MA1

4. Funkce jedné proměnné, určitý a neurčitý integrál, řady

~~http://math.feld.cvut.cz/tkadlec/ma1.htm~~
~~http://math.feld.cvut.cz/tkadlec/ftp/vyuka/ma1.pdf~~ - jiz nefunkcni, dochazi k presunu na moodle
Výuka - ČVUT - Fakulta elektrotechnická (cvut.cz) - aktualizovany odkaz alespon s castecnymi info a odkazy na moodle (prof Tkadlec)
ČVUT - Fakulta elektrotechnická (cvut.cz) - Math Tutor (prof Habala)

Maximum, minimum, infimum...

Maximum množiny M (max M) je největší prvek množiny M (pokud existuje).
Minimum množiny M (min M) je nejmenší prvek množiny M (pokud existuje).
Supremum množiny M (sup M) je nejmenší horní mez množiny M (pokud existuje).
Infimum množiny M (inf M) je největší dolní mez množiny M (pokud existuje).
+∞/-∞ je pouze suprema/infima.

Funkce jedné proměnné

Zobrazení $A \to R$ kde $A \subset R$ je neprázdná. A je definiční obor funkce.

Prostá
Funkce je prostá když $x_1 \neq x_2$ => $f(x_1) \neq f(x_2)$, každé x se zobrazí na jiné y

Složené funkce
Složená funkce $f : A \to B$ a $g : B \to C$ pak složená funkce $g \circ f : A \to C$ je dána předpisem: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Inverzní funkce
Pro inverzní funkci platí $(g \circ f)(x) = x$, značíme $g = f^{-1}$
Funkce má inverzní funkci právě tehdy když je prostá
Inverzní funkce je symetrická podle osy 1. a 3. kvadrantu => pokud je funkce rostoucí pak i inverzní funkce je rostoucí

Spojitost
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu f(a) existuje takové okolí bodu a, že pro všechna x z tohoto okolí bodu a patří hodnoty f(x) do zvoleného okolí bodu f(a).

Na uzavřeném intervalu je funkce spojitá pokud je spojitá na otevřeném a na krajních bodech je spojitá jednostranně.

Součet, rozdíl, skládání a násobení spojitých funkcí je spojitá funkce.
U dělení je potřeba zajistit podmínku, že dělící funkce v daném bodě není nulová.

Definice.
Řekneme, že funkce *f* splňuje **vlastnost mezihodnoty** na množině *M*, jestliže pro libovolné dva body *x*,*y* z *M* a libovolnou hodnotu *d* mezi čísly *f(x)*, *f(y)* existuje číslo *c* v *M* splňující *f* (*c*) = *d*.

Věta (o extrémní hodnotě).
Každá funkce spojitá na omezeném uzavřeném intervalu nabývá své maximum a minimum na tomto intervalu.

Co můžeme vyšetřovat na funkci:

- shora (existuje supremum) nebo zdola (existuje infimum) omezená
- rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající → monotónní funkce, rostoucí a klesající jsou ryze monotónní
- lichá, sudá
- periodická
- mohutnost/spočetnost množiny, množiny mají stejnou mohutnost pokud existuje bijekce z jedné do druhé

- maximum, minimum, infimum, supremum

$$\textit{goniometrické}\text{: } \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\text{inverzní: } \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arccotg} x.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$$\textit{hyperbolické}\text{:}$$

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

$$\text{inverzní: } \operatorname{argsinh} x,\ \operatorname{argcosh} x,\ \operatorname{argtgh} x,\ \operatorname{argcotgh} x.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Limita funkce

Funkce

- Pokud najdeme limitu L, která je **reálné číslo**, řekneme, že je to **vlastní limita a že limita konverguje**. Jinak řekneme, že limita diverguje. Limita **nekonečno nebo mínus nekonečno** se nazývá **nevlastní limita**. Pokud najdeme nějakou limitu (vlastní či nevlastní), řekneme, že limita existuje. Jinak řekneme, že limita neexistuje.

Věta.
Jestliže má funkce limitu (oboustrannou, jednostrannou) v nějaké bodě *a*, pak je tato limita jednoznačně určena.

