MA2

9. Funkce více proměnných. Mocninné řady. Dvojný a trojný integrál.

Integrály a derivace + příklad: http://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/veci-ma2.htm
Souhrn Integrály + derivace: http://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/veci-ma2/ma2kniha.pdf
Mocninné rady: http://math.feld.cvut.cz/tiser/kkap4.pdf
Integrální počet více proměnných: http://math.feld.cvut.cz/tiser/intpocet.htm

---

Funkce více proměnných

zdroj - skripta Tišer: https://math.feld.cvut.cz/tiser/vyuka.htm (Habalův souhrn bude asi užitečnější)

Na množině $\mathbb{R}^n$ jsou definovány operace sčítání a násobení skalárem (tj. reálným číslem) následujícím způsobem: Jsou-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dva prvky $\mathbb{R}^n$, pak

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda \boldsymbol{x} &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ jde o běžné sčítání a násobky vektorů, které známe z fyziky.

Kromě těchto operací máme ještě skalární součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, který je definován vztahem

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Definice 1.3. *Nechť $\boldsymbol{x}$ je bod v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$. Každou množinu*

$$U_\delta(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta\}$$

nazveme (kruhovým) **okolím bodu** $\boldsymbol{x}$. *Každou množinu*

$$P_\delta(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta\}$$

nazveme **prstencovým okolím** *bodu* $\boldsymbol{x}$.

Definice 1.4. *Nechť $\boldsymbol{x}$ je bod a M je množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}$ je*

(i) **vnitřním bodem** *množiny M, jestliže existuje okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ tak, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \subset M;$$

(ii) **hraničním bodem** *množiny M, jestliže pro každé okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ platí současně*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset \quad a \quad U(\boldsymbol{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset;$$

(iii) **vnějším bodem** *množiny M, jestliže existuje takové okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M = \emptyset;$$

(iv) **hromadným bodem** *množiny M, jestliže pro každé prstencové okolí $P(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ platí*

$$P(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset;$$

(v) **izolovaným bodem** *množiny M, jestliže existuje takové okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M = \{\boldsymbol{x}\}.$$

Definice 1.6. *Nechť M je množina v euklidovském prostoru.* **Vnitřek** *M^o množiny M je množina všech vnitřních bodů množiny M.* **Hranice** *∂M množiny M je množina všech hraničních bodů.* **Uzávěr** *$\overline{M}$ množiny M je množina $M \cup \partial M$.*

Funkce n-proměnných je zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ zobrazující jistou množinu M v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ do množiny reálných čísel. Množina M se přitom nazývá *definiční obor* funkce f, který se často označuje symbolem $D(f)$. Pokud nebude definiční obor funkce specifikován, budeme jím rozumět maximální množinu, na které může být daná funkce definována.

Definice 3.1. *Nechť f je funkce definovaná na podmnožině N euklidovského prostoru. Předpokládejme, že bod $\boldsymbol{a}$ je hromadným bodem množiny N. Řekneme, že* **funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ limitu** *$b \in \mathbb{R}$ (vzhledem k množině N), píšeme*

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in N}} f(\boldsymbol{x}) = b,$$

jestliže pro každé okolí $U(b)$ bodu b existuje prstencové okolí $P(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$, že $f(P \cap N) \subset U$. Vyjádřeno pomocí nerovností to znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí následující implikace

$$0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta,\ \boldsymbol{x} \in N \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - b| < \varepsilon.$$

Definice 3.6. *Nechť $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce daná na množině M euklidovského prostoru. Řekneme, že funkce f je* **spojitá v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in M$**, *jestliže je bod $\boldsymbol{x}_0$ buďto izolovaný bod množiny M nebo platí, že*

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Funkce f je **spojitá**, *je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.*

Derivace

Definice 5.1. *Nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ euklidovského prostoru.* **Derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in X$ ve směru $\boldsymbol{h} \in X$** *(krátce* **směrovou derivací***) nazýváme limitu*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

K označení této limity budeme používat symbol $\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}_0)$.

Je vidět, že derivace ve směru $\boldsymbol{h} = 0$ je vždy nulová.

Základní způsob výpočtu (později pak s využitím gradientu):

Příklad 5.3. Nalezněme směrové derivace funkce

$$f(x,y) = e^{x-y^2}$$

v bodě $(0,0)$ ve směru vektorů $(1,0), (-1,0)$ a $(1,1)$.

