Лекция 07 — Решётки

Содержание

"Что из этого следует — непонятно, но доказывать можно."

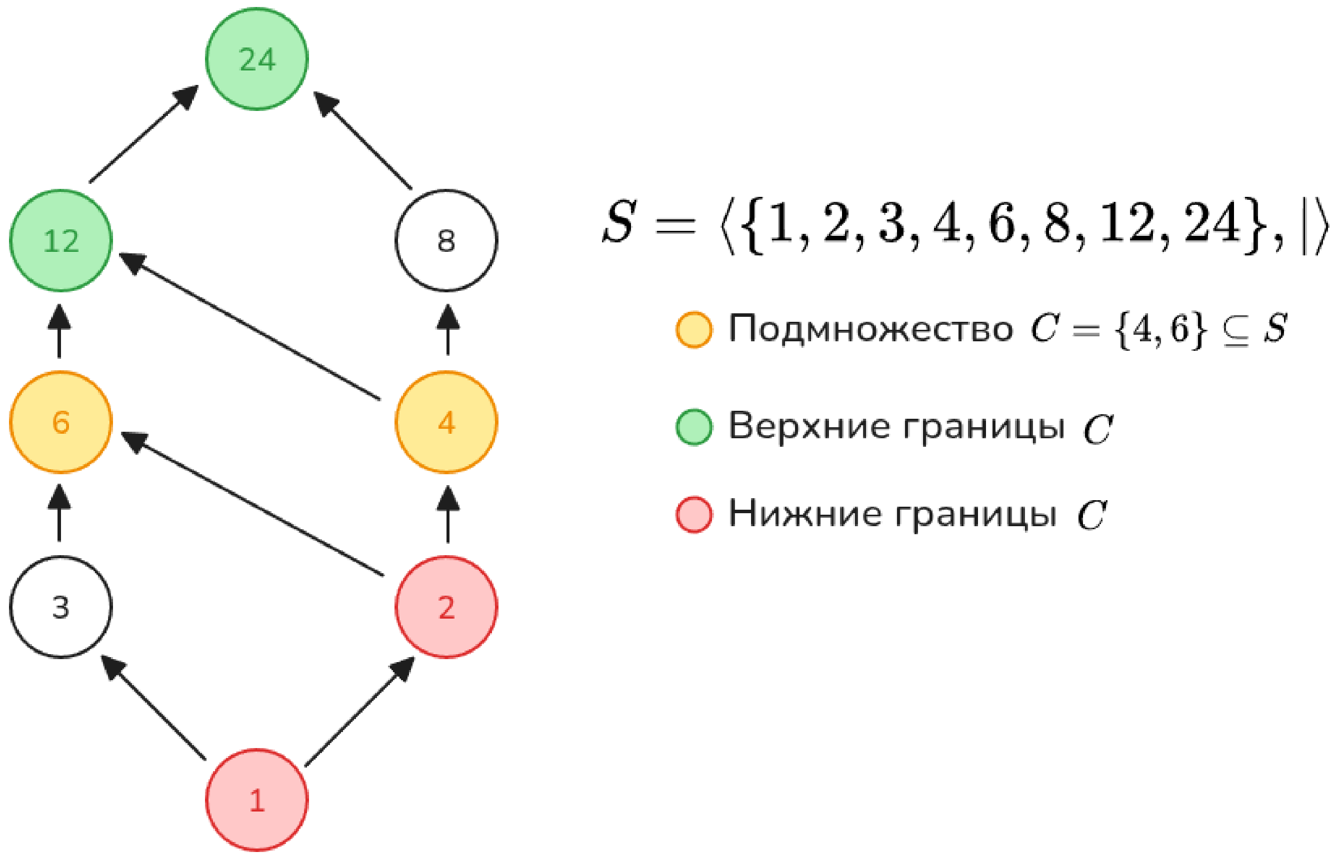
— К. И. Чухарев

Решётки

Info

Элемент $u \in S$ частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$ называется **верхней гранью** подмножества $C \subseteq S$, если $\forall x \in C : x \leq u$.

Элемент $l \in S$ частично упорядоченного множества $\langle S, \leq \rangle$ называется **нижней гранью** подмножества $C \subseteq S$, если $\forall x \in C : l \leq x$.

