



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

**О.Н. Вострокнутова
В.В. Мавринский
Н.И. Мишенева
Ю.И. Савченко**

**МЕХАНИКА:
пособие по подготовке
и выполнению лабораторных работ**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2021

УДК 531
ББК 22.3

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной и технической физики,
ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»
Ф.К. Шабиев

доктор технических наук, профессор,
заведующая кафедрой вычислительной техники и программирования,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»
О.С. Логунова

ВострокнUTOва О.Н., Мавринский В.В., Мишенева Н.И., Савченко Ю.И.
Механика: пособие по подготовке и выполнению лабораторных работ
[Электронный ресурс] : учебное пособие / Ольга Николаевна ВострокнUTOва,
Виктор Викторович Мавринский, Надежда Игоревна Мишенева, Юрий
Иванович Савченко ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,47
Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2021. – 1 электрон.
опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб
RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ;
CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-9967-2124-5

Пособие составлено в соответствии с типовой рабочей программой дисциплины
«Физика» для студентов технических направлений и отвечает требованиям ФГОС. Содержит
теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ по разделу
физики «Механика». Включает 5 лабораторных работ с описанием экспериментального
оборудования и методики проведения работ.

Пособие предназначено для студентов всех направлений подготовки, изучающих
дисциплину «Физика».

УДК 531
ББК 22.3

ISBN 978-5-9967-2124-5 © ВострокнUTOва О.Н., Мавринский В.В.,
Мишенева Н.И., Савченко Ю.И., 2021
© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова», 2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА	5
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА	19
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 ИССЛЕДОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ	33
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА	46
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ГАЗАХ МЕТОДОМ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ	63
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	73

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные работы по дисциплине «Физика» являются неотъемлемой частью учебного процесса. Они позволяют обучающимся приобрести навыки экспериментального исследования физических процессов: ознакомиться с современными измерительными приборами и оборудованием, освоить методы получения и обработки экспериментальных данных, проверить на практике выполнение ряда физических закономерностей.

В данном учебном пособии представлены лабораторные работы по разделу «Механика» курса общей физики, которые выполняются в учебной лаборатории «Механики и молекулярной физики» кафедры физики МГТУ им. Г.И. Носова.

Каждая лабораторная работа включает теоретические сведения по тематике работы, методику проведения эксперимента и таблицы для внесения экспериментальных и расчетных данных. В конце каждой работы представлены вопросы, ответы на которые могут быть использованы при защите лабораторных работ и подготовке к промежуточной аттестации по дисциплине «Физика».

Подготовку к любой лабораторной работе следует начинать с изучения материала, представленного в описании, и составления конспекта. Особое внимание нужно уделить цели работы, схеме измерительной установки и методике эксперимента. Конспект к лабораторной работе должен обязательно включать в себя порядок проведения эксперимента, расчетные формулы и таблицы, в которые обучающиеся заносят экспериментальные данные и результаты расчетов. Конспект представляется в рукописном виде.

Экспериментально-практическая часть лабораторной работы проводится под руководством преподавателя или лаборанта. При этом необходимо помнить о соблюдении техники безопасности!

В ходе обработки результатов измерений производятся необходимые вычисления в соответствии с расчетными формулами. При выполнении вычислений физических величин особое внимание необходимо уделить их единицам измерений. В ряде работ требуется построить графики, при выполнении которых также особое внимание следует уделить единицам измерений и масштабу координатных осей. Вычисления и построение графиков желательно выполнять на компьютере в MS Excel или другой специализированной программе. В ином случае графики должны быть выполнены на миллиметровой бумаге. В заключение каждой лабораторной работы должен приводиться вывод. В выводе должны содержаться основные результаты проделанной работы, их анализ и обобщение, выраженные несколькими четко сформулированными предложениями.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: определение скорости полета пули косвенным методом с помощью баллистического маятника на основе законов сохранения импульса и полной механической энергии и оценка погрешности эксперимента.

Общие сведения

Механическая система – это система материальных точек или тел, движения которых взаимосвязаны.

В результате взаимодействия тел с течением времени изменяются координаты тел и их скорости. Состояния механической системы и закономерности изменений, происходящих в ней, могут быть описаны на основе двух подходов: с точки зрения законов Ньютона и на основе законов сохранения импульса, момента импульса и полной механической энергии. Эти два подхода друг другу не противоречат, а наоборот, в совокупности дают полное представление о процессах, происходящих в системе.

Импульс тела – мера механического движения тела, является векторной физической величиной, равной произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.1)$$

Вектор импульса сонаправлен вектору скорости. В системе СИ он измеряется в кг·м/с

Импульс системы N тел (материальных точек) равен векторной сумме импульсов всех тел, входящих в систему.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i. \quad (1.2)$$

Для каждого тела справедлив второй закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{f}_i, \quad (1.3)$$

где \vec{F}_i , \vec{f}_i – результирующие внешних и внутренних сил, приложенных к i -тому телу.

Внутренними силами называют силы, с которыми взаимодействуют тела, входящие в состав данной системы.

Внешними силами называют силы, которые действуют на тела входящие в систему со стороны тел, не входящих в выделенную систему

Сложив уравнения, записанные согласно (1.3) для всех тел, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i. \quad (1.4)$$

Согласно третьему закону Ньютона, силы, с которыми воздействуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению. Т.е. сумма внутренних сил будет равна нулю.

Тогда

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (1.5)$$

Получили теорему об изменении импульса: производная по времени от импульса системы тел равна сумме внешних сил, действующих на систему.

Таким образом, импульс системы тел может изменяться, только под действием внешних сил.

Если на систему тел не действуют внешние силы, то есть система **замкнута**, то

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0 \quad (1.6)$$

и

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = 0. \quad (1.7)$$

Это значит, что суммарный импульс системы – постоянная величина:

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = const. \quad (1.8)$$

Условие (1.6) и выражение (1.8) отражают **закон сохранения импульса**: в замкнутой системе суммарный импульс остаётся постоянным.

Закон сохранения импульса можно применять и для незамкнутой системы при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

1. Внешние силы действуют, но их сумма равна нулю.
2. Время действия внешних сил мало (удар, взрыв).
3. Внешние силы значительно меньше внутренних.
4. Проекция внешних сил на какое-то направление равна нулю.

В последнем случае остаётся постоянной проекция импульса на это направление:

$$\text{если } \sum_{i=1}^N F_{ix} = 0, \quad \text{то } \sum_{i=1}^N p_{ix} = \text{const.} \quad (1.9)$$

Механическая энергия системы тел является функцией состояния системы и характеризует способность системы к совершению работы при переходе из одного состояния в другое.

Механическая энергия делится на **кинетическую** и **потенциальную**.

Понятие энергии тесно связано с понятием работы.

Механическая работа – это количественная мера изменения энергии системы в результате действия силы.

Если действующая на тело сила \vec{F} вызывает его перемещение $d\vec{r}$, то действие силы характеризуется механической работой (скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения):

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.10)$$

Кинетическая энергия

Рассмотрим случай, когда тело массой m под действием произвольной силы \vec{F} изменяет свою скорость от \vec{v}_1 до \vec{v}_2 . Определим работу силы, приложенной к телу

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_{v_1}^{v_2} m \vec{v} d\vec{v} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (1.11)$$

Так как механическая работа является мерой изменения энергии, то величина $\frac{mv^2}{2}$ представляет собой энергию, обусловленную движением тела.

Энергию, которой обладает тело вследствие своего движения, называют **кинетической**

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.12)$$

Выражение (1.11) можно рассматривать как **теорему об изменении кинетической энергии**: приращение кинетической энергии системы тел равно сумме работ всех сил, приложенных к системе

$$A = \Delta E_k. \quad (1.13)$$

Кинетическая энергия не может быть отрицательной величиной, она зависит только от массы движущихся тел и их скорости, но не зависит от того, каким образом данное тело достигло данной скорости.

Таким образом, кинетическая энергия системы (тела) является функцией состояния ее движения.

Изменение кинетической энергии системы равно сумме изменений кинетических энергий отдельных тел (материальных точек) системы.

Потенциальная энергия

Силы внешние и внутренние могут быть консервативными или неконсервативными.

Консервативными называются силы, работа которых не зависит от траектории, по которой перемещается тело, а зависит только от положения начальной и конечной точек.

Консервативными силами в механике являются сила тяжести, сила упругости, гравитационная сила.

Определим работу *гравитационной* силы при перемещении частицы А из точки 1 в точку 2 по произвольному пути.

$$A = - \int_1^2 \frac{Gm_1m_2}{r^2} dr = - \left(\frac{Gm_1m_2}{r_2} - \frac{Gm_1m_2}{r_1} \right) = \frac{Gm_1m_2}{r_1} - \frac{Gm_1m_2}{r_2}. \quad (1.14)$$

Рассмотрим теперь работу однородной *силы тяжести* (рис. 1.1).

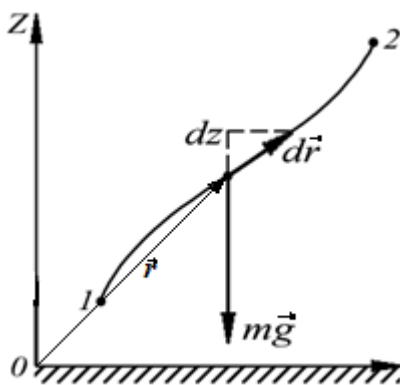


Рис. 1.1. К вычислению работы силы тяжести

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = - \int_1^2 m\vec{g} d\vec{r} = mgz_1 - mgz_2, \quad (1.15)$$

где z – вертикальная координата тела (высота).

Работа упругой силы (рис.1.2):

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = - \int_1^2 k\vec{r} d\vec{r} = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}. \quad (1.16)$$

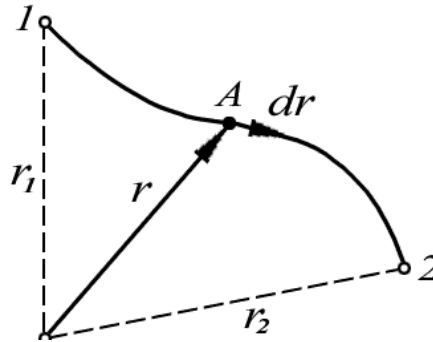


Рис. 1.2. К вычислению работы упругой силы

Как видно из формул (1.14), (1.15), (1.16), работа рассмотренных сил не зависит от формы пути между точками 1 и 2, а *зависит только от положения этих точек*. Кроме того на замкнутой траектории работа таких сил, будет равна нулю.

Таким образом, работа консервативных сил определяется разностью некоторых функций состояния тела в начальном и конечном положении:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = U_1(\vec{r}) - U_2(\vec{r}) = -\Delta E_p. \quad (1.17)$$

Выражение, стоящее справа, есть *убыль потенциальной энергии*, т. е. разность значений потенциальной энергии частицы в начальной и конечной точках пути.

Потенциальная энергия – это энергия, которой обладает тело вследствие действия потенциального поля сил, она определяется взаимным расположением тел или частей тел в системе.

Таким образом, **работа консервативных сил на пути 1-2 равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле.**

Рассмотрим систему, в которой действуют консервативные \vec{F}_k и неконсервативные силы $\vec{F}_{нк}$.

Элементарная работа всех сил определит суммарное изменение кинетической энергии системы на выделенном участке пути:

$$\delta A_k + \delta A_{нк} = dE_k. \quad (1.18)$$

Но работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии, тогда

$$-dE_p + \delta A_{\text{нк}} = dE_k, \quad (1.19)$$

т.е.

$$\delta A_{\text{нк}} = d(E_k + E_p) \quad (1.20)$$

и на всем пути

$$A_{\text{нк}} = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E_{\text{мех}}, \quad (1.21)$$

где $E_{\text{мех}}$ – полная механическая энергия системы тел, равная сумме кинетической и потенциальной энергии тела.

Отсюда следует **закон сохранения полной механической энергии системы**: если силы, действующие на систему тел консервативны, то полная механическая энергия системы остаётся постоянной.

В случае действия неконсервативных сил часть механической энергии переходит во внутреннюю (тепловую) или, наоборот, выделяется (взрыв).

Методика эксперимента

Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 1.3.

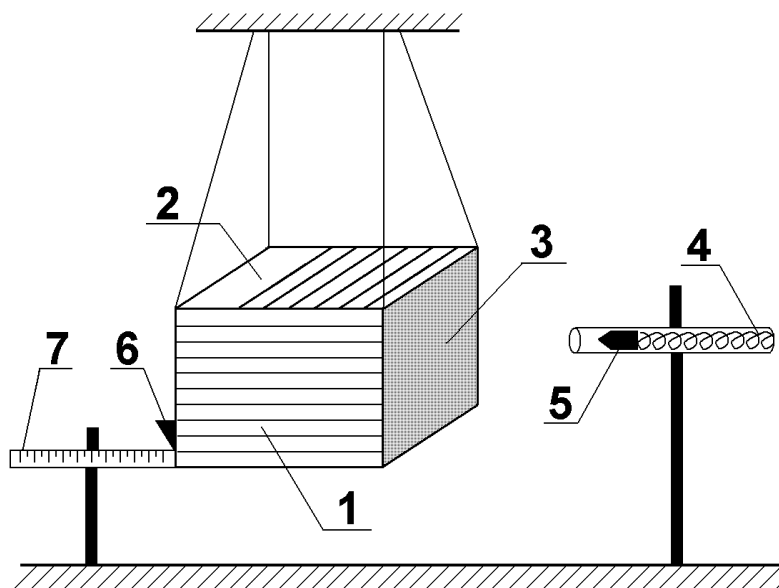


Рис. 1.3. Схема экспериментальной установки

Баллистический маятник – тяжелое тело, подвешенное на нитях, предназначенное для оценки эффективности взрывчатого вещества.

В нашем эксперименте баллистический маятник – это коробка 1, заполненная пластилином, подвешенная на четырех длинных нитях (на рис. 1.3 нити изображены не в масштабе). В нем имеется пустая полость (2) и полость, заполненная пластилином (3). Выстрел производят из пружинного пистолета (4),

в который вкладывается пуля (5). Пистолет устанавливают горизонтально так, чтобы пуля попала в центр стороны, заполненной пластилином. Перед выстрелом указатель (6) линейки (7) устанавливают вплотную к задней стенке маятника. После выстрела маятник вместе с пулей отклоняется от положения равновесия и смещает указатель на расстояние d по линейке. Масса пули значительно меньше массы маятника, поэтому угол отклонения мал. Массу маятника можно увеличивать, вкладывая в коробку металлические пластины известной массы, при этом смещение d будет уменьшаться.

Рассмотрим последовательные изменения в системе «пуля-маятник» в эксперименте (рис. 1.4) и на основе законов сохранения импульса и полной механической энергии получим выражение для скорости полета пули непосредственно после выстрела.

