

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH
DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Počítačová grafika a geometria
Študijný odbor: 1113 Matematika
Školiace pracovisko: Katedra algebry a geometrie
Školiteľ: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Bratislava, 2024
Bc. Jana Tutková



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jana Tutková
Študijný program: počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: anglický
Sekundárny jazyk: slovenský

Názov: Envelope of a system of surfaces
Obálka systému plôch

Anotácia: Cieľom práce je študovať základné vlastnosti obálky systému plôch. Zameriame sa na jednoparametrické systémy kvadrík v trojrozmernom priestore. Okrem teoretických podkladov očakávame aj numerické experimenty a príklady postupov. Načrtujeme aplikácie, v ktorých sa obálky používajú.

Cieľ: Študovať a opísať niektoré vlastnosti obálky systému kvadratických plôch.

Literatúra: do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Dover Publications Inc., 2017
Pottmann, Wallner: Computational Line Geometry, Springer, 2001

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Vedúci: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.
Katedra: FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie
Vedúci katedry: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce: prípustná pre vlastnú VŠ

Dátum zadania: 13.12.2022

Dátum schválenia: 14.12.2022

doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie:

Abstrakt

Tutková, Jana: Obálka systému plôch. Diplomová práca, Univerzita Komenského. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra algebry a geometrie. Bratislava: FMFI UK, 2023, 26 s.

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Abstract

Tutková, Jana: Envelope of a system of surfaces. Master's thesis, Comenius University. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of algebra and geometry. Bratislava: FMFI UK, 2023, 26 s.

Keywords: envelope of surfaces, system of quadratic surfaces

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy	3
1.1 Jednparametrický systém	3
1.2 Obálka jednparametrického systému nadplôch	5
1.3 Výpočet obálky	11
1.3.1 Prístup algebraickej geometrie	11
1.3.2 Prístup projektívnej geometrie	13
1.3.3 Kinematický prístup	14
1.3.4 Obálky a ODR	15
1.3.5 Lokálne prieniky	17
1.4 Aplikácie obálok a predošlá práca	18
1.5 Obálka sfér	19
1.5.1 Charakteristická kružnica	19
1.5.2 Lokálny prienik	22
1.5.3 Lokálny samoprienik	23
1.5.4 Konštantný polomer	24
2 Numerické metódy	27
2.1 Eulerova metóda	28
2.1.1 Geometrická interpretácia Eulerovej metódy	28
2.1.2 Prispôsobenie Eulerovej metódy na výpočet obálky	29
2.1.3 Modifikácia Eulerovej metódy	30
2.2 Runge-Kuttova metóda	30
Príloha A	35
Príloha A	35

Zoznam obrázkov

1.1	Systém kružníc.	3
1.2	Zobrazenie prvkov systému.	5
1.3	Sústredné kružnice.	8
1.4	Obálka systému podľa charakterizácie.	9
1.5	Obálka systému podľa definície.	10
1.6	Systém elíps.	11
1.7	Obálka vypočítaná rezultantom.	13
1.8	Systém priamok v normálovom tvare.	15
1.9	Regulárne riešenia a obálka.	16
1.10	Webbov most.	19
1.11	Technika rolling ball blends.	22

Zoznam tabuliek

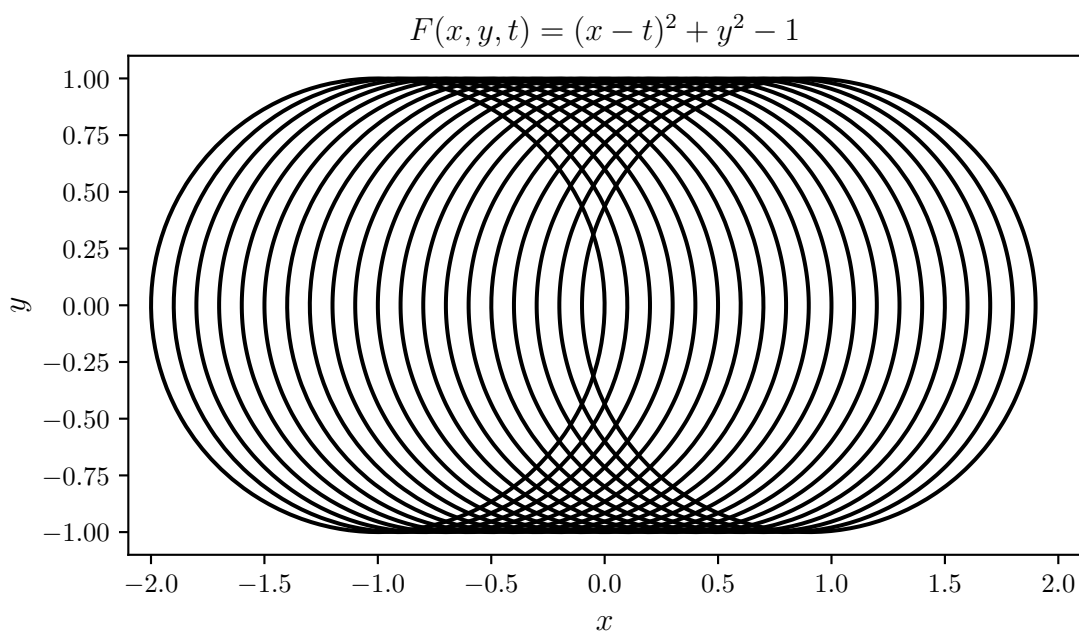
Úvod

Kapitola 1

Základné pojmy

1.1 Jednparametrický systém

Ak nakreslíme kružnice so stredom na x-ovej osi s polomerom 1, ako na obrázku, pohľad nám upútajú horizontálne priamky $y = \pm 1$ idúce ponad a popod systém kružníc.



Obr. 1.1: Systém kružníc.

Každá z týchto priamok sa dotýka každej kružnice v jednom bode a v tomto bode

majú spoločnú dotyčnicu. V nasledovnom texte túto myšlienku matematicky opíšeme, na základe nej zostrojíme tzv. obálku systému kriviek alebo plôch a porovnáme prístupy ich výpočtu. Budeme pracovať v reálnom vektorovom priestore so štandardným skalárnym súčinom, teda v euklidovskom priestore, rozmeru $n = 2, 3$. Najprv ilustrujeme príklady obálok a ich výpočet pre $n = 2$. Po celý čas predpokladáme, že všetky zobrazenia sú dostatočne veľakrát diferencovateľné. Tučným písmom značíme vektorovú funkciu a parametre pre prehľadnosť zápisov vynechávame, ak sú z kontextu zrejmé.

Vo všeobecnosti, začneme v \mathbb{R}^2 s jednoparametrickým systémom kriviek daným funkciou, v \mathbb{R}^3 máme jednoparametrický systém plôch.

Definícia 1.1. *Nech $F: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia v premenných x_1, x_2, \dots, x_n a v parametri t , kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Definujeme jednoparametrický systém nadplôch ako systém množín*

$$\mathcal{F}_t = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0, t \in I\}.$$

V $n = 2$ budeme pre lepšiu prehľadnosť značiť premenné x_1, x_2 ako x, y , pre $n = 3$ pribudne x_3 ako z .

Pre horeuvedený prípad teda máme jednoparametrický systém kružníc so stredmi kružníc, ktoré ležia na úsečke parametrizovanej $(t, 0)$ pre $t \in [-1, 1]$ a konštantným polomerom pre každú kružnicu $r = 1$ daný implicitnou funkciou

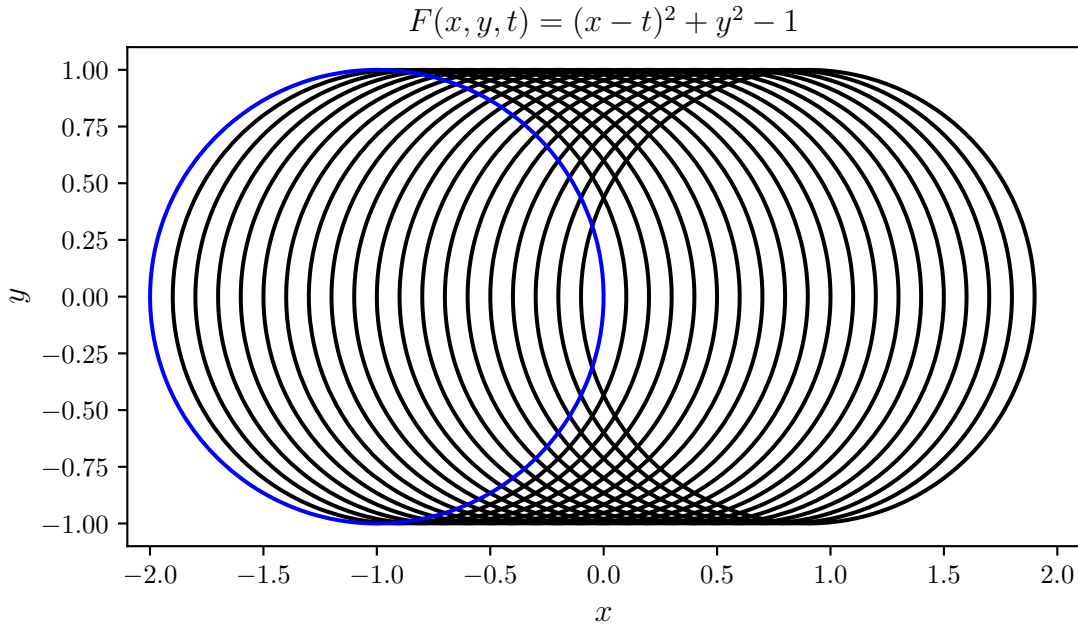
$$\mathcal{F}_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, t) = 0, t \in [-1, 1]\},$$

kde

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1.$$

Systém budeme ilustrovať zobrazením niektorých prvkov systému pre diskkrétne hodnoty parametra t . Pre $t = -1$ je zodpovedajúca $F_{-1} \in \mathcal{F}_t$ kružnica s implicitnou rovnicou

$$F_{-1}(x, y) = F(x, y, -1) = (x + 1)^2 + y^2 - 1.$$



Obr. 1.2: Modrou farbou je vyznačená kružnica systému v parametri $t = -1$.

1.2 Obálka jednoparametrického systému nadplôch

Najskôr definujeme obálku jednoparametrického systému kriviek v \mathbb{R}^2 . Uvedieme charakterizáciu obálok, ktorú možno použiť na výpočet pre jednoduchšie jednoparametrické systémy. Následne túto charakterizáciu použijeme ako definíciu pre obálku jednoparametrického systému plôch v \mathbb{R}^n .

Definujme gradient $\nabla F(x, y, t)$ vzhľadom na x a y ako

$$\nabla F(x, y, t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t) \right).$$

Predpokladáme, že $\nabla F(x, y, t) \neq \vec{0}$.

