

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024

BC. JANA TUTKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Počítačová grafika a geometria
Študijný odbor: 1113 Matematika
Školiace pracovisko: Katedra algebry a geometrie
Školiteľ: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Bratislava, 2024
Bc. Jana Tutková



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jana Tutková
Študijný program: počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Obálka systému plôch
Envelope of a system of surfaces

Anotácia: Cieľom práce je študovať základné vlastnosti obálky systému plôch. Zameriame sa na jednoparametrické systémy kvadrík v trojrozmernom priestore. Okrem teoretických podkladov očakávame aj numerické experimenty a príklady postupov. Načrtujeme aplikácie, v ktorých sa obálky používajú.

Cieľ: Študovať a opísať niektoré vlastnosti obálky systému kvadratických plôch.

Literatúra: do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Dover Publications Inc., 2017
Pottmann, Wallner: Computational Line Geometry, Springer, 2001

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Vedúci: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.
Katedra: FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie
Vedúci katedry: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce: prípustná pre vlastnú VŠ

Dátum zadania: 13.12.2022

Dátum schválenia: 14.12.2022

doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie: Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať môjmu školiteľovi doc. RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD. za odborné vedenie diplomovej práce, cenné rady, pripomienky a čas strávený na konzultáciách.

Abstrakt

Tutková J., Bc. Obálka systému plôch. Univerzita Komenského v Bratislava. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra algebry a geometrie. Bratislava, 2024.

Táto práca sa zaoberá výpočtom obálky jednoparametrického systému elíps v \mathbb{R}^2 a elipsoidov v \mathbb{R}^3 , pričom elipsy a elipsoidy sú konštantne škálované faktorom a v dotykovom smere krivky $m(t)$ a faktorom b v ostatných smeroch krivky. Výpočet je založený na známej teórii obálky jednoparametrického systému sfér v \mathbb{R}^3 . Na určenie obálky využijeme symbolické a numerické výpočty v programovacom prostredí Python a vypočítané plochy vizualizujeme v 3D modelovacom softvéri Blender.

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Abstract

Tutková J., Bc. Envelope of a system of surfaces. Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Algebra and Geometry. Bratislava, 2024.

This thesis deals with the computation of the envelope of a one-parameter system of ellipses in \mathbb{R}^2 and ellipsoids in \mathbb{R}^3 , where these ellipses are scaled by a constant factor a in the tangent direction of the curve $m(t)$ and by a factor b in the other directions of the curve. The computation is based on known theory of envelopes of a one-parameter system of spheres in \mathbb{R}^3 . To determine the envelope, we use symbolic and numerical calculations in the Python programming environment and visualize the calculated surfaces in the 3D modeling software Blender.

Keywords: envelope of surfaces, system of surfaces

Obsah

Úvod	1
1 Prehľad problematiky	3
1.1 Aplikácie obálok	3
1.2 Jednparametrický systém	5
1.3 Obálka jednparametrického systému nadplôch	7
1.4 Výpočet obálky	13
1.4.1 Prístup algebraickej geometrie	13
1.4.2 Prístup projektívnej geometrie	15
1.4.3 Kinematický prístup	16
1.4.4 Obálky a ODR	17
1.4.5 Lokálne prieniky	18
1.5 Obálka sfér	20
1.6 Charakteristická kružnica	20
2 Matematický model	23
2.1 Obálka sfér	23
2.2 Obálka elipsoidov	24
2.3 Obálka elíps	25
2.3.1 Zmena bázy	25
2.3.2 Výpočet obálky elíps	26
2.4 Obálka elipsoidov	27
3 Špecifikácia a implementácia	29
3.1 Špecifikácia	29
3.1.1 Požiadavky	29
3.2 Blender	31
3.2.1 Skriptovanie	31
3.3 Python	32
3.3.1 Knižnice	32
3.4 Implementácia	33

3.4.1	Visual Studio Code	33
3.4.2	Jupyter Notebook	33
3.4.3	Inštalácia knižníc	34
4	Výsledky práce	35
	Príloha A	43
	Príloha B	47
4.1	Euklidovská teória kvadratických foriem a krivky 2. rádu	47
4.1.1	Invarianty kriviek 2. rádu	47

Zoznam obrázkov

1.1	Hudobné divadlo a výstavná sieň.	4
1.2	Webbov most.	5
1.3	Systém kružníc.	6
1.4	Zobrazenie prvkov systému.	7
1.5	Sústredné kružnice.	10
1.6	Obálka systému podľa charakterizácie.	11
1.7	Obálka systému podľa definície.	11
1.8	Systém elíps.	12
1.9	Obálka vypočítaná rezultantom.	14
1.10	Systém priamok v normálovom tvare.	17
1.11	Regulárne riešenia a obálka.	18
1.12	Technika rolling ball blends.	22

Zoznam tabuliek

Úvod

Kapitola 1

Prehľad problematiky

1.1 Aplikácie obálok

Architektúra

Projekt hudobného divadla a koncertnej sály v Tbilisi sa nachádza v Rhike Park v gruzínskom Tbilisi. Budovu tvoria dve spojené časti, pôsobiace ako obrovské kovové rúry, ktoré rámujú výhľad na rieku Kura a staré mesto. Súčasťou severnej časti budovy je sála hudobného divadla s 566 miestami na sedenie, foyer a technické priestory. Výstavná hala disponuje veľkým vstupom pre návštevníkov.

Vzhľadom na výskyt obálok v aplikáciách sa obálkam venuje veľká pozornosť. Stručne spomenieme niektoré aplikácie a odkážeme na literatúru.

Výpočet obálky pohybujúcej sa plochy sa vyskytuje pri simulácii a CNC obrábaní. CNC obrábanie (*Computer Numerical Control machining*) je výrobný subtraktívny proces, pri ktorom počítač riadi stroje, napríklad vŕtačky, frézy a sústruhy tak, aby neustále odlamovali nadbytočnosti z obrobku. Tento postup sa vykonáva, kým sa nevytvorí požadovaný tvar. Rezný nástroj vytvára pri rýchlom otáčavom pohybe okolo svojej osi rotačnú plochu. Takto vytvorená plocha je časť obálky pohybujúceho sa nástroja. CNC frézovanie má široké priemyselné využitie v odvetviach ako letecký priemysel, zdravotníctvo a spotrebná elektronika. V článku [29] sa možno dočítať viac o výpočte obálok pri 5-osovom CNC obrábaní.

Obálky sa používajú aj na výpočet trajektórie projektilu vo vzduchu. Riešime klasický problém pohybu hmotného bodu (projektilu) vrhaného pod uhlom k horizontu. S nulovou silou odporu vzduchu je analytické riešenie dobre známe, trajektória projektilu je parabola. So zohľadnením odporu vzduchu úloha nemá presné analytické riešenie, a preto sa vo väčšine prípadov rieši numericky. Silu odporu vzduchu berieme do úvahy s konštantným členom odporu. Systém trajektórií vzniká pri vrhnutí projektilu s rovnakou počiatočnou rýchlosťou, ale s rôznymi uhlami hodu. Na určenie maximálneho rozsahu letu projektilu sa tak použije rovnica obálky [11].



Obr. 1.1: Hudobné divadlo a výstavná sieň. [35]

Medzi ďalšie aplikácie obálok patrí tollerancing – krivka s kontrolou chyby, bezkolízne plánovanie pohybu robota – uvažujeme o konvexných kompaktných krivkách reprezentujúcich pohyb robota v rovine, ktorý mení svoj lokálny tvar pomocou systému afinných transformácií. Dizajn písma – konštrukcia znakov v písmach pre typografické systémy. O ďalších aplikáciach sa čitateľ dozvie v [23].

Kanálové plochy (*channel surfaces*), rúrkové plochy/potrubia (*pipe surfaces*), *rolling ball blends* a prirodzené kanálové plochy (*natural channel surfaces*) sa vyskytujú ako zmiešavacie povrchy a prechodové plochy medzi potrubiami. Kanálové plochy sú používané v počítačom podporovanom geometrickom dizajne (*Computer Aided Geometric Design*). V ďalšom texte si ukážeme ich konštrukciu ako obálku sfér.

Obálky - kanálové plochy sa využívajú aj v architektúre. Ako príklad uvádzame Webbov most (*Webb Bridge*), obr. 1.2 v Melbourne v Austrálii. Tvar mosta vzdáva hold histórii domorodého obyvateľstva a je vytvorený podľa tradičnej rybárskej pasce Koorie, ktorá sa používala na lov úhorov.



Obr. 1.2: Webbov most. [33]

1.2 Jednparametrický systém

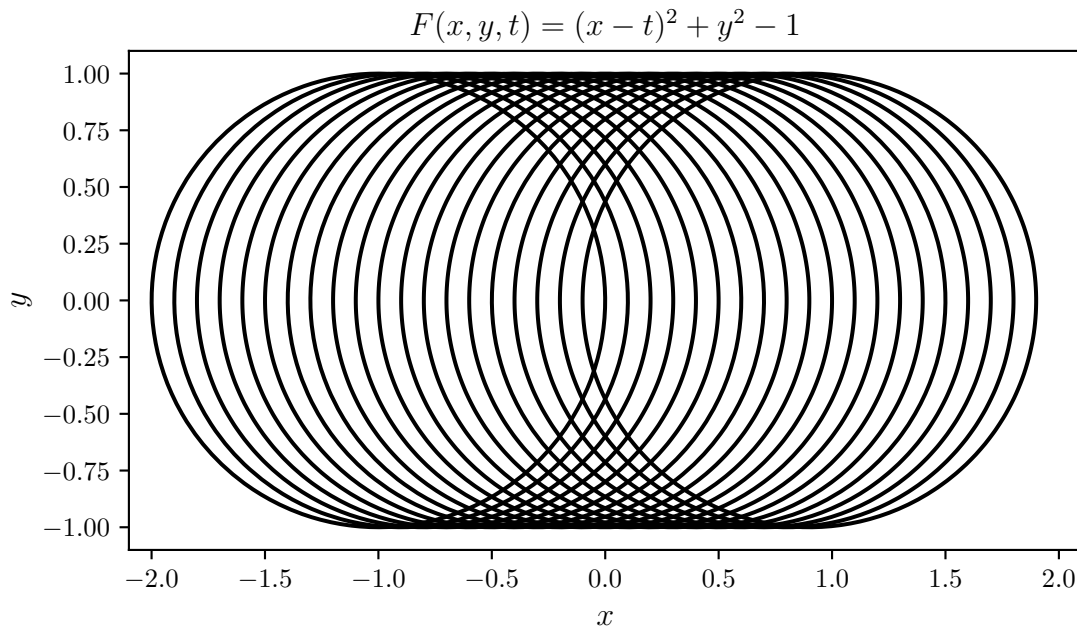
Ak nakreslíme kružnice so stredom na x-ovej osi s polomerom 1, ako na obrázku, pohľad nám upútajú horizontálne priamky $y = \pm 1$ idúce ponad a popod systém kružníc.

Každá z týchto priamok sa dotýka každej kružnice v jednom bode a v tomto bode majú spoločnú dotyčnicu. V nasledovnom texte túto myšlienku matematicky opíšeme, na základe nej zostrojíme tzv. obálku systému kriviek alebo plôch a porovnáme prístupy ich výpočtu. Budeme pracovať v reálnom vektorovom priestore so štandardným skalárnym súčinom, teda v euklidovskom priestore, rozmeru $n = 2, 3$. Najprv ilustrujeme príklady obálok a ich výpočet pre $n = 2$, neskôr pre $n = 3$. Po celý čas predpokladáme, že všetky zobrazenia sú dostatočne veľakrát diferencovateľné. Tučným písmom značíme vektorovú funkciu a parametre pre prehľadnosť zápisov vynechávame, ak sú z kontextu zrejmé.

Vo všeobecnosti, začneme v \mathbb{R}^2 s jednparametrickým systémom kriviek daným funkciou, v \mathbb{R}^3 máme jednparametrický systém plôch.

Definícia 1.1. *Nech $F: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia v premenných x_1, x_2, \dots, x_n a v parametri t , kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Definujeme jednparametrický systém nadplôch ako systém množín*

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0, t \in I\}.$$



Obr. 1.3: Systém kružníc.

V $n = 2$ budeme pre lepšiu prehľadnosť značiť premenné x_1, x_2 ako x, y , pre $n = 3$ pribudne x_3 ako z . Pre lepšiu prehľadnosť neskôr označíme dvojicu (x, y) alebo trojicu (x, y, z) ako X , potom $\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid F(X, t) = 0, t \in I\}$.