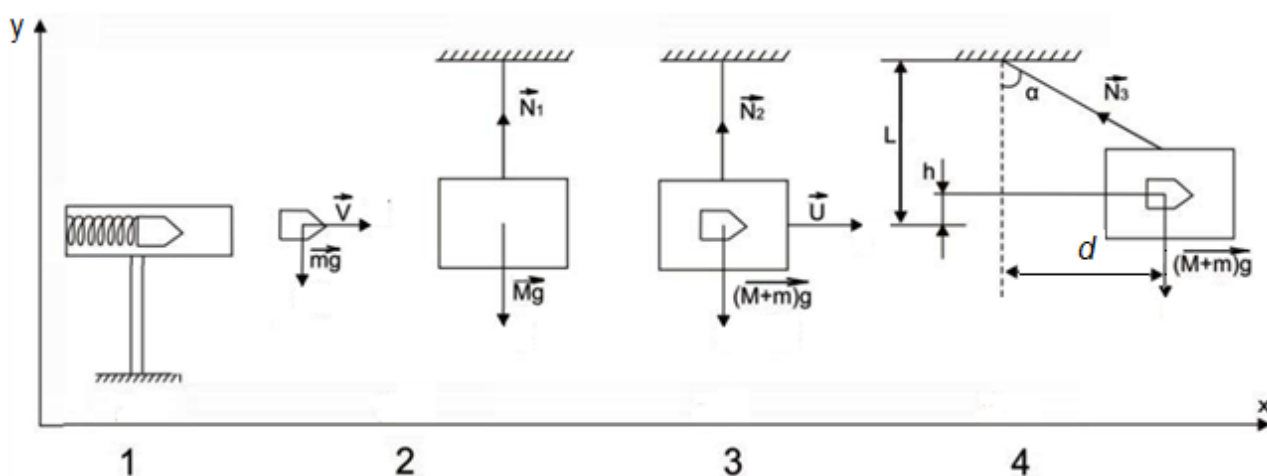


Рис. 1.4. Схема последовательных изменений в системе «пуля-маятник»

В состоянии 1 на рис. 1.4 пружина пистолета сжата, пуля покоится, маятник покоится. Полный импульс системы равен нулю. Полная механическая энергия системы равна потенциальной энергии упругой деформации пружины.

В состоянии 2 пуля вылетает из пистолета со скоростью v . Маятник неподвижен. Полный импульс системы «маятник-пуля» равен импульсу пули:

$$\vec{p}_2 = m\vec{v} \quad (1.22)$$

где m – масса пули.

Заметим, что на пулю действует сила тяжести, т.е. система незамкнута и вектор импульса пули будет изменяться с течением времени. Однако, проекция всех сил на горизонтальную ось Ox равна нулю, следовательно, проекция импульса на эту ось будет сохраняться.

Полная механическая энергия системы «маятник-пуля» равна кинетической энергии пули:

$$E_2 = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.23)$$

В состоянии 3 пуля застряла в пластилине внутри маятника. Маятник, вместе с пулей, начинает движение со скоростью u . Полный импульс системы «маятник-пуля» равен:

$$\vec{p}_3 = (m + M)\vec{u}, \quad (1.24)$$

где M – масса маятника.

Полная механическая энергия:

$$E_3 = \frac{(m + M)u^2}{2}. \quad (1.25)$$

В состоянии 4 маятник отклоняется на максимальный угол α . При этом его центр тяжести поднимается на высоту h . Импульс системы «маятник-пуля» обращается в нуль. Полная механическая энергия полностью превращается в потенциальную энергию в поле силы тяжести:

$$E_4 = (m + M)gh, \quad (1.26)$$

где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

Заметим, что в любом состоянии система неконсервативна (действуют силы трения, сопротивления и деформации), т.е. происходит частичное превращение механической энергии в другой вид (тепло). Однако, эти потери малы и ими можно пренебречь.

Запишем закон сохранения импульса системы в проекции на ОХ для состояний 2-3 и закон сохранения полной механической энергии для состояний 3-4:

$$\begin{cases} mv = (m + M)u \\ \frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gh. \end{cases} \quad (1.27)$$

Максимальную высоту подъема маятника h можно найти из рис. 1.4 (состояние 4):

$$\cos\alpha = \frac{L - h}{L}, \quad (1.28)$$

где L – длина подвеса маятника.

Откуда

$$h = L(1 - \cos\alpha) = 2L\sin^2\frac{\alpha}{2}. \quad (1.29)$$

При малых углах ($\alpha < 10^\circ$):

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \approx \frac{d}{2L}, \quad (1.30)$$

где d – максимальное смещение маятника относительно положения равновесия.

Тогда

$$h = \frac{d^2}{2L}. \quad (1.31)$$

Перепишем систему уравнений:

$$\begin{cases} mv = (m + M)u \\ \frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)g \frac{d^2}{2L} \end{cases} \quad (1.32)$$

Из второго уравнения:

$$u = \sqrt{2g \frac{d^2}{2L}} = d \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (1.33)$$

Подставляем в первое уравнение и выражаем скорость полета пули:

$$v = \frac{(m + M)}{m} d \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (1.34)$$

Порядок выполнения работы

Вариант № 1

1. Данные с установки ($m, M, M_{нл}, L$) занесите в рабочую тетрадь.
2. Сожмите пружину и вложите пулю в ствол, проследив, чтобы она касалась пружины.
3. Установите пружинный пистолет против центра маятника как можно ближе к нему. Линейку с подвижным указателем установите вплотную к маятнику, как показано на рис. 1.3. Указатель при этом должен быть установлен на «ноль» по линейке.
4. Произведите выстрел, проследив чтобы пуля застряла в маятнике. Определите смещение маятника d по указателю на линейке. Результат занесите в первый столбец таблицы 1.1.

5. Извлеките пулю, снова зарядите ее в пистолет, верните указатель линейки в прежнее положение. Пистолет установите как в п.3 (не меняйте его положения!). Произведите, по заданию преподавателя, N выстрелов, определяя смещение маятника d . Результаты измерений занесите в таблицу 1.1.

6. По заданию преподавателя, увеличьте массу маятника с помощью пластин. Повторите п. 3-5.

Таблица 1.1

Результаты измерений

№ выстрела	d_i , мм	$d_i - \langle d \rangle$, мм	$(d_i - \langle d \rangle)^2$, мм ²
1			
2			
...			
N			
$\sum_{i=1}^N$		_____	

7. Для каждого режима эксперимента определите среднее значение смещения маятника $\langle d \rangle$

$$\langle d \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N}.$$

8. Рассчитайте среднюю скорость полета пули $\langle v \rangle$ по формуле (1.34).

Не забудьте, что все числовые значения физических величин должны иметь единицы измерения в СИ (метры, секунды, килограммы).

$$\langle v \rangle = \frac{(m + M)}{m} \langle d \rangle \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

9. Рассчитайте средние квадратичные отклонения смещения маятника $(\langle d \rangle - d_i)^2$ в каждом опыте, занося результат в таблицу 1.1, и найдите их сумму.

10. Определите среднее квадратичное отклонение результата для каждого режима по формуле:

$$S_{\langle d \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\langle d \rangle - d_i)^2}{N(N-1)}}.$$

11. По таблице 1.2 определите коэффициент Стьюдента $t_{\alpha N}$. Доверительный интервал α задает преподаватель.

Коэффициенты Стьюдента

α N	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
5	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
20	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
30	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,66
50	1,30	1,68	2,01	2,40	2,68	3,50
100	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63	3,39

12. Определите абсолютную погрешность измерения отклонений маятника по формуле:

$$\Delta d = t_{\alpha N} S_{<d>}.$$

13. Вычислите доверительный интервал определения скорости пули для каждого режима по формуле:

$$\Delta v = \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} \cdot \langle v \rangle.$$

14. Запишите окончательный результат косвенного измерения скорости полета пули в виде:

$$v = \langle v \rangle \pm \Delta v.$$

15. Сделайте выводы.

Вариант № 2

1. Данные с установки (m , M , M_{nl} , L) занесите в рабочую тетрадь.
2. Сожмите пружину и вложите пулю в ствол, проследив, чтобы она касалась пружины.
3. Установите пружинный пистолет против центра маятника как можно ближе к нему. Линейку с подвижным указателем установите вплотную к маятнику, как показано на рис. 1.3. Указатель при этом должен быть установлен на «ноль» по линейке.
4. Произведите выстрел, проследив чтобы пуля застряла в маятнике. Определите смещение маятника d по указателю на линейке. Результат занесите в таблицу 1.3.
5. Извлеките пулю, снова зарядите ее в пистолет, верните указатель линейки в прежнее положение. Пистолет установите как в п.3 (не меняйте его

положения!). Произведите, по заданию преподавателя, N выстрелов, определяя смещение маятника d . Результаты измерений занесите в таблицу 1.3.

Таблица 1.3

Результаты измерений отклонений маятника

№ выстрела	d_i , мм
1	
2	
...	
N	

6. Сгруппируйте значения отклонений маятника d_i и определите, сколько раз N_i встречается каждое из них. Занесите эти значения в таблицу 1.4.

Таблица 1.4

Сгруппированные значения отклонений маятника

d_i , мм											
N_i											

7. Нарисуйте гистограмму распределения количества отклонений маятника N_i от их величины d_i .

8. Рассчитайте среднее значение отклонения маятника в серии измерений

$$\langle d \rangle = \frac{\sum N_i d_i}{N}.$$

9. Вычислите среднюю скорость полета пули $\langle v \rangle$ согласно формуле (1.34).

Не забудьте, что все числовые значения физических величин должны иметь единицы измерения в СИ (метры, секунды, килограммы).

$$\langle v \rangle = \frac{(m + M)}{m} \langle d \rangle \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

10. Рассчитайте выборочную дисперсию серии измерений

$$S_N^2 = \frac{\sum N_i (d_i - \langle d \rangle)^2}{N - 1}.$$

11. Примите величину дисперсии

$$\sigma^2 \approx S_N^2.$$

12. Постройте поверх гистограммы кривую распределения Гаусса

$$W(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(d - \langle d \rangle)^2}{2\sigma^2}\right).$$

На рисунке 1.5 приведен пример гистограммы распределения количества отклонений маятника от величины отклонения и кривой функции распределения Гаусса, рассчитанной по параметрам этого распределения.

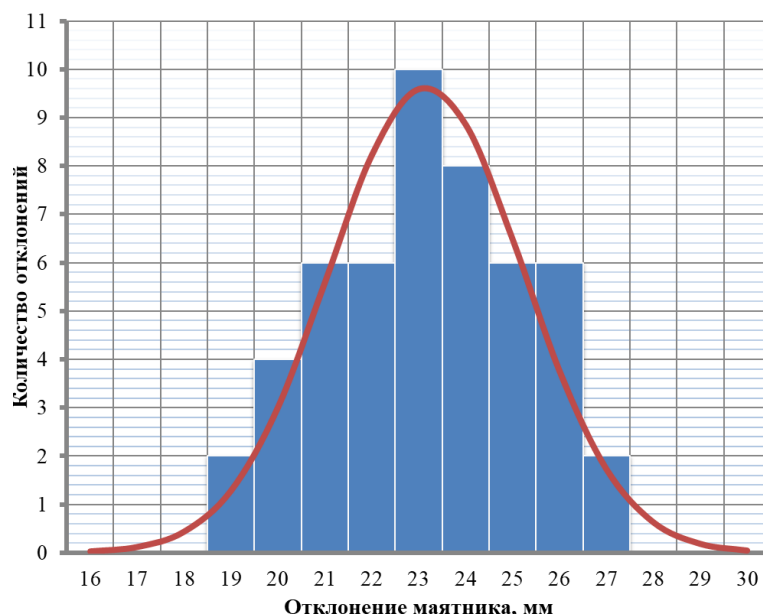


Рис. 1.5. Гистограмма распределения отклонений маятника от их величины и соответствующая ей функция распределения Гаусса

13. Вычислите среднеквадратическую ошибку среднего отклонения маятника

$$S_{\langle d \rangle} = \frac{S_N}{\sqrt{N}}.$$

14. Выберите величину доверительной вероятности α и определите по таблице 1.2 коэффициент Стьюдента $t_{\alpha N}$.

15. Вычислите абсолютную погрешность измерения отклонений маятника

$$\Delta d = t_{\alpha N} \cdot S_{\langle d \rangle}.$$

16. Рассчитайте абсолютную погрешность скорости полета пули

$$\Delta v = \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} \cdot \langle v \rangle.$$

17. Запишите результат расчета с учетом доверительного интервала

$$v = \langle v \rangle \pm \Delta v.$$

18. По заданию преподавателя повторите эксперимент с другой массой маятника, используя пластину.

19. Сравните полученные результаты вычислений скорости пули и доверительного интервала в разных экспериментах.

20. Сделайте выводы.

Контрольные вопросы

1. Что такое импульс тела и системы тел? Когда выполняется закон сохранения импульса? Может ли сохраняться только проекция импульса на какое-либо направление в пространстве?

2. Что такое кинетическая энергия? Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии.

3. Что такое потенциальная энергия и от чего она зависит? Как можно рассчитать работу консервативных сил при перемещении тела из одной точки в другую?

4. Какие законы сохранения выполняются и не выполняются в лабораторной работе при попадании пули в маятник?

5. Какие законы сохранения выполняются и не выполняются при отклонении маятника вместе с застрявшей пулей из положения равновесия?

6. Почему при выполнении лабораторной работы следует располагать пистолет горизонтально и близко к маятнику?

7. Почему нужно, чтобы пуля попадала в центр маятника и застревала в нем?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

Цель работы: измерение моментов инерции различных тел и сравнение с результатами расчетов по теоретическим формулам, проверка теоремы Штейнера и свойства аддитивности момента инерции.

Общие сведения

Для описания вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси можно воспользоваться кинематическими характеристиками. К ним относятся угол поворота твердого тела φ , угловая скорость вращения тела ω и угловое ускорение ε :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (3.1)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (3.2)$$

Выразим кинетическую энергию E_K твердого тела, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси. Представим твердое тело как совокупность материальных точек массой m_i . Тогда скорость точки $v_i = \omega r_i$, где r_i – расстояние от точки до оси вращения. Кинетическая энергия отдельной точки $E_{Ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2$. Произведя суммирование по всем точкам, получим кинетическую энергию вращательного движения твердого тела:

$$E_K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (3.3)$$

$$I = \sum m_i r_i^2. \quad (3.4)$$

Величина I называется моментом инерции твердого тела относительно выбранной оси. Её можно рассматривать как вращательный аналог массы, то есть момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Убедиться в этом можно, сравнив формулу (3.3) с формулой кинетической энергии поступательного движения или основное уравнение динамики поступательного движения (2-ой закон Ньютона)

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (3.5)$$

с аналогичным уравнением для динамики вращательного движения

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (3.6)$$

где \vec{M} – суммарный момент всех сил относительно оси вращения.

Вычисление моментов инерции

Если в формуле (3.4) перейти от суммирования по точкам к интегрированию по элементарным массам, то получим:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV, \quad (3.7)$$

где ρ – плотность вещества в точке интегрирования.

С помощью формулы (3.7) найдем моменты инерции тел, используемых в данной работе.

Стержень

Вычислим момент инерции стержня длиной l и массой m относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через центр масс. Для этого разобьем стержень на элементарные кусочки шириной dr , отстоящие от выбранной оси OO' на расстояние r (рис. 3.1). Элемент объема dV в данном случае представляет собой объем прямоугольного параллелепипеда.

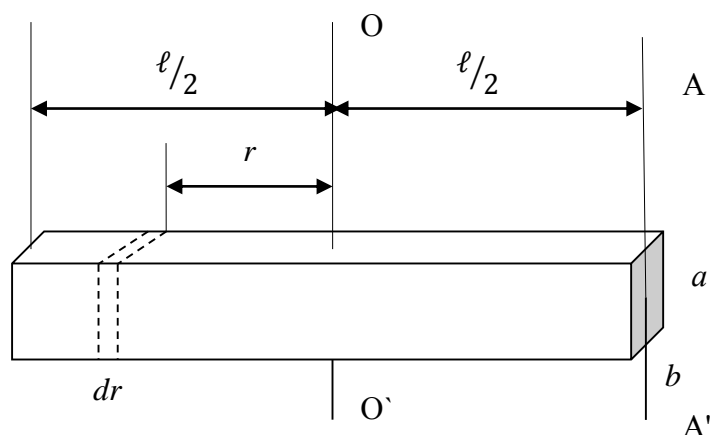


Рис. 3.1. К вычислению момента инерции стержня

Момент инерции выделенного элемента

$$dI = dm r^2 = \rho dV r^2 = \rho ab r^2 dr. \quad (3.8)$$

Проинтегрировав по всей длине стержня, получим

$$I_{\text{ст}} = \rho ab \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr = \rho ab \frac{r^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho ab l \cdot \frac{l^2}{12} = \rho V \frac{l^2}{12} = \frac{m_{\text{ст}} l^2}{12}. \quad (3.9)$$

Диск

Вычислим момент инерции диска массой m и радиусом R относительно оси, перпендикулярной диску и проходящей через его ось симметрии. Разобьем диск на элементарные кольцевые участки шириной dr , отстоящие от оси OO' на расстояние r (рис. 3.2).