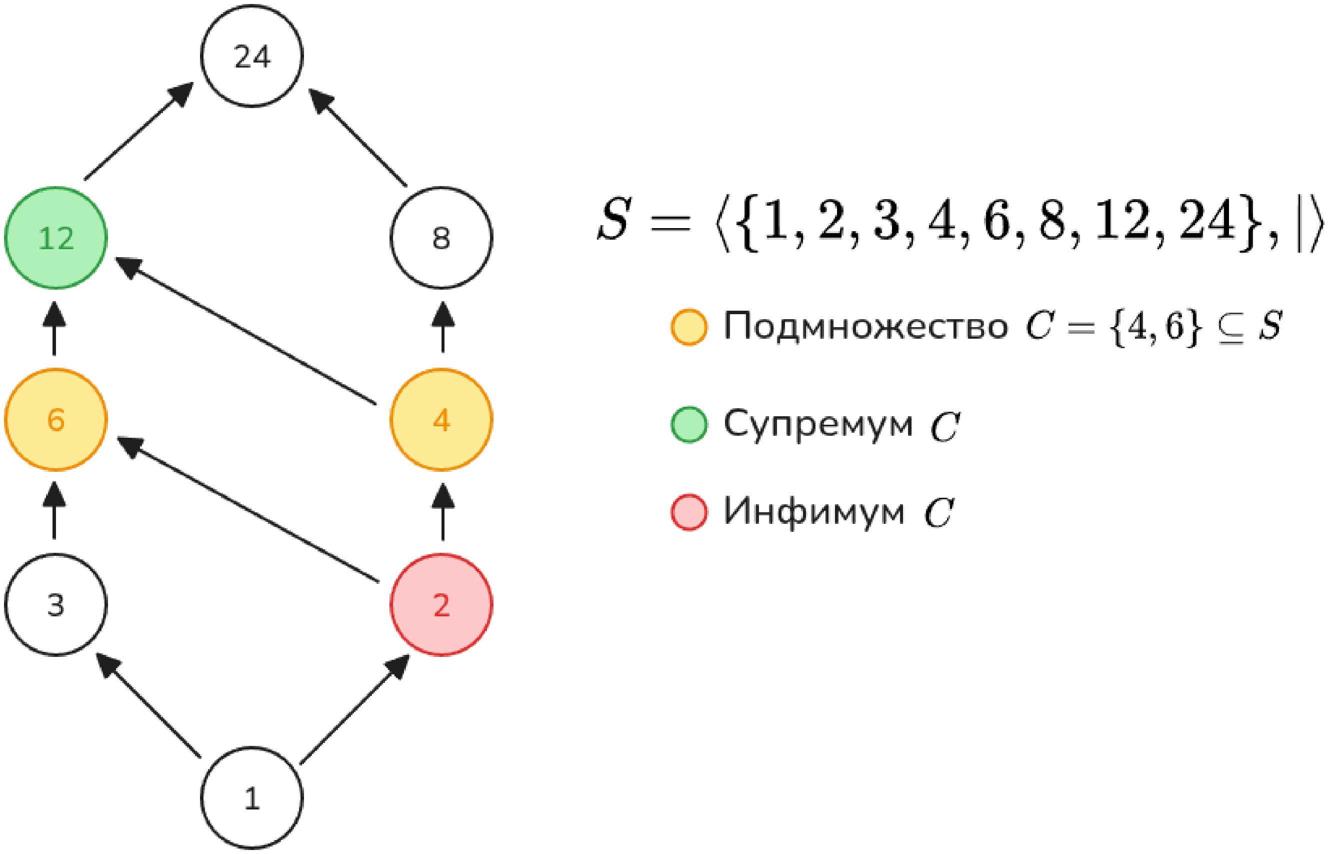


Info

Супремумом $\sup(C)$ (также $\bigvee C$, join) подмножества $C \subseteq S$ частично упорядоченного множества $\langle S, \leq\rangle$ называется *наименьшая* из его верхних границ.

Инфимумом $\inf(C)$ (также $\bigwedge C$, meet) подмножества $C \subseteq S$ частично упорядоченного множества $\langle S, \leq\rangle$ называется *наибольшая* из его нижних границ.

Замечание. Если супремум или инфимум существуют, то они единственны.

