Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obálka systému plôch

Diplomová práca

2024

Bc. Jana Tutková

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obálka systému plôch

Diplomová práca

Študijný program:	Počítačová grafika a geometria
Študijný odbor:	1113 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra algebry a geometrie
Školiteľ:	doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Bratislava, 2024
Bc. Jana Tutková

11962777

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Jana Tutková
Študijný program:	počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	matematika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	anglický
Sekundárny jazyk:	slovenský

Názov: Envelope of a system of surfaces
Obálka systému plôch

Anotácia: Cieľom práce je študovať základné vlastnosti obálky systému plôch. Zameriame sa na jednoparametrické systémy kvadrík v trojrozmernom priestore. Okrem teoretických podkladov očakávame aj numerické experimenty a príklady postupov. Načrtneme aplikácie, v ktorých sa obálky používajú.

Cieľ: Študovať a opísať niektoré vlastnosti obálky systému kvadratických plôch.

Literatúra: do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Dover Publications Inc., 2017
Pottmann, Wallner: Computational Line Geometry, Springer, 2001

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Vedúci: doc. RNDr. Pavel Chalmoviansky, PhD.
Katedra: FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie
Vedúci katedry: doc. RNDr. Pavel Chalmoviansky, PhD.

Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:
prípustná pre vlastnú VŠ

Dátum zadania: 13.12.2022

Dátum schválenia: 14.12.2022

doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.
garant študijného programu

.... študent

.... vedúci práce

Poďakovanie:

Abstrakt

Tutková, Jana: Obálka systému plôch. Diplomová práca, Univerzita Komenského. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra algebry a geometrie. Bratislava: FMFI UK, 2023, 26 s.

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Abstract

Tutková, Jana: Envelope of a system of surfaces. Master's thesis, Comenius University. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of algebra and geometry. Bratislava: FMFI UK, 2023, 26 s.

Keywords: envelope of surfaces, system of quadratic surfaces

Obsah

Zoznam obrázkov

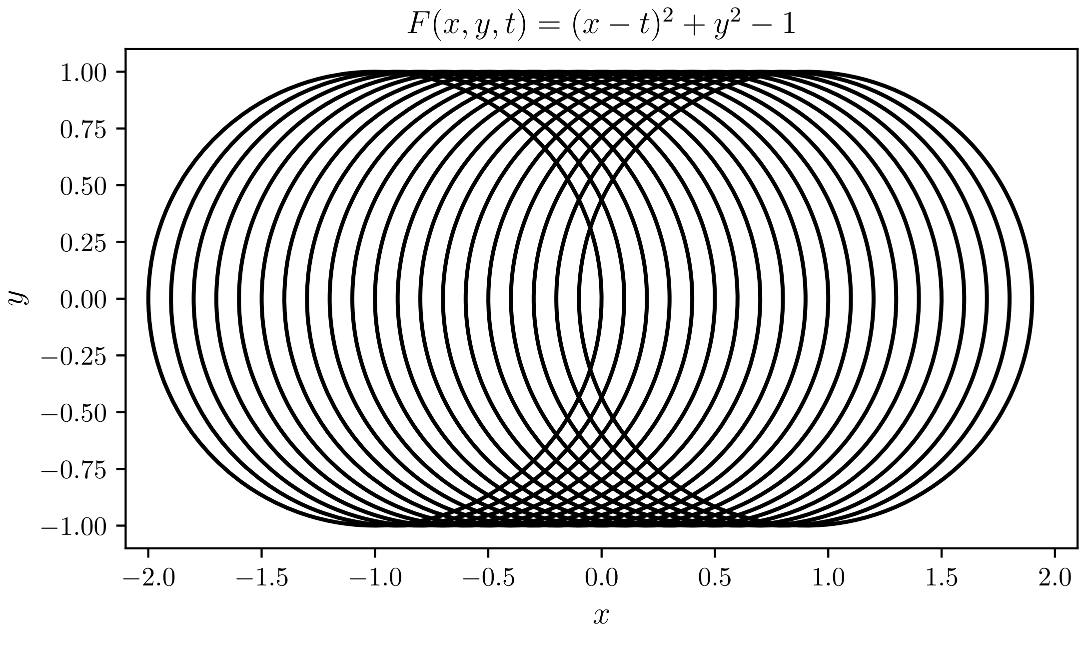
Úvod

Kapitola 1

Základné pojmy

1.1 Jednoparametrický systém

Ak nakreslíme kružnice so stredom na x-ovej osi s polomerom 1, ako na obrázku, pohľad nám upútajú horizontálne priamky $y = \pm 1$ idúce ponad a popod systém kružníc.



Obr. 1.1: Systém kružníc.

Každá z týchto priamok sa dotýka každej kružnice v jednom bode a v tomto bode majú spoločnú dotyčnicu. V nasledovnom texte túto myšlienku matematicky opíšeme, na základe nej zostrojíme tzv. obálku systému kriviek alebo plôch a porovnáme prístupy ich výpočtu. Budeme pracovať v reálnom vektorovom priestore so štandardným skalárnym súčinom, teda v euklidovskom priestore, rozmeru $n = 2, 3$. Najprv ilustrujeme príklady obálok a ich výpočet pre $n = 2$. Po celý čas predpokladáme, že všetky zobrazenia sú dostatočne veľakrát diferencovateľné. Tučným písmom značíme vektorovú funkciu a parametre pre prehľadnosť zápisov vynechávame, ak sú z kontextu zrejmé.

Vo všeobecnosti, začneme v $\mathbb{R}^2$ s jednoparametrickým systémom kriviek daným funkciou, v $\mathbb{R}^3$ máme jednoparametrický systém plôch.

Definícia 1.1. *Nech $F\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ je funkcia v premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a v parametri t, kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Definujeme jednoparametrický systém nadplôch ako systém množín*

$$\mathcal{F}_t = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0,\ t \in I\}.$$

V $n = 2$ budeme pre lepšiu prehľadnosť značiť premenné x_1, x_2 ako x, y, pre $n = 3$ pribudne x_3 ako z.

Pre horeuvedený prípad teda máme jednoparameterický systém kružníc so stredmi kružníc, ktoré ležia na úsečke parametrizovanej $(t, 0)$ pre $t \in [-1, 1]$ a konštantným polomerom pre každú kružnicu $r = 1$ daný implicitnou funkciou

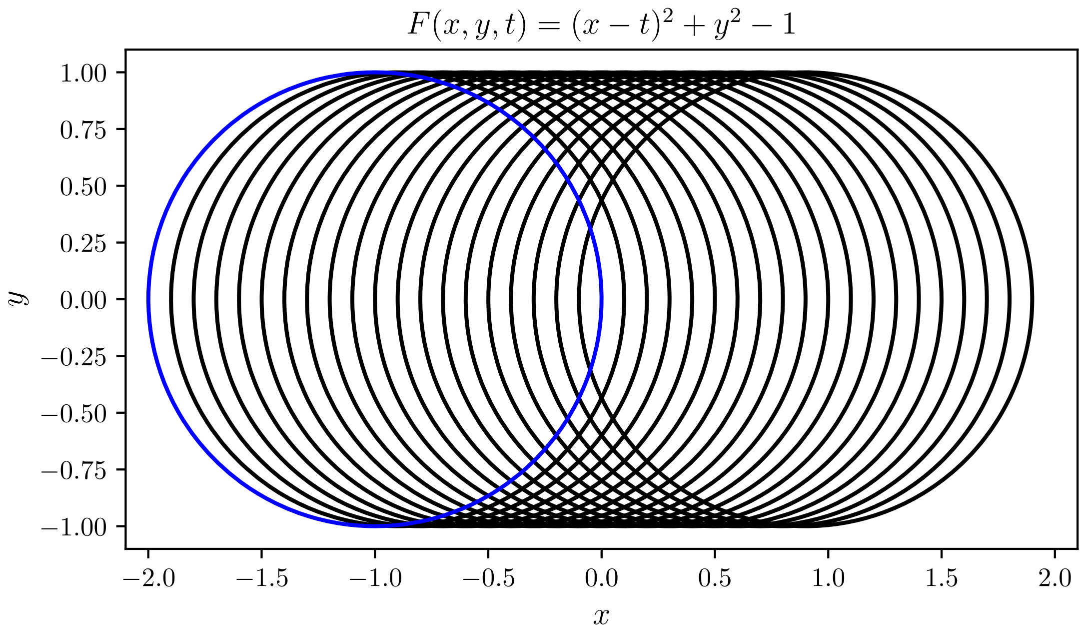
$$\mathcal{F}_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ F(x, y, t) = 0,\ t \in [-1, 1]\},$$

kde

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1.$$

Systém budeme ilustrovať zobrazením niektorých prvkov systému pre diskrétne hodnoty parametra t. Pre $t = -1$ je zodpovedajúca $F_{-1} \in \mathcal{F}_t$ kružnica s implicitnou rovnicou

$$F_{-1}(x, y) = F(x, y, -1) = (x + 1)^2 + y^2 - 1.$$



Obr. 1.2: Modrou farbou je vyznačená kružnica systému v parametri $t = -1$.