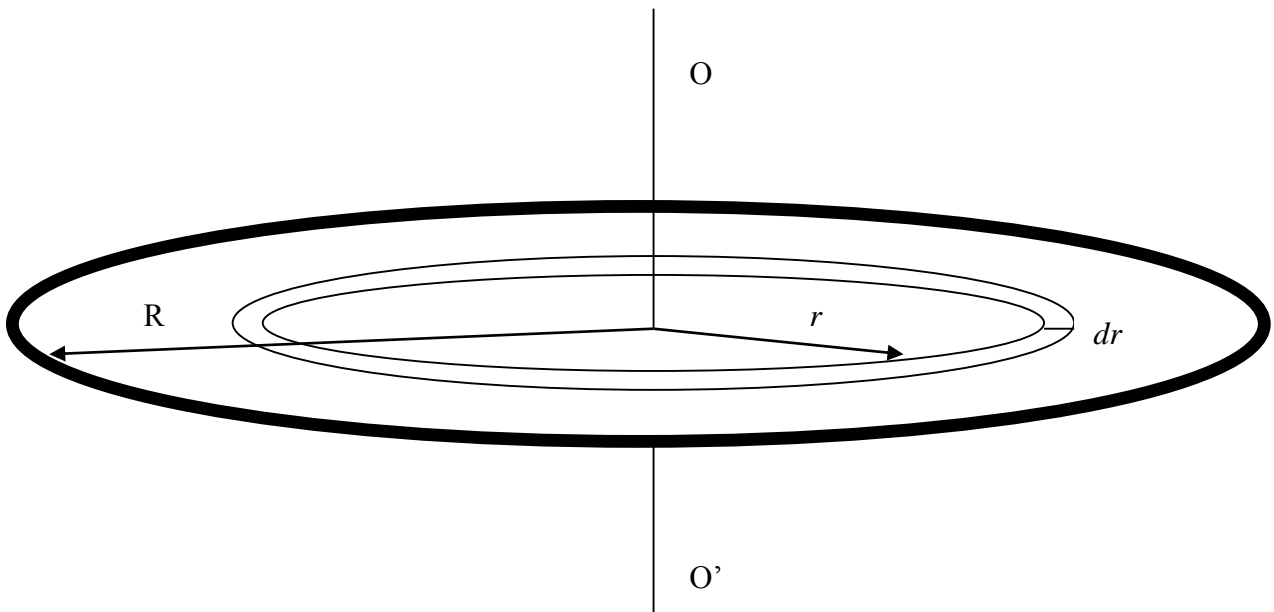


Рис. 3.2. К вычислению момента инерции диска

Момент инерции выделенного кольцевого участка

$$dI = dm r^2 = \rho dV r^2 = \rho \cdot 2\pi r h \cdot dr \cdot r^2 = 2\pi \rho h r^3 dr, \quad (3.10)$$

где h – толщина диска.

Проинтегрируем выражение (3.10) по всем диску

$$I_{\text{д}} = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \rho \cdot \pi R^2 h \cdot \frac{R^2}{2} = \rho V \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{m_{\text{д}} R^2}{2}. \quad (3.11)$$

Кольцо

Для нахождения момента инерции кольца в уравнении (3.11) нужно изменить пределы интегрирования и проинтегрировать по dr от внутреннего

радиуса кольца R_1 до его внешнего радиуса R_2 . Учтем также, что объём кольца $V = \pi(R_2^2 - R_1^2) \cdot h$. В результате получим

$$I_K = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \rho \cdot \pi(R_2^2 - R_1^2)h \cdot \frac{R_2^2 + R_1^2}{2} =$$

$$= \rho V \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} = \frac{m_K(R_1^2 + R_2^2)}{2}. \quad (3.12)$$

Если кольцо тонкостенное, то $R_1 \approx R_2 = R$ и его момент инерции

$$I_{\text{тонк}} = mR^2. \quad (3.13)$$

Аддитивность момента инерции: момент инерции тела сложной формы или системы тел равен сумме моментов инерции отдельных его частей.

Теорема Штейнера

Все моменты инерции (3.9), (3.11), (3.12) и (3.13) рассчитаны относительно осей проходящих через центр масс тел. Если необходимо знать момент инерции тела относительно другой оси, можно воспользоваться теоремой Штейнера: *момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы m на квадрат расстояния a между осями:*

$$I = I_c + ma^2. \quad (3.14)$$

Найдем, например, момент инерции стержня относительно оси AA' , которая проходит через один из его концов (рис. 3.1). Тогда согласно уравнениям (3.14) и (3.9) получим:

$$I = \frac{m_{\text{ст}} l^2}{12} + m_{\text{ст}} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_{\text{ст}} l^2}{3}. \quad (3.15)$$

Методика эксперимента

Для нахождения момента инерции тел сложной формы или тел у которых масса распределена по объему сложным образом, можно воспользоваться экспериментальными установками. Удобно использовать устройство изображенное на рисунке 3.3 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из верхней неподвижной платформы к которой на трех нерастяжимых нитях подвешена вращающаяся нижняя платформа.

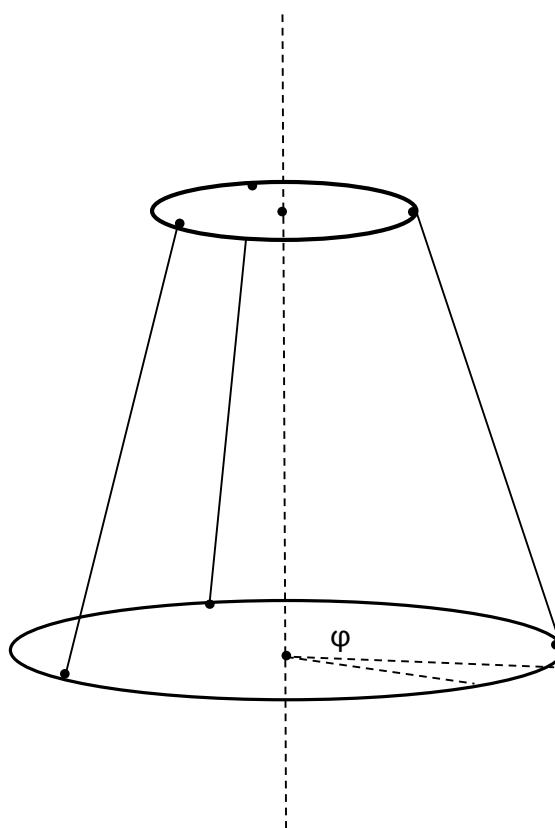


Рис. 3.3. Трифилярный подвес

Повернув верхнюю платформу на небольшой угол φ (это позволяет сделать способ крепления верхней платформы), мы отклоняем на такой же угол нижнюю платформу. Возникающий момент сил стремится вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, в котором момент сил будет равен нулю. Но в положении равновесия платформа не останавливается, так как она уже обладает угловой скоростью и вследствие инерции продолжает вращательное движение. Такие колебания называются крутильными.

Таким образом, в положении равновесия система обладает кинетической энергией вращательного движения, а при максимальном отклонении платформы потенциальной энергией в поле тяжести Земли, поскольку при постоянстве длины нитей платформа будет приподнята на некоторую высоту h зависящую от угла φ .

Вывод уравнения гармонических колебаний

Полная механическая энергия трифилярного подвеса складывается из кинетической энергии вращательного движения (3.3) и потенциальной энергии:

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (3.16)$$

$$E_{\Pi} = mgh .$$

Из геометрии установки можно показать, что угол поворота φ (при условии малости угла) и высота h связаны соотношением:

$$h = \frac{1}{2} \frac{rR}{H} \varphi^2, \quad (3.17)$$

где r и R радиусы верхней и нижней платформ до точек прикрепления нитей, а H – расстояние между платформами в положении равновесия. Тогда полная механическая энергия

$$E = E_K + E_{\Pi} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{mgrR}{H} \varphi^2. \quad (3.18)$$

Если пренебречь потерями энергии на трение и сопротивление воздуха, можно записать закон сохранения полной механической энергии с учетом уравнений:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{mgrR}{H} \varphi^2 \right) = 0. \quad (3.19)$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}(\varphi^2) = 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} = 2\varphi\omega$$

и

$$\frac{d}{dt}(\omega^2) = 2\omega \frac{d\omega}{dt} = 2\omega \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

получим

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgrR}{H} \varphi = 0. \quad (3.20)$$

Это уравнение является уравнением малых гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mgrR}{HI}} \quad (3.21)$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{IH}{mgrR}}. \quad (3.22)$$

Выразим из уравнения (3.22) момент инерции:

$$I = \frac{grR}{4\pi^2 H} mT^2 = kmT^2, \quad (3.23)$$

где

$$k = \frac{grR}{4\pi^2 H}. \quad (3.24)$$

Таким образом, при неизменных параметрах установки r , R и H , измеряя период крутильных колебаний, можно определять момент инерции пустой платформы, а также платформы с телами находящимися на ней.

Порядок выполнения работы

Задание 1

Определение момента инерции ненагруженной платформы

1. Запишите параметры установки: r – радиус верхней платформы, R – радиус нижней платформы (оба радиуса измеряются до точек прикрепления нитей), H – расстояние от центра верхней до центра нижней платформы, m_0 – масса нижней платформы. Данные занесите в таблицу (3.1).

Таблица 3.1

Результаты измерений для ненагруженной платформы

Параметры установки	Число колебаний n	Время колебаний t , с	Период колебаний T , с	Средний период $\langle T \rangle$, с
$r =$				
$R =$				
$H =$				
$m_0 =$				

2. Поворотом верхней платформы выведите нижнюю из положения равновесия, чтобы она совершала крутильные колебания с небольшой амплитудой, указанной преподавателем. Несколько раз $n_{\text{изм}}$ измерьте время $n = (10 \div 30)$ колебаний. Результаты измерений занесите в таблицу.

3. Рассчитайте период колебаний T для каждого измерения и вычислите средний период:

$$T = \frac{t}{n}, \quad (3.25)$$

$$\langle T \rangle = \frac{\sum T_i}{n_{\text{изм}}}.$$

4. Рассчитайте коэффициент k по формуле (3.24).

5. По формуле (3.23), приняв $m = m_0$, вычислите момент инерции ненагруженной платформы I_0 . Результат занесите в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

Результаты расчетов для ненагруженной платформы

Коэффициент для расчета момента инерции k , $\text{м}^2/\text{с}^2$	Момент инерции ненагруженной платформы I_0 , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$

Задание 2

Определение моментов инерции тел

1. Исходя из формы предложенных для опыта тел, измерьте с помощью штангенциркуля их размеры:

- для кольца внешний и внутренний радиусы R_1 и R_2 ;
- для диска радиус R ;
- для стержня длину l .

Занесите эти данные вместе с массами тел в таблицу 3.3.

Таблица 3.3

Результаты измерений для платформы, нагруженной телом

Параметры тел	Число колебаний n	Время колебаний t , с	Период колебаний T , с	Средний период $\langle T \rangle$, с
<u>Кольцо</u> : $R_1 =$ $R_2 =$ $m_k =$				
<u>Диск</u> : $R =$ $m_d =$				
<u>Стержень</u> : $l =$ $m_{ст} =$				

2. Положите тело на нижнюю платформу так, чтобы его центр совпадал с осью вращения платформы.

3. Выполните пункты 2 и 3 задания 1.

4. Рассчитайте по формуле (3.23) момент инерции нагруженной платформы. При расчете учтите, что масса системы $m = m_0 + m_T$, то есть увеличилась на величину массы тела.

5. Пользуясь свойством аддитивности, рассчитайте момент инерции каждого тела:

$$I_{T \text{ экс}} = I - I_0. \quad (3.26)$$

6. Для каждого из тел вычислите, пользуясь формулами (3.9), (3.11) и (3.12), теоретическое значение момента инерции $I_{T \text{ теор}}$.

7. Сравните экспериментальный результат с теоретическим и оцените погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|I_{T \text{ экс}} - I_{T \text{ теор}}|}{I_{T \text{ теор}}} \cdot 100\%. \quad (3.27)$$

8. Результаты расчетов занесите в таблицу 3.4 и сделайте вывод.

Таблица 3.4

Сравнение теоретических и экспериментальных величин

Тело	$I_{T \text{ теор}}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$I_{T \text{ экс}}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$\varepsilon_I, \%$
Кольцо			
Диск			
Стержень			

Задание 3

Проверка теоремы Штейнера

Вариант № 3-1

1. Измерьте параметры тел, с которыми будет проведен эксперимент (диски или стержни). Эти тела должны быть одинакового размера и массы. Данные замеров занесите в таблицу 3.5.

2. Установите N одинаковых тел на нижней платформе, расположив их симметрично относительно центра на минимально возможном расстоянии от оси вращения. Измерьте расстояние a от оси вращения до центра масс одного из тел.

3. Выполните пункты 2 и 3 задания 1.

4. Передвиньте тела, изменив расстояние a до центра платформы. Повторите измерения.

5. Для каждого расстояния рассчитайте по формуле (3.23) момент инерции нагруженной платформы. При расчете учтите, что масса системы $m = m_0 + Nm_T$, то есть увеличилась на величину, равную суммарной массе тел.

6. Пользуясь свойством аддитивности, рассчитайте момент инерции используемых тел и запишите их в таблицу 3.6:

$$I_T = \frac{I - I_0}{N}. \quad (3.28)$$

Таблица 3.5

Результаты измерений для проверки теоремы Штейнера (вариант 1)

Параметры тел	Расстояние от оси до тела a , м	Число колебаний n	Время колебаний t , с	Период колебаний T , с	Средний период $\langle T \rangle$, с
Количество тел $N =$					
Масса тела $m_T =$					
<u>Для диска:</u> радиус $R =$					
<u>Для стержня:</u> длина $l =$					

Таблица 3.6

Данные для построения графика $I_T(a^2)$

a^2 , м ²	I , кг·м ²	I_T , кг·м ²

7. Постройте график зависимости I_T от a^2 . Для этого удобнее всего воспользоваться программой Excel. Согласно выражению (3.14) зависимость

должна быть линейной. Проведите линию тренда в виде прямой и проанализируйте, насколько хорошо на нее ложатся экспериментальные точки.

8. Выведите уравнение линии тренда на график. Угловой коэффициент (коэффициент при x) должен совпадать с массой тела (диска или стержня), определите по нему $m_{\text{т.эсп}}$. Свободный член уравнения является моментом инерции тела относительно его центра масс $I_{\text{т.экс}}$.

9. По формулам (3.9) или (3.11) рассчитайте теоретические значения момента инерции тел $I_{\text{т.теор}}$.

10. Сравните теоретические и экспериментальные массы и моменты инерции тела и рассчитайте погрешности:

$$\varepsilon_m = \frac{|m_{\text{т.эсп}} - m_{\text{т}}|}{m_{\text{т}}} \cdot 100\%.$$

$$\varepsilon_I = \frac{|I_{\text{т.экс}} - I_{\text{т.теор}}|}{I_{\text{т.теор}}} \cdot 100\%.$$
(3.29)

11. Результаты всех расчетов занесите в итоговую таблицу 3.7 и сделайте выводы.