Pre horeuvedený prípad teda máme jednoparameterický systém kružníc so stredmi kružníc, ktoré ležia na úsečke parametrizovanej $(t, 0)$ pre $t \in [-1, 1]$ a konštantným polomerom pre každú kružnicu $r = 1$ daný implicitnou funkciou

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, t) = 0, t \in [-1, 1]\},$$

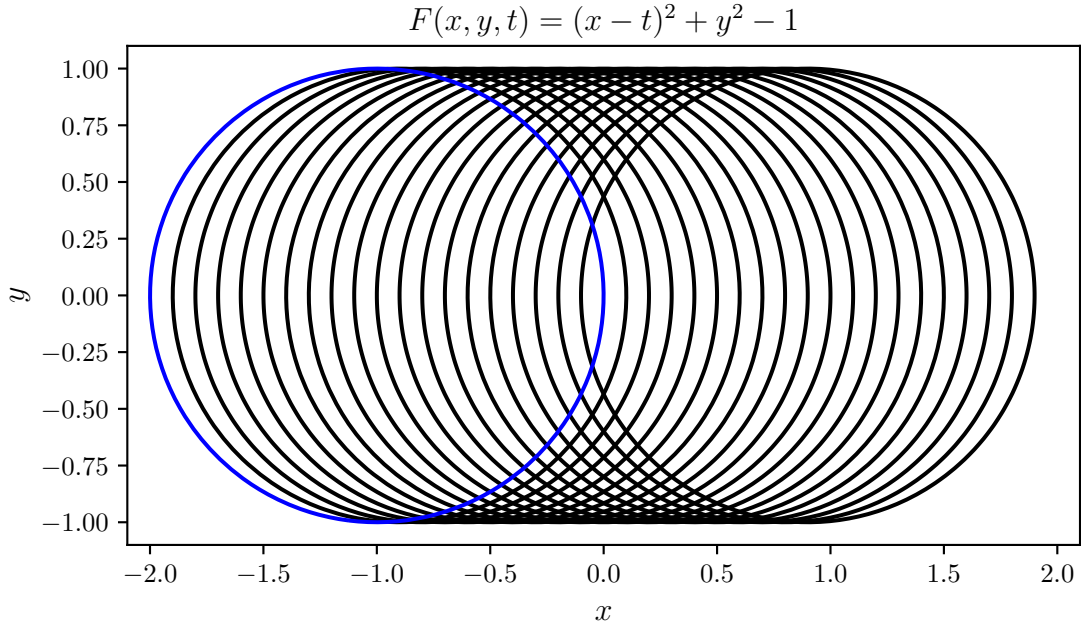
kde

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1.$$

Systém budeme ilustrovať zobrazením niektorých prvkov systému pre diskkrétne hodnoty parametra t . Pre $t = -1$ je zodpovedajúci prvok systému $\mathcal{F}_{-1} \in \mathcal{F}$ kružnica s implicitnou rovnicou

$$F_{-1}(x, y) = F(x, y, -1) = (x + 1)^2 + y^2 - 1.$$

Často budeme pre pevný parameter t_0 označovať prislúchajúcu rovnicu $F_{t_0}(X)$ a množinu bodov, ktoré rovnicu spĺňajú označíme \mathcal{F}_{t_0} .



Obr. 1.4: Modrou farbou je vyznačená kružnica systému v parametri $t = -1$.

1.3 Obálka jednoparametrického systému nadplôch

Najskôr definujeme obálku jednoparametrického systému kriviek v \mathbb{R}^2 . Uvedieme charakterizáciu obálok, ktorú možno použiť na výpočet pre jednoduchšie jednoparametrické systémy. Následne túto charakterizáciu použijeme ako definíciu pre obálku jednoparametrického systému plôch v \mathbb{R}^n .

Definícia 1.2. Definujme gradient funkcie $F: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ vzhľadom na x a y ako

$$\nabla F(x, y, t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t) \right).$$

Predpokladáme, že $\nabla F(x, y, t) \neq \vec{0}$.

Definícia 1.3. Obálkou systému kriviek \mathcal{F} je parametrizovaná krivka $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$ taká, že

1. $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$ pre všetky $t \in J$,
2. $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$.

Obálka $\gamma(t)$ sa dotýka každej krivky zo systému $F(x, y, t)$ v bode (x, y) pre nejaké t a v tomto bode má s krivkou zo systému rovnakú dotyčnicu. To znamená, že každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t , a teda platí prvá podmienka $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$. Gradient funkcie $\nabla F(x, y, t)$ je normálový vektor k $F(x, y, t)$ v regulárnom bode (x, y) a parametri t . V spoločnom bode (x, y) a parametri

t chceme rovnaký smer dotykového vektora pre $\gamma(t)$ a $F(x, y, t)$, z čoho vyplýva, že $\dot{\gamma}(t)$ a dotkový vektor k funkcii $F(x, y, t)$ sú lineárne závislé, z čoho dostávame $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$, druhú podmienku v definícii obálky. Interval J , na ktorom dostávame výslednú obálku môže byť menší ako interval I , na ktorom bol definovaný systém kriviek, teda máme $J \subseteq I$. Ak by bol gradient $\nabla F(x, y, t)$ v nejakom bode nulový, nevieme nájsť jednoznačne dotkový vektor obálky a systému.

Veta 1.1. *Regulárna krivka $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$ kde $t \in J \subseteq I$ je obálkou jednoparametrického systému \mathcal{F} práve vtedy, keď spĺňa:*

1. $F(\gamma(t), t) = 0$,
2. $\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0$.

Dôkaz. Táto odlišná charakterizácia je ekvivalentná definícii, ktorú sme postavili na geometrických podmienkach. Stačí zistiť korešpondenciu podmienok.

1. Ako sme už vysvetlili, každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu jednoparametrického systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t , teda podmienky

$$F(\gamma(t), t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$$

a

$$\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$$

sú ekvivalentné.

2. Derivujme $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ podľa parametra t , kde $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot 1 = 0.$$

Nakoľko požadujeme, aby gradient funkcie $\nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ bol kolmý na $\dot{\gamma}(t)$ tak

$$\langle \nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

teda platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) = 0,$$

z čoho dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0.$$

□

Obálka sa počíta riešením rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

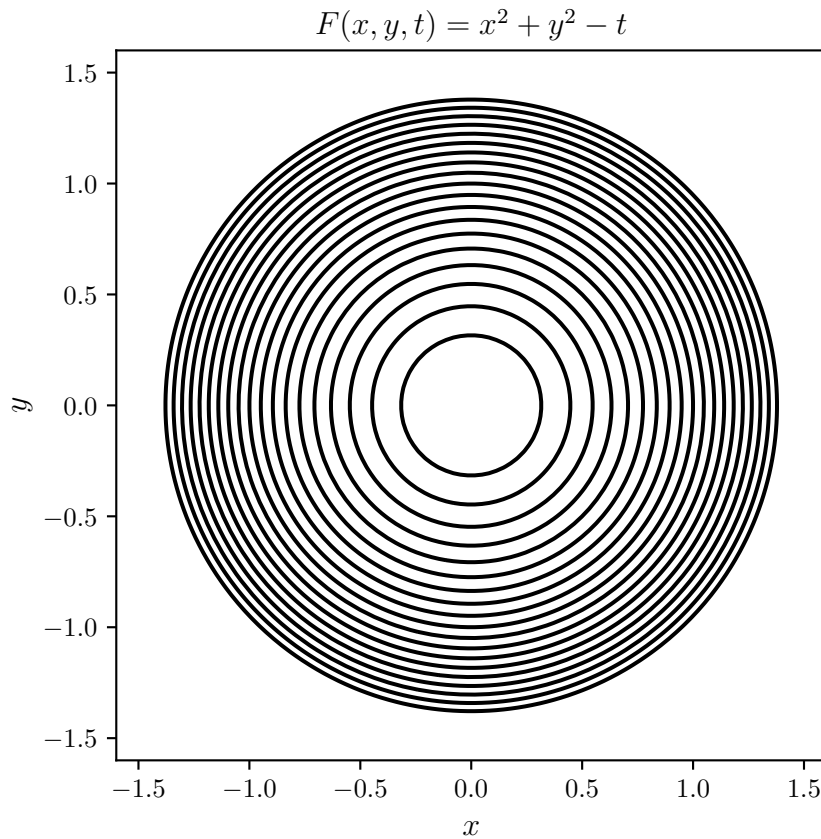
Často sa v literatúre môžeme stretnúť s rôznymi opismi obálky, ktoré však bez ďalších predpokladov nemusia definovať rovnakú množinu bodov. Príkladom je ďalšia charakterizácia obálky ako množiny limitných bodov prienikov kriviek systému. Vzťahy medzi jednotlivými charakterizáciami možno nájsť v [6].

Dokonca, daný systém nemusí mať obálku. Príkladom sú sústredné kružnice s rastúcim polomerom.

Príklad 1. Obálku systému sústredných kružníc pre $t \in I = [\frac{1}{10}, 2]$ rátame ako systém rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= x^2 + y^2 - t, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= -1. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice máme $t = -1 \neq 0$, teda systém nemá riešenie. Aj keď by sa nám mohlo zdať, že by obálkou mohli byť body kružnice s najväčším polomerom \mathcal{F}_2 a kružnice s najmenším polomerom $\mathcal{F}_{\frac{1}{10}}$, práve podmienka existencie takej krivky $\gamma(t)$, ktorá by patrila do systému kružníc \mathcal{F} pre všetky t z intervalu $J \subseteq I$, nie je splnená.



Obr. 1.5: Sústredné kružnice.

Prístup, ktorý sme využili pre jednoparametrický systém kriviek, možno zovšeobecniť pre ľubovoľný jednoparametrický systém plôch v \mathbb{R}^n .

Definícia 1.4. (Charakterizácia.) *Obálkou jednoparametrického systému plôch \mathcal{F} je množina bodov \mathcal{E} daná*

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \mid F(X, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = 0\}.$$

Ak by sme chápali obálku podľa definície ako množinu bodov, problém by sme mohli riešiť ako systém nelineárnych rovníc v parametri t , kde chceme z rovníc

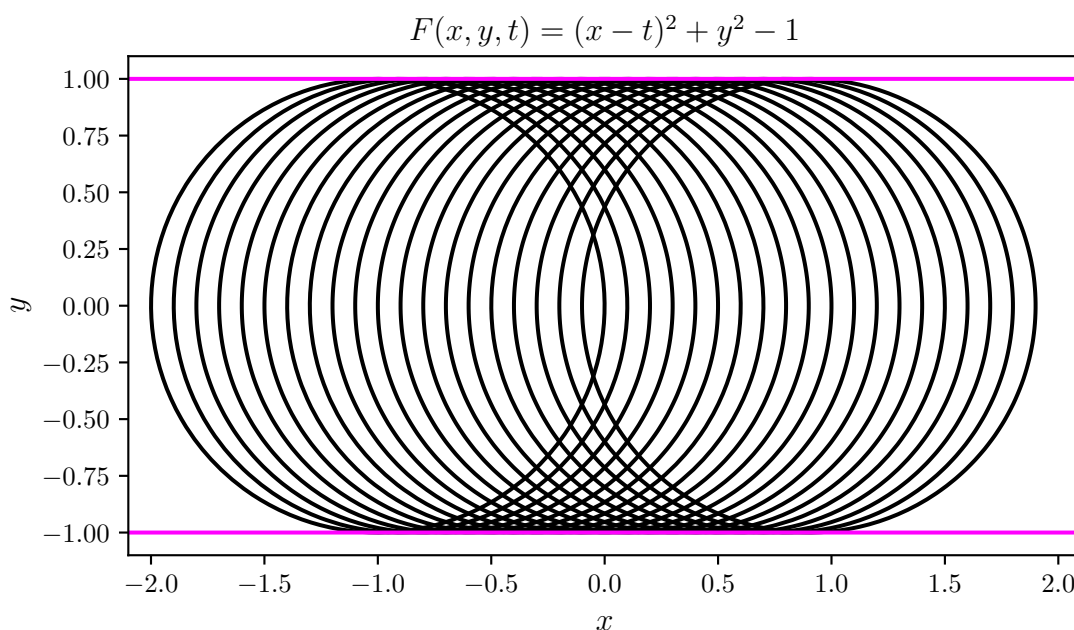
$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

eliminovať t . Na riešenie nelineárneho systému dvoch rovníc síce existujú pokročilé nástroje, no eliminovaním parametra t strácame informáciu o tom, kde je obálka definovaná.