1.2 Obálka jednoparametrického systému nadplôch

Najskôr definujeme obálku jednoparametrického systému kriviek v $\mathbb{R}^2$. Uvedieme charakterizáciu obálok, ktorú možno použiť na výpočet pre jednoduchšie jednoparametrické systémy. Následne túto charakterizáciu použijeme ako definíciu pre obálku jednoparametrického systému plôch v $\mathbb{R}^n$.

Definícia 1.2. *Obálkou systému kriviek $\mathcal{F}_t$ je parametrizovaná krivka $\gamma(t)\colon J \subseteq I \to \mathbb{R}^2$ taká, že*

1. $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$ *pre všetky* $t \in J$,

2. $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F\left(\gamma(t), t\right).$

Obálka $\gamma(t)$ sa dotýka každej krivky zo systému $F(x, y, t)$ v bode (x, y) pre nejaké t a v tomto bode má s krivkou zo systému rovnakú dotyčnicu. To znamená, že každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t, a teda platí prvá podmienka $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$. Gradient funkcie $\nabla F(x, y, t)$ je normálový vektor k $F(x, y, t)$ v regulárnom bode (x, y) a parametri t. V spoločnom bode (x, y) a parametri

t chceme rovnaký smer dotykového vektora pre $\gamma(t)$ a $F(x,y,t)$, z čoho vyplýva, že $\dot{\gamma}(t)$ a dotykový vektor k funkcii $F(x,y,t)$ sú lineárne závislé, z čoho dostávame $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F\left(\gamma(t),t\right)$, druhú podmienku v definícii obálky. Interval J, na ktorom dostávame výslednú obálku môže byť menší ako interval I, na ktorom bol definovaný systém kriviek, teda máme $J \subseteq I$.

Veta 1.1. *Regulárna krivka $\gamma(t)\colon J \subseteq I \to \mathbb{R}^2$ kde $t \in J \subseteq I$ je obálkou jednoparametrického systému $\mathcal{F}_t$ práve vtedy, keď spĺňa:*

1. $F(\gamma(t),t) = 0,$

2. $\dfrac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t),t) = 0.$

Dôkaz. Táto odlišná charakterizácia je ekvivalentná definícii, ktorú sme postavili na geometrických podmienkach. Stačí zistiť korešpondenciu podmienok.

1. Ako sme už vysvetlili, každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu jednoparametrického systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t, teda podmienky

$$F(\gamma(t),t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$$

a

$$\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$$

sú ekvivalentné.

2. Derivujme $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ podľa parametra t, kde $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma_1}(t), \dot{\gamma_2}(t))$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma_1}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma_2}(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot 1 = 0.$$

Nakoľko požadujeme, aby gradient funkcie $\nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ bol kolmý na $\dot{\gamma}(t)$ tak

$$\langle \nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

teda platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma_1}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma_2}(t) = 0,$$

z čoho dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0.$$

□

Obálka sa počíta riešením rovníc

$$F(x, y, t) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0.$$

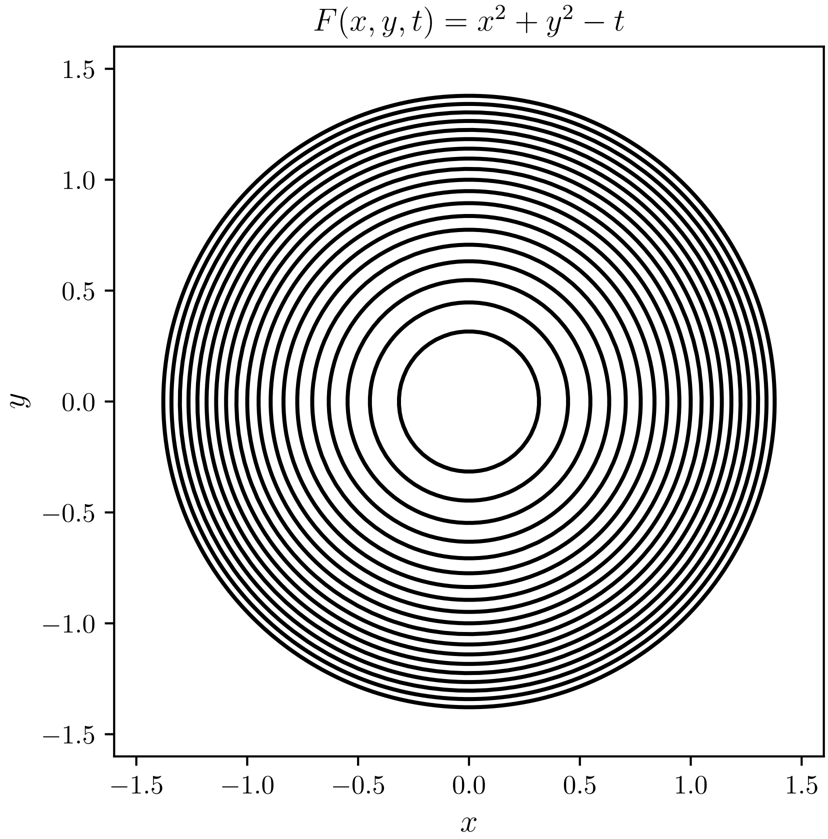
Často sa v literatúre môžeme stretnúť s rôznymi opismi obálky, ktoré však bez ďalších predpokladov nemusia definovať rovnakú množinu bodov. Príkladom je ďalšia charakterizácia obálky ako množiny limitných bodov prienikov kriviek systému. Vzťahy medzi jednotlivými charakterizáciami možno nájsť v [3].

Dokonca, daný systém nemusí mať obálku. Príkladom sú sústredné kružnice s rastúcim polomerom.

Príklad 1. Obálku systému sústredných kružníc pre $t \in I = [\frac{1}{10}, 2]$ rátame ako systém rovníc

$$F(x, y, t) = x^2 + y^2 - t,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -1.$$

Z druhej rovnice máme $t = -1 \neq 0$, teda systém nemá riešenie. Aj keď by sa nám mohlo zdať, že by obálkou mohli byť body kružnice s najväčším polomerom F_2 a kružnice s najmenším polomerom $F_{\frac{1}{10}}$, práve podmienka existencie takej krivky $\gamma(t)$, ktorá by patrila do systému kružníc $\mathcal{F}_t$ pre všetky t z intervalu $J \subseteq I$ nie je splnená.



Obr. 1.3: Sústredné kružnice.

Po celý čas sme predpokladali, že gradient $\nabla F(x, y, t)$ je vzhľadom na x a y nenulový, t. j.

$$\nabla F(x, y, t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t) \right) \neq \vec{0}.$$

Ak by bol gradient v nejakom bode nulový, nevieme nájsť jednoznačne dotykový vektor obálky a systému.

Prístup, ktorý sme využili pre jednoparametrický systém kriviek, možno zovšeobecniť pre ľubovoľný jednoparametrický systém plôch v $\mathbb{R}^n$.

