LAG

2. Lineární prostor, báze a dimenze, řešení soustav lineárních rovnic, lineární zobrazení, základy maticového počtu

Těleso

Množina F s operacemi + a *, která splňuje:
- **Komutativita** - a+b = b+a
- **Asociativita** - (a * b) * c = a * (b * c)
- **Neutrální prvek** - a + 0 = a
- **Distributivita** - a * (b + c) = ab + ac
- **Opačný prvek (negace)** - a + b = 0, b = -a
- **Inverzní prvek** - a * b = 1, b = a^{-1}, kromě a = 0
- **Alespoň 2 prvky** 0 a 1
- Zn je těleso pro n prvočíslo

Lineární prostor

Neprázdná množina L se nazývá lineární vektorový prostor nad tělesem R , jestliže je splněno následujících deset podmínek.

1. Pro každé dva prvky $u, v \in L$ je jednoznačně určen prvek $u + v \in L$ nazývaný součet prvků u a v. (uzavření na sčítání)
2. Pro každý prvek $u \in L$ a pro každý prvek $\lambda \in R$ je jednoznačně určen prvek $\lambda \cdot u \in L$ nazývaný násobek prvku u prvkem λ. (uzavření na násobení)
3. $u + v = v + u$ pro každé dva prvky $u, v \in L$ (**komutativita**)
4. $(u + v) + w = u + (v + w)$ pro každé tři prvky $u, v, w \in L$ (**asociativita**)
5. Existuje prvek $0 \in L$. takový, že pro každý prvek $u \in L$ platí $u + 0 = 0 + u = u$ (existence 0)
6. Pro každý prvek $u \in L$ existuje prvek $-u \in L$ takový, že $u + (-u) = (-u) + u = 0$ (existence negace)
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$ pro každé dva prvky $u, v \in L$ a pro každý prvek $\lambda \in R$.
8. $(\lambda + \alpha)u = \lambda u + \alpha u$ pro každý prvek $u \in L$ a pro každé dva prvky $\lambda, \alpha \in R$.
9. $(\lambda\alpha)u = \lambda(\alpha u)$ pro každý prvek $u \in L$ a pro každé dva prvky $\lambda, \alpha \in R$.
10. $1u = u$ pro každý prvek $u \in L$

Lineární podprostor

Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V nad tělesem T se nazývá podprostorem V, pokud pro libovolné vektory $u, v \in W$ a libovolný skalár $\lambda \in T$ platí:

- $u + v \in W$
- $\lambda a \in W$

Množina W je tedy uzavřená vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. Lépe $span(W) \subseteq W$.

Lineární kombinace

Nechť L je lineární prostor, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in L$ a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$. Prvek $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \in L$ se nazývá lineární kombinace prvků $v_1, v_2, \ldots, v_n$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

- Lineární kombinace $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n$ se nazývá **netriviální**, pokud existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\lambda_i \neq 0$
- Lineární kombinace $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n$ se nazývá **triviální**, jestliže $\lambda_i = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

Lineární závislost a nezávislost

Prvky $v_1, v_2, \ldots, v_n$ množiny M se nazývají **lineárně závislé**, pokud existuje taková **netriviální lineární kombinace** těchto prvků, která vyhovuje vztahu $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ kde a_i je skalár a alespoň jedno a_i je nenulové. V opačném případě jsou lineárně nezávislé.

- Pro **lineárně nezávislé** prvky je jediným řešením výše uvedeného vzorce triviální řešení, tedy $a_i = 0$
- Jsou-li prvky **lineárně závislé**, je možné nějaký z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních prvků

Lineární obal

Mějme množinu M, která je podmnožinou vektorového prostoru V. Průnik všech podprostorů prostoru V, které obsahují množinu M se nazývá lineárním obalem množiny M.

