

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH  
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024

Bc. JANA TUTKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH  
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Počítačová grafika a geometria  
Študijný odbor: 1113 Matematika  
Školiace pracovisko: Katedra algebry a geometrie  
Školiteľ: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Bratislava, 2024  
Bc. Jana Tutková



Univerzita Komenského v Bratislavе  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

<b>Meno a priezvisko študenta:</b>	Bc. Jana Tutková
<b>Študijný program:</b>	počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
<b>Študijný odbor:</b>	matematika
<b>Typ záverečnej práce:</b>	diplomová
<b>Jazyk záverečnej práce:</b>	slovenský
<b>Sekundárny jazyk:</b>	anglický
<b>Názov:</b>	Obálka systému plôch <i>Envelope of a system of surfaces</i>
<b>Anotácia:</b>	Cieľom práce je študovať základné vlastnosti obálky systému plôch. Zameriame sa na jednoparametrické systémy kvadrič v trojrozmernom priestore. Okrem teoretických podkladov očakávame aj numerické experimenty a príklady postupov. Načrtнемe aplikácie, v ktorých sa obálky používajú.
<b>Ciel:</b>	Študovať a opísť niektoré vlastnosti obálky systému kvadratických plôch.
<b>Literatúra:</b>	do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Dover Publications Inc., 2017 Pottmann, Wallner: Computational Line Geometry, Springer, 2001
<b>Kľúčové slová:</b>	obálka plôch, systém kvadratických plôch
<b>Vedúci:</b>	doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.
<b>Katedra:</b>	FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie
<b>Vedúci katedry:</b>	doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.
<b>Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:</b>	prípustná pre vlastnú VŠ
<b>Dátum zadania:</b>	13.12.2022
<b>Dátum schválenia:</b>	14.12.2022
	doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD. garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce



**Pod'akovanie:** Na tomto mieste by som sa chcela pod'akovat' môjmu školiteľovi doc. RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD. za odborné vedenie diplomovej práce, cenné rady, pripomienky a čas strávený na konzultáciách. Moje pod'akovanie patrí aj Mgr. Adriane Bosákovej, PhD. za veľkú pomoc s 3D tlačou.

## Abstrakt

Tutková J., Bc. Obálka systému plôch. Diplomová práca. Univerzita Komenského. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra algebry a geometrie. Bratislava, 2024.

Táto práca sa zaoberá výpočtom obálky jednoparametrického systému elíps v  $\mathbb{R}^2$  a elipsoidov v  $\mathbb{R}^3$ , pričom elipsy a elipsoidy sú konštantne škálované faktorom  $a$  v dotykovom smere krivky  $m(t)$  a faktorom  $b$  v ostatných smeroch krivky. Výpočet je založený na známej teórii obálky jednoparametrického systému sfér v  $\mathbb{R}^3$ . Na určenie obálky využívame symbolické a numerické výpočty v programovacom jazyku Python a vypočítané plochy vizualizujeme v 3D modelovacom softvéri Blender. Niektoré z plôch sme vytlačili v 3D tlačiarni.

**Kľúčové slová:** obálka plôch, systém kvadratických plôch

## Abstract

Tutková J., Bc. Envelope of a system of surfaces. Master's thesis. Comenius University. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Algebra and Geometry. Bratislava, 2024.

This thesis deals with the computation of the envelope of a one-parameter system of ellipses in  $\mathbb{R}^2$  and ellipsoids in  $\mathbb{R}^3$ , where these ellipses are scaled by a constant factor  $a$  in the tangent direction of the curve  $m(t)$  and by a factor  $b$  in the other directions of the curve. The computation is based on known theory of envelopes of a one-parameter system of spheres in  $\mathbb{R}^3$ . To determine the envelope, we use symbolic and numerical calculations in the Python programming language and visualize the calculated surfaces in the 3D modeling software Blender. We printed some of the surfaces in a 3D printer.

**Keywords:** envelope of surfaces, system of surfaces



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Prehľad problematiky</b>	<b>3</b>
1.1 Jednoparametrický systém . . . . .	3
1.2 Obálka jednoparametrického systému nadplôch . . . . .	5
1.3 Výpočet obálky . . . . .	9
1.3.1 Prístup algebraickej geometrie . . . . .	10
1.3.2 Prístup projektívnej geometrie . . . . .	11
1.3.3 Kinematický prístup . . . . .	12
1.3.4 Obálky a ODR . . . . .	13
1.3.5 Lokálne prieniky . . . . .	14
1.4 Obálka sfér . . . . .	16
1.5 Charakteristická kružnica . . . . .	17
<b>2 Matematický model</b>	<b>21</b>
2.1 Krivky druhého stupňa . . . . .	21
2.1.1 Invarianty kriviek druhého stupňa . . . . .	22
2.2 Plochy druhého stupňa . . . . .	22
2.2.1 Invarianty plôch druhého stupňa . . . . .	23
2.3 Obálka elíps . . . . .	24
2.3.1 Zmena bázy elíps . . . . .	25
2.3.2 Výpočet obálky elíps . . . . .	26
2.4 Obálka elipsoidov . . . . .	27
2.4.1 Zmena bázy elipsoidov . . . . .	28
2.4.2 Výpočet obálky elipsoidov . . . . .	30
2.4.3 Softvér Maxima . . . . .	30
<b>3 Softvér</b>	<b>31</b>
3.1 Špecifikácia . . . . .	31
3.1.1 Vstup . . . . .	31
3.1.2 Výstup . . . . .	31

3.1.3	Workflow . . . . .	32
3.1.4	Funkčnosť softvéru . . . . .	32
3.2	Výber softvéru a jeho inštalácia . . . . .	33
3.2.1	Blender . . . . .	33
3.2.2	Python . . . . .	34
3.2.3	Knižnice . . . . .	34
3.2.4	Programovacie prostredie . . . . .	35
3.3	Implementácia . . . . .	37
3.3.1	Realizácia procesu workflow . . . . .	37
3.4	3D tlač . . . . .	38
3.4.1	PrusaSlicer . . . . .	38
3.4.2	Pronterface . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Výsledky práce</b>	<b>43</b>
<b>Príloha A</b>		<b>51</b>

# Zoznam obrázkov

1	Projekty v architektúre.	2
1.1	Systém kružníc.	3
1.2	Zobrazenie prvkov systému.	4
1.3	Sústredné kružnice.	7
1.4	Obálka systému podľa charakterizácie.	8
1.5	Obálka systému podľa definície.	8
1.6	Kontúra systému.	9
1.7	Systém elips.	10
1.8	Obálka nájdená rezultantom.	11
1.9	Systém priamok v normálovom tvare.	14
1.10	Regulárne riešenia a obálka.	15
1.11	Technika rolling ball blends.	19
2.1	Softvér Maxima.	30
3.1	Softvér Blender.	33
3.2	Softvér Visual Studio Code.	36
3.3	Jupyter Notebook.	37
3.4	Softvér PrusaSlicer.	39
3.5	Softvér Pronterface.	40
3.6	Plocha v 3D tlačiarni.	41



# Zoznam tabuliek

2.1	Klasifikácia kužeľosečiek.	22
2.2	Klasifikácia kvadrík.	23
2.3	Klasifikácia degenerovaných kvadrík.	24



# Úvod

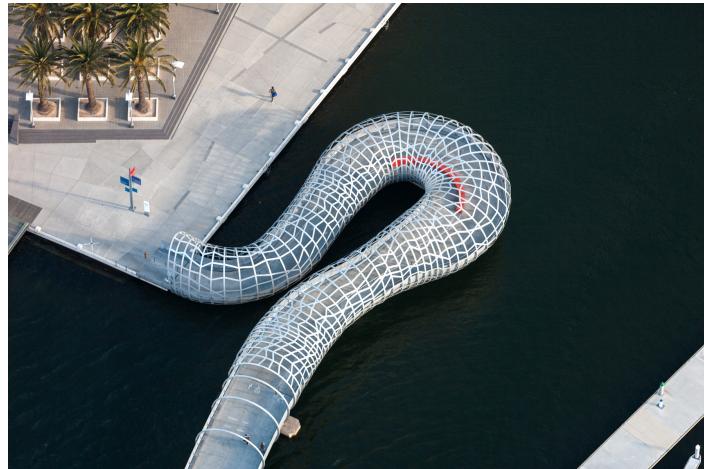
Pojem obálky systému kriviek po prvýkrát zaviedol v roku 1682 Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, nemecký matematik, fyzik a lekár. Neskôr francúzsky matematik, Baron Pierre Charles François Dupin, v dvoch knižných publikáciách *Développements de géométrie* (Rozvoj geometrie, 1813) a *Applications de géométrie et de mécanique* (Aplikácie geometrie a mechaniky, 1822) opísal triedu plôch zvaných cyklidy - obálky jednoparametrických systémov guľových plôch dotýkajúcich sa danej trojice guľových plôch [7].

Obálky plôch majú široké využitie vo viacerých odvetviach, ako optika, architektúra, robotika. V optike sa obálka používa na popis dráhy svetelných lúčov, ktoré prechádzajú cez zakrivený povrch. Výpočet obálky pohybujúcej sa plochy sa vyskytuje aj pri CNC obrábaní. *Computer Numerical Control machining* je výrobný subtraktívny proces, pri ktorom počítač riadi stroje, vŕtačky, frézy a sústruhy tak, aby odstraňovali materiál z obrobku, kým nevytvoria požadovaný tvar. Pri tomto procese rezný nástroj vytvára rotačnú plochu - obálku pohybom okolo svojej osi [36]. Obálky sa tiež používajú na výpočet trajektórie projektov vo vzduchu. Napríklad, pri riešení problému pohybu projektilu vrhaného pod určitým uhlom k horizontu, používame rovnicu obálky na určenie maximálneho dosahu letu projektilu. [12]. Medzi ďalšie aplikácie obálok patrí *tollerancing* - krivka s kontrolou chyby, bezkolízne plánovanie pohybu robota, konštrukcia znakov v písmach pre typografické systémy, teda dizajn písma [27]. Medzi obálky patria aj kanálové plochy, rúrkové plochy a plochy používané v počítačom podporovanom geometrickom dizajne CAGD, ktoré sa vyskytujú ako zmiešavacie a prechodové plochy medzi potrubiami. Tieto plochy sú využívané aj v architektúre.

Ako príklad uvádzame Webbov most na obr. 1a v Melbourne. Tvar mosta vzdáva hold histórii domorodého obyvateľstva a je vytvorený podľa tradičnej rybárskej pasce Koorie, ktorá sa používala na lov úhorov.

Ďalším zaujímavým architektonickým projektom je hudobné divadlo a koncertná sála v gruzínskom Tbilisi, obr. 1b. Táto budova sa skladá z dvoch prepojených časťí, ktoré poskytujú panoramatický výhľad na rieku a historické centrum mesta [20].

Obálku jednoparametrického systému sfér hľadáme tak, že v každom parametri systému rátame prienik sféry a derivácie systému. Ukáže sa, že prienikom je vždy kružnica a teda obálku môžeme zostrojiť použitím týchto kružníc.



(a) Webbov most [40].



(b) Hudobné divadlo a výstavná sieň [42].

Obr. 1: Projekty v architektúre.

Tento koncept chceme zovšeobecniť na plochy druhého rádu, pričom prvým zovšeobecnením, ktoré sa ponúka, je obálka elipsoidov. Naša práca sa zaoberá otázkou, ako zostrojiť obálku elipsoidov, ak budú škálované faktorom  $a$  v dotykovom smere krivky a v zostávajúcich dvoch smeroch budú škálované faktorom  $b$ , pričom  $a > b$ . Teda skúmame elipsoidy, ktoré budú natiahnuté v smere krivky.

Práca je rozdelená do štyroch kapitol. V prvej kapitole spomíname prístupy výpočtu obálky v rovine a uvádzame teoretické pozadie obálky sfér potrebné na zostrojenie obálky elipsoidov. V druhej kapitole sa nachádzajú odvodené rovnice pre obálku elíps a elipsoidov a ich geometrická interpretácia. Tretia kapitola pozostáva zo špecifikácie algoritmov, vymenovania a zdôvodnenia použitého softvéru, postupu implementácie algoritmov a parametrov 3D tlače. Vo štvrtej kapitole vyhodnocujeme uvedené postupy a na záver uvádzame pári vizualizácií a časových meraní.