Definícia 1.2. Obálkou systému kriviek \mathcal{F}_t je parametrizovaná krivka $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$ taká, že

1. $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$ pre všetky $t \in J$,
2. $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$.

Obálka $\gamma(t)$ sa dotýka každej krivky zo systému $F(x, y, t)$ v bode (x, y) pre nejaké t a v tomto bode má s krivkou zo systému rovnakú dotyčnicu. To znamená, že každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t , a teda platí prvá podmienka $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$. Gradient funkcie $\nabla F(x, y, t)$ je normálový vektor k $F(x, y, t)$ v regulárnom bode (x, y) a parametri t . V spoločnom bode (x, y) a parametri t chceme rovnaký smer dotykového vektora pre $\gamma(t)$ a $F(x, y, t)$, z čoho vyplýva, že $\dot{\gamma}(t)$ a dotykový vektor k funkcii $F(x, y, t)$ sú lineárne závislé, z čoho dostávame $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$, druhú podmienku v definícii obálky. Interval J , na ktorom dostávame výslednú obálku môže byť menší ako interval I , na ktorom bol definovaný systém kriviek, teda máme $J \subseteq I$. Ak by bol gradient $\nabla F(x, y, t)$ v nejakom bode nulový, nevieme nájsť jednoznačne dotykový vektor obálky a systému.

Veta 1.1. *Regulárna krivka $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$ kde $t \in J \subseteq I$ je obálkou jednoparametrického systému \mathcal{F}_t práve vtedy, keď spĺňa:*

1. $F(\gamma(t), t) = 0$,
2. $\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0$.

Dôkaz. Táto odlišná charakterizácia je ekvivalentná definícii, ktorú sme postavili na geometrických podmienkach. Stačí zistiť korešpondenciu podmienok.

1. Ako sme už vysvetlili, každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu jednoparametrického systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t , teda podmienky

$$F(\gamma(t), t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$$

a

$$\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$$

sú ekvivalentné.

2. Derivujme $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ podľa parametra t , kde $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot 1 = 0.$$

Nakoľko požadujeme, aby gradient funkcie $\nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ bol kolmý na $\dot{\gamma}(t)$ tak

$$\langle \nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

teda platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) = 0,$$

z čoho dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0.$$

□

Obálka sa počíta riešením rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

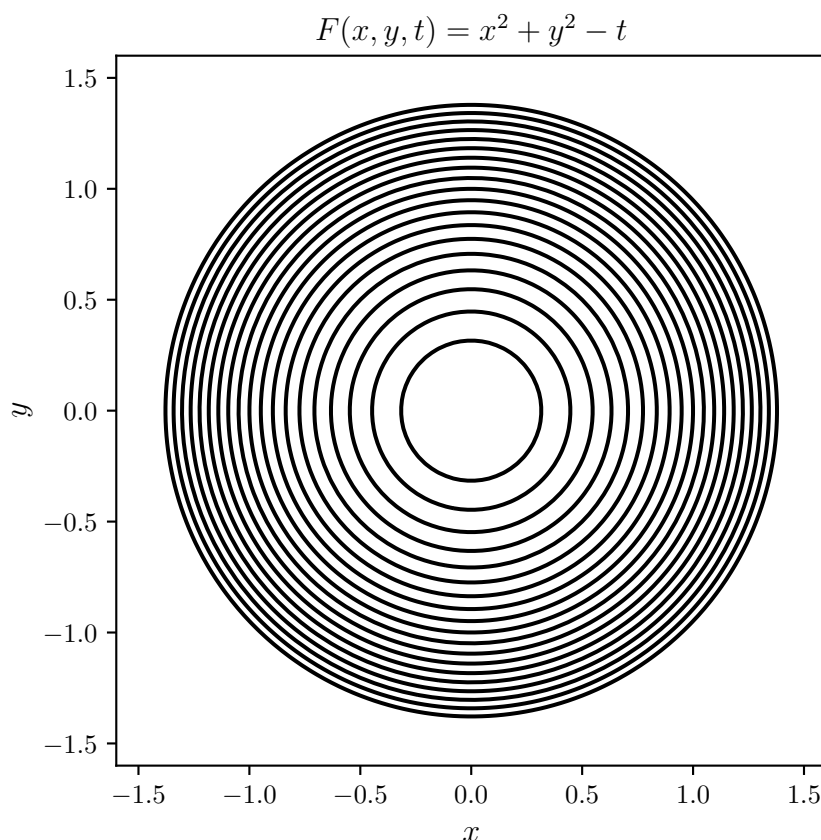
Často sa v literatúre môžeme stretnúť s rôznymi opismi obálky, ktoré však bez ďalších predpokladov nemusia definovať rovnakú množinu bodov. Príkladom je ďalšia charakterizácia obálky ako množiny limitných bodov prienikov kriviek systému. Vzťahy medzi jednotlivými charakterizáciami možno nájsť v [3].

Dokonca, daný systém nemusí mať obálku. Príkladom sú sústredné kružnice s rastúcim polomerom.

Príklad 1. Obálku systému sústredných kružníc pre $t \in I = [\frac{1}{10}, 2]$ rátame ako systém rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= x^2 + y^2 - t, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= -1. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice máme $t = -1 \neq 0$, teda systém nemá riešenie. Aj keď by sa nám mohlo zdať, že by obálkou mohli byť body kružnice s najväčším polomerom F_2 a kružnice s najmenším polomerom $F_{\frac{1}{10}}$, práve podmienka existencie takej krivky $\gamma(t)$, ktorá by patrila do systému kružníc \mathcal{F}_t pre všetky t z intervalu $J \subseteq I$, nie je splnená.



Obr. 1.3: Sústredné kružnice.

Prístup, ktorý sme využili pre jednoparametrický systém kriviek, možno zovšeobecniť pre ľubovoľný jednoparametrický systém plôch v \mathbb{R}^n .

Definícia 1.3. (Charakterizácia.) *Obálkou jednoparametrického systému plôch \mathcal{F}_t je množina bodov \mathcal{E} daná*

$$\mathcal{E} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R}, F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0\}.$$

Ak by sme chápali obálku podľa definície ako množinu bodov, problém by sme mohli riešiť ako systém nelineárnych rovníc v parametri t , kde chceme z rovníc

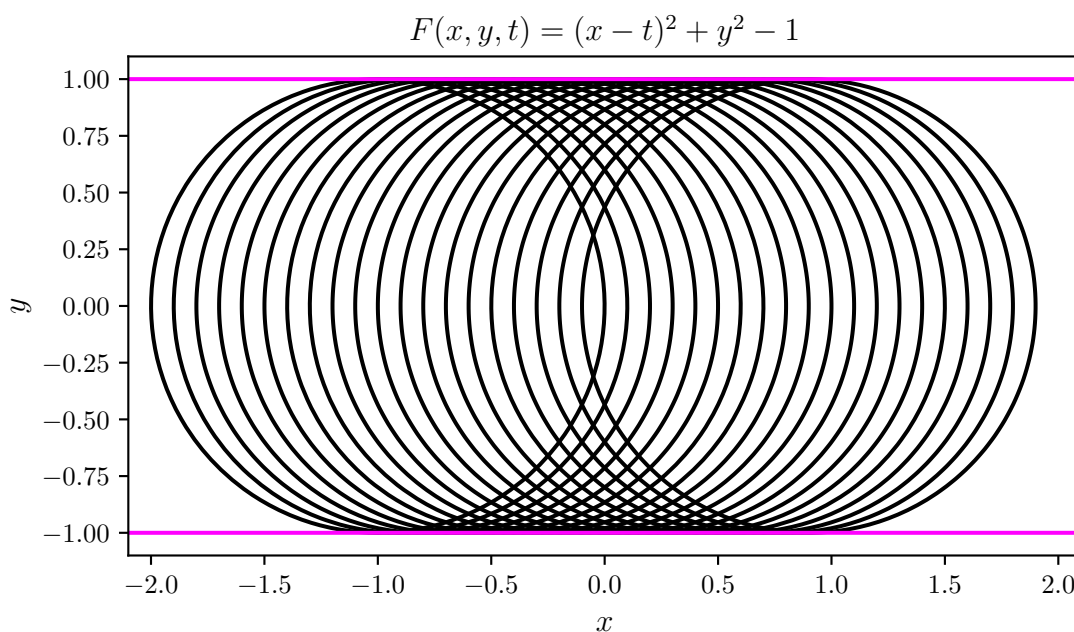
$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

eliminovať t . Na riešenie nelineárneho systému dvoch rovníc síce existujú pokročilé nástroje, no eliminovaním parametra t strácame informáciu o tom, kde je obálka definovaná.

Príklad 2. Pre náš príklad $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$ máme

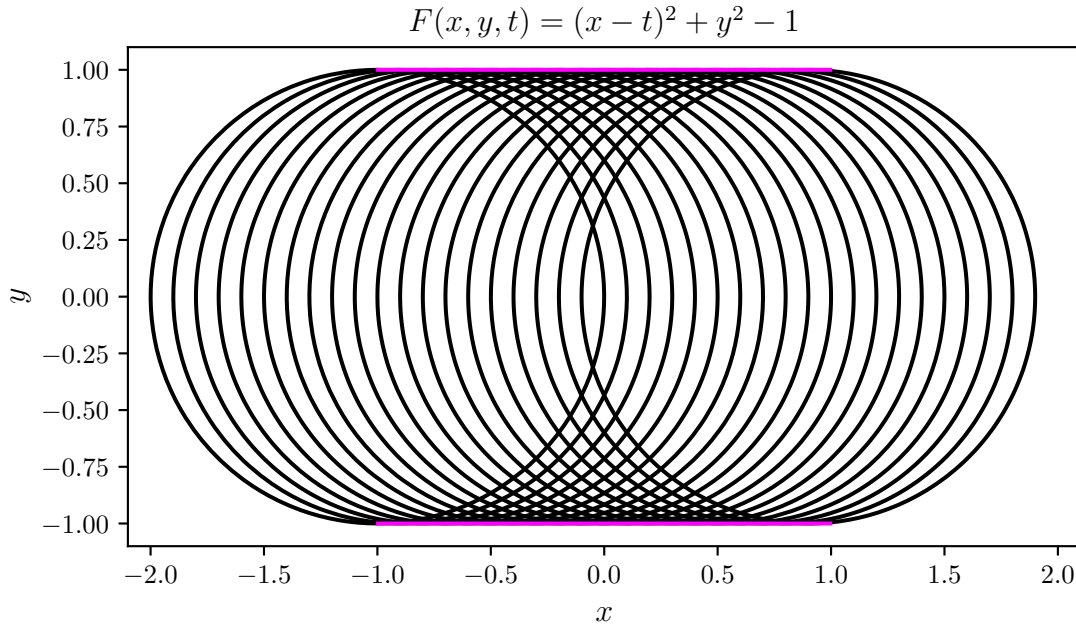
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2(t - x) = 0.$$

Ak $t = x$, tak $y^2 = 1$. Teda obálka je podľa tejto charakterizácie $y = \pm 1$, ako sme očakávali.