Výpočet

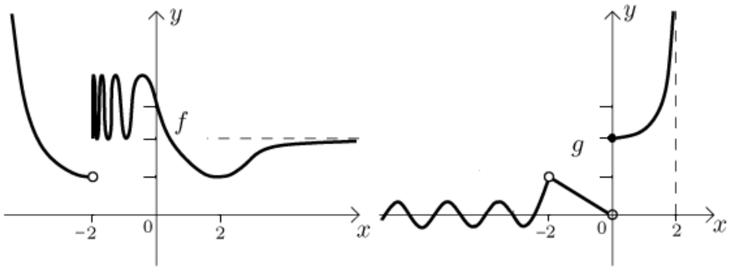
$$\lim_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right) = c\cdot\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(f(x)\right) \pm \lim_{x\to a}\left(g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(f(x)\right)\cdot\lim_{x\to a}\left(g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)}{\lim_{x\to a}\left(g(x)\right)}$$

$$\lim_{x\to a}\left(g[f(x)]\right) = g\left[\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)\right]$$



$\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = \infty$ $\quad\lim_{x\to-\infty}(g(x))$ neex.

$\lim_{x\to-2}(f(x))$ neex. $\quad\lim_{x\to-2}(g(x)) = 1$

$\lim_{x\to0}(f(x)) = 3$ $\quad\lim_{x\to0}(g(x))$ neex.

$\lim_{x\to2}(f(x)) = 1$

$\lim_{x\to\infty}(f(x)) = 2$

L'Hopitalovo pravidlo

Při hledání limity podílu dvou funkcí (i posloupností) dostaneme "neurčitý podíl" → řešíme L'Hopitalovým pravidlem

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť pro funkce f, g platí:*
(1) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ *nebo* $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$,
(2) *existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Pak

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Důkaz: pro $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$:
f', g' existují a $g'(x) \neq 0$ na některém $(a, b\rangle$, položme $f(a) = g(a) = 0$ (pak f, g jsou spojité na $\langle a, b\rangle$); podle Cauchyovy věty pro $\langle a, x\rangle$ ($x \in (a, b)$) existuje $c_x \in (a, x)$:
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[c_x\to a+]{x\to a+} \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Rychlost růstu

škála mocnin

Derivace

Definice. *Derivace funkce f v bodě a je*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Vlastnosti derivace

- jestliže je f diferencovatelná v bodě "a" a f'(a) ≠ 0, pak je i příslušná inverzní funkce f −1 diferencovatelná v b
- Jestliže je funkce f diferencovatelná v bodě a, pak je f spojitá v a.
- Nechť $a < b$ jsou reálná čísla. Nechť f je funkce spojitá na intervalu a, b a diferencovatelná na (a, b). Jestliže $f(a) = f(b)$, pak existuje c z (a, b) takové, že $f'(c) = 0$ (věta o střední hodnotě - **Rolleova věta**)

Význam derivace

1. geometrický význam

- směrnice tečny ****ke grafu dané funkce v daném bodě

2. fyzikální význam

- derivace podle časové proměnné, vyjadřující rychlost změny nějaké proměnné v čase (např. okamžitá rychlost: v= ds dt)
- diferenciální rovnice

Monotonie

- vlastnost, označující, zda je funkce v bodě či na daném intervalu monotónní

existuje nějaké okolí U(a) bodu a takové, že pro všechna x v tomto okolí platí:
Je-li $f'(x) > 0$ uvnitř I pak je f **rostoucí** v I
Je-li $f'(x) < 0$ uvnitř I pak je f **klesající** v I
Je-li $f'(x) \geq 0$ uvnitř I pak je f **neklesající** v I
Je-li $f'(x) \leq 0$ uvnitř I pak je f **nerostoucí** v I