Zjednodušeně - lineární obal množiny M podprostor prostoru V . Co obsahuje? Všechny ty prvky, ke kterým se mohu dostat libovolnou lineární kombinací vektorů z množiny M .
$\langle M\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \mid u_i \in M, a_i \in R, i = 1,2,3,\ldots,n\}$

Báze

Báze vektorového prostoru V je nejmenší množina **lineárně nezávislých vektorů** taková, že její lineární obal je roven celému prostoru V. V konečně dimenzionálním prostoru dimenze n je bází každá množina obsahující n lineárně nezávislých vektorů.

- **Obal** báze prostoru V tvoří celý prostor V
- Vektory báze jsou **lineárně nezávislé**.
- Prostor může mít **více bází**. Všechny ale mají **stejný počet prvků**.

Dimenze

Dimenze lineárního prostoru L je **počet prvků báze** tohoto prostoru. Dimenzi prostoru L značíme $dim\,L$. Dimenzi jednobodového lineárního prostoru $L = \{\emptyset\}$ pokládáme rovnu 0.
Nechť L lineární prostor a $M \subseteq L$ je lineární podprostor L pak $dim\,M \le dim\,L$.

Souřadnice vektoru v bázi

Jsou to koeficienty jednotlivých vektorů báze. Například bázové vektory $\binom{1}{1}$ a $\binom{0}{1}$, tak souřadnice pro vektor $\binom{2}{3}$ jsou $\binom{2}{1}$. Je to lineární zobrazení.
Platí $coord_b(x+y) = coord_b(x) + coord_b(y)$ a násobení skalárem.

Lineární zobrazení

Pojmem **lineární zobrazení** (lineární transformace) se v matematice označuje takové zobrazení mezi vektorovými prostory U a V, které zachovává vektorové operace sčítání a násobení skalárem. Název lineární je odvozen z faktu, že grafem obecného lineárního zobrazení z reálných čísel do reálných čísel je přímka.

1. $L(u+v) = L(u) + L(v), u \in U, v \in V$ (aditivita)
2. $L(\alpha u) = \alpha L(u), u \in U, \alpha \in R$ (homogenita)

Prosté zobrazení: $x_1 \neq x_2$ => $f(x_1) \neq f(x_2)$, každé x se zobrazí na jiné y
Na zobrazení: $\forall y \in Y, \forall x \in X : f(x) = y$, každé y má své x
Bijekce: $\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$, spojení prostého a na, má inverzi
(∃! - existuje právě jedno)

Monomorfismus - prosté a lineární
Epimorfismus - na a lineární
Isomorfismus - bijekce a lineární

Jádro zobrazení

Jádro lineárního zobrazení A z L_1 do L_2 je: $KerA = \{x \in L_1; A(x) = o\}$

Obraz zobrazení

Mějme lin. zobrazení z L1 do L2. Obraz zobrazení f, im(f), je poté množina všech y ∈ L2 takových, že existuje nějaké x ∈ L1, že f(x) = y.

Defekt a hodnost zobrazení

Defekt je $def\,A = dim\,Ker\,A$, hodnost zobrazení $hod\,A = dim\,Im(A)$, platí $def\,A + hod\,A = dim\,L_1$
$hod\,A = rng\,A$
$null\,A = def\,A$

Transformace souřadnic v jedné bázi na souřadnice v jiné bázi

První bázi zobrazíme do výsledného prostoru. U výsledku zjistíme souřadnice vhledem k první bázi. Tyto souřadnice dáme jako sloupce matice -> transformace souřadnic z první do druhé báze.

Matice lineárního zobrazení

Nechť U a V jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze nad tělesem $R, L : U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme $u_1, u_2, \ldots, u_k$ bázi prostoru U, $dim\,U = k$ a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bázi prostoru V, $dim\,V = n$. Matice A typu (n,k) která splňuje maticovou rovnost:

$(A * \vec{u}_1, A * \vec{u}_2, \ldots, A * \vec{u}_k)) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$
nazýváme maticí zobrazení A vzhledem k uspořádaným bázím (U) a (V)

Sčítání - stejné rozměry, složka po složce
Násobení - A o rozměru (n*m) (n - počet řádků, m - počet sloupců) a matici B o rozměru (k* l), lze násobit jen když k = m a výsledná matice má rozměry (n*l)

Inverze - GEM z $(A|E)$ do $(E|A^{-1})$

Vyjádřeno méně formálně: každý vektor z U si můžeme vyjádřit jako kombinaci bázových vektorů U . Pak se podíváme na koeficienty, kterými násobíme tyto bázové vektory, a chceme z nich dostat koeficienty bázových vektorů v prostoru V . Pokud těmito koeficienty vynásobíme bázové vektory V , dostaneme lineární zobrazení původního vektoru do prostoru V . Díky matici lineárního zobrazení můžeme tyto koeficienty získat.