Obr. 1.4: Obálka systému podľa charakterizácie.

V skutočnosti sú obálkou úsečky $y = \pm 1$ definované na intervale $[-1, 1]$.



Obr. 1.5: Obálka systému podľa definície.

Tento problém možno ošetriť tak, že budeme uvažovať systémy kriviek, ktoré sú v parametri t definované na celej reálnej priamke \mathbb{R} .

Príklad 3. Počítajme obálku systému kriviek, znázorneného na obrázku 1.6, ktorý je daný vzťahmi

$$F(x, y, t) = \frac{x^2}{(t^2 + 1)^2} + (y - 2t)^2 - 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{4x^2 t}{(t^2 + 1)^3} - 4(y - 2t).$$

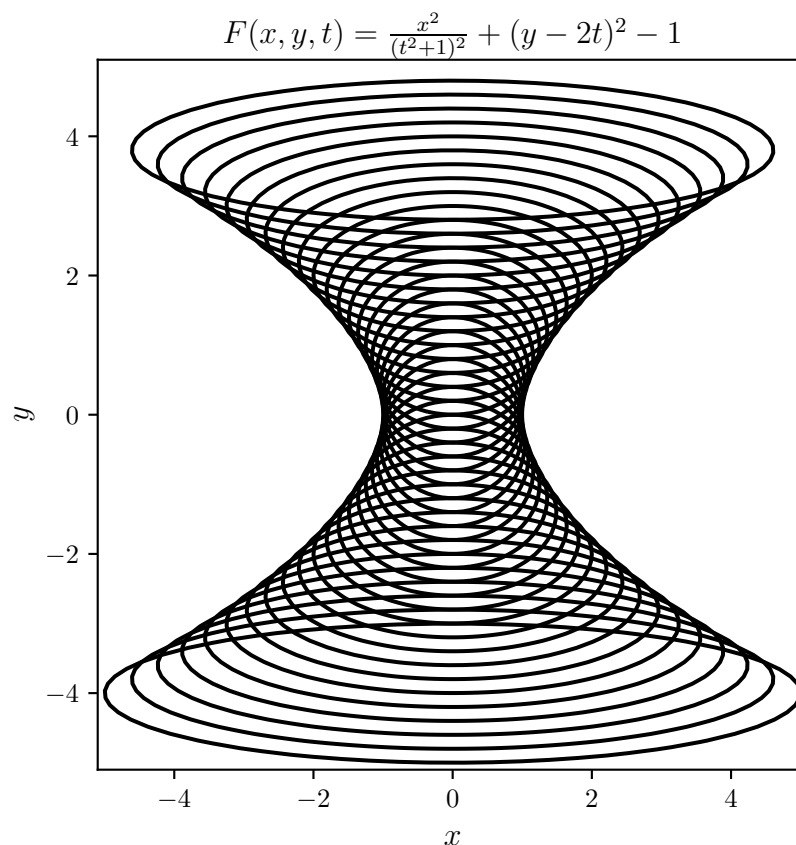
Vynásobením prvej rovnice $\lambda(t) = (t^2 + 1)^2$ a derivovaním získavame

$$F^\lambda = 4t^6 - 4t^5 y + t^4 y^2 + 7t^4 - 8t^3 y + 2t^2 y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,$$

$$F_t^\lambda = 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2 t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2 t + 4t - 4y.$$

Na obrázku 1.6 je znázornený tento systém elíps pre $t \in [-2, 2]$ s krokom $\Delta t = 0.1$. Obálku nájdeme ako riešenie $F^\lambda \cap F_t^\lambda$. Rovnice sú však príliš vysokého stupňa v pa-

rametri t , preto nevieme implicitnú rovnicu obálky bez vhodného nástroja vyjadriť. V ďalšej časti rozoberieme prístupy výpočtu.



Obr. 1.6: Systém elíps.

1.3 Výpočet obálky

Vo väčšine prípadov sú rovnice charakterizujúce obálku systému plôch príliš vysokého stupňa v parametri t a nedokážeme z nich ľahko odvodiť rovnicu obálky, preto pristupujeme aj k numerickým riešeniam. Spoľahlivá aproximácia obálky je jednou z aktuálnych výskumných tém. Na začiatok si však rozoberme existujúce analytické prístupy. Naledujúce prístupy sú prevzaté z [16].

1.3.1 Prístup algebraickej geometrie

Dokonca aj v prípade jednoduchého príkladu ako 3, obe polynomicke rovnice charakterizujúce obálku sú vysokého stupňa v parametri t , preto je odstránenie parametera t náročné bez vhodného nástroja. Štandardným aparátom na túto úlohu sú Gröbnerove bázy. Gröbnerove bázy sú kľúčovým pojmom v algebraickej geometrii a počítačovej

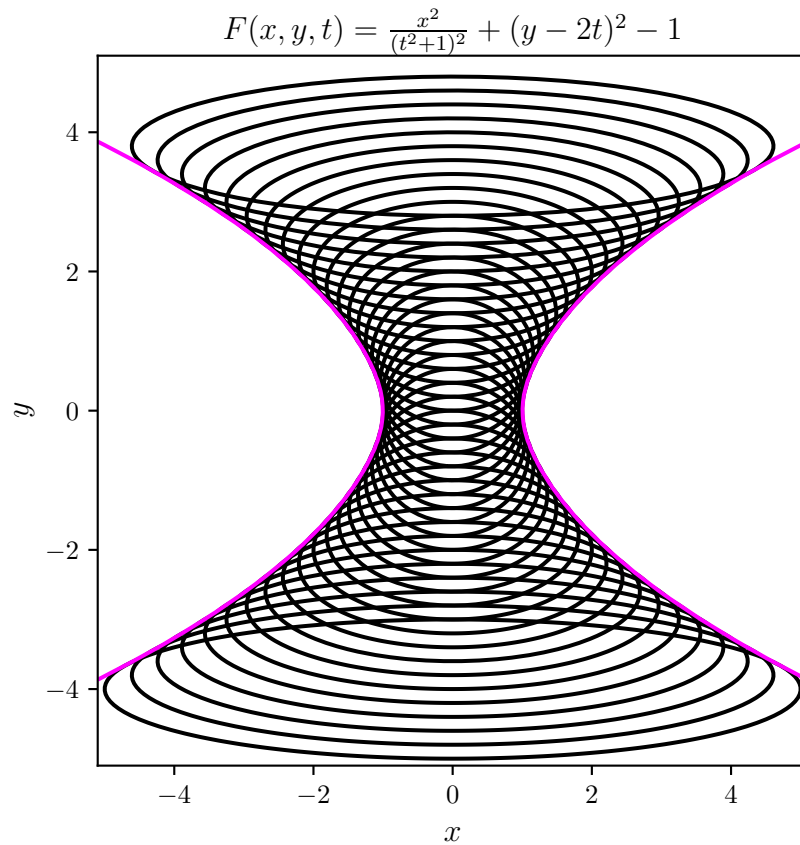
algebry. Ide o špeciálnu množinu polynómov vo viacerých premenných, ktoré majú niekoľko dôležitých vlastností a zohrávajú kľúčovú úlohu pri riešení rôznych matematických problémoch vrátane riešenia sústav polynomických rovníc, zjednodušovania polynómov a dokazovania rôznych algebraických tvrdení. Vybudovanie tejto teórie je pomerne zdĺhavé, preto odkážeme na bohaté teoretické pozadie v [7]. Najprv vypočítame Gröbnerovu bázu Buchbergerovým algoritmom pre ideál generovaný sústavou polynomických rovníc, ktorá obsahuje všetky premenné vrátane tej, ktorú chceme eliminovať. Z Gröbnerovej bázy vyberieme polynómy, ktoré obsahujú premennú, ktorú chceme eliminovať. Tieto polynómy použijeme na vyjadrenie tejto premennej v závislosti od ostatných premenných. Po vyriešení nových rovníc získame výraz, ktorý opisuje vzťah medzi zvyšnými premennými a eliminovanou premennou. Týmto spôsobom úspešne eliminujeme premennú. Pokúsme sa vypočítať Gröbnerovu bázu príkladu 3 vzhľadom na lexikografické usporiadanie monómov $t > x > y$. Keďže výpočet Gröbnerovej bázy trvá pomerne dlho, neuvádzame postup a výsledok možno nájsť v prílohe 2.2.

Gröbnerova báza vzhľadom na iné usporiadanie, napr. grevlex je zvyčajne vypočítaná oveľa rýchlejšie a jej polynómy majú krajšie koeficienty, no na druhej strane, tento prístup nie je vo všeobecnosti možné použiť na odstránenie premennej t z rovníc.

Existujú aj iné metódy na riešenie polynomických rovníc, ktoré nie sú závislé na usporiadaní monómov. Spôsob, ako nájsť polynóm, ktorý leží v prvom eliminačnom ideáli, ktorý je nezávislý na Gröbnerovej báze a monómických usporiadaniach, využíva teóriu rezultantov. Rezultant je determinant matice polynómov.

Hoci výpočet determinantov veľkých matíc je výpočtovo aj časovo náročný problém, existujú metódy, ako vypočítať determinant efektívnejšie. V príklade 3 uvidíme výsledný polynóm $Res(F^\lambda, F_t^\lambda, t)$ a ukážeme obálku nájdenu rezultantom, pozri 1.7.

$$\begin{aligned} Res(F^\lambda, F_t^\lambda, t) = & 191102976x^{10} + 262144x^8y^6 - 9584640x^8y^4 + 83165184x^8y^2 - \\ & 633470976x^8 - 16384x^6y^{10} - 81920x^6y^8 - 14483456x^6y^6 - 113311744x^6y^4 + 96419840x^6y^2 + \\ & 698368000x^6 - 16384x^4y^{12} - 294912x^4y^{10} - 2998272x^4y^8 - 18284544x^4y^6 - 74956800x^4y^4 - \\ & 184320000x^4y^2 - 256000000x^4. \end{aligned}$$



Obr. 1.7: Obálka vypočítaná rezultantom.

Navyše táto metóda, rovnako ako metóda založená na eliminačnej teórii s použitím Gröbnerových báz, nám vypočíta správnu obálku len vtedy, ak uvažujeme parameter t jednoparametrického systému z celej reálnej priamky. Ak obmedzíme oblasť parametra na interval, tak obálka zvyčajne nemôže byť daná implicitnou rovnicou, a preto je potrebné nájsť nejakú parametrizáciu obálky.