Nejdříve nalezneme „průřezové funkce“ $\varphi(t)$. Pro $\boldsymbol{h} = (1,0)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,0)) = f(t,0) = e^t,$$

a proto $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = e^0 = 1$.

Bude-li $\boldsymbol{h} = (-1,0)$ víme již podle Poznámky 5.2 (i), že derivace musí změnit znaménko. Pro ilustraci se však stejně podívejme na průřez funkce

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(-1,0)) = f(-t,0) = e^{-t}.$$

Skutečně tedy $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = -e^0 = -1$. Konečně pro $\boldsymbol{h} = (1,1)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,1)) = f(t,t) = e^{t-t^2}.$$

Jelikož $\varphi'(t) = (1-2t)e^{t-t^2}$, je $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = 1$.

Definice 5.5. *Nechť $f\colon G \to \mathbb{R}$ je funkce definovan8 na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$.* **Parciální derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x} \in G$ podle k proměnné** x_i $(i = 1, \dots, n)$ *nazýváme směrovou derivaci $\partial_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x})$. Pro její označení používáme zápis*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Vektor

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \right)$$

se nazývá **gradient** *funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$.*

Příklad 5.6. (i) Určíme parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = e^{x-y^2}$. Podle postupu naznačeného výše je

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x-y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^{x-y^2}(-2y). \end{aligned}$$

Definice 5.9. *Nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce na otevřené podmnožině $G \subset \mathbb{R}^n$ v euklidovského prostoru. Řekněme, že lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je* **(totální) diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in G$**, *jestliže*

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{5.7}$$

Zobrazení, které má v daném bodě diferenciál budeme nazývat diferencovatelné. Pro označení diferenciálu zobrazení f v bodě $\boldsymbol{x}_0$ používáme symbol $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$. (Pozor tento symbol reprezentuje zobrazení!) Hodnotu tohoto zobrazení v bodě $\boldsymbol{h}$ značíme $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}]$.

Tvrzení 5.11. *Je-li funkce f diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{x}$ euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, pak má v tomto bodě všechny směrové derivace a platí*

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) \text{ pro všechna } \boldsymbol{h} \in X. \tag{5.10}$$

Druhý způsob výpočtu směrové derivace:

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}). \tag{5.12}$$

Příklad 5.12. Pro funkci $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ vypočtěte derivaci ve směru $\boldsymbol{h} = (-1, 1, 1)$ v bodě $\boldsymbol{x} = (1, 2 - 1)$.

Podle (5.12) stačí skalárně vynásobit směr $\boldsymbol{h}$ a $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = (2, 4, 2)$:

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = (-1, 1, 1) \cdot (2, 4, 2) = 4.$$

Věta 5.14. *Nechť f je funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou spojité v bodě $\boldsymbol{x}$. Pak f má v bodě $\boldsymbol{x}$ diferenciál.*

Příklad 5.15. Nechť $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Budeme vyšetřovat diferenciál v obecném bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ můžeme určit parciální derivace mechanickým derivováním složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) x. \end{aligned}$$

Tyto derivace jsou spojité a na základě Věty 5.14 můžeme konstatovat, že f je diferencovatelná v každém bodě množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pro tyto body máme

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) y \ \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) x \ \mathrm{d}y.$$

Zvláštním případem je bod $(0, 0)$. Protože je f je identicky rovna nule na souřadnicových osách je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Jediný možný kandidát na diferenciál je tedy nulová funkce. Zabývejme se proto výrazem

$$\frac{f(\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{0}) - 0}{\|\boldsymbol{h}\|} = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Tento výraz nemá limitu pro $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$, neboť vzhledem k souřadnicovým osám je limita nulová, zatímco vzhledem přímce o rovnici $h_1 = h_2$ je rovna $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Funkce f tedy není diferencovatelná v počátku.