Pokud $f'(a) = 0$

1. Je-li $f''(a) > 0$, pak f má v a ostré lokální minimum
2. Je-li $f''(a) < 0$, pak f má v a ostré lokální maximum

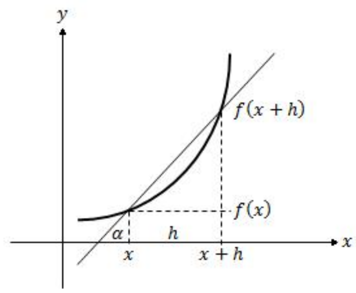
Kritický bod
Definice: Nechť je funkce f definovaná na nějakém okolí bodu c. Řekneme, že c je **kritický bod**, jestliže f '(c) = 0 nebo f '(c) neexistuje.
Lokální extrémy
Funkce f má v bodě a lokální minimum (lokální maximum), jestliže $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$) na některémprstencovém okolí bodu a.
$-$ => minimum
$+$ => maximum
Inflexní bod - f přechází z konvexní na konkávní nebo naopak a je tam dvakrát diferencovatelná

$$\text{Funkce na určitých intervalech mohou být} \begin{cases} \textbf{lineární} & \text{druhá derivace je na daném intervalu rovna} & \boxed{0} \\ \textbf{konvexní} & \text{znaménko druhé derivace je na daném intervalu} & \boxed{+} \\ \textbf{konkávní} & \text{znaménko druhé derivace je na daném intervalu} & \boxed{-} \end{cases}$$

Věta.
1) *Má-li f v a inflexi, pak $f''(a)$ neexistuje nebo $f''(a) = 0$.*
2) *Je-li $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, pak f má v a inflexi.*

Asymptoty
viz. příklady

Parciální derivace
Parciální derivace funkce více proměnných představuje v matematice takovou derivaci dané funkce, při které se derivuje pouze vzhledem **k jedné z proměnných**, ostatní proměnné jsou považovány za konstanty
Gradient
= diferenciální operátor udávající směr růstu

If f is a function of the independent variable x, the derivative of the function is defined by the equation:	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
	*$f(x+h) - f(x)$ is the height of the triangle.* *h is the base length of the triangle.* *The slope is:* $\tan\alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$ *So when h tends to zero the expression become:* $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *This is the slop of the tangent line to the function $f(x)$ at point x.*
chain rule: *Suppose that: $y = y(u)$ and $u = u(x)$ then $\frac{dy}{dx}$ is defined by:*	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ $du \neq 0$ *and* $dx \neq 0$
multiplication rule: *If $f(x) = g(x) \cdot u(x)$ then f' is:*	$f'(x) = g'u + gu'$
quotient rule: *If $f(x) = \frac{g(x)}{u(x)}$ then f' is:*	$f'(x) = \frac{g' \cdot u - g \cdot u'}{u^2}$ $u \neq 0$
Reciprocal rule: *If $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ then f' is:*	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$ $u \neq 0$
Addition rule: *If $f = f(x)$ and $g = g(x)$ and a and b are real numbers then $(af + bg)'$ is:*	$(af + bg)' = af' + bg'$
Constant rule: *If $f(x)$ is a constant then f' is:*	$f' = 0$
If $f = f(x)$ then all the following notations for derivatives are valid:	*First derivative:* $\frac{df}{dx} \equiv f' \equiv \dot{f} \equiv f_x$ *Second derivative:* $\frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \equiv f'' \equiv \ddot{f} \equiv f_{xx}$

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} & &(n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\
(\sin x)' &= \cos x & &(\cos x)' = -\sin x \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & &(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & &(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2} & &(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\
(a^x)' &= a^x \cdot \ln a & &(e^x)' = e^x \\
\left(e^{f(x)}\right)' &= e^{f(x)} \cdot f'(x) & &(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)
\end{aligned}
$$

Význam derivace:

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ … směrnice sečny body $[a, f(a)], [x, f(x)]$
$f'(a)$ … směrnice tečny v $[a, f(a)]$
tečna:

```
 $y - f(a) = f'(a)(x-a)$
$y=f(a) + f'(a) (x-a)$
```

směrový vektor tečny (kolmý k normále):

```
$(1,f'(a))$
```

normála:

```
$x+f'(a)y=a+f'(a)f(a)$
                              $x=a$ pro $f'(a) = 0$
                              $y=f(a)-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ pro $f'(a) \neq 0$
```

Věta (Rolleova). *Nechť pro funkci f platí*
(1) *je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$;*
(2) *má derivaci v každém bodě intervalu (a,b);*
(3) $f(a)=f(b)$.
Pak $f'(c)=0$ pro některý bod $c\in(a,b)$.