Pri použití rezultantov máme lepšiu kontrolu nad zložitou výpočtu. Pre dané dva polynómy totiž vieme, ako sa konštruje rezultant, a tak vieme odhadnúť, s akými veľkými polynómami sa bude počas výpočtu manipulovať, avšak pri hľadaní Gröbnerovej bázy je ťažké odhadnúť, aké zložité S-polynómy sa behom algoritmu vyskytnú. Nie je zriedkavosťou, že S-polynómy sú podstatne komplikovanejšie než vstupné polynómy a výsledná Gröbnerova báza.

1.3.2 Prístup projektívnej geometrie

Pribudne neskôr.

1.3.3 Kinematický prístup

Ďalším zo spôsobov, ako chápať jednoparametrické systémy plôch v \mathbb{R}^n je pozeráť sa na ne ako na množinu všetkých transformácií daného povrchu P . Povrch P sa transformuje na ostatné prvky systému prostredníctvom prvkov vhodnej grupy transformácií. Táto množina transformácií má okrem štruktúry grupy aj štruktúru hladkej variety (*smooth manifold*). Tieto grupy nazývame Lieove grupy.

Príklad 4. Ilustrujme tento postup na jednoduchom rovinnom príklade. Transformujme zobrazením g_t priamku

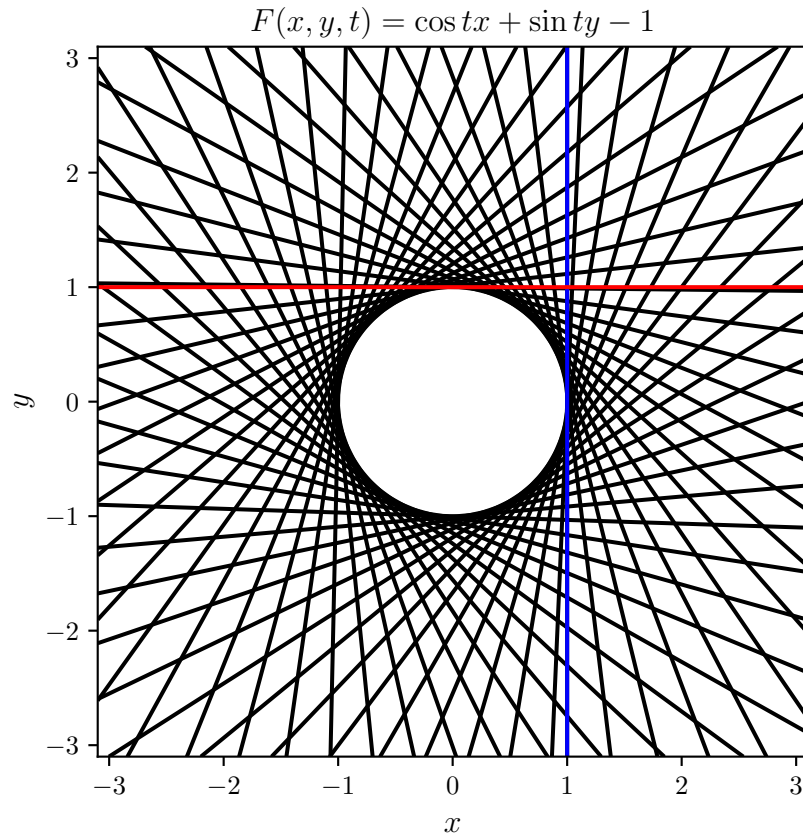
$$\begin{aligned} l: x(u) &= 1 \\ y(u) &= u \end{aligned}$$

$$g_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pre každé $t \in \mathbb{R}$, g_t zodpovedá rotácii. Grupa všetkých rotácií je $SO(n)$ a nazýva sa špeciálna ortogonálna grupa. Pre $t = 0$, dostávame priamku l . Pre iné t , napríklad $t = \frac{\pi}{2}$, dostávame priamku

$$\begin{aligned} g_t(l): x(u) &= -u \\ y(u) &= 1. \end{aligned}$$

Na obrázku 1.8 je znázornená priamka l modrou farbou, transformovaná priamka $g_t(l)$ červenou farbou.



Obr. 1.8: Systém priamok v normálovom tvare.

Transformácie g_t z príkladu sú prvkami Lieovej grupy $SO(n)$. Ďalšie známe príklady maticových Lieových grúp sú ortogonálna grupa $O(n)$, unitárna $U(n)$ a špeciálna unitárna grupa $SU(n)$. Pre nájdenie podrobnejších informácií, sa môže čitateľ obrátiť na ľubovoľnú úvodnú učebnicu o Lieových grupách a Lieových algebrách, ako je napríklad [10]. Použili sme štruktúru Lieovej grupy, aby sme opísali, ako sa grupa transformuje daný povrch. Ďalej, využívajúc štruktúru hladkej variety môžeme opísať jednoparametrický systém plôch výlučne pomocou terminológie Lieových grúp. Táto teória sa aplikuje na nájdenie parametrizácie obálok kvadratických plôch. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [16].

1.3.4 Obálky a ODR

Obálky súvisia aj so štúdiom obyčajných diferenciálnych rovníc, a najmä ich singulárnych riešení. Predpokladajme, že jednoparametrický systém kriviek \mathcal{F}_t je riešením nejakej diferenciálnej rovnice prvého rádu. Potom môže existovať aj ďalšia krivka spĺňajúca túto diferenciálnu rovnicu, ktorá je dotyčnicou k \mathcal{F}_t v každom bode. Táto krivka je obálka. V literatúre sa nazýva aj singulárne riešenie diferenciálnej rovnice. Uvažujme

ODR

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Jej regulárnym riešením sú integrálne krivky

$$y = -t^2 + 2tx, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Riešenie môžeme reprezentovať ako jednoparametrický systém kriviek \mathcal{F}_t s funkciou

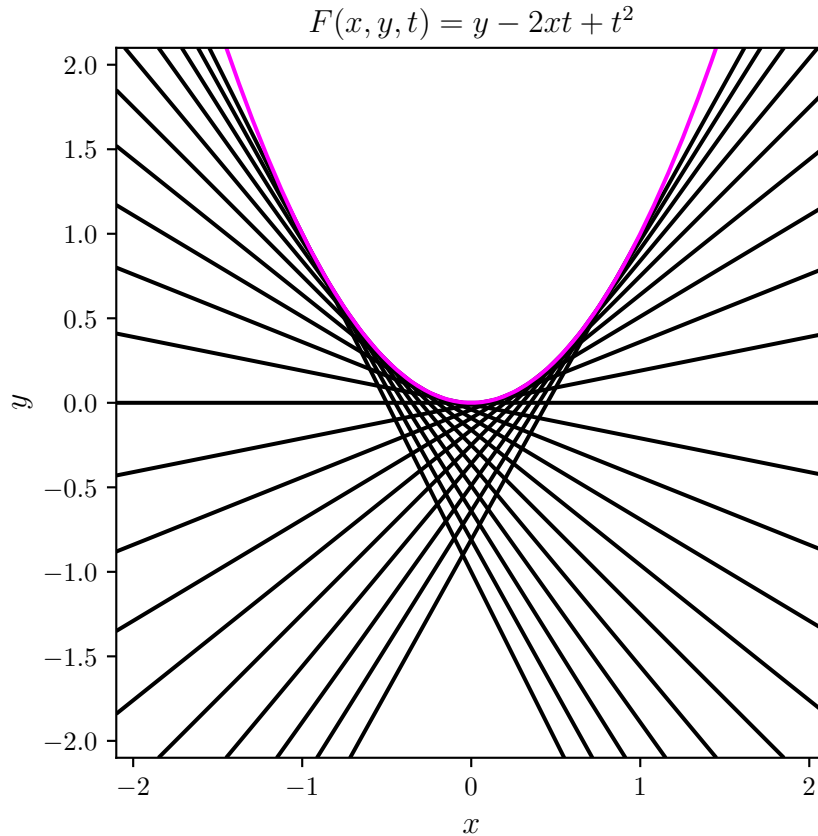
$$F(x, y, t) = t^2 - 2tx + y.$$

Derivovaním podľa parametra t dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2t - 2x,$$

z čoho máme $t = x$ a dosadením do funkcie máme $F = -x^2 + y$, teda obálka je $y = x^2$.

Obálka tejto jednoparametrickej rodiny priamok, ktorou je parabola $y = x^2$, rieši taktiež diferenciálnu rovnicu. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [5].



Obr. 1.9: Regulárne riešenia a obálka.

1.3.5 Lokálne prieniky

Lokálny prienik systému kriviek \mathcal{F}_t pozostáva z prienikov blízkych susedných kriviek systému. Tento koncept bude ďalej formálne definovaný.

Definícia 1.4 (Lokálny priesečník). *Lokálny priesečník systému \mathcal{F}_t je množina všetkých priesečníkov infinitezimálne blízkych prvkov pre t . Označuje sa ako \mathcal{L} a formálne platí*

$$\mathcal{L}_{t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{t_0} \cap \mathcal{F}_{t_0 + \varepsilon}.$$

Lokálny priesečník $\mathcal{L} := \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t$ systému \mathcal{F}_t je zjednotenie všetkých priesečníkov vzniknutých z takýchto prekrytí.

Lokálny priesečník regulárneho systému sa v mnohých prípadoch zhoduje s jeho obálkou. Ilustrujme to na nasledovnom príklade.

Príklad 5. Vezmime dva ľubovoľné, ale odlišné prvky systému $F(x, y, t) = y - 2tx - t$. Pre fixné parametre $t_1 \neq t_2$ tak máme

$$F(x_1, y_1, t_1) = y_1 - 2t_1x_1 - t_1^2,$$

$$F(x_2, y_2, t_2) = y_2 - 2t_2x_2 - t_2^2.$$

Označme priesečník týchto dvoch priamok $Q = (q_x, q_y)^T$. Pre priesečník Q platí

$$F(q_x, q_y, t_1) = 0 = F(q_x, q_y, t_2),$$

odkiaľ vyplýva

$$(t_2 - t_1)(2q_x + t_1 + t_2) = 0.$$

Keďže podľa predpokladu $t_1 \neq t_2$, jediné riešenie tejto rovnice je $q_x = -\frac{t_1 + t_2}{2}$ a priesečník je potom daný

$$Q = \left(-\frac{t_1 + t_2}{2}, -t_1 t_2\right)^T.$$

Definujme $\varepsilon := t_2 - t_1$ a nechajme ε smerovať k nule, dostávame priesečník

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -t_1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ -t_1(t_1 + \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1^2 \end{pmatrix}.$$

Po reparametrizácii $t_1(t) = -t$ je ľahké vidieť, že množina všetkých týchto priesečníkov $\mathcal{L} = \{(t, -t^2) : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{E}$, ktorá predstavuje lokálny priesečník, sa zhoduje s vypočítanou množinou bodov obálky.