Geometrický a fyzikální význam diferenciálu

- Tečná rovina a normála ke grafu funkce

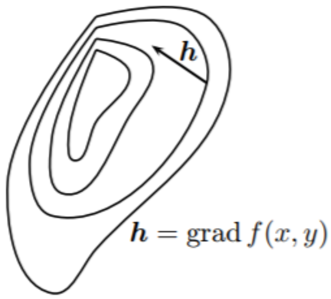
  Předpokládejme, že funkce $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Geometricky tento fakt znamená, že existuje tečná rovina T ke grafu funkce f v bodě $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$. Je popsána pomocí diferenciálu jako graf funkce

  $$z = f(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0]. \tag{5.16}$$

- Normálový vektor tečné roviny je $(\frac{df(x_0)}{dx}, \frac{df(x_0)}{dy}, -1)$
- Uhel mezi tečnými rovinami je roven úhlu mezi jejich normálami $cos\alpha = \frac{|n_1 * n_2|}{||n_1|| * ||n_2||}$

- Gradient jako směr největšího spádu

Vydáme-li se tedy ve směru gradientu budeme maximálně stoupat. Půjdeme-li ve směru opačném budeme maximálně klesat (vertikální rychlost bude záporná). V případě pohybu ve směru kolmém na gradient budeme mít vertikální rychlost nulovou. V tomto případě se nadmořská výška měnit nebude a my se budeme pohybovat po vrstevnici viz. obr 5.4.



Derivace vyšších řádů

Definice 6.13. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Funkce $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazve* **třídy C^k na množině** *G (nebo krátce C^k-funkce), jestliže všechny parciální derivace řádu k jsou spojité na G.*

Definice 6.14. *Nechť X je euklidovský prostor. Zobrazení $\psi\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazývá* **bilineární forma** *na X, jestliže platí*

$$\psi(s\boldsymbol{h}_1 + t\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{k}_1) = s\psi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{k}_1) + t\psi(\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{k}_1), \quad \psi(\boldsymbol{h}_1, s\boldsymbol{k}_1 + t\boldsymbol{k}_2) = s\psi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{k}_1) + t\psi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{k}_2)$$

pro každé $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2 \in X$ a $s, t \in \mathbb{R}$.

Podmínky v definici lze jednoduše vyjádřit slovy tak, že ψ je bilineární forma, je-li lineární v obou proměnných. Nejběžnější bilineární forma je skalární součin, $\psi(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{k}$. Pro něj opravdu platí

$$(s\boldsymbol{h}_1 + t\boldsymbol{h}_2) \cdot \boldsymbol{k} = s(\boldsymbol{h}_1 \cdot \boldsymbol{k}) + t(\boldsymbol{h}_2 \cdot \boldsymbol{k}).$$

A nyní přistoupíme k definici druhého diferenciálu.

Definice 6.15. *Nechť $G \subset X$, $G \neq \emptyset$ je otevřená podmnožina euklidovského prostoru X, $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{x} \in G$.* **Druhý (totální) diferenciál** $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$ je bilineární forma splňující*

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} \frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h})[\boldsymbol{k}] - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{k}] - \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}]}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{6.16}$$

Tato definice není tak nepřirozená, jak by se na první pohled zdálo. Jestliže diferenciál přibližně nahrazoval rozdíl funkčních hodnot $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h})$ a $f(\boldsymbol{x})$, tak druhý diferenciál aproximuje rozdíl prvních diferenciálů $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h})$ a $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$. V této logické linii jsou definovány i všechny další vyšší diferenciály.

Příklad 6.16. Spočtěte druhý diferenciál funkce $z = x^y$ v následujících bodech $(1,1)$, $(1,2)$ a $(2,2)$.

Řešení: Podle (6.18) je pro $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ a $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 z(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} h_1 k_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} h_1 k_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} h_2 k_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} h_2 k_2 \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} h_1 k_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} (h_2 k_1 + h_1 k_2) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} h_2 k_2. \end{aligned} \tag{6.19}$$

V poslední rovnosti jsme použili záměnnost smíšených derivací. Zbývá vyčíslit všechny derivace druhého řádu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y x^{y-1}\right) = y(y-1)x^{y-2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y x^{y-1}\right) = x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y \ln x\right) = x^y \ln^2 x. \end{aligned}$$

Pro bod $(1,1)$ máme

$$\mathrm{d}^2 z(1,1)[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = h_1 k_2 + h_2 k_1.$$

Dále, v bodě $(1,2)$ je

$$\mathrm{d}^2 z(1,2)[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = 2h_1 k_1 + h_1 k_2 + h_2 k_1.$$

A konečně

$$d^2 z(2,2)[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = 2h_1 k_1 + 2(1+\ln 4)(h_1 k_2 + h_2 k_1) + 4\ln^2 2 \ k_1 k_2.$$

Povšimneme si ještě jedné věci. Výraz (6.19) lze ekvivalentně napsat pomocí matice

$$\mathrm{d}^2 z[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Prostřední čtvercová matice, která určuje $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})$, se někdy nazývá *Hessova matice* nebo krátce *hessián* funkce f. Vypočítat druhý diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$ znamená zjistit hessián funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$.

