

# Теория графов

## Основы

**Граф** — пара  $\langle V, E \rangle$ , где

- $V$  — конечное множество вершин
- $E$  — множество ребер

Дополнительные обозначения:

- $V(G)$  — множество вершин
- $E(G)$  — множество ребер
- $|V(G)|$  — порядок графа
- $|E(G)|$  — размер графа

Ребра графа — произвольные объекты, представляющие привычные нам ребра в удобном в конкретной задаче виде (например, в неориентированных графах ни к чему хранить их в виде *упорядоченных пар* можно хранить их в виде 2- и 1-множеств). Взаимодействие с ними строятся на функциях, например, для описания взвешенного ориентированного графа можно воспользоваться 3 функциями:

$\text{begin} : E \rightarrow V$

$\text{end} : E \rightarrow V$

$\text{weight} : E \rightarrow \mathbb{R}$

### Полезная нотация

Множество всех подмножеств  $X$ , имеющих мощность  $n$ , можно записать как

$$\binom{X}{n} = \{S \mid S \subseteq X \text{ и } |S| = n\}$$

### Заметка об определении графов

Есть несколько способов определить граф

- Наиболее абстрактный способ определить граф, это через функции (написаны выше), тогда  $E$  - множество анонимных названий ребер
- Можно прямо в множество ребер пихать не анонимные элементы, а пары элементов (для направленных графов), начало и конец.

Тогда  $E \subseteq V^2$  Мы просто говорим о том, что граф это отношение.

Для взвешенного графа  $E \subseteq V^2 \times \mathbb{R}$

- Для ненаправленных Графов можно сделать то же самое только с неупорядоченными парами.

Обозначается  $E \subseteq \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$

Несложно видеть, что  $C_{|V|}^2 = \left| \binom{V}{2} \right|$

## Классификация графов

Введем полезные определения

**Петля** — ребро, начинающееся и заканчивающееся в одной и той же вершине:

$$l \in E : \text{begin}(l) = \text{end}(l)$$

**Мультиребро** — ребро, для которого в множестве ребер существует его точная копия, неравная ему:

$$m \in E : (\exists m' \in E \setminus \{m\})(\forall f \in F)(f(m') = f(m))$$

Иногда пару мультиребер называют *кратными ребрами*

Теперь легко классифицировать графы, основываясь на наличии в них петель и мультиребер:

**Простой граф** — граф, среди ребер которого нет **ни петель, ни мультиребер**

### Определение внутри курса

Когда Чухарев (и мы следовательно) говорим слово граф, мы имеем в виду простой граф, если не сказано обратного

**Мультиграф** — граф, среди ребер которого **нет петель** (мультиребра допускаются)

**Псевдограф** — граф, в котором **допускаются** и мультиребра и петли

Ну и еще один чуть более интересный вид графов и ребер

*Гиперребро* — ребро, связывающее больше 2 вершин

*Гиперграф* — граф, содержащий гиперребра

## Про вершины

Здесь определения будут поясняться на примере неориентированных и невзвешенных графов, однако обобщить их на другие виды никакой сложности не представляет

**Смежные (adjacent) вершины** — вершины, между которыми есть ребро —  $u$  и  $v$ , если  $\{u, v\} \in E$

**Инцидентное ребро** — ребро инцидентно вершине, если оно в нее “приходит” —  $e \in E$  инцидентно  $u \in V$ , если  $v \in e$  (так же определяют как обратное, ребро которое выходит из вершины)

**Соседние вершины  $v$**  — множество смежных с  $v$  вершин:

$$\{u \mid \{u, v\} \in E\}$$

**Степень вершины** — количество ее соседей:

$$\deg(u) = |\{v \mid \{u, v\} \in E\}|$$

Граф, к слову тоже имеет степени (даже 2):

- $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg v$  — минимальная степень вершины в графе
- $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg v$  — максимальная степень вершины в графе

**Степенная последовательность** — последовательность степеней вершин графа в порядке невозрастания

### Лемма о рукопожатиях

В любом (неориентированном) графе сумма степеней вершин в 2 раза больше количества ребер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

### Доказательство

Каждое ребро добавляет к итоговой сумме по 2 (каждым из 2 концов), а значит, пройдясь по всем ребрам получим сумму всех степеней равную  $2 \cdot |E|$

***QED***

## Возвращаясь к графам

***r-regular граф*** — граф, в котором каждая вершина имеет степень  $r$

### Специальные графы

- Нулевой — без вершин
- Тривиальный — одна вершина, нет ребер
- Пустой ( $\overline{K}_n$ ) —  $n$  вершин, нет ребер
- Полный ( $K_n$ ) —  $n$  вершин, все соединены между собой
- Цикл ( $C_n$ ) —  $n$  вершин в цикле
- Путь ( $P_n$ ) —  $n$  вершин в линию

### Теорема

**Полный ( $K_n$ ) граф имеет ровно  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  ребер**

### Доказательство

Лемма о рукопожатиях:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$
$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{2}$$