Dôsledok 1.1. Nech je daný systém \mathcal{F} . Potom každý bod lokálneho priesečníka systému \mathcal{L} je aj bodom obálky systému \mathcal{E} . Teda platí

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}.$$

1.4 Aplikácie obálok a predošlá práca

Vzhľadom na výskyt obálok v aplikáciách sa obálkam venuje veľká pozornosť. Stručne spomenieme niektoré aplikácie a odkážeme na literatúru.

Výpočet obálky pohybujúcej sa plochy sa vyskytuje pri simulácii a CNC obrábaní. CNC obrábanie (*Computer Numerical Control machining*) je výrobný subtraktívny proces, pri ktorom počítač riadi stroje, napríklad vŕtačky, frézy a sústruhy tak, aby neustále odlamovali nadbytočnosti z obrobku. Tento postup sa vykonáva, kým sa nevytvorí požadovaný tvar. Rezný nástroj vytvára pri rýchlom otáčavom pohybe okolo svojej osi rotačnú plochu. Takto vytvorená plocha je časť obálky pohybujúceho sa nástroja. CNC frézovanie má široké priemyselné využitie v odvetviach ako letecký priemysel, zdravotníctvo a spotrebná elektronika. V článku [15] sa možno dočítať viac o výpočte obálok pri 5-osovom CNC obrábaní.

Obálky sa používajú aj na výpočet trajektórie projektilu vo vzduchu. Riešime klasický problém pohybu hmotného bodu (projektilu) vrhaného pod uhlom k horizontu. S nulovou silou odporu vzduchu je analytické riešenie dobre známe, trajektória projektilu je parabola. So zohľadnením odporu vzduchu úloha nemá presné analytické riešenie, a preto sa vo väčšine prípadov rieši numericky. Silu odporu vzduchu berieme do úvahy s konštantným členom odporu. Systém trajektórií vzniká pri vrhnutí projektilu s rovnakou počiatočnou rýchlosťou, ale s rôznymi uhlami hod. Na určenie maximálneho rozsahu letu projektilu sa tak použije rovnica obálky. [8]

Medzi ďalšie aplikácie obálok patrí tollerancing – krivka s kontrolou chyby, bezkolízne plánovanie pohybu robota – uvažujeme o konvexných kompaktných krivkách reprezentujúcich pohyb robota v rovine, ktorý mení svoj lokálny tvar pomocou systému afinných transformácií. Dizajn písma – konštrukcia znakov v písmach pre typografické systémy. O ďalších aplikáciach sa čitateľ dozvie v [13].

Kanálové plochy (*channel surfaces*), rúrkové plochy/potrubia (*pipe surfaces*), *rolling ball blends* a prirodzené kanálové plochy (*natural channel surfaces*) sa vyskytujú ako zmiešavacie povrchy a prechodové plochy medzi potrubiami. Kanálové plochy sú používané v počítačom podporovanom geometrickom dizajne (*Computer Aided Geometric Design*). V ďalšom texte si ukážeme ich konštrukciu ako obálku sfér.

Obálky - kanálové plochy sa využívajú aj v architektúre. Ako príklad uvádzame Webbov most (*Webb Bridge*), obr. 1.10 v Melbourne v Austrálii. Tvar mosta vzdáva hold histórii domorodého obyvateľstva a je vytvorený podľa tradičnej rybárskej pasce Koorie, ktorá sa používala na lov úhorov.



Obr. 1.10: Webbov most. [17]

1.5 Obálka sfér

Označme $Q \in \mathbb{R}^3$ a predpokladajme, že $m(t) = (m_1(t), m_2(t), m_3(t)) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizácia krivky m a $r(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ je funkcia definovaná na tom istom intervale. Krivka m sa nazýva kostrová krivka obálky (*spine curve*) a r sa nazýva funkcia polomeru (*radius function*). Jednparametrický systém sfér je daný rovnicou

$$\mathcal{S}_t : \langle Q - m(t), Q - m(t) \rangle - r^2(t) = 0.$$

Podľa definície 1.3, obálku \mathcal{E} možno nájsť ako prienik \mathcal{S}_t a $\dot{\mathcal{S}}_t$ pre všetky $t \in I$. Derivácia \mathcal{S} nám dáva roviny

$$\dot{\mathcal{S}}_t : \langle \dot{m}(t), Q - m(t) \rangle + r(t)\dot{r}(t) = 0.$$

Budeme teda hľadať prieniky sféry a roviny pre každý parameter $t \in I$.

1.5.1 Charakteristická kružnica

Definícia 1.5 (Charakteristická kružnica). V prípade, že pre $t_0 \in I$ je $\mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0} \neq \emptyset$, sa tento prienik nazýva sa charakteristická kružnica c_{t_0} . V prípade $\mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0} = \emptyset$, pre t_0 neexistuje žiadna charakteristická kružnica.

Lema 1.1. *Zjednotenie všetkých charakteristických kružníc c_t jednoparametrického systému \mathcal{S}_t je obálka \mathcal{E} tohto systému, teda platí*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t.$$

Dôkaz. Nech bod Q patrí do zjednotenia kružníc $\bigcup_{t \in I} c_t$, potom existuje aspoň jedno $t_0 \in I$, pre ktoré $Q \in c_{t_0}$. Keďže $c_{t_0} = \mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0}$, tak sú rovnice \mathcal{S}_{t_0} a $\dot{\mathcal{S}}_{t_0}$ splnené pre nejaké t_0 a Q , a preto patrí Q obálke \mathcal{E} , a teda platí inklúzia $\bigcup_{t \in I} c_t \subseteq \mathcal{E}$.

Opačne, ak Q patrí obálke \mathcal{E} , existuje podľa definície 1.3 $t_0 \in I$ také, že platí $F(Q, t_0) = 0$ a súčasne $\frac{\partial F}{\partial t}(Q, t_0) = 0$, to znamená, že Q leží v prieniku $\mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0} = c_{t_0}$ a $c_{t_0} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$. Preto platí inklúzia $\mathcal{E} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$.

Týmto je rovnosť $\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t$ dokázaná. \square

Obálka sfér sa teda skladá zo systému kružníc. Charakteristická kružnica leží celá v rovine $\dot{\mathcal{S}}_t$, takže v tejto rovine leží aj jej stred. Dotykový vektor kostrovej krivky $m(t)$ je kolmý na rovinu $\dot{\mathcal{S}}_t$, teda stred C_t charakteristickej kružnice leží na dotyčnici $T(t, s) = m(t) + s \cdot \dot{m}(t)$, $s \in \mathbb{R}$, preto stred C_t nájdeme ako

$$\dot{\mathcal{S}}_t \cap T(t, s).$$

Pre parameter s potom platí $s = \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}$, po dosadení do $T(t, s)$ získavame

$$C_t = m(t) - \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle} \dot{m}(t).$$

Rozoberme si nasledujúce dva prípady

- Ak je funkcia polomeru $r(t)$ konštantná, $\dot{r} \equiv 0$ a rovina $\dot{\mathcal{S}}_t$ obsahuje stred sféry M_t pre všetky $t \in I$, v tomto prípade možno obálku \mathcal{E} považovať za posunutie (*offset*) kostrovej krivky m . Tieto obálky sú známe ako rúrkové plochy (*pipe surfaces*). Keďže rovina $\dot{\mathcal{S}}_t$ charakteristickej kružnice c_t obsahuje stred sféry M_t v každom $t \in I$, charakteristická krivka je hlavnou kružnicou sféry a obálka \mathcal{E} je pokrytá jednoparametrickým systémom zhodných kružníc.
- Ak funkcia polomeru $r(t)$ nie je konštantná, potom $\dot{r}(t) \neq 0$ a rovina $\dot{\mathcal{S}}_t$ neprechádza stredom sféry M_t . V tomto prípade obálka \mathcal{E} patrí do triedy kanálových plôch.

Polomer l_t charakteristickej kružnice možno vypočítať z pravouhlého trojuholníka $M_t C_t P$, kde P je ľubovoľný bod na charakteristickej kružnici c_t , a teda aj na sfére \mathcal{S}_t .

$$l_t = \sqrt{r^2(t) - \|M_t C_t\|^2} = r(t) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}}.$$

V prípade, že $\|M_t C_t\| > r(t)$, sféra S nemá s obálkou \mathcal{E} reálny kontakt.

Príklad 6. Uvažujme kostrovú krivku $m(t)$ a polomer $r(t)$

$$m(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad r(t) = \frac{t}{\sqrt{26}}.$$

potom obálka systému je daná rovnicami

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t: x^2 + y^2 + (z - t)^2 - \frac{t^2}{26} &= 0, \\ \dot{\mathcal{S}}_t: z - \frac{25}{26}t &= 0. \end{aligned}$$

Počítajme $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$. Z druhej rovnice dostaneme $t = \frac{26}{25}z$. Po dosadení do prvej rovnice, dostávame implicitnú rovnicu pre obálku \mathcal{E}

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{25}z^2 = 0,$$

čo je rovnica rotačného kužeľa.

Napríklad, pre $t = 1 \in I$ charakteristická krivka je prienikom dvoch plôch daných

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - \frac{1}{26} &= 0, \\ \dot{\mathcal{S}}_1: z - \frac{25}{26} &= 0. \end{aligned}$$

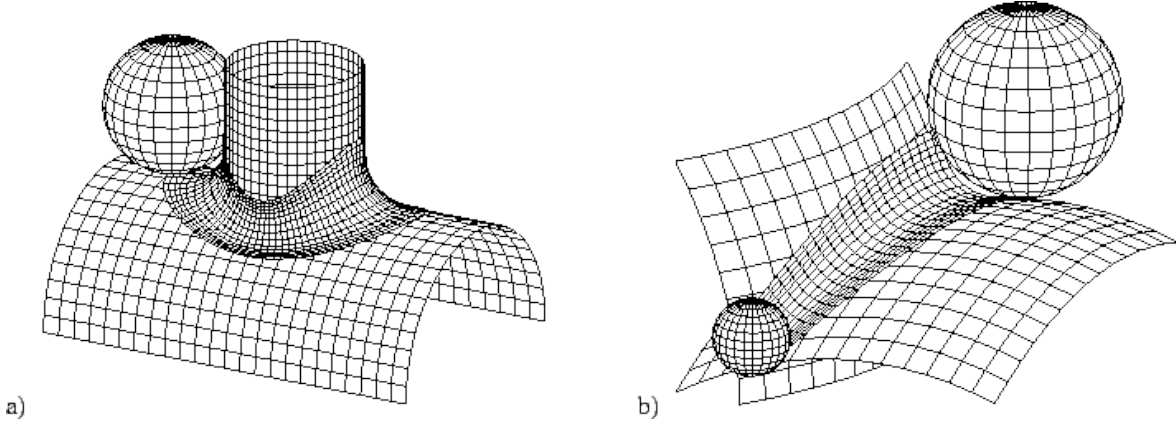
Z toho môžeme usúdiť, že charakteristická krivka c_1 je kružnica so stredom v bode $C_1 = (0, 0, \frac{25}{26})$ v rovine $z = \frac{25}{26}$ a neprechádza stredom sféry $M_1 = m(1) = (0, 0, 1)$, polomer c_1 je $l_1 = \frac{\sqrt{25}}{26}$. Vzdialenosť bodov $\|M_1 C_1\| = \frac{1}{26}$ a $r(1) = \frac{1}{\sqrt{26}}$, takže platí, že $r(1) > \|M_1 C_1\|$ a sféra \mathcal{S}_1 má s obálkou \mathcal{E} reálny kontakt.