Lokální extrémy

Postup:

- Najít kritické body - tam kde 1. derivace je rovna 0
- Spočítat 2. derivace a sestrojit Hessovu matici
- Vyšetříme její definitnost

Definitnost Hessovy matice

- **Pozitivně definitní** - lokální minimum
- **Negativně definitní** - lokální maximum
- **Indefinitní** - sedlo
- Lze určit pomocí **Sylvesterova kritéria** - Spočítáme determinanty všech matic (vytvořených z Hessovi matice) o velikosti n, kde $n \in \{1, \ldots, m\}$, kde m je rozměr Hessovy matice (platí pro ně, že musí obsahovat levý horní prvek).
    - **Pozitivně definitní** je když jsou všechny determinanty kladné (> 0)

- **Negativně definitní** je když první determinant je záporný (< 0) a u dalších se střídá kladnost a zápornost
- Jinak je **Indefinitní**

Globální extrémy na uzavřené množině

Postup:

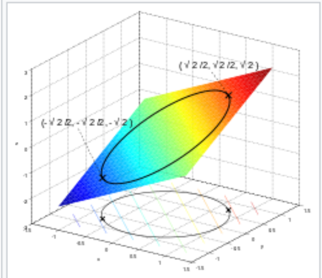
- Metodou Lagrangerových multiplikátorů najdeme stacionární body
- Z funkčních hodnot stacionárních bodů vybereme nejmenší a největší prvek (min a max na uzavřené množině)

Lagrangeovy multiplikátory

- Zjistíme zda množina i funkce jsou spojitě diferencovatelné
- Pro funkci f(x, y) a omezující vazbu g(x, y) například, sestrojíme následují rovnici: $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
- Nyní tuto rovnici parciálně zderivujeme a položíme jednotlivé parciální derivace rovny 0
- Tím nám vznikne soustava rovnic, kterou vyřešíme a zjistíme hodnoty x, y, λ
- Z hodnot získáme stacionární body

Příklad

Najděme maximum lineární funkce $f(x,y) = x + y$ vázané na jednotkovou kružnici $x^2 + y^2 = 1$.



Extrémní hodnoty lineární fukce na kružnici

Vazba je

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$$

takže Lagrangeova funkce je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) \\ &= x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).\end{aligned}$$

Derivací Lagrangeovy funkce podle jednotlivých proměnných získáme gradient:

$$\begin{aligned}\nabla_{x,y,\lambda}\mathcal{L}(x,y,\lambda) &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right) \\ &= \left(1 + 2\lambda x, 1 + 2\lambda y, x^2 + y^2 - 1\right)\end{aligned}$$

a jeho položením rovného nule dostaneme soustavu tří rovnic pro tři neznámé proměnné:

$$\nabla_{x,y,\lambda}\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Poslední rovnice je vazba, z prvních dvou rovnic dostaneme

$$x = y = -\frac{1}{2\lambda}, \qquad \lambda \neq 0.$$

Dosazením do poslední rovnice máme

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0,$$

takže

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

což po dopočítání *x* a *y* vede k závěru, že řešení (stacionární body $\mathcal{L}$) jsou

$$\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vypočítáme hodnoty *f* v těchto bodech (zajímají nás jen první dvě souřadnice stacionárních bodů, třetí souřadnice odpovídá multiplikátoru, který v tuto chvíli už nepotřebujeme):

$$f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}, \qquad f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}.$$

Vázané maximum tedy je $\sqrt{2}$ a vázané minimum $-\sqrt{2}$.

Mocninné řady

---

http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=770 ← příklady na procvičení

Definice 2.3. *Řekneme, že komplexní funkce f má v bodě $z \in \mathbb{C}$* ***derivaci****, jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

V tom případě se hodnota limity označuje $f'(z)$.

Definice 4.2. *Řekneme, že mocninná řada (4.1) konverguje bodově na množině M, jestliže pro každé $z \in M$ existuje vlastní limita $S(z)$ částečných součtů*

$$S(z) = \lim_{m\to\infty} S_m(z).$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{m\to\infty} S_m(z)$, říkáme, že řada ***diverguje*** *v bodě z.*

Definice 4.3. *Řekneme, že mocninná řada (4.1) konverguje* ***stejnoměrně*** *na množině M, jestliže existuje funkce $S(z)$ taková, že*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{z\in M} |S_m(z) - S(z)| = 0,$$

kde $S_m(z)$ jsou částečné součty řady (4.1).

Definice 2.1. *Řada tvaru*

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

se nazývá **mocninná řada**. *Bod x_0 je střed řady a čísla $a_n \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty.*

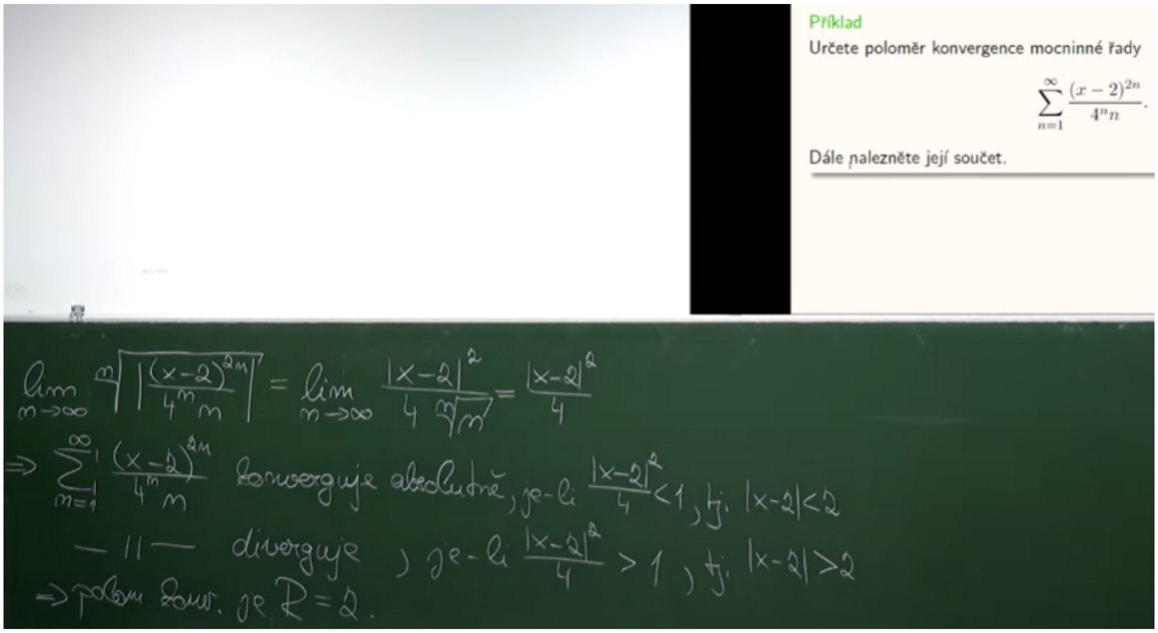
Tvrzení 4.1. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence R. Pokud existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \tag{4.16}$$

je rovna poloměru konvergence R.

Pozor! používá se zde a_n to jest koeficient mocninné řady a nikoliv celý výraz $a_n(x-x_0)^n$.

"Odmocninové kritérium" na příkladu o hledání poloměru konvergence



Věta 4.3. *Nechť f je dána mocninnou řadou (4.18) s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak f je holomorfní na $U(z_0; R)$ a její derivace f' je dána řadou*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \tag{4.19}$$

mající stejný poloměr konvergence R.

Důsledek 4.1. *Nechť f je dána mocninnou řadou $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ na kruhu konvergence $U(z_0; R)$. Pak funkce*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \tag{4.22}$$

je primitivní funkce k f na $U(z_0; R)$.