поскольку в графе  $n$  вершин, каждая из которых связана со всеми остальными справедливо, что

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

**QED**

## Способы представления графов

**Матрица смежности** — для графа с  $n$  вершинами матрицей смежности будет матрица размера  $n \times n$ , элементы которой задаются по следующему правилу

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Пара легкопроверяемых фактов:

- Матрицы смежности неориентированных графов симметричны относительно главной диагонали
- В простом графе главная диагональ заполнена нулями

**Список смежности** — каждой вершине ставится в соответствие множество ее соседей



## Подграфы

**Подграф** —  $H = \langle V', E' \rangle$  называется подграфом  $G = \langle V, E \rangle$ , если множества его вершин и ребер являются подмножествами соответствующих множеств  $G$ :

$$H \subseteq G \iff V' \subseteq V \text{ и } E' \subseteq E$$

Особые виды подграфов:

1. **Spanning** (открыт для предложений перевода) — подграф, содержащий все вершины исходного ( $V' = V$ )
2. **Induced** (вероятно, порожденный) — подграф  $G[S]$ , где  $S \subseteq V$ , в котором есть все ребра, содержащие вершины исходного:

$$E' = \{\{u, v\} \mid u, v \in S \text{ и } \{u, v\} \in E\}$$

## Изоморфизм графов

**Изоморфные графы** —  $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$  и  $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ , для которых существует биекция  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , сохраняющая связность:

$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$

По сути это 2 одинаковых графа, в которых по-разному названы вершины, их структура идентична

### Смысл изоморфизма графов

Глазами определить изоморфны ли нарисованные на бумажке графы очень легко (буквально одинаковые графы)

Вся сложность задачи в алгоритмизации этого процесса, чтобы это могла делать машина.

# Пути и связность

## Пути

**Walk (переводить запрещено)** — переменная последовательность вершин и ребер.

Замкнутый walk так и называется

**Trail (переводить запрещено)** — walk, в котором ребра не повторяются.

Замкнутый trail — circuit

**Путь (path)** — trail, в котором вершины не повторяются.

Замкнутый путь — цикл

Путь (и все остальные) называются замкнутыми если начинаются и заканчиваются в одной и той же вершине (в path допускается только такое повторение вершин)

**Длина пути (и проч.)** — количество ребер в нем

**Расстояние (между  $u$ ,  $v$ )** — длина кратчайшего пути между  $u$  и  $v$ .  
Если пути не существует, пишут  $\text{dist}(u, v) = \infty$

### Теорема

Расстояние — метрика

### Доказательство

Проверить свойства несложно, доказательство тривиально

QED

### Характеристики вершин и графов, связанные с расстоянием

- **Эксцентриситет** вершины — расстояние от нее до самой удаленной вершины ( $\text{ecc}(v) = \max_{u \in V} \text{dist}(u, v)$ )
- **Радиус** графа — минимальный эксцентриситет его вершин
- **Диаметр** графа — максимальный эксцентриситет его вершин
- **Центр** графа — множество вершин, эксцентриситет которых равен его радиусу

### Теорема

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$$

### Доказательство

- $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G)$  — очевидно из определения
- Пусть  $\text{diam}(G) = \text{dist}(u, v)$ , а  $w$  — один из центров графа, тогда

$$\text{dist}(u, v) \leq \underbrace{\text{dist}(u, w)}_{\leq \text{rad}(G)} + \underbrace{\text{dist}(w, v)}_{\leq \text{rad}(G)} \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$$

**QED**

## Связность

**Связность вершин** — вершины связаны если существует путь из одной в другую

**Связность графа** — граф называется связным, если все его вершины связаны

### Теорема

*Из существования walk следует существование пути*

### Доказательство

Рассмотрим минимальный (по включению) walk, если есть повторяющиеся вершины получим противоречие — walk не минимальный, откуда следует, что повторяющихся вершин (а значит и ребер) нет, а значит рассмотренный walk — путь (если есть walk короче, также получим противоречие)

QED

**Компонента связности** — максимальный связный подграф

Эти определения касались неориентированного графа, теперь что касается ориентированного.

**Слабая связность** — если все ребра считать двунаправленными, граф становится связным

**Полусвязность** — для любых двух вершин либо существует путь  $u \rightarrow v$  или  $v \rightarrow u$

**Сильная связность** — для любых двух вершин существует путь  $u \rightarrow v$  и  $v \rightarrow u$

**Компонента сильной связности** — максимальный сильно связный подграф ориентированного графа

**Обхват (girth) графа** — длина кратчайшего цикла. Для ациклического графа  $\text{girth}(G) = \infty$

# Деревья и леса

*Дерево* — связный граф без циклов

*Лес* — граф без циклов

## Теорема

Для графа  $G$  с  $n$  вершинами справедливо, что все следующие факты эквивалентны :