Důkaz: pro konstantní je $f'=0$ na (a,b);
nekonstantní nabývá minima nebo maxima uvnitř $\langle a,b\rangle$;
například pro maximum v bodě $c\in(a,b)$:
$f'(c)=f'_-(c)=\lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0,$
$f'(c)=f'_+(c)=\lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0.$

Taylorův Polynom

Taylorův polynom

Věta (Taylor). *Nechť funkce f má spojité derivace do řádu $n\geq 0$ na $\langle a,x\rangle$, $f^{(n+1)}$ existuje v každém bodě (a,x). Pak existuje $c\in(a,x)$ tak, že*

$$f(x)=\underbrace{f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)}+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$T_n(x)$: *Taylorův polynom* funkce f v bodě a řádu n,
zbytek v Lagrangeově tvaru.

Shrnutí

Shrnutí vyšetřování průběhu funkce

f: definiční obor, sudost, lichost, perioda, spojitost, limity v hraničních bodech $D(f)$, v bodech nespojitosti, asymptoty.
f': monotonie, (lokální) extrémy, obor hodnot, tečny grafu v hraničních bodech $D(f)$, $D(f')$.
f'': konvexita/konkavita, inflexní body (včetně tečen).
Graf.

Návod z matfyzu:

Vyšetřování průběhu funkce

(i) Určíme definiční obor, nulové body a provedeme diskusi spojitosti funkce.

(ii) Symetrie funkce:
lichost($f(-x) = -f(x)$), sudost($f(-x) = f(x)$), periodicita ($f(x+P) = f(x)$ a $x \in D_f \Rightarrow x+P \in D_f$).

(iii) Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.

(iv) První derivace, intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy, určíme obor hodnot:

- $f'(x) > 0 \Rightarrow$ rostoucí $\quad f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ neklesající
- $f'(x) < 0 \Rightarrow$ klesající $\quad f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ nerostoucí
- $f'(x)$ neexistuje, x je krajní bod uzavřeného intervalu nebo $f'(x) = 0 \ldots$ jediné body, kde by mohl být extrém. Derivace nalevo od tohoto bodu má jiné znaménko než napravo a funkce je definovaná $\Rightarrow$ je to extrém.

(v) Druhá derivace, určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní, určíme inflexní body:

- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ ryze konvexní $\quad f''(x) \geq 0 \Rightarrow$ konvexní
- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ ryze konkávní $\quad f''(x) \leq 0 \Rightarrow$ konkávní
- $f''(x)$ neexistuje nebo $f''(x) = 0 \ldots$ jediné možné inflexní body. Druhá derivace nalevo od tohoto bodu má jiné znaménko než napravo a funkce má spojitou první derivaci $\Rightarrow$ je to inflexní bod. Inflexní bod nemůže být v bodě, kde funkce není definovaná, přestože v tomto bodě funkce mění průběh z konvexního na konkávní nebo naopak.

(vi) Určíme asymptoty funkce. $y = kx + q$ je asymptota v ∞ $(-\infty)$ právě tehdy, když

$$k = \lim_{x\to\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\infty(-\infty)} (f(x) - kx) \quad \text{jsou vlastní.}$$

(vii) Načrtneme graf funkce a dopočteme a zaznačíme průsečíky s osami.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
Definiční obor je $D(f) = \mathbb{R}$.

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou
$\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = -\frac{\infty}{\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$,
$\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\infty} = 0^+$.

Abychom zjistili, zda je f sudá, podíváme se, zda $f(-x) = f(x)$.
Protože $f(-x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \neq f(x)$, funkce není sudá.

Abychom zjistili, zda je f lichá, podíváme se, zda $-f(-x) = f(x)$.
Protože $-f(-x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$, je funkce lichá.

Průsečík s osou x získáme tak, že dosadíme $y = 0$:
$0 = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow x = 0$, takže dostáváme bod $(0, 0)$.

Průsečík s osou y získáme dosazením $x = 0$:
$y = 0 \cdot e^0 = 0$, tedy opět bod $(0, 0)$.