Geometrická řada

- Speciální případ mocninné

  Vzorec pro geometrickou řadu

  $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

- Její součet je roven = $\frac{1}{1-x}$, když |x| < 1
- Derivace a Integrace se používá když nelze určit součet řady, protože nejde převést na geometrickou

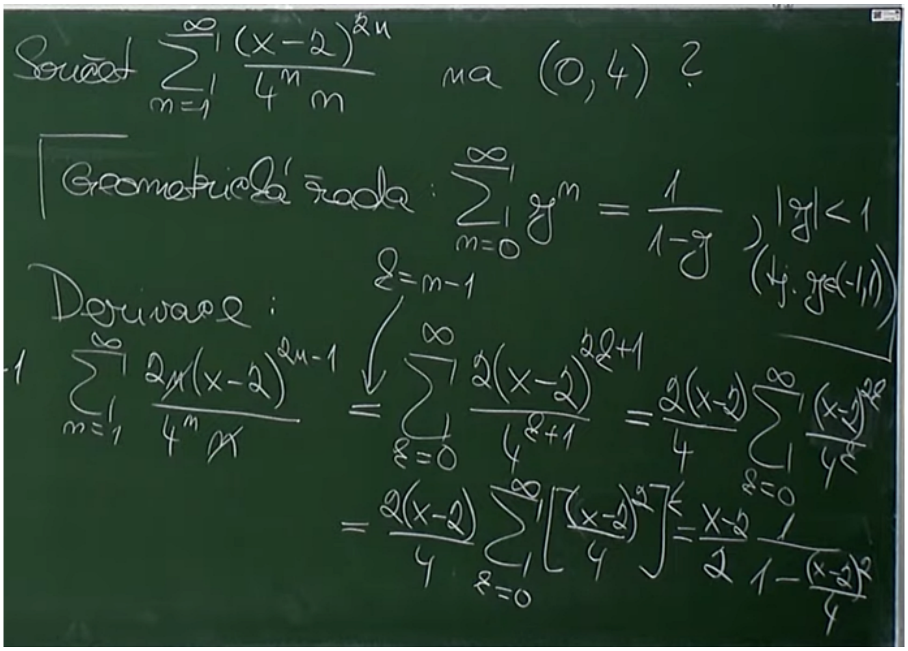
Derivace a integrace [editovat | editovat zdroj]

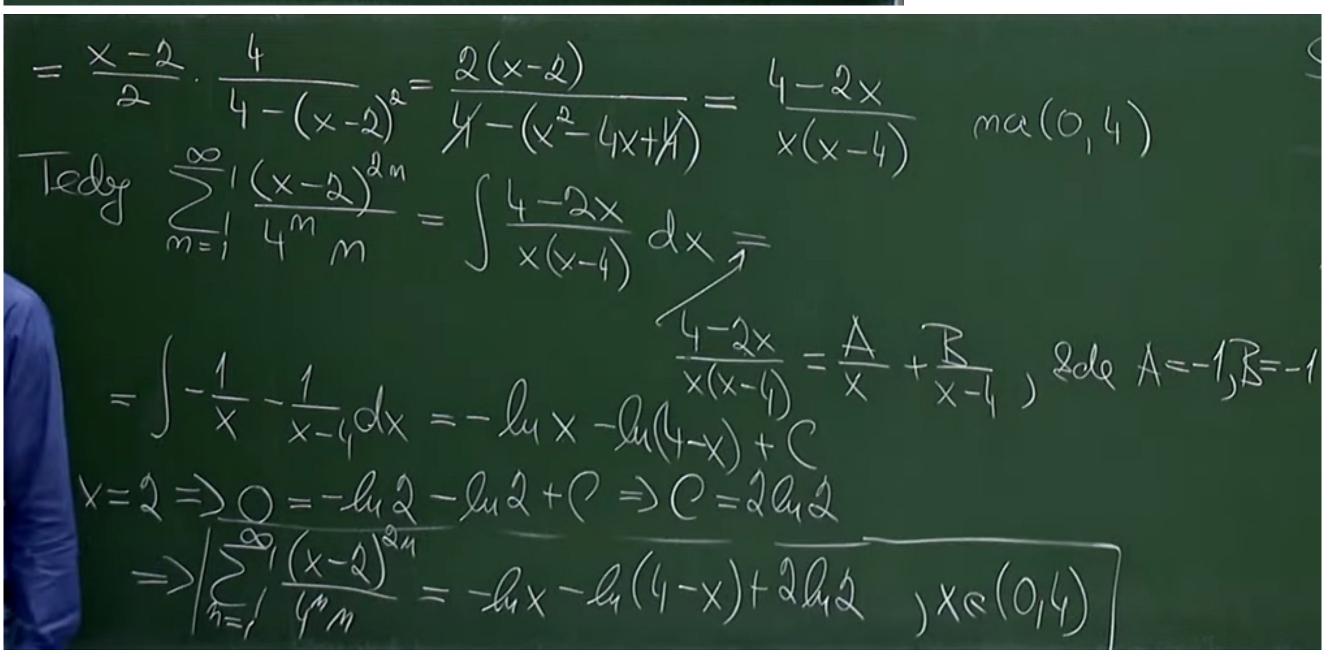
Pokud je funkce zadaná jako mocninná řada, je derivovatelná uvnitř oboru konvergence. Řadu lze snadno derivovat a integrovat člen po členu:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n(x-c)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\,(n+1)\,(x-c)^{n}$$