Príklad 2. Pre náš príklad $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$ máme

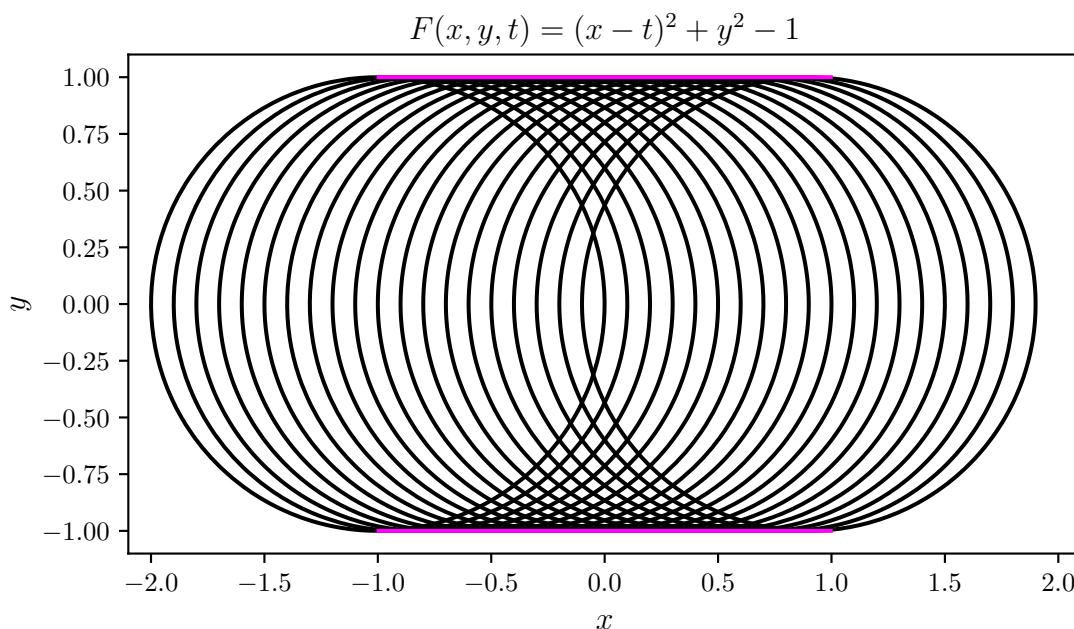
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2(t - x) = 0.$$

Ak $t = x$, tak $y^2 = 1$. Teda obálka je podľa tejto charakterizácie $y = \pm 1$, ako sme očakávali.



Obr. 1.6: Obálka systému podľa charakterizácie.

V skutočnosti sú obálkou úsečky $y = \pm 1$ definované na intervale $[-1, 1]$.



Obr. 1.7: Obálka systému podľa definície.

Tento problém možno ošetriť tak, že budeme uvažovať systémy kriviek, ktoré sú v parametri t definované na celej reálnej priamke \mathbb{R} .

Príklad 3. Počítajme obálku systému kriviek, znázorneného na obrázku 1.8, ktorý je daný vzťahmi

$$F(x, y, t) = \frac{x^2}{(t^2 + 1)^2} + (y - 2t)^2 - 1,$$

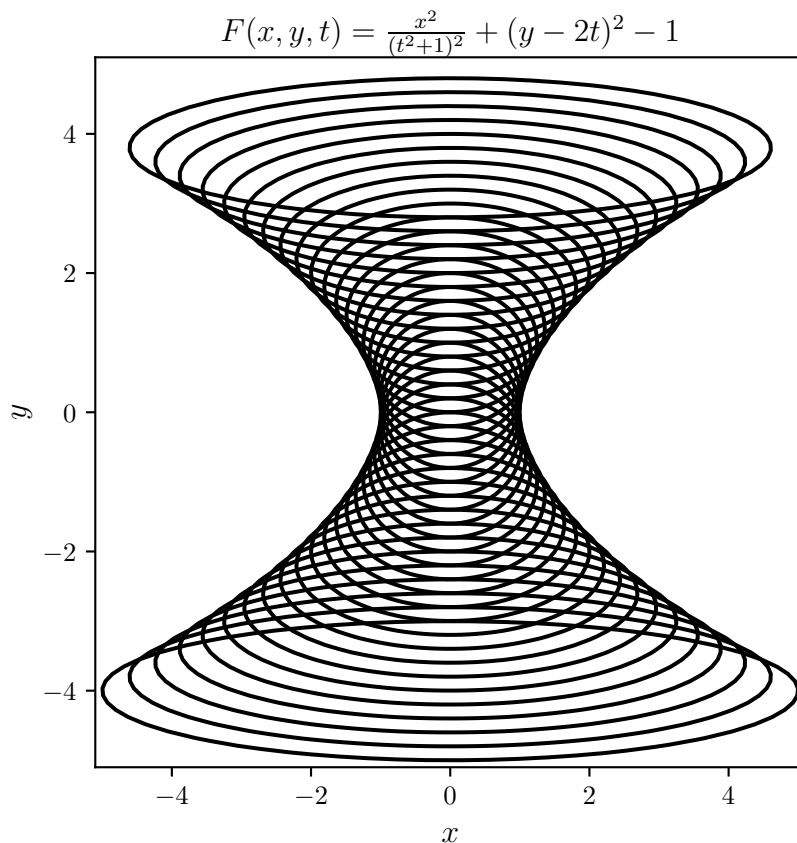
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{4x^2 t}{(t^2 + 1)^3} - 4(y - 2t).$$

Vynásobením prvej rovnice $\lambda(t) = (t^2 + 1)^2$ a derivovaním získavame

$$F^\lambda = 4t^6 - 4t^5 y + t^4 y^2 + 7t^4 - 8t^3 y + 2t^2 y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,$$

$$F_t^\lambda = 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2 t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2 t + 4t - 4y.$$

Na obrázku 1.8 je znázornený tento systém elíps pre $t \in [-2, 2]$ s krokom $\Delta t = 0.1$. Obálku nájdeme ako riešenie rovníc $F^\lambda \cap F_t^\lambda$. Rovnice sú však príliš vysokého stupňa v parametri t , preto nevieme implicitnú rovnicu obálky bez vhodného nástroja vyjadriť. V ďalšej časti rozoberieme prístupy výpočtu.



Obr. 1.8: Systém elíps.

1.4 Výpočet obálky

Vo väčšine prípadov sú rovnice charakterizujúce obálku systému plôch príliš vysokého stupňa v parametri t a nedokážeme z nich ľahko odvodiť rovnicu obálky, preto pristupujeme aj k numerickým riešeniam. Spoľahlivá aproximácia obálky je jednou z aktuálnych výskumných tém. Na začiatok si však rozoberme existujúce analytické prístupy. Naledujúce prístupy sú prevzaté z [31].

1.4.1 Prístup algebraickej geometrie

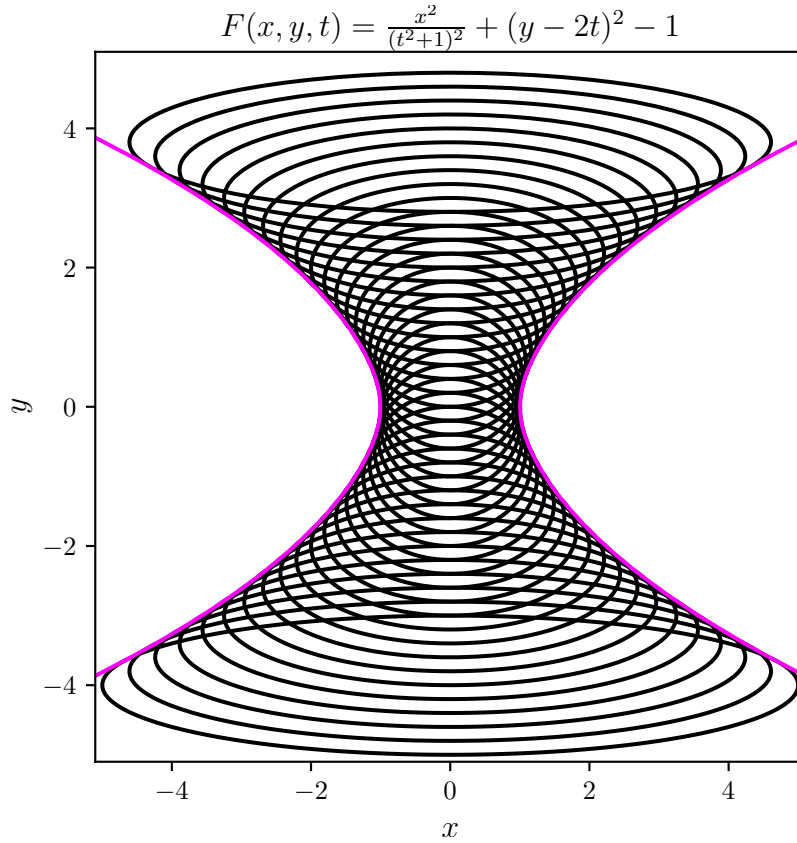
Dokonca aj v prípade jednoduchého príkladu ako 3, obe polynomicke rovnice charakterizujúce obálku sú vysokého stupňa v parametri t , preto je odstránenie parametera t náročné bez vhodného nástroja. Štandardným aparátom na túto úlohu sú Gröbnerove bázy. Gröbnerove bázy sú kľúčovým pojmom v algebraickej geometrii a počítačovej algebre. Ide o špeciálnu množinu polynómov vo viacerých premenných, ktoré majú niekoľko dôležitých vlastností a zohrávajú kľúčovú úlohu pri riešení rôznych matematických problémoch vrátane riešenia sústav polynomických rovníc, zjednodušovania polynómov a dokazovania rôznych algebraických tvrdení. Vybudovanie tejto teórie je pomerne zdĺhavé, preto odkážeme na bohaté teoretické pozadie v [10]. Najprv vypočítame Gröbnerovu bázu Buchbergerovým algoritmom pre ideál generovaný sústavou polynomických rovníc, ktorá obsahuje všetky premenné vrátane tej, ktorú chceme eliminovať. Z Gröbnerovej bázy vyberieme polynómy, ktoré obsahujú premennú, ktorú chceme eliminovať. Tieto polynómy použijeme na vyjadrenie tejto premennej v závislosti od ostatných premenných. Po vyriešení nových rovníc získame výraz, ktorý opisuje vzťah medzi zvyšnými premennými a eliminovanou premennou. Týmto spôsobom úspešne eliminujeme premennú. Pokúsme sa vypočítať Gröbnerovu bázu príkladu 3 vzhľadom na lexikografické usporiadanie monómov $t > x > y$. Keďže výpočet Gröbnerovej bázy trvá pomerne dlho, neuvádzame postup a výsledok možno nájsť v prílohe 4.

Gröbnerova báza vzhľadom na iné usporiadanie, napr. grevlex je zvyčajne vypočítaná oveľa rýchlejšie a jej polynómy majú krajšie koeficienty, no na druhej strane, tento prístup nie je vo všeobecnosti možné použiť na odstránenie premennej t z rovníc.

Existujú aj iné metódy na riešenie polynomických rovníc, ktoré nie sú závislé na usporiadaní monómov. Spôsob, ako nájsť polynóm, ktorý leží v prvom eliminačnom ideáli, ktorý je nezávislý na Gröbnerovej báze a monómických usporiadaniach, využíva teóriu rezultantov. Rezultant je determinant matice polynómov.

Hoci výpočet determinantov veľkých matíc je výpočtovo aj časovo náročný problém, existujú metódy, ako vypočítať determinant efektívnejšie. V príklade 3 uvedieme výsledný polynóm $Res(F^\lambda, F_t^\lambda, t)$ a ukážeme obálku nájdenu rezultantom, pozri 1.9.

$$\begin{aligned} \text{Res}(F^\lambda, F_t^\lambda, t) = & 191102976x^{10} + 262144x^8y^6 - 9584640x^8y^4 + 83165184x^8y^2 - \\ & 633470976x^8 - 16384x^6y^{10} - 81920x^6y^8 - 14483456x^6y^6 - 113311744x^6y^4 + 96419840x^6y^2 + \\ & 698368000x^6 - 16384x^4y^{12} - 294912x^4y^{10} - 2998272x^4y^8 - 18284544x^4y^6 - 74956800x^4y^4 - \\ & 184320000x^4y^2 - 256000000x^4. \end{aligned}$$



Obr. 1.9: Obálka vypočítaná rezultantom.