Definícia 1.3. ***(Charakterizácia)*** *Obálkou jednoparametrického systému plôch $\mathcal{F}_t$ je množina bodov $\mathcal{E}$ daná*

$$\mathcal{E} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \exists t \in \mathbb{R}, F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0\}.$$

Ak by sme chápali obálku podľa definície ako množinu bodov, problém by sme mohli riešiť ako systém nelineárnych rovníc v parametri t, kde chceme z rovníc

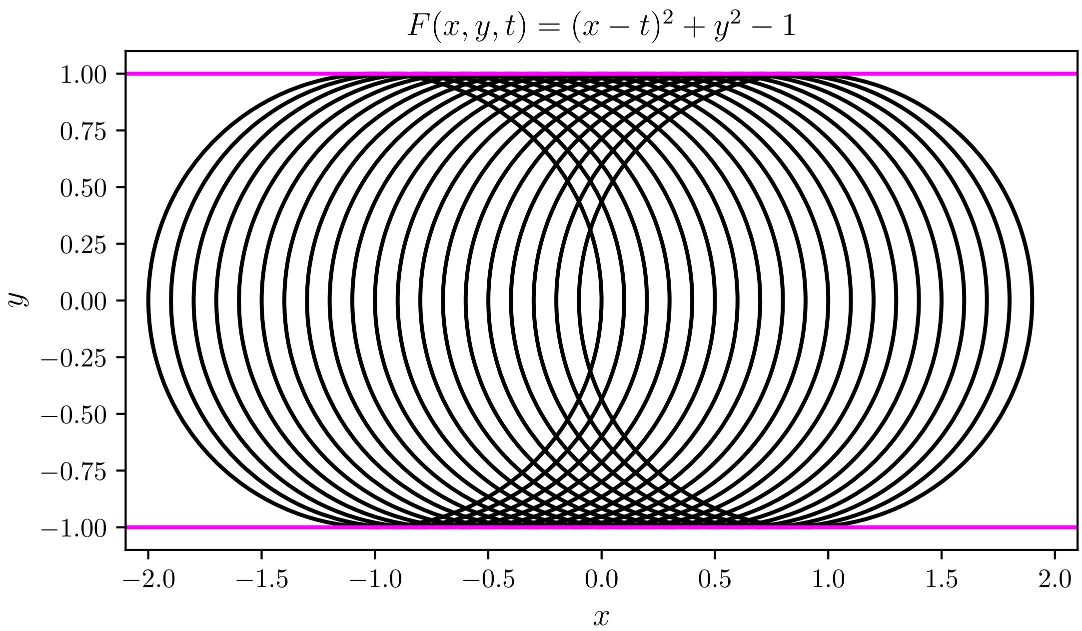
$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

eliminovať t. Na riešenie nelineárneho systému dvoch rovníc síce existujú pokročilé nástroje, no eliminovaním parametra t strácame informáciu o tom, kde je obálka definovaná.

Príklad 2. Pre náš príklad $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$ máme

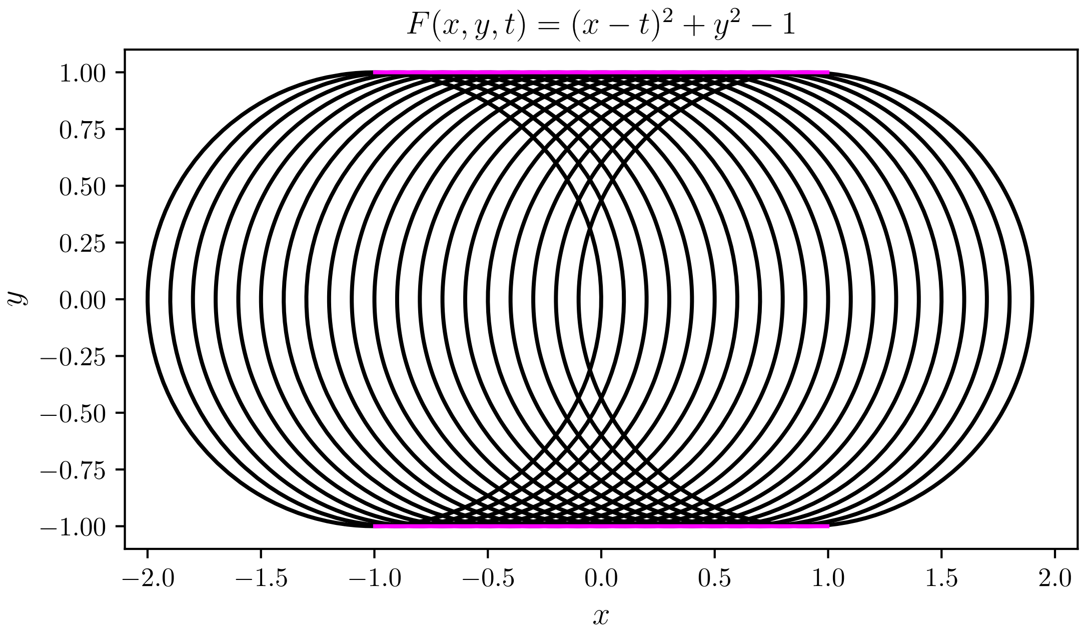
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2(t - x) = 0.$$

Ak $t = x$, tak $y^2 = 1$. Teda obálka je podľa tejto charakterizácie $y = \pm 1$, ako sme očakávali.



Obr. 1.4: Obálka systému podľa charakterizácie.

V skutočnosti sú obálkou krivky $y = \pm 1$ definované na intervale $[-1, 1]$.



Obr. 1.5: Obálka systému podľa definície.

Tento problém možno ošetriť tak, že budeme uvažovať systémy kriviek, ktoré sú v parametri t definované na celej reálnej priamke $\mathbb{R}$.

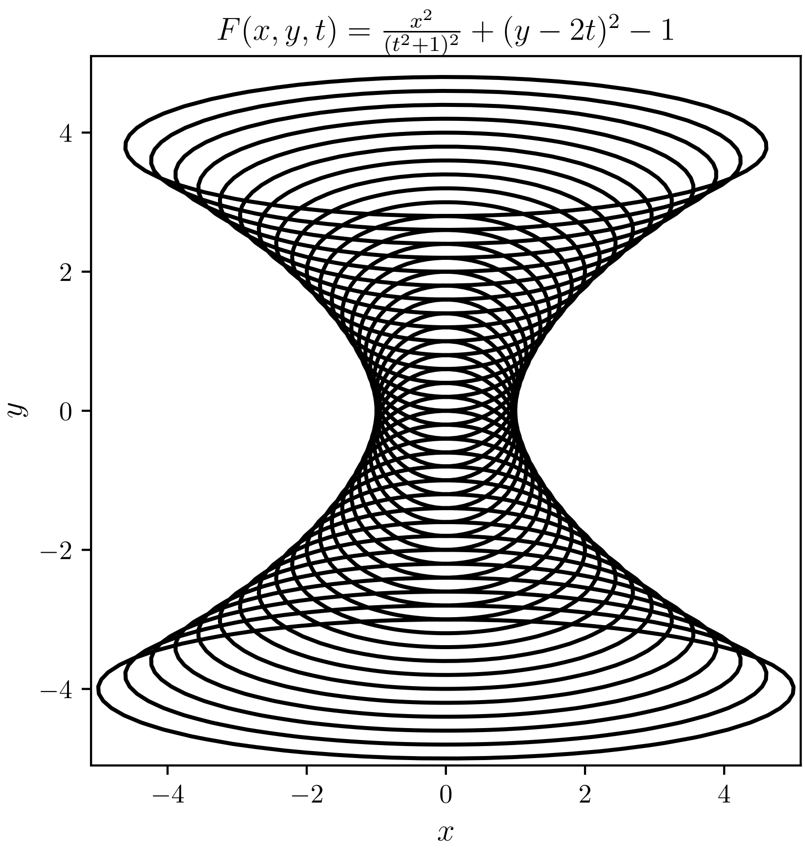
Príklad 3. Počítajme obálku systému kriviek znázornenom na obrázku 1.6, ktorý je daný

$$\begin{aligned} F(x,y,t) &= \frac{x^2}{(t^2+1)^2} + (y-2t)^2 - 1, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t) &= -\frac{4x^2 t}{\left(t^2+1\right)^3} - 4\left(y-2t\right). \end{aligned}$$

Vynásobením prvej rovnice $\lambda(t) = (t^2+1)^2$ a derivovaním získavame

$$\begin{aligned} F^\lambda &= 4t^6 - 4t^5 y + t^4 y^2 + 7t^4 - 8t^3 y + 2t^2 y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1, \\ F_t^\lambda &= 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2 t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2 t + 4t - 4y. \end{aligned}$$

Na obrázku 1.6 je znázornený tento systém elíps. Obálku nájdeme ako riešenie $F^\lambda \cap F_t^\lambda$. Rovnice sú však príliš vysokého stupňa v parametri t, preto nevieme implicitnú rovnicu obálky bez vhodného nástroja vyjadriť. V ďalšej časti rozoberieme prístupy výpočtu.



Obr. 1.6: Systém elíps.