Jedným z dôležitých výsledkov je, že kanálové plochy, definované ako obálka jednoparametrického systému sfér s racionálnou funkciou polomeru $r(t)$ a stredmi v racionálnej krivke $m(t)$ možno racionálne parametrizovať. [12]

Bohužiaľ, vo väčšine prípadov sú rovnice, ktoré charakterizujú obálky, príliš zložité a odvodiť z nich rovnicu obálky nie sme schopní.

Rúrkové povrchy sa často objavujú pri výrobe potrubia. Hladké spojenie medzi dvoma nie nevyhnutne valcovými rúrami P_1 a P_2 sa modeluje tak, aby bol prechod hladký, bez záhybov, vodotesný alebo dokonca aj parotesný. Na to sa používa technika *rolling ball blends*, využívajúca nasledujúcu myšlienku: Kým sa sféra S s konštantným alebo nekonštantným polomerom r kotúľa na oboch rúrach súčasne, zanecháva stopu c_i na oboch rúrach. Zmiešavacia plocha je tá časť obálky \mathcal{E} jednoparametrického systému sfér, ktorá leží medzi dvoma stopami c_1 a c_2 . Kostrová krivka obálky \mathcal{E} je priesečníkom

ekvidištánt (*offsetov*) plôch P_1 a P_2 vo vzdialenosti r . Každá charakteristická krivka spája dva dotykové body zmiešavacej plochy a plochami P_1 a P_2 , ktoré sa majú zmiešavať. Viac detailov možno nájsť v [9] a [11]. Na obrázku 1.11 vľavo je znázornená metóda so sférou s konštantným polomerom r , vpravo s nekonztantným.



Obr. 1.11: Technika rolling ball blend s konštantným polomerom vľavo, s nekonztantným polomerom vpravo. [18]

1.5.2 Lokálny prienik

V časti 1.3.5 sme odvodili vzťahy medzi lokálnym prienikom jednoparametrického systému a jeho obálkou. Pre systém kružníc však platí viac ako inklúzia jedným smerom.

Lema 1.2. *Lokálny prienik \mathcal{L}_{t_0} jednoparametrického systému sfér \mathcal{S}_t pre $t_0 \in I$ zodpovedá charakteristickej kružnici c_{t_0} . Platí*

$$\mathcal{L}_{t_0} = c_{t_0}.$$

Dôkaz. Ukážeme, že lokálny prienik dvoch nekonečne blízkych sfér \mathcal{S}_{t_1} a \mathcal{S}_{t_2} pre $\varepsilon = t_2 - t_1$ idúce k nule, bude práve charakteristická kružnica c_{t_2} a to tak, že pomocou orientovanej vzdialenosti stredov sfér ukážeme, že stred charakteristickej kružnice a stred prieniku dvoch sfér sú rovnaké. Označme ľubovoľný bod $S \in \mathcal{S}_{t_1} \cap \mathcal{S}_{t_2}$, l vzdialenosť medzi bodmi S a C a \vec{t} bude jednotkový vektor v smere $m(t_2) - m(t_1)$. Označme ako d_1 orientovanú vzdialenosť $m(t_1)$ a C a podobne d_2 orientovanú vzdialenosť $m(t_2)$ a C .

$$d_1 = \langle \vec{t}, C - m(t_1) \rangle \quad d_2 = \langle m(t_2) - C, \vec{t} \rangle,$$

kde $d_1 + d_2 = |m(t_2) - m(t_1)|$.

Keďže $m(t_2)CS$ a $m(t_1)CS$ sú pravouhlé, môžeme vyjadriť dĺžku spoločnej odvesny l .

$$l^2 = r^2(t_1) - d_1^2 = r^2(t_2) - d_2^2,$$

kde $d_2 = |m(t_2) - m(t_1)| - d_1$, potom možno d_1 vyjadriť ako

$$d_1 = \frac{|m(t_2) - m(t_1)|}{2} - \frac{\frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1}(r(t_2) + r(t_1))}{\frac{|m(t_2) - m(t_1)|}{t_2 - t_1}}.$$

Pre $\varepsilon = t_2 - t_1$ idúce k nule

$$d_1 = -\frac{\dot{r}(t_1)r(t_1)}{|\dot{m}(t_1)|}.$$

Odkiaľ stred priesečníkovej kružnice je

Nekonečne blízke sféry sa pretínajú pre t_0 v rovine $\dot{\mathcal{S}}_{t_0}$, a preto je prienik daný ako

$$\mathcal{L}_{t_0} = \mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0} = c_{t_0}.$$

V prípade, že lokálny prienik \mathcal{L}_s pre nejaké $s \in I$ prázdny, neexistuje pre s žiadna charakteristická kružnica a uvedená rovnosť stále platí. \square

Veta 1.2. *Obálka \mathcal{E} jednoparametrického systému sfér \mathcal{S}_t pozostáva z bodov prieniku infinitezimálne blízkyh prvkov systému a platí*

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}.$$

Dôkaz. Z predchádzajúcich dvoch lem, lemy 1.1 a 1.2 platí

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t = \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t = \mathcal{L}.$$

\square

1.5.3 Lokálny samoprienik

Lokálny samoprienik obálky jednoparametrického systému guľových plôch je špeciálnym typom samopretínania obálky. Je definovaný nasledovne.

Definícia 1.6. *Lokálny samoprienik \mathcal{L}_{t_0} obálky \mathcal{E} pre t_0 je priesečníkom infinitezimálne blízkyh charakteristických kružníc c systému \mathcal{F} . Lokálny samoprienik obálky je množina všetkých priesečníkov, ktoré vznikajú z takýchto prekrývaní. Označíme ho ako $\mathcal{L} = \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t$.*

Nasledujúci výrok predstavuje dôležité kritérium na identifikáciu lokálneho samoprieniku.

Lema 1.3. *Bod $Q \in \mathbb{R}^3$ patrí práve vtedy do lokálneho samoprieniku \mathcal{L}_{t_0} obálky \mathcal{E} , ak sú splnené rovnice*

$$\begin{aligned} F(Q, t_0) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(Q, t_0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(Q, t_0) &= 0 \end{aligned}$$

pre nejaké $t_0 \in I$.

Dôkaz. Ľubovoľný bod $Q \in \mathcal{L}_{t_0}$ patrí podľa definície k priesečníku infinitezimálne blízky kruhov pre t_0 . V bode Q sa navzájom pretínajú aj roviny $\dot{\mathcal{S}}_t$, v ktorých sa tieto kružnice nachádzajú. Tieto roviny patria do systému $\dot{\mathcal{S}}$, ktorá je definovaná ako množina nulových bodov funkcie $\frac{\partial F}{\partial t}(Q, t_0)$, a sú tiež infinitezimálne blízko, to znamená, že platí $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(Q, t_0) = 0$, teda

$$\langle \ddot{m}(t_0), Q - m(t_0) \rangle - \langle \dot{m}(t_0), \dot{m}(t_0) \rangle + \dot{r}^2(t_0) + r(t_0)\ddot{r}(t_0) = 0.$$

Bod Q leží na charakteristickej kružnici c_{t_0} , preto spĺňa rovnice F a $\frac{\partial F}{\partial t}$. Toto je nutná podmienka.

Opačne, predpokladajme, že sú všetky rovnosti z tejto lemy splnené pre nejaké $t_0 \in I$ a $Q \in \mathbb{R}^3$, potom platí

$$\begin{aligned} Q &\in \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\mathcal{S}(t_0) \cap \mathcal{S}(t_0 + \varepsilon) \cap \dot{\mathcal{S}}(t_0) \cap \dot{\mathcal{S}}(t_0 + \varepsilon) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\underbrace{\mathcal{S}(t_0) \cap \dot{\mathcal{S}}(t_0)}_{c_{t_0}} \cap \underbrace{\mathcal{S}(t_0 + \varepsilon) \cap \dot{\mathcal{S}}(t_0 + \varepsilon)}_{c_{t_0 + \varepsilon}} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (c_{t_0} \cap c_{t_0 + \varepsilon}) \\ &= \mathcal{L}_{t_0}. \end{aligned}$$

Týmto sme ukázali, že bod Q patrí do samoprieniku charakteristických kružníc pre t_0 a podľa definície 1.6 patrí do lokálneho samoprieniku \mathcal{L}_{t_0} obálky \mathcal{E} . \square

Pomocou lemy 1.3 možno ľahko rozhodnúť, či bod $Q \in \mathbb{R}^3$ pre parameter $t_0 \in I$ patrí do lokálneho samoprieniku \mathcal{L}_{t_0} . Ak je t_0 neznáme, mohli by sme určiť korene rovnice $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$. Ak by pár (Q, t_i) spĺňal obe ďalšie rovnice, bod Q patrí do lokálneho samoprieniku obálky \mathcal{E} pre t_0 . Často však riešime otázku, či obálka má lokálny samoprienik a ak áno, pre aké hodnoty parametrov $t \in I$. Pre túto otázku nie je použitie lemy vhodné, preto predkladáme lepšie kritérium. Pozrieme sa na to z geometrického hľadiska.

Rovnica $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ definuje znova systém rovín $\ddot{\mathcal{S}}(t)$. Pre každé $t \in I$ je $\ddot{m}(t)$ kolmé na $\ddot{\mathcal{S}}(t)$.

1.5.4 Konštantný polomer

V prípade, že je funkcia polomeru $r(t) \equiv r$ konštantná, platí $C_t = M_t, l_t = r$ a $\dot{r} = 0$, preto

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = s \cdot \langle \ddot{c}(t), n(t) \rangle - \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$$

a kritérium pre existenciu lokálneho prieniku \mathcal{L}_t sa zjednoduší na

$$|s| = \frac{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle}{\langle \ddot{c}(t), n(t) \rangle} \leq r.$$

Príklad 7. Pre prípad, že stredová krivka je daná normálnou parabolou, platí pre jej parametrizáciu a derivácie

$$m(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{m}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \ddot{m}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho ľahko získame vektory

$$\dot{m}(t) \times \ddot{m}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ak je polomer konštantný, dostávame pre parameter samoprieseku

$$s_t = \frac{\sqrt{4t^2 + 1}^3}{2},$$

ktorý je rovný obrátenej hodnote krivosti krivky $m(t)$ a to

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{m}(t) \times \ddot{m}(t)\|}{\|\dot{m}(t)\|^3} = \frac{2}{\sqrt{4t^2 + 1}^3}.$$

Vzťah medzi krivosťou a parametrom priesečníka neplatí len pre tento konkrétny príklad, ale vo všeobecnosti.