1.  $G$  — дерево
2.  $G$  связный с  $n - 1$  ребром
3.  $G$  ациклический с  $n - 1$  ребром
4. Любые 2 вершины связаны единственным путем
5.  $G$  минимально связный (удаление любого ребра нарушает связность)
6.  $G$  максимально ациклический (добавление любого ребра порождает цикл)

## Доказательство

Докажем следствие  $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 5 \implies 6 \implies 1$ :

- $(1 \implies 2)$  Покажем, что не может быть меньше чем  $n - 1$  ребро. Рассмотрим граф из  $n$  вершин без ребер, в нем  $n$  компонент связности. Каждое ребро может соединить 2 вершины из одной компоненты связности (не изменить количество компонент связности) или из разных (уменьшить количество компонент связности на 1, если возможно), а значит чтобы граф был связным, нужно не меньше чем  $n - 1$  ребро. Теперь докажем, что если граф связный, то добавление любого ребра порождает цикл. Пусть добавилось ребро  $e = \{u, v\}$ , по предположению  $u$  и  $v$  связаны, то есть теперь есть путь из  $u$  в  $v$  (уже существовавший, без ребра  $e$ ) и путь из  $v$  в  $u$  (по ребру  $e$ ) — цикл, а значит, если граф с  $n - 1$  вершиной связный, то больше в дереве быть уже не может (иначе появляется цикл)

- **Дальше лень**

Как-то же можно там... подумать что-ли

QED

**Подвешенное дерево (дерево с корнем)** — дерево, в котором одна вершина объявлена *корнем*.

В подвешенном дереве (по определению)

- Предок  $v$  — это сосед  $v$  на пути к корню
- Дети  $v$  — сосед  $v$  вне пути к корню
- Лист — вершина без детей
- Внутренняя вершина — вершина с хотя бы 1 ребенком

**Порожденное дерево** — порожденный подграф, являющийся деревом

### Теорема

*Любой связный граф порождает хотя бы одно дерево*

### Доказательство

Воспользуемся DFS — если попадаем в вершину в которой уже были удалим последнее (ведущее в нее) ребро, как только алгоритм отработал не останется ни одного цикла, при этом не потеряется связность (удалялись только ребра, порождающие циклы)

QED

Пусть теперь  $T$  — дерево, порожденное графом  $G$ , для любой вершины  $e \in E(G) \setminus E(T)$  граф  $T + e$  содержит ровно 1 цикл, называемый фундаментальным циклом  $e$  по отношению к дереву  $T$

**Prüfer-последовательность** — уникальный способ закодировать именованное дерево последовательностью из  $n - 2$  названий вершин (при  $n$  вершинах)



### Алгоритм построения:

1. Выбрать лист с минимальным номером
2. Записать в последовательность его предка
3. Удалить лист
4. Повторять пока не останется 2 вершины

### Формула Кайли

На  $n$  вершинах можно построить ровно  $n^{n-2}$  labeled деревьев

### Доказательство

Если поверить, что Prüfer-последовательность уникально кодирует ровно один граф, то доказательство этого факта очевидно следует из комбинаторики —  $n - 2$  места, на каждом из которых стоит одно из  $n$  названий вершин: 
$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{n-2 \text{ штуки}} = n^{n-2}$$

**QED**

# Теория связности

**Точка сочленения** — вершина, удаление которой увеличивает количество компонент связности

**Мост** — ребро, удаление которого увеличивает количество компонент связности

**$u$ - $v$  разделитель ( $u$ - $v$  вершинный срез)** — множество вершин  $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ , такое что в графе  $G - S$  вершины  $u$  и  $v$  не связаны

**$u$ - $v$  реберный срез** — множество ребер  $F \subseteq E$ , при которых в графе  $G - F$  вершины  $u$  и  $v$  лежат в разных компонентах связности

**Внутреннее непересекающиеся (по вершинам) пути** — 2 пути из  $u$  в  $v$ , которые не имеют общих вершин кроме  $u$  и  $v$

**Внутреннее непересекающиеся (по ребра) пути** — 2 пути из  $u$  в  $v$ , которые не имеют общих вершин ребер

**Связность вершин** —  $\kappa(G)$  минимальное количество вершин, которое нужно удалить, чтобы граф стал несвязным или тривиальным

**Связность ребер** —  $\lambda(G)$  минимальное количество ребер, которое нужно удалить, чтобы граф стал несвязным или тривиальным

***$k$ -связный граф*** — граф называется  $k$ -связным, если  $\kappa(G) \geq k$ . Или, что эквивалентно, в  $G$  не меньше  $k$  вершин и

$$(\forall S)(|S| < k \implies (G - S) \text{ — связный})$$

***$k$ -реберно-связный граф*** — граф называется  $k$ -реберно-связным, если  $\lambda(G) \geq k$ . Или, что эквивалентно, в  $G$  не меньше  $k$  вершин и

$$(\forall F)(|F| < k \implies (G - F) \text{ — связный})$$