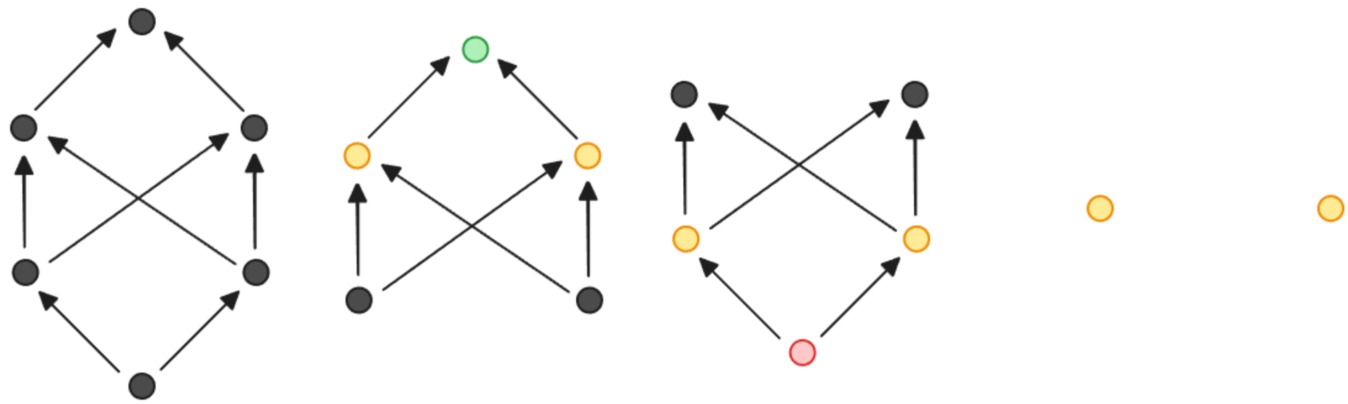


ⓘ **Info**

Частично упорядоченное множество $\langle S, \leq \rangle$, любое конечное подмножество $C \subseteq S$ которого имеет супремум, называется *верхней полурешёткой*.

Частично упорядоченное множество $\langle S, \leq \rangle$, любое конечное подмножество $C \subseteq S$ которого имеет инфимум, называется *нижней полурешёткой*.

Частично упорядоченное множество $\langle S, \leq \rangle$, являющееся одновременно нижней и верхней полурешётками, то есть любое конечное подмножество $C \subseteq S$ которого имеет инфимум и супремум, называется **решёткой**.



Решётка | Не решётка: нет инфимума! | Не решётка: нет супремума! | Не решётка: нет никаких граней!

Классификация

> **Info**
>
> Решётка называется **ограниченной**, если в ней есть наименьший элемент $\bot$ и наибольший элемент $\top$.

> **Info**
>
> Решётка называется **дистрибутивной**, если для операций join и meet выполнена дистрибутивность друг относительно друга:
>
> $$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
>
> $$x \wedge (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

B_1 — дистрибутивная решётка

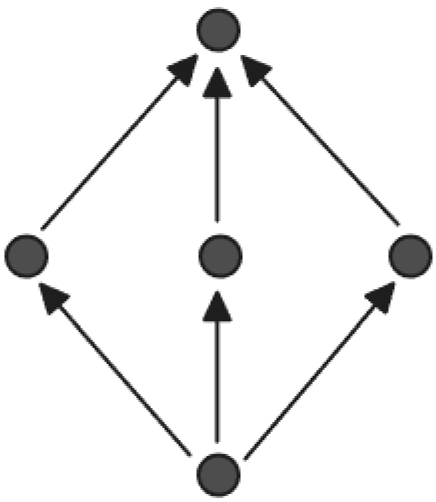
> **Info**

Решётка называется **модулярной**, если для любых $x, y, z, x \le z$ верно, что

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

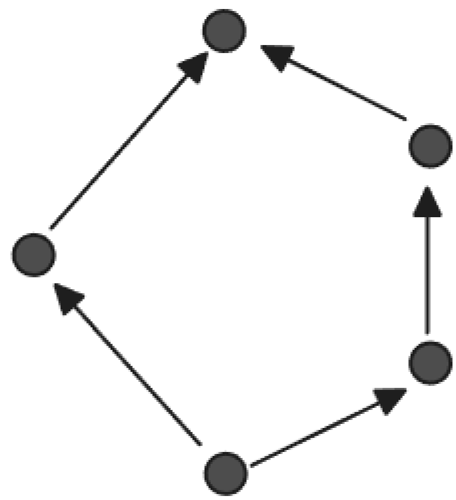
Warning

Любая дистрибутивная решёка — модулярная, но не наоборот.



M_3

— минимальная недистрибутивная модулярная решётка



N_5

— минимальная недистрибутивная немодулярная решётка

Important

Решётка *дистрибутивна* тогда и только тогда, когда она не содержит подрешёток, изоморфных M или .

Решётка *модулярна* тогда и только тоггда, когда она не содержит подрешёток, изоморфных .

Info

Решётка называется **дополненной** (*complemented*), если для каждого x существует y такой, что

$$x \vee y = \top$$

$$x \wedge y = \bot,$$

где y называется *дополнением* x.

Info

Булева алгебра — дополненная дистрибутивная решётка.