1.3 Výpočet obálky

Vo väčšine prípadov sú rovnice charakterizujúce obálku systému plôch príliš vysokého stupňa v parametri t a nedokážeme z nich ľahko odvodiť rovnicu obálky, preto pristupujeme aj k numerickým riešeniam. Spoľahlivá aproximácia obálky je jednou z aktuálnych výskumných tém. Na začiatok si však rozoberme existujúce analytické prístupy. Naledujúce prístupy sú prevzaté z [15].

1.3.1 Prístup algebraickej geometrie

Dokonca aj v prípade jednoduchého príkladu ako 3, obe polynomické rovnice charakterizujúce obálku sú vysokého stupňa v parametri t, preto je odstránenie parametera t náročné bez vhodného nástroja. Štandardným aparátom na túto úlohu sú Gröbnerove bázy. Gröbnerove bázy sú kľúčovým pojmom v algebraickej geometrii a počítačovej algebre. Ide o špeciálnu množinu polynómov vo viacerých premenných, ktoré majú niekoľko dôležitých vlastností a zohrávajú kľúčovú úlohu pri riešení rôznych matematických problémoch vrátane riešenia sústav polynomických rovníc, zjednodušovania polynómov a dokazovania rôznych algebraických tvrdení. Vybudovanie tejto teórie je pomerne zdĺhavé, preto odkážeme na bohaté teoretické pozadie v [7]. Najprv vypočítame Gröbnerovu bázu Buchbergerovým algoritmom pre ideál generovaný sústavou polynomických rovníc, ktorá obsahuje všetky premenné vrátane tej, ktorú chceme eliminovať. Z Gröbnerovej bázy vyberieme polynómy, ktoré obsahujú premennú, ktorú chceme eliminovať. Tieto polynómy použijeme na vyjadrenie tejto premennej v závislosti od ostatných premenných. Po vyriešení nových rovníc získame výraz, ktorý opisuje vzťah medzi zvyšnými premennými a eliminovanou premennou. Týmto spôsobom úspešne eliminujeme premennú. Pokúsme sa vypočítať Gröbnerovu bázu príkladu 3 vzhľadom na lexikografické usporiadanie monómov $t > x > y$. Keďže výpočet Gröbnerovej bázy trvá pomerne dlho, neuvádzame postup, iba výsledok. (možno neuvedieme)

$$G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}, \text{ kde}$$

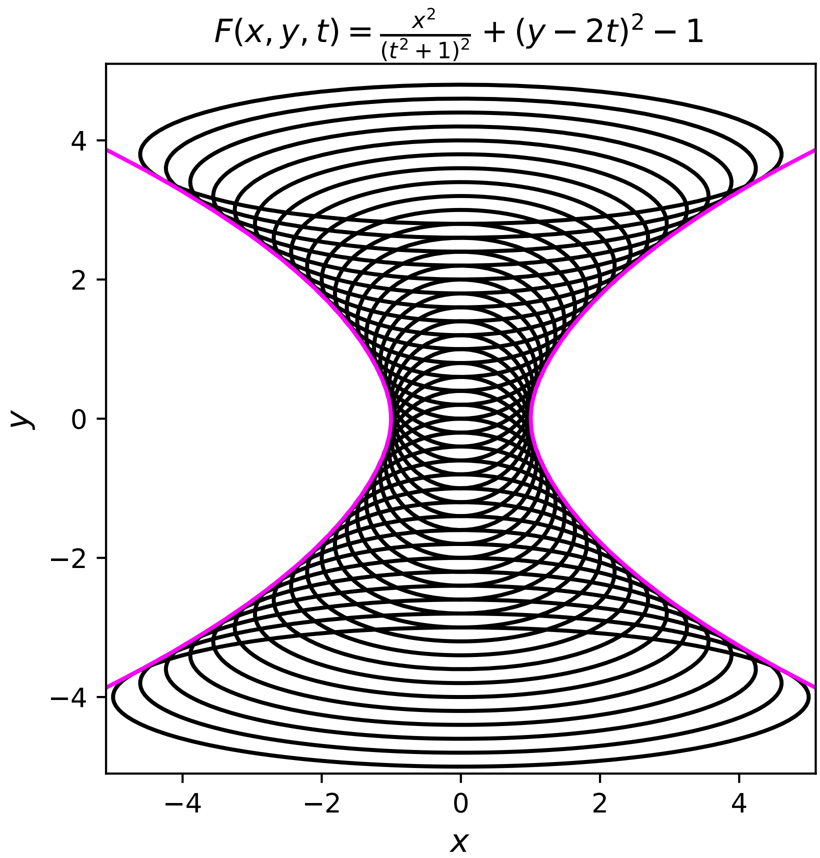
$$\begin{aligned}
g_1 = {} & 8232129896496000t^3 - 15949751674461t^2y^7 - 161384046512557t^2y^5 \\
& - 1204463505481071t^2y^3 - 6169809854717575t^2y + 15430671472tx^2y^{12} \\
& + 426513396863tx^2y^{10} - 15006102325790tx^2y^8 - 319921877859794tx^2y^6 \\
& + 3932980083404115tx^2y^4 + 26096343414243210tx^2y^2 - 5927133525477120tx^2 \\
& + 8232129896496000t - 89991676024704x^6y^3 + 2209014462034224x^6y \\
& - 123445371776x^4y^9 + 5668842986368x^4y^7 - 43236019313379x^4y^5 \\
& + 216584367885756x^4y^3 - 17414290688695056x^4y - 138876043248x^2y^{11} \\
& + 5550943018945x^2y^9 + 43203483205279x^2y^7 - 2080524984593504x^2y^5 \\
& - 7412218093958823x^2y^3 + 19070089710359527x^2y - 15949751674461y^7 \\
& - 161384046512557y^5 - 1204463505481071y^3 - 6169809854717575y \\
g_2 = {} & 1029016237062t^2x^2 + 3835312tx^2y^{11} + 224556467tx^2y^9 + 2456837050tx^2y^7 \\
& - 42939029714tx^2y^5 - 622020302148tx^2y^3 + 2792792777023tx^2y - 22367539584x^6y^2 \\
& - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 + 9525009465x^4y^4 \\
& + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} + 312779149x^2y^8 \\
& + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 - 1254254177448x^2 \\
g_3 = {} & \ldots
\end{aligned}$$

Gröbnerova báza vzhľadom na iné usporiadanie, napr. grevlex je zvyčajne vypočítaná oveľa rýchlejšie a jej polynómy majú krajšie koeficienty, no na druhej strane, prístup nie je možné všeobecne použiť na odstránenie premennej t z rovníc.

Existujú aj iné metódy na riešenie polynomických rovníc, ktoré nie sú závislé na usporiadaní monómov. Spôsob, ako nájsť polynóm, ktorý leží v prvom eliminačnom ideáli, ktorý je nezávislý na Gröbnerovej bázach a monómických usporiadaniach, využíva teóriu rezultantov. Rezultant je determinant matice polynómov.

Hoci výpočet determinantov veľkých matíc je výpočtovo aj časovo náročný problém, existujú metódy, ako vypočítať determinant efektívnejšie. V príklade 3 uvedieme výsledný polynóm $Res(F^\lambda, F_t^\lambda, t)$ a ukážeme obálku nájdenú rezultantom, pozri 1.7.

$Res(F^\lambda, F_t^\lambda, t) = 191102976x^{10} + 262144x^8y^6 - 9584640x^8y^4 + 83165184x^8y^2 - 633470976x^8 - 16384x^6y^{10} - 81920x^6y^8 - 14483456x^6y^6 - 113311744x^6y^4 + 96419840x^6y^2 + 698368000x^6 - 16384x^4y^{12} - 294912x^4y^{10} - 2998272x^4y^8 - 18284544x^4y^6 - 74956800x^4y^4 - 184320000x^4y^2 - 256000000x^4$.



Obr. 1.7: Obálka vypočítaná rezultantom.

Navyše táto metóda, rovnako ako metóda založená na eliminačnej teórii s použitím Gröbnerových báz, nám vypočíta správnu obálku len vtedy, ak uvažujeme parameter t jednoparametrického systému z celej reálnej priamky. Ak obmedzíme oblasť parametra na interval, tak obálka zvyčajne nemôže byť daná implicitnou rovnicou, a preto je potrebné nájsť nejakú parametrizáciu obálky.