Таблица 3.7

Сравнение теоретических и экспериментальных величин

Масса тела			Момент инерции		
$m_{\text{т}}, \text{ кг}$	$m_{\text{т.эсп}}, \text{ кг}$	$\varepsilon_m, \%$	$I_{\text{т.теор}}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$I_{\text{т.экс}}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$\varepsilon_I, \%$

Вариант № 3-2

1. Измерьте параметры тел, с которыми будет проведен эксперимент (диски или стержни). Эти тела должны быть одинакового размера и массы. Данные замеров занесите в таблицу 3.8.

Таблица 3.8

Результаты измерений для проверки теоремы Штейнера (вариант 2)

Параметры тел и установки	Число колебаний n	Время колебаний $t, \text{ с}$	Период колебаний $T, \text{ с}$	Средний период $\langle T \rangle, \text{ с}$
Количество тел $N =$ Масса тела $m_{\text{т}} =$ <u>Для диска:</u> радиус $R =$ <u>Для стержня:</u> длина $l =$ Расстояние до оси $a =$				

2. Установите N одинаковых тел на нижней платформе, расположив их симметрично относительно центра на расстоянии, указанном преподавателем. Измерьте расстояние a от оси вращения до центра масс одного из тел.

3. Выполните пункты 2 и 3 задания 1.

4. Рассчитайте по формуле (3.23) момент инерции нагруженной платформы. При расчете учтите, что масса системы $m = m_0 + Nm_T$, то есть увеличилась на величину, равную суммарной массе тел.

5. Пользуясь свойством аддитивности, рассчитайте момент инерции используемых тел I_T по формуле (3.28) и запишите их в таблицу 3.9. Этот момент инерции определен относительно центра платформы и не совпадает с моментом инерции тела относительно его центра масс.

6. Примените теорему Штейнера (3.14) и рассчитайте момент инерции тел относительно центра масс:

$$I_C = I_T - m_T a^2. \quad (3.30)$$

7. По формулам (3.9) или (3.11) рассчитайте теоретические значения момента инерции тел $I_{T \text{ теор}}$.

8. Сравните экспериментальный результат с теоретическим и оцените погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|I_C - I_{T \text{ теор}}|}{I_{T \text{ теор}}} \cdot 100\%. \quad (3.31)$$

9. Результаты расчетов занесите в таблицу и сделайте вывод.

Таблица 3.9

Сравнение теоретических и экспериментальных величин

I_T , кг·м ²	I_C , кг·м ²	$I_{T \text{ теор}}$, кг·м ²	ε_I , %

Задание 4

Проверка аддитивности момента инерции

1. Возьмите несколько тел одинакового размера и массы, с которыми будет проведен эксперимент, и измерьте их параметры. Данные замеров занесите в таблицу 3.10.

2. Установите одно тело в центре нижней платформы так, чтобы его центр совпадал с осью вращения.

3. Выполните пункты 2 и 3 задания 1.

4. Добавьте еще одно тело и повторите измерения, затем третье и т.д.

Таблица 3.10

Данные для проверки аддитивности момента инерции

Параметры тел	Число тел N	Число колебаний n	Время колебаний t, c	Период колебаний T, c	Средний период $\langle T \rangle, c$
Масса тела $m_T =$ <u>Для кольца:</u> $R_1 =$ $R_2 =$ <u>Для диска:</u> радиус $R =$ <u>Для стержня:</u> длина $l =$					

5. Для каждого случая рассчитайте по формуле (3.23) момент инерции нагруженной платформы. При расчете учтите, что масса системы $m = m_0 + Nm_T$, где N – количество тел, помещенных на платформу. Данные занесите в таблицу 3.11.

Таблица 3.11

Данные для построения графика $I(N)$

N	I

6. Постройте график зависимости момента инерции I от количества одинаковых тел на платформе N . Удобнее всего это сделать в программе Excel. Если момент инерции обладает свойством аддитивности, то зависимость должна быть линейной:

$$I = I_{пл} + N \cdot I_T, \quad (3.32)$$

где $I_{пл}$ – момент инерции пустой платформы.

Проведите линию тренда в виде прямой и проанализируйте, насколько хорошо на нее ложатся экспериментальные точки.

7. Выведите уравнение линии тренда на график. Угловой коэффициент (коэффициент при x) должен совпадать с моментом инерции одного тела I_T . Свободный член уравнения определяет момент инерции пустой платформы.

8. По формулам (3.9), (3.11) или (3.12) рассчитайте теоретические значения момента инерции тел $I_{T \text{ теор}}$.

9. Сравните момент инерции тела, полученный из графика, и рассчитанный теоретически, а также момент инерции пустой платформы с полученным в задании 1. Рассчитайте погрешности:

$$\varepsilon_T = \frac{|I_T - I_{T \text{ теор}}|}{I_{T \text{ теор}}} \cdot 100\%.$$

$$\varepsilon_{\text{пл}} = \frac{|I_{\text{пл}} - I_0|}{I_0} \cdot 100\%.$$
(3.33)

10. Результаты всех расчетов занесите в итоговую таблицу 3.12 и сделайте выводы.

Таблица 3.12

Сравнение теоретических и экспериментальных величин

Момент инерции тела			Момент инерции пустой платформы		
I_T , кг·м ²	$I_{T \text{ теор}}$, кг·м ²	ε_T , %	$I_{\text{пл}}$, кг·м ²	I_0 , кг·м ²	$\varepsilon_{\text{пл}}$, %

Контрольные вопросы

8. Что такое момент инерции? В чем состоит физический смысл этой величины?

9. Как вычисляется момент инерции материальной точки и твердого тела? От чего зависит величина момента инерции тела?

10. Что означает аддитивность момента инерции? Какие физические величины также обладают свойством аддитивности?

11. Сформулируйте теорему Штейнера и укажите смысл всех величин, которые в нее входят. В каком случае применяется эта теорема?

12. Чему равна кинетическая энергия вращательного движения тела? Проведите сравнение с кинетической энергией поступательного движения.

13. Что такое трифилярный подвес и для чего его применяют?

14. Что такое крутильные колебания? Почему при проведении эксперимента угол поворота верхней платформы должен быть небольшим?

15. Какие законы и уравнения используются для вывода расчетных формул в данной лабораторной работе?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 ИССЛЕДОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Цель работы: проверка основного закона динамики вращательного движения, определение моментов инерции тел и проверка теоремы Штейнера с помощью маятника Обербека.

Общие сведения

Вращательное движение – это вид механического движения абсолютно твердого тела, при котором его точки описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Центры всех окружностей лежат при этом на одной прямой, которая перпендикулярна к плоскостям окружностей и называется осью вращения. Ось вращения может располагаться внутри тела и за его пределами.

Уравнения, описывающие динамику вращательного движения, очень похожи на соответствующие уравнения поступательного движения.

Для изучения динамики поступательного движения используются следующие физические величины:

- m – масса тела, мера инертности при поступательном движении;
- $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс тела;
- \vec{F} – сила, действующая на тело.

Основной закон динамики поступательного движения:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (4.1)$$

который в случае постоянной массы можно представить в виде:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (4.2)$$

где \vec{a} – это ускорение, которое получает тело под действием силы \vec{F} .

Для описания динамики вращающегося тела понадобятся ввести новые динамические характеристики:

- I – момент инерции тела;
- \vec{L} – момент импульса;
- \vec{M} – момент сил, действующих на тело.

Момент инерции является аналогом массы и представляет собой меру инертности тела при вращательном движении. Если тело можно считать материальной точкой, то его момент инерции

$$I_{\text{точ}} = mr^2, \quad (4.3)$$

где r – расстояние от точки до оси вращения.

Момент инерции – величина **аддитивная**, поэтому момент инерции любого тела можно найти, разбив его на материальные точки и просуммировав моменты инерции всех точек. Если масса распределена непрерывно, то в пределе бесконечно мелкого разбиения получаем формулу момента инерции тела:

$$I = \int r^2 dm. \quad (4.4)$$

Из (4.4) видно, что момент инерции зависит не только от массы тела, но и от ее распределения относительно оси вращения. Если провести много параллельных осей, то наименьший момент инерции будет для оси, проходящей через центр масс тела. Для других осей его можно определить по **теореме Штейнера**:

$$I = I_c + ma^2. \quad (4.5)$$

В этой формуле I – это момент инерции относительно произвольной оси, I_c – момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, m – масса, a – расстояние между осями.

Момент импульса играет во вращательном движении такую же роль, как импульс в поступательном.

Пусть материальная точка A массы m , положение которой относительно точки O определяется вектором \vec{r} , движется с импульсом \vec{p} (рис. 4.1). Тогда векторное произведение радиус-вектора \vec{r} на импульс \vec{p} называется моментом импульса \vec{L} материальной точки относительно точки O :

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]. \quad (4.6)$$

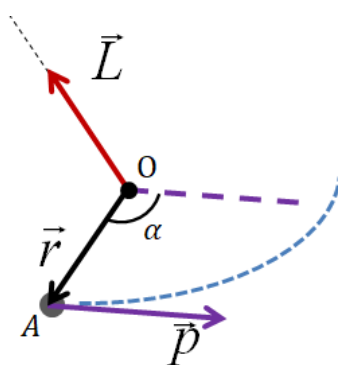


Рис. 4.1. К вычислению момента импульса материальной точки

Направление вектора \vec{L} определяется направлением векторного произведения (он будет направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора \vec{r} и \vec{p}), а его модуль $|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\alpha$, где α – угол между векторами.

Момент импульса относительно оси Z равен проекции вектора \vec{L} на эту ось. Для твердого тела его можно выразить через момент инерции тела относительно этой оси и угловую скорость вращения вокруг нее:

$$L_z = I\omega . \quad (4.7)$$

Аналогом силы во вращательном движении служит **момент сил**. Пусть точка A является точкой приложения силы \vec{F} (рис. 4.2). Проведем из точки O в точку A радиус-вектор \vec{r} . Моментом силы \vec{M} относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора \vec{r} на силу \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] . \quad (4.8)$$

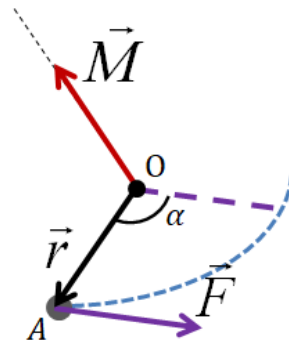


Рис. 4.2. К вычислению момента силы

Направление и модуль вектора момента силы определяются также, как и для вектора момента импульса. Модуль момента силы можно записать, как $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\alpha = F \cdot d$, где d – плечо силы \vec{F} (перпендикуляр, опущенный из точки O на линию действия силы).

В поступательном движении за изменение импульса тела во времени отвечает сила (4.1). Найдем величину, вызывающую изменение момента импульса во вращательном движении. Для этого возьмем производную по времени от выражения (4.6):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}.$$

Здесь мы учли, что $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] = [\vec{v}, m\vec{v}] = 0$.

Полученное уравнение

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4.9)$$

называется **основным уравнением динамики вращательного движения**. Используя выражения (4.7) для проекции момента импульса твердого тела на ось Z и связь между угловой скоростью и угловым ускорением ($\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$), можно переписать это уравнение в виде:

$$M_z = I\varepsilon. \quad (4.10)$$

Именно этот вид уравнения проверяется в одном из задания данной лабораторной работы.

Методика эксперимента

В лабораторной работе используется маятник Обербека, изображенный на рисунке 4.3, комплект из 4 одинаковых цилиндров с винтами, секундомер, линейка для определения высоты положения груза, линейки-шаблоны, штангенциркуль, набор гирек.

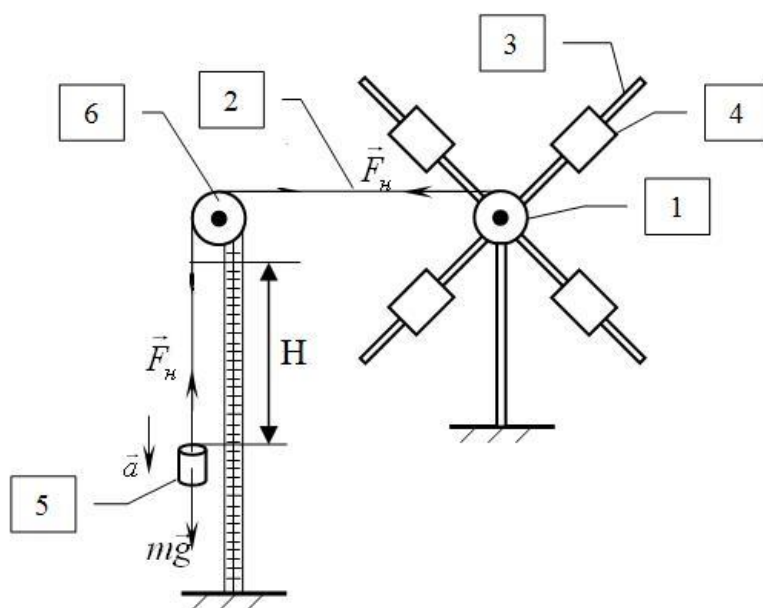


Рис. 4.3. Маятник Обербека

Вращающаяся часть маятника состоит из горизонтального вала, на который насажен шкив (1). На шкив намотана нить (2). К шкиву крепится толстостенная втулка с четырьмя спицами (3). На спицы можно надевать цилиндры (4) одинаковой массы, которые прикрепляются к спицам с помощью винтов. Нить перекинута через дополнительный шкив (6), и к нижнему концу нити привязана чашка (5), в которую помещают грузы различной массы (рис. 4.3).

Второй закон Ньютона для чашечки с помещенным в неё грузом массой m в проекции на вертикальную ось записывается в виде:

$$ma = mg - F_H, \quad (4.11)$$

где F_H – сила натяжения нити, a – ускорение груза, g – ускорение свободного падения.

Пусть H – расстояние, которое проходит груз m (чашечка) от начальной (верхней) точки движения до конечной (нижней) точки, когда нить полностью размотается со шкива. При равноускоренном движении

$$H = \frac{at^2}{2}, \quad (4.12)$$

где t – время движения груза от верхней точки до нижней. Исключив из уравнений (4.11) и (4.12) ускорение a , выразим силу натяжения:

$$F_H = m(g - a) = m\left(g - \frac{2H}{t^2}\right). \quad (4.13)$$

Тогда момент силы натяжения

$$M_H = F_H \cdot r = mgr\left(1 - \frac{2H}{gt^2}\right), \quad (4.14)$$

где r – радиус шкива.

Наряду с моментом силы натяжения на маятник действует момент силы трения, что приводит к уменьшению механической энергии. Поэтому после прохождения нижней точки маятник, вращаясь по инерции, поднимает груз m на высоту h , которая меньше H . Убыль механической энергии равняется работе силы трения:

$$mgH - mgh = M_{\text{тр}} \cdot \varphi, \quad (4.15)$$

где φ – суммарный угол поворота маятника в процессе вращения:

$$\varphi = \frac{H + h}{r}. \quad (4.16)$$

Выразим момент силы трения $M_{\text{тр}}$:

$$M_{\text{тр}} = \frac{mg(H - h)}{\varphi} = mgr \frac{H - h}{H + h} \quad (4.17)$$

и найдем результирующий момент сил, действующих на маятник при движении груза вниз:

$$M = M_H - M_{\text{тр}} = mgr \left(1 - \frac{2H}{gt^2} - \frac{H-h}{H+h} \right). \quad (4.18)$$

Используя уравнение (4.12) можно выразить угловое ускорение маятника:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2H}{rt^2}. \quad (4.19)$$

Если воспользоваться основным уравнением динамики вращательного движения (4.10), то поделив результирующий момент сил на угловое ускорение, получим момент инерции маятника Обербека:

$$I = \frac{M}{\varepsilon}. \quad (4.20)$$

Подставив (4.18) и (4.19), имеем

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2h}{H(H+h)} - 1 \right). \quad (4.21)$$

Таким образом, выражения (4.18), (4.19) и (4.21) позволяют экспериментально с помощью маятника Обербека найти все основные физические величины, входящие в основной закон динамики вращательного движения.