Platí: souřadnice v bází V pro vektor z báze U najdeme pomocí: $A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Regulární matice

Platí Isomorfismus, čtvercová, má inverzi, det(A) != 0, A * x = b má jedno řešení, defekt 0, sloupce a řádky LN

Řešení soustav lineárních rovnic

A matice reálných čísel typu (m, n), dále x je jednosloupcová matice symbolů $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ typu $(n, 1)$ a b je matice reálných čísel $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ typu $(m, 1)$. Pak maticovou rovnost $Ax = b$ nazýváme **soustavou m lineárních rovnic o n neznámých**. Matici A nazýváme **maticí soustavy** a vektor $b^T = (b_1, \cdots, b_m)$ nazýváme **vektorem pravých stran**. Připíšeme-li k matici soustavy do dalšího sloupce matici b oddělenou svislou čarou, dostáváme matici $(A \mid b)$ typu $(m, n+1)$, kterou nazýváme rozšířenou maticí soustavy.
Řešení soustavy $Ax = b$ je takový vektor $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in R^n$, pro který platí: dosadíme-li hodnoty α_i za symboly x_i, pak je splněna požadovaná maticová rovnost, tj.:
$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
Řešit soustavu $Ax = b$ znamená nalézt **všechna** její řešení.

GEM - získáme podobnou matici v horním blokovém tvaru (HBT)
- lze prohodit 2 řádky
- lze vynásobit řádek skalárem (ne 0)
- lze přičíst skalární násobek řádku k jinému řádku
- platí rank(A) je počet nenulových řádků v HBT = počet pivotů (p != 0)
- platí def(A) = počet sloupců - rank(A)

Frobeniova Věta

Soustavě $Ax = b$ má řešení právě tehdy, když $hodA = hod(A \mid b)$
Pokud má řešení, tak množina řešení je p + ker(A), kde p je jedno řešení

Permutace

Permutace na n je bijekce π : {1, 2, ..., n} → {1, 2, ..., n}. Množině všech permutací množiny {1, 2, ..., n} říkáme symetrická grupa permutací n-prvkové množiny, značíme S_n.

Determinant čtvercové matice

Pouze čtvercová matice, výsledek je skalár, geometrický význam - je to velikost orientovaného objemu rovnoběžnostěnu
Vlastnosti - $det(A) = det(A^T)$, $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$, $det(E_n) = 1$, invariance vůči mat. násobení, $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$, det(A) != 0 tak a1, ..., an jsou LN

Inverze v permutaci - Ať $\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{bmatrix}$ je permutace. Inverze v permutaci π je výskyt situace $i < j$ a současně $\pi(i) > \pi(j)$ (inverze v permutaci je jedno překřížení strun ve strunovém diagramu).

Znaménko permutace - Znaménko permutace π je číslo sign π, které je definováno takto:

$$\text{sign } \pi = \begin{cases} +1, & \text{pokud } \pi \text{ obsahuje sudý počet inverzí,} \\ -1, & \text{pokud } \pi \text{ obsahuje lichý počet inverzí.} \end{cases}$$

Determinant - Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ definujeme determinant jako skalár
$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$. Často se píše i $|\mathbf{A}|$ místo $\det(\mathbf{A})$.

Algebraický doplněk - Determinantu $A_{ij} = \det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, ..., \mathbf{a}_n)$ říkáme algebraický doplněk pozice (i, j) v matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$.