$$\int f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-c)^{n+1}}{n+1}+k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}(x-c)^{n}}{n}+k.$$

Příklad na součet řady z série videí od pana Bohaty, kde se derivuje a integruje (https://www.youtube.com/watch?v=I7axDUCceuI&list=PLQL6z4JeTTQne5N_yD6X-hK3FW57rAb5b&index=21)





Taylorovy řady

3 Taylorovy řady

Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R>0$ a středem x_0. Věta 2.8 (i) říká, že součet řady je funkce mající derivace všech řádů. Podívejme se na tento fakt z opačné strany. Máme funkci f mající derivace všech řádů (krátce: nekonečně diferencovatelnou) a chtěli bychom ji napsat jako mocninnou řadu se zadaným středem x_0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Na závěr si uvedeme nečastěji se vyskytující rozvoje:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in \langle -1, 1); \tag{2.8}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{2.9}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{2.10}$$

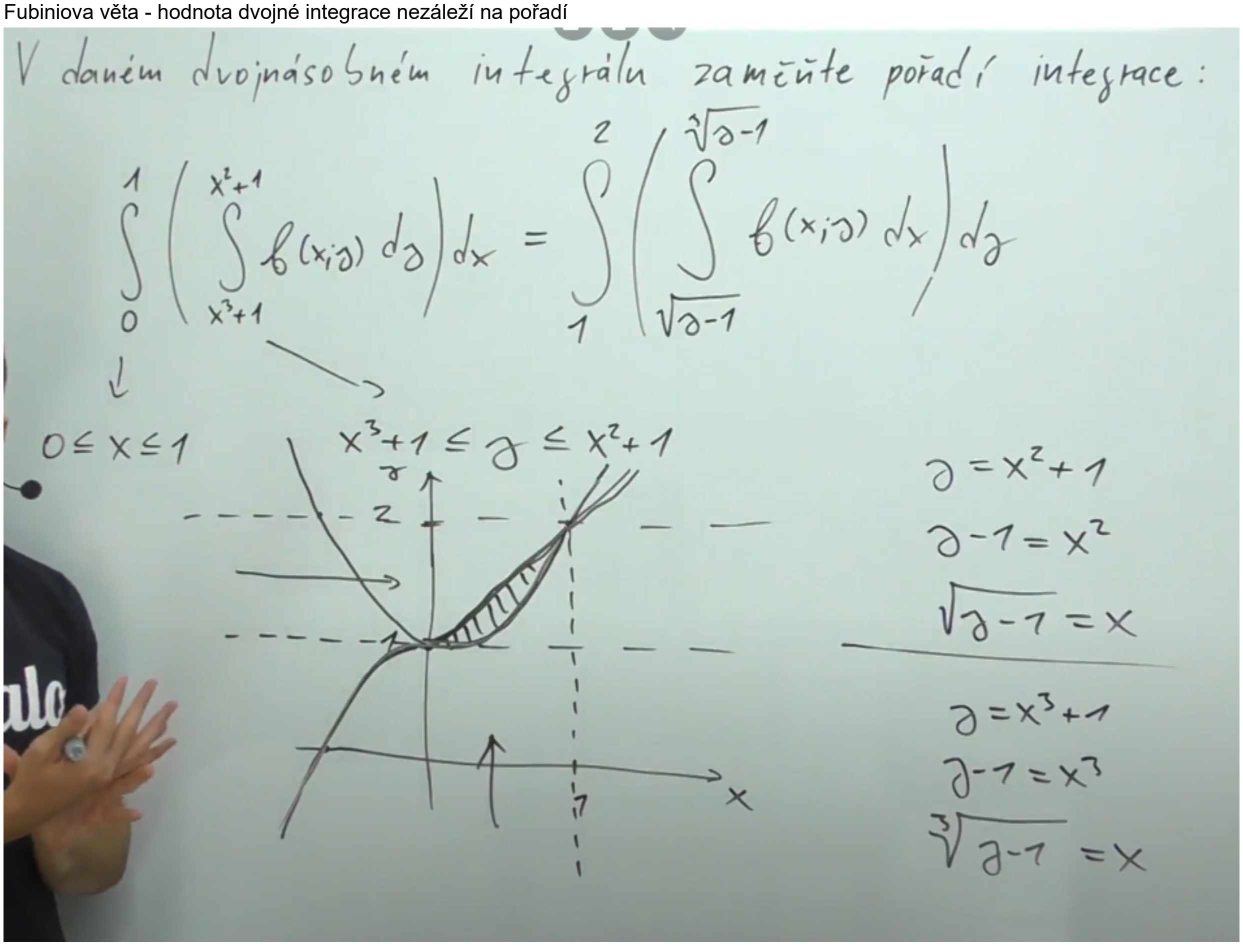
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{2.11}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1); \tag{2.12}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1), \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