Порядок выполнения работы

Задание 1

Проверка основного закона динамики вращательного движения и определение момента инерции ненагруженного маятника Обербека

Вариант № 1-1

1. Отметьте на вертикальной линейке верхнее начальное и нижнее конечное положение чашечки, по их разности найдите расстояние H , которое проходит груз при движении вниз. В процессе выполнения работы величина H должна оставаться неизменной. Данные занесите в таблицу 4.1.

2. Положите в чашечку груз массой m и приведите маятник в начальное верхнее положение. Отпустите груз и измерьте время t движения чашечки в нижнее положение и высоту h последующего подъема груза.

3. По указанию преподавателя повторите пункт 2 требуемое число раз. Занесите в таблицу средние значения t и h .

4. Повторите пункты 2÷3 с другими массами грузов в чашечке.

5. Рассчитайте по формуле (4.19) для каждой массы груза угловое ускорение ε маятника Обербека и занесите результаты в таблицу 4.1.

6. Рассчитайте по формуле (4.18) для каждой массы груза результирующий момент сил M , действующих на маятник, и запишите в таблицу.

Таблица 4.1

Результаты измерений для ненагруженного маятника Обербека (вариант 1)

Общие данные	Масса груза m , кг	Время спуска t , с	Высота подъема h , м	Угловое ускорение ε , с ⁻¹	Вращательный момент M , Н·м
Высота спуска $H =$					
Радиус шкива $r =$					

7. Постройте график зависимости M от ε . Для этого удобнее всего воспользоваться программой Excel. Проведите линию тренда в виде прямой, учитывая, что она должна начинаться из точки (0,0). Проанализируйте, насколько хорошо экспериментальные точки ложатся на прямую.

8. Выведите уравнение линии тренда на график зависимости M от ε . Согласно (4.20) угловой коэффициент (коэффициент при x) будет равен моменту инерции ненагруженного маятника Обербека I_0 . Зафиксируйте его.

9. Сделайте вывод.

Вариант № 1-2

1. Отметьте на вертикальной линейке верхнее начальное и нижнее конечное положение чашечки, по их разности найдите расстояние H , которое проходит груз при движении вниз. В процессе выполнения работы величина H должна оставаться неизменной. Данные занесите в таблицу 4.2.

2. Положите в чашечку груз массой m и приведите маятник в начальное верхнее положение. Отпустите груз и измерьте время t_1 движения чашечки в нижнее положение и высоту h_1 последующего подъема груза.

3. Повторите пункт 2 n раз (по указанию преподавателя). Занесите в таблицу все полученные значения t_i и h_i .

4. Рассчитайте средние значения времени спуска и высоты подъема груза и занесите их в таблицу:

$$\langle t \rangle = \frac{\sum t_i}{n}, \quad (4.22)$$

$$\langle h \rangle = \frac{\sum h_i}{n}.$$

5. Повторите пункты 2÷4 N раз с другими массами грузов в чашечке.

Таблица 4.2

Результаты измерений для ненагруженного маятника Обербека (вариант 2)

Общие данные	Масса груза m , кг	Время спуска t , с	Среднее время $\langle t \rangle$, с	Высота подъема h , м	Средняя высота $\langle h \rangle$, м
Высота спуска $H =$					
Радиус шкива $r =$					

6. Рассчитайте по формуле (4.21) для каждой массы груза момент инерции ненагруженного маятника Обербека I_{0j} , взяв в качестве t и h средние значения $\langle t \rangle_j$ и $\langle h \rangle_j$. Результаты занесите в таблицу 4.3. Сравните полученные величины.

7. Определите среднее значение момента инерции ненагруженного маятника Обербека $\langle I_0 \rangle$ и запишите его в таблицу:

$$\langle I_0 \rangle = \frac{\sum I_{0j}}{N}. \quad (4.23)$$

Таблица 4.3

Сравнение моментов инерции для ненагруженного маятника Обербека

Масса груза m , кг	Момент инерции I_0 , кг·м ²	Средний момент инерции $\langle I_0 \rangle$, кг·м ²

8. Сделайте вывод.

Задание 2

Проверка теоремы Штейнера

1. Возьмите один из четырех полых цилиндров, предназначенных для маятника Обербека, и с помощью штангенциркуля определите его размеры: наружный диаметр D , внутренний диаметр d и высоту L . Занесите данные в таблицу 4.4, туда же добавьте массу цилиндра $m_{\text{ц}}$ и параметры маятника: радиус шкива r и радиус крестовины, к которой крепятся спицы r' .

Таблица 4.4

Параметры маятника Обербека и грузов на спицах

Параметры маятника Обербека и условия опыта	Параметры полых цилиндров
Радиус шкива $r =$ Радиус крестовины $r' =$ Высота спуска $H =$	Масса цилиндра $m_{\text{ц}} =$ Наружный диаметр $D =$ Внутренний диаметр $d =$ Высота $L =$

2. Наденьте на спицы четыре цилиндрических груза и установите их вплотную к шкиву маятника.

3. Отметьте на вертикальной линейке верхнее начальное и нижнее конечное положение чашечки, по их разности найдите расстояние H , которое проходит груз при движении вниз.

4. Положите в чашечку груз массой m и приведите маятник в начальное верхнее положение. Отпустите груз и измерьте время t движения чашечки в нижнее положение и высоту h последующего подъема груза.

5. По указанию преподавателя повторите пункт 4 требуемое число раз. Занесите в таблицу 4.5 средние значения t и h .

Таблица 4.5

Результаты измерений для проверки теоремы Штейнера

Длина шаблона $L_{\text{ш}}, \text{ м}$	Время спуска $t, \text{ с}$	Высота подъема $h, \text{ м}$	Расстояние от оси $a, \text{ м}$	Квадрат расстояния $a^2, \text{ м}^2$	Момент инерции $I, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$
0					

6. Передвиньте грузы на спицах и закрепите их на одинаковом расстоянии от оси вращения с помощью линейки-шаблона. Повторите это несколько раз с разными шаблонами и выполните пункты 4-5.

7. Определите расстояние от центров грузов до оси вращения по формуле:

$$a = r' + L_{\text{ш}} + \frac{L}{2}. \quad (4.24)$$

8. Рассчитайте, используя (4.21), для каждого случая момент инерции маятника Обербека I с грузами на спицах и занесите результаты в таблицу.

9. Постройте график зависимости I от a^2 . Для этого удобнее всего воспользоваться программой Excel. Согласно теореме Штейнера (4.5) эта зависимость должна быть линейной. Проведите линию тренда в виде прямой и проанализируйте, насколько хорошо на нее ложатся экспериментальные точки.

10. Выведите уравнение линии тренда на график. Угловой коэффициент (коэффициент при x) должен совпадать с общей массой грузов на спицах, определите по нему $m_{\text{общ}}$. Сравните эту величину с $4m_{\text{ц}}$ и рассчитайте погрешность:

$$\varepsilon_m = \frac{|m_{\text{общ}} - 4m_{\text{ц}}|}{4m_{\text{ц}}} \cdot 100\%. \quad (4.25)$$

11. Свободный член уравнения представляет собой момент инерции I' , который соответствует $a = 0$. Его можно представить как сумму момента инерции ненагруженного маятника Обербека I_0 и четырех моментов инерции цилиндров $I_{\text{ц}}$, вычисленных относительно их центра масс:

$$I' = I_0 + 4I_{\text{ц}}. \quad (4.26)$$

12. Рассчитайте момент инерции одного цилиндра по формуле:

$$I_{\text{ц}} = m_{\text{ц}} \left(\frac{D^2 + d^2}{16} + \frac{l^2}{12} \right). \quad (4.27)$$

Убедитесь, что выполняется соотношение $I_{\text{ц}} \ll I_0$, то есть момент инерции маятника Обербека на несколько порядков превышает собственный момент инерции грузов на спицах. Тогда с хорошей точностью, значительно превышающей точность эксперимента, можно считать, что $I' = I_0$.

13. Сравните I' и I_0 и определите, с какой точностью совпадают моменты инерции ненагруженного маятника Обербека, определенные разными способами:

$$\varepsilon_I = \frac{|I' - I_0|}{I_0} \cdot 100\%. \quad (4.28)$$

14. Результаты всех расчетов занесите в итоговую таблицу 4.6 и сделайте выводы.

Таблица 4.6

Сравнение величин, определенных разными способами

Общая масса цилиндров			Момент инерции ненагруженного маятника Обербека		
$m_{\text{общ}}, \text{ кг}$	$4m_{\text{ц}}, \text{ кг}$	$\varepsilon_m, \%$	$I', \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$I_0, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$\varepsilon_I, \%$

Задание 3

Определение моментов инерции тел

1. Возьмите один из четырех полых цилиндров, предназначенных для маятника Обербека, и с помощью штангенциркуля определите его размеры: наружный диаметр D , внутренний диаметр d и высоту L . Занесите данные в таблицу 4.7, туда же добавьте массу цилиндра $m_{\text{ц}}$ и параметры маятника: радиус шкива r и радиус крестовины, к которой крепятся спицы r' , а также высоту спуска груза и длину шаблона.

Таблица 4.7

Параметры маятника Обербека и грузов на спицах

Параметры маятника Обербека и условия опыта	Параметры полых цилиндров
Радиус шкива $r =$ Радиус крестовины $r' =$ Высота спуска $H =$ Длина шаблона $L_{\text{ш}} =$	Масса цилиндра $m_{\text{ц}} =$ Наружный диаметр $D =$ Внутренний диаметр $d =$ Высота $L =$

2. Выполните задание 1 (любой вариант), чтобы определить момент инерции ненагруженного маятника Обербека I_0 .

3. Наденьте на спицы маятника с помощью линейки-шаблона четыре цилиндрических груза на одинаковом расстоянии от оси вращения. Положите в чашечку груз массой m и приведите маятник в начальное верхнее положение. Отпустите груз и измерьте время движения чашечки в нижнее положение и высоту последующего подъема груза. Повторите эксперимент несколько раз с одной и той же массой. Данные запишите в таблицу 4.8.

4. Вычислите средние значения времени спуска груза и высоты подъема по формуле (4.22), а по формуле (4.21) рассчитайте момент инерции нагруженного маятника Обербека I , взяв в качестве t и h средние значения $\langle t \rangle$ и $\langle h \rangle$.

Таблица 4.8

Результаты измерений для нагруженного маятника Обербека

Масса груза m , кг	Время спуска t , с	Среднее время $\langle t \rangle$, с	Высота подъема h , м	Средняя высота $\langle h \rangle$, м

5. Используя свойство аддитивности момента инерции, определите момент инерции одного груза на спице по формуле:

$$I_{\text{экс}} = \frac{I - I_0}{4}. \quad (4.29)$$

6. Для расчета теоретического момента инерции груза $I_{\text{теор}}$ воспользуйтесь теоремой Штейнера (4.5). Момент инерции цилиндра относительно его центра масс рассчитайте по формуле (4.27), а расстояние от центра цилиндра до оси вращения вычислите, используя (4.24).

7. Сравните $I_{\text{экс}}$ и $I_{\text{теор}}$ и определите, с какой точностью они совпадают:

$$\varepsilon = \frac{|I_{\text{экс}} - I_{\text{теор}}|}{I_{\text{теор}}} \cdot 100\%. \quad (4.30)$$

8. Результаты сравнения занесите в таблицу 4.9 и сделайте выводы.

Таблица 4.9

Сравнение моментов инерции, определенных разными способами

Момент инерции цилиндрического груза		
$I_{\text{экс}}$, кг·м ²	$I_{\text{теор}}$, кг·м ²	ε , %

Контрольные вопросы

1. Перечислите динамические характеристики поступательного и вращательного движения.
2. Какая величина при вращательном движении является аналогом массы в поступательном движении? От чего она зависит и какими свойствами обладает?
3. Какая величина динамики вращательного движения является аналогом импульса тела в поступательном движении?
4. Как определяется момент импульса материальной точки: а) относительно точки O ; б) относительно оси z ?
5. Чему равен момент импульса материальной точки относительно оси z : а) перпендикулярной \vec{r} ; б) параллельной \vec{r} ?
6. Какая величина динамики вращательного движения является аналогом силы в поступательном движении?
7. Как определяется момент силы: а) относительно точки O ; б) относительно оси z ?
8. Чему равен момент силы относительно оси z : а) перпендикулярной \vec{F} ; б) параллельной \vec{F} ?
9. Как записывается уравнение, связывающее момент импульса и момент силы относительно: а) точки; б) оси?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: изучение зависимости амплитуды затухающих колебаний физического маятника от времени и вычисление характеристик затухающих колебаний.

Общие сведения

Колебательным движением (колебанием) называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости и наличием положением равновесия.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему, различают свободные и вынужденные колебания.

Свободные колебания совершаются под действием внутренних сил системы, после того как система была выведена из состояния равновесия. Такие колебания могут быть незатухающими (происходящими без уменьшения механической энергии системы, т.е. в консервативной системе) и затухающими (происходящими с уменьшением амплитуды и энергии под действием сил сопротивления, трения)

Вынужденные колебания совершаются под действием внешних периодически изменяющихся сил

Автоколебания – незатухающие колебания, поддерживаемые в системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями). Примером автоколебаний могут служить качели, часы.

При параметрических колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например, длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

Гармонические колебания

Рассмотрим колебания, возникающие при действии на колеблющуюся систему сил вида:

$$F = -kx, \quad (5.1)$$

где x – малое смещение колеблющейся системы от положения равновесия, k – коэффициент пропорциональности, постоянная величина определяемая параметрами системы

Силы вида (5.1) независимо от их природы называют **квазиупругими**, а постоянную величину k – коэффициентом квазиупругой силы.

Сила F обладает следующими свойствами:

- она пропорциональна смещению x из положения равновесия;
- она всегда направлена к положению равновесия (на это указывает знак « \leftarrow » в формуле 5.1).

По второму закону Ньютона сила сообщает телу массой m ускорение a :

$$ma = -kx. \quad (5.2)$$

Поделим все уравнение на m и учтём, что ускорение является второй производной от x по времени. Тогда уравнение (5.2) перепишем в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.3)$$

Коэффициент при x величина положительная, поэтому его можно представить в виде

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2. \quad (5.4)$$

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0. \quad (5.5)$$

Таким образом, колебания системы под действием квазиупругой силы описывается линейным, однородным дифференциальным уравнением второго порядка.

Решением уравнения (5.5) будет функция x вида

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.6)$$

или в экспоненциальной (комплексной) форме

$$x = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}, \quad (5.7)$$

где A – амплитуда, то есть максимальное смещение от положения равновесия (постоянная величина), $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебания, характеризующая смещение x в любой момент времени t , φ – начальная фаза, характеризующая смещение x в момент времени $t = 0$, ω_0 – собственная циклическая частота, определяемая выражением:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.8)$$

Колебания, совершаемые по закону синуса или косинуса, называются **гармоническими**. При гармонических колебаниях энергия системы остается неизменной, т.к. на систему не действуют диссипативные силы. Это идеализированные колебания.

Этот вид колебаний важен, поскольку колебания в природе и технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническому и периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Характеристики колебаний

Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку, например от $x = A$ к $x = -A$ и обратно в $x = A$, называется **полным колебанием**.

- **Период колебаний T** – время одного полного колебания, т.е. минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание.

$$T = \frac{t}{N}. \quad (5.9)$$

- **Частота колебаний ν** определяется, как число полных колебаний N в одну секунду.