Lema 1.4. Pre obálku \mathcal{E} jednoparametrického systému sfér \mathcal{S}_t s konštantným polomerom $r(t) \equiv r \in \mathbb{R}$ je splnená rovnosť

$$s_t = \frac{1}{\kappa(t)}$$

pre všetky $t \in I$, kde κ je krivosť kostrovej krivky $m(t)$.

Dôkaz. Označme α_t uhol medzi $m(t)$ a $\dot{m}(t)$ a β_t uhol medzi $n(t)$ a $\ddot{m}(t)$. Potom platí $\alpha_t = 90 - \beta_t$ alebo $\alpha_t = 90 + \beta_t$. V oboch prípadoch je $\sin(\alpha_t) = \cos(\beta_t)$. Počítajme veľkosť parametra s .

$$\begin{aligned} |s_t| &= \frac{|\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle|}{|\langle \ddot{m}(t), n(t) \rangle|} = \frac{|\dot{m}(t)|^2}{|\ddot{m}(t)||n(t)| \cos \beta_t} = \frac{|\dot{m}(t)|^3}{|\dot{m}(t)||\ddot{m}(t)| \sin \alpha_t} = \frac{|\dot{m}(t)|^3}{|\dot{m}(t) \times \ddot{m}(t)|} \\ &= \frac{1}{\kappa(t)} \end{aligned}$$

□

Kapitola 2

Numerické metódy

Pomocou diferenciálnych rovníc sa opisujú rôzne fyzikálne deje. Niektoré z nich sa riešia len obtiažne a niektoré vyriešiť analyticky nemožno. Preto sa na hľadanie riešenia používajú približné metódy, z ktorých niektoré využijeme.

Pre účely hľadania obálky budeme potrebovať metódy pre riešenie jednej diferenciálnej rovnice prvého rádu so zadanou počiatočnou podmienkou.

Spoločným znakom všetkých numerických metód je, že riešenie nehľadáme ako spojitú funkciu, definovanú na celom skúmanom intervale $[a, b] = J$, ale hodnoty približného riešenia počítame v konečnom počte bodov $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Týmto bodom hovoríme uzlové body alebo uzly siete a množine $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ hovoríme sieť. Rozdiel $h_i = x_{i+1} - x_i$ sa nazýva krok siete v uzle x_i . Sieť je pravidelná (ekvidistantná), ak je krok h medzi jednotlivými uzlami konštantný. Ak chceme poznať približnú hodnotu riešenia v inom ako uzlovom bode, môžeme použiť interpolačnú metódu, napr. nahradiť riešenie lomenou čiarou alebo splajnom prechádzajúcou vypočítanými bodmi [1], [6].

Formulujme problém hľadania obálky nasledovne:

Hľadáme krivku $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{E}^2$ takú, že

1. $F(\gamma(t), t) = 0$,
2. $\langle \nabla F(\gamma(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$.

Nech $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, potom nasledujúce podmienky možno prepísať ako

1. $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$,
2. $\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)\dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)\dot{\gamma}_2(t) = 0$.

Poznáme začiatočný bod $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, t_0)$ a gradient v tomto bode $\nabla F(\gamma(t_0), t_0)$. Keďže úlohu riešime numericky, hľadáme na krivke $\gamma(t)$ bod $\gamma(t_1)$ taký, že

1. $F(\gamma(t_1), t_1) = 0$,

$$2. \langle \nabla F(\gamma(t_1), t_1), \dot{\gamma}(t_1) \rangle = 0.$$

Aplikujeme na tento problém známe numerické metódy.

2.1 Eulerova metóda

Majme danú začiatočnú úlohu $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ s podmienkami, ktoré zaisťujú existenciu a jednoznačnosť riešenia. Označme uzly $x_i = x_0 + ih$, kde $h > 0$ označuje dĺžku kroku. Vo všetkých bodoch siete podľa predošlej rovnice platí

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)).$$

Deriváciu na ľavej strane rovnice môžeme nahradiť diferenciou, a tak dostávame

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y(x_i)).$$

Ak nahradíme $y(x_i)$ približnou hodnotou y_i , môžeme odtiaľ vyjadriť približnú hodnotu $y(x_{i+1})$ tak, že

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \text{ pre } i = 0, 1, \dots, n.$$

Pomocou tohto vzorca vypočítame približnú hodnotu riešenia v ďalšom uzlovom bode pomocou hodnoty v predchádzajúcom uzle. Hodnotu riešenia v bode x_0 poznáme zo začiatočnej podmienky.

2.1.1 Geometrická interpretácia Eulerovej metódy

Pre vysvetlenie geometrickej interpretácie Eulerovej metódy najprv pripomeňme, že diferenciálnou rovnicou $y' = f(x, y)$ je dané tzv. smerové pole. V každom bode roviny (x, y) , ktorým prechádza nejaké riešenie tejto rovnice, je hodnota $f(x, y)$ rovná smernici dotyčnice ku grafu tohto riešenia. Preto si smerové pole môžeme predstaviť tak, že v každom bode roviny (x, y) stojí šípka, ktorá ukazuje, ktorým smerom máme pokračovať, ak sa dostaneme do daného bodu.

Pri riešení diferenciálnej rovnice Eulerovou metódou postupujeme takto: Vyjdeme z bodu (x_0, y_0) smerom, ktorý udáva šípka v tomto bode, to znamená, po priamke s rovnicou

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0),$$

až kým nedôjdeme do bodu s x-ovou súradnicou x_1 . Ypsilonová súradnica tohoto bodu je $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Z bodu (x_1, y_1) pokračujeme vo smere danom smerovým poľom v tomto bode, t. j. po priamke

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

kým nedôjdeme do bodu s x-ovou súradnicou x_2 . Teda môžeme vypočítať približnú hodnotu riešenia v ďalšom uzlovom bode pomocou riešenia v predchádzajúcom uzlovom bode.

Existujú metódy, v ktorých postupujeme dômyselnejšie ako v Eulerovej, no stále využívajú informácie iba z jedného predchádzajúceho kroku. Takéto metódy sa nazývajú jednokrokové. Metódy využívajúce informácie z niekoľkých predošlých krokov nazývame viackrokové.

Je celkom zrejmé, že nakoľko sa priblížime k presnému riešeniu, závisí na dĺžke kroku h , ktorú použijeme. Základnú vlastnosť, ktorú od použiteľnej numerickej metódy požadujeme, je aby riešenie získané metódou pre $h \mapsto 0$ konvergovalo k presnému riešeniu danej úlohy.

2.1.2 Prispôsobenie Eulerovej metódy na výpočet obálky

Ak poznáme začiatočný bod (x_0, y_0, t_0) , v tomto bode vieme vyčíslieť gradient $\nabla F(x_0, y_0, t_0)$ implicitne zadaného systému kriviek \mathcal{F}_t . Zo začiatočného bodu sa pohneme v smere dotykového vektora \vec{m} krokom h ku hľadanej obálke. Vektor \vec{m} vypočítame ako kolmý vektor ku gradientu $\nabla F(x_0, y_0, t_0)$ voľbou vhodnej orientácie

$$\vec{m} = \perp \frac{\nabla F(x_0, y_0, t_0)}{\|\nabla F(x_0, y_0, t_0)\|}.$$

Teda, na rozdiel od využitia smerového poľa, poznáme v každom bode pole gradientné, no zachováame princíp Eulerovej metódy. Nový bod obálky odhadneme ako

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h\vec{m}_1, \\ y_1 &= y_0 + h\vec{m}_2. \end{aligned}$$

Následne dopočítame k novému bodu obálky (x_1, y_1) prislúchajúci parameter t_1 , ktorý zodpovedá krivke systému, na ktorej leží nový bod implicitnej rovnice

$$F(x_1, y_1, t_1) = 0.$$

Výpočet pokračuje, kým parameter $t_i \leq t_{max}$, teda máme iteračnú metódu, kde

$$\begin{aligned} (x_{i+1}, y_{i+1}) &= (x_i, y_i) + h\vec{m}, \\ F(x_{i+1}, y_{i+1}, t_{i+1}) &= 0, \end{aligned}$$

kde i patrí do indexovej množiny $M = \{i \mid t_i \in [t_{min}, t_{max}]\}$.

2.1.3 Modifikácia Eulerovej metódy

Ako už napovedá názov, budeme postupovať podobne ako v Eulerovej metóde. Najprv vypočítame pomocné hodnoty k_1 a k_2 a pomocou nich približnú hodnotu riešenia v ďalšom uzlovom bode.

V prvej modifikácii Eulerovej metódy počítame podľa vzorcov

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\y_{n+1} &= y_n + hk_2,\end{aligned}$$

v druhej modifikácii podľa vzorcov

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2).\end{aligned}$$

Obe modifikované Eulerove metódy sú druhého rádu. Geometricky sa tieto metódy interpretujú podobne ako Eulerova metóda. Na obrázkoch vidíme jeden krok prvej a druhej modifikovanej Eulerovej metódy.

V prvej modifikácii najprv nájdeme pomocný bod P , a to tak, že z bodu $[x_n, y_n]$ vyjdeme po priamke so smernicou $f(x_n, y_n)$, t.j. rovnako ako pri Eulerovej metóde, ale dôjdeme iba do bodu s x -ovou súradnicou $x_n + \frac{h}{2}$. Približnú hodnotu riešenia v bode x_{n+1} potom získame tak, že z bodu $[x_n, y_n]$ ideme po priamke so smernicou určenou smerovým poľom v bode P , kým nedôjdeme do bodu s x -ovou súradnicou x_{n+1} .

V druhej modifikácii skonštruujeme dva pomocné body P_1 a P_2 . Bod P_1 dostaneme jedným krokom Eulerovej metódy. Bod P_2 potom získame tak, že z bodu $[x_n, y_n]$ ideme po priamke so smernicou danou smerovým poľom v bode P_1 do bodu s x -ovou súradnicou x_{n+1} . Nový bod $[x_{n+1}, y_{n+1}]$ potom leží v strede úsečky P_1P_2 .

2.2 Runge-Kuttova metóda

Runge-Kuttove metódy sú zo skupiny jednokrokových metód. Pri týchto metódach získame niekoľko odhadov derivácie k_i v rôznych bodoch. Pre celý krok potom použijeme vážený priemer týchto derivácií s váhami w_i . Všeobecný tvar Runge-Kuttovej metódy je

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + \dots + w_mk_m),$$

kde

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_i = f(x_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad i = 2, \dots, m.$$

a w_i , α_i , a β_{ij} sú konštanty volené tak, aby metóda mala maximálny rád.