Dvojný a trojný integrál

Fubiniova věta - hodnota dvojné integrace nezáleží na pořadí



Vztah mezi (x, y) a (ϱ, φ) je dán následovně

$$x = \varrho \cos \varphi$$
$$y = \varrho \sin \varphi, \quad \varrho \geq 0, \ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

Kde ϱ je poloměr kružnice. Úhel se počítá od osy x.
Pokud omezující funkce není jednoduchá (kružnice atd.), tak dosadíme do ní za x a y horní výrazy, čímž získáme ϱ. Nebo rozdělíme na 2 integrály.

Vztah mezi souřadnicemi (x, y, z) a $(\varrho, \varphi, \vartheta)$ bodu A je dán následovně:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \vartheta \sin \varphi \qquad \varrho \geq 0, \ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \ \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle \\ z &= \varrho \cos \vartheta. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Význam Φ je snadno zjistitelný: je-li bod v prostoru určen parametry ϱ, φ a ϑ, pak $\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta)$ jsou jeho kartézské souřadnice. Z (4.5) můžeme vypočítat příslušnou Jacobiho matici.

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -\varrho \sin \vartheta \sin \varphi & \varrho \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \varrho \sin \vartheta \cos \varphi & \varrho \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta & 0 & -\varrho \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Odtud ihned plyne, že příslušný jakobián je roven

$$\begin{aligned} \Delta_\Phi &= |-\varrho^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta - \varrho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \varrho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \varrho^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \vartheta| = \\ &= \varrho^2 [\sin^3 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)] = \\ &= \varrho^2 (\sin^3 \vartheta + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) = \varrho^2 \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \varrho^2 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Úhel φ je od osy x. Úhel ϑ od osy z.

Podívejme se nyní na cylindrické souřadnice. Způsob určení polohy bodu je vidět na obr. 4.3(b). Matematický vztah mezi kartézskými souřadnicemi bodu a cylindrickými souřadnicemi ϱ, φ a z je následující:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \qquad \varrho \geq 0, \ z \in \mathbb{R}, \ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \\ z &= z. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Tento souřadný systém vznikl vlastně tak, že jsme do roviny xy zavedli souřadnice polární a ve směru osy z zůstala souřadnice kartézská. Přechod k cylindrickým souřadnicím popisuje zobrazení

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Příslušná Jacobiho matice a jakobián je pak

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_\Phi = |\det J_\Phi| = \varrho.$$

Pořadí integrace buď $d\rho \, dh \, d\phi$ nebo $dh \, d\rho \, d\phi$.

Věta 4.6. *Nechť* $P \subset \mathbb{R}^3$ *je základní těleso a nechť* $\Phi\colon P \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *je zobrazení třídy* C^1 *prosté na* P. *Nechť* $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *je funkce spojitá na* $\Phi(P)$. *Pak*

$$\iiint\limits_{\Phi(P)} f = \iiint\limits_{P} f(\Phi)\,\Delta_\Phi.$$