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}. \quad (5.10)$$

Частоту, измеряют в герцах (Гц): 1 Гц равен 1 колебанию в секунду

- **Циклическая (круговая) частота ω** – число полных колебаний за 2π секунд

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.11)$$

Затухающие колебания

Реальные колебания происходят в средах, со стороны которых действуют неконсервативные силы – силы сопротивления. При малых колебаниях скорость системы будет малой и сила сопротивления пропорциональна величине скорости:

$$F_c = -rv, \quad (5.12)$$

где r – постоянная, называемая **коэффициентом сопротивления**. Знак «минус» обусловлен тем, что сила сопротивления F_c и скорость v имеют противоположные направления. Под действием этой силы колебания системы

будут сопровождаться потерей энергии, что приведет к затуханию колебаний, проявляющемуся в уменьшении амплитуды с течением времени. Такие колебания будут затухающими.

Второй закон Ньютона для затухающих колебаний имеет вид:

$$ma = -kx - rv. \quad (5.13)$$

Поделим уравнение (5.13) на m и учтём, что скорость v и ускорение a являются первой и второй частными производными от x соответственно:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (5.14)$$

Преобразовав (5.14), получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.15)$$

где β – коэффициент затухания

$$\beta = \frac{r}{2m}. \quad (5.16)$$

При условии слабого затухания, то есть при $\beta < \omega_0$, решением уравнения (5.15) будет функция вида:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.17)$$

где

$$A_0 e^{-\beta t} = A(t) - \quad (5.18)$$

амплитуда затухающих колебаний, зависящая от времени, A_0 – начальная амплитуда, $e \approx 2,72$ – основание натурального логарифма, ω – круговая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (5.19)$$

Графики зависимости смещения x от времени t для двух разных значений коэффициента затухания $\beta_2 > \beta_1$ приведены на рисунке 5.1.

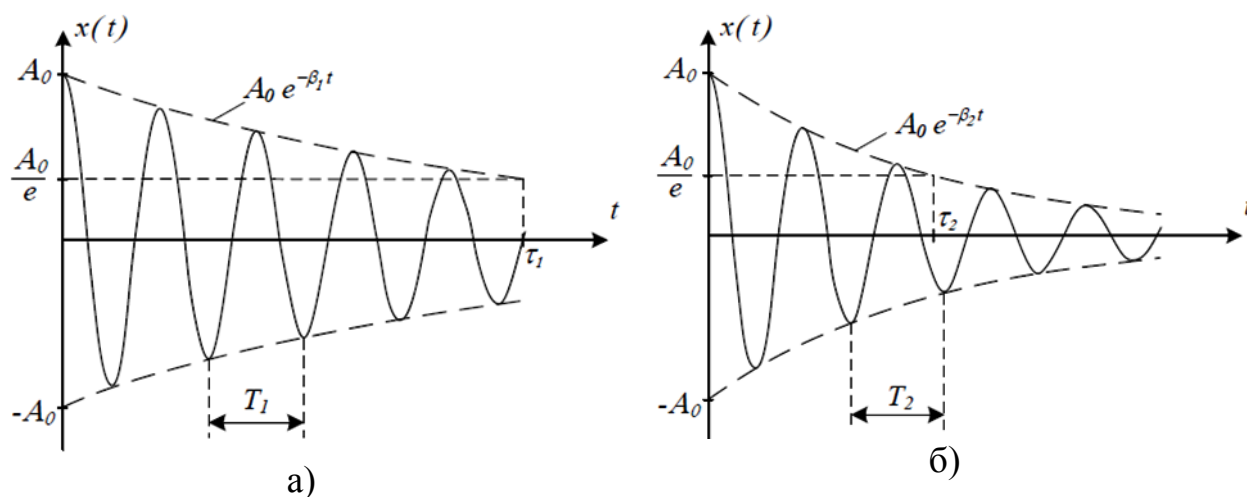


Рис. 5.1 Зависимость смещения $x(t)$ для различных коэффициентов затухания $\beta_2 > \beta_1$

Пунктирные огибающие на рис. 5.1. показывают зависимость амплитуды от времени

Зависимости амплитуды от времени для $\beta_3 > \beta_2 > \beta_1$ изображены на рисунке 5.2.

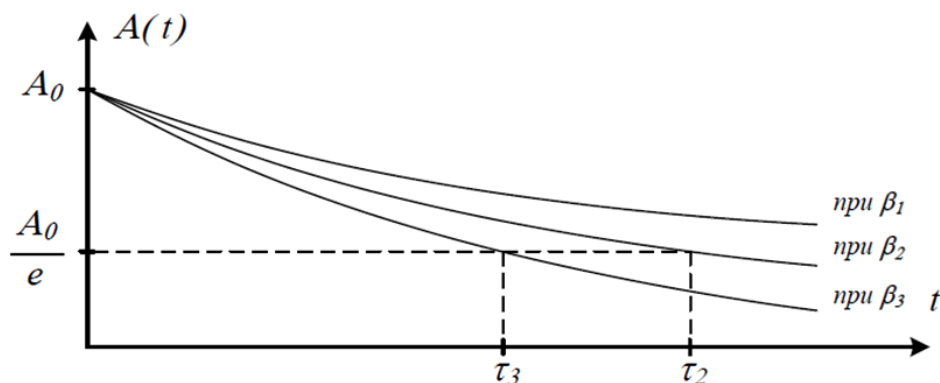


Рис. 5.2. Зависимости амплитуды затухающих колебаний от времени для различных β

Степень затухания, то есть быстроту убывания амплитуды колебаний и энергии колебательной системы со временем характеризует ряд величин.

Время релаксации τ – промежуток времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз. То есть

$$\frac{A(t)}{A(t + \tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t + \tau)}} = e^{\beta \tau} = e. \quad (5.20)$$

Откуда

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (5.21)$$

На рис. 5.2 показан способ графического определения времени релаксации τ .

Логарифмический декремент затухания λ – количественная характеристика быстроты затухания колебаний, численно равная натуральному логарифму отношения двух последовательных амплитуд (отстоящих на один период):

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T}. \quad (5.22)$$

Таким образом, получим связь между логарифмическим декрементом λ и коэффициентом затухания β :

$$\lambda = \beta T. \quad (5.23)$$

За время релаксации τ совершается N_e полных колебаний

$$N_e = \frac{\tau}{T}. \quad (5.24)$$

Используя (5.21), (5.23) и (5.24), получим

$$\lambda = \beta T = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau}{N_e} = \frac{1}{N_e}, \quad (5.25)$$

то есть логарифмический декремент затухания λ есть величина, обратная числу колебаний N_e , за которые амплитуда уменьшается в e раз.

Добротность Q – с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент времени W , к убыли этой энергии за один период колебаний ΔW , то есть:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}. \quad (5.26)$$

Как известно, полная энергия в момент времени t и в момент времени $(t+T)$ определяются выражениями:

$$W(t) = \frac{kA^2}{2} = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2} \quad (5.27)$$

$$W(t + T) = \frac{kA^2}{2} = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2}.$$

С учетом этих выражений добротность

$$Q = 2\pi \frac{W}{W(t) - W(t + T)} = 2\pi \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{kA_0^2 e^{-2\beta t} - kA_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}. \quad (5.28)$$

Воспользуемся разложением в ряд $e^{-2\beta T}$ при малом затухании β , т.е. $\beta \ll \omega_0$. Тогда

$$e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T. \quad (5.29)$$

Подставляя (5.29) в (5.28) получим выражение для добротности:

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (5.30)$$

Вынужденные колебания

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо постоянно компенсировать потери энергии, которые происходят вследствие действия силы сопротивления.

Вынужденными колебаниями называются колебания, происходящие под действием внешней переменной (периодической) силы, работа которой компенсирует потери энергии на преодоление трения в механических колебательных системах.

Периодически изменяющаяся сила имеет вид:

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (5.31)$$

где F_0 – амплитудное значение внешней силы, ω – ее круговая частота.

Тогда система будет совершать вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы. Второй закон Ньютона в этом случае запишется в виде:

$$ma = -kx - rv + F_0 \cos \omega t. \quad (5.32)$$

После преобразований получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (5.33)$$

где f_0 – амплитуда приведенной силы:

$$f_0 = \frac{F_0}{m}. \quad (5.34)$$

Решением для установившихся вынужденных колебаний, является функция вида:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (5.35)$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний, ω – частота установившихся колебаний, совпадающая с частотой вынуждающей силы, φ – начальная фаза, определяющая сдвиг по фазе между смещением x и вынуждающей силой F .

Из уравнений (5.33) и (5.35) следует, что постоянные A и ω должны иметь такие значения, чтобы гармоническая функция $f_0 \cos \omega t$ была равна сумме трех гармонических функций, стоящих в левой части уравнения (5.33).

Используя метод векторных диаграмм, можно показать, что амплитуда A и начальная фаза φ являются функциями частоты ω вынуждающей силы и определяются соотношениями:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (5.36)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.37)$$

Зависимость амплитуды (5.36) вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения.

Резонансом называют явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний ($\omega \rightarrow \omega_0$).

Чтобы определить резонансную частоту ω_p , нужно найти максимум функции (5.36) или, что тоже самое, минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе.

Взяв производную подкоренного выражения по ω и приравняв ее к нулю, получим

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2 \omega = 0. \quad (5.38)$$

Откуда

$$\omega = \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (5.39)$$

Подставив (5.39) в (5.36), получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$A_p = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (5.40)$$

Из (5.40) следует, что при отсутствии сопротивления среды ($\beta = 0$) амплитуда при резонансе обращается в бесконечность. Согласно (5.39) резонансная частота ω_p при том же условии совпадает с собственной частотой колебаний системы ω_0 .

Графики зависимости амплитуды A (5.36) от ω при различных значениях коэффициента затухания β (**резонансные кривые**) показаны на рисунке 5.3.

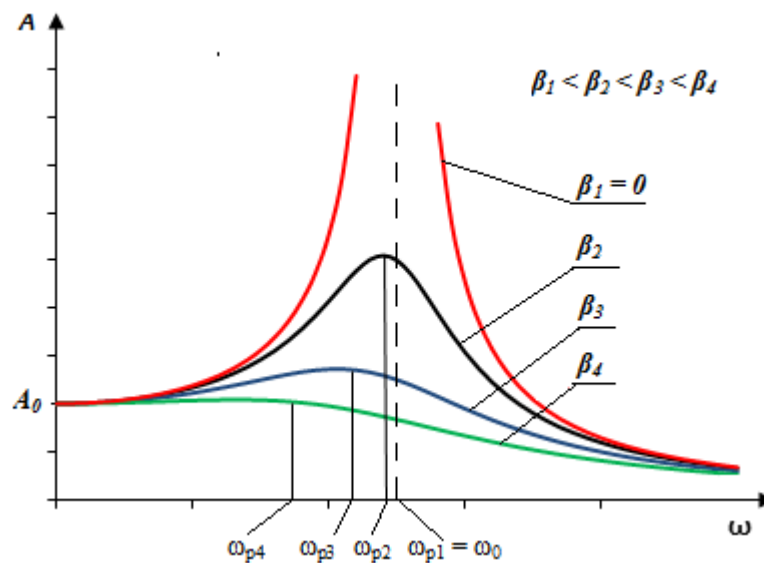


Рис. 5.3. Амплитудно-частотные характеристики (резонансные кривые) для разных значений коэффициента затухания β

Из (5.39) следует, что при увеличении β , резонансная частота ω_p медленно уменьшается (рассматриваются случаи слабого затухания, то есть $\beta^2 \ll \omega_0^2$), смещаясь влево от собственной циклической частоты ω_0 . При этом же условии соответствующая ей резонансная амплитуда (5.40) также уменьшается.

При $\omega = 0$ получим:

$$A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} - \quad (5.41)$$

статическое смещение колеблющейся системы от положения равновесия под действием постоянной силы F_0 .

При $\omega \rightarrow \infty$ (стремящейся к бесконечному значению, то есть при очень больших значениях частоты вынуждающей силы) амплитуда стремится к нулю.

Из формулы (5.40) вытекает, что при малом затухании ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) амплитуда при резонансе приближенно равна

$$A_p = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \quad (5.42)$$

При **критическом** затухании резонанс не наступает, так как резонансная частота ω_p стремится к нулю. Критический коэффициент затухания определяется выражением:

$$\beta_{кр} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}. \quad (5.43)$$

Добротность колебательной системы, находящейся в режиме вынужденных колебаний, можно найти как

$$Q = \frac{\omega_p}{\Delta\omega_{0,7}}, \quad (5.44)$$

где $\Delta\omega_{0,7}$ – ширина резонансной кривой (рис. 5.4) на уровне половинной мощности внешнего источника вынуждающей силы:

$$\begin{aligned} \frac{P_p}{2} &\sim \frac{A_p^2}{(\sqrt{2})^2}, \\ \frac{A_p}{\sqrt{2}} &\approx 0,7A_p. \end{aligned} \quad (5.45)$$

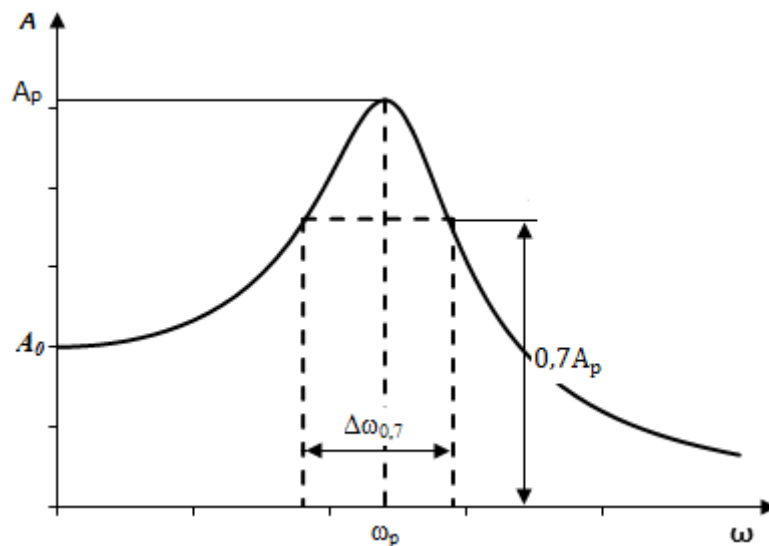


Рис. 5.4. Определение добротности колебательной системы

Добротность можно представить и как отношение резонансной амплитуды к статической, т.е. как **коэффициент усиления**:

$$Q = \frac{A_p}{A_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (5.46)$$

Таким образом, добротность Q показывает во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает статическое смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы (это справедливо лишь при небольшом затухании).

Методика эксперимента

Установка для изучения затухающих колебаний (рис. 5.5) представляет собой **физический маятник**. Его масса, в отличие от математического маятника, не сосредоточена в одной точке, а распределена по объёму тела. Маятник может совершать колебания относительно оси OO' .

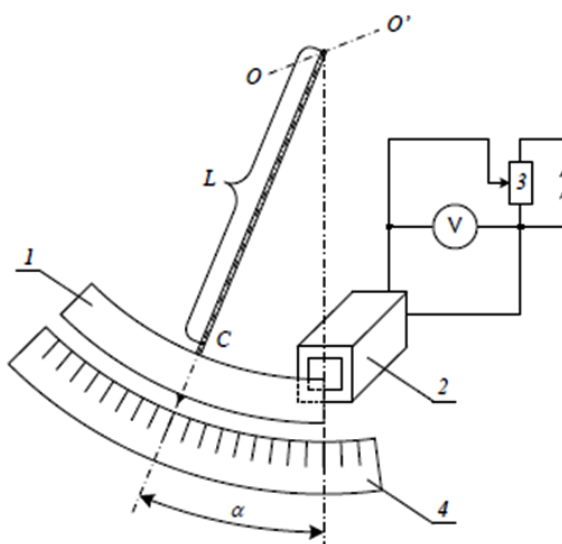


Рис. 5.5. Схема экспериментальной установки

Установка состоит из следующих частей:

- 1 – маятник, состоящий из плоской закругленной алюминиевой пластины и стержня, соединяющего пластину с осью вращения OO' ;
- 2 – электромагнит, полюса которого расположены на небольшом расстоянии от алюминиевой пластины;
- 3 – потенциометр, которым можно регулировать напряжение на электромагните и, следовательно, напряжённость создаваемого магнитного поля;
- 4 – закруглённая линейка (шкала) для измерения амплитуды колебаний маятника.