První derivace funkce f je $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x)(1 + x)$.

Položením $f'(x) = 0$ dostáváme stacionární body $(1, \frac{1}{\sqrt{e}})$, $(-1, -\frac{1}{\sqrt{e}})$.

$f'(x) < 0$ na intervalu $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Funkce f je tedy na tomto intervalu klesající.
$f'(x) > 0$ na intervalu $(-1, 1)$. Funkce f je tedy na tomto intervalu rostoucí.

Z toho, kdy funkce f roste a klesá, je vidět, že bod $(1, \frac{1}{\sqrt{e}})$ je lokální maximum a bod $(-1, -\frac{1}{\sqrt{e}})$ lokální minimum.

Druhá derivace funkce f je $f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

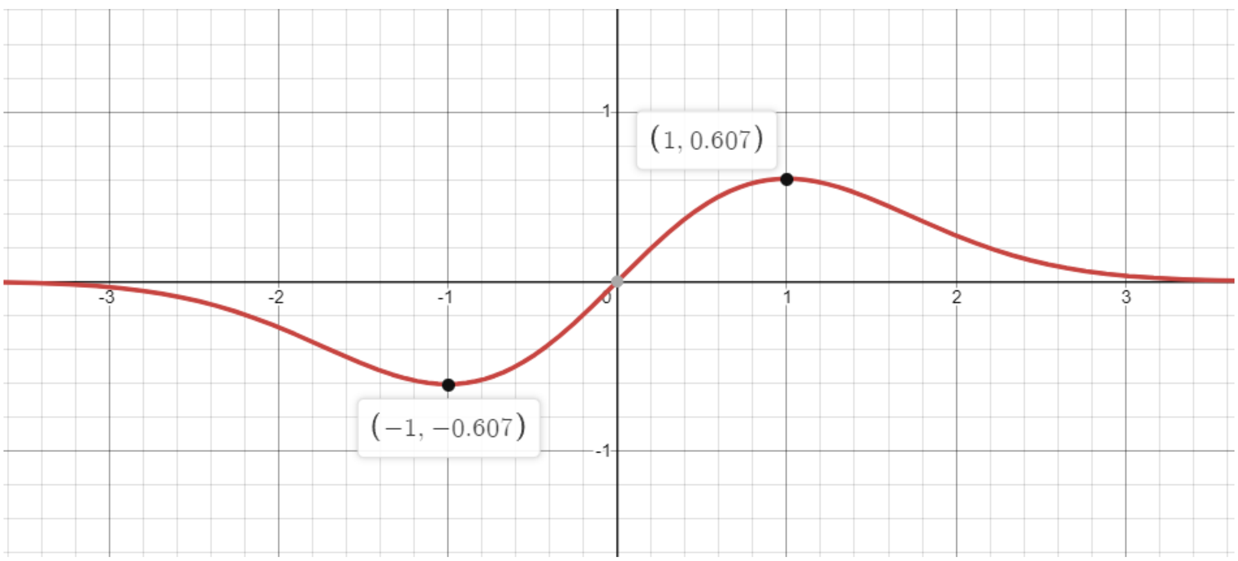
$f'' < 0$ na intervalu $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Funkce f je na tomto intervalu konkávní.
$f'' > 0$ na intervalu $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Funkce f je na tomto intervalu konvexní.

Inflexní body jsou tedy $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ a $(0, 0)$.

Protože $D(f) = \mathbb{R}$, nemáme žádné asymptoty bez směrnice.

Rovnice asymptoty se směrnicí je $y = kx + q$. Spočítáme
$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{e^\infty} = 0$,
$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} (xe^{-\frac{x^2}{2}}) = 0$.
Dostáváme asymptotu $y = 0$.

Ze zjištěných faktů lze pak snadno sestrojit graf funkce f.



