Лекция 01 — Алгебраические структуры и поле комплексных чисел

Алгебраические операции

ⓘ **Info**

Алгебраической операцией, определенной на множестве M, называется такое соответствие, в силу которого $\forall(a, b), a \in M, b \in M : \exists! c \in M$

ⓘ **Info**

Операция называется **коммутативной**, если её применение к парам (a, b) и (b, a) даёт одинаковый результат.

ⓘ **Info**

Пусть задана операция, ставящая в соответствие паре (a, b) некоторый $c, a \in M, b \in M, c \in M$. Те две операции, которые получаются из данной путем перемены в ней одного из элементов с искомым, называются **обратными**.

Замечания:

1. Если для коммутативной операции существует одна из обратных операций, то существует и другая, причём обе они совпадают.
2. Если операция некоммутативна и если обратные операции существуют, то они различны и не всегда определены на заданном множестве.

Алгебраические структуры

ⓘ **Info**

Алгебраическая структура — непустое множество M с введёнными на нем алгебраическими операциями.

ⓘ **Info**

Группа — непустое множество G с заданной на нём бинарной операцией $*$: $\forall a \in G, b \in G : a * b \in G$, если эта операция удовлетворяет следующим условиям:

- Ассоциативность: $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$
- Существует нейтральный элемент: $\exists e \in G : \forall a \in G : e * a = a * e = a$
- Существует обратный элемент: $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Замечания:

1. Определение множества как группы не требует коммутативности
2. Если для пары элементов выполняется коммутативность, то она называется *коммутирующей* или *перестановочной*
3. Группа, в которой любая пара элементов является перестановочной, называется *коммутативной* или **абелевой группой**.
4. Структура группы включается в другие различные алгебраические структуры; например, такие, как поля, векторные пространства, группы Ли.

Поля

ⓘ **Info**

Поле — непустое множество F, на котором заданы две бинарные операции: $+$ и $*$, для которых выполнены следующие аксиомы:

- Коммутативность сложения
- Ассоциативность сложения
- Существует нейтральный элемент относительно сложения: $\exists 0 \in F : \forall x \in F : x + 0 = x$
- Существует противоположный элемент относительно сложения: $\forall a \in F : \exists (-a) \in F : a + (-a) = 0$
- Коммутативность умножения

- Ассоциативность умножения
- Нейтральный элемент относительно умножения
  $\exists e \in F : \forall a \in F : e * a = a$
- Противоположный элемент относительно умножения:
  $\forall a \in F \backslash \{0\} : \exists a^{-1} : a * a^{-1} = e$
- Дистрибутивность умножения относительно сложения
  $a \times (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Поле комплексных чисел

> **Info**
>
> **Комплексное число** z — выражение вида $a + bi$ (или $z = (a, b)$), где:
>
> - $a = Rez$ — действительная часть числа z
> - $b = Imz$ — мнимая часть числа z
> - $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица

Операции с комплексными числами:

- $(z_1 = a_1 + b_1 i) = (z_2 = a_2 + b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$
- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $z_1 \times z_2 = (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 i a_2 - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + bi$
Свойства комплексного сопряжения:

1. $z \in R \Leftrightarrow \overline{z} = z$
2. $z + \overline{z} \in R$
3. $z \times \overline{z} \in R : (a + b_i) \times (a - b_i) = a^2 + b^2$. Более того, $z \times \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
5. $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