Navyše táto metóda, rovnako ako metóda založená na eliminačnej teórii s použitím Gröbnerových báz, nám vypočíta správnu obálku len vtedy, ak uvažujeme parameter t jednoparametrického systému z celej reálnej priamky. Ak obmedzíme oblasť parametra na interval, tak obálka zvyčajne nemôže byť daná implicitnou rovnicou, a preto je potrebné nájsť nejakú parametrizáciu obálky.

Pri použití rezultantov máme lepšiu kontrolu nad zložitou výpočtu. Pre dané dva polynómy totiž vieme, ako sa konštruuje rezultant, a tak vieme odhadnúť, s akými veľkými polynómami sa bude počas výpočtu manipulovať, avšak pri hľadaní Gröbnerovej bázy je ťažké odhadnúť, aké zložité S-polynómy sa behom algoritmu vyskytnú. Nie je zriedkavosťou, že S-polynómy sú podstatne komplikovanejšie než vstupné polynómy a výsledná Gröbnerova báza.

1.4.2 Prístup projektívnej geometrie

Body duálneho projektívneho priestoru \mathbb{P}^3 možno stotožniť s nadrovinami v \mathbb{R}^3 . Plochu v duálnom projektívnom priestore možno teda interpretovať ako množinu všetkých jej dotykových nadrovín. Pomocou duálneho prístupu sa dá dokázať, že obálky jednoparametrických systémov sú racionálne pre racionálne vstupné údaje. Potrebné teoretické pozadie možno nájsť v [25], z čoho čerpajú články s mnohými výsledkami [20], [21] a príklady pre výpočet obálky možno nájsť v [31].

Príklad 4. Uvažujme dva systémy kružníc \mathcal{F} s konštantným polomerom $\frac{1}{2}$ a \mathcal{G} s funkciou polomeru $\frac{t}{2}$, ktorých stredy ležia na rovinnej krivke $m(t) = (t^3, t^2)$, kde $t \in \mathbb{R}$. So systémom

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{1}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}.$$

korešponduje v cyklografickom modeli krivka $m_1 = (t^3, t^2, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^3$. Pre

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{t^2}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}$$

máme v cyklografickom modeli krivku $m_2(t) = (t^3, t^2, \frac{t}{2})$. Kružnice korešpondujúce s $t < 0$ sú negatívne orientované a orientácia sa mení pre kružnice korešpondujúce s $t > 0$. Pre $t = 0$ je prvok $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$ bod $(0, 0) \in m(t)$, čo je kružnica s nulovým polomerom a bez určenej orientácie. Krivka $m(t)$ je ortogonálna projekcia oboch kriviek m_1 a m_2 a často sa nazýva stredná os (*medial axis*) jednoparametrického systému. Pozrite si obrázok pre krivky $m_1, m_2 \subset \mathbb{R}^3$, jednoparametrické systémy \mathcal{F} a \mathcal{G} rovinných kružníc a ich stredné osy.

Rovnakým spôsobom môžeme definovať jednoparametrický systém sfér v \mathbb{R}^3 ako obraz kriviek v \mathbb{R}^4 . Jedným z dôležitých výsledkov je, že pomocou cyklografického zobrazenia racionálnej krivky možno rozhodnúť o reálnosti obálky a to tak, že cyklografický obraz $m(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ má reálnu obálku práve vtedy, keď pre všetky $t \in I$ platí

$$\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle \geq 0$$

a rovnosť platí len pre izolované hodnoty t , kde za skalárny súčin vezmeme pseudo-skalárny súčin vyjadrený ako $\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle = m_1^2(t) + m_2^2(t) + \dots + m_n^2(t) - m_{n+1}^2(t)$.

Pre príklad tak 4 máme

$$\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle = 9t^4 - 4t^2 = t^2(9t^2 - 4) \geq 0, \text{ pre } t \in I = \mathbb{R} \setminus \{[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]\},$$

preto na tomto intervale existuje reálna obálka.

1.4.3 Kinematický prístup

Ďalším zo spôsobov, ako chápať jednoparametrické systémy plôch v \mathbb{R}^n je pozeráť sa na ne ako na množinu všetkých transformácií daného povrchu \mathcal{P} . Povrch \mathcal{P} sa transformuje na ostatné prvky systému prostredníctvom prvkov vhodnej grupy transformácií. Táto množina transformácií má okrem štruktúry grupy aj štruktúru hladkej variety (*smooth manifold*). Tieto grupy nazývame Lieove grupy.

Príklad 5. Ilustrujme tento postup na jednoduchom rovinnom príklade. Transformujme zobrazením g_t priamku l , kde pre každé $t \in \mathbb{R}$, zodpovedá g_t rotácii.

$$\begin{aligned} l: x(u) &= 1 \\ y(u) &= u \end{aligned}$$

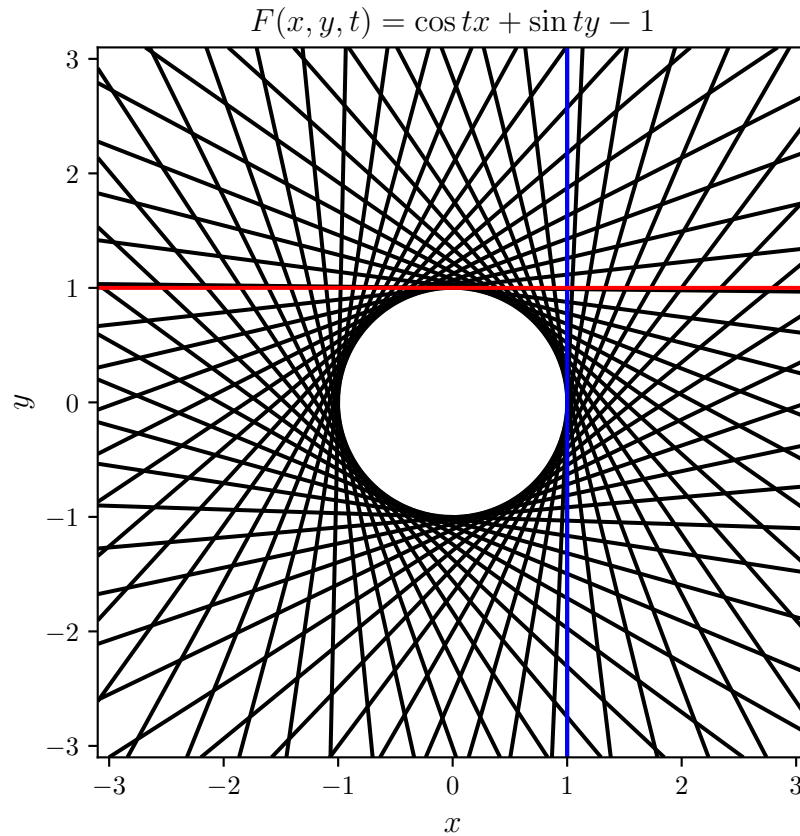
Vo všeobecnosti

$$g_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Grupa všetkých rotácií je $SO(n)$ a nazýva sa špeciálna ortogonálna grupa. Pre $t = 0$, dostávame priamku l . Pre iné t , napríklad $t = \frac{\pi}{2}$, dostávame priamku

$$\begin{aligned} g_t(l): x(u) &= -u \\ y(u) &= 1. \end{aligned}$$

Na obrázku 1.10 je znázornená priamka l modrou farbou, transformovaná priamka $g_t(l)$ červenou farbou.



Obr. 1.10: Systém priamok v normálovom tvare.

Transformácie g_t z príkladu sú prvkami Lieovej grupy $SO(n)$. Ďalšie známe príklady maticových Lieových grúp sú ortogonálna grupa $O(n)$, unitárna $U(n)$ a špeciálna unitárna grupa $SU(n)$. Pre nájdenie podrobnejších informácií, sa môže čitateľ obrátiť na ľubovoľnú úvodnú učebnicu o Lieových grupách a Lieových algebrách, ako je napríklad [15]. Použili sme štruktúru Lieovej grupy, aby sme opísali, ako sa grupa transformuje daný povrch. Ďalej, využijúc štruktúru hladkej variety môžeme opísať jednoparametrický systém plôch výlučne pomocou terminológie Lieových grúp. Táto teória sa aplikuje na nájdenie parametrizácie obálok kvadratických plôch. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [31].

1.4.4 Obálky a ODR

Obálky súvisia aj so štúdiom obyčajných diferenciálnych rovníc, a najmä ich singulárnych riešení. Predpokladajme, že jednoparametrický systém kriviek \mathcal{F} je riešením nejakej diferenciálnej rovnice prvého rádu. Potom môže existovať aj ďalšia krivka spĺňajúca túto diferenciálnu rovnicu, ktorá je dotyčnicou k \mathcal{F} v každom bode. Táto krivka je obálka. V literatúre sa nazýva aj singulárne riešenie diferenciálnej rovnice. Uvažujme ODR

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Jej regulárnym riešením sú integrálne krivky

$$y = -t^2 + 2tx, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Riešenie môžeme reprezentovať ako jednoparametrický systém kriviek \mathcal{F} s funkciou

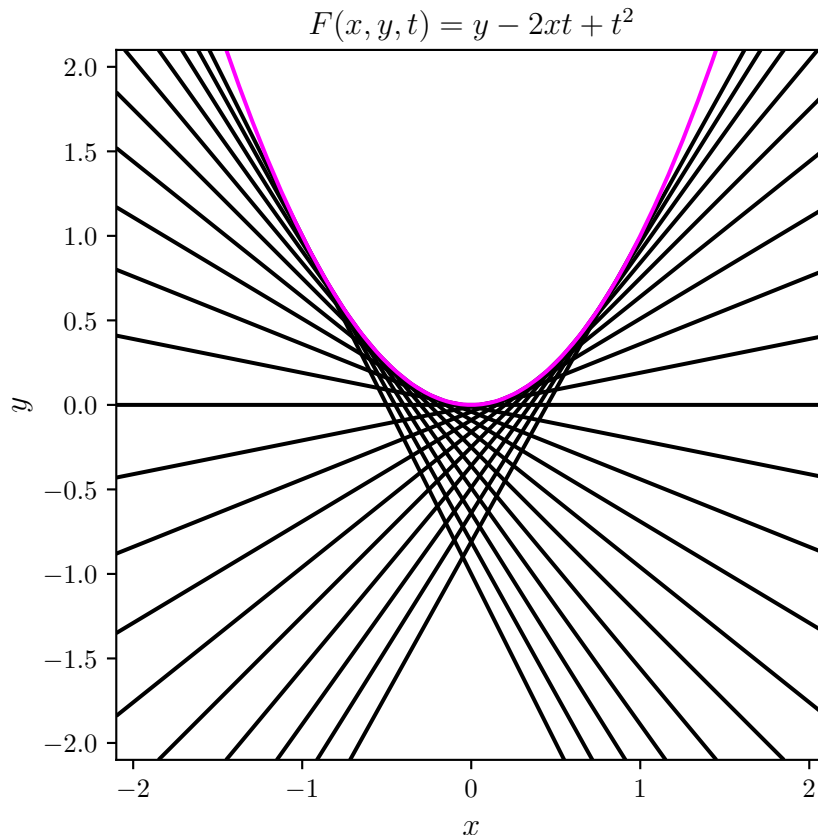
$$F(x, y, t) = t^2 - 2tx + y.$$

Derivovaním podľa parametra t dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2t - 2x,$$

z čoho máme $t = x$ a dosadením do funkcie máme $F = -x^2 + y$, teda obálka je $y = x^2$.

Obálka tohto jednoparametrického systému priamok, ktorou je parabola $y = x^2$, rieši taktiež diferenciálnu rovnicu. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [8].



Obr. 1.11: Regulárne riešenia a obálka.

1.4.5 Lokálne prieniky

Lokálny prienik systému kriviek \mathcal{F} pozostáva z prienikov nekonečne blízkyh susedných kriviek systému. Definujme túto myšlienku formálne.