V modifikovanej Eulerovej metóde to bolo $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ a $\beta_{21} = \frac{1}{2}$; v druhej modifikácii $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$ a $\beta_{21} = 1$.

V praxi sa najviac používa nasledujúca metóda Runge-Kutta 4. rádu.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

kde

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1),$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2),$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

Literatúra

- [1] Babušíková J., Slodička M., Weisz J. 2000. *Numerické metódy*. Univerzita Komenského v Bratislave. ISBN 80-223-1384-X. Dostupné na internete: <http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/>. [12.5.2024].
- [2] Biernet A. 2016. Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Naturwissenschaftliche Fakultät III. Halle (Saale). Dissertation. Dostupné na internete: <https://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/2416652>.
- [3] Bruce, J. W., Giblin, P. J. 1981. What Is an Envelope? *The Mathematical Gazette*, 65(433), 186-192. Dostupné na internete: <http://www.jstor.org/stable/3617131>.
- [4] do Carmo M. P. 2017. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York. Dover Publications Inc., Mineola. ISBN-13: 978-0-486-80699-0.
- [5] Grossfield, A. 1997. What Are Differential Equations: A Review Of Curve Families, Paper presented at 1997 Annual Conference, Milwaukee, Wisconsin. 10.18260/1-2-6898. Dostupné na internete: <https://216.185.13.174/what-are-differential-equations-a-review-of-curve-families>.
- [6] Hlavička R., Růžicková I. Numerické metody. Brno. Dostupné na internete: <http://physics.ujep.cz/jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf>.
- [7] Chalmovianská, J. Skriptá k predmetu Algebraická geometria. Dostupné na internete: <http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~pilnikova/ag1.html>.
- [8] Chudinov P. 2009. Numerical-analytical Algorithm for Constructing the Envelope of the Projectile Trajectories in Midair. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.0520>.
- [9] Karčiauskas K., Krasauskas R. 2000. Rational rolling ball blending of natural quadrics. *Mathematical Modelling and Analysis*, Volume 5, Pages 97-107. Dostupné na internete: https://www.researchgate.net/publication/233265253_Rational_rolling_ball_blending_of_natural_quadrics

- [10] Lee, J. 2012. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. New York. Springer. 2. edition. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [11] Odehnal B., Stachel H., Glaeser G. 2020. *The Universe of Quadrics*. Vienna. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-61052-7. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61053-4>.
- [12] Peternell, M., Pottmann H. 1997. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, Volume 23, Issues 2–3, Pages 255–266, ISSN 0747-7171. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1006/jSCO.1996.0087>.
- [13] Pottmann H., Peternell M. 2009. Envelopes - Computational Theory and Applications. Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Dostupné na internete: <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/ig/peternell/env.pdf>.
- [14] Pottmann, H., Wallner, J. 2001. *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag.
- [15] Skopenkov M. et al. 2020. Characterizing envelopes of moving rotational cones and applications in CNC machining, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 83, 101944, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101944>.
- [16] Vráblíková J. 2022. Envelopes of implicit surfaces. Mathematical Institute of Charles University. Prague. Master's thesis. Dostupné na internete: <https://dodo.is.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/171858/120411574.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- [17] Obrázok Webbov Most. <http://www.yannarthusbertrand2.org/collection/australia/#mwl-3844>.
- [18] Obrázok Rolling ball blends. https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb_abs/parblrb_abs.html.

Príloha A

Výpočet obálky pomocou Gröbnerovej bázy pre príklad 3 so sústavou rovníc

$$\begin{aligned}F^\lambda &= 4t^6 - 4t^5y + t^4y^2 + 7t^4 - 8t^3y + 2t^2y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1, \\F_t^\lambda &= 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2t + 4t - 4y.\end{aligned}$$

Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$G_{lex} = \{l_1, \dots, l_6\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}l_1 &= 8232129896496000t^3 - 15949751674461t^2y^7 - 161384046512557t^2y^5 \\&\quad - 1204463505481071t^2y^3 - 6169809854717575t^2y + 15430671472tx^2y^{12} \\&\quad + 426513396863tx^2y^{10} - 15006102325790tx^2y^8 - 319921877859794tx^2y^6 \\&\quad + 3932980083404115tx^2y^4 + 26096343414243210tx^2y^2 \\&\quad - 5927133525477120tx^2 + 8232129896496000t - 89991676024704x^6y^3 \\&\quad + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 + 5668842986368x^4y^7 \\&\quad - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 - 17414290688695056x^4y \\&\quad - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 + 43203483205279x^2y^7 \\&\quad - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 + 19070089710359527x^2y \\&\quad - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 - 1204463505481071y^3 \\&\quad - 6169809854717575y \\l_2 &= 1029016237062t^2x^2 + 3835312tx^2y^{11} + 224556467tx^2y^9 + 2456837050tx^2y^7 \\&\quad - 42939029714tx^2y^5 - 622020302148tx^2y^3 - 2792792777023tx^2y \\&\quad - 22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\&\quad + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\&\quad + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\&\quad - 1254254177448x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 = & 171502706177t^2y^8 + 2058032474124t^2y^6 + 14749232731222t^2y^4 \\
& + 51450811853100t^2y^2 + 107189191360625t^2 + 8570784208tx^2y^{11} \\
& + 447143859077tx^2y^9 + 2637043681390tx^2y^7 - 114540691274161tx^2y^5 \\
& - 650595377992068tx^2y^3 - 329349595559310tx^2y - 49984813501056x^6y^2 \\
& + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 + 1466755633792x^4y^6 \\
& + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 + 188859580240104x^4 \\
& - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 + 53352589022478x^2y^6 \\
& + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 - 296888240050025x^2 \\
& + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 \\
& + 10718919136062514749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
l_4 = & 3319374168tx^4 + 4112tx^2y^{12} + 419465tx^2y^{10} + 11960430tx^2y^8 + 9104606tx^2y^6 \\
& - 3087637940tx^2y^4 - 14225835735tx^2y^2 - 3841868250tx^2 - 23981184x^6y^3 \\
& - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 + 484488324x^4y^3 \\
& + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 + 1348048703x^2y^5 \\
& + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
l_5 = & 16tx^2y^{13} + 1321tx^2y^{11} + 29688tx^2y^9 - 92522tx^2y^7 - 7839424tx^2y^5 \\
& - 31597167tx^2y^3 - 1560600tx^2y - 93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 \\
& - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 \\
& - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 \\
& + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2 \\
l_6 = & 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
& - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
& - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2
\end{aligned}$$

Eliminovaná Grobnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie

$$\begin{aligned}
g_1 &= -89991676024704x^6y^3 + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 \\
&\quad + 5668842986368x^4y^7 - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 \\
&\quad - 17414290688695056x^4y - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 \\
&\quad + 43203483205279x^2y^7 - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 \\
&\quad + 19070089710359527x^2y - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 \\
&\quad - 1204463505481071y^3 - 6169809854717575y \\
g_2 &= -22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\
&\quad + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\
&\quad + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\
&\quad - 1254254177448x^2 \\
g_3 &= -49984813501056x^6y^2 + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 \\
&\quad + 1466755633792x^4y^6 + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 \\
&\quad + 188859580240104x^4 - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 \\
&\quad + 53352589022478x^2y^6 + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 \\
&\quad - 296888240050025x^2 + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 \\
&\quad + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
g_4 &= -23981184x^6y^3 - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 \\
&\quad + 484488324x^4y^3 + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 \\
&\quad + 1348048703x^2y^5 + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
g_5 &= -93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 \\
&\quad + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} \\
&\quad + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2 \\
g_6 &= 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
&\quad - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
&\quad - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2
\end{aligned}$$

Gröbnerova báza vzhľadom na graduované reverzné lexikografické usporiadanie obsahuje 10 polynómov

$$G_{grevlex} = \{g_1, \dots, g_{10}\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}
g_1 = & -2706889t^2x^2y^2 + 48735498t^2x^2 - 248832tx^6y - 618540tx^4y^3 - 18691704tx^4y \\
& - 11148241tx^2y^3 - 113858467tx^2y + 82944x^6y^2 + 1391904x^6 + 2592x^4y^6 \\
& + 227460x^4y^4 + 7282128x^4y^2 + 48599388x^4 + 2592x^2y^8 + 136740x^2y^6 \\
& + 5322840x^2y^4 + 25315237x^2y^2 - 49991292x^2 \\
g_2 = & -5926019t^2x^2y - 381024tx^6 + 17542tx^4y^4 + 536256tx^4y^2 + 2639556tx^4 \\
& + 549118tx^2y^4 + 7633231tx^2y^2 - 2544625tx^2 + 127008x^6y - 4802x^4y^5 \\
& - 137396x^4y^3 - 3196866x^4y - 4802x^2y^7 - 232456x^2y^5 - 1612916x^2y^3 \\
& + 3355951x^2y \\
g_3 = & -257t^2x^2y^2 + 4998t^2x^2 - 1728tx^4y + 36tx^2y^5 - 1037tx^2y^3 - 11867tx^2y \\
& + 576x^4y^2 + 5292x^4 + 540x^2y^4 + 2729x^2y^2 - 5292x^2 \\
g_4 = & 49t^2x^2y^3 + 1392t^2x^2y - 648tx^4 - 11tx^2y^4 - 983tx^2y^2 + 750tx^2 \\
& + 216x^4y + 227x^2y^3 - 318x^2y \\
g_5 = & 216t^2x^4 + 227t^2x^2y^2 - 318t^2x^2 - 180tx^4y - 181tx^2y^3 + 497tx^2y + 36x^4y^2 \\
& - 72x^4 + 36x^2y^4 - 179x^2y^2 + 72x^2 \\
g_6 = & 59t^4 + t^3y^3 - 61t^3y - 24t^2x^2 + 18t^2y^2 + 48t^2 + 8tx^2y + ty^3 - 61ty + 11x^2 \\
& + 18y^2 - 11 \\
g_7 = & 168t^4 - 192t^3y - 42t^2x^2 + t^2y^4 + 54t^2y^2 + 121t^2 + 11tx^2y - 192ty + x^2y^2 \\
& + 47x^2 + y^4 + 54y^2 - 47 \\
g_8 = & 37t^5 - 18t^3y^2 + 64t^3 + 5t^2y^3 - 17t^2y - 15tx^2 - 18ty^2 + 27t + 5x^2y + 5y^3 \\
& - 17y \\
g_9 = & 6t^3x^2 - 5t^2x^2y + tx^2y^2 + tx^2 - x^2y \\
g_{10} = & 37t^4y - 29t^3y^2 + 25t^3 + 6t^2y^3 + 24t^2y - 18tx^2 - 29ty^2 + 25t + 6x^2y + 6y^3 \\
& - 13y
\end{aligned}$$