Adjungovaná matice - Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ je její adjungovaná matice adj($\mathbf{A}$) transponovaná matice algebraických doplňků pozic v matici $\mathbf{A}$.

Rozvoj podle řádku nebo sloupce

Vybereme si nejvhodnější řádek/sloupec (R), pak det(A) = $R_1 * (-1)^{R_{idxX}+R_{idxY}}$ * det(matice bez sloupce a řádku daného aktuálním prvkem) + ...

GEM determinant

Je-li matice horní/dolní trojúhelníková je det(A) roven součinu prvků na diagonále, přičítání řádků determinant nemění, násobení řádku α pak je potřeba determinant vydělit α, prohození řádků mění znaménko

Vlastní číslo

Číslo $\lambda \in C$ je vlastním číslem zobrazení A pokud existuje vektor $x \in L, x \neq o$ takový, že $A(x) = \lambda x$. Vektor x nazýváme pak vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu λ.

Postup:
- víme, že $Av = \lambda v$ -> upravíme na $Av - \lambda v = o$ -> vytkneme v $(A - \lambda E_n)v = o$
- z toho víme že $v \in ker(A - \lambda E_n)$
- z toho víme že A - λE_n musí být singulární ->det(A - λE_n) = 0
- z toho získáme vlastní čísla a jejich násobnost
- pro všechna vlastní čísla spočítáme eigen(λ_i, A) = $(A - \lambda * E_n|o)$ -> span vlastních vektorů, kde pro diagonalizaci musí platit dim(eigen(λ_i, A)) = násobnost λ_i

Diagonalizace

Pouze čtvercová, D = $(\lambda_1 * e_1, \ldots, \lambda_n * e_n)$, D = $T^{-1} * A * T$, kde T je matice složena z vlastních vektorů a je regulární, 2 vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou LN

Skalární a vektorový součin

Skalární součin definujeme mezi dvěma vektory. Výsledkem skalárního součinu je reálné číslo, není to vektor. Máme-li dva vektory u=[u1, u2] a v=[v1, v2] , pak jejich skalární součin je roven:
$u^T \bullet v = | u || v | cos\alpha$, kde α je velikost úhlu mezi vektory u a v.
Vlastnosti - $< x|x > \ \geq 0$. Také norma vektoru na druhou
- Pořadí vektorů je jedno.
- Invariance k násobení skalárem.
- $< x|y + z > = < x|y > + < x|z >$

CSB nerovnost - $| < x|y > | \leq ||x|| * ||y||$
Norma vlastnosti - vždy kladná nebo rovna 0
- $||ax|| = |a| * ||x||$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (troj. nerovnost)
Kosinova věta - $||y - x||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2 * ||x|| * ||y|| * cos(\alpha)$

Metrika - vzdálenost 2 vektorů, norma jejich rozdílu
Ortogonalita vektorů - když skalární součin = 0, jsou kolmé, všechny vektory jsou kolmé na nulový vektor, pokud chceme ověřit kolmost na span(M), stačí ověřit kolmost na množinu generátorů M

Vektorový součin je binární operace vektorů v trojrozměrném vektorovém prostoru. Výsledkem této operace je vektor, který je kolmý k oběma původním vektorům. Velikost tohoto vektoru je rovna obsahu rovnoběžníku tvořeného původními vektory. Spočítá se
u × v=[u2 v3 - u3 v2, u3 v1 - u1 v3, u1 v2 - u2 v1]=w a platí u T • w=0, v T • w=0

Ortogonalizační proces

Ortogonální báze - všechny vektory báze jsou na sebe navzájem kolmé

Gram-Smith - B = (b1, b2, b3), C = ?

1, c1 = b1

2, c2 = b2 - $\frac{<b2|c1>}{<c1|c1>} * c1$

3, c3 = b3 - $\frac{<b3|c1>}{<c1|c1>} * c1$ - $\frac{<b3|c2>}{<c2|c2>} * c2$

Pro ortoNORMální bázi platí coord (x) = $(< x|b_1 >, \ldots, < x|b_n >)^T$