Definícia 1.5 (Lokálny prienik). *Lokálny prienik systému \mathcal{F} je množina všetkých prienikov infinitezimálne blízkych prvkov pre všetky parametre $t \in I$. Označuje sa ako \mathcal{L} a platí $\mathcal{L} := \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t$ kde*

$$\mathcal{L}_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_t \cap F_{t+\varepsilon}$$

pre nejaké pevné $t \in I$.

Lokálny priesečník regulárneho systému sa v mnohých prípadoch zhoduje s jeho obálkou. Ilustrujme to na nasledovnom príklade.

Príklad 6. Vezmime dva ľubovoľné, ale odlišné prvky systému $F(x, y, t) = y - 2tx - t$. Pre fixné parametre $t_1 \neq t_2$ tak máme

$$F(x_1, y_1, t_1) = y_1 - 2t_1x_1 - t_1^2,$$

$$F(x_2, y_2, t_2) = y_2 - 2t_2x_2 - t_2^2.$$

Označme priesečník týchto dvoch priamok $Q = (q_x, q_y)^T$. Pre priesečník Q platí

$$F(Q, t_1) = 0 = F(Q, t_2),$$

odkiaľ vyplýva

$$(t_2 - t_1)(2q_x + t_1 + t_2) = 0.$$

Keďže podľa predpokladu $t_1 \neq t_2$, jediné riešenie tejto rovnice je $q_x = -\frac{t_1 + t_2}{2}$ a priesečník je potom daný

$$Q = \left(-\frac{t_1 + t_2}{2}, -t_1 t_2\right)^T.$$

Definujme $\varepsilon := t_2 - t_1$ a nechajme ε smerovať k nule, dostávame priesečník

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -t_1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ -t_1(t_1 + \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1^2 \end{pmatrix}.$$

Po reparametrizácii $t_1(t) = -t$ je ľahké vidieť, že množina všetkých týchto priesečníkov $\mathcal{L} = \{(t, -t^2) : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{E}$, ktorá predstavuje lokálny priesečník, sa zhoduje s vypočítanou množinou bodov obálky.

Dôsledok 1.1. Nech je daný systém \mathcal{F} . Každý bod lokálneho priesečníka systému \mathcal{L} je aj bodom obálky systému \mathcal{E} . Teda platí

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}.$$

Dôkaz. Pre každý bod $Q \in \mathcal{L}$ lokálneho prieniku systému \mathcal{F} existuje podľa definície 1.5 aspoň jedno $t_0 \in I$, pre ktoré $Q \in \mathcal{L}_{t_0}$, a teda Q patrí do prieniku nekonečne blízkych prvkov pre \mathcal{F} pre t_0 , to znamená, že platí

$$F(Q, t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(Q, t_0) = 0,$$

čo je z definície 1.4 bod obálky \mathcal{E} . □

1.5 Obálka sfér

Označme $X \in \mathbb{R}^3$ a predpokladajme, že $m(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizácia krivky a $r(t): I \rightarrow \mathbb{R}^+$ je funkcia definovaná na tom istom intervale. Krivka m sa nazýva kostrová krivka obálky (*spine curve*) a r sa nazýva funkcia polomeru (*radius function*). Jednparametrický systém sfér \mathcal{S} je daný rovnicou

$$F(X, t) = \langle X - m(t), X - m(t) \rangle - r^2(t) = 0.$$

Podľa definície 1.4, obálku \mathcal{E} možno nájsť ako prienik systému sfér \mathcal{S} a ich derivácií $\dot{\mathcal{S}}_t$ pre všetky $t \in I$. Derivácia \mathcal{S} nám dáva roviny $\dot{\mathcal{S}}$ dané rovnicou

$$\frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = \langle \dot{m}(t), X - m(t) \rangle + r(t)\dot{r}(t) = 0.$$

Pre nájdenie obálky \mathcal{E} budeme teda hľadať prieniky sféry \mathcal{S}_t a roviny $\dot{\mathcal{S}}_t$ pre každý parameter $t \in I$.

1.6 Charakteristická kružnica

Definícia 1.6 (Charakteristická kružnica). *V prípade, že pre $t \in I$ je $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t \neq \emptyset$, sa tento prienik nazýva sa charakteristická kružnica c_t . V prípade $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t = \emptyset$, pre t neexistuje žiadna charakteristická kružnica.*

Lema 1. *Zjednotenie všetkých charakteristických kružníc c_t jednparametrického systému sfér \mathcal{S}_t je obálka \mathcal{E} tohto systému, teda platí*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t.$$

Dôkaz. Nech bod X patrí do zjednotenia kružníc $\bigcup_{t \in I} c_t$, potom existuje aspoň jedno $t_0 \in I$, pre ktoré $X \in c_{t_0}$. Keďže $c_{t_0} = \mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0}$, tak sú rovnice \mathcal{S}_{t_0} a $\dot{\mathcal{S}}_{t_0}$ splnené pre nejaké t_0 a X , a preto patrí X obálke \mathcal{E} , a teda platí inklúzia $\bigcup_{t \in I} c_t \subseteq \mathcal{E}$.

Opačne, ak X patrí obálke \mathcal{E} , existuje podľa definície 1.4 $t_0 \in I$ také, že platí $F(X, t_0) = 0$ a súčasne $\frac{\partial F}{\partial t}(X, t_0) = 0$, to znamená, že X leží v prieniku $\mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0} = c_{t_0}$ a $c_{t_0} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$. Preto platí inklúzia $\mathcal{E} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$.

Týmto je rovnosť $\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t$ dokázaná. \square

Obálka sfér sa teda skladá zo systému kružníc. Charakteristická kružnica leží celá v rovine $\dot{\mathcal{S}}_t$, takže v tejto rovine leží aj jej stred. Dotykový vektor kostrovej krivky $m(t)$ je kolmý na rovinu $\dot{\mathcal{S}}_t$, teda stred C_t charakteristickej kružnice leží na dotyčnici $T(t, s) = m(t) + s \cdot \dot{m}(t)$, $s \in \mathbb{R}$, preto stred C_t nájdeme ako

$$\dot{\mathcal{S}}_t \cap T(t, s).$$

Pre parameter s potom platí $s = \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}$, po dosadení do $T(t, s)$ získavame

$$C_t = m(t) - \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle} \dot{m}(t). \quad (1.1)$$

Rozoberme si nasledujúce dva prípady

- Ak je funkcia polomeru $r(t)$ konštantná, $\dot{r} \equiv 0$ a rovina $\dot{\mathcal{S}}_t$ obsahuje stred sféry M_t pre všetky $t \in I$, v tomto prípade možno obálku \mathcal{E} považovať za posunutie (*offset*) kostrovej krivky m . Tieto obálky sú známe ako rúrkové plochy (*pipe surfaces*). Keďže rovina $\dot{\mathcal{S}}_t$ charakteristickej kružnice c_t obsahuje stred sféry M_t v každom $t \in I$, charakteristická krivka je hlavnou kružnicou sféry a obálka \mathcal{E} je pokrytá jednoparametrickým systémom zhodných kružníc.
- Ak funkcia polomeru $r(t)$ nie je konštantná, potom $\dot{r}(t) \neq 0$ a rovina $\dot{\mathcal{S}}_t$ neprechádza stredom sféry M_t . V tomto prípade obálka \mathcal{E} patrí do triedy kanálových plôch.

Polomer l_t charakteristickej kružnice možno vypočítať z pravouhlého trojuholníka $M_t C_t P$, kde P je ľubovoľný bod na charakteristickej kružnici c_t , a teda aj na sfére \mathcal{S}_t .

$$l_t = \sqrt{r^2(t) - \|M_t C_t\|^2} = r(t) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}}.$$

V prípade, že $\|M_t C_t\| > r(t)$, sféra \mathcal{S}_t nemá s obálkou \mathcal{E} reálny kontakt.

Príklad 7. Uvažujme kostrovú krivku $m(t)$ a polomer $r(t)$

$$m(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad r(t) = \frac{t}{\sqrt{26}}.$$

potom obálka systému je daná rovnicami

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t: x^2 + y^2 + (z - t)^2 - \frac{t^2}{26} &= 0, \\ \dot{\mathcal{S}}_t: z - \frac{25}{26}t &= 0. \end{aligned}$$

Počítajme $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$. Z druhej rovnice dostaneme $t = \frac{26}{25}z$. Po dosadení do prvej rovnice, dostávame implicitnú rovnicu pre obálku \mathcal{E}

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{25}z^2 = 0,$$

čo je rovnica rotačného kužeľa.

Napríklad, pre $t = 1 \in I$ charakteristická krivka je prienikom dvoch plôch daných

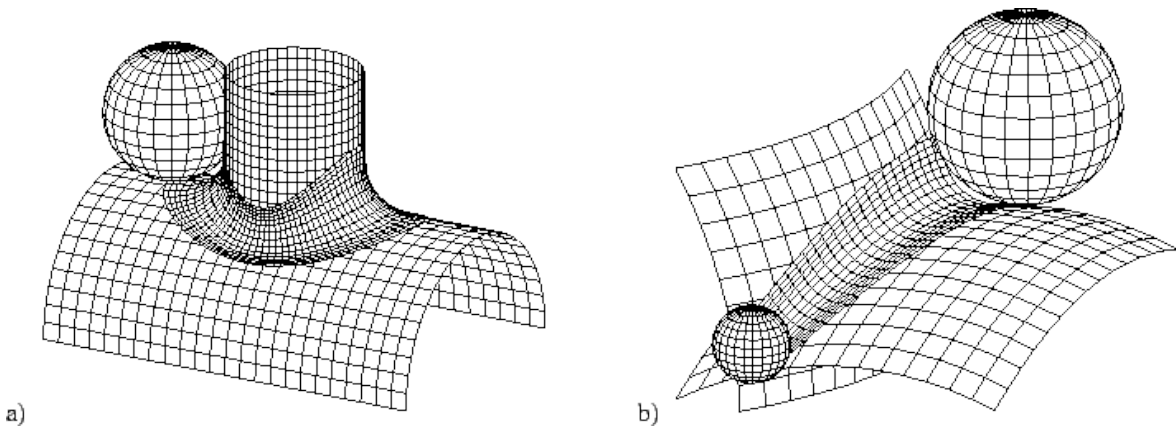
$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - \frac{1}{26} &= 0, \\ \dot{\mathcal{S}}_1: z - \frac{25}{26} &= 0.\end{aligned}$$

Z toho môžeme usúdiť, že charakteristická krivka c_1 je kružnica so stredom v bode $C_1 = (0, 0, \frac{25}{26})$ v rovine $z = \frac{25}{26}$ a neprechádza stredom sféry $M_1 = m(1) = (0, 0, 1)$, polomer c_1 je $l_1 = \frac{\sqrt{25}}{26}$. Vzdialenosť bodov $\|M_1 C_1\| = \frac{1}{26}$ a $r(1) = \frac{1}{\sqrt{26}}$, takže platí, že $r(1) > \|M_1 C_1\|$ a sféra \mathcal{S}_1 má s obálkou \mathcal{E} reálny kontakt.

Jedným z dôležitých výsledkov je, že kanálové plochy, definované ako obálka jednoparametrického systému sfér s racionálnou funkciou polomeru $r(t)$ a stredmi v racionálnej krivke $m(t)$ možno racionálne parametrizovať [19].

Bohužiaľ, vo väčšine prípadov sú rovnice, ktoré charakterizujú obálky, príliš zložité a odvodiť z nich rovnicu obálky nie sme schopní.

Rúrkové povrchy sa často objavujú pri výrobe potrubia. Hladké spojenie medzi dvoma nie nevyhnutne valcovými rúrami \mathcal{P}_1 a \mathcal{P}_2 sa modeluje tak, aby bol prechod hladký, bez záhybov, vodotesný alebo dokonca aj parotesný. Na to sa používa technika *rolling ball blends*, využívajúca nasledujúcu myšlienku: Kým sa sféra S s konštantným alebo nekonštantným polomerom r kotúľa na oboch rúrach súčasne, zanecháva stopu s_i na oboch rúrach. Zmiešavacia plocha je tá časť obálky \mathcal{E} jednoparametrického systému sfér, ktorá leží medzi dvoma stopami s_1 a s_2 . Kostrová krivka obálky \mathcal{E} je priesečníkom ekvidistánt (*offsetov*) plôch \mathcal{P}_1 a \mathcal{P}_2 vo vzdialenosti r . Každá charakteristická krivka spája dva dotykové body zmiešavacej plochy a plochami \mathcal{P}_1 a \mathcal{P}_2 , ktoré sa majú zmiešavať. Viac detailov možno nájsť v [13] a [18]. Na obrázku 1.12 vľavo je znázornená metóda so sférou s konštantným polomerom r , vpravo s nekonštantným.