Основные характеристики физического маятника:

- момент инерции маятника I ;
- масса маятника m ;

- расстояние L от центра тяжести маятника C до оси вращения.

Отведённый из положения равновесия маятник может совершать колебания, амплитуда которых уменьшается со временем из-за действия сил трения и сопротивления воздуха. При включении электромагнита возникает дополнительная сила сопротивления, основанная на явлении электромагнитной индукции. Пластина маятника, двигаясь в магнитном поле, пересекает его силовые линии. При этом в ней наводятся вихревые токи (токи Фуко), которые, в свою очередь, взаимодействуют с полем магнита. Таким образом, возникает тормозящая сила, всегда направленная против перемещения (правило Ленца) и пропорциональная скорости перемещения пластины. Регулируя ток через электромагнит, можно менять величину магнитного поля, а значит и быстроту уменьшения амплитуды колебаний.

Для получения уравнения колебательного движения маятника, запишем основной закон динамики вращательного движения:

$$M = I\varepsilon, \quad (5.47)$$

где M – проекция векторной суммы моментов сил, действующих на маятник на выбранное направление; $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ – угловое ускорение; I – момент инерции маятника

Рассмотрим схему сил, действующих на маятник (рис. 5.6). Если маятник вывести из положения равновесия, отклонив его на угол α , то действующие на него сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{T} образуют результирующую силу, которая по модулю равна:

$$F = mg \sin \alpha. \quad (5.48)$$

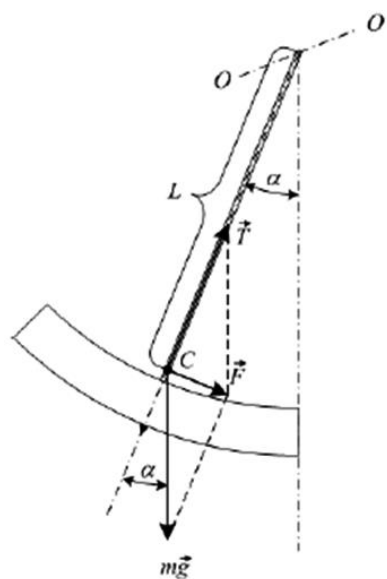


Рис. 5.6. Силы, действующие на маятник

Это так называемая «*возвращающая сила*», которая при любом смещении маятника направлена к положению равновесия. Момент силы \vec{F} относительно оси OO' :

$$M_1 = -mgL \sin \alpha. \quad (5.49)$$

Знак «минус» показывает, что сила \vec{F} направлена противоположно смещению маятника.

При движении маятника на него будут действовать силы трения в оси, сопротивления воздуха и торможения со стороны магнитного поля, все они пропорциональны его угловой скорости, и создают общий тормозящий момент:

$$M_2 = -k \frac{d\alpha}{dt} = -k\omega, \quad (5.50)$$

где $-k$ коэффициент сопротивления движению маятника; $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ – угловая скорость маятника.

Перепишем основной закон динамики вращательного движения (5.47) с учетом (5.49) и (5.50):

$$-mgL \sin \alpha - k \frac{d\alpha}{dt} = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (5.51)$$

При малых $\alpha < 0,175$ рад ($\alpha < 10^\circ$) $\sin \alpha \approx \alpha$. Тогда второй закон динамики можно записать в виде:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{I} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{mgL}{I} \alpha = 0. \quad (5.52)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{k}{2I} &= \beta, \\ \frac{mgL}{I} &= \omega_0^2. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Выражение (5.52) приобретает вид, аналогичный уравнению (5.15):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (5.54)$$

Как уже отмечалось, при условии слабого затухания ($\omega_0^2 > \beta$), решением данного уравнения будет уравнение вида:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (5.55)$$

Поскольку смещение x , измеряемое по линейке (шкале), пропорционально углу отклонения маятника, то уравнение (5.55) можно записать в виде:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) = A(t) \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (5.56)$$

где $A(t)$ – амплитуда колебаний в зависимости от времени t ; A_0 – начальная амплитуда; φ_0 – начальная фаза; β – коэффициент затухания; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний; ω_0 – собственная частота колебаний (при отсутствии затухания).

Зависимость амплитуды A от времени t экспоненциальная. Однако, величина натурального логарифма отношения $\frac{A(0)}{A(t)}$ является линейной функцией времени t или числа колебаний N :

$$\ln \frac{A(0)}{A(t)} = \beta t = \beta T N = \lambda N. \quad (5.57)$$

Здесь учтено, что $t = TN$, где T – период колебаний.

Пользуясь зависимостью (5.57) легко определить характеристики затухания. Графики функций $\ln \frac{A(0)}{A(t)} = \lambda N$ изображены на рисунке 5.7 для $\beta_3 > \beta_2 > \beta_1$.

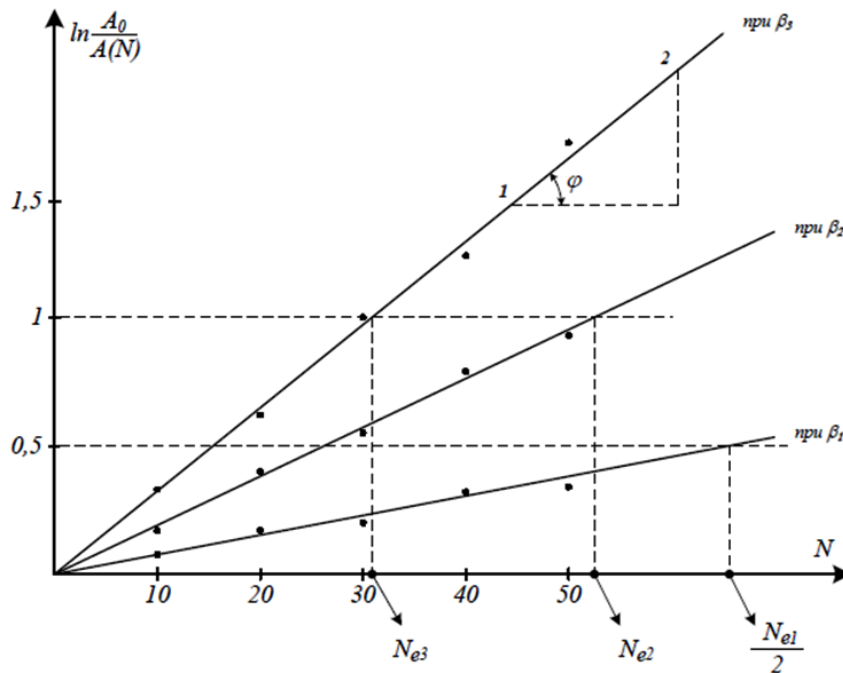


Рис. 5.7. Зависимость логарифма отношения начальной и текущей амплитуд от количества совершенных колебаний

Согласно данной зависимости, тангенс угла наклона прямой φ к оси абсцисс (N) равен логарифмическому декременту затухания (см. рис. 5.7):

$$tg\varphi = \lambda. \quad (5.58)$$

Определив, исходя из графика, логарифмический декремент затухания λ , можно вычислить коэффициент затухания β , число колебаний N_e , совершенных к моменту времени, когда амплитуда убывает в e раз, время релаксации τ и добротность Q .

Порядок выполнения работы

1. Во время первого эксперимента электромагнит должен быть отключен (напряжение питания электромагнита $U_1 = 0$ В). Отведите маятник от положения равновесия на величину $A_0 = 6-8$ см (по заданию преподавателя) и отпустите, одновременно запустив секундомер для отсчета времени t .

2. Далее считайте количество N полных колебаний («туда-сюда») и фиксируйте амплитуду через каждые 5 или 10 колебаний (маятник НЕ останавливать!). Полученные значения занесите в таблицу 5.1. Общее число отсчитываемых колебаний задаётся преподавателем.

3. Засеките время 50 полных колебаний и запишите в соответствующую графу таблицы 5.1.

4. Повторите пункты 1 и 2 при включенном электромагните, с напряжением U_2 и U_3 (например, $U_2 = 10$ В, $U_3 = 20$ В).

Таблица 5.1

Результаты измерений

Напряжение на электромагните U , В	Амплитуда A , см	Число колебаний N						Время t , с
		0	10	20	30	40	50	
$U_1 = 0$ В	$A(N)$							
	$\ln\left(\frac{A(0)}{A(N)}\right)$							
$U_2 =$	$A(N)$							
	$\ln\left(\frac{A(0)}{A(N)}\right)$							
$U_3 =$	$A(N)$							
	$\ln\left(\frac{A(0)}{A(N)}\right)$							

Обработка результатов:

5. Вычислите периоды T колебаний по формуле (5.9) и занесите в таблицу 5.2.

6. Для каждого измерения рассчитайте величину $\ln\left(\frac{A(0)}{A(N)}\right)$ и запишите в таблицу 5.1 для трёх серий экспериментов с U_1 , U_2 и U_3 .

7. Постройте графики, соответствующие каждой серии экспериментов в координатах $\ln\left(\frac{A(0)}{A(N)}\right)$ от N (см рис. 5.7). Аппроксимируйте экспериментальные данные, проведя прямые. Учтите, что прямые должны начинаться из точки (0;0).

8. Для каждой прямой вычислите тангенс угла наклона. Если построение графиков выполняется в программе Excel, то угловой коэффициент берется из уравнения линии тренда.

Если график строится на миллиметровой бумаге, то тангенс угла наклона рассчитывается по двум произвольным точкам, лежащим на соответствующей прямой:

$$tg\varphi = \frac{\ln \frac{A(0)}{A(N_2)} - \ln \frac{A(0)}{A(N_1)}}{N_2 - N_1}. \quad (5.59)$$

Согласно (5.28) эта величина совпадает с логарифмическим декрементом затухания λ , занесите это значение в таблицу 5.2.

9. По формулам (5.25), (5.24), (5.21) и (5.30) рассчитайте другие характеристики затухающих колебаний: число колебаний N_e , за которое амплитуда убывает в e раз, время релаксации τ , коэффициент затухания β и добротность колебательной системы Q . Результаты занесите в таблицу 5.2.

Таблица 5.2

Характеристики затухающих колебаний

Напряжение на электромагните	T , с	λ	N_e	τ , с	β , с ⁻¹	Q
$U_1 = 0$ В						
$U_2 =$						
$U_3 =$						

10. Проанализируйте, как изменяются характеристики затухающих колебаний в зависимости от силы сопротивления, действующей на маятник, и сделайте вывод.

Контрольные вопросы

1. Что такое свободные колебания? При каких условиях они будут гармоническими? Запишите уравнение гармонических колебаний, перечислите их характеристики.
2. При каких условиях колебания будут затухающими? Запишите уравнение затухающих колебаний. По какому закону убывают амплитуда и энергия затухающих колебаний в зависимости от времени?
3. Какие величины характеризуют затухающие колебания и каков физический смысл каждой из этих величин?
4. Какие колебания называются вынужденными? Запишите уравнение вынужденных колебаний. Почему установившиеся колебания совершаются с частотой вынуждающей силы?
5. Как зависят от характеристик колебательной системы и вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг по фазе между смещением и силой?
6. Какой вид имеет резонансная кривая? Чем определяются ее высота и ширина? При каком условии в колебательной системе наступает резонанс?
7. Что такое физический маятник? Почему в лабораторной работе его колебания будут затухающими даже при выключенном электромагните?
8. Для чего в данной лабораторной работе графики строятся в логарифмическом масштабе?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ГАЗАХ МЕТОДОМ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ

Цель работы: ознакомление с явлением акустического резонанса на примере стоячих волн и определение скорости звуковых волн.

Общие сведения

Если в упругой среде находится колеблющееся тело (камертон, струна, мембрана), то оно будет воздействовать на соприкасающиеся с ним частицы среды (атомы, молекулы), заставляя их совершать вынужденные колебания. Вследствие чего в прилегающих к этому телу элементах среды возникают периодические деформации (например, растяжения или сжатия среды) которые ведут к возникновению упругих сил, стремящихся вернуть элементы среды в первоначальное состояние равновесия, то есть в средах возникают упругие колебания. Так как соседние элементы среды взаимодействуют друг с другом, то эти упругие деформации будут передаваться от одних участков среды к другим. В результате в колебательное движение вовлекаются частицы среды все более и более удаленные от колеблющегося тела, или говорят, распространяется упругая волна.

Упругой волной называется процесс распространения колебаний в упругой среде.

Главной особенностью волн является то, что при их распространении частицы среды не перемещаются вместе с волной, а всегда колеблются около своего положения равновесия.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к произвольному моменту времени t , называется волновым фронтом. Нормаль к волновому фронту совпадает с направлением распространения волны. Геометрическое место точек, колеблющихся одинаково, т. е. в одной фазе, называется волновой поверхностью. Фаза колебаний – физическая величина, определяющая при заданной амплитуде состояние колебательной системы в любой момент времени. Фаза выражается в угловых единицах радианах, градусах или долях периода. Под скоростью волны понимают скорость фронта волны, поэтому её называют фазовой скоростью.

В зависимости от вида волновой поверхности, волны можно разделить на: плоские, сферические, цилиндрические. Расстояние λ , на которое распространяется волна за время равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны. То есть

$$\lambda = v_{зв} \cdot T = v_{зв} \cdot \frac{1}{\nu}, \quad (7.1)$$

где $v_{зв}$ – фазовая скорость волны, T – период колебаний, ν – частота. Частицы, отстоящие друг от друга на λ , колеблются с разностью фаз равной 2π , то есть

синфазно.

Фазовая скорость волны не зависит от длины волны λ и периода T (частоты ν), а зависит только от упругих свойств среды.

Упругие волны можно разделить на два типа: продольные и поперечные. Продольными называют волны, если частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны (рисунок 7.1а). Такие волны могут распространяться в средах, обладающих упругой деформацией сжатия и растяжения. Такими свойствами обладают твердые, жидкие и газообразные среды.

Поперечными называют волны, если частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны (рисунок 7.1б). Такие волны могут распространяться только при наличии упругой деформации сдвига, т.е. только в твердых телах.



Рис. 7.1. Интерпретация продольной (а) и поперечной (б) волн

Математически распространение всех видов волн описывается уравнением волны. Уравнением волны называется выражение, которое представляет функцию координат и времени и в общем виде может быть записано как

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (7.2)$$

Эта функция должна быть периодической как относительно времени t , т. к. описывает колебание частиц, так и относительно координат, т. к. точки отстоящие друг от друга на расстоянии λ , колеблются одинаковым образом.

Пусть ось x совпадает с направлением распространения волны, тогда для плоской волны можем записать

$$S = S(x, t), \quad (7.3)$$

где S – смещение частицы от положения равновесия.

Пусть в точке $x_0 = 0$ частица колеблется по закону:

$$S(x_0, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (7.4)$$

Если скорость волны v , тогда в точку с координатой x волна придет через время

$$\tau = \frac{x}{v}, \quad (7.5)$$

и колебания в этой точке будут происходить по закону:

$$S(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t - \tau)) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \omega \cdot \frac{x}{v}\right). \quad (7.6)$$

В этом выражении A – амплитуда волны, а $(\omega \cdot t - \omega \cdot x/v)$ – фаза волны, которая определяет при заданной амплитуде состояние колебательной системы в любой момент времени.