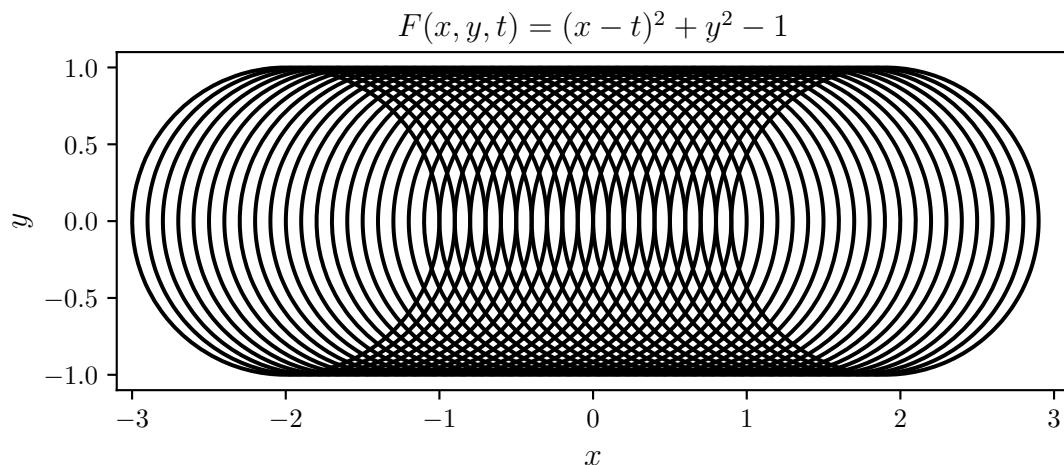
# Kapitola 1

## Prehľad problematiky

Prehľad definícií sme čerpali z [5], [6], [8] a [22].

### 1.1 Jednoparametrický systém

Ak nakreslíme kružnice so stredom na x-ovej osi s polomerom 1, ako na obr. 1.1, pohľad nám upútajú úsečky  $y = \pm 1$  pre  $x \in [-2, 2]$  idúce ponad a popod systém kružníc.



Obr. 1.1: Systém kružníc.

Každá z týchto úsečiek sa dotýka každej kružnice v jednom bode a v tomto bode majú spoločnú dotyčnicu. V nasledovnom texte túto myšlienku matematicky opíšeme, na základe nej zostrojíme tzv. obálku systému kriviek alebo plôch a porovnáme prístupy ich výpočtu. Budeme pracovať v reálnom vektorovom priestore so štandardným skalárnym súčinom, teda v euklidovskom priestore  $\mathbb{E}^n$ , rozmeru  $n = 2, 3$ . Najprv ilustrujeme príklady obálok a ich výpočet pre  $n = 2$ , neskôr pre  $n = 3$ . Po celý čas predpokladáme, že všetky zobrazenia sú dostatočne veľakrát diferencovateľné a pre prehľadnosť zápisov vynechávame parametre, ak sú z kontextu zrejmé.

**Definícia 1.1.** Nech  $F: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia v premenných  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a v parametri  $t$ , kde  $I \subseteq \mathbb{R}$  je interval. Definujeme jednoparametrický systém nadplôch ako systém množín

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0, t \in I\}.$$

V  $n = 2$  budeme pre lepšiu prehľadnosť značiť premenné  $x_1, x_2$  ako  $x, y$ , pre  $n = 3$  pribudne  $x_3$  ako  $z$ . Pre lepšiu prehľadnosť neskôr označíme dvojicu  $(x, y)$  alebo trojicu  $(x, y, z)$  ako  $X$ , potom  $\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid F(X, t) = 0, t \in I\}$ .

Pre horeuvedený prípad, vizualizovaný na obr. 1.1, teda máme jednoparameterický systém kružníc so stredmi kružníc, ktoré ležia na úsečke parametrizovanej  $(t, 0)$  pre  $t \in [-2, 2]$  a konštantným polomerom pre každú kružnicu  $r = 1$  daný implicitnou funkciou

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, t) = 0, t \in [-1, 1]\},$$

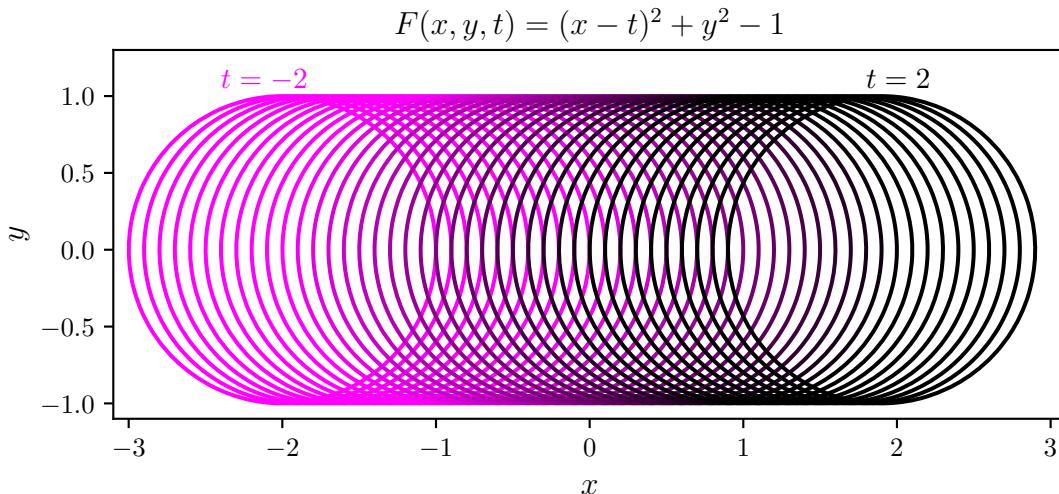
kde

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1.$$

Systém budeme ilustrovať zobrazením niektorých prvkov systému pre diskrétnie hodnoty parametra  $t$ . Pre  $t = -2$  je zodpovedajúci prvak systému  $\mathcal{F}_{-2} \in \mathcal{F}$  kružnica s implicitnou rovnicou

$$F_{-2}(x, y) = F(x, y, -2) = (x + 2)^2 + y^2 - 1.$$

Často budeme pre pevný parameter  $t_0$  označovať prislúchajúcu rovnicu  $F_{t_0}(X)$  a množinu bodov, ktoré rovnicu spĺňajú označíme  $\mathcal{F}_{t_0}$ .



Obr. 1.2: Systém je zobrazený na intervale  $[-2, 2]$  s krokom  $\Delta t = 0,1$ . Ružovou farbou je vyznačená kružnica systému v parametri  $t = -2$ , čierrou farbou v parametri  $t = 2$ , v hodnotách parametrov medzi nimi je farba kružnice lineárne interpolovaná.

## 1.2 Obálka jednoparametrického systému nadplôch

Najskôr definujeme obálku jednoparametrického systému kriviek v  $\mathbb{E}^2$ . Uvedieme charakterizáciu obálok, ktorú možno použiť na výpočet pre jednoduchšie jednoparametrické systémy. Následne túto charakterizáciu použijeme ako definíciu pre obálku jednoparametrického systému plôch v  $\mathbb{E}^n$ .

**Definícia 1.2.** Definujme gradient funkcie  $F: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$  vzhľadom na  $x$  a  $y$  ako

$$\nabla F(x, y, t) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t) \right).$$

**Definícia 1.3.** Obálkou systému kriviek  $\mathcal{F}$  je parametrizovaná krivka  $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$  taká, že

1.  $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$  pre všetky  $t \in J$ ,
2.  $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$ .

Obálka  $\gamma(t)$  sa dotýka každej krivky zo systému  $F(x, y, t)$  v bode  $(x, y)$  pre nejaké  $t$  a v tomto bode má s krivkou zo systému rovnakú dotyčnicu. To znamená, že každý bod obálky  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  spĺňa rovnicu systému  $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$  pre nejaké  $t$ , a teda platí prvá podmienka  $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$ . Gradient funkcie  $\nabla F(x, y, t)$  možno geometricky interpretovať ako normálový vektor k  $F(x, y, t)$  v regulárnom bode  $(x, y)$  a parametri  $t$ . V spoločnom bode  $(x, y)$  a parametri  $t$  požadujeme lineárnu závislosť dotykového vektora obálky  $\gamma(t)$  a systému  $F(x, y, t)$ , z čoho dostávame  $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$ , druhú podmienku v definícii obálky. Interval  $J$ , na ktorom dostávame výslednú obálku môže byť menší ako interval  $I$ , na ktorom bol definovaný systém kriviek, teda máme  $J \subseteq I$ .

Pre všetky  $(x, y, t)$  predpokladáme, že  $\nabla F(x, y, t) \neq \vec{0}$ . Ak by bol gradient  $\nabla F(x, y, t)$  v nejakom bode nulový, nevieme jednoznačne nájsť dotykový vektor systému  $F(x, y, t)$ .

**Veta 1.1.** Regulárna krivka  $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$  kde  $t \in J \subseteq I$  je obálkou jednoparametrického systému  $\mathcal{F}$  práve vtedy, keď spĺňa:

1.  $F(\gamma(t), t) = 0$ ,
2.  $\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0$ .

*Dôkaz.* Táto odlišná charakterizácia je ekvivalentná definícii, ktorú sme postavili na geometrických podmienkach. Stačí zistiť korešpondenciu podmienok.

1. Ako sme už vysvetlili, každý bod obálky  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  spĺňa rovnicu jednoparametrického systému  $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$  pre nejaké  $t$ , teda podmienky

$$F(\gamma(t), t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$$

a

$$\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$$

sú ekvivalentné.

2. Derivujme  $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$  podľa parametra  $t$ , kde  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot 1 = 0.$$

Nakoľko požadujeme, aby gradient funkcie  $\nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$  bol kolmý na  $\dot{\gamma}(t)$  tak

$$\langle \nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

a teda platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) = 0,$$

z čoho dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0.$$

□

Často sa v literatúre môžeme stretnúť s rôznymi opismi obálky, ktoré však bez ďalších predpokladov nemusia definovať rovnakú množinu bodov. Príkladom je ďalšia charakterizácia obálky ako množiny limitných bodov prienikov kriviek systému. Vzťahy medzi jednotlivými charakterizáciami možno nájsť v [6].

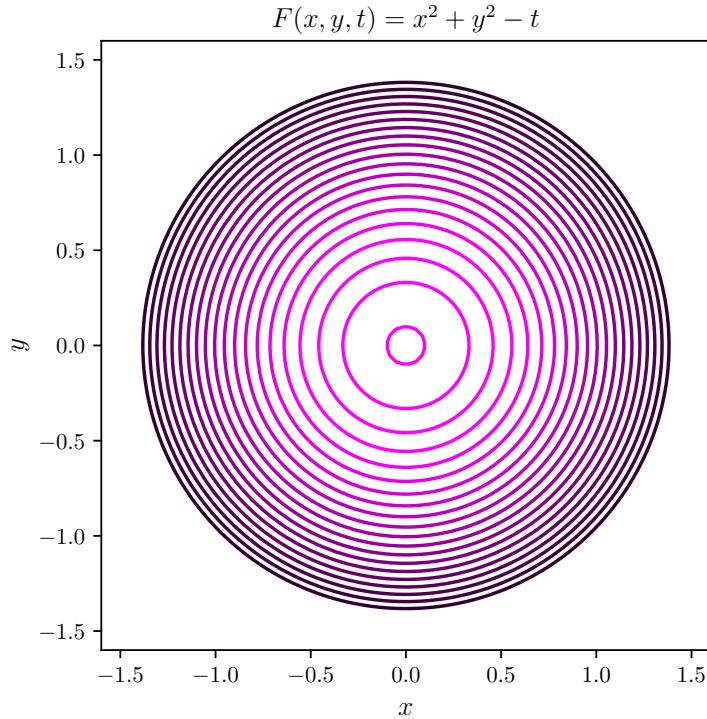
Dokonca, daný systém nemusí mať obálku. Príkladom sú sústredné kružnice s ras-túcim polomerom.

**Príklad 1.** Obálku systému sústredných kružník pre  $t \in I = [\frac{1}{100}, 2]$  rátame ako riešenie systému rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= x^2 + y^2 - t, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= -1. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice máme  $t = -1 \neq 0$ , teda systém nemá riešenie. Aj keď by sa nám mohlo zdať, že by obálkou mohli byť body kružnice s najväčším polomerom  $\mathcal{F}_2$  a kružnice s najmenším polomerom  $\mathcal{F}_{\frac{1}{100}}$ , práve podmienka existencie takej krivky  $\gamma(t)$ , ktorá by patrila do systému kružník  $\mathcal{F}$  pre všetky  $t$  z intervalu  $J \subseteq I$ , nie je splnená.

Prístup, ktorý sme využili pre jednoparametrický systém kriviek, možno zovšeobecniť pre ľubovoľný jednoparametrický systém plôch v  $\mathbb{E}^n$ .



Obr. 1.3: Sústredné kružnice na intervale  $[\frac{1}{100}, 2]$  a krokom  $\Delta t = 0, 1$ .

**Definícia 1.4. (Charakterizácia.)** Obálkou jednoparametrického systému plôch  $\mathcal{F}$  je množina bodov  $\mathcal{E}$  daná

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \mid F(X, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = 0\}.$$

Ak by sme chápali obálku podľa definície ako množinu bodov, problém by sme mohli riešiť ako systém nelineárnych rovníc v parametri  $t$ , kde chceme z rovníc

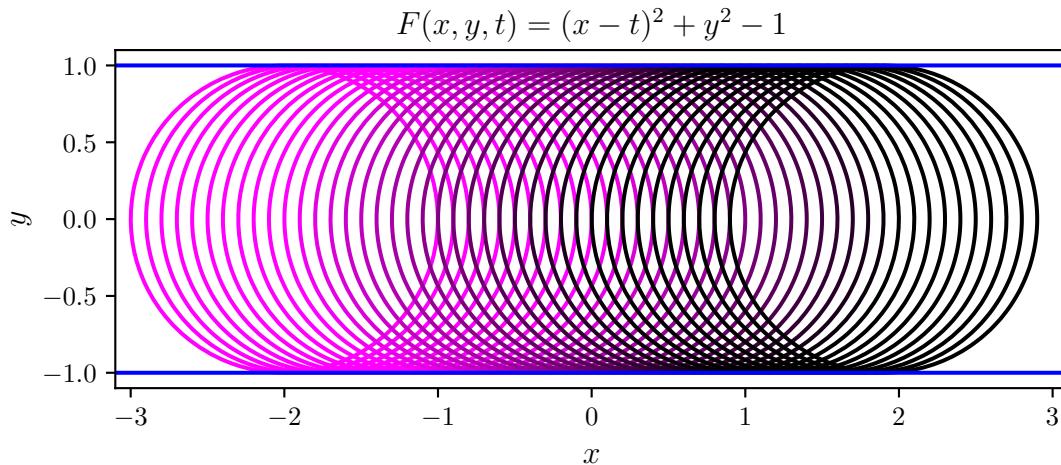
$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

eliminovať  $t$ . Na riešenie nelineárneho systému dvoch rovníc súčasťou existujú pokročilé nástroje, no eliminovaním parametra  $t$  strácame informáciu o tom, na akom intervale  $I$  je obálka definovaná.

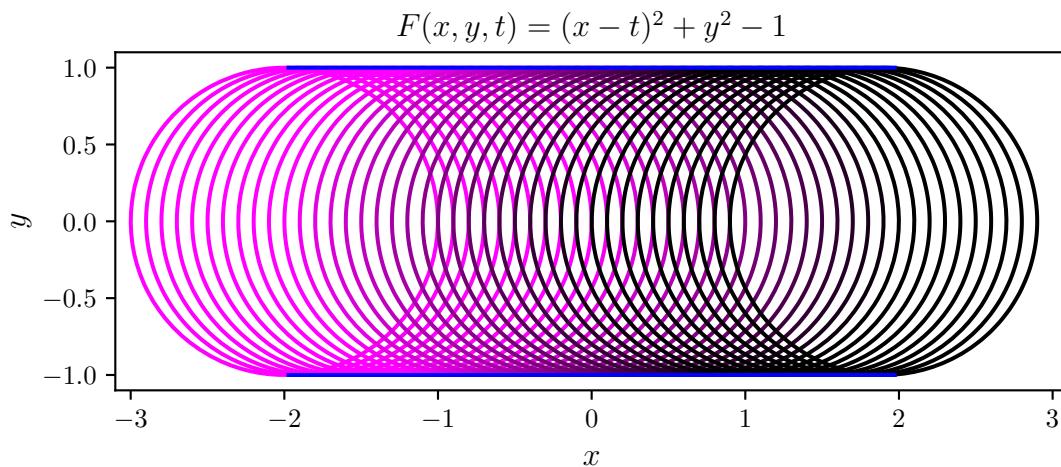
**Príklad 2.** Pre náš príklad  $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$  máme

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2(t - x) = 0.$$

Ak  $t = x$ , tak  $y^2 = 1$ . Teda obálka je podľa tejto charakterizácie  $y = \pm 1$ , ako sme očakávali.



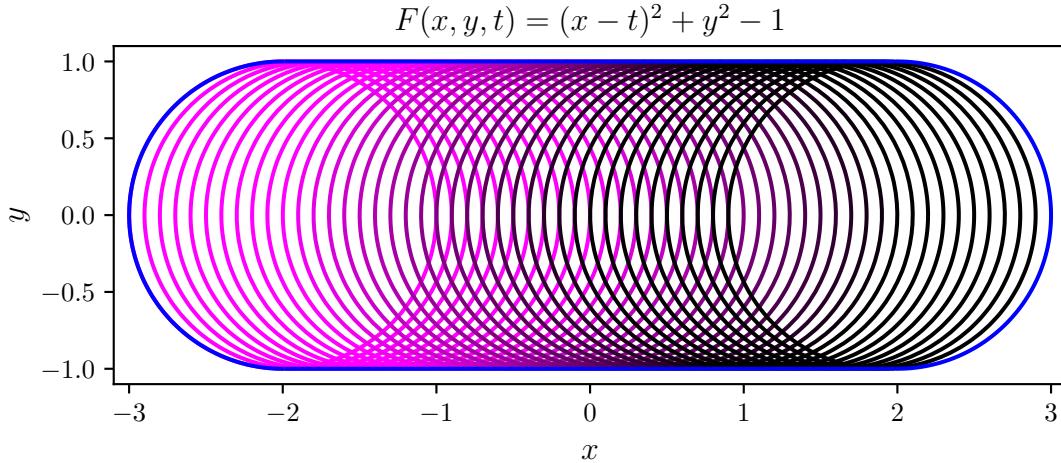
Obr. 1.4: Obálka systému podľa charakterizácie 1.4.



Obr. 1.5: Obálka systému podľa definície 1.3.

V skutočnosti sú obálkou úsečky  $y = \pm 1$  definované na intervale  $[-2, 2]$ . Tento problém možno ošetríť tak, že budeme uvažovať systémy kriviek, ktoré sú v parametri  $t$  definované na celej reálnej priamke  $\mathbb{R}$ .

Ďalšou otázkou, ktorá prirodzene vzniká je, či patria aj časti kriviek jednoparametrického systému v koncových bodoch intervalu do obálky. Podľa definície a charakterizácie nie. Ak by sme predsa len koncové časti pridali, mohli by sme systém v prípadoch kružník, elíps, sfér a elipsoidov ohraničiť akousi kontúrou systému. Na obr. 1.6 sa nachádza vizualizácia systému s jeho kontúrou vytvorenou z obálky systému a polkružnicami v parametroch  $t = -2$  a  $t = 2$ .



Obr. 1.6: Kontúra systému.

**Príklad 3.** Počítajme obálku systému kriviek, znázorneného na obrázku 1.7, ktorý je daný vzťahmi

$$F(x, y, t) = \frac{x^2}{(t^2 + 1)^2} + (y - 2t)^2 - 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{4x^2 t}{(t^2 + 1)^3} - 4(y - 2t).$$

Vynásobením prvej rovnice  $\lambda(t) = (t^2 + 1)^2$  a derivovaním získavame

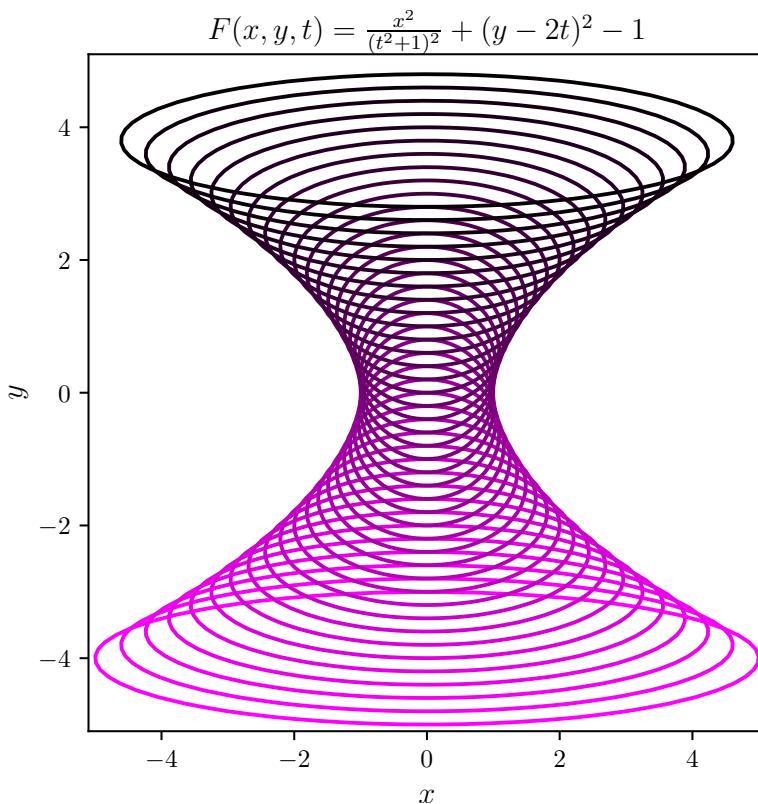
$$F^\lambda = 4t^6 - 4t^5 y + t^4 y^2 + 7t^4 - 8t^3 y + 2t^2 y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,$$

$$F_t^\lambda = 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2t + 4t - 4y.$$

Na obrázku 1.7 je znázornený tento systém elips pre  $t \in [-2, 2]$  s krokom  $\Delta t = 0.1$ . Obálku nájdeme ako riešenie rovníc  $F^\lambda \cap F_t^\lambda$ . Rovnice sú však príliš vysokého stupňa v parametri  $t$ , preto nevieme implicitnú rovnicu obálky bez vhodného nástroja vyjadriť. V ďalšej časti rozoberieme známe prístupy výpočtu.

### 1.3 Výpočet obálky

Vo väčšine prípadov sú rovnice charakterizujúce obálku systému plôch príliš vysokého stupňa v parametri  $t$  a nedokážeme z nich ľahko odvodiť rovnicu obálky, preto pristupujeme aj k numerickým riešeniam. Spoľahlivá aproximácia obálky je jednou z aktuálnych výskumných tém. Na začiatok si však rozobereme existujúce analytické prístupy. Naledujúce prístupy sú prevzaté z [38].



Obr. 1.7: Systém elíps, pre  $t = -2$  ružová elipsa, pre  $t = 2$  čierna elipsa.

### 1.3.1 Prístup algebraickej geometrie

Dokonca aj v prípade jednoduchého príkladu 3, obe polynomické rovnice charakterizujúce obálku sú vysokého stupňa v parametri  $t$ , preto je odstránenie parameteru  $t$  náročné bez vhodného nástroja. Štandardným aparátom na túto úlohu sú Gröbnerove bázy. Gröbnerove bázy sú kľúčovým pojmom v algebraickej geometrii a počítačovej algebre. Ide o špeciálnu množinu polynómov vo viacerých premenných, ktoré majú niekoľko dôležitých vlastností a zohrávajú kľúčovú úlohu pri riešení rôznych matematických problémoch vrátane riešenia sústav polynomických rovníc, zjednodušovania polynómov a dokazovania rôznych algebraických tvrdení. Vybudovanie tejto teórie je pomerne zdĺhavé, preto odkážeme na bohaté teoretické pozadie v [11]. Kedže výpočet Gröbnerovej bázy trvá pomerne dlho, neuvádzame postup a výsledok možno nájsť v Prílohe A.

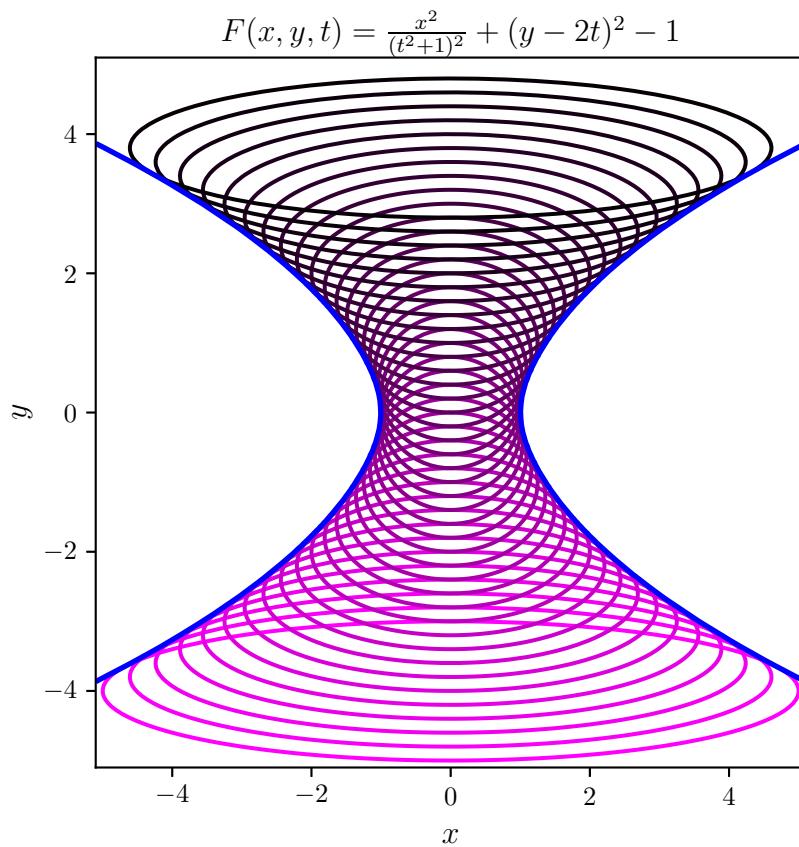
Gröbnerovu bázu je možné určiť vzhľadom na usporiadanie monómov, existujú aj iné metódy na riešenie polynomických rovníc, ktoré nie sú závislé na usporiadanií monómov. Jednou z metód je výpočet rezultantu, determinant špeciálnej matice polynómov. Hoci výpočet determinantov veľkých matíc je výpočtovo aj časovo náročný problém, poznáme metódy, ako vypočítať determinant efektívnejšie. Navyše táto metóda, rovnako ako metóda založená na eliminačnej teórii s použitím Gröbnerových báz, nám vypočíta správnu obálku len vtedy, ak uvažujeme parameter  $t$  jednoparametrického

systému z celej reálnej priamky.

Pri použití resultantov máme lepšiu kontrolu nad zložitosťou výpočtu. Pre dané dva polynómy totiž vieme, ako sa konštruuje resultant, a tak vieme odhadnúť, s akými veľkými polynómami sa bude počas výpočtu manipulovať, avšak pri hľadaní Gröbnerovej bázy je ľahšie odhadnúť, aké zložité polynómy sa behom algoritmu vyskytnú.

V príklade 3 uvedieme výsledný polynóm  $\text{Res}(F^\lambda, F_t^\lambda, t)$  a na obr. 1.8 obálku nájdenu pomocou resultantu.

$$\text{Res}(F^\lambda, F_t^\lambda, t) = 191102976x^{10} + 262144x^8y^6 - 9584640x^8y^4 + 83165184x^8y^2 - 633470976x^8 - 16384x^6y^{10} - 81920x^6y^8 - 14483456x^6y^6 - 113311744x^6y^4 + 96419840x^6y^2 + 698368000x^6 - 16384x^4y^{12} - 294912x^4y^{10} - 2998272x^4y^8 - 18284544x^4y^6 - 74956800x^4y^4 - 184320000x^4y^2 - 256000000x^4.$$



Obr. 1.8: Modrou farbou je znázornená obálka vypočítaná resultantom.

### 1.3.2 Prístup projektívnej geometrie

Body duálneho projektívneho priestoru  $\mathbb{P}^3$  možno stotožniť s nadrovinami v  $\mathbb{R}^3$ . Plochu v duálnom projektívnom priestore možno teda interpretovať ako množinu všetkých jej dotykových nadrovín. Pomocou duálneho prístupu sa dá dokázať, že obálky jednopá-

rametrických systémov sú pre racionálne vstupné údaje racionálne. Potrebné vybudovanie teórie možno nájsť v [29], z čoho čerpajú články s mnohými výsledkami [24], [25] a príklady pre výpočet obálky možno nájsť v [38].

**Príklad 4.** Uvažujme dva systémy kružníc  $\mathcal{F}$  s konštantným polomerom  $\frac{1}{2}$  a  $\mathcal{G}$  s funkciou polomeru  $\frac{t}{2}$ , ktorých stredy ležia na rovinnej krivke  $m(t) = (t^3, t^2)$ , kde  $t \in \mathbb{R}$ . So systémom

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{1}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}.$$

korešponduje krivka  $m_1 = (t^3, t^2, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^3$ . Pre

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{t^2}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}$$

máme krivku  $m_2(t) = (t^3, t^2, \frac{t}{2})$ . Kružnice zodpovedajúce  $t < 0$  sú negatívne orientované, pre  $t > 0$  pozitívne orientované, pre  $t = 0$  je prvok  $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$  bod  $(0, 0) \in m(t)$ , čo je kružnica s nulovým polomerom a bez určenej orientácie. Krivka  $m(t)$  je ortogonálna projekcia oboch kriviek  $m_1$  a  $m_2$  a často sa nazýva stredná os (*medial axis*) jednoparametrického systému.

Rovnakým spôsobom môžeme definovať jednoparametrický systém sfér v  $\mathbb{R}^3$  ako obraz kriviek v  $\mathbb{R}^4$ . Jedným z dôležitých výsledkov je, že pomocou tohto prístupu možno rozhodnúť o reálnosti obálky a to tak, že systém korešpondujúci s krivkou  $m(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  má reálnu obálku práve vtedy, keď pre všetky  $t \in I$  platí

$$\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle \geq 0$$

a rovnosť platí len pre izolované hodnoty  $t$ , kde za skalárny súčin vezmeme pseudoskalárny súčin vyjadrený ako  $\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle = m_1^2(t) + m_2^2(t) + \dots + m_n^2(t) - m_{n+1}^2(t)$ .

Pre príklad tak 4 máme

$$\langle \dot{m}_1(t), \dot{m}_1(t) \rangle = 9t^4 + 4t^2 \geq 0, \text{ pre } t \in \mathbb{R},$$

$$\langle \dot{m}_2(t), \dot{m}_2(t) \rangle = 9t^4 + 4t^2 - \frac{1}{4} \geq 0, \text{ pre } t \in \mathbb{R} \setminus \{(-0.236, 0) \cup (0, 0.236)\},$$

preto na týchto intervaloch existuje reálna obálka systémov  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{G}$ .

### 1.3.3 Kinematický prístup

Ďalším zo spôsobov, ako chápať jednoparametrické systémy plôch v  $\mathbb{R}^n$  je pozerať sa na ne ako na množinu všetkých transformácií daného povrchu  $\mathcal{P}$ . Povrch  $\mathcal{P}$  sa transformuje na ostatné prvky systému prostredníctvom prvkov vhodnej grupy transformácií. Táto množina transformácií má okrem štruktúry grupy aj štruktúru hladkej variety (*smooth manifold*). Tieto grupy nazývame Lieove grupy.

**Príklad 5.** Ilustrujme tento postup na jednoduchom rovinnom príklade. Zobrazením  $g_t$ , kde pre každé  $t \in \mathbb{R}$ , zodpovedá  $g_t$  rotáciu, transformujme priamku  $l$  parametrizovanú

$$l: x(u) = 1$$

$$y(u) = u.$$

Vo všeobecnosti

$$g_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Zobrazením  $g_0(l)$ , dostávame opäť priamku  $l$ . Pre iné  $t$ , napríklad  $t = \frac{\pi}{2}$ , dostávame priamku

$$g_{\frac{\pi}{2}}(l): x(u) = -u$$

$$y(u) = 1.$$

Na obrázku 1.9 je znázornená priamka  $l$  modrou farbou a transformovaná priamka  $g_{\frac{\pi}{2}}(l)$  červenou farbou.

Transformácie  $g_t$  z príkladu sú prvkami špeciálnej ortogonálnej grupy  $SO(n)$ . Táto grupa je Lieova grupa. Viac informácií o Lieových grupách a Lieových algebrách možno nájsť v [17]. Použili sme štruktúru Lieovej grupy, aby sme opísali, ako sa grupa transformuje daný povrch. Ďalej, využijúc štruktúru hladkej variety môžeme opísť jednoparametrický systém plôch výlučne pomocou terminológie Lieových grúp. Táto teória sa aplikuje na nájdenie parametrizácie obálok kvadratických plôch v [38].

### 1.3.4 Obálky a ODR

Obálky súvisia aj so štúdiom obyčajných diferenciálnych rovníc, a najmä ich singulárnych riešení. Predpokladajme, že jednoparametrický systém kriviek  $\mathcal{F}$  je riešením nejakej diferenciálnej rovnice prvého rádu. Potom môže existovať aj ďalšia krivka splňajúca túto diferenciálnu rovnicu, ktorá je dotyčnicou k  $\mathcal{F}$  v každom bode. Táto krivka je obálka. V literatúre sa nazýva aj singulárne riešenie diferenciálnej rovnice. Uvažujme ODR

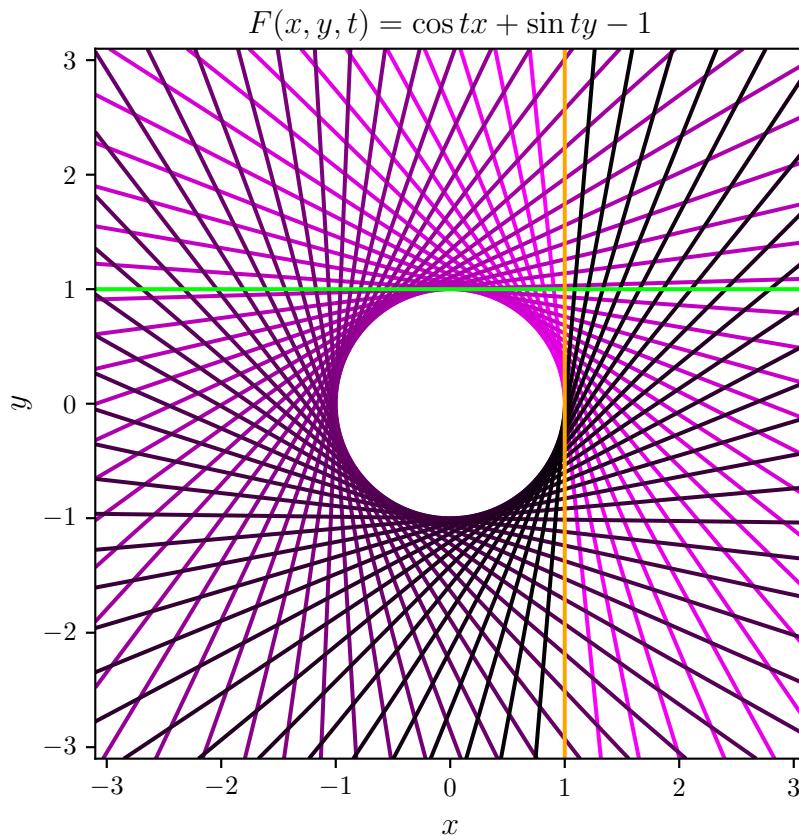
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Jej regulárnym riešením sú integrálne krivky

$$y = -t^2 + 2tx, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Riešenie môžeme reprezentovať ako jednoparametrický systém kriviek  $\mathcal{F}$  s funkciou

$$F(x, y, t) = t^2 - 2tx + y.$$



Obr. 1.9: Systém priamok v normálovom tvare zobrazený na intervale  $[0, 2\pi]$  s krokom  $\Delta t = 0, 1$ . Priamka  $l$  je znázornená oranžovou farbou a transformovaná priamka  $g_{\frac{\pi}{2}}(l)$  zelenou farbou.

Derivovaním podľa parametra  $t$  dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2t - 2x,$$

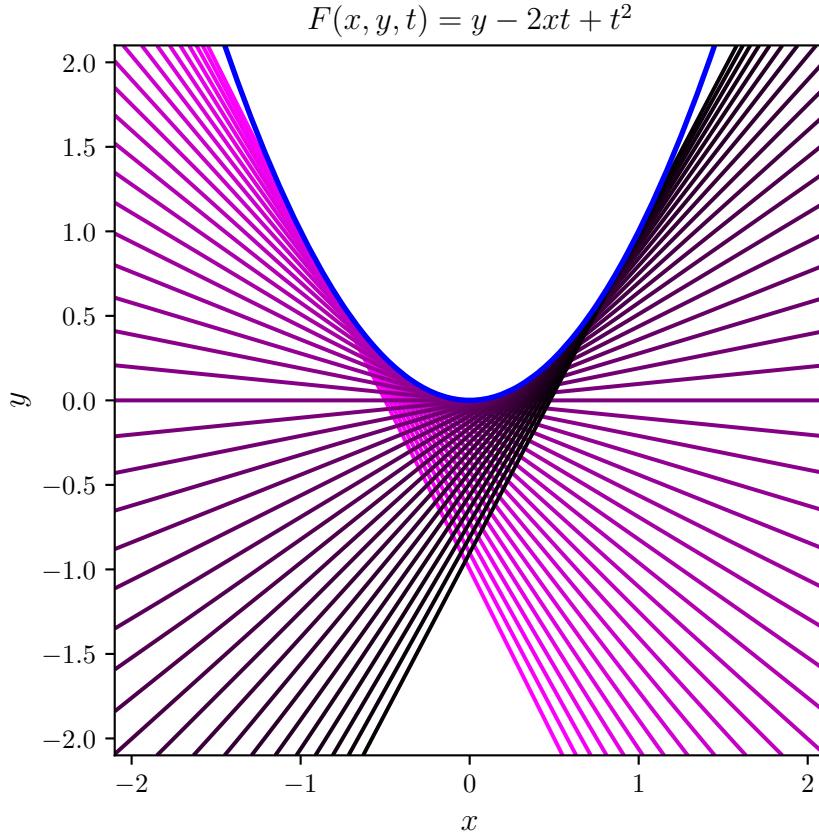
z čoho máme  $t = x$  a dosadením do funkcie  $F$  máme  $F = -x^2 + y$ , teda obálka je  $y = x^2$ .

Obálka tohto jednoparametrického systému priamok, ktorou je parabola  $y = x^2$ , rieši taktiež diferenciálnu rovnicu. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [10].

### 1.3.5 Lokálne prieniky

Lokálny prienik systému kriviek  $\mathcal{F}$  pozostáva z prienikov nekonečne blízkych susedných kriviek systému. Definujme túto myšlienku formálne.

**Definícia 1.5** (Lokálny prienik). *Lokálny prienik systému  $\mathcal{F}$  je množina všetkých prienikov infinitezimálne blízkych prvkov pre všetky parametre  $t \in I$ . Označuje sa ako  $\mathcal{L}$  a*



Obr. 1.10: Regulárne riešenia a obálka vykreslené na intervale  $[-1, 1]$  s krokom  $\Delta t = 0,05$ . Pre  $t = -1$  je zobrazená časť priamky ružová, pre  $t = 1$  čierna, modrou farbou je vykreslená obálka.

platí  $\mathcal{L} := \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t$  kde

$$\mathcal{L}_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_t \cap F_{t+\varepsilon}$$

pre nejaké pevné  $t \in I$ .

Lokálny priesecník regulárneho systému sa v mnohých prípadoch zhoduje s jeho obálkou. Ilustrujme to na nasledovnom príklade.

**Príklad 6.** Vezmíme dva ľubovoľné, ale odlišné prvky systému  $F(x, y, t) = y - 2tx - t$ . Pre fixné parametre  $t_1 \neq t_2$  tak máme

$$F(x_1, y_1, t_1) = y_1 - 2t_1 x_1 - t_1^2,$$

$$F(x_2, y_2, t_2) = y_2 - 2t_2 x_2 - t_2^2.$$

Označme priesecník týchto dvoch priamok  $Q = (q_x, q_y)^T$ . Pre priesecník  $Q$  platí

$$F(Q, t_1) = 0 = F(Q, t_2),$$

odkiaľ vyplýva

$$(t_2 - t_1)(2q_x + t_1 + t_2) = 0.$$

Kedže podľa predpokladu  $t_1 \neq t_2$ , jediné riešenie tejto rovnice je  $q_x = -\frac{t_1 + t_2}{2}$  a priesečník je potom daný

$$Q = \left( -\frac{t_1 + t_2}{2}, -t_1 t_2 \right)^T.$$

Definujme  $\varepsilon := t_2 - t_1$  a nechajme  $\varepsilon$  smerovať k nule, dostávame priesečník

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -t_1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ -t_1(t_1 + \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1^2 \end{pmatrix}.$$

Po reparametrizácii  $t_1(t) = -t$  je ľahké vidieť, že množina všetkých týchto priesečníkov  $\mathcal{L} = \{(t, -t^2) : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{E}$ , ktorá predstavuje lokálny priesečník, sa zhoduje s vypočítanou množinou bodov obálky.

**Dôsledok 1.1.** Nech je daný systém  $\mathcal{F}$ . Každý bod lokálneho priesečníka systému  $\mathcal{L}$  je aj bodom obálky systému  $\mathcal{E}$ . Teda platí

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}.$$

*Dôkaz.* Pre každý bod  $Q \in \mathcal{L}$  lokálneho prieniku systému  $\mathcal{F}$  existuje podľa definície 1.5 aspoň jedno  $t_0 \in I$ , pre ktoré  $Q \in \mathcal{L}_{t_0}$ , a teda  $Q$  patrí do prieniku nekonečne blízkych prvkov pre  $\mathcal{F}$  pre  $t_0$ , to znamená, že platí

$$F(Q, t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(Q, t_0) = 0,$$

čo je z definície 1.4 bod obálky  $\mathcal{E}$ .  $\square$

## 1.4 Obálka sfér

Označme  $X \in \mathbb{R}^3$  a predpokladajme, že  $m(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  je parametrizácia krivky a  $r(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  je funkcia definovaná na tom istom intervale. Krivka  $m$  sa nazýva kostrová krivka obálky (*spine curve*) a  $r$  sa nazýva funkcia polomeru (*radius function*). Jednoparametrický systém sfér  $\mathcal{S}$  je daný rovnicou

$$F(X, t) = \langle X - m(t), X - m(t) \rangle - r^2(t) = 0.$$

Podľa definície 1.4, obálku  $\mathcal{E}$  možno nájsť ako prienik systému sfér  $\mathcal{S}$  a ich derivácií  $\dot{\mathcal{S}}$  pre všetky  $t \in I$ . Derivácia  $\mathcal{S}$  nám dáva jednoparametrický systém rovín  $\dot{\mathcal{S}}$  daný rovnicou

$$\frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = \langle \dot{m}(t), X - m(t) \rangle + r(t)\dot{r}(t) = 0.$$

Pre nájdenie obálky  $\mathcal{E}$  budeme teda hľadať prieniky sféry  $\mathcal{S}_t$  a roviny  $\dot{\mathcal{S}}_t$  pre každý parameter  $t \in I$ .

## 1.5 Charakteristická kružnica

**Definícia 1.6** (Charakteristická kružnica). V prípade, že pre  $t \in I$  je  $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t \neq \emptyset$ , sa tento prienik nazýva sa charakteristická kružnica  $c_t$ . V prípade  $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t = \emptyset$ , pre t neexistuje žiadna charakteristická kružnica.

**Lema 1.1.** Zjednotenie všetkých charakteristických kružníc  $c_t$  jednoparametrického systému sfér  $\mathcal{S}_t$  je obálka  $\mathcal{E}$  tohto systému, teda platí

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t.$$

*Dôkaz.* Nech bod  $X$  patrí do zjednotenia kružníc  $\bigcup_{t \in I} c_t$ , potom existuje aspoň jedno  $t_0 \in I$ , pre ktoré  $X \in c_{t_0}$ . Keďže  $c_{t_0} = \mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0}$ , tak sú rovnice  $\mathcal{S}_{t_0}$  a  $\dot{\mathcal{S}}_{t_0}$  splnené pre nejaké  $t_0$  a  $X$ , a preto patrí  $X$  obálke  $\mathcal{E}$ , a teda platí inkluzia  $\bigcup_{t \in I} c_t \subseteq \mathcal{E}$ .

Opačne, ak  $X$  patrí obálke  $\mathcal{E}$ , existuje podľa definície 1.4  $t_0 \in I$  také, že platí  $F(X, t_0) = 0$  a súčasne  $\frac{\partial F}{\partial t}(X, t_0) = 0$ , to znamená, že  $X$  leží v prieniku  $\mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0} = c_{t_0}$  a  $c_{t_0} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$ . Preto platí inkluzia  $\mathcal{E} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$ .

Týmto je rovnosť  $\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t$  dokázaná.  $\square$

Obálka sfér sa teda skladá zo systému kružníc. Charakteristická kružnica leží celá v rovine  $\dot{\mathcal{S}}_t$ , takže v tejto rovine leží aj jej stred. Dotykový vektor kostrovej krivky  $m(t)$  je kolmý na rovinu  $\dot{\mathcal{S}}_t$ , teda stred  $C_t$  charakteristickej kružnice leží na dotyčnici  $T(t, s) = m(t) + s \cdot \dot{m}(t)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , preto stred  $C_t$  nájdeme ako

$$\dot{\mathcal{S}}_t \cap T(t, s).$$

Pre parameter  $s$  potom platí  $s = \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}$ , po dosadení do  $T(t, s)$  získavame

$$C_t = m(t) - \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle} \dot{m}(t). \quad (1.1)$$

Rozoberme si nasledujúce dva prípady

- Ak je funkcia polomeru  $r(t)$  konštantná,  $\dot{r} \equiv 0$  a rovina  $\dot{\mathcal{S}}_t$  obsahuje stred sféry  $M_t$  pre všetky  $t \in I$ , v tomto prípade možno obálku  $\mathcal{E}$  považovať za posunutie (*offset*) kostrovej krivky  $m$ . Tieto obálky sú známe ako rúrkové plochy (*pipe surfaces*). Keďže rovina  $\dot{\mathcal{S}}_t$  charakteristickej kružnice  $c_t$  obsahuje stred sféry  $M_t$  v každom  $t \in I$ , charakteristická krivka je hlavnou kružnicou sféry a obálka  $\mathcal{E}$  je pokrytá jednoparametrickým systémom zhodných kružníc.
- Ak funkcia polomeru  $r(t)$  nie je konštantná, potom  $\dot{r}(t) \neq 0$  a rovina  $\dot{\mathcal{S}}_t$  neprechádza stredom sféry  $M_t$ . V tomto prípade obálka  $\mathcal{E}$  patrí do triedy kanálových plôch.

Polomer  $l_t$  charakteristiskej kružnice možno vypočítať z pravouhlého trojuholníka  $M_t C_t P$ , kde  $P$  je ľubovoľný bod na charakteristickej kružnici  $c_t$ , a teda aj na sfére  $\mathcal{S}_t$ .

$$l_t = \sqrt{r^2(t) - \|M_t C_t\|^2} = r(t) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}}.$$

V prípade, že  $\|M_t C_t\| > r(t)$ , sféra  $\mathcal{S}_t$  nemá s obálkou  $\mathcal{E}$  reálny kontakt.

**Príklad 7.** Uvažujme kostrovú krivku  $m(t)$  a polomer  $r(t)$

$$m(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad r(t) = \frac{t}{\sqrt{26}}.$$

potom obálka systému je daná rovnicami

$$\begin{aligned} \mathcal{S}: x^2 + y^2 + (z - t)^2 - \frac{t^2}{26} &= 0, \\ \dot{\mathcal{S}}: z - \frac{25}{26}t &= 0. \end{aligned}$$

Počítajme  $\mathcal{S} \cap \dot{\mathcal{S}}$  pre všetky  $t \in \mathbb{R}$ . Z druhej rovnice dostoneme  $t = \frac{26}{25}z$ . Po dosadení do prvej rovnice, dostávame implicitnú rovinu pre obálku  $\mathcal{E}$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{25}z^2 = 0,$$

čo je rovina rotačného kužeľa.

Napríklad, pre  $t = 1 \in I$  charakteristická krivka je prienikom dvoch plôch daných

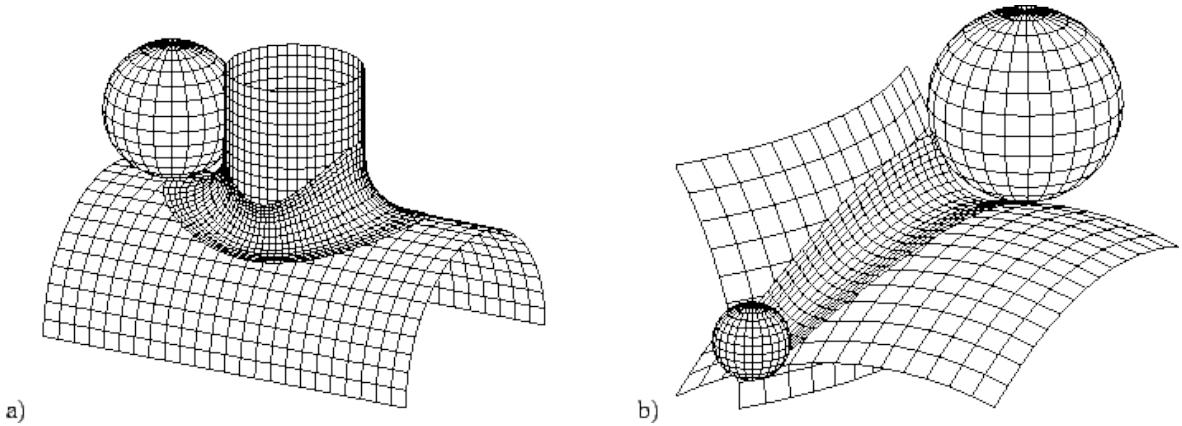
$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - \frac{1}{26} &= 0, \\ \dot{\mathcal{S}}_1: z - \frac{25}{26} &= 0. \end{aligned}$$

Z toho môžeme usúdiť, že charakteristická krivka  $c_1$  je kružnica so stredom v bode  $C_1 = (0, 0, \frac{25}{26})$  v rovine  $z = \frac{25}{26}$  a neprechádza stredom sféry  $M_1 = m(1) = (0, 0, 1)$ , polomer  $c_1$  je  $l_1 = \frac{\sqrt{25}}{26}$ . Vzdialenosť bodov  $\|M_t C_t\| = \frac{1}{26}$  a  $r(1) = \frac{1}{\sqrt{26}}$ , takže platí, že  $r(1) > \|M_t C_t\|$  a sféra  $\mathcal{S}_1$  má s obálkou  $\mathcal{E}$  reálny kontakt.

Jedným z dôležitých výsledkov je, že kanálové plochy, definované ako obálka jednoparametrického systému sfér s racionálnou funkciou polomeru  $r(t)$  a stredmi v racionálnej krivke  $m(t)$  možno racionálne parametrizovať [23].

Bohužiaľ, vo väčšine prípadov sú rovnice, ktoré charakterizujú obálky, príliš zložité a odvodiť z nich rovinu obálky nie sme schopní.

Rúrkové povrhy sa často objavujú pri výrobe potrubia. Hladké spojenie medzi dvoma nie nevyhnutne valcovými rúrami  $\mathcal{P}_1$  a  $\mathcal{P}_2$  sa modeluje tak, aby bol prechod hladký, bez záhybov, vodotesný alebo dokonca aj parotesný. Na to sa používa technika *rolling ball blends*, využívajúca nasledujúcu myšlienku: Kým sa sféra  $S$  s konštantným alebo nekonštantným polomerom  $r$  kotúľa na oboch rúrach súčasne, zanecháva stopu  $s_i$  na oboch rúrach. Zmiešavacia plocha je tá časť obálky  $\mathcal{E}$  jednoparametrického systému sfér, ktorá leží medzi dvoma stopami  $s_1$  a  $s_2$ . Kostrová krivka obálky  $\mathcal{E}$  je priesecníkom ekvidištánt (*offsetov*) plôch  $\mathcal{P}_1$  a  $\mathcal{P}_2$  vo vzdialosti  $r$ . Každá charakteristická krivka spája dva dotykové body zmiešavacej plochy a plochami  $\mathcal{P}_1$  a  $\mathcal{P}_2$ , ktoré sa majú zmiešavať. Viac detailov možno nájsť v [15] a [22]. Na obrázku 1.11 vľavo je znázornená metóda so sférou s konštantným polomerom  $r$ , vpravo s nekonštantným.



Obr. 1.11: Technika rolling ball blend s konštantným polomerom vľavo, s nekonštantným polomerom vpravo [41].



# Kapitola 2

## Matematický model

### 2.1 Krivky druhého stupňa

Nasledujúca teória a klasifikácia nadplôch druhého rádu je prevzatá zo [13], [16], [21], [22], [39]. Krivka druhého stupňa  $q$  je v karteziaňskych súradničach  $(x, y) \in \mathbb{E}^2$  daná rovnicou

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Prípad  $A = B = C = 0$  môžeme vylúčiť, pretože potom je rovnica lineárna a opisuje priamku. Vo všeobecnosti rovnica vyjadruje kužeľosečku, ktorá je daná piatimi bodmi. Ak  $F \neq 0$ , môžeme ju vydeliť  $F$  a potom riešiť sústavu lineárnych rovníc s piatimi neznámymi. Okrem klasických prípadov, ako elipsy, paraboly a hyperboly, môžu kužeľosečky degenerovať na dvojice priamok, bod alebo prázdnu množinu.

V algebraickom zmysle má kužeľosečka  $q$  vždy dva priesečníky  $S_1$  a  $S_2$  s danou priamkou  $s$ . Oba môžu byť reálne alebo komplexne združené. Limitný prípad  $S_1 = S_2$  nastáva vtedy, keď  $s$  je dotyčnicou ku  $q$ .

V závislosti od počtu reálnych priesečníkov s priamkou  $s$  v nekonečne rozlišujeme tri typy kužeľosečiek

1. eliptický typ: bez reálnych priesečníkov,
2. hyperbolický typ: dva reálne priesečníky,
3. parabolický typ: priamka v nekonečne sa dotýka krivky.

**Definícia 2.1.** Matica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sa nazýva ortogonálna, ak platí  $A^T A = I_n$ , alebo, čo je to isté,  $A^{-1} = A^T$ .

Prvá podmienka hovorí, že stĺpce matice  $A$  tvoria ortonormálnu bázu euklidovského priestoru  $\mathbb{R}^n$  so štandardným skalárny súčinom. Potom tiež platí  $AA^T = I_n$ , teda takisto riadky matice  $A$  tvoria ortonormálnu bázu v  $\mathbb{R}^n$ .

**Veta 2.1.** *Matica prechodu od ortonormálnej bázy v  $\mathbb{R}^n$  so štandardným skalárnym súčinom k ortonormálnej báze je ortogonálna matica. Tiež, ak od ortonormálnej bázy v  $\mathbb{R}^n$  prejdeme pomocou ortogonálnej matice prechodu k novej báze, tak aj nová báza bude ortonormálna.*

### 2.1.1 Invarianty kriviek druhého stupňa

**Definícia 2.2.** *Invariantom krivky druhého stupňa  $q$ , vyjadrenej rovnicou*

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

*je každý taký algebraický výraz, závisiaci od  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ , ktorého hodnota sa nezmení, ak túto krivku vyjadrieme v inom karteziánskom súradnicovom systéme, ku ktorému prejdeme pomocou otočení alebo posunutí (čím od rovnice, viažúcej staré premenné  $x, y$ , prejdeme k rovnici, viažúcej nové premenné  $x', y'$ ).*

**Veta 2.2.** *Nasledujúce číselné výrazy sú invariantmi krivky druhého stupňa, vyjadrenej rovnicou  $f(x, y)$ .*

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad s = a_{11} + a_{22}.$$

Z tohto možno odvodiť nasledujúcu klasifikáciu kužeľosečiek.

Typ	$\delta$	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
eliptický	$> 0$	ak $s\Delta < 0$ , tak elipsa ak $s\Delta > 0$ , tak $\emptyset$	bod
hyperbolický	$< 0$	hyperbola	dve rôznobežné priamky
parabolický	$= 0$	dve rovnobežné priamky priamka $\emptyset$	parabola

Tabuľka 2.1: Klasifikácia kužeľosečiek.

## 2.2 Plochy druhého stupňa

Plocha druhého stupňa  $Q$  je v karteziánskych súradničiach  $(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$  daná rovnicou

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Je zrejmé, že ak je prvých šest koeficientov nulových, uvedená rovnica je lineárna a opisuje rovinu v priestore. Vo všeobecnosti rovnica opisuje kvadriku, ktorá je daná

deviatimi bodmi. Ak  $J \neq 0$ , môžeme ju vydeliť  $J$  a potom vyriešiť sústavu lineárnych rovníc s deviatimi neznámymi. Okrem klasických prípadov, ako elipsoidy, paraboloidy a hyperboloidy, môžu kvadriky degenerovať aj na kvadratické kužeľe, kvadratické valce a dvojice rovín.

V algebraickom zmysle je kvadrika  $Q$  plocha druhého stupňa, ktorá má vždy dva priesečníky  $S_1$  a  $S_2$  s danou priamkou  $s$ . Oba môžu byť reálne alebo komplexne združené. Limitný prípad  $S_1 = S_2$  nastáva vtedy, keď  $s$  je dotyčnicou  $Q$ .

V závislosti od počtu reálnych priesečníkov s rovinou  $s$  v nekonečne rozlišujeme tri typy kvadrík:

1. eliptický typ: bez reálnych priesečníkov,
2. hyperbolický typ: dva reálne priesečníky,
3. parabolický typ: kvadriky sa dotýka rovina v nekonečne.

### 2.2.1 Invarianty plôch druhého stupňa

Nasledujúce číselné výrazy sú invariantmi plochy druhého rádu  $Q$ , vyjadrenej rovnicou

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

$$\Delta(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \delta(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$T(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{pmatrix},$$

$$s(x, y, z) = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad \Delta'(x, y, z) = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33},$$

kde  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\Delta_{ij})$ .

Z tohto možno odvodiť nasledujúce dve tabuľky.

Typ	$\delta$	$s\delta$ a $T$	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
eliptický	$\neq 0$	$s\delta > 0$ a $T > 0$	$\emptyset$	elipsoid	$\emptyset$
hyperbolický	$\neq 0$	$s\delta > 0$ alebo $T \leq 0$	jednodielny hyperboloid	dvojdielny hyperboloid	kužeľ
parabolický	$= 0$		hyperbolický paraboloid	eliptický paraboloid	valcové a reducibilné plochy

Tabuľka 2.2: Klasifikácia kvadrík.

Typ	$T$	$\Delta' \neq 0$	$\Delta' = 0$
eliptický	$> 0$	ak $s\Delta < 0$ , tak eliptický valec ak $s\Delta > 0$ , tak $\emptyset$	bod
hyperbolický	$< 0$	hyperbolický valec	dve rôznobežné roviny
parabolický	$= 0$	parabolický valec	dve rovnobežné roviny rovina $\emptyset$

Tabuľka 2.3: Klasifikácia degenerovaných kvadrík.

## 2.3 Obálka elíps

Pre vyriešenie úlohy zstrojenia obálky elipsoidov sme sa najprv zaoberali obálkou elíps.

Nech  $M(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  je jednoparametrický systém (nie nutne regulárnych) symetrických  $3 \times 3$  matíc. Nech  $X = (x, y, 1)^T$  sú homogénne súradnice v  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , potom

$$Q(t): X^T M(t) X = 0 \quad (2.1)$$

je rovnica jednoparametrického systému kužeľosečiek. Matica  $M(t)$  je tvaru

$$\begin{pmatrix} A(t) & \frac{B(t)}{2} & \frac{D(t)}{2} \\ \frac{B(t)}{2} & C(t) & \frac{E(t)}{2} \\ \frac{D(t)}{2} & \frac{E(t)}{2} & F(t) \end{pmatrix},$$

kde jej prvky  $A(t), \dots, F(t)$  sú diferencovateľné funkcie parametra  $t \in I$ , ktoré definujú elipsu  $Q_t$  danú funkciou

$$f(x, y, t) = A(t)x^2 + B(t)xy + C(t)y^2 + D(t)x + E(t)y + F(t) = 0.$$

Deriváciu jednoparametrického systému  $Q(t)$  vzhľadom na parameter  $t$  označíme

$$\dot{Q}(t): X^T \dot{M}(t) X = 0. \quad (2.2)$$

Matica  $\dot{M}(t)$  je tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{A}(t) & \frac{\dot{B}(t)}{2} & \frac{\dot{D}(t)}{2} \\ \frac{\dot{B}(t)}{2} & \dot{C}(t) & \frac{\dot{E}(t)}{2} \\ \frac{\dot{D}(t)}{2} & \frac{\dot{E}(t)}{2} & \dot{F}(t) \end{pmatrix},$$

kde jej prvky  $\dot{A}(t), \dots, \dot{F}(t)$  sú funkcie parametra  $t \in I$ , ktoré definujú kužeľosečku  $\dot{Q}_t$  danú rovnicou

$$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = \dot{A}(t)x^2 + \dot{B}(t)xy + \dot{C}(t)y^2 + \dot{D}(t)x + \dot{E}(t)y + \dot{F}(t) = 0.$$

Označme determinant matice

$$\Delta(t) := \det \dot{M}(t)$$

a subdeterminant matice, ktorá vznikne odstránením tretieho riadku a tretieho stĺpca

$$\delta(t) := \det \dot{M}_{33}(t).$$

### 2.3.1 Zmena bázy elíps

Nech  $m(t): I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  je aspoň dvakrát diferencovateľná krivka, napišme rovnicu jednoparametrického systému elíps  $Q$  so stredom na krivke  $m(t)$ , hlavnou polosou  $a$  v smere vektora  $\dot{m}(t)$  a vedľajšou polosou  $b$  v smere normálového vektora  $\vec{n}$  ku krivke  $m(t)$ . Uvažujme  $\vec{n} = (-\dot{m}_2, \dot{m}_1)$ . Vydelením normou vektorov  $\dot{m}(t)$  a  $\vec{n}$  dostávame novú ortonormálnu bázu tvorenú stôpcovými vektormi matice  $P(t)$ , kde

$$P(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & -\dot{m}_2(t) \\ \dot{m}_2(t) & \dot{m}_1(t) \end{pmatrix}.$$

Kedže sme prešli od štandardnej bázy k ortonormálnej báze, matica  $P(t)$  je ortogonálna, a teda

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ -\dot{m}_2(t) & \dot{m}_1(t) \end{pmatrix}.$$

V súradniach  $(u(t), v(t))$  má systém  $Q$  rovnicu v kanonickom tvaru

$$\frac{u^2(t)}{a^2} + \frac{v^2(t)}{b^2} = 1,$$

kde vzťah medzi súradnicami  $(u(t), v(t))$  a  $(x, y)$  je daný

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ -\dot{m}_2(t) & \dot{m}_1(t) \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{pmatrix} \right).$$

Systém elíps  $Q$  sa potom transformuje na tvar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|\dot{m}\|^2} \left( (x - m_1)^2 \left( \frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) + (y - m_2)^2 \left( \frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) \right) \\ & + \frac{1}{\|\dot{m}\|^2} \left( 2 \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) (x - m_1)(y - m_2) \dot{m}_1 \dot{m}_2 \right) - 1 = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

po miernej úprave tak dostávame výraz

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \left( (x - m_1)^2 (b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2) + (y - m_2)^2 (a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2) \right) \\ & + \frac{1}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} \left( 2(b^2 - a^2)(x - m_1)(y - m_2) \dot{m}_1 \dot{m}_2 \right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

### 2.3.2 Výpočet obálky elips

Prepíšme jednoparametrický systém elips  $Q$  v novej báze, teda rovnicu 2.3, do maticového zápisu.

$$\begin{aligned} A &= \frac{b^2\dot{m}_1^2 + a^2\dot{m}_2^2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2} \\ B &= \frac{2(b^2 - a^2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2} \\ C &= \frac{a^2\dot{m}_1^2 + b^2\dot{m}_2^2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2} \\ D &= \frac{-2m_1(b^2\dot{m}_1^2 + a^2\dot{m}_2^2) - 2(b^2 - a^2)m_2\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2} \\ E &= \frac{-2m_2(a^2\dot{m}_1^2 + b^2\dot{m}_2^2) - 2(b^2 - a^2)m_1\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2} \\ F &= \frac{\dot{m}_1^2(b^2m_1^2 + a^2m_2^2 - a^2b^2) + 2(b^2 - a^2)m_1m_2\dot{m}_1\dot{m}_2 + \dot{m}_2^2(a^2m_1^2 + b^2m_2^2 - a^2b^2)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2} - 1. \end{aligned}$$

Derivujme funkcie  $A(t), \dots, F(t)$ .

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{2(b^2 - a^2)(\ddot{m}_1\dot{m}_2 - \dot{m}_1\ddot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ \frac{\dot{B}}{2} &= \frac{(a^2 - b^2)(2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 - (\dot{m}_1\ddot{m}_2 + \dot{m}_2\ddot{m}_1)\|\dot{m}\|^2)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ \dot{C} &= \frac{2(b^2 - a^2)(\ddot{m}_1\dot{m}_2 - \dot{m}_1\ddot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ \frac{\dot{D}}{2} &= \frac{2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)(a^2(m_1\dot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)\dot{m}_2 + b^2(m_1\dot{m}_1 + m_2\dot{m}_2)\dot{m}_1)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ &\quad - \frac{\|\dot{m}\|^2(a^2(m_1\dot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)\ddot{m}_2 + a^2(m_1\ddot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)\dot{m}_2)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ &\quad - \frac{\|\dot{m}\|^2(b^2(m_1\dot{m}_1 + m_2\dot{m}_2)\ddot{m}_1 + b^2(m_1\ddot{m}_1 + m_2\ddot{m}_2 + \|\dot{m}\|^2)\dot{m}_1)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ \frac{\dot{E}}{2} &= \frac{-2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)(a^2(m_1\dot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)\dot{m}_1 - b^2(m_1\dot{m}_1 + m_2\dot{m}_2)\dot{m}_2)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ &\quad + \frac{\|\dot{m}\|^2(a^2(m_1\dot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)\ddot{m}_1 + a^2(m_1\ddot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)\dot{m}_1)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ &\quad - \frac{\|\dot{m}\|^2(b^2(m_1\dot{m}_1 + m_2\dot{m}_2)\ddot{m}_2 + b^2(m_1\ddot{m}_1 + m_2\ddot{m}_2 + \|\dot{m}\|^2)\dot{m}_2)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ \dot{F} &= \frac{-2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)(-a^2b^2\|\dot{m}\|^2 + a^2(m_1\dot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)^2 + b^2(m_1\dot{m}_1 + m_2\dot{m}_2)^2)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\ &\quad + \frac{\|\dot{m}\|^2(-a^2b^2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2) + a^2(m_1^2\dot{m}_2\ddot{m}_2 - m_1m_2\dot{m}_1\ddot{m}_2 - m_1m_2\ddot{m}_1\dot{m}_2 + m_2^2\dot{m}_1\ddot{m}_1))}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\|\dot{m}\|^2 b^2 (m_1^2 \dot{m}_1 \ddot{m}_1 + m_1 m_2 \dot{m}_1 \ddot{m}_2 + m_1 m_2 \ddot{m}_1 \dot{m}_2 + m_1 \dot{m}_1^3)}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^4} \\ + \frac{\|\dot{m}\|^2 b^2 (m_1 \dot{m}_1 \dot{m}_2^2 + m_2^2 \dot{m}_2 \ddot{m}_2 + m_2 \dot{m}_1^2 \dot{m}_2 + m_2 \dot{m}_2^3)}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^4}.$$

Určme typ kužeľosečiek, ktoré vznikli deriváciou jednoparametrického systému.

$$\Delta(t) = 0$$

pre všetky  $t$ , čo znamená, že kužeľosečka je singulárna.

$$\delta(t) = \dot{A}\dot{C} - \frac{\dot{B}^2}{4} = -\frac{(b^2 - a^2)^2}{a^4 b^4} \frac{(\dot{m}_1 \ddot{m}_2 - \ddot{m}_1 \dot{m}_2)^2 + \dot{m}_1 \dot{m}_2 \ddot{m}_1 \ddot{m}_2}{\|m\|^4}.$$

Hodnota  $\delta(t) < 0$ , pre všetky  $t$ , teda kužeľosečky  $\dot{Q}$  podľa klasifikácie degenerujú na dve rôznobežné priamky. Ukázali sme, že jednoparametrický systém  $\dot{Q}$  sú pre každý parameter dve rôznobežné priamky.

**Príklad 8** (Parabola). Majme parabolu s parametrizáciou  $m(t) = (t, t^2)$ , kde  $\dot{m}(t) = (1, 2t)$ . Transformujme jednoparametrický systém elips  $Q$ .

$$Q : \frac{1}{a^2 b^2 (4t^2 + 1)} ((x - t)^2 (b^2 + a^2 4t^2) + (y - t^2)^2 (a^2 + b^2 4t^2)) \\ + \frac{1}{a^2 b^2 (4t^2 + 1)} (4t(b^2 - a^2)(x - t)(y - t^2)2t) - 1 = 0.$$

**Príklad 9** (Parabola).

$$\frac{2 \cdot (2a^2 \cdot (2t(t^2 + 2t(-t + x) - y) + (t - x)(4t^2 + 1)) (-t^2 + 2t(t - x) + y) + b^2 \cdot (4t(2t(-t^2 + y)$$

$$a^2 b^2 (4t^2 + 1)^2)$$

## 2.4 Obálka elipsoidov

Podobne ako pre elipsy odvodíme formu zápisov s dorbými úpravami pre elipsoidy. Pre tento prípad parameter  $t$  pre lepšiu prehľadnosť vynechávame. Nech  $M(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$  je jednoparametrický systém (nie nutne regulárnych) symetrických  $4 \times 4$  matíc. Nech  $X = (x, y, z, 1)^T$  sú homogénne súradnice v  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , potom

$$Q(t) : X^T M(t) X = 0 \tag{2.4}$$

je rovnica jednoparametrického systému elipsoidov. Matica  $M(t)$  je tvaru

$$\begin{pmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & \frac{G}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} & \frac{H}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C & \frac{I}{2} \\ \frac{G}{2} & \frac{H}{2} & \frac{I}{2} & J \end{pmatrix},$$

kde jej prvky  $A, \dots, J$  sú diferencovateľné funkcie  $A(t), \dots, J(t)$  parametra  $t \in I$ , ktoré definujú elipsoid  $Q_t$  daný funkciou

$$f(x, y, z, t) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Derivácia jednoparametrického systému  $Q(t)$  vzhľadom na parameter  $t$  je

$$\dot{Q}(t) : X^T \dot{M}(t) X = 0. \quad (2.5)$$

Matica  $\dot{M}(t)$  je tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{A} & \frac{\dot{D}}{2} & \frac{\dot{E}}{2} & \frac{\dot{G}}{2} \\ \frac{\dot{D}}{2} & \dot{B} & \frac{\dot{F}}{2} & \frac{\dot{H}}{2} \\ \frac{\dot{E}}{2} & \frac{\dot{F}}{2} & \dot{C} & \frac{\dot{I}}{2} \\ \frac{\dot{G}}{2} & \frac{\dot{H}}{2} & \frac{\dot{I}}{2} & \dot{J} \end{pmatrix},$$

kde jej prvky  $A, \dots, F$  sú funkcie  $\dot{A}(t), \dots, \dot{J}(t)$  parametra  $t \in I$ , a definujú plochu druhého stupňa  $Q_t$  danú rovnicou

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = \dot{A}x^2 + \dot{B}y^2 + \dot{C}z^2 + \dot{D}xy + \dot{E}xz + \dot{F}yz + \dot{G}x + \dot{H}y + \dot{I}z + \dot{J} = 0.$$

Označme determinant matice

$$\Delta(t) := \det \dot{M}(t),$$

subdeterminant matice, ktorá vznikne odstránením štvrtého riadku a štvrtého stĺpca

$$\delta(t) := \det \dot{M}_{44}(t),$$

$$T(t) = \det \begin{pmatrix} \dot{A} & \frac{\dot{D}}{2} \\ \frac{\dot{D}}{2} & \dot{B} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dot{B} & \frac{\dot{F}}{2} \\ \frac{\dot{F}}{2} & \dot{C} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dot{C} & \frac{\dot{E}}{2} \\ \frac{\dot{E}}{2} & \dot{A} \end{pmatrix},$$

$$s(t) = A + B + C,$$

$$\Delta'(t) = \det \dot{M}_{11}(t) + \det \dot{M}_{22}(t) + \det \dot{M}_{33}(t).$$

### 2.4.1 Zmena bázy elipsoidov

Upravme rovnice pre obálku sféry tak, aby zodpovedali obálke elipsoidov. Vezmieme sféru, zmeňme súradnicový systém so štandardnou bázou  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  na lokálny súradnicový systém krivky s bázou Frenetovho repéra  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  v každom bode krivky  $m(t)$ . Tak budeme môcť upraviť sféru na elipsoid tak, aby a zodpovedalo škálovaniu v dotykovom smere priestorovej krivky  $m(t)$  a b zodpovedalo škálovaniu v normálovom a binormálovom smere. Frenetov repér je ortonormálna báza, ktorú tvoria stĺpcové vektory matice  $P(t)$ , kde

$$P(t) = (\vec{t} \ \vec{n} \ \vec{b}),$$

kde

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{\dot{m}}{\|\dot{m}\|}, \\ \vec{n} &= \frac{\ddot{m} - \langle \ddot{m}, \vec{t} \rangle \vec{t}}{\|\ddot{m} - \langle \ddot{m}, \vec{t} \rangle \vec{t}\|}, \\ \vec{b} &= \frac{\ddot{m} - \langle \ddot{m}, \vec{t} \rangle \vec{t} - \langle \ddot{m}, \vec{n} \rangle \vec{n}}{\|\ddot{m} - \langle \ddot{m}, \vec{t} \rangle \vec{t} - \langle \ddot{m}, \vec{n} \rangle \vec{n}\|}.\end{aligned}$$

Matica  $P(t)$  je ortogonálna, preto  $P^{-1} = P^T$ . Keďže vyjadrenia nových vektorov sú pri prepise do súčasného alebo aj vyčíslení pre konkrétné prípady príliš dlhé, uvažujme inú ortonormálnu bázu, ktorá by zachovala požadované vlastnosti škálovania. Uvažujme

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{(\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3)}{\sqrt{\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}}, \\ \vec{n} &= \frac{(0, -\dot{m}_3, \dot{m}_2)}{\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}}, \\ \vec{b} &= \frac{(\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2, -\dot{m}_1\dot{m}_2, -\dot{m}_1\dot{m}_2)}{\sqrt{\dot{m}_1^2 + \dot{m}_3^2}\sqrt{\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}}.\end{aligned}$$

Potom matica prechodu  $P^{-1}$  má tvar

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{m}_1}{\|\dot{m}\|} & \frac{\dot{m}_2}{\|\dot{m}\|} & \frac{\dot{m}_3}{\|\dot{m}\|} \\ 0 & \frac{-\dot{m}_3}{\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} & \frac{\dot{m}_2}{\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} \\ \frac{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}{\|\dot{m}\|\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} & \frac{-\dot{m}_1\dot{m}_2}{\|\dot{m}\|\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} & \frac{-\dot{m}_1\dot{m}_2}{\|\dot{m}\|\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} \end{pmatrix}.$$

V súradničach  $(u(t), v(t), w(t))$  má jednoparametrický systém elipsoidov  $Q$  rovnicu

$$\frac{u^2(t)}{a^2} + \frac{v^2(t)}{b^2} + \frac{w^2(t)}{b^2} = 1,$$

kde vzťah medzi súradnicami  $(u(t), v(t), w(t))$  a  $(x, y, z)$  je daný

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{m}\|\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2}} \begin{pmatrix} \dot{m}_1\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2} & \dot{m}_2\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2} & \dot{m}_3\sqrt{\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2} \\ 0 & -\dot{m}_3\|\dot{m}\| & \dot{m}_2\|\dot{m}\| \\ \dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2 & -\dot{m}_1\dot{m}_2 & -\dot{m}_1\dot{m}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m_1 \\ y - m_2 \\ z - m_3 \end{pmatrix},$$