Obr. 1.12: Technika rolling ball blend s konštantným polomerom vľavo, s nekonštantným polomerom vpravo. [34]

Kapitola 2

Matematický model

Upravme rovnice pre obálku sféry tak, aby zodpovedali obálke elipsoidov. Vezmime elipsoid so škálovaním v smere súradnicových osí konštantnými reálnymi číslami a, b, c . Upravme škálovanie elipsoidu tak, aby a , škálovanie v smere osi x zodpovedalo škálovaniu v dotykovom smere priestorovej krivky $m(t)$. Teda pre elipsoid s rovnicou

$$\frac{(x - m_1(t))^2}{a^2} + \frac{(y - m_2(t))^2}{b^2} + \frac{(z - m_3(t))^2}{c^2} = 1$$

zmeníme štandardnú bázu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ na bázu Frenetovho repéra $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ v každom bode krivky $m(t)$. Naše očakávanie je, že obálku elipsoidu škálovaného v dotykovom smere budeme môcť zostrojiť znova ako obálku kružníc, a teda, deriváciou jednoparametrickeho systému elipsoidov je podľa parametra t bude opäť rovina. V ďalších výpočtoch budeme parameter t pre väčšiu prehľadnosť zápisov vynechávať.

2.1 Obálka sfér

Obálku sfér vieme zapísať skalárnym súčinom, no existuje však aj všeobecný zápis pre plochy druhého rádu, a to maticový

$$S : X^T M(t) X = 0,$$

kde $X = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ a $M(t)$ je symetrická matica rozmeru 4×4 , ktorej koeficienty sú závislé od $t \in I$. Rovnicu jednoparametrickeho systému sfér S

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xm_1 - 2ym_2 - 2zm_3 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - r^2 = 0,$$

tak vieme zapísať ako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & 0 & -m_2 \\ 0 & 0 & 1 & -m_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 & m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Deriváciu jednoparametrického systému sfér \dot{S}

$$-2x\dot{m}_1 - 2y\dot{m}_2 - 2z\dot{m}_3 + 2m_1\dot{m}_1 + 2m_2\dot{m}_2 + 2m_3\dot{m}_3 - 2r\dot{r} = 0$$

možno tiež zapísať v tvare $X^T \dot{M}(t)X = 0$, kde $\dot{M}(t) = \frac{\partial M(t)}{\partial t}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dot{m}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{m}_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{m}_3 \\ -\dot{m}_1 & -\dot{m}_2 & -\dot{m}_3 & 2m_1\dot{m}_1 + 2m_2\dot{m}_2 + 2m_3\dot{m}_3 - 2r\dot{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Matica $\dot{M}(t)$ reprezentuje v každom $t \in I$ rovinu, ktorej normálový vektor \vec{N} je $(-2\dot{m}_1, -2\dot{m}_2, -2\dot{m}_3)$. Vektor \vec{N} je lineárne závislý s dotykovým vektorom \dot{m} ku krivke m .

2.2 Obálka elipsoidov

Rovnako zapíšme rovnicu jednoparametrického systému elipsoidov Q

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2\frac{xm_1}{a^2} - 2\frac{ym_2}{b^2} - 2\frac{zm_3}{c^2} + \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & \frac{-m_1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & \frac{-m_2}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & \frac{-m_3}{c^2} \\ \frac{-m_1}{a^2} & \frac{-m_2}{b^2} & \frac{-m_3}{c^2} & \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

potom derivácia jednoparametrického systému elipsoidov, ktorú označíme $\dot{Q} = \frac{\partial Q(t)}{\partial t}$

$$-\frac{\dot{m}_1 x}{a^2} + \frac{\dot{m}_2 y}{b^2} + \frac{\dot{m}_3 z}{c^2} + \frac{m_1 \dot{m}_1}{a^2} + \frac{m_2 \dot{m}_2}{b^2} + \frac{m_3 \dot{m}_3}{c^2} = 0,$$

má v maticovom zápise tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_1}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} \\ \frac{-\dot{m}_1}{a^2} & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} & \frac{2m_1\dot{m}_1}{a^2} + \frac{2m_2\dot{m}_2}{b^2} + \frac{2m_3\dot{m}_3}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

\dot{Q} je rovina kolmá na dotykový vektor $\dot{m}(t)$, práve vtedy keď vektory $(\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3)$ a $(\frac{\dot{m}_1}{a^2}, \frac{\dot{m}_2}{b^2}, \frac{\dot{m}_3}{c^2})$ sú lineárne závislé. Ak budeme elipsoid škálovať tak, že a, b, c budú škálovacie faktory také, aby sa elipsoid naškaloval v dotykovom smere, tak kolmá rovina na dotykový vektor vytne kružnicu, pretože elipsoid je v ostatných smeroch homogénny. Vyriešme toto odvodenie pre jednoduchší prípad, a to prípad elíps.

2.3 Obálka elíps

2.3.1 Zmena bázy

Nech $m(t): I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je aspoň dvakrát diferencovateľná krivka, položíme elipsu Q s osami $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ na túto krivku v každom bode $t \in I$.

$$\frac{(x - m_1(t))^2}{a_0^2} + \frac{(y - m_2(t))^2}{b_0^2} = 1$$

Matica prechodu k novej báze je tvaru

$$A(t) = \begin{pmatrix} \vec{t}(t) & \vec{n}(t) \end{pmatrix},$$

čo po rozpísaní do súradníc $\vec{t}(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|}(\dot{m}_1(t), \dot{m}_2(t))$ a $\vec{n}(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|}(-\dot{m}_2(t), \dot{m}_1(t))$ dáva

$$A(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & n_1(t) \\ \dot{m}_2(t) & n_2(t) \end{pmatrix}.$$

Keďže sme maticu $A(t)$ zostrojili tak, aby bola ortogonálna, ľahko dostávame aj vyjadrenie inverznej matice

$$A^{-1}(t) = A^T(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ n_1(t) & n_2(t) \end{pmatrix}.$$

Vyjadríme elipsu Q v novej báze u, v nasledovnou transformáciou

$$\frac{u^2(t)}{a^2} + \frac{v^2(t)}{b^2} = 1,$$

kde

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ n_1(t) & n_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m_1(t) \\ y - m_2(t) \end{pmatrix}.$$

Elipsa Q sa potom transformuje na

$$\frac{1}{\|m\|^2} \left((x - m_1)^2 \left(\frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) + (y - m_2)^2 \left(\frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) \right) \quad (2.1)$$

$$+ \frac{1}{\|m\|^2} \left(2(x - m_1)(y - m_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right) - 1 = 0, \quad (2.2)$$

po miernej úprave tak dostávame výraz

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2 b^2 \|m\|^2} \left((x - m_1)^2 (b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2) + (y - m_2)^2 (a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2) \right) \\ & + \frac{1}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} (2(b^2 - a^2)(x - m_1)(y - m_2)\dot{m}_1\dot{m}_2) - 1 = 0, \end{aligned}$$

kde konštanta a zabezpečí škálovanie elipsy v dotykovom smere a konštanta b určí škálovanie v normálovom smere. Výber orientácie normály nemá na výsledok žiaden vplyv. Štandardne uvažujeme $\vec{n} = (-\dot{m}_2, \dot{m}_1)$.

Príklad 8 (Parabola). Majme parabolu s parametrizáciou $m(t) = (t, t^2)$, kde $\dot{m}(t) = (1, 2t)$. Transformujme elipsu v stredovom zápise so škálovaním v smere súradnicových osí

$$\frac{(x-t)^2}{a_0^2} + \frac{(y-t^2)^2}{b_0^2} = 1$$

na elipsu so škálovaním a v dotykovom a b v normálovom smere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2 b^2 (4t^2 + 1)} ((x-t)^2 (b^2 + a^2 4t^2) + (y-t^2)^2 (a^2 + b^2 4t^2)) \\ & + \frac{1}{a^2 b^2 (4t^2 + 1)} (2(b^2 - a^2)(x-t)(y-t^2)2t) - 1 = 0. \end{aligned}$$

2.3.2 Výpočet obálky elíps

Prepíšme rovnicu 2.1 do maticového zápisu. Máme kužeľosečku Q tvaru

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

ktorá má v maticovom tvare vyjadrenie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Všetky koeficienty matice $M(t)$ sú závislé od t a majú nasledovný tvar

$$\begin{aligned} A &= \frac{b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ B &= \frac{2(b^2 - a^2) \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ C &= \frac{a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ D &= \frac{-2m_1 (b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2) - 2(b^2 - a^2) m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ E &= \frac{-2m_2 (a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2) - 2(b^2 - a^2) m_1 \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ F &= \frac{\dot{m}_1^2 (b^2 m_1^2 + a^2 m_2^2 - a^2 b^2) + 2(b^2 - a^2) m_1 m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2 + \dot{m}_2^2 (a^2 m_1^2 + b^2 m_2^2 - a^2 b^2)}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} - 1 \end{aligned}$$

Pozrime sa deriváciu jednoparametrického systému elíps podľa parametra t . Máme teda kužeľosečku \dot{Q} tvaru

$$\dot{A}x^2 + \dot{B}xy + \dot{C}y^2 + \dot{D}x + \dot{E}y + \dot{F} = 0$$

kde \dot{A}, \dots, \dot{F} sú koeficienty matice $\dot{M}(t)$.

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= \frac{2(a^2\dot{m}_1\ddot{m}_2 - a^2\ddot{m}_1\dot{m}_2 - b^2\dot{m}_1\ddot{m}_2 + b^2\ddot{m}_1\dot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|m\|^4} \\
\dot{B} &= 2 \frac{(2a^2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 - a^2(\dot{m}_1\ddot{m}_2 + \ddot{m}_1\dot{m}_2)(\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2) - 2b^2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 + b^2(\dot{m}_1\ddot{m}_2 + \ddot{m}_1\dot{m}_2)(\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2))\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|m\|^4} \\
\dot{C} &= \frac{2(-a^2\dot{m}_1\ddot{m}_2 + a^2\ddot{m}_1\dot{m}_2 + b^2\dot{m}_1\ddot{m}_2 - b^2\ddot{m}_1\dot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|m\|^4} \\
\dot{D} &= \frac{2 \cdot (2a^2(m_1\dot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_2 + a^2(\|m\|^2(-2m_1\dot{m}_2\ddot{m}_2 + m_2\dot{m}_1\ddot{m}_2 + m_2\ddot{m}_1\dot{m}_2) - \\
\dot{E} &= \frac{2 \cdot (2a^2(-m_1\dot{m}_2 + m_2\dot{m}_1)(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1 + a^2(\|m\|^2(m_1\dot{m}_1\ddot{m}_2 + m_1\ddot{m}_1\dot{m}_2 - 2m_2\dot{m}_1\ddot{m}_1) - \\
\dot{F} &= \frac{2(a^2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)(-m_1^2(\dot{m}_2)^2 + 2m_1m_2\dot{m}_1\dot{m}_2 - m_2^2(\dot{m}_1)^2) + a^2\|m\|^4(m_1^2\dot{m}_2\ddot{m}_2 - m_1m_2\dot{m}_1\ddot{m}_2))}{a^2b^2\|m\|^4}
\end{aligned}$$

Determinant matice $\dot{M}(t) = 0$, pre všetky t , čo znamená, že kužeľosečka je singulárna.

Pozrime sa na subdeterminant

$$\dot{M}_{33}(t) = \dot{A}\dot{C} - \frac{\dot{B}^2}{4} = -\frac{(b^2 - a^2)^2}{a^4b^4} \frac{(\dot{m}_1\ddot{m}_2 - \ddot{m}_1\dot{m}_2)^2 + \dot{m}_1\dot{m}_2\ddot{m}_1\ddot{m}_2}{\|m\|^4}.$$

Hodnota $\dot{M}_{33}(t) < 0$, pre všetky t , teda kužeľosečka degeneruje na dve rôznobežné priamky.

2.4 Obálka elipsoidov

Na všetky výpočty v tejto kapitole bol použitý voľne dostupný softvér počítačovej algebry Maxima s grafickým užívateľským rozhraním wmMaxima. Celý balík a dokumentácia sú dostupné na [16], [17]. Rovnice z Maximy boli prevedené do L^AT_EXu pomocou Python skriptu `conversion-to-latex.ipynb`, ktorý sa nachádza v GitHub repozitári <https://github.com/tutka13/Masters-Thesis/tree/main/symbolic-computations>.

Kapitola 3

Špecifikácia a implementácia

V našej práci je cieľom implementácie matematicky odvodených konceptov vizualizácia vypočítaných plôch a následne aj ich 3D tlač. V tejto časti uvedieme dôvody výberu jazyka a knižníc, ktoré sme použili pre implementáciu. Takisto uvedieme špecifikáciu softvéru, demo a chyby, ktoré sa počas riešenia vyskytli. Potrebné skripty sa nachádzajú na webovom odkaze <https://github.com/tutka13/Masters-Thesis>.

3.1 Špecifikácia

3.1.1 Požiadavky

Používateľ zadá parametre pre vykreslenie 3D plôch, ktoré vypočíta a vymodeluje softvér podľa procesu workflow.

Vstup

Obálka sfér:

Zadať parametrizáciu priestorovej krivky $m(t)$ stredov sfér, funkciu polomeru $r(t)$, interval I parametra t a vzorkovanie plochy.

Obálka elipsoidov:

Zadať parametrizáciu priestorovej krivky $m(t)$ stredov elipsoidov, konštanty a a b , interval I parametra t a vzorkovanie plochy.

Výstup

Obálka sfér:

Vizualizácia jednoparametrického systému sfér, charakteristických kružníc a výslednej plochy - obálky sfér.

Obálka elipsoidov:

Vizualizácia jednoparametrického systému elipsoidov, charakteristických kružníc a výslednej plochy - obálky elipsoidov.

Workflow

Obálka sfér:

- vymazanie scény
- čítanie parametrov z textového súboru
- symbolické výpočty
- vytvorenie prázdnych polí
- numerické vyčíslenie symbolických výrazov
- uloženie hodnôt do poľa
- určenie normál charakteristických kružníc
- označenie charakteristických kružníc
- interpolácia medzi dvoma charakteristickými kružnicami
- posun plôch v priestore
- vizualizácia plôch
- uloženie scény do databázy

Obálka elipsoidov:

- čítanie parametrov
- natočenie a posun elipsoidov
- určenie parametrov škálovania
- umiestnenie elipsoidu do každého bodu krivky $m(t)$
- derivácia jednoparametrického systému plôch
- extrahovanie koeficientov
- určenie typu plochy
- nahradenie elipsoidov zodpovedajúcimi kružnicami

- výpočet natočenia kružníc
- vizualizácia plochy
- uloženie plochy do databázy

Funkcie

Zoznam funkcií, ktoré budeme potrebovať. Sféru a elipsoid nazveme plochy.

- čítanie parametrov z textového súboru
- symbolické výpočty
- derivácia
- výpočet charakteristických kružníc
- uloženie hodnôt do poľa
- interpolácia medzi 2 charakteristickými kružnicami
- posun plochy v priestore
- vizualizácia plochy
- uloženie plochy do databázy

3.2 Blender

Blender je bezplatný softvér s otvoreným zdrojovým kódom, určený pre prácu s objektmi v 3D priestore. Využíva OpenGL, štandard v priemysle pre renderovanie, a je kompatibilný s operačnými systémami Windows, Linux a macOS. Blender poskytuje širokú škálu nástrojov pre tvorbu 3D obsahu vrátane modelovania, animácie, simulácie fyzikálnych procesov, úpravy videa a efektových vizualizácií. S relatívne nízkymi nárokmi na pamäť a disk je vhodný aj pre menej výkonné počítače. Jeho rozhranie je optimalizované pomocou OpenGL pre konzistentný výkon na rôznych hardvérových platformách [2]. Pre účely tejto práce sme využili Blender 4.0.

3.2.1 Skriptovanie

Blender umožňuje rozšírenie svojej funkcionality a vytvorenie vlastných nástrojov pomocou jediného skriptovacieho jazyka Python, ktorý je integrovaný priamo do softvéru, teda nie je potreba samostatnej inštalácie. Okrem toho Blender obsahuje špeciálnu knižnicu bpy, ktorá slúži na vykonávanie príkazov v Blenderi. Na vytváranie skriptov slúži

prostredie Scripting, ktoré obsahuje okná na písanie, úpravu textu a Python konzolu. Je možné pracovať aj v externom programovacom prostredí [3].

3.3 Python

Python je interpretovaný, vysokoúrovňový a dynamický jazyk, ktorý má široké uplatnenie v rôznych odvetviach. Jeho charakteristickým rysom je používanie odsadenia, ktoré má v tomto programovacom jazyku kľúčový význam, pretože slúži ako indikátor bloku kódu. V našom softvéri pracujeme s verziou 3.11.5 jazyka Python.

3.3.1 Knižnice

Pip je systém, ktorý spravuje knižnice pre jazyk Python. Je prepojený s úložiskom pythonovských knižníc PyPI (Python Package Index). Pre jeho používanie nie je potrebná inštalácia, keďže je obsiahnutý v súboroch, ktoré používateľ získa inštalovaním Pythonu. Na výpočet a zobrazenie plôch sme využili nasledovné knižnice

- `sympy`: nástroje na symbolické výpočty, algebraické manipulácie, riešenie rovníc a ďalšie matematické operácie potrebné pre pokročilé výpočty,
- `numpy`: nástroje na manipuláciu s vektormi, maticami, poliami a ďalšími objektami potrebnými pre zložitejšie výpočty,
- `matplotlib.pyplot`: rozhranie na tvorbu vizualizácií a grafického zobrazenia dát, tvorbu grafov, histogramov, kontúrových máp a ďalších typov vizuálnych reprezentácií dát,
- `math`: základné matematické funkcie a konštanty pre numerické výpočty, obsahuje funkcie ako `sin`, `cos`, `log` a ďalšie, ako aj konštanty ako π a e ,
- `mathutils`: súčasťou Blenderu a poskytuje množstvo užitočných matematických funkcií a nástrojov pre prácu s 3D objektami, obsahuje funkcie na rotácie, transformácie, výpočet normál a ďalšie operácie v 3D priestore,
- `sys`: prístup k niektorým systémovým špecifikáciám a funkciám, medzi jej použitia patrí prístup k argumentom príkazového riadku, manipulácia so štandardnými vstupmi a výstupmi, manipulácia s cestami k súborom a niektoré informácie o systéme ako verzia Pythonu a platforma,
- `bpy`: knižnica Blenderu, ktorá umožňuje manipuláciu s objektmi v Blenderi pomocou príkazov vytvorených vo skriptoch,
- `time`: získanie času v milisekundách.

3.4 Implementácia

V tejto kapitole budeme opisovať postup vývoja nášho skriptu. Takisto opíšeme jeho funkčnosť, používateľské rozhranie a postupy, ako inštalovať potrebný softvér a knižnice. Prvým krokom bol výber programovacieho prostredia. Následne sme potrebovali nastaviť toto prostredie tak, aby sme v ňom mohli pracovať zároveň s Blenderom a inštalovať všetky potrebné knižnice. Po splnení týchto krokov sme začali vyvíjať samotný skript.

3.4.1 Visual Studio Code

Na programovanie v jazyku Python sme využívali programovacie prostredie VSCode vo verzii 1.82.2. Toto prostredie sme si vybrali pre jeho minimalistický dizajn, ktorý zjednodušuje používanie a robí ho intuitívnym a rýchlym. VSCode disponuje množstvom rozšírení, z ktorých pre našu prácu najdôležitejším je rozšírenie Blender Development. Toto rozšírenie slúži na ladenie skriptov, ktoré sa spúšťajú v prostredí Blenderu, a obsahuje aj predpripravené šablóny.

Inštalácia prostredia VSCode je možná po stiahnutí inštalačného súboru z oficiálnej webovej stránky softvéru. Po stiahnutí .zip súboru požadovanej verzie programu sme spustili inštalačný súbor dvojklikom.

Rozšírenie Blender Development sme následne stiahli priamo v prostredí VSCode kliknutím na ikonu Extensions v ľavej lište rozhrania a vyhľadaním názvu rozšírenia.

Pomocou tohto rozšírenia sme vykonávali ladenie programu pomocou klávesovej skratky Ctrl+Shift+P. Po stlačení tejto klávesovej kombinácie v prostredí VSCode sa v hornej lište zobrazilo menu, v ktorom sme vybrali možnosť Blender: Build and Start a následne Blender súbor, v ktorom sme chceli ladenie vykonať. Týmto spôsobom sa softvér spustí, a opätovným použitím klávesovej skratky Ctrl+Shift+P v programovacom prostredí a výberom možnosti Blender: Run Script sa začína proces ladenia programu.

3.4.2 Jupyter Notebook

Jupyter Notebook je výpočtový nástroj, pôvodne navrhnutý pre úlohy dátovej vedy, ktorý umožňuje interaktívnu prácu s kódom, rovnicami a vizualizáciami s podporou v 40 programovacích jazykoch. S jeho pomocou je možné vytvárať dokumenty vo formáte JSON, ktoré sú rozdelené do buniek a komunikujú s výpočtovými jadrami cez Interactive Computing Protocol. Jadrá sú zodpovedné za vykonávanie kódu a výstupy. Jupyter Notebook ponúka modulárny dizajn, ktorý umožňuje jednoduché manipulácie s jednotlivými bunkami, vrátane možnosti úpravy bunky bez ďalšieho vplyvu na zvyšnú časť kódu, spätného vrátenia sa a vymazania bunky [12].

3.4.3 Inštalácia knižníc

Pip je inštalátor balíkov pre Python. Môžete ho použiť na inštaláciu balíkov z indexu balíkov Pythonu. Python Package Index (PyPI) je úložisko softvéru pre programovací jazyk Python. Keďže sme Python stiahli z oficiálnej stránky Python [28], pip sa inštaloval automaticky [22].

Overiť, či máme nainštalovaný pip, možno pomocou príkazového riadku, ktorý otvoríme vyhľadáním cmd v ponuke vyhľadávania a zadaním

```
python -m pip --version.
```

V našom prípade pracujeme s verziou pip 24.0. Následne je možné inštalovať všetky potrebné knižnice v príkazovom riadku zadaním

```
pip install sympy  
pip install numpy  
pip install matplotlib  
pip install mathutils  
pip install math  
pip install time.
```


Kapitola 4

Výsledky práce

Záver

Literatúra

- [1] Babušíková J., Slodička M., Weisz J. 2000. *Numerické metódy*. Univerzita Komenského v Bratislave. ISBN 80-223-1384-X. Dostupné na internete: <http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/skripta.pdf>.
- [2] Blender documentation: Blender 4.0 Reference Manual. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/manual/en/latest/index.html>.
- [3] Blender documentation: Blender 4.0 Python API Documentation. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/api/current/>.
- [4] Blender download. Dostupné na internete: <https://www.blender.org/download/>.
- [5] Biernet A. 2016. Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Naturwissenschaftliche Fakultät III. Halle (Saale). Dissertation. Dostupné na internete: <https://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/2416652>.
- [6] Bruce, J. W., Giblin, P. J. 1981. What Is an Envelope? *The Mathematical Gazette*, 65(433), 186-192. Dostupné na internete: <http://www.jstor.org/stable/3617131>.
- [7] do Carmo M. P. 2017. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York. Dover Publications Inc., Mineola. ISBN-13: 978-0-486-80699-0.
- [8] Grossfield, A. 1997. What Are Differential Equations: A Review Of Curve Families. Paper presented at 1997 Annual Conference, Milwaukee, Wisconsin. 10.18260/1-2-6898. Dostupné na internete: <https://216.185.13.174/what-are-differential-equations-a-review-of-curve-families>.
- [9] Hlavička R., Růžicková I. Numerické metody. Brno. Dostupné na internete: <http://physics.ujep.cz/jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf>.
- [10] Chalmovianská, J. Skriptá k predmetu Algebraická geometria. Dostupné na internete: <http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~pilnikova/ag1.html>.