Určitý integrál

Riemannův (určitý) integrál odpovídá matematickému obsahu oblasti pod grafem f, který je roven geometrickému obsahu částí nad osou x mínus obsah částí pod osou x.
Nekonečný součet nekonečně malých (úzkých) sloupců pod křivkou
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Výpočet určitého integrálu

- Standardní způsob výpočtu určitého integrálu je založen na **základní větě integrálního počtu**

Nejprve se najde primitivní funkce F k dané funkci f na daném intervalu a, b a pak se použije Newton-Leibnizův vzorec: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$,
$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$
funguje jen pro funkce f, které jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, jinak řešíme jako **nevlastní integrál**

- při hledání primitivní funkce se používá metoda **substituce** a **per-partes**

Věta (Newtonova–Leibnizova formule). *Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$, $\int_a^b f$ existuje a F je primitivní funkce k f na (a, b). Pak*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b-) - F(a+)\,.$$

Nevlastní integrál

Definice: Nechť a je reálné číslo, nechť $b > a$ je reálné číslo nebo $b = \infty$. Nechť f je funkce Riemannovsky integrovatelná na intervalech a, B pro všechna B z (a, b). Pak definujeme nevlastní Riemannův integrál z f od a do b jako:
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to a^+} (\int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x) + \lim\limits_{B\to b^-} (\int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x)$

Níže je to, co tu bylo původně. Je to asi špatně, pokud se nepletu.
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{B\to b^-} (\int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x)$
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to a^+} (\int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x)$

O nevlastní integrál se jedná pokud:

- jedna či obě integrační meze (koncové body integračního intervalu) jsou nekonečné
- integrovaná funkce není spojitá v některých bodech integračního intervalu

Metody výpočtu

1. substituce
   obecně

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \left| \begin{aligned} y &= g(x) \\ dy &= g'(x)\,dx \end{aligned} \right| = \int f(y)\,dy$$
$$= F(y) + C = F(g(x)) + C.$$

příklad

$$\int \mathrm{cotg}(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{1}{\sin(x)}\,\cos(x)\,dx = \left| \begin{aligned} y &= \sin(x) \\ dy &= \cos(x)\,dx \end{aligned} \right|$$
$$= \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + C = \ln|\sin(x)| + C,\ x \neq k\pi.$$

2. per-partes
   obecně
   $$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

příklad

$$\int_0^\pi x\cos(x)\,dx = \left| \begin{matrix} f = x & g' = \cos(x) \\ f' = 1 & g = \sin(x) \end{matrix} \right| = \Big[x\,\sin(x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\,dx$$
$$= \pi\sin(\pi) - 0 - \int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\int_0^\pi \sin(x)\,dx.$$

3. parciální zlomky

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{r_n} \frac{A_{n,i}}{(x-a_n)^i} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{t_m} \frac{B_{m,j}x + C_{m,j}}{(x^2+b_mx+c_m)^j}$$
$$= \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,r_1}}{(x-a_1)^{r_1}}$$
$$+ \frac{A_{2,1}}{(x-a_2)} + \ldots + \frac{A_{2,r_2}}{(x-a_2)^{r_2}} + \ldots + \frac{A_{N,1}}{(x-a_N)} + \ldots + \frac{A_{N,r_N}}{(x-a_2)^{r_N}}$$
$$+ \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+b_1x+c_1)} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \ldots \frac{B_{1,t_1}x+C_{1,t_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{t_1}} + \ldots$$
$$+ \frac{B_{M,1}x+C_{M,1}}{(x^2+b_Mx+c_M)} + \ldots + \frac{B_{M,t_M}x+C_{M,t_M}}{(x^2+b_Mx+c_M)^{t_M}}.$$

4. tabulkové integrály

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x>0; \quad \text{pro } \alpha \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,\ x\neq 0 \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \mathrm{tg}(x) + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\mathrm{cotg}(x) + C,\ x \neq k\pi$$
$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \mathrm{tgh}(x) + C$$
$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = -\mathrm{cotgh}(x) + C,\ x\neq 0$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C,\ x \in (-1,1)$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$$

Střední hodnota funkce na intervalu

Střední hodnota funkce f na intervalu a, b je $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Obsah plochy pod křivkou