Pri použití rezultantov máme lepšiu kontrolu nad zložitosťou výpočtu. Pre dané dva polynómy totiž vieme, ako sa konštruuje rezultant, a tak vieme odhadnúť, s akými veľkými polynómami sa bude počas výpočtu manipulovať, avšak pri hľadaní Gröbnerovej bázy je ťažké odhadnúť, ako zložité S-polynómy sa behom algoritmu vyskytnú. Nie je zriedkavosťou, že S-polynómy sú podstatne komplikovanejšie než vstupné polynómy a výsledná Gröbnerova báza.

1.3.2 Prístup projektívnej geometrie

Pribudne neskôr.

1.3.3 Kinematický prístup

Ďalším zo spôsobov, ako chápať jednoparametrické systémy plôch v $\mathbb{R}^n$ je pozerať sa na ne ako na množinu všetkých transformácií daného povrchu P. Povrch P sa transformuje na ostatné prvky systému prostredníctvom prvkov vhodnej grupy transformácií. Táto množina transformácii má okrem štruktúry grupy aj štruktúru hladkej variety *(smooth manifold)*. Tieto grupy nazývame Lieove grupy.

Príklad 4. Ilustujme tento postup na jednoduchom rovinnom príklade. Transformujme zobrazením g_t priamku

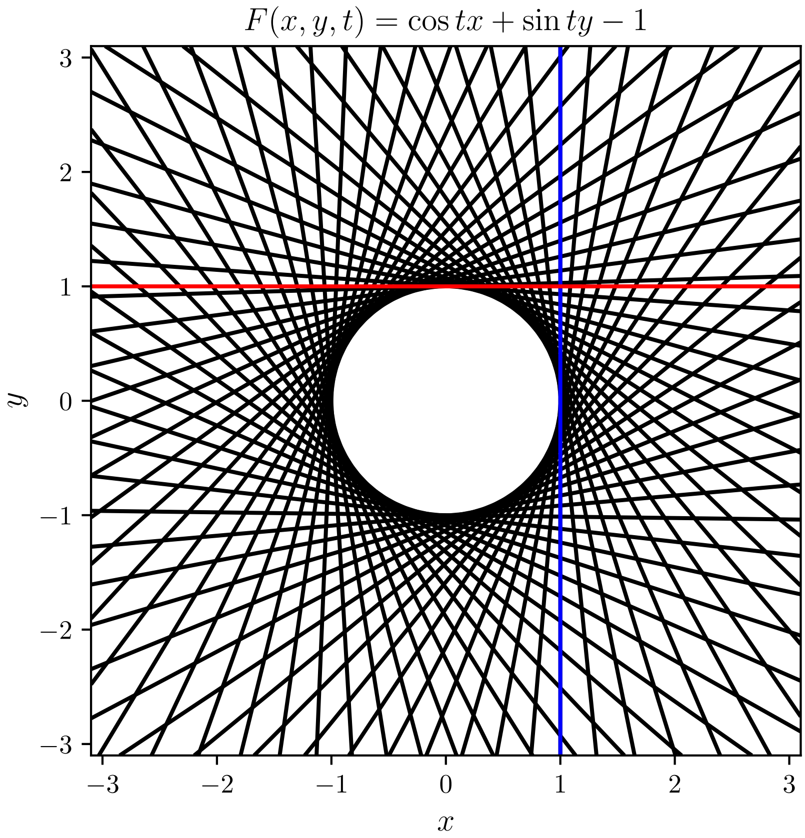
$$\begin{aligned} l\colon x(u) &= 1 \\ y(u) &= u \end{aligned}$$

$$g_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pre každé $t \in \mathbb{R}$, g_t zodpovedá rotácii. Grupa všetkých rotácií je $\mathbb{SO}(2)$ a nazýva sa špeciálna ortogonálna grupa. Pre $t = 0$, dostávame priamku l. Pre iné t, napríklad $t = \frac{\pi}{2}$, dostávame priamku

$$\begin{aligned} g_t(l)\colon x(u) &= -u \\ y(u) &= 1. \end{aligned}$$

Na obrázku 1.8 je znázornená priamka l modrou farbou, transformovaná priamka $g_t(l)$ červenou farbou.



Obr. 1.8: Systém priamok v normálovom tvare.

Transformácie g_t z príkladu sú prvkami Lieovej grupy. Ďalšie známe príklady maticových Lieovych grúp sú ortogonálna grupa, unitárna a špeciálna unitárna grupa. Pre nájdenie podrobnejších informácií, sa môže čitateľ obrátiť na ľubovoľnú úvodnú učebnicu o Lieovych grupách a Lieovych algebrách, ako je napríklad [9]. Použili sme štruktúru Lieovej grupy, aby sme opísali, ako sa grupa transformuje daný povrch. Ďalej, využijúc štruktúru hladkej variety môžeme opísať jednoparametrický systém plôch výlučne pomocou terminológie Lieových grúp. Táto teória sa aplikuje na nájdenie parametrizácie obálok kvadratických plôch. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [15].

1.3.4 Obálky a ODR

Obálky súvisia aj so štúdiom obyčajných diferenciálnych rovníc, a najmä ich singulárnych riešení. Predpokladajme, že jednoparametrický systém kriviek $\mathcal{F}_t$ je riešením nejakej diferenciálnej rovnice prvého rádu. Potom môže existovať aj ďalšia krivka spĺňajúca túto diferenciálnu rovnicu, ktorá je dotyčnicou k $\mathcal{F}_t$ v každom bode. Táto krivka je obálka. V literatúre sa nazýva aj singulárne riešenie diferenciálnej rovnice. Uvažujme

ODR

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Jej regulárnym riešením sú integrálne krivky

$$y = -t^2 + 2tx, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Riešenie môžeme reprezentovať ako jednoparametrický systém kriviek $\mathcal{F}_t$ s funkciou

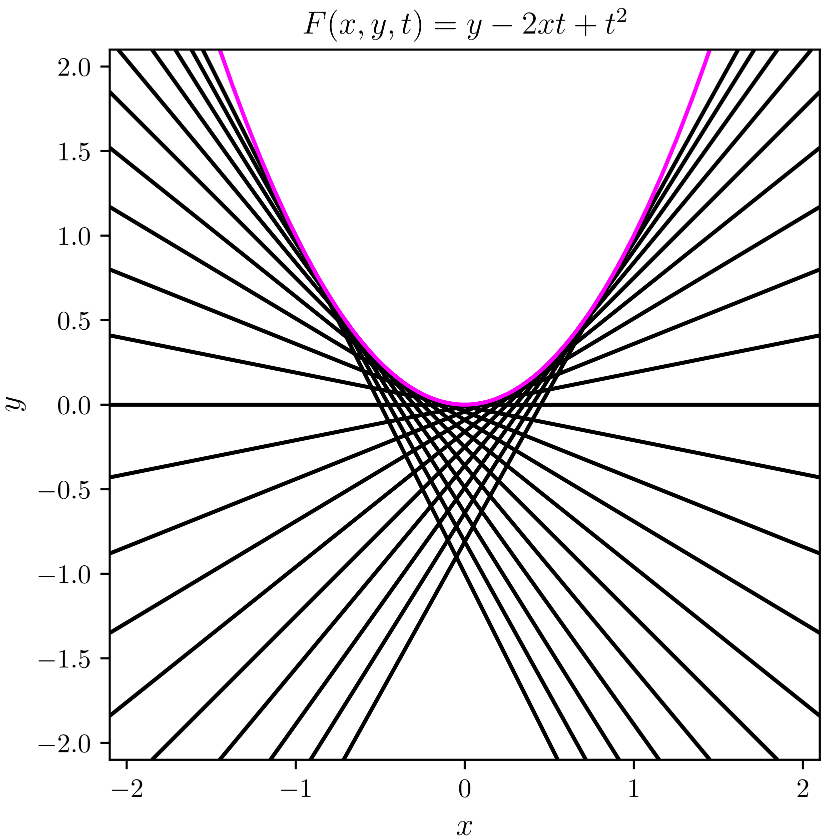
$$F(x, y, t) = t^2 - 2tx + y.$$

Derivovaním podľa parametra t dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2t - 2x,$$

z čoho máme $t = x$ a dosadením do funkcie máme $F = -x^2 + y$, teda obálka je $y = x^2$.

Obálka tejto jednoparametrickej rodiny priamok, ktorou je parabola $y = x^2$, rieši taktiež diferenciálnu rovnicu. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [5].



Obr. 1.9: Regulárne riešenia a obálka.

1.4 Aplikácie obálok a predošlá práca

Vzhľadom na výskyt obálok v aplikáciách sa obálkam venuje veľká pozornosť. Stručne spomenieme niektoré aplikácie a odkážeme na literatúru.

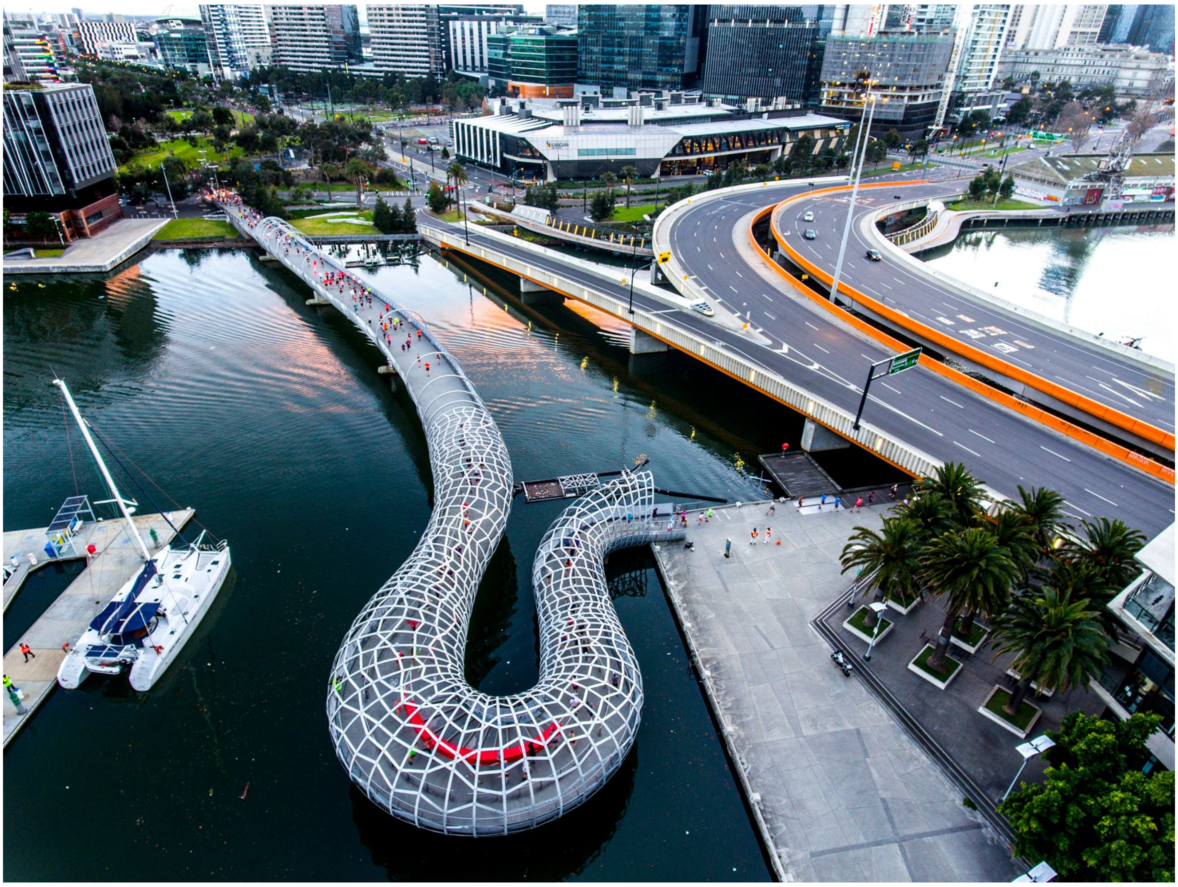
Výpočet obálky pohybujúcej sa plochy sa vyskytuje pri simulácii a CNC obrábaní. CNC obrábanie *(Computer Numerical Control machining)* je výrobný subtraktívny proces, pri ktorom počítač riadi stroje, napríklad vŕtačky, frézy a sústruhy tak, aby neustále odlamovali obrobok. Tento postup sa vykonáva, kým sa nevytvorí požadovaný tvar. Rezný nástroj vytvára pri rýchlom otáčavom pohybe okolo svojej osi rotačnú plochu. Takto vytvorená plocha je časť obálky pohybujúceho sa nástroja. CNC frézovanie má široké priemyselné využitie v odvetviach ako letecký priemysel, zdravotníctvo a spotrebná elektronika. V článku [14] sa možno dočítať viac o výpočte obálok pri 5-osovom CNC obrábaní.

Obálky sa používajú aj na výpočet trajektórie projektilu vo vzduchu. Riešime klasický problém pohybu hmotného bodu (projektilu) vrhaného pod uhlom k horizontu. S nulovou silou odporu vzduchu je analytické riešenie dobre známe, trajektória projektilu je parabola. So zohľadnením odporu vzduchu úloha nemá presné analytické riešenie, a preto sa vo väčšine prípadov rieši numericky. Silu odporu vzduchu berieme do úvahy s konštantným členom odporu. Systém trajektórií vzniká pri vrhnutí projektilu s rovnakou počiatočnou rýchlosťou, ale s rôznymi uhlami hodu. Na určenie maximálneho rozsahu letu projektilu sa tak použije rovnica obálky. [8]

Medzi ďalšie aplikácie obálok patrí tollerancing - krivka s kontrolou chyby, bezkolízne plánovanie pohybu robota - uvažujeme o konvexných kompaktných krivkách reprezentujúcich pohyb robota v rovine, ktorý mení svoj lokálny tvar pomocou systému afinných transformácií. Dizajn písma - konštrukcia znakov v písmach pre typografické systémy. O ďalších aplikáciach sa čitateľ dozvie v [12].

Kanálové plochy *(channel surfaces)*, rúrkové plochy/potrubia *(pipe surfaces)*, *rolling ball blends* a prirodzené kanálové plochy *(natural channel surfaces)* sa vyskytujú ako zmiešavacie povrchy a prechodové plochy medzi potrubiami. Kanálové plochy sú používané v počítačom podporovanom geometrickom dizajne *(Computer Aided Geometric Design)*. V ďalšom texte si ukážeme ich konštrukciu ako obálku sfér.

Obálky - kanálové plochy sa využívajú aj v architektúre. Ako príklad uvádzame Webbov most *(Webb Bridge)*, obr. 1.10, nachádzajúci sa v Melbourne v Austrálii. Tvar mosta vzdáva hold histórii domorodého obyvateľstva a je vytvorený podľa tradičnej rybárskej pasce Koorie, ktorá sa používala na lov úhorov.



Obr. 1.10: Webbov most.

1.5 Obálka sfér

Označme $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a predpokladajme, že $\mathbf{m}(t) = (m_x(t), my(t), m_z(t)) \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ je parametrizácia krivky $\mathbf{m}$ a $r(t) \colon I \to \mathbb{R}^+$ je funkcia definovaná na tom istom intervale. Krivka $\mathbf{m}$ sa nazýva kostrová krivka obálky (*spine curve*) a r sa nazýva funkcia polomeru (*radius function*). Jednoparametrický systém sfér je daný rovnicou

$$S \colon \langle \mathbf{x} - \mathbf{m}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle - r^2(t) = 0.$$

Podľa predchádzajúceho, obálku $\mathcal{E}$ možno nájsť ako prienik $S(t)$ a $\dot{S}(t)$ pre všetky $t \in I$. Derivácia S nám dáva roviny

$$\dot{S} \colon \langle \dot{\mathbf{m}}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle + r\dot{r} = 0.$$

Z toho vyplýva, že charakteristické krivky obálky $\mathcal{E}$ pre jednoparametrický systém sfér sú kružnice. Existujú dva prípady, ktoré treba zvážiť:

Ak je funkcia polomeru r konštantná, $\dot{r} \equiv 0$ a rovina $\dot{S}(t)$ obsahuje stred sféry M pre všetky $t \in I$, v tomto prípade možno obálku $\mathcal{E}$ považovať za posunutie (*offset*) kostrovej krivky $\mathbf{m}$. Tieto obálky sú známe ako rúrkové plochy (*pipe surfaces*). Keďže rovina $\dot{S}$ charakteristickej kružnice c obsahuje stred gule M (v každom $t \in I$), charakteristická krivka je hlavnou kružnicou sféry a obálka $\mathcal{E}$ je pokrytá jednoparametrickým systémom zhodných kružníc.

Ak funkcia polomeru r nie je konštantná, potom $\dot{r} \neq 0$ a rovina $\dot{S}$ neprechádza stredom sféry M. Prienik S a $\dot{S}$ je kružnica c, spoločné dotyčnice roviny S a obálky $\mathcal{E}$ pozdĺž c tvoria rotačný kužeľ Γ_c. V tomto prípade obálka $\mathcal{E}$ patrí do triedy kanálových plôch. Stred N charakteristickej kružnice c nájdeme ako normálu $\mathbf{n}(w) = \mathbf{m} + w\dot{\mathbf{m}}$ k rovine $\dot{S}$, teda

$$\mathbf{n} = \mathbf{m} - \frac{r\dot{r}}{\langle \dot{\mathbf{m}}, \dot{\mathbf{m}} \rangle}\dot{\mathbf{m}}.$$

Charakteristická krivka má polomer

$$r_c = \sqrt{r^2 - \|MN\|^2} = r\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{\langle \dot{\mathbf{m}}, \dot{\mathbf{m}} \rangle}}.$$

V prípade, že $\|MN\| > r$, sféra S nemá s obálkou $\mathcal{E}$ reálny kontakt. Vrchol A dotykového kužeľa Γ_c je pólom $\dot{S}$ vzhľadom na S. (tu ešte chýba výpočet vrchola) Vrchol A kužeľa je potom

$$A = \mathbf{m} - \frac{r}{\dot{r}}\dot{\mathbf{m}}.$$

Jedným z dôležitých výsledkov je, že kanálové plochy, definované ako obálka jednoparametrickej množiny sfér s racionálnou funkciou polomeru $r(t)$ a stredmi v racionálnej krivke $\mathbf{m}(t)$ možno racionálne parametrizovať. [11]

Príklad 5. Uvažujme kostrovú krivku $\mathbf{m}(t)$ a polomer $r(t)$

$$\mathbf{m}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad r(t) = \frac{t}{\sqrt{26}}.$$

potom jednoparametrický systém $\mathcal{F}_t$ sfér je

$$\mathcal{F}_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - t)^2 - \frac{t^2}{26} = 0,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Obálka systému je daná rovnicami

$$\begin{aligned} \mathcal{S}&\colon x^2 + y^2 + (z - t)^2 - \frac{t^2}{26} = 0, \\ \dot{\mathcal{S}}&\colon z - \frac{25}{26}t = 0. \end{aligned}$$

Počítajme $\mathcal{S} \cap \dot{\mathcal{S}}$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$. Z druhej rovnice dostaneme $t = \frac{26}{25}z$. Po dosadení do prvej rovnice, dostávame implicitnú rovnicu pre obálku $\mathcal{E}$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{25}z^2 = 0,$$

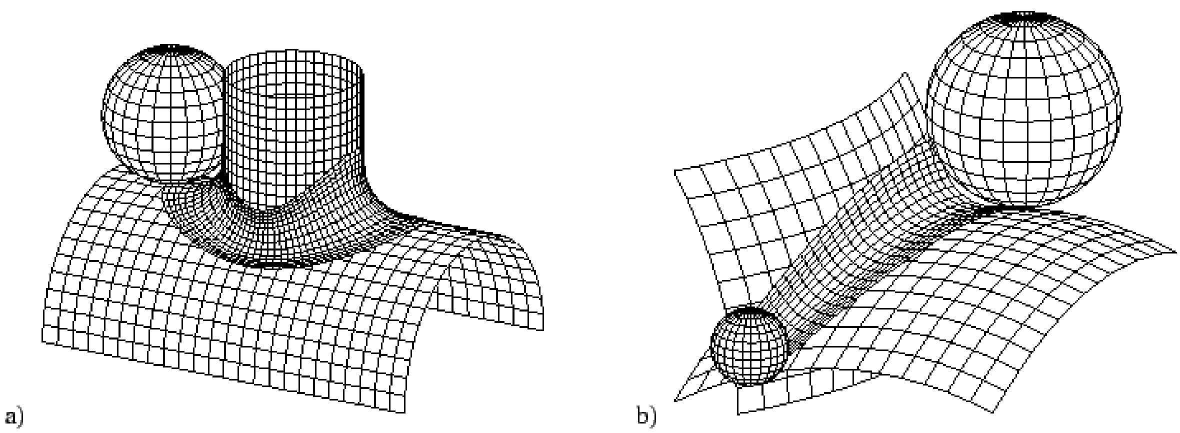
čo je rotačný kužeľ s uhlom medzi jeho osou a generátorom rovným $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$. Napríklad, pre $t = 1 \in I$ charakteristická krivka je prienikom dvoch plôch daných

$$\mathcal{S}(1)\colon x^2 + y^2 + (z-1)^2 - \frac{1}{26} = 0,$$
$$\dot{\mathcal{S}}(1)\colon z - \frac{25}{26} = 0.$$

Z toho môžeme usúdiť, že charakteristická krivka c_1 je kružnica so stredom v bode $N = (0, 0, \frac{25}{26})$ v rovine $z = \frac{25}{26}$ a neprechádza stredom sféry $M = \mathbf{m}(1) = (0, 0, 1)$, polomer c_1 je $r_{c_1} = \frac{\sqrt{25}}{26}$ a výsledná obálka je rotačný kužeľ, ako sme uviedli. Vzdialenosť bodov $\|MN\| = \frac{1}{26}$ a $r = \frac{1}{\sqrt{26}}$, takže platí, že $r > \|MN\|$ a sféra S má s obálkou $\mathcal{E}$ reálny kontakt. Vrchol $A = (0, 0, 0)$. (chýba obrázok)

V skutočnosti, pre všetky $t \in I$, charakteristická krivka je kružnica so stredom ležiacim na z-osi v rovine danej rovnicou $\dot{\mathcal{S}}$. Bohužiaľ, vo väčšine prípadov sú rovnice, ktoré charakterizujú obálky, príliš zložité a nie sme schopní z nich odvodiť rovnicu obálky.

Rúrkové povrchy sa často objavujú pri výrobe potrubia. Hladké spojenie medzi dvoma nie nevyhnutne valcovými rúrami P_1 a P_2 sa modeluje tak, aby bol prechod hladký, bez záhybov, vodotesný alebo dokonca aj parotesný. Na to sa používa technika *rolling ball blends*, využívajúca nasledujúcu myšlienku: Kým sa sféra S s konštantným alebo nekonštantným polomerom r kotúľa na oboch rúrach súčasne, zanecháva stopu c_i na oboch rúrach. Zmiešavacia plocha je tá časť obálky $\mathcal{E}$ jednoparametrického systému sfér, ktorá leží medzi dvoma stopami c_1 a c_2. Kostrová krivka obálky $\mathcal{E}$ je priesečníkom ekvidištánt *(offsetov)* plôch P_1 a P_2 vo vzdialenosti r. Každá charakteristická krivka spája dva dotykové body zmiešavacej plochy a plochami P_1 a P_2, ktoré sa majú zmiešavať. Viac detailov možno nájsť v [10]. Na obrázku 1.11 vľavo je znázornená metóda so sférou s konštantným polomerom r, vpravo s nekonštantným.



Obr. 1.11: Technika rolling ball blend.

Kapitola 2

Numerické metódy

Pomocou diferenciálnych rovníc sú popísané rôzne fyzikálne deje. Niektoré z nich sú riešiteľné len obtiažne a niektoré vyriešiť analyticky nemožno. Preto sa na hľadanie riešenia používajú približné metódy, z ktorých niektoré využijeme.

Pre účely hľadania obálky budeme potrebovať metódy pre riešenie jednej diferenciálnej rovnice prvého rádu so zadanou počiatočnou podmienkou.

Spoločným znakom vo všetkých numerických metódach je, že riešenie nehľadáme ako spojitú funkciu, definovanú na celom skúmanom intervale $[a, b] = J$, ale hodnoty približného riešenia počítame v konečnom počte bodov $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Týmto bodom hovoríme uzlové body alebo uzly siete a množine $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ hovoríme sieť. Rozdiel $h_i = x_{i+1} - x_i$ sa nazýva krok siete v uzle x_i. Sieť je pravidelná (ekvidištantná), ak je krok h medzi jednotlivými uzlami konštantný. Ak chceme poznať približnú hodnotu riešenia v inom ako uzlovom bode, môžeme použiť interpolačnú metódu, napr. nahradiť riešenie lomenou čiarou alebo splajnom prechádzajúcou vypočítanými bodmi [6], [1].