- [11] Chudinov P. 2009. Numerical-analytical Algorithm for Constructing the Envelope of the Projectile Trajectories in Midair. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.0520>.
- [12] Jupyter Notebook. <https://jupyter.org/>.
- [13] Karčiauskas K., Krasauskas R. 2000. Rational rolling ball blending of natural quadrics. *Mathematical Modelling and Analysis*, Volume 5, Pages 97-107. Dostupné na internete: https://www.researchgate.net/publication/233265253_Rational_rolling_ball_blending_of_natural_quadrics.
- [14] Korbaš, J. *Prednášky z lineárnej algebry a geometrie*. 2013. Prvé vydanie. Univerzita Komenského v Bratislave: Vydavateľstvo UK. ISBN 978-80-223-3408-2.
- [15] Lee, J. 2012. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. New York. Springer. 2. edition. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [16] Maxima documentation: Maxima 5.47.0 Manual. Dostupné na internete: https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_singlepage.html.
- [17] Maxima download. Dostupné na internete: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
- [18] Odehnal B., Stachel H., Glaeser G. 2020. *The Universe of Quadrics*. Vienna. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-61052-7. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61053-4>.
- [19] Peternell, M., Pottmann H. 1997. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, Volume 23, Issues 2–3, Pages 255-266, ISSN 0747-7171. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1006/jSCO.1996.0087>.
- [20] Peternell M., Odehnal B., Sampoli M. L., On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 25, Issues 4–5, 2008, Pages 342-355, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.10.007>.
- [21] Peternell M., Pottmann H. 1998. A Laguerre geometric approach to rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 3, Pages 223-249, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00024-1](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00024-1).
- [22] Pip. <https://pip.pypa.io/en/stable/>.

- [23] Pottmann H., Peternell M. 2009. Envelopes – Computational Theory and Applications. Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Dostupné na internete: <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/ig/peternell/env.pdf>.
- [24] Pottmann H., Peternell M. 1998. Applications of Laguerre geometry in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 2, Pages 165-186, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00023-X](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00023-X).
- [25] Pottmann, H., Wallner, J. 2001. *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag.
- [26] PrusaSlicer download. Dostupné na internete: <https://www.prusa3d.com/cs/>.
- [27] Python documentation. Dostupné na internete: <https://docs.python.org/3/>.
- [28] Python download. Dostupné na internete: <https://www.python.org/downloads>.
- [29] Skopenkov M. et al. 2020. Characterizing envelopes of moving rotational cones and applications in CNC machining, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 83, 101944, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101944>.
- [30] Visual Studio Code download. Dostupné na internete: <https://code.visualstudio.com/download>.
- [31] Vráblíková J. 2022. Envelopes of implicit surfaces. Mathematical Institute of Charles University. Prague. Master's thesis. Dostupné na internete: <https://dodo.is.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/171858/120411574.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- [32] Zlatoš P. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. 2011. Bratislava. Marenčin PT. ISBN 978-80-8114-111-9.
- [33] Obrázok Webbov Most. Dostupné na internete: <http://www.yannarthusbertrand2.org/collection/australia/#mw1-3844>.
- [34] Obrázok Rolling ball blends. Dostupné na internete: https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb_abs/parblrb_abs.html.
- [35] Obrázok Hudobné divadlo a výstavná sieň. Dostupné na internete: <https://www.archdaily.com/789123/music-theatre-and-exhibition-hall-massimiliano-and-doriana-fuksas>.

Všetky online zdroje boli dostupné dňa 03.05.2024.

Príloha A

Výpočet obálky pomocou Gröbnerovej bázy pre príklad 3 so sústavou rovníc

$$\begin{aligned}F^\lambda &= 4t^6 - 4t^5y + t^4y^2 + 7t^4 - 8t^3y + 2t^2y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1, \\F_t^\lambda &= 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2t + 4t - 4y.\end{aligned}$$

Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$G_{lex} = \{l_1, \dots, l_6\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}l_1 &= 8232129896496000t^3 - 15949751674461t^2y^7 - 161384046512557t^2y^5 \\&\quad - 1204463505481071t^2y^3 - 6169809854717575t^2y + 15430671472tx^2y^{12} \\&\quad + 426513396863tx^2y^{10} - 15006102325790tx^2y^8 - 319921877859794tx^2y^6 \\&\quad + 3932980083404115tx^2y^4 + 26096343414243210tx^2y^2 \\&\quad - 5927133525477120tx^2 + 8232129896496000t - 89991676024704x^6y^3 \\&\quad + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 + 5668842986368x^4y^7 \\&\quad - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 - 17414290688695056x^4y \\&\quad - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 + 43203483205279x^2y^7 \\&\quad - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 + 19070089710359527x^2y \\&\quad - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 - 1204463505481071y^3 \\&\quad - 6169809854717575y \\l_2 &= 1029016237062t^2x^2 + 3835312tx^2y^{11} + 224556467tx^2y^9 + 2456837050tx^2y^7 \\&\quad - 42939029714tx^2y^5 - 622020302148tx^2y^3 - 2792792777023tx^2y \\&\quad - 22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\&\quad + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\&\quad + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\&\quad - 1254254177448x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 = & 171502706177t^2y^8 + 2058032474124t^2y^6 + 14749232731222t^2y^4 \\
& + 51450811853100t^2y^2 + 107189191360625t^2 + 8570784208tx^2y^{11} \\
& + 447143859077tx^2y^9 + 2637043681390tx^2y^7 - 114540691274161tx^2y^5 \\
& - 650595377992068tx^2y^3 - 329349595559310tx^2y - 49984813501056x^6y^2 \\
& + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 + 1466755633792x^4y^6 \\
& + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 + 188859580240104x^4 \\
& - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 + 53352589022478x^2y^6 \\
& + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 - 296888240050025x^2 \\
& + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 \\
& + 10718919136062514749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
l_4 = & 3319374168tx^4 + 4112tx^2y^{12} + 419465tx^2y^{10} + 11960430tx^2y^8 + 9104606tx^2y^6 \\
& - 3087637940tx^2y^4 - 14225835735tx^2y^2 - 3841868250tx^2 - 23981184x^6y^3 \\
& - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 + 484488324x^4y^3 \\
& + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 + 1348048703x^2y^5 \\
& + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
l_5 = & 16tx^2y^{13} + 1321tx^2y^{11} + 29688tx^2y^9 - 92522tx^2y^7 - 7839424tx^2y^5 \\
& - 31597167tx^2y^3 - 1560600tx^2y - 93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 \\
& - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 \\
& - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 \\
& + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2 \\
l_6 = & 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
& - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
& - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2
\end{aligned}$$

Eliminovaná Grobnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie

$$\begin{aligned}
g_1 &= -89991676024704x^6y^3 + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 \\
&\quad + 5668842986368x^4y^7 - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 \\
&\quad - 17414290688695056x^4y - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 \\
&\quad + 43203483205279x^2y^7 - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 \\
&\quad + 19070089710359527x^2y - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 \\
&\quad - 1204463505481071y^3 - 6169809854717575y \\
g_2 &= -22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\
&\quad + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\
&\quad + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\
&\quad - 1254254177448x^2 \\
g_3 &= -49984813501056x^6y^2 + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 \\
&\quad + 1466755633792x^4y^6 + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 \\
&\quad + 188859580240104x^4 - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 \\
&\quad + 53352589022478x^2y^6 + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 \\
&\quad - 296888240050025x^2 + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 \\
&\quad + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
g_4 &= -23981184x^6y^3 - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 \\
&\quad + 484488324x^4y^3 + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 \\
&\quad + 1348048703x^2y^5 + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
g_5 &= -93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 \\
&\quad + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} \\
&\quad + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2 \\
g_6 &= 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
&\quad - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
&\quad - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2
\end{aligned}$$

Gröbnerova báza vzhľadom na graduované reverzné lexikografické usporiadanie obsahuje 10 polynómov

$$G_{grevlex} = \{g_1, \dots, g_{10}\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= -2706889t^2x^2y^2 + 48735498t^2x^2 - 248832tx^6y - 618540tx^4y^3 - 18691704tx^4y \\
&\quad - 11148241tx^2y^3 - 113858467tx^2y + 82944x^6y^2 + 1391904x^6 + 2592x^4y^6 \\
&\quad + 227460x^4y^4 + 7282128x^4y^2 + 48599388x^4 + 2592x^2y^8 + 136740x^2y^6 \\
&\quad + 5322840x^2y^4 + 25315237x^2y^2 - 49991292x^2 \\
g_2 &= -5926019t^2x^2y - 381024tx^6 + 17542tx^4y^4 + 536256tx^4y^2 + 2639556tx^4 \\
&\quad + 549118tx^2y^4 + 7633231tx^2y^2 - 2544625tx^2 + 127008x^6y - 4802x^4y^5 \\
&\quad - 137396x^4y^3 - 3196866x^4y - 4802x^2y^7 - 232456x^2y^5 - 1612916x^2y^3 \\
&\quad + 3355951x^2y \\
g_3 &= -257t^2x^2y^2 + 4998t^2x^2 - 1728tx^4y + 36tx^2y^5 - 1037tx^2y^3 - 11867tx^2y \\
&\quad + 576x^4y^2 + 5292x^4 + 540x^2y^4 + 2729x^2y^2 - 5292x^2 \\
g_4 &= 49t^2x^2y^3 + 1392t^2x^2y - 648tx^4 - 11tx^2y^4 - 983tx^2y^2 + 750tx^2 \\
&\quad + 216x^4y + 227x^2y^3 - 318x^2y \\
g_5 &= 216t^2x^4 + 227t^2x^2y^2 - 318t^2x^2 - 180tx^4y - 181tx^2y^3 + 497tx^2y + 36x^4y^2 \\
&\quad - 72x^4 + 36x^2y^4 - 179x^2y^2 + 72x^2 \\
g_6 &= 59t^4 + t^3y^3 - 61t^3y - 24t^2x^2 + 18t^2y^2 + 48t^2 + 8tx^2y + ty^3 - 61ty + 11x^2 \\
&\quad + 18y^2 - 11 \\
g_7 &= 168t^4 - 192t^3y - 42t^2x^2 + t^2y^4 + 54t^2y^2 + 121t^2 + 11tx^2y - 192ty + x^2y^2 \\
&\quad + 47x^2 + y^4 + 54y^2 - 47 \\
g_8 &= 37t^5 - 18t^3y^2 + 64t^3 + 5t^2y^3 - 17t^2y - 15tx^2 - 18ty^2 + 27t + 5x^2y + 5y^3 \\
&\quad - 17y \\
g_9 &= 6t^3x^2 - 5t^2x^2y + tx^2y^2 + tx^2 - x^2y \\
g_{10} &= 37t^4y - 29t^3y^2 + 25t^3 + 6t^2y^3 + 24t^2y - 18tx^2 - 29ty^2 + 25t + 6x^2y + 6y^3 \\
&\quad - 13y
\end{aligned}$$

Príloha B

4.1 Euklidovská teória kvadratických foriem a krivky 2. rádu

Veta 4.1. *Ortogonalné matice typu $n \times n$ tvoria grupu, volá sa ortogonálna grupa a zvyčajne sa označuje $O(n)$.*

Veta 4.2. *Matica prechodu od ortonormálnej bázy v \mathbb{R}^n so štandardným skalárnym súčinom k ortonormálnej báze je ortogonálna matica. Tiež, ak od ortonormálnej bázy v \mathbb{R}^n prejdeme pomocou ortogonálnej matice prechodu k novej báze, tak aj nová báza bude ortonormálna.*

4.1.1 Invarianty kriviek 2. rádu

Definícia 4.1. *Invariantom krivky druhého rádu, vyjadrenej rovnicou*

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$$

je každý taký algebraický výraz, závisiaci od $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a$, ktorého hodnota sa nezmení, ak túto krivku vyjadríme v inom karteziánskom súradnicovom systéme, ku ktorému prejdeme pomocou otočení alebo posunutí (čím od rovnice, viažúcej staré premenné x_1, x_2 , prejdeme k rovnici, viažúcej nové premenné x'_1, x'_2).

Veta 4.3. *Nasledujúce číselné výrazy sú invariantmi krivky 2. rádu, vyjadrenej rovnicou*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0.$$

Označíme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a vlastné hodnoty tejto matice označíme λ_1, λ_2 .

$$s(x_1, x_2) = \text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22},$$

$$\delta(x_1, x_2) = \det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2,$$

$$\Delta(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix}.$$

Dá sa odvodiť nasledujúca prehľadná tabuľka.

Typ	δ	Tvar
eliptický	> 0	ak $s_1 < 0$: elipsa ak $s_1 > 0$: kružnica; ak $s_1 = 0$: bod
hyperbolický	< 0	hyperbola
parabolický	$= 0$	parabola