Jednoduše hodnota určitého integrálu

Neurčitý integrál

Poznámka: Habala ho ztotožňuje s Newtonovým (jsou i jiné definice, ale držel bych se jeho)
= množina primitivních funkcí integrované funkce
Primitivní funkce: Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I , pokud F' = f na intervalu I.
Newtonův integrál: Nechť f je funkce, která má na intervalu I primitivní funkci. Definujeme neurčitý integrál f na I jako množinu všech takových primitivních funkcí. Značení: ∫ f(x) d x = {F; F je primitivní funkce k f na I}. Jestliže máme jednu takovou primitivní funkci F, pak nepřesně ale tradičně píšeme ∫ f(x) d x =F(x) +C, x ∈ I

Řady

Definice: Nechť $a_{k\geq n_0}$ je posloupnost (reálných čísel). Pojmem řada rozumíme $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$
Pro všechna celá čísla $N > n_0$ definujeme její částečné součty řady vzorcem: $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$

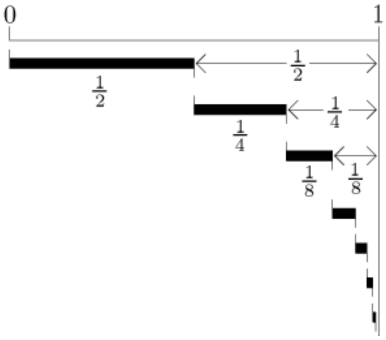
- řada konverguje k A, jestliže posloupnost s_n konverguje k A.

$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = a$

- řada diverguje, jestliže posloupnost s_n diverguje.

$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \pm\infty$

Hromadná hodnota posloupnosti
Pokud v každém jejím okolí leží nekonečně mnoho členů posloupnosti
Příklad:



Limita Posloupnosti

- **Definice:** Uvažujme posloupnost a_n. Řekneme, že nekonečno je limita této posloupnosti pro n jdoucí do nekonečna, nebo že posloupnost jde do nekonečna pro n jdoucí do nekonečna, jestliže pro každé reálné číslo K existuje přirozené číslo N takové, že pro všechna n = N, N + 1, N + 2,... máme a n >K .
- Když má posloupnost limitu, která je reálné číslo, řekneme, že posloupnost konverguje. Taková limita se nazývá **vlastní limita**.
- Když má posloupnost limitu, která je plus či mínus nekonečno, říkáme této limitě **nevlastní limita**.
- Když má posloupnost limitu, vlastní či nevlastní, řekneme, že limita **existuje**.
- Pokud posloupnost nemá vůbec žádnou limitu, řekneme, že limita **neexistuje**.
- Posloupnosti s nevlastní limitou a bez limity se nazývají **divergentní**.

Testování konvergence řad

Věta (nutná podmínka konvergence).
Jestliže řada $\sum a_k$ konverguje, pak nutně posloupnost $\{a_k\}$ konverguje k 0.

Absolutní konvergence: Řada $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje, pokud konverguje $\sum_{k=n_0}^{\infty} \mid a_k \mid$ metody testování (všechny na http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/2/txc3eb2.htm**)**

Věta. **(integrální kritérium)**
Nechť $f \geq 0$ je nerostoucí na $\langle n_0, \infty)$ pro $n_0 \in \mathbb{Z}$.
Řada $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.

Navíc pak platí

$$\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \leq f(n_0) + \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

1.
2. (není v požadavkách)

Důsledek. (p**-test**)
$\sum \frac{1}{k^p}$ konverguje tehdy a jen tehdy, když $p > 1$.

Věta. **(srovnávací kritérium)**
Uvažujme řady $\sum a_k$, $\sum b_k$.
Nechť existuje n_0 tak, aby $0 \leq a_k \leq b_k$ pro všechna $k \geq n_0$.

(i) Jestliže $\sum b_k$ konverguje, pak také $\sum a_k$ konverguje.

(ii) Jestliže $\sum a_k$ diverguje, pak také $\sum b_k$ diverguje

Symbolicky: $a_k \leq b_k \implies \sum a_k \leq \sum b_k$.

3. (není v požadavkách)

Věta. (**limitní srovnávací kritérium**)
Uvažujme řady $\sum a_k$, $\sum b_k$.
Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{Z}$ tak, aby $a_k, b_k > 0$ pro všechna $k \geq n_0$.

Předpokládejme, že $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = A > 0$. Pak

$\sum a_k$ konverguje tehdy a jen tehdy, když konverguje $\sum b_k$.