Formulujme problém hľadania obálky nasledovne:

Hľadáme krivku $\gamma(t)\colon J \subseteq I \to \mathbb{E}^2$ takú, že

1. $F(\gamma(t), t) = 0,$
2. $\langle \nabla F(\gamma(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0.$

Nech $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, potom nasledujúce podmienky možno prepísať ako

1. $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0,$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)\dot{\gamma}_1(t) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)\dot{\gamma}_2(t) = 0.$

Poznáme začiatočný bod $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, t_0)$ a gradient v tomto bode $\nabla F(\gamma(t_0), t_0)$, keďže úlohu riešime numericky, hľadáme na krivke $\gamma(t)$ bod $\gamma(t_1)$ taký, že

1. $F(\gamma(t_1), t_1) = 0,$

2. $\langle \nabla F(\gamma(t_1), t_1), \dot{\gamma}(t_1) \rangle = 0.$

Aplikujme na tento problém známe numerické metódy.

2.1 Eulerova metóda

Majme danú začiatočnú úlohu $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ s podmienkami, ktoré zaisťujú existenciu a jednoznačnosť riešenia. Označme uzly $x_i = x_0 + ih$, kde $h > 0$ označuje dĺžku kroku. Vo všetkých bodoch siete podľa predošlej rovnice platí

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)).$$

Deriváciu na ľavej strane rovnice môžeme nahradiť diferenciou, a tak dostávame

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y(x_i)).$$

Ak nahradíme $y(x_i)$ približnou hodnotou y_i, môžeme odtiaľ vyjadriť približnú hodnotu $y(x_{i+1})$ tak, že

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \text{ pre } i = 0, 1, \dots, n.$$

Pomocou tohto vzorca vypočítame približnú hodnotu riešenia v ďalšom uzlovom bode pomocou hodnoty v predchádzajúcom uzle. Hodnotu riešenia v bode x_0 poznáme zo začiatočnej podmienky.

2.1.1 Geometrická interpretácia Eulerovej metódy

Pre vysvetlenie geometrickej interpretácie Eulerovej metódy najprv pripomeňme, že diferenciálnou rovnicou $y' = f(x, y)$ je dané tzv. smerové pole. V každom bode roviny (x, y), ktorým prechádza nejaké riešenie tejto rovnice, je hodnota $f(x, y)$ rovná smernici dotyčnice ku grafu tohto riešenia. Preto si smerové pole môžeme predstaviť tak, že v každom bode roviny (x, y) stojí šípka, ktorá ukazuje, ktorým smerom máme pokračovať, ak sa dostaneme do daného bodu.

Pri riešení diferenciálnej rovnice Eulerovou metódou postupujeme takto: Vyjdeme z bodu (x_0, y_0) smerom, ktorý udáva šípka v tomto bode, to znamená, po priamke s rovnicou

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0),$$

až kým nedôjdeme do bodu s x-ovou súradnicou x_1. Ypsilonová súradnica tohoto bodu je $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Z bodu (x_1, y_1) pokračujeme vo smere danom smerovým poľom v tomto bode, t. j. po priamke

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

kým nedôjdeme do bodu s x-ovou súradnicou x_2. Teda môžeme vypočítať približnú hodnotu riešenia v ďalšom uzlovom bode pomocou riešenia v predchádzajúcom uzlovom bode.

Existujú metódy, v ktorých postupujeme dômyselnejšie ako v Eulerovej, no stále využívajú informácie iba z jedného predchádzajúceho kroku. Takéto metódy sa nazývajú jednokrokové. Metódy využívajúce informácie z niekoľkých predošlých krokov nazývame viackrokové.

Je celkom zrejmé, že nakoľko sa priblížime k presnému riešeniu, závisí na dĺžke kroku h, ktorú použijeme. Základnú vlastnosť, ktorú od použiteľnej numerickej metódy požadujeme, je aby riešenie získane metódou pre $h \to 0$ konvergovalo k presnému riešeniu danej úlohy.

2.1.2 Prispôsobenie Eulerovej metódy na výpočet obálky

Ak poznáme začiatočný bod (x_0, y_0, t_0), v tomto bode vieme vyčísliť gradient $\nabla F(x_0, y_0, t_0)$ implicitne zadaného systému kriviek $\mathcal{F}_t$. Zo začiatočného bodu sa pohneme v smere dotykového vektora $\vec{m}$ krokom h ku hľadanej obálke. Vektor $\vec{m}$ vypočítame ako kolmý vektor ku gradientu $\nabla F(x_0, y_0, t_0)$ voľbou vhodnej orientácie

$$\vec{m} = \perp \frac{\nabla F(x_0, y_0, t_0)}{\|\nabla F(x_0, y_0, t_0)\|}.$$

Teda, narozdiel od využitia smerového poľa, poznáme v každom bode pole gradientné, no zachovávame princíp Eulerovej metódy. Nový bod obálky odhadneme ako

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h\vec{m}_1, \\ y_1 &= y_0 + h\vec{m}_2. \end{aligned}$$

Následne dopočítame k novému bodu obálky (x_1, y_1) prislúchajúci parameter t_1, ktorý zodpovedá krivke systému, na ktorej leží nový bod implicitnej rovnice

$$F(x_1, y_1, t_1) = 0.$$

Výpočet pokračuje, kým parameter $t_i \leq t_{max}$, teda máme iteračnú metódu, kde

$$\begin{aligned} (x_{i+1}, y_{i+1}) &= (x_i, y_i) + h\vec{m}, \\ F(x_{i+1}, y_{i+1}, t_{i+1}) &= 0, \end{aligned}$$

kde i patrí do indexovej množiny $M = \{i \mid t_i \in [t_{min}, t_{max}]\}$.

Pribudnú ďalšie numerické metódy.

Literatúra

[1] Babušíková J., Slodička M., Weisz J. 2000. *Numerické metódy.* Univerzita Komenského v Bratislave. ISBN 80-223-1384-X. Dostupné na internete: `http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/`

[2] Biernet A. 2016. Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Naturwissenschaftliche Fakultät III. Halle (Saale). Dissertation. Dostupné na internete: `https://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/2416652`.

[3] Bruce, J. W., Giblin, P. J. 1981. What Is an Envelope? *The Mathematical Gazette*, 65(433), 186-192. Dostupné na internete: `http://www.jstor.org/stable/3617131`.

[4] do Carmo M. P. 2017. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications Inc., Mineola, New York. ISBN-13: 978-0-486-80699-0

[5] Grossfield, A. 1997. What Are Differential Equations: A Review Of Curve Families Paper presented at 1997 Annual Conference, Milwaukee, Wisconsin. 10.18260/1-2–6898. Dostupné na internete: `https://216.185.13.174/what-are-differential-equations-a-review-of-curve-families`.

[6] Hlavička R., Růžičková I. Numerické metody. Brno. Dostupné na internete: `http://physics.ujep.cz/jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf`.

[7] Chalmovianská J. Skriptá k predmetu Algebraická geometria. Dostupné na internete: `http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~pilnikova/ag1.html`

[8] Chudinov, P. 2009. Numerical-analytical Algorithm for Constructing the Envelope of the Projectile Trajectories in Midair. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.0520`.

[9] Lee, J. 2012. *Introduction to Smooth Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics. Springer. New York. 2. edition. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5`.

[10] Odehnal B., Stachel H., Glaeser G. 2020. *The Universe of Quadrics.* Springer-Verlag. Vienna. ISBN 978-3-662-61052-7. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1007/978-3-662-61053-4`.

[11] Peternell, M., Pottmann H. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, Volume 23, Issues 2–3, 1997, Pages 255-266, ISSN 0747-7171. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0087`.

[12] Pottmann H., Peternell, M. 2009. Envelopes - Computational Theory and Applications. Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Dostupné na internete: `https://www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/ig/peternell/env.pdf`

[13] Pottmann, H., Wallner, J. *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag, 2001.

[14] Skopenkov M. at al. 2020. Characterizing envelopes of moving rotational cones and applications in CNC machining, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 83, 101944, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101944.`

[15] Vráblíková Jana. 2022. Envelopes of implicit surfaces. Mathematical Institute of Charles University. Prague. Master's thesis. Dostupné na internete: `https://dodo.is.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/171858/120411574.pdf?sequence=1&isAllowed=y`