Выразим из (7.1) скорость волны и подставим в выражение фазы волны:

$$\omega \cdot \frac{x}{v} = \omega \cdot \frac{x \cdot T}{\lambda} = \omega \cdot \frac{x \cdot 2\pi}{\lambda \cdot \omega} = x \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = x \cdot k, \quad (7.7)$$

где k – волновое число, которое показывает, сколько длин волн укладывается на отрезке 2π . Поставляя (7.7) в (7.6) получим уравнение плоской бегущей волны распространяющейся в направлении оси x :

$$S(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x). \quad (7.8)$$

Если волна распространяется в направлении противоположном оси x , то

$$S(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x). \quad (7.9)$$

Уравнение бегущей волны (7.8) является решением дифференциального уравнения, которое называется волновым. Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (7.10)$$

В общем случае волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (7.11)$$

Если бегущая волна встречает на своем пути границу раздела двух сред, то она частично переходит в другую среду (преломляется), а частично отражается. При этом падающая, отраженная и преломленная волны имеют одинаковые частоты и постоянную разность фаз. Такие волны называются когерентными. А

при наложении двух или более когерентных волн возникает явление интерференции – взаимного усиления или ослабления амплитуд складываемых волн.

Волны, образующиеся при наложении двух встречных плоских волн с одинаковыми амплитудами и частотами, называются стоячими.

Получим уравнение стоячей волны. Пусть бегущая волна отражается от преграды и начинает двигаться в противоположном направлении. Тогда падающей волне будет соответствовать уравнение (7.8), а отраженной – уравнение (7.9). Обозначим падающую и отраженную волны S_1 и S_2 соответственно. Воспользовавшись формулой:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

а также формулой (7.7) получим уравнение стоячей волны:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + A \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x) = \\ &= 2A \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t) = 2A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \cdot \sin(\omega \cdot t). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Из уравнения (7.12) видно, что колебания стоячей волны той же частоты, что и у падающей волны. Выражение

$$A_{\text{ст}} = 2A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \quad (7.13)$$

соответствует амплитуде стоячей волны, причем амплитуда $A_{\text{ст}}$ зависит от координаты x . Используя (7.13) можно определить координаты максимальных и минимальных значений амплитуд стоячих волн. Амплитуда $A_{\text{ст}}$ будет максимальна при условии:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x_{\text{п}} = \pm n \cdot \pi \quad (\text{при } n = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (7.14)$$

Координаты $x_{\text{п}}$, в которых амплитуда максимальна и равна $A_{\text{ст}} = 2A$, называются пучностями и определяются по формуле:

$$x_{\text{п}} = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (7.15)$$

Амплитуда $A_{\text{ст}}$ будет минимальна при условии:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x_{\text{у}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \quad (\text{при } n = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (7.16)$$

Координаты x_y в которых амплитуда равна $A_{\text{ст}} = 0$ называются узлами и могут быть вычислены по формуле:

$$x_y = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (7.17)$$

Фаза колебаний по разные стороны от узла различается на π – т.е. колебания частиц происходят в противофазе, а между узлами частицы колеблются синфазно. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Из формул (7.15) и (7.17) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и узлами одинаковы и равны:

$$\Delta x_{\text{п}} = \Delta x_y = \frac{\lambda}{2}. \quad (7.18)$$

Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на

$$x_y - x_{\text{п}} = \frac{\lambda}{4}. \quad (7.19)$$

Стоячие волны возникают при отражении как от менее плотной, так и от более плотной среды. Если среда, от которой происходит отражение, более плотная, то в месте отражения возникает узел (рис. 7.2а). Образование узла связано с тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную и у границы происходит сложение колебаний с противоположными фазами, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, изменение фазы не происходит, и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами – образуется пучность (рис. 7.2б).

В отличие от бегущей волны, в стоячей волне переноса энергии нет, т.к. падающие и отраженные волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположном направлении.

В среде, имеющей ограниченный размер L , стоячая волна может образоваться только в том случае, когда длина L кратна целому числу длин полувольт:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.20)$$

Диапазон частот упругих волн простирается от малых долей Гц до 10^{13} Гц. В последнем случае длины упругих волн становятся сравнимыми с параметрами кристаллической решётки.

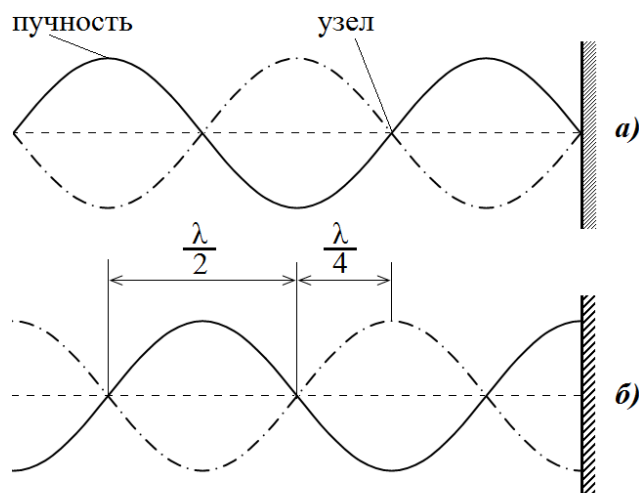


Рис. 7.2. Образование стоячей волны при отражении от более плотной среды (а) и менее плотной среды (б)

Примером упругих волн в среде является звуковая волна. Звуковыми (акустическими) волнами называют упругие волны, частота которых лежит в диапазоне от 16 Гц до 20 кГц. Такой диапазон называется слышимым. Звуковые волны с частотой меньше 16 Гц называются инфразвуковыми, с частотами больше 20 кГц – ультразвуковыми, а с частотами больше 10^9 Гц – гиперзвуковыми. Область физики, изучающая звуковые явления, называется акустикой. Область применения упругих волн чрезвычайно широка: низкочастотные упругие волны используются в сейсмологии (для регистрации землетрясений), в сейсморазведке. Упругие волны килогерцового диапазона применяются в гидролокации и при исследованиях океана. Ультра- и гиперзвуковые волны применяются в физике для определения различных параметров твёрдых, жидких и газообразных сред, в промышленности для технологических и контрольно-измерительных целей, в медицине и других областях.

Звуковые волны в газах и жидкостях могут быть только продольными, так как эти среды обладают упругостью лишь по отношению к деформациям сжатия (растяжения). В твердых телах звуковые волны могут быть как продольными, так и поперечными, так как твердые тела обладают упругостью по отношению к деформациям сжатия (растяжения) и сдвига.

Упругая волна в газе представляет собой распространяющуюся в пространстве последовательность чередующихся областей сжатия и разрежения газа. Как показывает опыт, сжатие в любом слое настолько быстро во времени сменяется разрежением, что температуры соседних областей сжатия и разрежения, не успевают выравниваться. Т.е. распространение звука представляет собой адиабатный процесс.

Молекулярно-кинетическая теория газов, а также волновое уравнение (7.10) позволяют получить выражение для скорости звука в газе:

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (7.21)$$

где γ – показатель адиабаты, R – универсальная газовая постоянная, T – термодинамическая температура, μ – молярная масса газа.

Методика эксперимента

Экспериментальная установка по измерению скорости звука в газах представлена на рисунке 7.3.



Рис. 7.3. Установка для измерения скорости звука в газах

Она состоит из жесткой металлической трубы (T) длиной L . Внутри трубы закреплен нагревательный элемент для изменения температуры газа. Мощность электронагревателя изменяется регулятором температуры (P). Температура воздуха в трубе измеряется хромель-алюмелевой термопарой и выводится на цифровом приборе 2ТРМ0 (D). Звуковые колебания в трубе возбуждаются и улавливаются электродинамическим источником звука и микрофоном, установленными вблизи противоположных торцов трубы. Частота колебаний мембраны излучателя задается звуковым генератором VC2002 ($ЗГ$). Интенсивность сигнала, фиксируемого микрофоном, измеряется вольтметром (B).

Звуковые колебания, распространяющиеся вдоль трубы, испытывают многократные отражения от торцов. Если условие (7.20) выполнено, то волна, отраженная от верхнего торца трубы, вернувшись к ее началу и вновь отраженная, совпадает по фазе с падающей. Совпадающие по фазе волны усиливают друг друга. Амплитуда звуковых колебаний при этом резко

возрастает – наступает резонанс. Это явление можно зафиксировать по пиковому значению напряжения с помощью вольтметра (B).

Следовательно, для выполнения условия (7.20) необходимо подобрать нужную длину волны λ . Согласно формуле (7.1), это можно сделать только изменив частоту волны ν . Поэтому плавное изменение частоты генератора приводит к периодическому выполнению условия (7.18).

Выразим из (7.20) λ и подставим в выражение (7.1), тогда скорость звука можно найти как

$$v_{\text{зв}} = 2L \cdot \frac{\nu}{n}. \quad (7.22)$$

Отсюда видно, что для нахождения скорости звука в газе необходимо знать частоту ν и номер резонанса n .

На практике, ввиду отражения волн от боковых стенок, рассеяния волн, погрешности измерительных приборов и прочих причин, частота, при которой наблюдается резонанс, будет определена с погрешностью. Для уменьшения этой погрешности нужно произвести несколько измерений частоты ν и n , соответствующих резонансам, и построить зависимость $\nu(n)$. Затем выбрать на графике две точки (рис. 7.4) и вычислить скорость звука по формуле:

$$v_{\text{зв}} = 2L \cdot \frac{\Delta \nu}{\Delta n}. \quad (7.23)$$

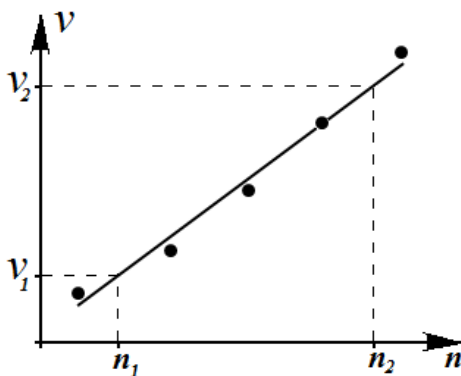


Рис. 7.4. График зависимости частоты резонанса от его номера n

Порядок выполнения работы

1. Включите установку. С помощью измерительного устройства (D) запишите начальное показание температуры $t_{\text{нач}}^{\circ}$ и занесите его в таблицу 7.1.

2. На звуковом генераторе кнопкой "RANGE" выберите частотный диапазон 4 или 5 и нажмите кнопку "RUN". Генератор начнёт работать согласно установленному режиму и показывать частоту.

3. Плавно увеличивая частоту генератора, по максимальному значению напряжения на вольтметре (B) зафиксируйте частоты, соответствующие резонансам с $n = 1, 2, 3, \dots$ (рекомендуется 7-10 измерений). Все результаты занесите в таблицу 7.1.

4. По заданию преподавателя измените частотный диапазон и повторите пункт 3.

5. С помощью измерительного устройства (D) снимите конечное показание температуры $t^{\circ}_{\text{кон}}$. Рассчитайте среднее значение температуры внутри трубы и занесите его в таблицу:

$$\langle t^{\circ} \rangle = \frac{t^{\circ}_{\text{нач}} + t^{\circ}_{\text{кон}}}{2}. \quad (7.24)$$

Таблица 7.1

Экспериментальные данные для определения скорости звука

Длина трубы L , м	Температура воздуха t° , °C	№ серии измерений	№ резонанса n	Резонансная частота ν , Гц
	$t^{\circ}_{\text{нач}} =$ $t^{\circ}_{\text{кон}} =$ $\langle t^{\circ} \rangle =$	1	1	
			...	
			n	
		2	1	
			...	
			n	

6. Для каждого частотного диапазона постройте график зависимости измеренных частот ν от соответствующих им номеров резонанса n (рис. 7.4) и рассчитайте скорость звука $v_{\text{зв}}$.

Если график строится на миллиметровой бумаге, то через полученные точки нужно провести прямую $\nu(n)$ так, чтобы она проходила как можно ближе ко всем точкам. Затем на полученной прямой выбрать две точки и, используя формулу (7.23), произвести расчет.

Если график строится в программе Excel, то нужно провести линию тренда и вывести на экран уравнение линии тренда. Угловой коэффициент в уравнении (коэффициент перед x) представляет собой усредненное значение $\frac{\Delta \nu}{\Delta n}$, которое нужно подставить в формулу (7.23) для вычислений.

Результаты занесите в таблицу 7.2.

7. Определите среднюю экспериментальную скорость звука для двух серий измерений:

$$v_{\text{зв экс}} = \frac{v_{\text{зв } 1} + v_{\text{зв } 2}}{2}. \quad (7.25)$$

8. По формуле (7.21) вычислите теоретическую скорость звука $v_{\text{зв теор}}$ в воздухе. При расчете используйте следующие величины:

- универсальная газовая постоянная $R = 8,3145 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$;
- показатель адиабаты воздуха $\gamma = 1,4$;
- молярная масса воздуха $\mu = 0,02896 \text{ кг/моль}$;
- термодинамическая температура $T = \langle t^\circ \rangle + 273,15$.

9. Сравните полученные экспериментальный и теоретический результаты и оцените относительную погрешность эксперимента:

$$\varepsilon = \frac{|v_{\text{зв экс}} - v_{\text{зв теор}}|}{v_{\text{зв теор}}} \cdot 100\%. \quad (7.26)$$

Данные пунктов 6-8 занести в итоговую таблицу 7.2.

Таблица 7.2

Данные расчета скорости звука в воздухе

№ серии измерений	Скорость звука $v_{\text{зв}}$, м/с	Скорость звука экспериментальная $v_{\text{зв экс}}$, м/с	Скорость звука теоретическая $v_{\text{зв теор}}$, м/с	Погрешность эксперимента ε , %
1				
2				

10. По результатам работы сделайте самостоятельный вывод.

Контрольные вопросы

1. Что называется упругой волной, волновым фронтом, волновой поверхностью? Каков механизм образования упругих волн?

2. Перечислите типы упругих волн. Запишите уравнение плоской волны. Опишите все величины, входящие в него. Запишите волновое уравнение.

3. Какие волны называются когерентными? В чем заключается явление интерференции?

4. Что такое стоячая волна, какими особенностями она обладает?

5. Выведите формулу для определения координат узлов и пучностей стоячей волны.

6. При каких условиях в трубе длиной L может образоваться стоячая волна. Выведите формулу для экспериментального определения скорости звука в трубе.

7. Каков механизм образования звуковых волн в газах. От чего и как зависит скорость звука в среде?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: Учебное пособие для вузов: В 5 томах Том 1: Механика / Сивухин Д.В., - 6-е изд., стер. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 560 с. ISBN 978-5-9221-1512-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/470189> (дата обращения: 21.12.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Савельев, И. В. Курс физики : учебное пособие для вузов : в 3 томах / И. В. Савельев. — 8-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 1 : Механика. Молекулярная физика — 2021. — 356 с. — ISBN 978-5-8114-6796-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152453> (дата обращения: 21.12.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Кузнецов, СИ. Физика: Механика. Механические колебания и волны. Молекулярная физика. Термодинамика : учеб. пособие / С.И. Кузнецов. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2014. — 248 с. - ISBN 978-5-9558-0317-3 (Вузовский учебник) ; ISBN 978-5-16-006894-7 (ИНФРА-М). - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/412940> (дата обращения: 21.12.2020). – Режим доступа: по подписке.
4. Демидченко, В.И. Физика : учебник / В.И. Демидченко, И.В. Демидченко. — 6-е изд., перераб. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2016. — 581 с. - Режим доступа <https://znanium.com/>. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-010079-1 (print) ; ISBN 978-5-16-101800-2 (online). - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/469821> (дата обращения: 21.12.2020). – Режим доступа: по подписке.

Учебное текстовое электронное издание

**Вострокнутова Ольга Николаевна
Мавринский Виктор Викторович
Мишенева Надежда Игоревна
Савченко Юрий Иванович**

**МЕХАНИКА:
пособие по подготовке
и выполнению лабораторных работ**

Учебное пособие

1,47 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2021 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра физики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru