

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH  
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024

Bc. JANA TUTKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH  
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Počítačová grafika a geometria  
Študijný odbor: 1113 Matematika  
Školiace pracovisko: Katedra algebry a geometrie  
Školiteľ: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislavе  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

<b>Meno a priezvisko študenta:</b>	Bc. Jana Tutková
<b>Študijný program:</b>	počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
<b>Študijný odbor:</b>	matematika
<b>Typ záverečnej práce:</b>	diplomová
<b>Jazyk záverečnej práce:</b>	slovenský
<b>Sekundárny jazyk:</b>	anglický
<b>Názov:</b>	Obálka systému plôch <i>Envelope of a system of surfaces</i>
<b>Anotácia:</b>	Cieľom práce je študovať základné vlastnosti obálky systému plôch. Zameriame sa na jednoparametrické systémy kvadrič v trojrozmernom priestore. Okrem teoretických podkladov očakávame aj numerické experimenty a príklady postupov. Načrtнемe aplikácie, v ktorých sa obálky používajú.
<b>Ciel:</b>	Študovať a opísť niektoré vlastnosti obálky systému kvadratických plôch.
<b>Literatúra:</b>	do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Dover Publications Inc., 2017 Pottmann, Wallner: Computational Line Geometry, Springer, 2001
<b>Kľúčové slová:</b>	obálka plôch, systém kvadratických plôch
<b>Vedúci:</b>	doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.
<b>Katedra:</b>	FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie
<b>Vedúci katedry:</b>	doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.
<b>Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:</b>	prípustná pre vlastnú VŠ
<b>Dátum zadania:</b>	13.12.2022
<b>Dátum schválenia:</b>	14.12.2022
	doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD. garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce



**Pod'akovanie:** Na tomto mieste by som sa chcela pod'akovat' môjmu školiteľovi doc. RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD. za odborné vedenie diplomovej práce, cenné rady, pripomienky a čas strávený na konzultáciách. Moje pod'akovanie patrí aj Mgr. Adriane Malovec Bosákovej, PhD. za pomoc s 3D tlačou a vedúcemu diplomových seminárov, doc. RNDr. Andrejovi Ferkovi, PhD. za pravidelnú inšpiráciu a podporu.

## Abstrakt

Táto práca sa zaobrá výpočtom obálky jednoparametrického systému elíps v  $\mathbb{R}^2$  a elipsoidov v  $\mathbb{R}^3$ , pričom elipsy a elipsoidy sú konštantne škálované faktorom  $a$  v dotykovom smere krivky  $m(t)$ , faktorom  $b$  v normálovom smere a v prípade  $\mathbb{R}^3$  faktorom  $b$  v binormálovom smere krivky. Výpočet je založený na známej teórii obálky jednoparametrického systému sfér v  $\mathbb{R}^3$ . Na určenie obálky využívame symbolické a numerické výpočty v programovacom jazyku Python a vypočítané plochy vizualizujeme v 3D modelovacom softvéri Blender. Vybraných 14 plôch sme vytlačili na 3D tlačiarni.

**Kľúčové slová:** obálka plôch, systém kvadratických plôch

## Abstract

This thesis deals with the computation of the envelope of a one-parameter system of ellipses in  $\mathbb{R}^2$  and ellipsoids in  $\mathbb{R}^3$ , where these ellipses and ellipsoids are scaled by a constant factor  $a$  in the tangent direction of the curve  $m(t)$ , by a factor  $b$  in the normal direction, and in the case of  $\mathbb{R}^3$  by a factor  $b$  in the binormal direction of the curve. The computation is based on known theory of envelopes of a one-parameter system of spheres in  $\mathbb{R}^3$ . To determine the envelope, we use symbolic and numerical calculations in the Python programming language and visualize the calculated surfaces in the 3D modeling software Blender. We printed 14 selected surfaces on a 3D printer.

**Keywords:** envelope of surfaces, system of surfaces

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Prehľad problematiky</b>	<b>3</b>
1.1 Jednoparametrický systém . . . . .	3
1.2 Obálka jednoparametrického systému nadplôch . . . . .	4
1.3 Výpočet obálky . . . . .	8
1.3.1 Prístup algebraickej geometrie . . . . .	8
1.3.2 Prístup projektívnej geometrie . . . . .	9
1.3.3 Kinematický prístup . . . . .	11
1.3.4 Obálky a ODR . . . . .	12
1.3.5 Lokálne prieniky . . . . .	13
1.4 Obálka sfér . . . . .	15
1.5 Charakteristická kružnica . . . . .	15
<b>2 Matematický model</b>	<b>21</b>
2.1 Krivky druhého stupňa . . . . .	21
2.1.1 Invarianty kriviek druhého stupňa . . . . .	22
2.2 Plochy druhého stupňa . . . . .	23
2.2.1 Invarianty plôch druhého stupňa . . . . .	23
2.3 Obálka elíps . . . . .	24
2.3.1 Zmena bázy elíps . . . . .	25
2.3.2 Výpočet obálky elíps . . . . .	26
2.4 Obálka elipsoidov . . . . .	27
2.4.1 Zmena bázy elipsoidov . . . . .	28
2.4.2 Výpočet obálky elipsoidov . . . . .	30
2.5 Softvér Maxima . . . . .	32
<b>3 Softvér</b>	<b>33</b>
3.1 Špecifikácia . . . . .	33
3.1.1 Vstup . . . . .	33
3.1.2 Výstup . . . . .	34

3.1.3	Postup práce . . . . .	34
3.1.4	Funkčnosť softvéru . . . . .	34
3.2	Výber softvéru a jeho inštalácia . . . . .	35
3.2.1	Blender . . . . .	35
3.2.2	Python . . . . .	36
3.2.3	Knižnice . . . . .	36
3.2.4	Programovacie prostredie . . . . .	37
3.3	Implementácia . . . . .	38
3.4	3D tlač . . . . .	40
3.4.1	PrusaSlicer . . . . .	40
3.4.2	Pronterface . . . . .	41
3.5	Zhrnutie procesu . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Výsledky práce</b>	<b>45</b>
4.1	Príklady krviek . . . . .	45
4.2	Príklady plôch . . . . .	46
4.3	3D tlač . . . . .	48
4.4	Otvorené problémy . . . . .	49
4.5	Budúca práca . . . . .	49
<b>Záver</b>		<b>51</b>
<b>Literatúra</b>		<b>53</b>
<b>Príloha A</b>		<b>57</b>

# Zoznam obrázkov

1	Projekty v architektúre.	2
1.1	Jednoparametrický systém kružníc.	3
1.2	Sústredné kružnice.	7
1.3	Kontúra systému.	8
1.4	Obálka nájdená pomocou rezultantu.	10
1.5	Reálnosť obálky.	11
1.6	Systém priamok v normálovom tvare.	12
1.7	Regulárne riešenia a obálka.	14
1.8	Charakteristická kružnica.	16
1.9	Stred a polomer charakteristickej kružnice.	17
1.10	Obálka sfér.	18
1.11	Technika rolling ball blends.	19
2.1	Softvér Maxima.	32
3.1	Softvér Blender.	35
3.2	Softvér Visual Studio Code.	37
3.3	Jupyter Notebook.	39
3.4	Softvér PrusaSlicer.	41
3.5	Softvér Pronterface.	42
3.6	Schéma procesu od vstupu až po výstup.	43
4.1	Jednoparametrický systém elips na parabole.	47
4.2	Prvý pokus 3D tlače.	48
4.3	Plocha v 3D tlačiarni.	49
4.4	Doplnenie pletiva.	50



# Zoznam tabuliek

2.1	Klasifikácia kužeľosečiek.	22
2.2	Klasifikácia kvadrík.	24
2.3	Klasifikácia valcových a reducibilných plôch.	24



# Úvod

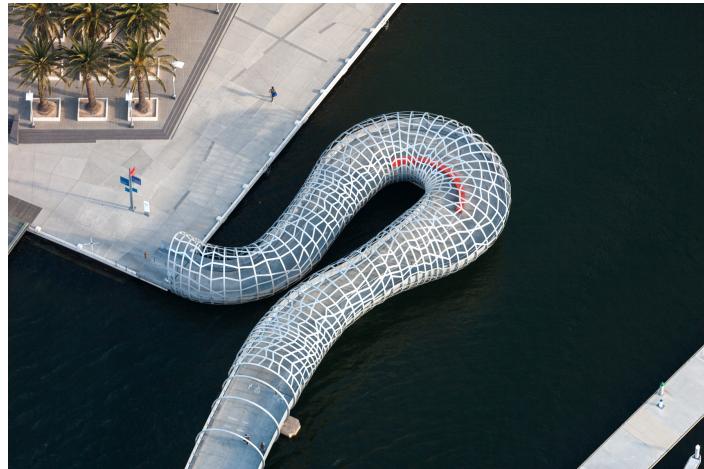
Pojem obálky systému kriviek po prvýkrát zaviedol v roku 1682 Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, nemecký matematik, fyzik a lekár. Neskôr francúzsky matematik, Baron Pierre Charles François Dupin, v dvoch knižných publikáciách, *Développements de géométrie* (Rozvoj geometrie, 1813) a *Applications de géométrie et de mécanique* (Aplikácie geometrie a mechaniky, 1822), opísal triedu plôch zvaných cyklidy – obálky jednoparametrických systémov guľových plôch dotýkajúcich sa danej trojice guľových plôch [7].

Obálky plôch majú široké využitie vo viacerých odvetviach, ako optika, architektúra, robotika. V optike sa obálka používa na opis dráhy svetelných lúčov, ktoré prechádzajú cez zakrivený povrch. Výpočet obálky pohybujúcej sa plochy sa vyskytuje aj pri CNC obrábaní. *Computer Numerical Control machining* je výrobný subtraktívny proces, pri ktorom počítač riadi stroje, vŕtačky, frézy a sústruhy tak, aby odstraňovali materiál z obrobku, kým nevytvoria požadovaný tvar. Pri tomto procese rezný nástroj vytvára rotačnú plochu – obálku pohybom okolo svojej osi [39]. Obálky sa tiež používajú na výpočet trajektórie projektov vo vzduchu. Napríklad, pri riešení problému pohybu projektilu vrhaného pod určitým uhlom k horizontu, používame rovnicu obálky na určenie maximálneho dosahu letu projektilu [15]. Medzi ďalšie aplikácie obálok patrí *tollerancing* – krivka s kontrolou chyby, bezkolízne plánovanie pohybu robota, konštrukcia znakov v písmach pre typografické systémy, teda konštrukcia fontu [30]. Medzi obálky patria aj kanálové plochy, rúrkové plochy a plochy používané v počítačom podporovanom geometrickom dizajne CAGD, ktoré sa vyskytujú ako zmiešavacie a prechodové plochy medzi potrubiami. Tieto plochy sú využívané aj v architektúre.

Ako príklad uvádzame Webbov most na obr. 1(a) v Melbourne. Tvar mosta vzdáva hold historii domorodého obyvateľstva a je vytvorený podľa tradičnej rybárskej pasce Koorie, ktorá sa používala na lov úhorov.

Ďalším zaujímavým architektonickým projektom je hudobné divadlo a koncertná sála v gruzínskom Tbilisi, obr. 1(b). Táto budova sa skladá z dvoch prepojených častí, ktoré poskytujú panoramatický výhľad na rieku a historické centrum mesta [23].

Obálku jednoparametrického systému sfér hľadáme tak, že v každom parametri rátame prienik sféry a derivácie systému. Ukáže sa, že prienikom je vždy kružnica, a teda obálku môžeme zostrojiť použitím týchto kružníc.



(a) Webbov most [43].



(b) Hudobné divadlo a výstavná sieň [45].

Obr. 1: Projekty v architektúre.

Tento koncept chceme zovšeobecniť na plochy druhého rádu, pričom prvým zovšeobecnením, ktoré sa ponúka, je obálka elipsoidov. Naša práca sa zaoberá otázkou, ako zostrojiť obálku elipsoidov, ak budú škálované faktorom  $a$  v dotykovom smere krivky a v zostávajúcich dvoch smeroch budú škálované faktorom  $b$ . Teda skúmame elipsoidy, ktoré budu natiahnuté v smere krivky.

Práca je rozdelená do štyroch kapitol. V prvej kapitole spomíname prístupy výpočtu obálky v rovine a uvádzame teoretické pozadie obálky sfér, potrebné na zostrojenie obálky elipsoidov. V druhej kapitole sa nachádzajú odvodené rovnice pre obálku elips a elipsoidov a ich geometrická interpretácia. Tretia kapitola pozostáva zo špecifikácie algoritmov, vymenovania a zdôvodnenia použitého softvéru, postupu implementácie a parametrov 3D tlače. Vo štvrtej kapitole vyhodnocujeme uvedené postupy a na záver uvádzame niekoľko vizualizácií.

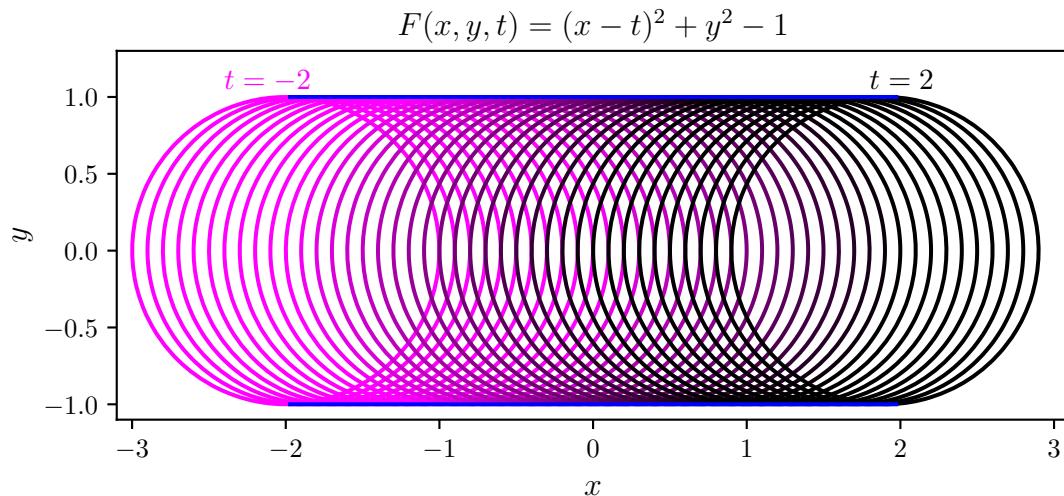
# Kapitola 1

## Prehľad problematiky

Prehľad definícií a viet uvedených v tejto kapitole sme čerpali najmä z [5], [6], [8], [25] a [41].

### 1.1 Jednoparametrický systém

Ak nakreslíme kružnice so stredom na x-ovej osi s polomerom 1, ako na obr. 1.1, pozornosť nám upútajú úsečky  $y = \pm 1$  pre  $x \in [-2, 2]$  idúce ponad a popod systém kružníc.



Obr. 1.1: Systém je zobrazený na intervale  $[-2, 2]$  s krokom  $\Delta t = 0.1$ . Ružovou farbou je vyznačená kružnica systému v parametri  $t = -2$ , čierrou farbou v parametri  $t = 2$ , v hodnotách parametrov medzi nimi je farba kružnice lineárne interpolovaná.

Každá z týchto úsečiek sa dotýka každej kružnice zo systému  $F(x, y, t)$  v jednom bode a v tomto bode majú spoločnú dotyčnicu. V nasledovnom texte túto myšlienku matematicky opíšeme, na základe nej zostrojíme tzv. obálku systému kriviek alebo plôch a porovnáme prístupy ich výpočtu. Budeme pracovať v reálnom vektorovom

priestore so štandardným skalárny súčinom, teda v euklidovskom priestore  $\mathbb{E}^n$ , rozmerov  $n = 2, 3$ . Najprv ilustrujeme príklady obálok a ich výpočet pre  $n = 2$ , neskôr pre  $n = 3$ . Po celý čas predpokladáme, že všetky zobrazenia sú dostatočne veľakrát diferencovateľné a pre prehľadnosť zápisov vynechávame parametre, ak sú z kontextu zrejmé.

**Definícia 1.1.** Nех  $F: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia v  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  a v parametri  $t$ , kde  $I \subseteq \mathbb{R}$  je interval. Jednoparametrický systém nadplôch je systém množín

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid F(X, t) = 0, t \in I\}.$$

Pre  $n = 2$  budeme značiť premenné  $x_1, x_2$  ako  $x, y$ , pre  $n = 3$  pribudne  $x_3$  ako  $z$ .

Pre horeuvedený prípad, vizualizovaný na obr. 1.1, teda máme jednoparametrický systém kružníc

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, t) = 0, t \in [-2, 2]\},$$

so stredmi kružníc, ktoré ležia na úsečke parametrizovanej  $(t, 0)$  pre  $t \in [-2, 2]$  a konštantným polomerom pre každú kružnicu  $r = 1$  daný implicitnou funkciou

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1.$$

Systém budeme ilustrovať zobrazením niektorých prvkov systému pre diskrétnu hodnotu parametra  $t$ . Pre  $t = -2$  je zodpovedajúci prvek systému  $\mathcal{F}_{-2} \in \mathcal{F}$  kružnica s implicitnou rovnicou

$$F_{-2}(x, y) = F(x, y, -2) = (x + 2)^2 + y^2 - 1.$$

Často budeme pre pevný parameter  $t_0$  označovať prislúchajúcu rovnicu  $F_{t_0}(X)$  a množinu bodov, ktoré rovnicu spĺňajú označíme  $\mathcal{F}_{t_0}$ .

## 1.2 Obálka jednoparametrického systému nadplôch

Najskôr definujeme obálku jednoparametrického systému kriviek v  $\mathbb{E}^2$ . Uvedieme charakterizáciu obálok, ktorú možno použiť na výpočet pre jednoduchšie jednoparametrické systémy. Následne túto charakterizáciu použijeme ako definíciu pre obálku jednoparametrického systému plôch v  $\mathbb{E}^n$ .

**Definícia 1.2.** Gradient funkcie  $F: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$  vzhľadom na  $x$  a  $y$  je

$$\nabla F(x, y, t) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t) \right).$$

**Definícia 1.3.** Obálkou systému kriviek  $\mathcal{F}$  je parametrizovaná krivka  $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$  taká, že

1.  $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$  pre všetky  $t \in J$ ,
2.  $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$ .

Obálka  $\gamma(t)$  sa dotýka každej krivky zo systému  $F(x, y, t)$  v bode  $(x, y)$  pre nejaké  $t$  a v tomto bode má s krivkou zo systému rovnakú dotyčnicu. To znamená, že každý bod obálky  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  spĺňa rovnicu systému  $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$  pre nejaké  $t$ , a teda platí prvá podmienka  $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$ . Gradient funkcie  $\nabla F(x, y, t)$  možno geometricky interpretovať ako normálový vektor k  $F(x, y, t)$  v regulárnom bode  $(x, y)$  a parametri  $t$ . V spoločnom bode  $(x, y)$  a parametri  $t$  požadujeme lineárnu závislosť dotykového vektora obálky  $\gamma(t)$  a systému  $F(x, y, t)$ , z čoho dostávame  $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$ , druhú podmienku v definícii obálky. Interval  $J$ , na ktorom dostávame výslednú obálku, môže byť menší ako interval  $I$ , na ktorom bol definovaný systém kriviek, teda máme  $J \subseteq I$ .

Pre všetky  $(x, y, t)$  predpokladáme, že  $\nabla F(x, y, t) \neq \vec{0}$ . Ak by bol gradient  $\nabla F(x, y, t)$  v nejakom bode nulový, nevieme jednoznačne nájsť dotykový vektor systému  $F(x, y, t)$ .

**Veta 1.1.** *Regulárna krivka  $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$  kde  $t \in J \subseteq I$  je obálkou jednoparametrického systému  $\mathcal{F}$  práve vtedy, ked' splňa:*

1.  $F(\gamma(t), t) = 0$ ,
2.  $\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0$ .

*Dôkaz.* Táto odlišná charakterizácia je ekvivalentná definícii, ktorú sme postavili na geometrických podmienkach. Stačí zistiť korešpondenciu podmienok.

1. Ako sme už vysvetlili, každý bod obálky  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  spĺňa rovnicu jednoparametrického systému  $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$  pre nejaké  $t$ , teda podmienky

$$F(\gamma(t), t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$$

a

$$\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$$

sú ekvivalentné.

2. Derivujme  $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$  podľa parametra  $t$ , kde  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot 1 = 0.$$

Nakoľko požadujeme, aby gradient funkcie  $\nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$  bol kolmý na  $\dot{\gamma}(t)$  tak

$$\langle \nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

a teda platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) = 0,$$

z čoho dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0.$$

□

Často sa v literatúre môžeme stretnúť s rôznymi opismi obálky, ktoré však bez ďalších predpokladov nemusia definovať rovnakú množinu bodov. Príkladom je ďalšia charakterizácia obálky ako množiny limitných bodov prienikov kriviek systému. Vzťahy medzi jednotlivými charakterizáciami možno nájsť v [6].

Dokonca, daný systém nemusí mať obálku. Príkladom sú sústredné kružnice s ras-túcim polomerom.

**Príklad 1.** Obálku systému sústredných kružník pre  $t \in I = [\frac{1}{100}, 2]$  rátame ako riešenie systému rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= x^2 + y^2 - t, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= -1. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice máme  $t = -1 \neq 0$ , teda systém nemá riešenie. Aj keď by sa nám mohlo zdať, že by obálkou mohli byť body kružnice s najväčším polomerom  $\mathcal{F}_2$  a kružnice s najmenším polomerom  $\mathcal{F}_{\frac{1}{100}}$ , práve podmienka existencie takej krivky  $\gamma(t)$ , ktorá by patrila do systému kružník  $\mathcal{F}$  pre všetky  $t$  z intervalu  $J \subseteq I$ , nie je splnená.

Prístup, ktorý sme využili pre jednoparametrický systém kriviek, možno zovšeobecniť pre ľubovoľný jednoparametrický systém plôch v  $\mathbb{E}^n$ .

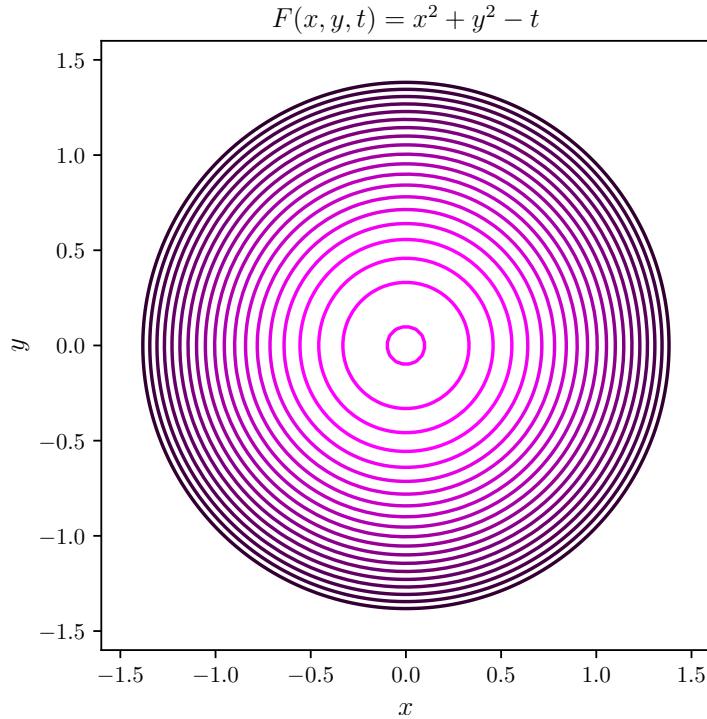
**Definícia 1.4. (Charakterizácia.)** *Obálkou jednoparametrického systému plôch  $\mathcal{F}$  je množina bodov  $\mathcal{E}$  daná*

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \mid F(X, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = 0\}.$$

Ak by sme chápali obálku podľa definície ako množinu bodov, problém by sme mohli riešiť ako systém nelineárnych rovníc v parametri  $t$ , kde chceme z rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0, \end{aligned}$$

eliminovať  $t$ . Na riešenie nelineárneho systému dvoch rovníc síce existujú pokročilé nástroje, no eliminovaním parametra  $t$  strácame informáciu o tom, na akom intervale  $I$  je obálka definovaná.



Obr. 1.2: Sústredné kružnice na intervale  $[\frac{1}{100}, 2]$  a krokom  $\Delta t = 0,1$ . V parametri  $t = \frac{1}{100}$  je farba kružnice ružová, v  $t = 2$  čierna.

**Príklad 2.** Pre náš príklad  $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$  máme

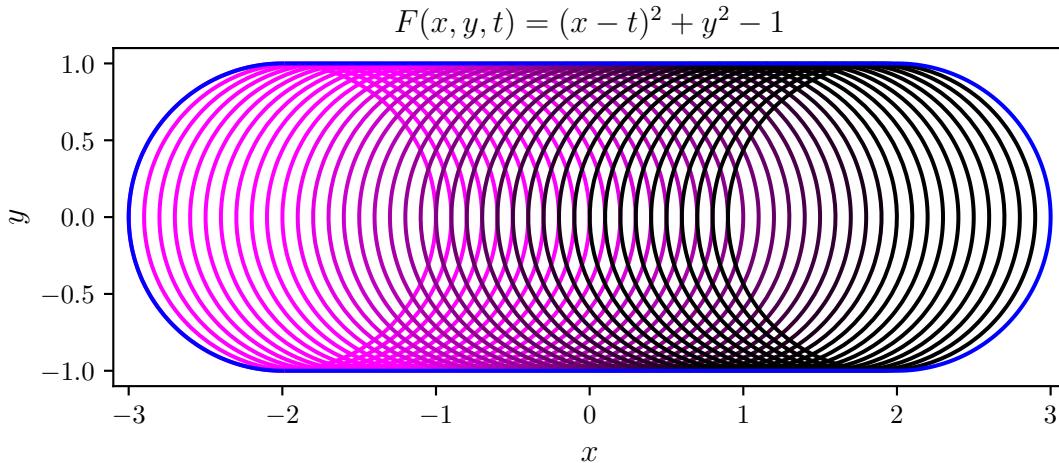
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2(t - x) = 0.$$

Ak  $t = x$ , tak  $y^2 = 1$ . Teda obálku charakterizuje  $y = \pm 1$ , ako sme očakávali.

V skutočnosti sú obálkou úsečky  $y = \pm 1$  definované na intervale  $[-2, 2]$ . Tento problém možno ošetriť tak, že budeme uvažovať systémy kriviek, ktoré sú v parametri  $t$  definované na celej reálnej priamke  $\mathbb{R}$ .

Ďalšou otázkou, ktorá prirodzene vzniká je, či patria aj časti kriviek jednoparametrického systému v koncových bodoch intervalu do obálky. Podľa definície 1.3 a charakterizácie 1.4 nie. Ak by sme predsa len koncové časti pridali, mohli by sme systém v prípadoch ako kružnice, elpsy, sféry a elipsoidy ohraničiť akousi kontúrou systému. Na obr. 1.3 sa nachádza vizualizácia systému s jeho kontúrou vytvorenou z obálky systému a polkružnicami v parametroch  $t = -2$  a  $t = 2$ . Táto kontúra pripomína tvar nanukovej paličky.

**Príklad 3.** Počítajme obálku systému kriviek, znázorneného na obrázku 1.4, daného



Obr. 1.3: Kontúra systému.

vzťahmi

$$F(x, y, t) = \frac{x^2}{(t^2 + 1)^2} + (y - 2t)^2 - 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{4x^2 t}{(t^2 + 1)^3} - 4(y - 2t).$$

Vynásobením prvej rovnice  $\lambda(t) = (t^2 + 1)^2$  a derivovaním získame

$$F^\lambda = 4t^6 - 4t^5 y + t^4 y^2 + 7t^4 - 8t^3 y + 2t^2 y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,$$

$$F_t^\lambda = 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2 t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2 t + 4t - 4y.$$

Na obrázku 1.4 je znázornený tento systém elips pre  $t \in [-2, 2]$  s krokom  $\Delta t = 0.1$ . Obálku nájdeme ako riešenie rovníc  $F^\lambda \cap F_t^\lambda$ . Rovnice sú však príliš vysokého stupňa v parametri  $t$ , preto nevieme implicitnú rovnicu obálky bez vhodného nástroja vyjadriť. V ďalšej časti rozoberieme známe prístupy k výpočtu.

## 1.3 Výpočet obálky

Vo väčšine prípadov sú rovnice charakterizujúce obálku systému plôch príliš vysokého stupňa v parametri  $t$  a nedokážeme z nich ľahko odvodiť rovnicu obálky, preto pristupujeme aj k numerickým riešeniam. Na začiatok si však rozobereme existujúce analytické prístupy.

### 1.3.1 Prístup algebraickej geometrie

Dokonca aj v prípade jednoduchého príkladu 3, obe polynomické rovnice charakterizujúce obálku sú vysokého stupňa v parametri  $t$ , preto je odstránenie parameteru  $t$

náročné bez vhodného nástroja. Štandardným aparátom na túto úlohu sú Gröbnerove bázy. Ide o špeciálnu množinu polynómov vo viacerých premenných, ktoré majú niekoľko dôležitých vlastností a zohrávajú kľúčovú úlohu pri riešení sústav polynomických rovníc, zjednodušovania polynómov a dokazovania rôznych algebraických tvrdení. Vybudovanie tejto teórie je pomerne zdĺhavé, preto odkazujeme na teoretické pozadie v [13]. Keďže výpočet Gröbnerovej bázy aj pre príklad 3 trvá pomerne dlho, neuvádzame tu postup a výsledok možno nájsť v Prílohe A.

Gröbnerovu bázu možno určiť vzhladom na usporiadanie monómov, existujú aj iné metódy na riešenie polynomických rovníc, ktoré nezávisia na usporiadanií monómov. Jednou z metód je výpočet rezultantu, determinantu špeciálnej matice polynómov. Hoci výpočet determinantov veľkých matíc je výpočtovo aj časovo náročný, poznáme metódy, ako vypočítať determinant efektívnejšie. Navyše táto metóda, rovnako ako metóda založená na eliminačnej teórii s použitím Gröbnerových báz, nám vypočíta správnu obátku len vtedy, ak uvažujeme parameter  $t$  jednoparametrického systému z celej reálnej priamky.

V príklade 3 uvedieme výsledný polynóm  $\text{Res}(F^\lambda, F_t^\lambda, t)$  a na obr. ?? obátku nájdenej pomocou rezultantu.

$$\begin{aligned} \text{Res}(F^\lambda, F_t^\lambda, t) = & 191102976x^{10} + 262144x^8y^6 - 9584640x^8y^4 + 83165184x^8y^2 - \\ & 633470976x^8 - 16384x^6y^{10} - 81920x^6y^8 - 14483456x^6y^6 - 113311744x^6y^4 + 96419840x^6y^2 + \\ & 698368000x^6 - 16384x^4y^{12} - 294912x^4y^{10} - 2998272x^4y^8 - 18284544x^4y^6 - 74956800x^4y^4 - \\ & 184320000x^4y^2 - 256000000x^4. \end{aligned}$$

### 1.3.2 Prístup projektívnej geometrie

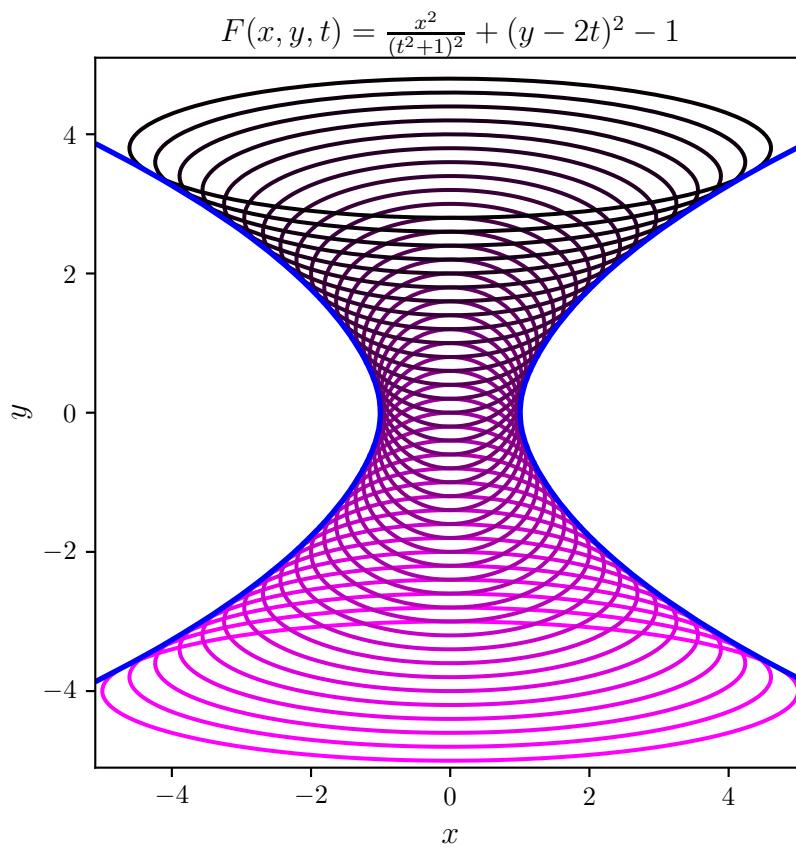
Body duálneho projektívneho priestoru  $\mathbb{P}^3$  možno stotožniť s nadrovinami v  $\mathbb{R}^3$ . Plochu v duálnom projektívnom priestore možno teda interpretovať ako množinu všetkých jej dotykových nadrovín. Pomocou duálneho prístupu sa dá dokázať, že obálky jednoparametrických systémov sú pre racionálne vstupné údaje racionálne. Potrebné vybudovanie teórie možno nájsť v [32], z čoho čerpajú články s mnohými výsledkami [27], [28] a príklady pre výpočet obálky možno nájsť v [41].

**Príklad 4.** Uvažujme dva systémy kružník  $\mathcal{F}$  s konštantným polomerom  $\frac{1}{2}$  a  $\mathcal{G}$  s funkciou polomeru  $\frac{t}{2}$ , ktorých stredy ležia na rovinnej krivke  $m(t) = (t^3, t^2)$ , kde  $t \in \mathbb{R}$ . So systémom

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{1}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}$$

korešponduje krivka  $m_1 = (t^3, t^2, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^3$ . Pre

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{t^2}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}$$



Obr. 1.4: Systém elíps, pre  $t = -2$  je elipsa vykreslená ružovou farbou, pre  $t = 2$  čiernou. Modrou farbou je znázornená obálka vypočítaná rezultantom.

máme krivku  $m_2(t) = (t^3, t^2, \frac{t}{2})$ . Kružnice zodpovedajúce  $t < 0$  sú negatívne orientované, pre  $t > 0$  pozitívne orientované, pre  $t = 0$  je prvok  $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$  bod  $(0, 0) \in m(t)$ , čo je kružnica s nulovým polomerom a bez určenej orientácie. Krivka  $m(t)$  je ortogonálna projekcia oboch kriviek  $m_1$  a  $m_2$  a často sa nazýva stredná os (*medial axis*) jednoparametrického systému.

Rovnakým spôsobom môžeme definovať jednoparametrický systém sfér v  $\mathbb{R}^3$  ako obraz kriviek v  $\mathbb{R}^4$ . Jedným z dôležitých výsledkov je, že pomocou tohto prístupu možno rozhodnúť o reálnosti obálky a to tak, že systém korešpondujúci s krivkou  $m(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  má reálnu obálku práve vtedy, keď pre všetky  $t \in I$  platí

$$\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle \geq 0$$

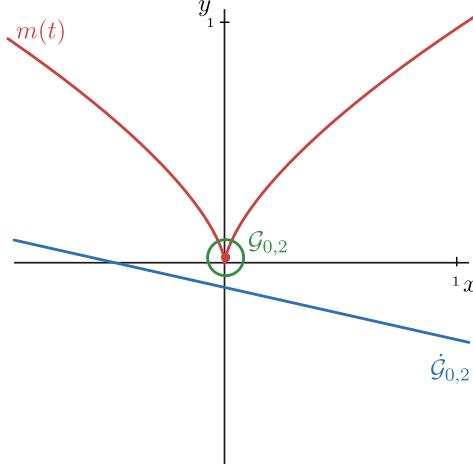
a rovnosť platí len pre izolované hodnoty  $t$ , kde za skalárny súčin vezmeme pseudoskalárny súčin vyjadrený ako  $\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle = m_1^2(t) + m_2^2(t) + \dots + m_n^2(t) - m_{n+1}^2(t)$ .

Pre príklad tak 4 máme

$$\langle \dot{m}_1(t), \dot{m}_1(t) \rangle = 9t^4 + 4t^2 \geq 0, \text{ pre } t \in \mathbb{R},$$

$$\langle \dot{m}_2(t), \dot{m}_2(t) \rangle = 9t^4 + 4t^2 - \frac{1}{4} \geq 0, \text{ pre } t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \left( \frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) \right\},$$

preto na týchto intervaloch existuje reálna obálka systémov  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{G}$ .



Obr. 1.5: Reálnosť obálky.

### 1.3.3 Kinematický prístup

Ďalším zo spôsobov, ako chápať jednoparametrické systémy plôch v  $\mathbb{R}^n$ , je nazerať na ne ako na množinu všetkých transformácií daného povrchu  $\mathcal{P}$ . Povrch  $\mathcal{P}$  sa transformuje na ostatné prvky systému prostredníctvom prvkov vhodnej grupy transformácií. Táto množina transformácií má okrem štruktúry grupy aj štruktúru hladkej variety (*smooth manifold*). Tieto grupy nazývame Lieove grupy.

**Príklad 5.** Ilustrujme tento postup na jednoduchom rovinnom príklade. Zobrazením  $g_t$ , kde pre každé  $t \in \mathbb{R}$ , zodpovedá  $g_t$  rotácia, transformujme priamku  $l$  parametrizovanú

$$l: x(u) = 1$$

$$y(u) = u.$$

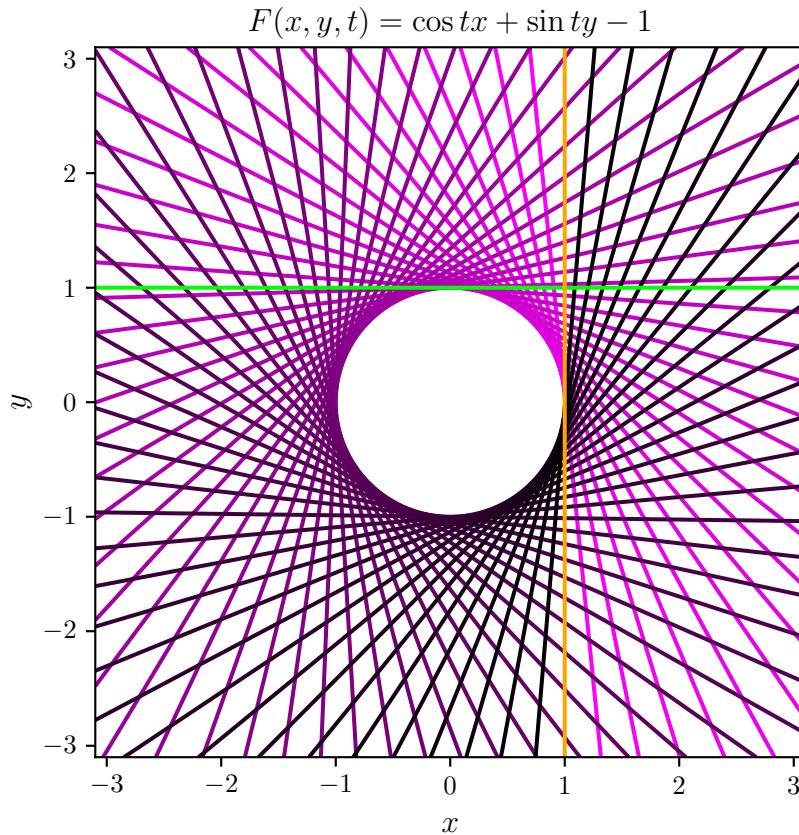
Vo všeobecnosti

$$g_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Zobrazením  $g_0(l)$ , dostávame opäť priamku  $l$ . Pre iné  $t$ , napríklad  $t = \frac{\pi}{2}$ , dostávame priamku

$$g_{\frac{\pi}{2}}(l): x(u) = -u$$

$$y(u) = 1.$$



Obr. 1.6: Systém priamok v normálovom tvare zobrazený na intervale  $[0, 2\pi]$  s krokom  $\Delta t = 0, 1$ . Priamka  $l$  je znázornená oranžovou farbou a transformovaná priamka  $g_{\frac{\pi}{2}}(l)$  zelenou farbou.

Transformácie  $g_t$  z príkladu sú prvками špeciálnej ortogonálnej grupy  $SO(n)$ . Táto grupa je Lieova grupa. Viac informácií o Lieových grupách a Lieových algebrách možno nájsť v [20]. Použili sme štruktúru Lieovej grupy, aby sme opísali, ako grupa transformuje daný povrch. Ďalej, využijúc štruktúru hladkej variety môžeme opísat jednoparametrický systém plôch výlučne pomocou terminológie Lieových grúp. Táto teória sa aplikuje na nájdenie parametrizácie obálok kvadratických plôch v [41].

### 1.3.4 Obálky a ODR

Obálky súvisia aj so štúdiom obyčajných diferenciálnych rovníc, a najmä ich singulárnych riešení. Predpokladajme, že jednoparametrický systém kriviek  $\mathcal{F}$  je riešením danej diferenciálnej rovnice prvého rádu. Potom môže existovať aj ďalšia krivka splňajúca túto diferenciálnu rovnicu, ktorá je dotyčnicou k  $\mathcal{F}$  v každom bode. Táto krivka je

obálka. V literatúre sa nazýva aj singulárne riešenie diferenciálnej rovnice. Uvažujme napríklad ODR

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0. \quad (1.1)$$

Jej regulárnym riešením sú integrálne krivky

$$y = -t^2 + 2tx, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Riešenie môžeme reprezentovať ako jednoparametrický systém kriviek  $\mathcal{F}$  s funkciou

$$F(x, y, t) = t^2 - 2tx + y.$$

Derivovaním podľa parametra  $t$  dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2t - 2x,$$

z čoho získame  $t = x$  a dosadením do funkcie  $F$  výjde  $F = -x^2 + y$ , teda obálka je  $y = x^2$ .

Obálka tohto jednoparametrického systému priamok, ktorou je parabola  $y = x^2$ , rieši taktiež diferenciálnu rovnicu 1.1 na s. 12. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [12].

### 1.3.5 Lokálne prieniky

Lokálny prienik systému kriviek  $\mathcal{F}$  pozostáva z prienikov nekonečne blízkych susedných kriviek systému. Formalizujme túto myšlienku.

**Definícia 1.5** (Lokálny prienik). *Lokálny prienik systému  $\mathcal{F}$  je množina všetkých prienikov infinitezimálne blízkych prvkov pre všetky parametre  $t \in I$ . Označuje sa ako  $\mathcal{L}$  a platí  $\mathcal{L} := \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t$  kde*

$$\mathcal{L}_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

pre nejaké pevné  $t \in I$ .

Lokálny priesečník regulárneho systému sa v mnohých prípadoch zhoduje s jeho obálkou. Ilustrujme to na nasledujúcim príklade.

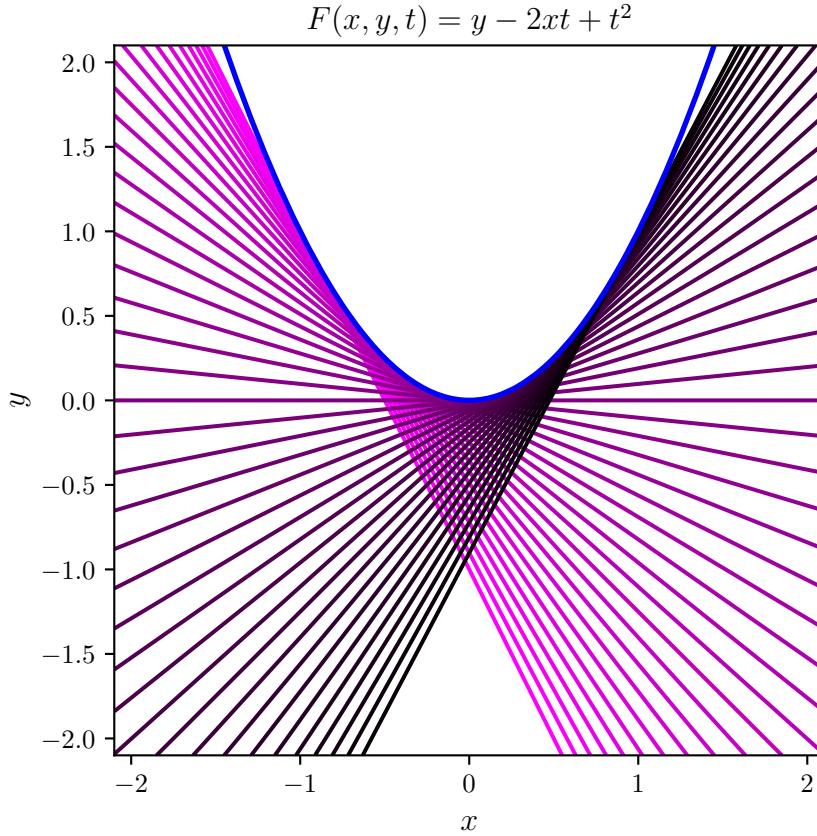
**Príklad 6.** Vezmime dva ľubovoľné, ale odlišné prvky systému  $F(x, y, t) = y - 2tx + t$ . Pre fixné parametre  $t_1 \neq t_2$  tak máme

$$F(x_1, y_1, t_1) = y_1 - 2t_1 x_1 + t_1^2,$$

$$F(x_2, y_2, t_2) = y_2 - 2t_2 x_2 + t_2^2.$$

Označme priesečník týchto dvoch priamok  $Q = (q_x, q_y)^T$ . Pre priesečník  $Q$  platí

$$F(Q, t_1) = 0 = F(Q, t_2),$$



Obr. 1.7: Regulárne riešenia a obálka vykreslené na intervale  $[-1, 1]$  s krokom  $\Delta t = 0,05$ . Pre  $t = -1$  je zobrazená časť priamky ružová, pre  $t = 1$  čierna, modrou farbou je vykreslená obálka.

odkiaľ vyplýva

$$(t_2 - t_1)(2q_x - t_1 - t_2) = 0.$$

Kedže podľa predpokladu  $t_1 \neq t_2$ , jediné riešenie tejto rovnice je  $q_x = \frac{t_1 + t_2}{2}$  a priesečník je potom daný

$$Q = \left( \frac{t_1 + t_2}{2}, t_1 t_2 \right)^T.$$

Definujme  $\varepsilon := t_2 - t_1$  a nechajme  $\varepsilon$  klesať k nule, dostávame priesečník

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} t_1 + \frac{\varepsilon}{2} \\ t_1(t_1 + \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1^2 \end{pmatrix}.$$

Je ľahké vidieť, že množina všetkých týchto priesečníkov  $\mathcal{L} = \{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{E}$ , ktorá predstavuje lokálny priesečník, sa zhoduje s vyjadrenou množinou bodov obálky na obr. 1.7.

**Dôsledok 1.1.** Nech je daný systém  $\mathcal{F}$ . Každý bod lokálneho priesečníka systému  $\mathcal{L}$  je aj bodom obálky systému  $\mathcal{E}$ . Teda platí

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}.$$

*Dôkaz.* Pre každý bod  $Q \in \mathcal{L}$  lokálneho prieniku systému  $\mathcal{F}$  existuje podľa definície 1.5 aspoň jedno  $t_0 \in I$ , pre ktoré  $Q \in \mathcal{L}_{t_0}$ , a teda  $Q$  patrí do prieniku nekonečne blízkych prvkov pre  $\mathcal{F}$  pre  $t_0$ , to znamená, že platí

$$F(Q, t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(Q, t_0) = 0,$$

čo je z definície 1.4 bod obálky  $\mathcal{E}$ .  $\square$

## 1.4 Obálka sfér

Označme  $X \in \mathbb{R}^3$  a predpokladajme, že  $m(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  je parametrizácia krivky a  $r(t): I \rightarrow \mathbb{R}^+$  je funkcia definovaná na tom istom intervale. Krivka  $m$  sa nazýva kostrová krivka obálky (*spine curve*) a  $r$  sa nazýva funkcia polomeru (*radius function*). Jednoparametrický systém sfér  $\mathcal{S}$  je daný rovnicou

$$F(X, t) = \langle X - m(t), X - m(t) \rangle - r^2(t) = 0.$$

Podľa definície 1.4, obálku  $\mathcal{E}$  možno nájsť ako prienik systému sfér  $\mathcal{S}$  a ich derivácií  $\dot{\mathcal{S}}$  pre všetky  $t \in I$ . Derivácia  $\mathcal{S}$  nám dáva jednoparametrický systém rovín  $\dot{\mathcal{S}}$  daný rovnicou

$$\frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = \langle \dot{m}(t), X - m(t) \rangle + r(t)\dot{r}(t) = 0.$$

Pre nájdenie obálky  $\mathcal{E}$  budeme teda hľadať prieniky sféry  $\mathcal{S}_t$  a roviny  $\dot{\mathcal{S}}_t$  pre každý parameter  $t \in I$ .

## 1.5 Charakteristická kružnica

**Definícia 1.6** (Charakteristická kružnica). *V prípade, že pre  $t \in I$  je  $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t \neq \emptyset$ , sa tento prienik nazýva charakteristická kružnica  $c_t$ . V prípade  $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t = \emptyset$ , pre  $t$  neexistuje žiadna charakteristická kružnica.*

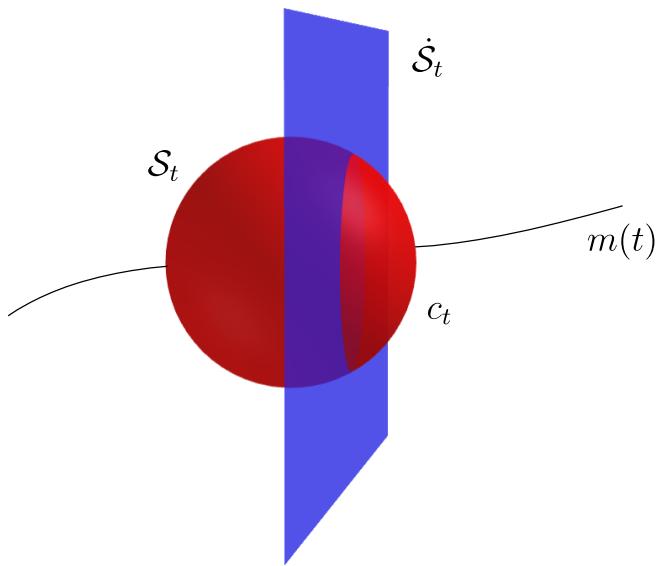
**Lema 1.1.** *Zjednotenie všetkých charakteristických kružníc  $c_t$  jednoparametrického systému sfér  $\mathcal{S}_t$  je obálka  $\mathcal{E}$  tohto systému, teda platí*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t.$$

*Dôkaz.* Nech bod  $X$  patrí do zjednotenia kružníc  $\bigcup_{t \in I} c_t$ , potom existuje aspoň jedno  $t_0 \in I$ , pre ktoré  $X \in c_{t_0}$ . Keďže  $c_{t_0} = \mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0}$ , tak sú rovnice  $\mathcal{S}_{t_0}$  a  $\dot{\mathcal{S}}_{t_0}$  splnené pre nejaké  $t_0$  a  $X$ , a preto patrí  $X$  obálke  $\mathcal{E}$ , a teda platí inkluzia  $\bigcup_{t \in I} c_t \subseteq \mathcal{E}$ .

Opačne, ak  $X$  patrí obálke  $\mathcal{E}$ , existuje podľa definície 1.4  $t_0 \in I$  také, že platí  $F(X, t_0) = 0$  a súčasne  $\frac{\partial F}{\partial t}(X, t_0) = 0$ , to znamená, že  $X$  leží v prieniku  $\mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0} = c_{t_0}$  a  $c_{t_0} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$ . Preto platí inkluzia  $\mathcal{E} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$ .

Týmto je rovnosť  $\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t$  dokázaná.  $\square$



Obr. 1.8: Prienik sféry  $\mathcal{S}_t$  a roviny  $\dot{\mathcal{S}}_t$  je charakteristická kružnica  $c_t$ .

Obálka sfér sa teda skladá zo systému kružníc. Charakteristická kružnica leží celá v rovine  $\dot{\mathcal{S}}_t$ , takže v tejto rovine leží aj jej stred. Dotykový vektor kostrovej krivky  $m(t)$  je kolmý na rovinu  $\dot{\mathcal{S}}_t$ , teda stred  $C_t$  charakteristickej kružnice leží na dotyčnici  $T(t, s) = m(t) + s \cdot \dot{m}(t)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , preto stred  $C_t$  nájdeme ako

$$\dot{\mathcal{S}}_t \cap T(t, s).$$

Pre parameter  $s$  potom platí  $s = \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}$ , po dosadení do  $T(t, s)$  získavame

$$C_t = m(t) - \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle} \dot{m}(t). \quad (1.2)$$

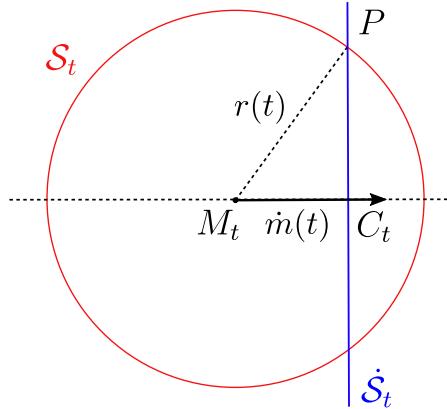
Rozoberme si nasledujúce dva prípady

- Ak je funkcia polomeru  $r(t)$  konštantná,  $\dot{r} \equiv 0$  a rovina  $\dot{\mathcal{S}}_t$  obsahuje stred sféry  $M_t$  pre všetky  $t \in I$ , v tomto prípade možno obálku  $\mathcal{E}$  považovať za posunutie (*offset*) kostrovej krivky  $m$ . Tieto obálky sú známe ako rúrkové plochy (*pipe surfaces*). Keďže rovina  $\dot{\mathcal{S}}_t$  charakteristickej kružnice  $c_t$  obsahuje stred sféry  $M_t$  v každom  $t \in I$ , charakteristická krivka je hlavnou kružnicou sféry a obálka  $\mathcal{E}$  je pokrytá jednoparametrickým systémom zhodných kružníc.
- Ak funkcia polomeru  $r(t)$  nie je konštantná, potom  $\dot{r}(t) \neq 0$  a rovina  $\dot{\mathcal{S}}_t$  neprechádza stredom sféry  $M_t$ . V tomto prípade obálka  $\mathcal{E}$  patrí do triedy kanálových plôch.

Polomer  $l_t$  charakteristiskej kružnice možno vypočítať z pravouhlého trojuholníka  $M_t C_t P$ , kde  $P$  je ľubovoľný bod na charakteristickej kružnici  $c_t$ , a teda aj na sfére  $\mathcal{S}_t$ .

$$l_t = \sqrt{r^2(t) - \|M_t C_t\|^2} = r(t) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}}.$$

V prípade, že  $\|M_t C_t\| > r(t)$ , sféra  $\mathcal{S}_t$  nemá s obálkou  $\mathcal{E}$  reálny kontakt.



Obr. 1.9: Stred  $C_t$  charakteristickej kružnice  $c_t$  leží v prieniku roviny  $\dot{\mathcal{S}}_t$  a dotyčnice ku krivke  $m(t)$ . Polomer  $l_t$  kružnice  $c_t$  sme vyjadrili z pravouhlého trojuholníka  $M_t C_t P$ .

**Príklad 7.** Uvažujme kostrovú krivku  $m(t)$  a polomer  $r(t)$

$$m(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad r(t) = \frac{t}{\sqrt{26}}.$$

Obálku systému určujú rovnice

$$\begin{aligned} \mathcal{S}: x^2 + y^2 + (z-t)^2 - \frac{t^2}{26} &= 0, \\ \dot{\mathcal{S}}: z - \frac{25}{26}t &= 0. \end{aligned}$$

Počítajme  $\mathcal{S} \cap \dot{\mathcal{S}}$  pre všetky  $t \in \mathbb{R}$ . Z druhej rovnice dostaneme  $t = \frac{26}{25}z$ . Po dosadení do prvej rovnice, dostávame implicitnú rovnicu pre obálku  $\mathcal{E}$

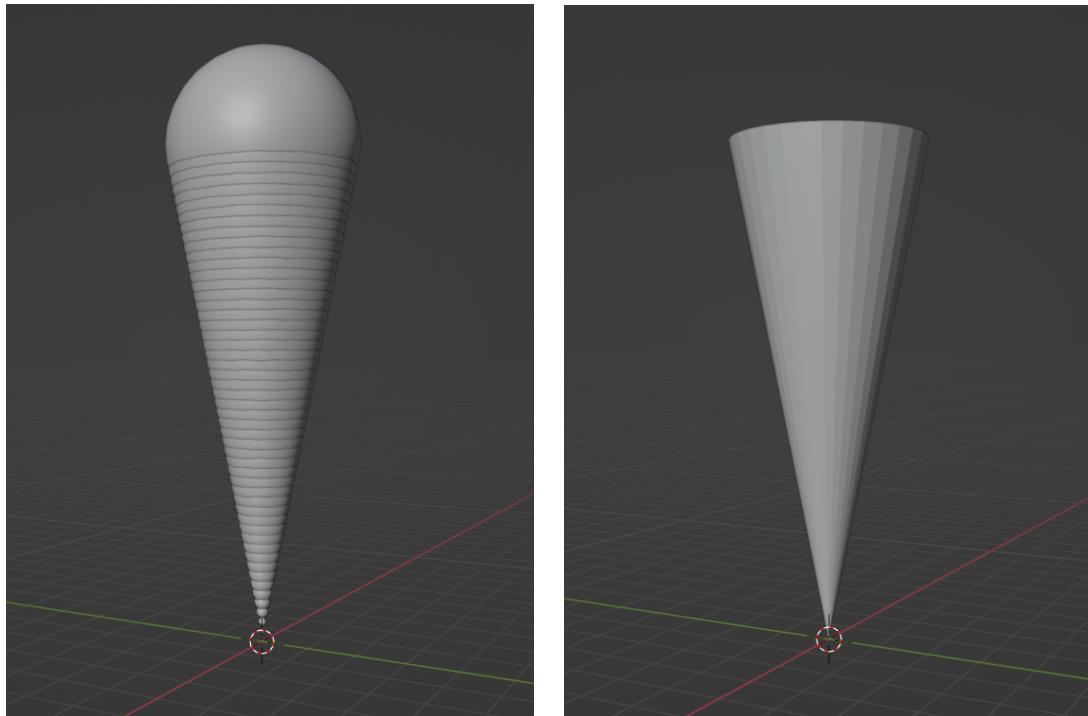
$$x^2 + y^2 - \frac{1}{25}z^2 = 0,$$

čo predstavuje rovnicu rotačného kužeľa.

Pre  $t = 1$  je charakteristická krvka prienikom dvoch plôch daných

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1: & x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - \frac{1}{26} = 0, \\ \dot{\mathcal{S}}_1: & z - \frac{25}{26} = 0.\end{aligned}$$

Z toho môžeme usúdiť, že charakteristická krvka  $c_1$  predstavuje kružnicu so stredom v bode  $C_1 = (0, 0, \frac{25}{26})$  v rovine  $z = \frac{25}{26}$  a neprechádza stredom sféry  $M_1 = m(1) = (0, 0, 1)$ , polomer  $c_1$  je  $l_1 = \frac{\sqrt{25}}{26}$ . Vzdialenosť bodov  $\|M_t C_t\| = \frac{1}{26}$  a  $r(1) = \frac{1}{\sqrt{26}}$ , takže platí, že  $r(1) > \|M_t C_t\|$  a sféra  $\mathcal{S}_1$  má s obálkou  $\mathcal{E}$  reálny kontakt.



(a) Jednoparametrický systém sfér z príkladu 7 pre  $t \in [0, 10]$  s krokom  $\Delta t = 0, 2$ .

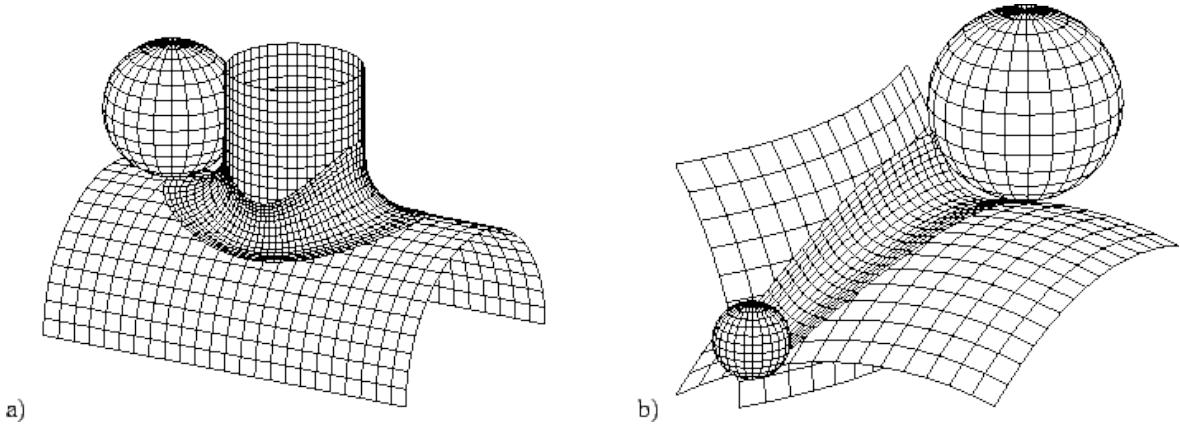
(b) Obálka jednoparametrického systému sfér z príkladu 7 zostrojená z charakteristických kružníkow pre  $t \in [0, 10]$  s krokom  $\Delta t = 0, 2$ .

Obr. 1.10: Obálka sfér.

Jedným z dôležitých výsledkov je, že kanálové plochy, definované ako obálka jednoparametrického systému sfér s racionálnou funkciou polomeru  $r(t)$  a stredmi v racionalnej krvke  $m(t)$  možno racionálne parametrizovať [26].

Ďalšou z aplikácií kanálových a rúrkových plôch je výroba potrubia. Hladké spojenie medzi dvoma nie nevyhnutne valcovými rúrami  $\mathcal{P}_1$  a  $\mathcal{P}_2$  sa modeluje tak, aby bol prechod hladký, bez záhybov, vodotesný alebo dokonca aj parotesný. Na to sa používa technika *rolling ball blends*, využívajúca nasledujúcu myšlienku: Kým sa sféra  $S$

s konštantným alebo nekonštantným polomerom  $r$  kotúľa na oboch rúrach súčasne, zanecháva stopu  $s_i$  na oboch rúrach. Zmiešavacia plocha je tá časť obálky  $\mathcal{E}$  jednoparametrického systému sfér, ktorá leží medzi dvoma stopami  $s_1$  a  $s_2$ . Kostrová krivka obálky  $\mathcal{E}$  je priesecníkom ekvidištánt (*offsetov*) plôch  $\mathcal{P}_1$  a  $\mathcal{P}_2$  vo vzdialosti  $r$ . Každá charakteristická krivka spája dva dotykové body zmiešavacej plochy a plochami  $\mathcal{P}_1$  a  $\mathcal{P}_2$ , ktoré sa majú zmiešavať. Viac detailov možno nájsť v [18] a [25]. Na obrázku 1.11 vľavo je znázornená metóda so sférou s konštantným polomerom  $r$ , vpravo s nekonštantným.



Obr. 1.11: Technika *rolling ball blends* s konštantným polomerom vľavo, s nekonštantným polomerom vpravo [44].



# Kapitola 2

## Matematický model

V tejto kapitole odvodíme rovnice obálky pre jednoparametrický systém elips a elipsov. Najprv však klasifikujme krivky a plochy druhého stupňa. Nasledujúcu teóriu a klasifikáciu nadplôch druhého stupňa preberáme zo [16], [19], [24], [25] a [42].

### 2.1 Krivky druhého stupňa

Krivka druhého stupňa  $p$  je v karteziánskych súradničach  $(x, y) \in \mathbb{E}^2$  daná rovnicou

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Prípad  $A = B = C = 0$  môžeme vylúčiť, pretože potom je rovnica lineárna a opisuje priamku. Vo všeobecnosti rovnica vyjadruje kužeľosečku, ktorá je daná piatimi bodmi. Ak  $F \neq 0$ , môžeme ju vydeliť  $F$  a potom riešiť sústavu lineárnych rovníc s piatimi neznámymi. Okrem klasických prípadov, ako elipsy, paraboly a hyperboly, môžu kužeľosečky degenerovať na dvojice priamok, bod alebo prázdnú množinu.

V algebraickom zmysle má kužeľosečka  $p$  vždy dva priesecníky  $S_1$  a  $S_2$  s danou priamkou  $s$ . Oba môžu byť reálne alebo komplexne združené. Limitný prípad  $S_1 = S_2$  nastáva vtedy, keď  $s$  je dotyčnicou ku  $p$ .

V závislosti od počtu reálnych priesecníkov s priamkou  $s$  v nekonečne rozlišujeme tri typy kužeľosečiek

1. eliptický typ: bez reálnych priesecníkov,
2. hyperbolický typ: dva reálne priesecníky,
3. parabolický typ: kužeľosečky sa dotýka priamka v nekonečne.

**Definícia 2.1.** Matica  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sa nazýva ortogonálna, ak platí  $M^T M = I_n$ , alebo, čo je to isté,  $M^{-1} = M^T$ .

Prvá podmienka hovorí, že stĺpce matice  $M$  tvoria ortonormálnu bázu euklidovského priestoru  $\mathbb{R}^n$  so štandardným skalárny súčinom. Potom tiež platí  $MM^T = I_n$ , teda takisto riadky matice  $M$  tvoria ortonormálnu bázu v  $\mathbb{R}^n$ .

**Veta 2.1.** *Matica prechodu od ortonormálnej bázy v  $\mathbb{R}^n$  so štandardným skalárny súčinom k ortonormálnej báze je ortogonálna matica. Tiež, ak od ortonormálnej bázy v  $\mathbb{R}^n$  prejdeme pomocou ortogonálnej matice prechodu k novej báze, tak aj nová báza bude ortonormálna.*

### 2.1.1 Invarianty kriviek druhého stupňa

**Definícia 2.2.** *Invariantom krivky druhého stupňa  $p$ , vyjadrenej rovnicou*

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

je každý taký algebraický výraz, závisiaci od  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ , ktorého hodnota sa nezmení, ak túto krivku vyjadríme v inom karteziánskom súradnicovom systéme, ku ktorému prejdeme pomocou otočení alebo posunutí (čím od rovnice, viažúcej staré premenné  $x, y$ , prejdeme k rovnici, viažúcej nové premenné  $x', y'$ ).

**Veta 2.2.** *Nasledujúce číselné výrazy sú invariantmi krivky druhého stupňa, vyjadrenej rovnicou  $f(x, y)$ .*

$$\begin{aligned}\Delta &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{33} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad s = a_{11} + a_{22}, \\ T &= \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Z tohto možno odvodiť nasledujúcu klasifikáciu kužeľosečiek.

Typ	$\Delta_{33}$	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
eliptický	$> 0$	ak $s\Delta < 0$ , tak elipsa ak $s\Delta > 0$ , tak $\emptyset$	bod
hyperbolický	$< 0$	hyperbola	dve rôznobežné priamky
parabolický	$= 0$	parabola	ak $T < 0$ , tak dve rovnobežné priamky ak $T = 0$ , tak priamka ak $T > 0$ , tak $\emptyset$

Tabuľka 2.1: Klasifikácia kužeľosečiek.

## 2.2 Plochy druhého stupňa

Plocha druhého stupňa  $P$  je v karteziánskych súradniciach  $(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$  daná rovnicou

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Ak je prvých šest koeficientov nulových, uvedená rovnica je lineárna a opisuje rovinu v priestore. Vo všeobecnosti rovnica opisuje kvadriku, ktorá je daná deviatimi bodmi. Ak  $J \neq 0$ , môžeme ju vydeliť  $J$  a potom vyriešiť sústavu lineárnych rovníc s deviatimi neznámymi. Okrem klasických prípadov, ako elipsoidy, paraboloidy a hyperboloidy, môžu kvadriky degenerovať aj na kvadratické kužeľe, kvadratické valce a dvojice rovín.

V algebraickom zmysle je kvadrika  $P$  plocha druhého stupňa, ktorá má vždy dva priesečníky  $S_1$  a  $S_2$  s danou priamkou  $s$ . Oba môžu byť reálne alebo komplexne združené. Limitný prípad  $S_1 = S_2$  nastáva vtedy, keď  $s$  je dotyčnicou  $P$ .

V závislosti od typu prieniku kvadriky s rovinou  $s$  v nekonečne rozlišujeme tri typy kvadrík:

1. eliptický typ: bez reálnej kužeľosečky,
2. hyperbolický typ: reálna kužeľosečka,
3. parabolický typ: kvadriky sa dotýka rovina v nekonečne.

### 2.2.1 Invarianty plôch druhého stupňa

Nasledujúce číselné výrazy sú invariantmi plochy druhého stupňa  $P$ , vyjadrenej rovnicou

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

$$\Delta = \det M = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{44} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$T = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{pmatrix},$$

$$s = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad S = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33},$$

kde  $\Delta_{ij}$  je algebraický doplnok k prvku  $a_{ij}$  matice  $M$ , teda  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ , kde  $M_{ij}$  vznikne vyškrtnutím  $i$ -teho riadku a  $j$ -teho stĺpca.

Z tohto možno odvodiť nasledujúce dve tabuľky.

Typ	$\Delta_{44}$	$s\Delta_{44}$ a $T$	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
eliptický	$\neq 0$	$s\delta > 0$ a $T > 0$	$\emptyset$	elipsoid	$\emptyset$
hyperbolický	$\neq 0$	$s\delta < 0$ alebo $T \leq 0$	jednodielny hyperboloid	dvojdielny hyperboloid	kužeľ
parabolický	$= 0$		hyperbolický paraboloid	eliptický paraboloid	valcové a reducibilné plochy

Tabuľka 2.2: Klasifikácia kvadrík.

Pre valcové a reducibilné plochy máme ďalšie rozdelenie.

Typ	$T$	$S \neq 0$	$S = 0$
eliptický	$> 0$	ak $s\Delta < 0$ , tak eliptický valec ak $s\Delta > 0$ , tak $\emptyset$	bod
hyperbolický	$< 0$	hyperbolický valec	dve rôznobežné roviny
parabolický	$= 0$	parabolický valec	dve rovnobežné roviny rovina $\emptyset$

Tabuľka 2.3: Klasifikácia valcových a reducibilných plôch.

## 2.3 Obálka elíps

Pre vyriešenie úlohy zstrojenia obálky elipsoidov sme sa najprv zaoberali obálkou elíps.

Nech  $M(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  je jednoparametrický systém (nie nutne regulárnych) symetrických  $3 \times 3$  matíc. Nech  $X = (x, y, 1)^T$  sú homogénne súradnice v  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , potom

$$Q(t): X^T M(t) X = 0$$

je rovnica jednoparametrického systému kužeľosečiek. Matice  $M(t)$  je tvaru

$$\begin{pmatrix} A(t) & \frac{B(t)}{2} & \frac{D(t)}{2} \\ \frac{B(t)}{2} & C(t) & \frac{E(t)}{2} \\ \frac{D(t)}{2} & \frac{E(t)}{2} & F(t) \end{pmatrix},$$

kde jej prvky  $A(t), \dots, F(t)$  sú diferencovateľné funkcie parametra  $t \in I$ , ktoré definujú elipsu  $Q_t$  danú funkciou

$$f(x, y, t) = A(t)x^2 + B(t)xy + C(t)y^2 + D(t)x + E(t)y + F(t) = 0.$$

Deriváciu jednoparametrického systému  $Q(t)$  vzhľadom na parameter  $t$  označíme

$$\dot{Q}(t) : X^T \dot{M}(t) X = 0.$$

Matica  $\dot{M}(t)$  je tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{A}(t) & \frac{\dot{B}(t)}{2} & \frac{\dot{D}(t)}{2} \\ \frac{\dot{B}(t)}{2} & \dot{C}(t) & \frac{\dot{E}(t)}{2} \\ \frac{\dot{D}(t)}{2} & \frac{\dot{E}(t)}{2} & \dot{F}(t) \end{pmatrix},$$

kde jej prvky  $\dot{A}(t), \dots, \dot{F}(t)$  sú funkcie parametra  $t \in I$ , ktoré definujú kužeľosečku  $\dot{Q}_t$  danú rovnicou

$$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = \dot{A}(t)x^2 + \dot{B}(t)xy + \dot{C}(t)y^2 + \dot{D}(t)x + \dot{E}(t)y + \dot{F}(t) = 0.$$

Označme determinant matice

$$\Delta(t) := \det \dot{M}(t),$$

subdeterminant matice, ktorá vznikne odstránením tretieho riadku a tretieho stĺpca

$$\Delta_{33}(t) := \det \dot{M}_{33}(t)$$

a

$$T(t) := \det \begin{pmatrix} \dot{C} & \frac{\dot{E}}{2} \\ \frac{\dot{E}}{2} & \dot{F} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dot{A} & \frac{\dot{D}}{2} \\ \frac{\dot{D}}{2} & \dot{F} \end{pmatrix}.$$

### 2.3.1 Zmena bázy elíps

Nech  $m(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  je aspoň dvakrát diferencovateľná krivka, napíšme rovnicu jednoparametrického systému elíps  $Q$  so stredom na krivke  $m(t)$ , hlavnou polosou  $a$  v smere vektora  $\dot{m}(t)$  a vedľajšou polosou  $b$  v smere normálového vektora  $\vec{n}$  ku krivke  $m(t)$ . Uvažujme  $\vec{n} = (-\dot{m}_2, \dot{m}_1)$ . Vydelením normou vektorov  $\dot{m}(t)$  a  $\vec{n}$  dostávame novú ortonormálnu bázu tvorenú stĺpcovými vektormi matice  $P(t)$ . Keďže sme prešli od štandardnej bázy k ortonormálnej báze, matica  $P(t)$  je ortogonálna, a teda

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ -\dot{m}_2(t) & \dot{m}_1(t) \end{pmatrix}.$$

V súradniach  $(u(t), v(t))$  má systém  $Q$  rovnicu v kanonickom tvare

$$\frac{u^2(t)}{a^2} + \frac{v^2(t)}{b^2} = 1,$$

kde vzťah medzi súradnicami  $(u(t), v(t))$  a  $(x, y)$  je daný

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ -\dot{m}_2(t) & \dot{m}_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m_1 \\ y - m_2 \end{pmatrix}.$$

Systém elíps  $Q$  sa potom transformuje na tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\dot{m}\|^2} & \left( (x - m_1)^2 \left( \frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) + (y - m_2)^2 \left( \frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{\|\dot{m}\|^2} \left( 2 \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) (x - m_1)(y - m_2) \dot{m}_1 \dot{m}_2 \right) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

### 2.3.2 Výpočet obálky elíps

Prepíšme jednoparametrický systém elíps  $Q$  v novej báze, teda rovnicu 2.1, do maticového zápisu.

$$\begin{aligned} A &= \frac{b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\ B &= \frac{2(b^2 - a^2) \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\ C &= \frac{a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\ D &= \frac{-2m_1(b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2) - 2(b^2 - a^2)m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\ E &= \frac{-2m_2(a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2) - 2(b^2 - a^2)m_1 \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\ F &= \frac{\dot{m}_1^2(b^2 m_1^2 + a^2 m_2^2 - a^2 b^2) + 2(b^2 - a^2)m_1 m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2 + \dot{m}_2^2(a^2 m_1^2 + b^2 m_2^2 - a^2 b^2)}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} - 1. \end{aligned}$$

Určime typ kužeľosečiek jednoparametrického systému  $\dot{Q}$  podľa jeho invariantov, kde prvky matíc sú derivácie funkcií  $A(t), \dots, F(t)$ . Invarianty

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= 0, \\ \Delta_{33}(t) &= -\frac{(b^2 - a^2)^2 (\dot{m}_1 \ddot{m}_2 - \ddot{m}_1 \dot{m}_2)^2}{a^4 b^4 \|\dot{m}\|^4} < 0, \end{aligned}$$

$$T(t) = 0$$

pre všetky  $t$ , teda kužeľosečky v systéme  $\dot{Q}$  podľa klasifikácie 2.1 degenerujú na dve rôznobežné priamky  $p(t)$  a  $q(t)$ . Vyjadrenie jednoparametrického systému  $\dot{Q}$  vieme upraviť do tvaru

$$p(t)q(t) = 0, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} p(t) &: \dot{m}_1 x + \dot{m}_2 y - (m_1 \dot{m}_1 + m_2 \dot{m}_2) = 0, \\ q(t) &: \alpha(t)x + \beta(t)y + \gamma(t) = 0, \\ \alpha(t) &= \dot{m}_2(\dot{m}_2 \ddot{m}_1 - \dot{m}_1 \ddot{m}_2), \\ \beta(t) &= \dot{m}_1(\dot{m}_1 \ddot{m}_2 - \dot{m}_2 \ddot{m}_1), \\ \gamma(t) &= -\alpha m_1 - \beta m_2 - \frac{b^2 \|\dot{m}\|^4}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Definujme funkciu  $\rho(t)$ , ktorá reprezentuje vzdialenosť priamky  $q(t)$  od bodu na krivke  $m(t)$ , v ktorom je umiestnená elipsa

$$\rho(t) = \|m(t), q(t)\| = \left| \frac{\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right|.$$

Ak je  $\rho(t) > b$ , priamka  $q(t)$  nemá s elipsou žiadnen prienik. Všimnime si, že podmienku  $\rho(t) > b$ , možno upraviť do tvaru

$$\left| \frac{b}{a^2 - b^2} \right| > \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\|\dot{m}\|^4}.$$

Označme  $\lambda = \left| \frac{b}{a^2 - b^2} \right|$ . Po chvíľke úprav zistíme, že člen  $\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\|\dot{m}\|^4}$  reprezentuje krivost krivky  $\kappa(t)$ . Teda do obálky jednoparametrického systému elips  $Q$  pre parametre  $t$ , pre ktoré platí

$$\kappa(t) < \lambda$$

prispievajú dva prieniky, ktoré možno parametrizovať

$$P_{1,2} = m(t) \pm b\vec{n}(t).$$

Pre parametre, v ktorých

$$\kappa(t) > \lambda$$

pribudnú ďalšie dva prieniky

$$P_{3,4} = m(t) + \rho(t)\vec{n}(t) \pm l(t)\vec{t},$$

kde  $l(t) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \rho^2(t)}$ . V prípade rovnosti

$$\kappa(t) = \lambda,$$

je  $\rho(t) = b$  a  $l(t) = 0$  a prieniky  $P_{1,2}$  a  $P_{3,4}$  sa zhodujú.

## 2.4 Obálka elipsoidov

Podobne ako pre elipsy odvodíme formu zápisov s drobnými úpravami pre elipsoidy. V tomto prípade parameter  $t$  pre lepšiu prehľadnosť vynechávame. Nech  $M(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$  je jednoparametrický systém (nie nutne regulárnych) symetrických  $4 \times 4$  matíc. Nech  $X = (x, y, z, 1)^T$  sú homogénne súradnice v  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ , potom

$$Q(t): X^T M(t) X = 0$$

je rovnica jednoparametrického systému elipsoidov. Matica  $M(t)$  je tvaru

$$\begin{pmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & \frac{G}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} & \frac{H}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C & \frac{I}{2} \\ \frac{G}{2} & \frac{H}{2} & \frac{I}{2} & J \end{pmatrix},$$

kde jej prvky  $A, \dots, J$  sú diferencovateľné funkcie  $A(t), \dots, J(t)$  parametra  $t \in I$ , ktoré definujú elipsoid  $Q_t$  daný funkciou

$$f(x, y, z, t) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Derivácia jednoparametrického systému  $Q(t)$  vzhľadom na parameter  $t$  je

$$\dot{Q}(t): X^T \dot{M}(t)X = 0.$$

Matica  $\dot{M}(t)$  je tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{A} & \frac{\dot{D}}{2} & \frac{\dot{E}}{2} & \frac{\dot{G}}{2} \\ \frac{\dot{D}}{2} & \dot{B} & \frac{\dot{F}}{2} & \frac{\dot{H}}{2} \\ \frac{\dot{E}}{2} & \frac{\dot{F}}{2} & \dot{C} & \frac{\dot{I}}{2} \\ \frac{\dot{G}}{2} & \frac{\dot{H}}{2} & \frac{\dot{I}}{2} & \dot{J} \end{pmatrix},$$

kde jej prvky  $A, \dots, F$  sú funkcie  $\dot{A}(t), \dots, \dot{J}(t)$  parametra  $t \in I$ , a definujú plochu druhého stupňa  $Q_t$  danú rovnicou

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = \dot{A}x^2 + \dot{B}y^2 + \dot{C}z^2 + \dot{D}xy + \dot{E}xz + \dot{F}yz + \dot{G}x + \dot{H}y + \dot{I}z + \dot{J} = 0.$$

Označme determinant matice

$$\Delta(t) := \det \dot{M}(t),$$

subdeterminant matice, ktorá vznikne odstránením štvrtého riadku a štvrtého stĺpca

$$\delta(t) := \det \dot{M}_{44}(t)$$

a ďalšie invarianty plôch druhého stupňa

$$T(t) = \det \begin{pmatrix} \dot{A} & \frac{\dot{D}}{2} \\ \frac{\dot{D}}{2} & \dot{B} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dot{B} & \frac{\dot{F}}{2} \\ \frac{\dot{F}}{2} & \dot{C} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dot{C} & \frac{\dot{E}}{2} \\ \frac{\dot{E}}{2} & \dot{A} \end{pmatrix},$$

$$S(t) = \det \dot{M}_{11}(t) + \det \dot{M}_{22}(t) + \det \dot{M}_{33}(t).$$

### 2.4.1 Zmena bázy elipsoidov

Upravme rovnice pre obálku sféry tak, aby zodpovedali obálke elipsoidov. Vezmieme sféru, zmeňme súradnicový systém so štandardnou bázou  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  na lokálny súradnicový systém krivky s bázou Frenetovho repéra  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  v každom bode krivky  $m(t)$ . Tak budeme môcť upraviť sféru na elipsoid tak, aby a zodpovedalo škálovaniu v dotykovom smere priestorovej krivky  $m(t)$  a b zodpovedalo škálovaniu v normálovom a binormálovom smere. Frenetov repér je ortonormálna báza, ktorú tvoria stĺpcové vektory matice  $P(t)$ , kde

$$P(t) = (\vec{t} \ \vec{n} \ \vec{b}),$$

kde

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{\dot{m}}{\|\dot{m}\|}, \\ \vec{n} &= \frac{\ddot{m} - \langle \ddot{m}, \vec{t} \rangle \vec{t}}{\|\ddot{m} - \langle \ddot{m}, \vec{t} \rangle \vec{t}\|}, \\ \vec{b} &= \frac{\ddot{m} - \langle \ddot{m}, \vec{t} \rangle \vec{t} - \langle \ddot{m}, \vec{n} \rangle \vec{n}}{\|\ddot{m} - \langle \ddot{m}, \vec{t} \rangle \vec{t} - \langle \ddot{m}, \vec{n} \rangle \vec{n}\|}.\end{aligned}$$

Matica  $P(t)$  je ortogonálna, preto  $P^{-1} = P^T$ . Keďže vyjadrenia nových vektorov sú pri prepise do súradníc alebo aj výpočtení pre konkrétné prípady príliš dlhé, uvažujme inú ortonormálnu bázu, ktorá by zachovala požadované vlastnosti škálovania. Keďže je elipsoid v normálovom smere krivky homogénny, môžeme za  $\vec{n}$  zvoliť ľubovoľný jednotkový vektor z normálovej roviny krivky. Vektor  $\vec{b}$  následne zvolíme ako vektorový súčin  $\vec{t} \times \vec{n}$  a normalizujeme ho. Uvažujme teda

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{(\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3)}{\sqrt{\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}}, \\ \vec{n} &= \frac{(0, -\dot{m}_3, \dot{m}_2)}{\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}}, \\ \vec{b} &= \frac{(\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2, -\dot{m}_1\dot{m}_2, -\dot{m}_1\dot{m}_3)}{\sqrt{\dot{m}_1^2 + \dot{m}_3^2}\sqrt{\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}},\end{aligned}$$

kde je  $\dot{m}_2 \neq 0$  a  $\dot{m}_3 \neq 0$ . Ak by boli, vieme nájsť iné ortonormálne vektory  $\vec{n}, \vec{b}$  v normálovej rovine krivky  $m(t)$  podobného tvaru.

Potom matica prechodu  $P^{-1}$  má tvar

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{m}_1}{\|\dot{m}\|} & \frac{\dot{m}_2}{\|\dot{m}\|} & \frac{\dot{m}_3}{\|\dot{m}\|} \\ 0 & \frac{-\dot{m}_3}{\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} & \frac{\dot{m}_2}{\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} \\ \frac{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}{\|\dot{m}\|\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} & \frac{-\dot{m}_1\dot{m}_2}{\|\dot{m}\|\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} & \frac{-\dot{m}_1\dot{m}_3}{\|\dot{m}\|\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} \end{pmatrix}.$$

V súradničiach  $(u(t), v(t), w(t))$  má jednoparametrický systém elipsoidov  $Q$  rovnicu

$$\frac{u^2(t)}{a^2} + \frac{v^2(t)}{b^2} + \frac{w^2(t)}{b^2} = 1,$$

kde vzťah medzi súradnicami  $(u(t), v(t), w(t))$  a  $(x, y, z)$  je daný

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{m}\|\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} \begin{pmatrix} \dot{m}_1\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2} & \dot{m}_2\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2} & \dot{m}_3\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2} \\ 0 & -\dot{m}_3\|\dot{m}\| & \dot{m}_2\|\dot{m}\| \\ \dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2 & -\dot{m}_1\dot{m}_2 & -\dot{m}_1\dot{m}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m_1 \\ y - m_2 \\ z - m_3 \end{pmatrix}.$$

### 2.4.2 Výpočet obálky elipsodiov

$$\begin{aligned}
A &= \frac{b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2 + a^2 \dot{m}_3^2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
B &= \frac{a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2 + a^2 \dot{m}_3^2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
C &= \frac{a^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2 + b^2 \dot{m}_3^2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
D &= \frac{(b^2 - a^2) \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
E &= \frac{(b^2 - a^2) \dot{m}_1 \dot{m}_3}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
F &= \frac{(b^2 - a^2) \dot{m}_2 \dot{m}_3}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
G &= -\frac{a^2 m_1 \dot{m}_3^2 + (b^2 - a^2) m_3 \dot{m}_1 \dot{m}_3 + a^2 m_1 \dot{m}_2^2 + (b^2 - a^2) m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2 + b^2 m_1 \dot{m}_1^2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
H &= -\frac{a^2 m_2 \dot{m}_3^2 + (b^2 - a^2) m_3 \dot{m}_2 \dot{m}_3 + b^2 m_2 \dot{m}_2^2 + (b^2 - a^2) m_1 \dot{m}_1 \dot{m}_2 + a^2 m_2 \dot{m}_1^2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
I &= -\frac{(b^2 m_3 \dot{m}_3^2 + (b^2 - a^2) m_2 \dot{m}_2 + (b^2 - a^2) m_1 \dot{m}_1) \dot{m}_3 + a^2 m_3 \dot{m}_2^2 + a^2 m_3 \dot{m}_1^2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
J &= \frac{(a^2 m_1^2 + a^2 m_2^2 + b^2 m_3^2 - a^2 b^2) \dot{m}_3^2 + 2(b^2 - a^2)(m_2 m_3 \dot{m}_2 + m_1 m_3 \dot{m}_1) \dot{m}_3}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \\
&\quad + \frac{(a^2 m_1^2 + b^2 m_2^2 + a^2 m_3^2 - a^2 b^2) \dot{m}_2^2 + 2(b^2 - a^2)m_1 m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2 + (b^2 m_1^2 + a^2 m_2^2 + a^2 m_3^2 - a^2 b^2) \dot{m}_1^2}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2}
\end{aligned}$$

Určme typ kvadrík jednoparametrického systému  $\dot{Q}$  podľa jeho invariantov, rovnako ako v prípade elíps. Invarianty

$$\Delta(t) = 0,$$

$$\Delta_{44}(t) = 0,$$

$$T(t) = -\frac{(b^2 - a^2)^2}{a^4 b^4} \frac{(\dot{m}_1 \dot{m}_2 - \dot{m}_1 \dot{m}_2)^2 + (\dot{m}_2 \dot{m}_3 - \dot{m}_2 \dot{m}_3)^2 + (\dot{m}_3 \dot{m}_1 - \dot{m}_3 \dot{m}_1)^2}{\|\dot{m}\|^4} < 0,$$

$$S(t) = 0,$$

pre všetky  $t \in I$ , teda podľa klasifikácie plôch druhého stupňa 2.2 a 2.3 sú kvadriky v systéme  $\dot{Q}$  dve rôznobežné roviny.

Jednoparametrický systém  $\dot{Q}$  vieme napísť v súčinovom tvare dvoch rovín

$$\eta(t)\xi(t) = 0,$$

kde

$$\begin{aligned}\eta(t) &: \dot{m}_1x + \dot{m}_2y + \dot{m}_3z - (m_1\dot{m}_1 + m_2\dot{m}_2 + m_3\dot{m}_3) = 0, \\ \xi(t) &: \alpha(t)x + \beta(t)y + \gamma(t)z + \delta(t) = 0, \\ \alpha(t) &= \ddot{m}_1(\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2) - \dot{m}_1(\dot{m}_2\dot{m}_2 + \dot{m}_3\dot{m}_3), \\ \beta(t) &= \ddot{m}_2(\dot{m}_1^2 + \dot{m}_3^2) - \dot{m}_2(\dot{m}_1\dot{m}_1 + \dot{m}_3\dot{m}_3), \\ \gamma(t) &= \ddot{m}_3(\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2) - \dot{m}_3(\dot{m}_1\dot{m}_1 + \dot{m}_2\dot{m}_2), \\ \delta(t) &= -\alpha(t)m_1 - \beta(t)m_2 - \gamma(t)m_3 - \frac{b^2\|\dot{m}\|^4}{b^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Definujme funkciu  $\rho(t)$ , ktorá reprezentuje vzdialenosť roviny  $\xi(t)$  od bodu na krivke  $m(t)$ , v ktorom je umiestnený elipsoid

$$\rho(t) = \|m(t), \xi(t)\| = \left| \frac{\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 + \delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \right|.$$

Ak  $\rho(t) > b$ , tak jednoparametrický systém  $Q$  nemá prienik s rovinou  $\xi(t)$  a za body obálky vieme v parametri  $t$  považovať prienik  $Q(t)$  a  $\eta(t)$ , čo je charakteristická kružnica s rovnakými parametrami ako v obálke sfér.

Ak  $\rho(t) < b$ , tak prienikom  $Q(t)$  a  $\xi(t)$  je elipsa a prienikom  $Q(t)$  a  $\eta(t)$  je charakteristická kružnica.

Ked'že rovina  $\eta(t)$  prechádza krivkou  $m(t)$  a jej normálový vektor je  $\dot{m}(t)$ , prienik  $Q(t)$  a  $\dot{Q}(t)$  je vždy reálny.

Všimnime si, že podmienku

$$\rho(t) > b$$

možno vyjadriť

$$\lambda = \left| \frac{b^2}{a^2 - b^2} \right| > \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}{\|\dot{m}\|^4} = \kappa(t),$$

kde výraz  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$  predstavuje veľkosť normálového vektora roviny  $\xi(t)$  a  $\kappa(t)$  je krivosť krivky  $m(t)$ .

### Parametre elipsy

Elipsa leží v rovine  $\xi(t)$  so stredom v bode  $S = m(t) + \rho(t)(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ , preto veľkosť jej polosí  $c(t)$  a  $d(t)$  možno určiť nasledujúcim výpočtom. Z pohľadu v smere vektora  $\dot{m}(t)$  vidíme kružnicu, kde veľkosť vedľajšej poloosi  $d(t)$  sa určí z pravouhlého trojuholníka  $MBS$  a to  $d(t) = \sqrt{b^2 - \rho(t)^2}$  a veľkosť hlavnej poloosi  $c(t)$  určíme jednoduchou geometrickou úvahou. Umiestnime stred elipsy  $m(t)$  do počiatku súradnicovej sústavy. Elipsa má rovnicu

$$\frac{x^2}{c(t)^2} - \frac{y^2}{d(t)^2} = 1,$$

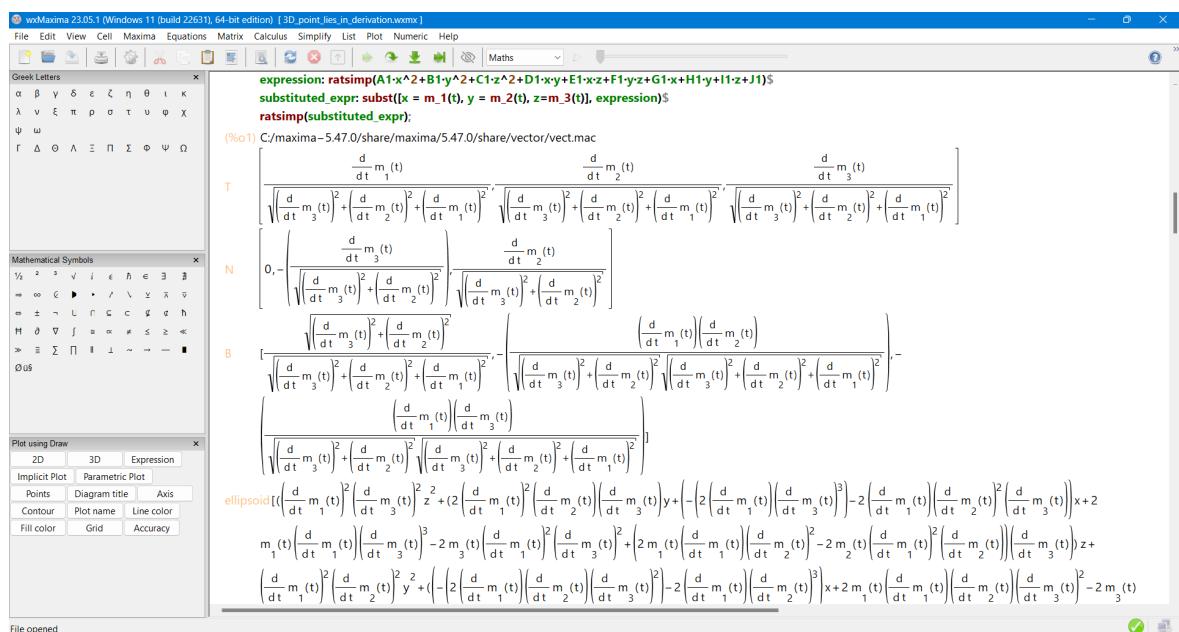
bod  $S$  má súradnice  $(0, -\rho)$  a bod na elipse  $P$  má súradnice  $(p_x, -\rho)$ . Nás zaujíma veľkosť hodnoty  $p_x$ , ktorú určíme z vyjadrenia elipsy.

$$p_x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \rho^2},$$

hl'adana vzdialenosť  $c(t) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \rho^2(t)}$ .

## 2.5 Softvér Maxima

Na všetky výpočty v tejto kapitole bol použitý voľne dostupný softvér počítačovej algebry Maxima s grafickým užívateľským rozhraním *wmMaxima*. Celý balík a dokumentácia sú dostupné na [21], [22].



Obr. 2.1: Výpočet v softvéri Maxima.

# Kapitola 3

## Softvér

V našej práci je cieľom implementácie matematicky odvodených konceptov vizualizácia vypočítaných plôch. Pri vytváraní plôch nám napadlo vytlačiť si niekoľko modelov v 3D tlačiarni.

V tejto kapitole v prvej časti uvedieme stručnú špecifikáciu softvéru, v druhej časti zdôvodníme výber programovacieho jazyka a knižníc, opíšeme proces ich inštalácie, zdôvodníme použité programovacie prostredie a uvedieme jeho konfiguráciu pre naše použitie. V tretej časti uvedieme beh skriptov a na záver, vo štvrtnej časti, krátko opíšeme proces 3D tlače plôch. Všetky vytvorené skripty, vymodelované plochy, súbory pripravené na 3D tlač a ďalšie súbory sa nachádzajú na GitHube v repozitári <https://github.com/tutka13/Masters-Thesis>.

### 3.1 Špecifikácia

Hlavným cieľom je vytvorenie 3D plochy - obálky sfér a elipsoidov, kde používateľ zadá vstupné parametre. Softvér vypočíta a vymodeluje plochu podľa procesu.

#### 3.1.1 Vstup

##### Obálka sfér:

Parametrizácia priestorovej krivky  $m(t)$  stredov sfér, funkcia polomeru  $r(t)$ , interval  $I$  vykreslenia plochy parametra  $t$ , vzorkovanie plochy, teda krok vyčíslenia a posun plochy v priestore.

##### Obálka elipsoidov:

Parametrizácia priestorovej krivky  $m(t)$  stredov elipsoidov, konštanty  $a$  a  $b$ , interval  $I$  vykreslenia plochy parametra  $t$  a vzorkovanie plochy, teda krok vyčíslenia a posun plochy v priestore.

### 3.1.2 Výstup

#### Obálka sfér:

Vizualizácia troch ploch - jednoparametrického systému sfér, jednoparametrického systému charakteristických kružníc a výslednej plochy - obálky sfér.

#### Obálka elipsoidov:

Vizualizácia troch plôch - jednoparametrického systému elipsoidov, jednoparametrického systému charakteristických kriviek, výslednej plochy - obálky elipsoidov.

### 3.1.3 Postup práce

Priebeh procesu je v oboch prípadoch, pre sféry a elipsoidy, rovnaký. Najprv vymažeme všetky objekty zo scény. Po prečítaní vstupných parametrov z textového súboru sa prevedú symbolické výpočty. Vytvoríme si prázdne zoznamy, do ktorých sa v ďalšom kroku ukladajú numericky vyčíslené hodnoty symbolických výrazov. Plochy sa vykresľujú po jednotlivých objektoch. Objekt je kružnica sféra alebo elipsoid. Pri vykresľovaní objektov prechádzame zoznamy jeho uložených parametrov. Po vykreslení daného objektu zrealizujeme jeho posun a natočenie v priestore. Ak boli objekty kružnice, vhodne ich pospájame a vhodne medzi ne doplníme pletivo (*mesh*). Na záver scénu uložíme.

### 3.1.4 Funkčnosť softvéru

Potrebné dátové štruktúry:

- zoznam

Potrebné funkcie:

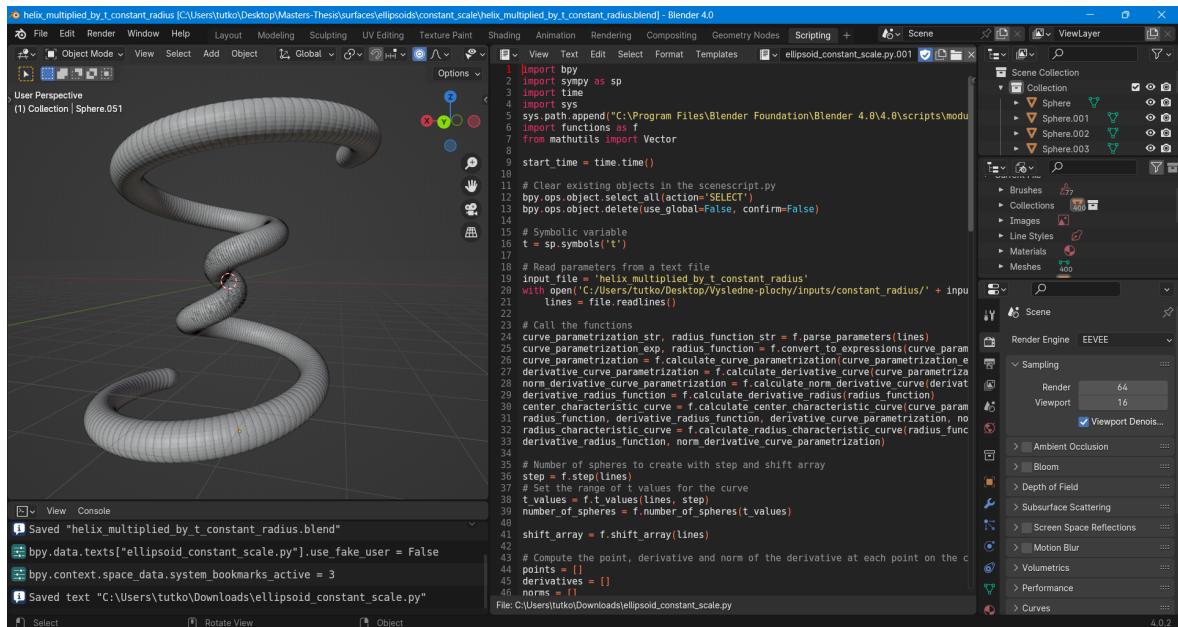
- vymazanie objektov zo scény
- čítanie parametrov z textového súboru
- symbolické výpočty
- numerické vyčíslenie
- posun objektu v priestore
- interpolácia - doplnenie pletiva medzi dvomi charakteristickými kružnicami
- uloženie scény do databázy

## 3.2 Výber softvérku a jeho inštalácia

Na výpočet a vizualizáciu plôch sme sa rozhodli využiť kombináciu Blenderu a jazyka Python. Python je momentálne jedným z najpopulárnejších a najpoužívanejších programovacích jazykov, s knižnicami vhodnými pre matematické výpočty. Okrem toho dokáže generovať výstupy vo formáte L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Je užívateľsky intuitívny. Blender je významným nástrojom pre prácu s 3D grafikou. Vzhľadom na trojrozmernú povahu našich plôch, nám jeho použitie umožnilo vytlačiť aj niekoľko fyzických modelov v 3D tlačiarni.

### 3.2.1 Blender

Blender je open source balík na tvorbu 3D. Podporuje celú 3D technológiu - modelovanie, rigging, animáciu, simuláciu, renderovanie, kompozíciu a sledovanie pohybu, dokonca aj strih videa a tvorbu hier. Pokročilí používatelia využívajú rozhranie API programu Blender pre skriptovanie v jazyku Python na prispôsobenie aplikácie a písanie špecializovaných nástrojov [1]. Pre účely tejto práce sme využili Blender 4.0.2, stiahnutelný na webstránke [3]. Blender umožňuje rozšírenie svojej funkcionality pomocou skriptovacieho jazyka Python, ktorý je integrovaný priamo do softvérku, teda nie je potreba samostatnej inštalácie. Okrem toho Blender obsahuje špeciálnu knižnicu bpy, ktorá slúži na vykonávanie príkazov v Blenderi. Na vytváranie skriptov slúži prostredie Scripting, ktoré obsahuje okná na písanie, úpravu textu a Python konzolu. Je možné pracovať aj v externom programovacom prostredí [2].



Obr. 3.1: Plocha vygenerovaná skriptom v Blendri.

### 3.2.2 Python

Python je vysokoúrovňový programovací jazyk, ktorý je populárny pre svoju jednoduchosť a čitateľnosť syntaxe. Má široké využitie v rôznych odvetviach, ako sú web development, vedecké výpočty, umelá inteligencia, automatizácia, spracovanie dát a mnoho ďalších. Pri používaní priamo v Blendri nie je potrebná inštalácia. Pri otvorení prostredia Scripting v Blendri sa vľavo v konzole nachádza informácia o verzii Pythonu, ktorú Blender používa. V našom prípade je to 3.10.13.

### 3.2.3 Knižnice

Na výpočet a zobrazenie plôch v Blendri sme využili nasledovné knižnice

- bpy: knižnica Blenderu, ktorá umožňuje manipuláciu s objektmi v Blendri pomocou príkazov vytvorených v skriptoch,
- math: základné matematické funkcie a konštanty pre numerické výpočty, obsahuje funkcie ako sin, cos, log a ďalšie, ako aj konštanty ako  $\pi$  a  $e$ ,
- mathutils: je súčasťou Blenderu a poskytuje množstvo matematických funkcií a nástrojov pre prácu s 3D objektami, obsahuje funkcie na rotácie, transformácie, výpočet normál a ďalšie operácie v 3D priestore,
- matplotlib.pyplot: rozhranie na tvorbu vizualizácií a grafického zobrazenia dát, tvorbu grafov, histogramov, kontúrových máp a ďalších typov vizuálnych reprezentácií dát,
- numpy: nástroje na manipuláciu s vektormi, maticami, poliami a ďalšími objektami potrebnými pre zložitejšie výpočty
- sympy: nástroje na symbolické výpočty, algebraické manipulácie, riešenie rovníc a ďalšie matematické operácie potrebné pre pokročilé výpočty,
- sys: prístup k niektorým systémovým špecifikáciám a funkciám, medzi jej použitia patrí prístup k argumentom príkazového riadku, manipulácia s cestami k súborom a niektoré informácie o systéme, ako verzia Pythonu,
- time: získanie času v milisekundách.

### Inštalácia knižníc

Pip je inštalátor balíkov pre Python, ktorý spravuje knižnice pre jazyk Python. Používa sa na inštaláciu z Python Package Index. PyPI je knižníc pre programovací jazyk Python. Keďže sme Python stiahli z oficiálnej stránky Python [38], pip sa in-

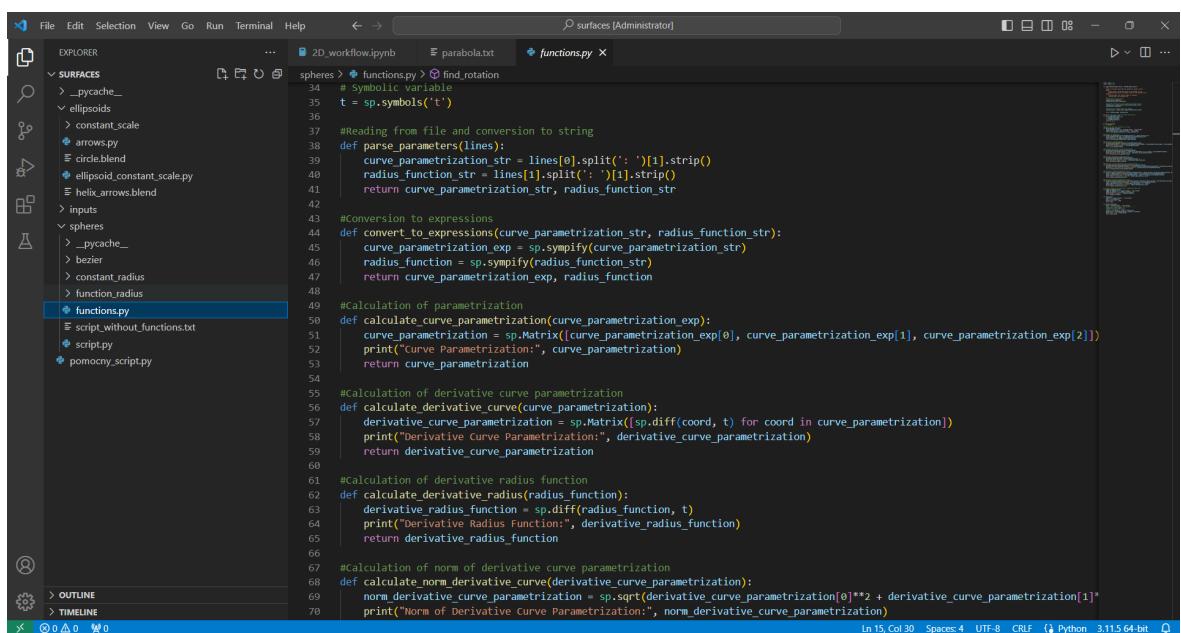
štaloval automaticky [29]. Overiť, či máme nainštalovaný pip, možno pomocou príkazového riadku, ktorý otvoríme vyhľadaním cmd v ponuke vyhľadávania a zadáním `python -m pip --version`. V našom prípade pracujeme s verziou pip 24.0. Následne je možné inštaloovať všetky potrebné knižnice v príkazovom riadku zadáním `pip install názov knižnice`.

### 3.2.4 Programovacie prostredie

Kedže prostredie Scripting v Blendri nedisponuje mnohými vlastnosťami, ktoré by sme na zjednodušenie tvorby skriptov potrebovali, využijeme externé programovacie prostredie, a to Visual Studio Code.

## Visual Studio Code

Na úpravu skriptov pre Python a Python-Blender sme využili programovacie prostredie Visual Studio Code vo verzii 1.82.2, ktorý disponuje farebným zvýrazňovaním kódu, súčasným zobrazením viacerých skriptov, zobrazením súborov v priečinku, kontrolou chýb, ladením programu a ďalšími funkciami. Má intuitívny a prehľadný dizajn, no jeho najväčšou výhodou je množstvo rozšírení, z ktorých je pre prepojenie programov Python a Blender potrebné Blender Development. Toto rozšírenie slúži na ladenie skriptov, ktoré sa spúšťajú v prostredí Blenderu.



Obr. 3.2: Skript funkcií pre obálku sfér a elipsoidov vo VS Code.

### Konfigurácia VS Code - Python - Blender

Pre systém Windows sme nainštalovali samostatnú verziu Pythonu [38]. Keďže Blender používa Python verziu 3.10.13, mohli sme stiahnuť akúkoľvek vyššiu. Používame verziu 3.11.5. Pri inštalácii je potrebné odkliknúť možnosť `Add Python Executable to the path`. Zo stránky [40] sme stiahli VS Code, ktorý sme následne inštalovali. Vo VS Code sme v paneli rozšírení na ľavej strane vyhľadali rozšírenie Python, ktoré vytvorila spoločnosť Microsoft a aj to sme inštalovali. Tým sa umožnila práca VS Code s jazykom Python. Pre používateľsky príjemnejšie používanie knižnice bpy v skriptoch bolo potrebné nainštalovať falošný bpy modul [11] príkazom v termináli `pip install fake-bpy-module-latest`. Po dokončení inštalácie sme reštartovali VS Code. V bočnom paneli rozšírení sme vyhľadali Blender development. Po inštalácii sme v priečinku Python v inštalačnom adresári programu Blender otvorili vlastnosti, kartu zabezpečenia a skupinu používateľov `Users`, ktorým sme povolili možnosť `Write`. Vďaka tomuto rozšíreniu sme mohli ladiť program pomocou `Ctrl+Shift+P`. Po stlačení tejto klávesovej skratky sa v hornom paneli zobrazilo kontextové menu, kde sme vybrali `Blender: Build and Start`, čím sme spustili Blender. Proces ladenia programu sme spúšťali možnosťou `Blender: Run Script`.

### Jupyter Notebook

Pre účely našej práce sme potrebovali niekoľko pomocných skriptov na vyčíslenie obálok konkrétnych prípadov v 2D a 3D a na prepis symbolických výpočtov z Maximy do programu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Pri programovaní týchto skriptov sme využívali Jupyter Notebook vo verzii 7.0.4, výpočtový nástroj, pôvodne navrhnutý pre úlohy dátovej vedy, ktorý umožňuje interaktívnu prácu s kódom, rovnicami a vizualizáciami s podporou v 40 programovacích jazykoch. S jeho pomocou je možné vytvárať dokumenty vo formáte JSON, ktoré sú rozdelené do buniek a komunikujú s výpočtovými jadrami cez Interactive Computing Protocol. Jadrá sú zodpovedné za vykonávanie kódu a výstupy. Jupyter Notebook ponúka modulárny dizajn, ktorý umožňuje jednoduché manipulácie s jednotlivými bunkami, vrátane možnosti úpravy bunky bez ďalšieho vplyvu na zvyšnú časť kódu, spätného vrátenia sa a vymazania bunky [17]. Jupyter Notebook sa nainštaluje rovnako ako Blender Development vo VS Code rozšíreniach. Jednou možnosťou ako spustiť Jupyter Notebook je vytvorenie nového súboru vo VS Code s príponou `Jupyter Notebook .ipynb`.

## 3.3 Implementácia

V tejto časti sa budeme venovať vývoju skriptov. Skriptov máme niekoľko, no v tejto časti budeme primárne hovoriť o skripte na vymodelovanie obálky sfér `envelope_of_spheres.py`,

```

print(parametric_curve)
print("Systém: ")
system = sp.latex(sp.simplify(ellipse_in_new_basis))
display(Math(system))

Matrix([[2*t], [t]])
System:
- 1 + \frac{(x - 2y)^2}{5b^2} + \frac{(5t - 2x - y)^2}{5a^2}

print("Derivácia systému: ")
der = sp.latex(sp.simplify(derivation))
display(Math(der))

Derivácia systému:
\frac{2 \cdot (5t - 2x - y)}{a^2}

print("Determinant derivácie: ")
display(Math(sp.latex(sp.simplify(determinant))))
Determinant derivácie:
0

```

Obr. 3.3: Výstupy po každej vykonanej bunke v JupyterNotebook.

skripte na vymodelovanie obálky elipsoidov `envelope_of_spheres.py` a o skripte s používanými funkciemi `envelope_of_spheres.py`. Všetky výpočty vrátane rotácie kružníc a elipsoidov sú realizované pomocou funkcií definovaných v module `envelopes.py`. Modul sme umiestnili do adresára programu Blender, v ktorom Blender ukladá svoje skripty a moduly. V našom prípade to bolo C:\Program Files\Blender Foundation\Blender 4. Potom sme importovali modul do programu Blender štandardným spôsobom.

## Obálka sfér

Najprv sme začali vyvíjať skript pre obálku sfér, kde bolo hlavnou myšlienkou zostrojenie obálky sfér na intervale  $I$  s vhodným vzorkovaním plochy pre parameter  $t \in I$  iba pomocou charakteristických kružníc.

Po importe knižníc sme spustili časomieru, prečítali parametre z vopred pripraveného textového súboru, teda stredy a polomery sfér. Vypočítali sme dotykové vektoru krivky  $m(t)$  a parametre zodpovedajúcich charakteristických kružníc a začali sme pridávať objekty do scény.

Vykreslenie jednoparametrického systému sfér prebieha jedným for cyklom, kde najprv pridáme sféru na správnu pozíciu.

Zobrazenie jednoparametrického systému charakteristických kružníc sme vykonali v tom istom cykle a to tak, že charakteristické kružnice sme postupne v for cykle pridávali do ich vypočítaných stredov s normálou  $(0, 0, 1)$ . Následne sme kružnice v priestore otočili podľa dotykového vektora krivky  $m(t)$  pomocou `circle_object.rotation_mode = 'AXIS'`.

Vymodelovanie obálky sme realizovali rovnako ako vizualizáciu charakteristických kružníc. Vymodelované kružnice sme označili, vytvorili z nich jeden objekt pomocou

`bpy.ops.object.join()` a pospájali ich v `Edit Mode` funkciou Blendru `bpy.ops.mesh.bridge_edge_loops()`

Týmto spôsobom sme v scéne vytvorili tri plochy. Na záver sme scénu uložili do vhodného priečinku menšej databázy a vyčislili sme čas behu skriptu.

## Obálka elipsoidov

V skripte `envelope_of_ellipsoids.py` je oproti obálke sfér niekoľko zmien. Jednou z nich je pridanie faktorov škálovania  $a$  a  $b$ , ktoré možno meniť v skripte, teda nenačítavajú sa priamo z textového súboru. Výpočty prebiehajú rovnako pomocou funkcií importovaného modulu `envelopes.py`.

Vykreslenie jednoparametrického systému elipsoidov prebieha jedným `for` cyklom, kde najprv pridáme elipsoid na správnu pozíciu so škálovaním v smere súradnicových osí s hodnotami  $(b, b, a)$  a potom tento elipsoid správne natočíme podľa dotykového vektora krivky  $m(t)$ .

Vykreslenie charakteristických kriviek sme realizovali vykreslením charakteristických kružník v miestach, kde  $\kappa(t) \leq \frac{b}{a^2 - b^2}$  a v miestach, kde nerovnosť neplatí sme vykreslili elipsoid zo systému.

Vykreslenie obálky je modelované rovnakým spôsobom, no medzi vhodne pospájané charakteristické kružnice je doplnené pletivo pomocou nástroja `bpy.ops.mesh.bridge_loops()`.

## 3.4 3D tlač

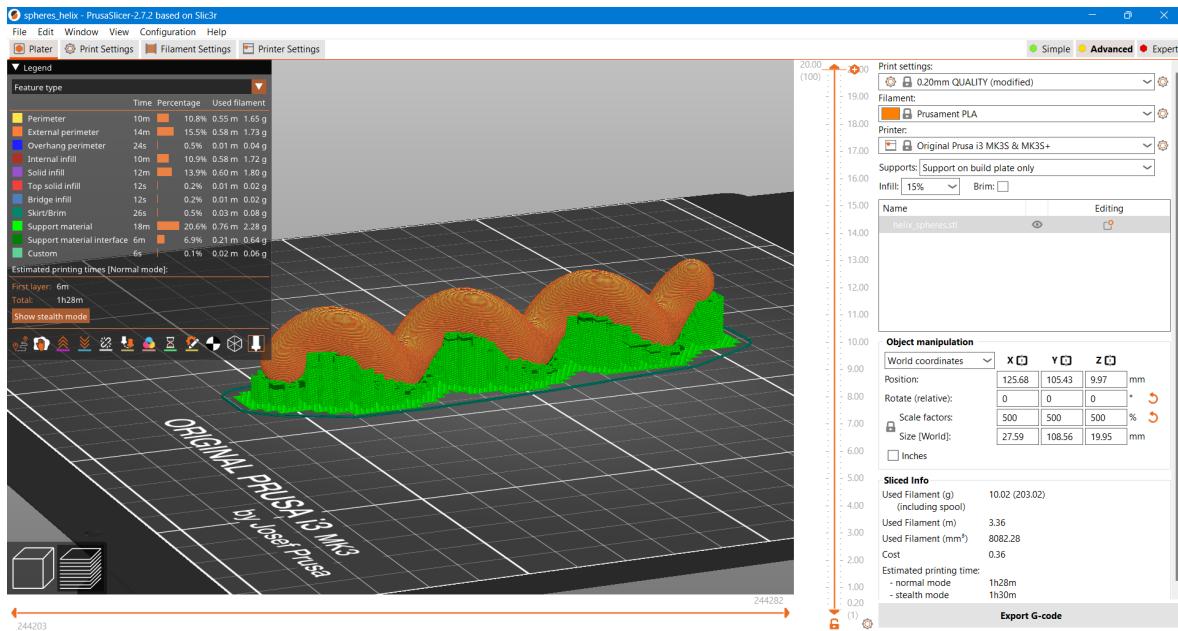
Tlačiareň, v ktorej sme plochy tlačili sa nazýva Original Prusa i3 MK3S+. Všetky jej parametre a taktiež manuál k tlači sa nachádza na [34]. Na vytlačenie modelov plôch bolo potrebné exportovať plochy v Blendri do vhodného formátu. Pre prípravu na tlač bolo potrebné inštalovať softvér PrusaSlicer, ktorý možno stiahnuť z [33].

### 3.4.1 PrusaSlicer

Popis procesu v programe PrusaSlicer vo verzii 2.7.2.

1. Načítanie modelu: Používateľ načíta do PrusaSliceru 3D model, ktorý chce vytlačiť, vo vhodnom formáte.
2. Nastavenie parametrov tlače: Používateľ nastaví parametre tlače, ako je typ tlačiarne, materiál, hrúbka vrstvy, percento výplne (infill), teplota tlače atď. Tieto parametre ovplyvňujú kvalitu a vlastnosti vytlačeného modelu.
3. Slicing: PrusaSlicer rozdelí 3D model na tenké horizontálne vrstvy a vytvorí inštrukcie pre tlačiareň, ktoré určujú pohyb tlačiarne.

4. Príprava G-kódu: Na základe slicovania PrusaSlicer vytvorí súbor **.gcode**, ktorý obsahuje sériu príkazov pre tlačiareň, ako sú pohyby osí, rýchlosť a teploty.
5. Export G-kódu: Po príprave exportovať G-kód a nahrať ho na SD kartu alebo do počítača, pomocou ktorého budeme tlačiť.



Obr. 3.4: Slicing plochy v softvéri PrusaSlicer.

### Parametre tlače

Ako vstupný formát do PrusaSlicer-u sme používali **.stl**.

Typ tlačiarne: Original Prusa i3 MK3S & MK3S+

Nastavenie tlače: 0.20mm QUALITY

Filament: Prusament PLA

Podpory: Podpora len na stavebnej doske

Infill: 15%

Teplota trysky: 215°C

Teplota podložky: 60°C

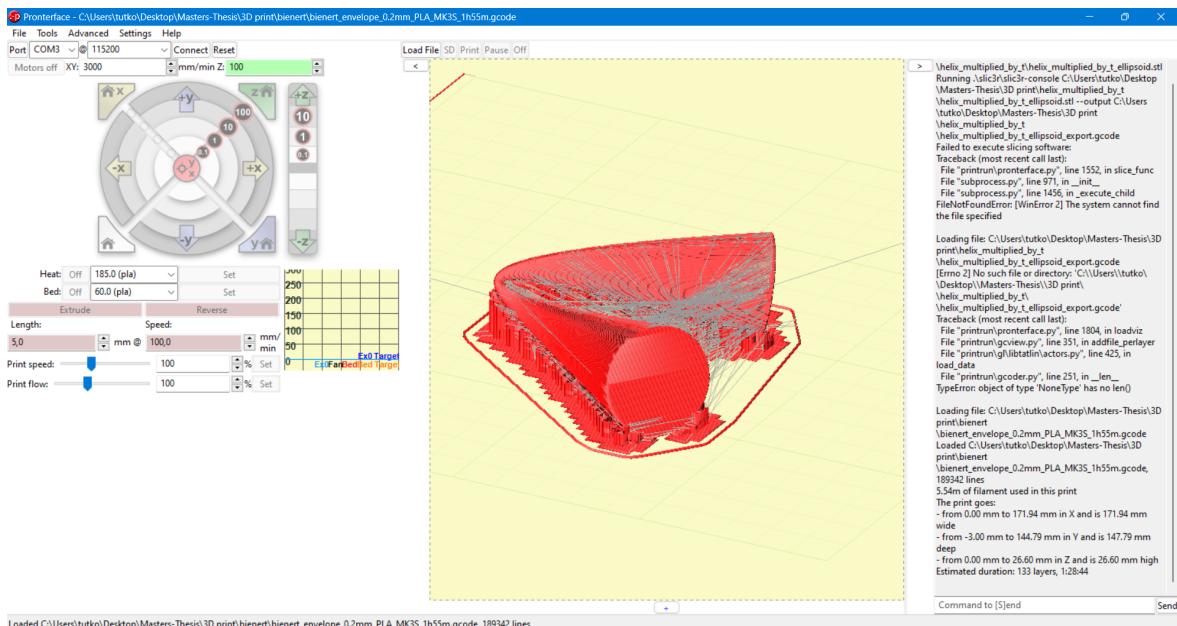
Kvôli nefunkčnosti tlače z SD karty, sme pre 3D tlač používali počítač prepojený USB káblom s tlačiarňou. Počítač musel byť počas tlače neustále pripojený k tlačiarne a nesmel prejsť do režimu spánku, hibernácie alebo sa vypnúť. Prerušenie pripojenia k počítaču by malo za následok prerušenie tlače bez možnosti obnovenia tlače.

### 3.4.2 Pronterface

Pronterface je jednoduché grafické používateľské rozhranie, ktoré používateľom ponúka možnosť monitorovať a ovládať tlačiareň z počítača pripojeného cez USB. Pomocou

neho možno priamo pohybovať krokovými motormi, ovládať teplotu lôžka a trysky, posielat príkazy G-kódu priamo cez terminál alebo konzolové okno a mnoho ďalšieho. Pronterface je súčasťou balíka jednoduchých nástrojov Printrun na správu a ovládanie 3D tlačiarí aj CNC strojov. Napriek svojmu základne vyzerajúcemu dizajnu a zastaranej grafike zostáva užitočným nástrojom, ktorý si udržiava silnú pozíciu v komunité 3D tlačiarov [36].

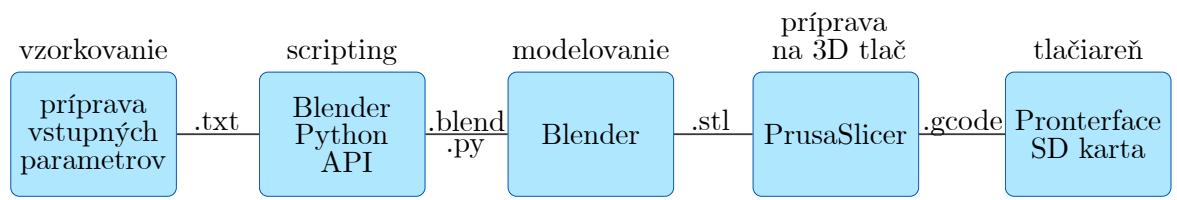
Stiahli sme jeho poslednú verziu 2.0.1 na webovej lokalite [35]. Pomocou Správcu zariadení systému Windows sme skontrolovali, ktorý port COM bol priradený našej 3D tlačiarne, bol to COM3. Po pripojení k tlačiarne sme zvolili tlačidlo Connect. Potom sme načítali model tlačidlom Load file a vybrali súbor vo formáte .gcode. V aplikácii sme skontrolovali nastavenú teplotu trysiek a podložky, aby zodpovedala zvolenému materiálu podľa našich pokynov. Po načítaní modelu sa v pravom stĺpco zobrazil pesimisticky odhad času tlače.



Obr. 3.5: Príprava na tlač plochy v softvéri Pronterface.

### 3.5 Zhrnutie procesu

Najprv sme pripravili vstupné parametre v textovom súbore, ktorý sme načítali pred spustením skriptu. Python skript vygeneroval objekty v Blendri, kde bolo potrebné objekty vhodne pospájať a doplniť pletivo. Vytvorené plochy sme uzavreli a exportovali do programom PrusaSlicer podporovaného formátu, v našom prípade .stl, ktorý pre plochy pripravil .gcode na 3D tlač. Súbor .gcode sa následne vložil na SD kartu alebo do softvéru Pronterface a mohli sme realizovať tlač po načítaní SD karty tlačiarňou alebo pripojení počítača k tlačiarne.



Obr. 3.6: Schéma procesu.



# Kapitola 4

## Výsledky práce

### 4.1 Príklady kriviek

Pri konštrukcií obálok elipsoidov sme vyriešili aj o rozmer nižší prípad, a to, obálku jednoparametrického systému elips v rovine ležiacich na rovinnej krvke  $m(t) \subset \mathbb{R}^2$ . Pre rovinné prípady sme výsledky vizualizovali v online nástroji Desmos [9], kde sme zadávali matematické výrazy vypočítané skriptom v Pythone `2D_workflow`. V adresári sa nachádza niekoľko textových súborov s výpočtami.

**Príklad 8** (Parabola). Majme parabolu s parametrizáciou  $m(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Na tejto krvke zostrojme jednoparametrický systém elips so škálovaním v dotykovom smere krvky  $a$  a v normálovom smere krvky  $b$ . Jednoparametrický systém elips má rovnicu

$$Q: \frac{1}{a^2 b^2 (4t^2 + 1)} ((x - t)^2(b^2 + a^2 4t^2) + (y - t^2)^2(a^2 + b^2 4t^2)) \\ + \frac{1}{a^2 b^2 (4t^2 + 1)} (4t(b^2 - a^2)(x - t)(y - t^2)2t) - 1 = 0.$$

Koeficienty derivácie  $\dot{Q}$

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \frac{8t(a^2 - b^2)}{a^2 b^2 (16t^4 + 8t^2 + 1)} \\ \frac{\dot{B}}{2} &= \frac{2(4t^2 - 1)(a^2 - b^2)}{a^2 b^2 (16t^4 + 8t^2 + 1)} \\ \dot{C} &= \frac{-8t(a^2 - b^2)}{a^2 b^2 (16t^4 + 8t^2 + 1)} \\ \frac{\dot{D}}{2} &= \frac{(-8a^2 t^4 - 6a^2 t^2 - 8b^2 t^4 - 2b^2 t^2 - b^2)}{a^2 b^2 (16t^4 + 8t^2 + 1)} \\ \frac{\dot{E}}{2} &= \frac{2t(a^2 - 16b^2 t^4 - 8b^2 t^2 - 2b^2)}{a^2 b^2 (16t^4 + 8t^2 + 1)} \\ \dot{F} &= \frac{2t(4a^2 t^4 + 2a^2 t^2 + 32b^2 t^6 + 28b^2 t^4 + 8b^2 t^2 + b^2)}{a^2 b^2 (16t^4 + 8t^2 + 1)}.\end{aligned}$$

Determinant

$$\Delta(t) = 0.$$

Subdeterminant

$$\Delta_{33}(t) = \frac{-4(a^2 - b^2)^2}{a^4 b^4 (16t^4 + 8t^2 + 1)} < 0.$$

Rozklad na priamky  $p(t)$  a  $q(t)$  jednoparametrického systému  $\dot{Q}$

$$\begin{aligned} p(t): x + 2ty - (t + 2t^3) &= 0, \\ q(t): -4tx + 2y + 2t^2 - \frac{b^2(1 + 4t^2)^2}{b^2 - a^2} &= 0. \end{aligned}$$

Krivosť krivky  $m(t)$  je

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pre  $a = 2$  a  $b = 1$  je  $\lambda = \frac{1}{3}$ .

$$\kappa(t) > \frac{1}{3} \text{ pre } t \in (-0, 759, 0, 759)$$

Na intervale  $(-0, 759, 0, 759)$  uvažujeme teda body obálky

$$\begin{aligned} P_{1,2} &= (t, t^2) \pm \frac{(2t, -1)}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \\ P_{3,4} &= (t, t^2) + \rho(t) \frac{(2t, -1)}{\sqrt{1 + 4t^2}} \pm l(t) \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}{6}, \\ l(t) &= 2\sqrt{1 - \rho^2(t)}. \end{aligned}$$

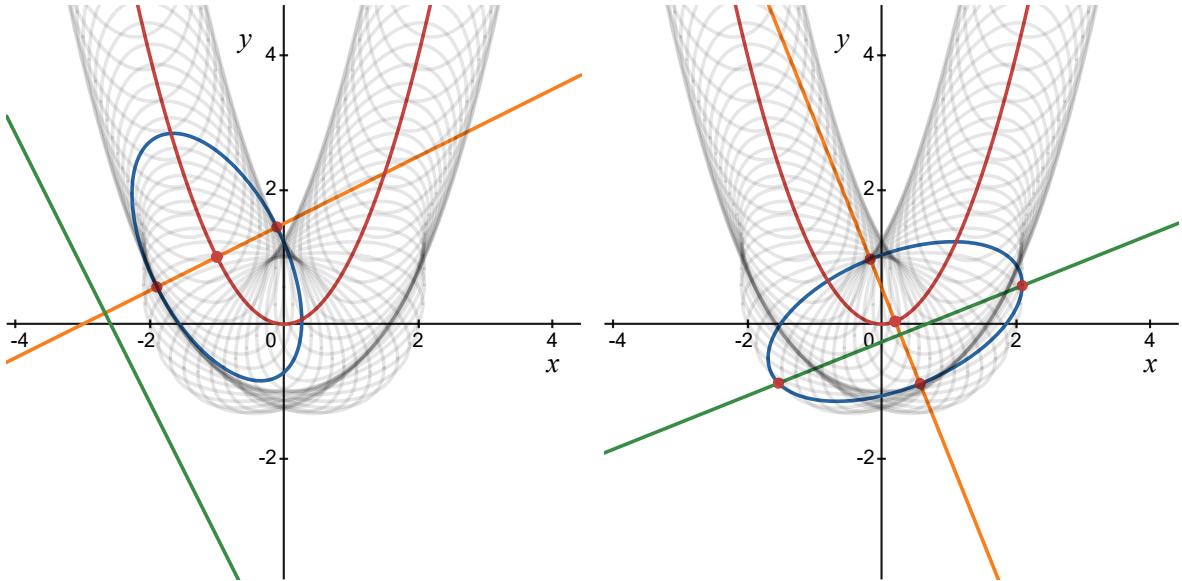
Na intervaloch  $(-\infty, -0, 759)$  a  $(0, 759, \infty)$  je

$$\kappa(t) \leq \frac{1}{3},$$

$\rho(t) > 1$  a do obálky patria body  $P_{1,2}$ .

## 4.2 Príklady plôch

V tejto časti uvedieme pári vizualizácií, kde uvedieme parametre plôch. Zložitosť výpočtov závisí od parametrizácie krivky  $m(t)$ . Prirodzene, najjednoduchším prípadom parametrizácie je priamka. Urobme krok k mierne zložitejším prípadom.



(a) Modrá elipsa je prvok systému v parametri  $t = -1$ . Oranžovou farbou je vizualizovaná priamka  $p(t)$ , zelenou priamka  $q(t)$ , ktorá nemá so systémom elíps prienik. Krivost krivky v bode  $\kappa(-1) < \frac{1}{3}$ .

(b) Modrá elipsa je prvok systému v parametri  $t = 0, 2$ . Oranžovou farbou je vizualizovaná priamka  $p(t)$ , zelenou priamka  $q(t)$ , ktorá má so systémom elíps prieniky  $P_{3,4}$ . Krivost krivky v bode  $\kappa(0, 2) > \frac{1}{3}$ .

Obr. 4.1: Jednoparametrický systém elíps na parabole s parametrizáciou  $m(t) = (t, t^2)$ .

**Príklad 9** (Skrutkovica). Majme skrutkovicu s parametrizáciou  $m(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}$ . Na tejto krivke zostrojme jednoparametrický systém elipsoidov so škálovaním v dotykovom smere krivky  $a$  a v normálowych smeroch krivky  $b$ . Keďže sú rovnice príliš dlhé, neuvádzame ich. Krivost krivky  $m(t)$  je

$$\kappa = \frac{1}{2}.$$

Ak zvolíme  $a$  a  $b$  také, že  $\kappa > \lambda$ , plocha má v každom parametri charakteristickú kružnicu a elipsu. Ak máme prípad  $\kappa \leq \lambda$ , plochu zostrojíme len z charakteristických kružníč.

**Príklad 10** (Bienert). Majme krivku s parametrizáciou  $m(t) = (t, t^2, \frac{t^3}{10}), t \in \mathbb{R}$ . Na tejto krivke zostrojme jednoparametrický systém elipsoidov so škálovaním v dotykovom smere krivky  $a$  a v normálowych smeroch krivky  $b$ . Krivost krivky  $m(t)$  je

$$\kappa(t) = \frac{200\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 100}}{\sqrt{t^4 + 400t^2 + 100}}.$$

**Príklad 11** (Elipsa). Majme rovinnú krivku s parametrizáciou  $m(t) = (4 \cos t, 2 \sin t, 0), t \in \mathbb{R}$ . Na tejto krivke zostrojme jednoparametrický systém elipsoidov so škálovaním v dotykovom smere krivky  $a$  a v normálowych smeroch krivky  $b$ . Krivost krivky  $m(t)$  je

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{3 \sin^2(t) + 1}}.$$

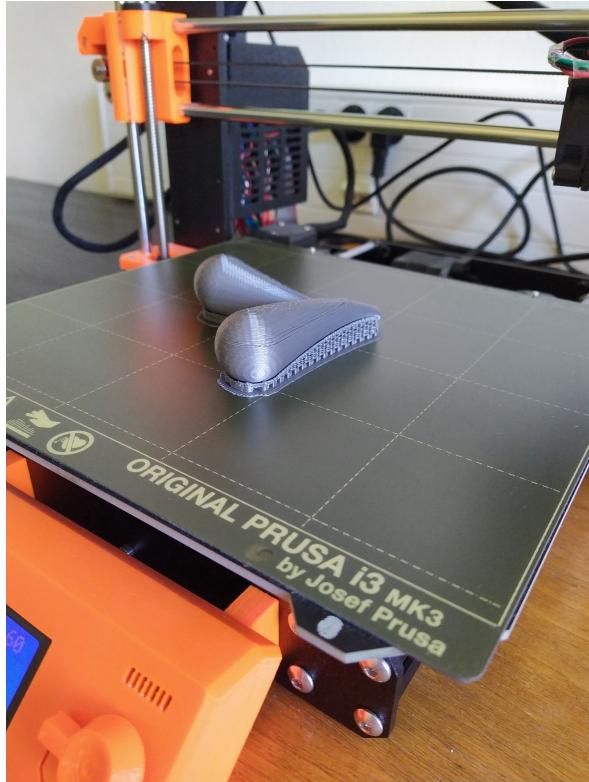
### 4.3 3D tlač

Časti vytvorené z kružníc spojené automaticky generovaným meshom sme spojili s elipsoidmi a tak sme plochu mohli exportovať ako .stl súbor a pripraviť na 3D tlač cez PrusaSlicer uložením do formátu .gcode. S 3D tlačou bolo spojených niekoľko komplikácií. Pri prvých pokusoch sme zrejme použili nesprávnu kombináciu typu výplne, teda filamentu a rýchlosťi tlačenia a teploty.



Obr. 4.2: Prvý pokus 3D tlače.

Neskôr tlačiareň odmietala tlač z SD karty, tak sme využili tlač z počítača pomocou softvéru Pronterface. Tlač z počítača bola mierne nepraktická, keďže musel byť celý čas zapnutý a pripojený k tlačiarne, ktorá nedisponovala káblom potrebnej dĺžky. Po niekoľkých úspešných výtlačkoch začala tlačiareň škrípať a bolo potrebné ju namazať a znova kalibrovať. Potom sme zistili, že tlačiareň podporuje tlač z SD karty, ktorá k nej bola dodaná a tlač už prebiehala pomerne bez problémov. Pri našej veľkosti plôch tlač trvala 90 až 150 minút. Plochy bolo potrebné škálovať, pretože boli príliš malé. Plochy bolo potrebné rôzne škálovať, príliš tenké časti by boli krehké. Použili sme škálovanie 500 – 750%. Vytlačili sme zopár prototypov a tri sady plôch, kde jedna sada obsahuje jednoparametrický systém sfér, obálku sfér, jednoparametrický systém elipsoidov a obálku elipsoidov. Po tlači sme ešte odstránili podporné štruktúry a tak sme dostali výsledné plochy.



Obr. 4.3: Plocha v 3D tlačiarni.

## 4.4 Otvorené problémy

Ak by sme chceli mať spájanie charakteristických kružníc plne automatizované, narazili by sme na niekoľko problémov. Na obr. 4.4(a) sa pletivo medzi kružnice síce doplnilo očakávaným spôsobom, no v našom prípade to nesedí s požadovaným tvarom výslednej plochy. Takisto sú výzvou uzavreté plochy a samoprieky plôch ako na obr. 4.4(b).

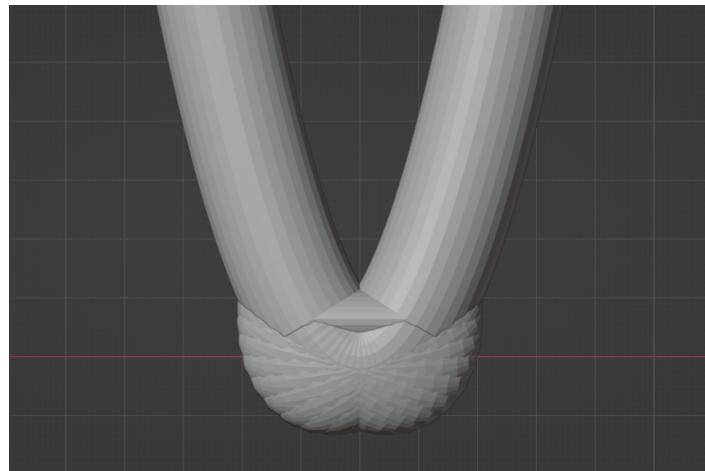
Ak by sme pre parametre  $t$ , v ktorých  $\kappa(t) > \lambda$  generovali charakteristickú elipsu a charakteristickú kružnicu namiesto elipsoidu, narazili by sme taktiež na problém vhodného spojenia týchto objektov a taktiež vygenerovaného pletiva.

## 4.5 Budúca práca

V budúcom výskume na matematickej úrovni môžeme uvažovať odlišný faktor škálovania  $c \neq b$  v binormálom smere  $\vec{b}$  Frenetovho lokálneho súradnicového systému  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  ku krivke  $m(t)$ . V tomto prípade by sme ako prienik roviny prechádzajúcej stredom elipsoidu nedostali charakteristickú kružnicu, ale elipsu.

Ďalším možným smerom rozšírenia práce je namiesto konštantného škálovania použiť funkcie škálovania  $a(t), b(t)$ , príp.  $c(t)$ , napríklad funkcie normy vektorov Frenetovho repéra,  $a(t) = \|\vec{t}\|$ ,  $b(t) = \|\vec{n}\|$  a  $c(t) = \|\vec{b}\|$ .

Nasledujúcim krokom by mohlo byť upustenie od škálovania v jednotlivých smeroch



(a) Spojenie kružníc.



(b) Uzavretá plocha so samoprieniukmi.

Obr. 4.4: Doplnenie pletiva.

Frenetovej bázy a škálovať jednoparametrový systém elipsoidov ľubovoľne.

V implementačnej časti by pokračovanie predstavovalo zostrojenie obálky iba pomocou charakteristických kriviek, teda kružníc a elíps a taktiež vývoj plne automatického algoritmu na doplnenie pletiva medzi objektami. Tiež by mohla byť vytvorená aplikácia s interaktívou možnosťou zmeny parametrov škálovania.

# Záver

Hlavným cieľom práce bolo vypočítať obálku jednoparametrického systému plôch druhého stupňa  $Q$ , kde sme za plochu druhého stupňa považovali elipsoid naškálovaný v dotykovom smere krivky  $m(t)$  konštantou  $a$  a v ostatných smeroch krivky konštantou  $b$ . Obálku jednoparametrického systému elipsoidov  $Q$  sme počítali rovnakým prístupom ako obálku jednoparametrického systému sfér  $S$ , a to tak, že sme v každom parameteri  $t$  systému  $Q$  zistili prienik systému s jeho deriváciou  $\dot{Q}$ . Systém ležal na krivke  $m(t)$ , kde  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Zistili sme, že v každom parametri  $t$  je prienikom systémov  $Q$  a  $\dot{Q}$  kružnica a v tých parametroch  $t$ , pre ktoré platí

$$\kappa(t) > \lambda,$$

kde  $\kappa(t)$  je krivosť krivky  $m(t)$  a  $\lambda = \left| \frac{b}{a^2 - b^2} \right|$  je funkciou škálovacích faktorov, je prienikom systémov aj elipsa.

Obálky sfér a elipsoidov sme zostrojili v programe Blender pomocu Blender Python API. Pre

$$\kappa(t) \leq \lambda,$$

sme v  $t$  vykreslili charakteristickú kružnicu a pre

$$\kappa(t) > \lambda,$$

sme v  $t$  vykreslili pôvodný elipsoid zo systému. Potom sme charakteristické kružnice pospájali nástrojom programu Blender, ktorý automaticky vygeneroval pletivo.

Týmto spôsobom sme zostrojili menšiu databázu jednoparametrických systémov sfér, jednoparametrických systémov elipsoidov a ich obálok, ktorá sa nachádza spolu s ďalšími súbormi na webovej lokalite v GitHub repozitári <https://github.com/tutka13/Masters-Thesis/tree/main>.

Niekoľko plôch sme vytlačili v 3D tlačiarni.

V prvej kapitole sme uviedli prehľad obálok v rovine, prístupy výpočtu a tiež odvodenie rovníc pre obálku systému sfér. V druhej kapitole sme odvodili rovnice obálky systému elipsoidov. Tretia kapitola pozostáva zo špecifikácie algoritmov, vymenovania a zdôvodnenia použitého softvéru, postupu implementácie a parametrov 3D tlače. Vo štvrtej kapitole sme ilustrovali výsledky práce na konkrétnych príkladoch, spomenuli

sme ťažkosti v oblasti 3D tlače a identifikovali sme otvorené problémy. Taktiež sme naznačili možnosti budúcich výskumných smerov.

# Literatúra

- [1] Blender documentation: Blender 4.0 Reference Manual. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/manual/en/latest/index.html>.
- [2] Blender documentation: Blender 4.0 Python API Documentation. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/api/current/>.
- [3] Blender download. Dostupné na internete: <https://www.blender.org/download/>.
- [4] Biernet A. 2016. Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Naturwissenschaftliche Fakultät III. Halle (Saale). Dissertation. Dostupné na internete: <https://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/2416652>.
- [5] Bruce J. W., Giblin P. J. 1992. Envelopes. In *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory* (pp. 99-132). Cambridge: Cambridge University Press. Dostupné na internete: doi:10.1017/CBO9781139172615.007.
- [6] Bruce J. W., Giblin P. J. 1981. What Is an Envelope? *The Mathematical Gazette*, 65(433), 186-192. Dostupné na internete: <http://www.jstor.org/stable/3617131>.
- [7] Čižmár J. 2017. *Dejiny matematiky*. Bratislava. Perfekt. ISBN 978-80-8046-829-3.
- [8] do Carmo M. P. 2017. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York. Dover Publications Inc., Mineola. ISBN 978-0-486-80699-0.
- [9] Desmos Graphing Calculator. 2011. Amherst, Desmos. Dostupné online: <https://www.desmos.com/calculator>.
- [10] DeepL. Dostupné online: <https://www.deepl.com/translator>.
- [11] Fake-bpy-module. Dostupné na internete: <https://github.com/nutti/fake-bpy-module>.

- [12] Grossfield A. 1997. What Are Differential Equations: A Review Of Curve Families. Paper presented at 1997 Annual Conference, Milwaukee, Wisconsin. 10.18260/1-2-6898. Dostupné na internete: <https://216.185.13.174/what-are-differential-equations-a-review-of-curve-families>.
- [13] Chalmovianská J. Skriptá k predmetu Algebraická geometria. Dostupné na internete: <http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~pilnikova/ag1.html>.
- [14] ChatGPT 3.5. Dostupné online: <https://chat.openai.com/>.
- [15] Chudinov P. 2009. Numerical-analytical Algorithm for Constructing the Envelope of the Projectile Trajectories in Midair. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.0520>.
- [16] Ivanov A.B. Surface of the second order. *Encyclopedia of Mathematics*. Volume 10. ISBN 1402006098. [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Surface\\_of\\_the\\_second\\_order&oldid=24131](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Surface_of_the_second_order&oldid=24131).
- [17] Jupyter Notebook. <https://jupyter.org/>.
- [18] Karčiauskas K., Krasauskas R. 2000. Rational rolling ball blending of natural quadrics. *Mathematical Modelling and Analysis*, Volume 5, Pages 97-107. Dostupné na internete: [https://www.researchgate.net/publication/233265253\\_Rational\\_rolling\\_ball\\_blending\\_of\\_natural\\_quadrics](https://www.researchgate.net/publication/233265253_Rational_rolling_ball_blending_of_natural_quadrics).
- [19] Korbaš J. 2013. *Prednášky z lineárnej algebry a geometrie*. Prvé vydanie. Univerzita Komenského v Bratislave: Vydavateľstvo UK. ISBN 978-80-223-3408-2.
- [20] Lee J. 2012. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. New York. Springer. 2. edition. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [21] Maxima documentation: Maxima 5.47.0 Manual. Dostupné na internete: [https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima\\_singlepage.html](https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_singlepage.html).
- [22] Maxima download. Dostupné na internete: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
- [23] Mészárosová K., Rückschlossová T., Tereňová Z. 2018. *Deskriptívna geometria II. Druhá časť – Priamkové, translačné, klinové a kanálové plochy*. STU v Bratislave. ISBN 978-80-227-4767-7. Dostupné na internete: <https://www.math.sk/skriptaDG2/2/>.

- [24] Glaeser G., Odehnal B., Stachel H. 2016. *The Universe of Conics*. Berlin Heidelberg. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-45449-7. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-45450-3>.
- [25] Odehnal B., Stachel H., Glaeser G. 2020. *The Universe of Quadrics*. Vienna. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-61052-7. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61053-4>.
- [26] Peternell M., Pottmann H. 1997. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, Volume 23, Issues 2–3, Pages 255-266, ISSN 0747-7171. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0087>.
- [27] Peternell M., Odehnal B., Sampoli M. L. 2008. On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 25, Issues 4–5, Pages 342-355, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.10.007>.
- [28] Peternell M., Pottmann H. 1998. A Laguerre geometric approach to rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 3, Pages 223-249, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00024-1](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00024-1).
- [29] Pip. Dostupné na internete: <https://pip.pypa.io/en/stable/>.
- [30] Pottmann H., Peternell M. 2009. Envelopes – Computational Theory and Applications. Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Budmerice. Dostupné na internete: <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/ig/peternell/env.pdf>.
- [31] Pottmann H., Peternell M. 1998. Applications of Laguerre geometry in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 2, Pages 165-186, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00023-X](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00023-X).
- [32] Pottmann H., Wallner, J. 2001. *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag. ISBN 3-540-42058-4.
- [33] PrusaSlicer download. Dostupné na internete: <https://www.prusa3d.com/cs/>.
- [34] Příručka 3D tiskaře. Dostupné na internete: <https://help.prusa3d.com/cs/downloads>.
- [35] Pronterface download. Dostupné na internete: <https://www.pronterface.com/>.

- [36] Pronterface setup. Dostupné na internete: <https://all3dp.com/2/pronterface-how-to-download-install-and-set-it-up/>.
- [37] Python documentation. Dostupné na internete: <https://docs.python.org/3/>.
- [38] Python download. Dostupné na internete: <https://www.python.org/downloads>.
- [39] Skopenkov M. et al. 2020. Characterizing envelopes of moving rotational cones and applications in CNC machining, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 83, 101944, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101944>.
- [40] Visual Studio Code download. Dostupné na internete: <https://code.visualstudio.com/download>.
- [41] Vráblíková J. 2022. Envelopes of implicit surfaces. Mathematical Institute of Charles University. Prague. Master's thesis. Dostupné na internete: <https://dodo.is.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/171858/120411574.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- [42] Zlatoš P. 2011. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Bratislava. Marenčin PT. ISBN 978-80-8114-111-9.
- [43] Obrázok Webbov Most. Dostupné na internete: <http://www.yannarthusbertrand2.org/collection/australia/#mwl-3844>.
- [44] Obrázok Rolling ball blends. Dostupné na internete: [https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb\\_abs/parblrb\\_abs.html](https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb_abs/parblrb_abs.html).
- [45] Obrázok Hudobné divadlo a výstavná sieň. Dostupné na internete: <https://www.archdaily.com/789123/music-theatre-and-exhibition-hall-massimiliano-and-dorian-fuksas>.

Všetky online zdroje boli dostupné dňa 12.04.2024.

Pri príprave tejto práce boli použité nástroje UI [10] a [14] za účelom prekladu textov, kontroly chýb v syntaxi kódu a v prostredí LATEX. Za správnosť výslednej podoby textu zodpovedá autorka.

# Príloha A

Výpočet obálky pomocou Gröbnerovej bázy pre príklad 3 so sústavou rovníc

$$F^\lambda = 4t^6 - 4t^5y + t^4y^2 + 7t^4 - 8t^3y + 2t^2y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,$$

$$F_t^\lambda = 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2t + 4t - 4y.$$

Uvažujme lexikografické usporiadanie monómov  $t >_{\text{lex}} x >_{\text{lex}} y$ . Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$L_{\text{lex}} = \{l_1, \dots, l_6\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} l_1 = & 8232129896496000t^3 - 15949751674461t^2y^7 - 161384046512557t^2y^5 \\ & - 1204463505481071t^2y^3 - 6169809854717575t^2y + 15430671472tx^2y^{12} \\ & + 426513396863tx^2y^{10} - 15006102325790tx^2y^8 - 319921877859794tx^2y^6 \\ & + 3932980083404115tx^2y^4 + 26096343414243210tx^2y^2 \\ & - 5927133525477120tx^2 + 8232129896496000t - 89991676024704x^6y^3 \\ & + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 + 5668842986368x^4y^7 \\ & - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 - 17414290688695056x^4y \\ & - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 + 43203483205279x^2y^7 \\ & - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 + 19070089710359527x^2y \\ & - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 - 1204463505481071y^3 \\ & - 6169809854717575y, \\ l_2 = & 1029016237062t^2x^2 + 3835312tx^2y^{11} + 224556467tx^2y^9 + 2456837050tx^2y^7 \\ & - 42939029714tx^2y^5 - 622020302148tx^2y^3 - 2792792777023tx^2y \\ & - 22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\ & + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\ & + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\ & - 1254254177448x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 = & 171502706177t^2y^8 + 2058032474124t^2y^6 + 14749232731222t^2y^4 \\
& + 51450811853100t^2y^2 + 107189191360625t^2 + 8570784208tx^2y^{11} \\
& + 447143859077tx^2y^9 + 2637043681390tx^2y^7 - 114540691274161tx^2y^5 \\
& - 650595377992068tx^2y^3 - 329349595559310tx^2y - 49984813501056x^6y^2 \\
& + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 + 1466755633792x^4y^6 \\
& + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 + 188859580240104x^4 \\
& - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 + 53352589022478x^2y^6 \\
& + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 - 296888240050025x^2 \\
& + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 \\
& + 10718919136062514749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625, \\
l_4 = & 3319374168tx^4 + 4112tx^2y^{12} + 419465tx^2y^{10} + 11960430tx^2y^8 + 9104606tx^2y^6 \\
& - 3087637940tx^2y^4 - 14225835735tx^2y^2 - 3841868250tx^2 - 23981184x^6y^3 \\
& - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 + 484488324x^4y^3 \\
& + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 + 1348048703x^2y^5 \\
& + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y, \\
l_5 = & 16tx^2y^{13} + 1321tx^2y^{11} + 29688tx^2y^9 - 92522tx^2y^7 - 7839424tx^2y^5 \\
& - 31597167tx^2y^3 - 1560600tx^2y - 93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 \\
& - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 \\
& - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 \\
& + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2, \\
l_6 = & 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
& - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
& - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2.
\end{aligned}$$

Eliminovaná Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$G_{lex} = \{g_1, \dots, g_6\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}
g_1 = & -89991676024704x^6y^3 + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 \\
& + 5668842986368x^4y^7 - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 \\
& - 17414290688695056x^4y - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 \\
& + 43203483205279x^2y^7 - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 \\
& + 19070089710359527x^2y - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1204463505481071y^3 - 6169809854717575y, \\
g_2 = & - 22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\
& + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\
& + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\
& - 1254254177448x^2, \\
g_3 = & - 49984813501056x^6y^2 + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 \\
& + 1466755633792x^4y^6 + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 \\
& + 188859580240104x^4 - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 \\
& + 53352589022478x^2y^6 + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 \\
& - 296888240050025x^2 + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 \\
& + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
g_4 = & - 23981184x^6y^3 - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 \\
& + 484488324x^4y^3 + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7, \\
& + 1348048703x^2y^5 + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
g_5 = & - 93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 \\
& + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} \\
& + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2, \\
g_6 = & 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
& - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
& - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2.
\end{aligned}$$

Body  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  splňajúce uvedené rovnice určujú obálku z príkladu 1.4.