Symbolicky: $a_k \sim b_k \implies \sum a_k \sim \sum b_k$.

Věta.
Uvažujme řadu $\sum a_k$, nechť $a_k \geq 0$ pro všechna k.

(i) **(limitní) odmocninové kritérium**:
Předpokládejme, že $\varrho = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{a_k}\right)$ konverguje.
1) Jestliže $\varrho < 1$, pak $\sum a_k$ konverguje.
2) Jestliže $\varrho > 1$, pak $\sum a_k$ diverguje ($= \infty$).

(ii) **(limitní) podílové kritérium**:
Předpokládejme, že $\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$ konverguje.
1) Jestliže $\lambda < 1$, pak $\sum a_k$ konverguje.
2) Jestliže $\lambda > 1$, pak $\sum a_k$ diverguje ($= \infty$).

4.
5.

- pro alternující řady (“střídající +,-,+,... ”)

Věta. (**Leibnizovo kritérium**)
Uvažujme řadu $\sum a_k$, nechť $a_k = (-1)^k b_k$.
Předpokládejme, že $b_k \geq 0$ pro všechna k a $\{b_k\}$ je nerostoucí.

Řada $\sum(-1)^k b_k$ konverguje právě tehdy, když $\lim\limits_{k\to\infty} (b_k) = 0$.

Geometrická řada

=součet členů geometrické posloupnosti $(a_{n+1} = a_n \cdot q)$
definice: Nechť $a, q \in R$. Řada $\sum_{k=n_0}^{\infty} a \cdot q^k$ se nazývá **geometrická řada**.
Součet geometrické řady je dán jako limita posloupnosti n-tých částečných součtů:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot q^n}{q-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1 \\ \pm\infty, & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{nekonverguje (osciluje)} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

Aplikace řad

Použití Fourierových řad pro frekvenční analýzu
Slouží k zápisu jakéhokoliv periodického průběhu pomocí goniometrických funkcí sinus a kosinus.
Základní myšlenka Fourierových řad je, že danou funkci vyjádříme jako kombinaci oscilací, počínaje tou, jejíž frekvence je dána zadanou funkcí (buď její periodicitou nebo délkou omezeného intervalu, na kterém je zadána), a pak se berou násobky této frekvence čili používáme dělených period.

Jelikož $(1,1) = 2\pi$, $(\sin nt, \sin nt) = (\cos nt, \cos nt) = \pi$, přiřazujeme funkci f její Fourierovu řadu:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)],$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \quad k = 1,2,\ldots.$$

- **zvuková komprese:** Když dostaneme zvukový vzorek, Fourierova transformace nám umožňuje jej rozložit na základní vlny a uchovat v tomto tvaru.
- **uchovávání obrazové informace** (např. databáze otisků)

Mocninná řada ve výpočtech

- Před rozmachem kalkulaček se při výpočtech všechny funkce nahrazovaly Taylorovými řadami, popřípadě jejich konečnými částmi - polynomy.
- **vyčíslení Pí:** Pí je transcendentní číslo, což znamená, že jej nemůžeme vyjádřit pomocí algebraických operací. Jeden způsob jeho vyčíslení nabízí řady.
- **výpočet složitých integrálů,** které nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí a obvyklých operací (včetně skládání)
- **Taylorův polynom**

Taylorův polynom a řada
Taylorův polynom aproximuje hodnoty funkce, která má v daném bodě derivaci, pomocí polynomu, jehož koeficienty závisí na derivacích funkce v tomto bodě. Čím vyšší stupeň tím vyšší přesnost pro vzdálenější body.

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

Taylorova řada se liší od polynomu tím, že se jedná o **nekonečný** součet

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Důležité řady

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad x \in I\!R; \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad x \in I\!R; \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \qquad x \in I\!R; \\ \ln(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots, \qquad x \in (0,2\rangle; \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \qquad x \in (-1,1); \\ (c+x)^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{A}{k} c^{A-k}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(A-1)\cdot\ldots\cdot(A-k+1)}{k!}c^{A-k}x^k, \qquad x \in (-c,c). \end{aligned}$$