leq |x_1^{(n_k)} - x_2^{(n_k)}| + |x_2^{(n_k)} - x_0|,$$

откуда

$$\lim_{k\to\infty}|x_1^{(n_k)}-x_0|\le\lim_{k\to\infty}|x_1^{(n_k)}-x_2^{(n_k)}|+\lim_{k\to\infty}|x_2^{(n_k)}-x_0|=0\iff\{x_1^{(n_k)}\}\to x_0$$

Посмотрим, как ведет себя разность значений функции от элементов этих подпоследовательностей:

$$|f(x_1^{(n_k)})-f(x_2^{(n_k)})|=|f(x_1^{(n_k)})-f(x_0)+f(x_0)-f(x_2^{(n_k)})|\le|f(x_1^{(n_k)})-f(x_0)|+|f(x_2^{(n_k)})-f(x_0)|,$$

откуда, перейдя к пределу, получаем

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_1^{(n_k)})-f(x_2^{(n_k)})|\le\lim_{k\to\infty}|f(x_1^{(n_k)})-f(x_0)|+\lim_{k\to\infty}|f(x_2^{(n_k)})-f(x_0)|$$

Поскольку f непрерывна, причем $x_1^{(n_k)}\to x_0$ и $x_2^{(n_k)}\to x_0$, то

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_1^{(n_k)})-f(x_2^{(n_k)})|\le\lim_{k\to\infty}(f(x_0)-f(x_0))+\lim_{k\to\infty}(f(x_0)-f(x_0))=0$$

Совершив предельный переход в исходном неравенстве, получим, что

$$\varepsilon<\lim_{k\to\infty}|f(x_1^{(n_k)})-f(x_2^{(n_k)})|\le 0$$

Очевидно, что это неравенство не имеет решений, поскольку $\varepsilon>0$. Отсюда рассматриваемая подпоследовательность, а значит, что и содержащая её последовательность, не может существовать, что противоречит предположению. Таким образом, функция, непрерывная на отрезке, не может не быть равномерно непрерывной на нём, что и требовалось доказать.

Лемма о разрыве монотонной функции

Монотонная функция $f:E\to\mathbb{R}$ может иметь разрывы только первого рода.

Доказательство

Положим, что f монотонно неубывает. Доказательство остальных случаев проводится по аналогии.

Пусть f терпит разрыв в точке a. Поскольку a не может быть изолирована, она является предельной точкой по крайней мере для одного из следующих множеств:

$$E_a^-=(x\in E\mid x<a)$$

$$E_a^+=(x\in E\mid x>a)$$

Допустим, a — предельная точка множества E_a^-. Поскольку f неубывает, для любой точки $x\in E_a^-$ имеем $f(x)\le f(a)$, то есть ограничение $f|_{E_a^-}$ функции f на множество E_a^-

является неубывающей ограниченной сверху функцией, у которой, как было показано ранее, существует предел $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$.

Существование правостороннего предела $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ в случае, когда a — предельная точка множества E_a^+, доказывается аналогично.

Таким образом, в любой точке разрыва существуют оба односторонних предела, а значит, что она не может являться точкой разрыва второго рода, что и требовалось доказать.

Следствия

Если a — точка разрыва монотонной функции, то:

1. по крайней мере один из односторонних пределов определён;
2. по крайней мере в одном из неравенств:

$$f(a-0) \le f(a) \le f(a+0),\ f(x) \text{ — неубывающая}$$

$$f(a-0) \ge f(a) \ge f(a+0),\ f(x) \text{ — невозрастающая}$$

   имеет место знак строгого неравенства;
3. в интервале, определяемом этим строгим неравенством, нет ни одного значения функции;
4. интервалы, отвечающие различным точкам разрыва, не пересекаются.

Критерий непрерывности монотонной функции

Монотонная функция f непрерывна на отрезке $E = [a, b]$ тогда и только тогда, когда множество $f(E)$ её значений представляет собой отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство

Положим, что $f(a) < f(b)$, т.е. f монотонно неубывает. Доказательство остальных случаев проводится по аналогии.

Необходимость. Пусть f — непрерывная монотонно неубывающая функция. Ввиду монотонности,

$$\forall x \in E : f(a) \le f(x) \le f(b)$$

Одновременно с этим, по теореме о промежуточном значении, любое такое значение $f(x)$ будет достигнуто хотя бы в одной точке, поскольку f непрерывна. Таким образом, множество $f(E)$ значений непрерывной монотонной функции на отрезке $[a, b]$ представляет собой отрезок $[f(a), f(b)]$.

> *Достаточность*. Пусть f — монотонная неубывающая функция, причём множество её значений на отрезке $[a, b]$ представляет собой отрезок $[f(a), f(b)]$.
>
> Если она терпит разрыв в некоторой точке $c \in E$, то, в следствие леммы о разрыве монотонной функции, один из интервалов $(f(c-0), f(c)), (f(c), f(c+0))$ определён, причём ему не принадлежит ни одно значение функции f.
> Ввиду монотонности этот интервал целиком принадлежит отрезку $[f(a), f(b)]$, а значит, что этот отрезок не целиком принадлежит области значений функции. Таким образом, если множество значений функции на отрезке E представляет собой отрезок $[f(a), f(b)]$, то она не терпит разрывов, что и требовалось доказать.