Pre jednoparametrický systém elipsoidov  $Q$  tak dostávame vyjadrenie

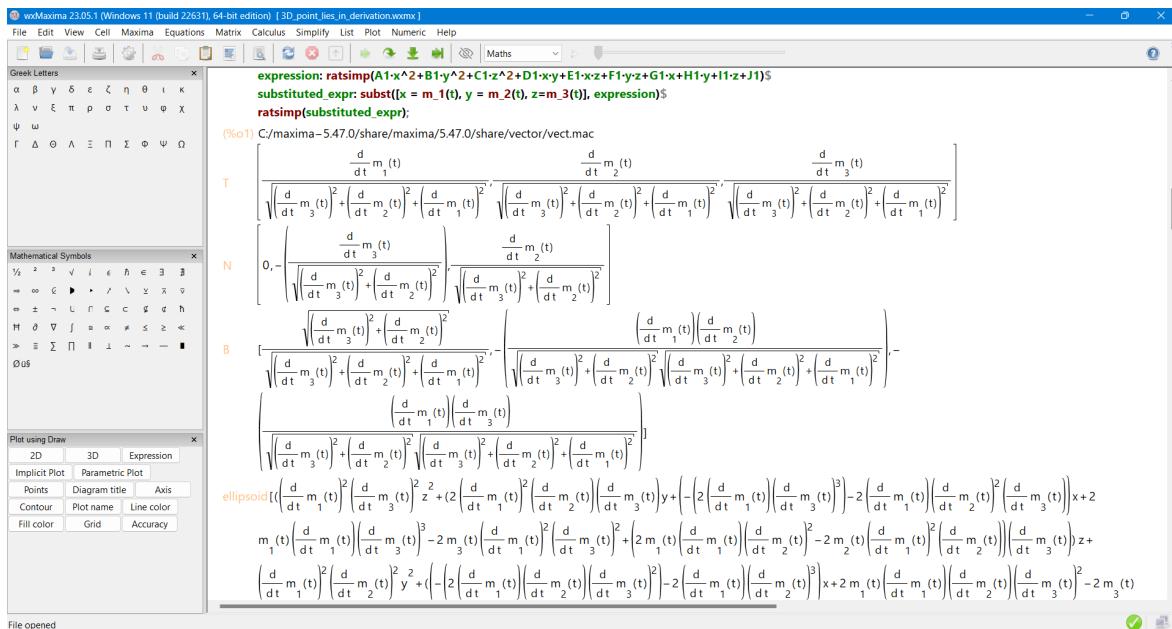
$$\begin{aligned}& \frac{-a^2b^2(\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2)\|\dot{m}\|^2 + a^2((y - m_2)\dot{m}_3 - (z - m_3)\dot{m}_2)^2\|\dot{m}\|^2}{a^2b^2(\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2)\|\dot{m}\|^2} \\ &+ \frac{a^2(-(x - m_1)(\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2) + (y - m_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 + (z - m_3)\dot{m}_1\dot{m}_3)^2}{a^2b^2(\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2)\|\dot{m}\|^2} \\ &+ \frac{b^2\|\dot{m}\|^2((x - m_1)\dot{m}_1 + (y - m_2)\dot{m}_2 + (z - m_3)\dot{m}_3)^2}{a^2b^2(\dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2)\|\dot{m}\|^2} = 0.\end{aligned}$$

## 2.4.2 Výpočet obálky elipsodiov

Tu prídu a možno neprídu fakt dlhé rovnice.

## 2.4.3 Softvér Maxima

Na všetky výpočty v tejto kapitole bol použitý voľne dostupný softvér počítačovej algebry Maxima s grafickým užívateľským rozhraním wMaxima. Celý balík a dokumentácia sú dostupné na [18], [19]. Rovnice z Maximy boli prevedené do LATEXu pomocou Python skriptu `conversion-to-latex.ipynb`, ktorý sa nachádza v GitHub repozitári <https://github.com/tutka13/Masters-Thesis/tree/main/symbolic-computations>.



Obr. 2.1: Výpočet v softvéri Maxima.

# Kapitola 3

## Softvér

V našej práci je cieľom implementácie matematicky odvodených konceptov vizualizácia vypočítaných plôch a následne aj ich 3D tlač. V tejto kapitole v prvej časti uvedieme stručnú špecifikáciu softvéru, v druhej časti zdôvodníme výber programovacieho jazyka a knižníc, opíšeme proces ich inštalácie, zdôvodníme použité programovacie prostredie a uvedieme jeho konfiguráciu pre naše použitie. V tretej časti uvedieme vývoj skriptov, demo a chyby, ktoré sa počas riešenia vyskytli a na záver, vo štvrtnej časti, krátko opíšeme proces 3D tlače plôch. Všetky vytvorené skripty, vymodelované plochy, súbory pripravené na 3D tlač a ďalšie súbory sa nachádzajú na GitHube v repozitári <https://github.com/tutka13/Masters-Thesis>.

### 3.1 Špecifikácia

Hlavným cieľom je vytvorenie 3D plochy - obálky sfér a elipsoidov, kde používateľ zadá vstupné parametre. Softvér vypočíta a vymodeluje plochu podľa procesu workflow.

#### 3.1.1 Vstup

##### Obálka sfér:

Zadať parametrizáciu priestorovej krivky  $m(t)$  stredov sfér, funkciu polomeru  $r(t)$ , interval  $I$  vykreslenia plochy parametra  $t$  a vzorkovanie plochy, teda krok vyčíslenia.

##### Obálka elipsoidov:

Zadať parametrizáciu priestorovej krivky  $m(t)$  stredov elipsoidov, konštanty  $a$  a  $b$ , interval  $I$  vykreslenia plochy parametra  $t$  a vzorkovanie plochy, teda krok vyčíslenia.

#### 3.1.2 Výstup

##### Obálka sfér:

Vizualizácia troch ploch - jednoparametrického systému sfér, charakteristických kružníc a výslednej plochy - obálky sfér.

#### Obálka elipsoidov:

Vizualizácia troch plôch - jednoparametrického systému elipsoidov, charakteristických kružníc a výslednej plochy - obálky elipsoidov.

### 3.1.3 Workflow

Proces workflow je v oboch prípadoch, pre sféry a elipsoidy, rovnaký. Najprv vymažeme všetky objekty zo scény. Po prečítaní vstupných parametrov z textového súboru sa prevedú symbolické výpočty. Vytvoríme si prázdne zoznamy, do ktorých sa v ďalšom kroku ukladajú numericky vyčíslené hodnoty symbolických výrazov. Pre vykreslenie plôch prechádzame zoznam už uložených hodnôt. Pred vykreslením daného objektu zrealizujeme posun objektu v priestore. Medzi dvomi susednými krokmi parametrov sa obálka interpoluje. Nakoniec scénu s vykreslenými plochami uložíme do databázy.

### 3.1.4 Funkčnosť softvéru

Potrebné dátové štruktúry:

- zoznam

Potrebné funkcie:

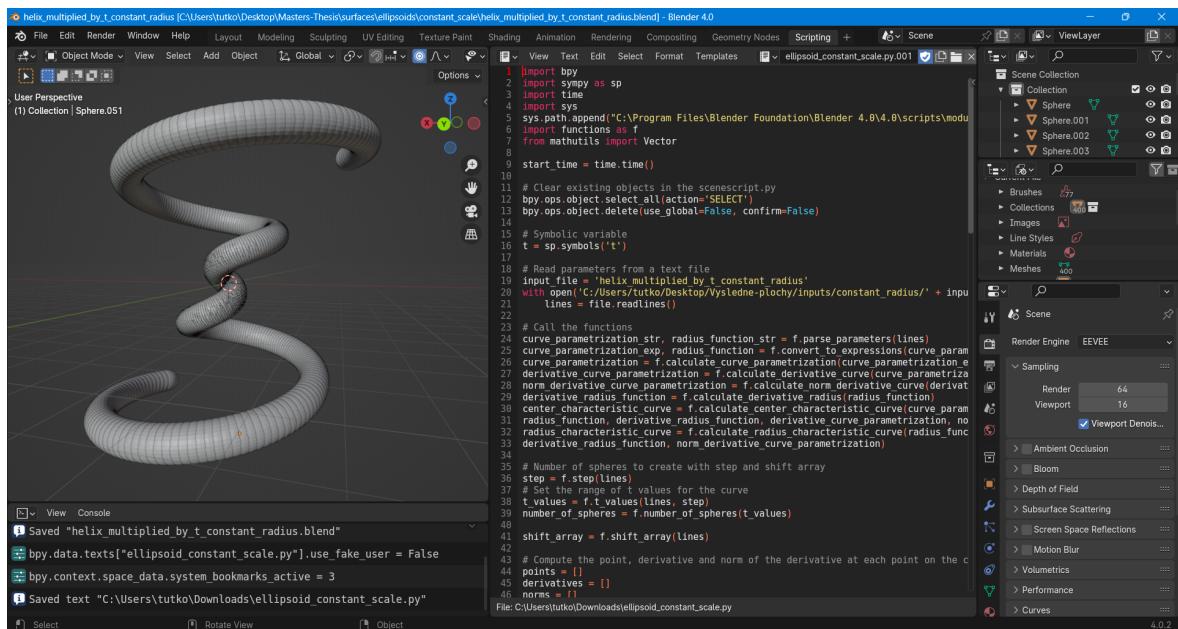
- vymazanie objektov zo scény
- čítanie parametrov z textového súboru
- symbolické výpočty
- numerické vyčíslenie
- interpolácia medzi dvomi charakteristickými kružnicami
- posun plochy v priestore
- vizualizácia plochy
- uloženie scény do databázy

## 3.2 Výber softvérku a jeho inštalácia

Na výpočet a vizualizáciu plôch sme sa rozhodli využiť kombináciu Blenderu a jazyka Python. Python je momentálne jedným z najpopulárnejších a najpoužívanejších programovacích jazykov, s knižnicami vhodnými pre matematické výpočty. Okrem toho dokáže generovať výstupy vo formáte L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Je užívateľsky intuitívny. Blender je významným nástrojom pre prácu s 3D grafikou. Vzhľadom na trojrozmernú povahu našich plôch, nám jeho použitie umožnilo vytlačiť aj niekoľko fyzických modelov v 3D tlačiarni.

### 3.2.1 Blender

Blender je open source balík na tvorbu 3D. Podporuje celú 3D technológiu - modelovanie, rigging, animáciu, simuláciu, renderovanie, kompozíciu a sledovanie pohybu, dokonca aj strih videa a tvorbu hier. Pokročilí používatelia využívajú rozhranie API programu Blender pre skriptovanie v jazyku Python na prispôsobenie aplikácie a písanie špecializovaných nástrojov [1]. Pre účely tejto práce sme využili Blender 4.0.2, stiahnutelný na webstránke [3]. Blender umožňuje rozšírenie svojej funkcionality pomocou skriptovacieho jazyka Python, ktorý je integrovaný priamo do softvérku, teda nie je potreba samostatnej inštalácie. Okrem toho Blender obsahuje špeciálnu knižnicu bpy, ktorá slúži na vykonávanie príkazov v Blenderi. Na vytváranie skriptov slúži prostredie Scripting, ktoré obsahuje okná na písanie, úpravu textu a Python konzolu. Je možné pracovať aj v externom programovacom prostredí [2].



Obr. 3.1: Plocha vygenerovaná skriptom v Blendri.

### 3.2.2 Python

Python je vysokoúrovňový programovací jazyk, ktorý je populárny pre svoju jednoduchosť a čitateľnosť syntaxe. Má široké využitie v rôznych odvetviach, ako sú web development, vedecké výpočty, umelá inteligencia, automatizácia, spracovanie dát a mnoho ďalších. Pri používaní priamo v Blendri nie je potrebná inštalácia. Pri otvorení prostredia Scripting v Blendri sa vľavo v konzole nachádza informácia o verzii Pythonu, ktorú Blender používa. V našom prípade je to 3.10.13.

### 3.2.3 Knižnice

Na výpočet a zobrazenie plôch v Blendri sme využili nasledovné knižnice

- bpy: knižnica Blenderu, ktorá umožňuje manipuláciu s objektmi v Blendri pomocou príkazov vytvorených v skriptoch,
- math: základné matematické funkcie a konštanty pre numerické výpočty, obsahuje funkcie ako sin, cos, log a ďalšie, ako aj konštanty ako  $\pi$  a  $e$ ,
- mathutils: je súčasťou Blenderu a poskytuje množstvo matematických funkcií a nástrojov pre prácu s 3D objektami, obsahuje funkcie na rotácie, transformácie, výpočet normál a ďalšie operácie v 3D priestore,
- matplotlib.pyplot: rozhranie na tvorbu vizualizácií a grafického zobrazenia dát, tvorbu grafov, histogramov, kontúrových máp a ďalších typov vizuálnych reprezentácií dát,
- numpy: nástroje na manipuláciu s vektormi, maticami, poliami a ďalšími objektami potrebnými pre zložitejšie výpočty
- sympy: nástroje na symbolické výpočty, algebraické manipulácie, riešenie rovníc a ďalšie matematické operácie potrebné pre pokročilé výpočty,
- sys: prístup k niektorým systémovým špecifikáciám a funkciám, medzi jej použitia patrí prístup k argumentom príkazového riadku, manipulácia s cestami k súborom a niektoré informácie o systéme, ako verzia Pythonu,
- time: získanie času v milisekundách.

### Inštalácia knižníc

Pip je inštalátor balíkov pre Python, ktorý spravuje knižnice pre jazyk Python. Používa sa na inštaláciu z Python Package Index. PyPI je knižníc pre programovací jazyk Python. Keďže sme Python stiahli z oficiálnej stránky Python [35], pip sa in-

štaloval automaticky [26]. Overiť, či máme nainštalovaný pip, možno pomocou príkazového riadku, ktorý otvoríme vyhľadaním cmd v ponuke vyhľadávania a zadaním `python -m pip --version`. V našom prípade pracujeme s verziou pip 24.0. Následne je možné inštalovať všetky potrebné knižnice v príkazovom riadku zadaním

```
pip install bpy,
pip install math,
pip install mathutils,
pip install matplotlib,
pip install numpy,
pip install sympy,
pip install sys,
pip install time.
```

### 3.2.4 Programovacie prostredie

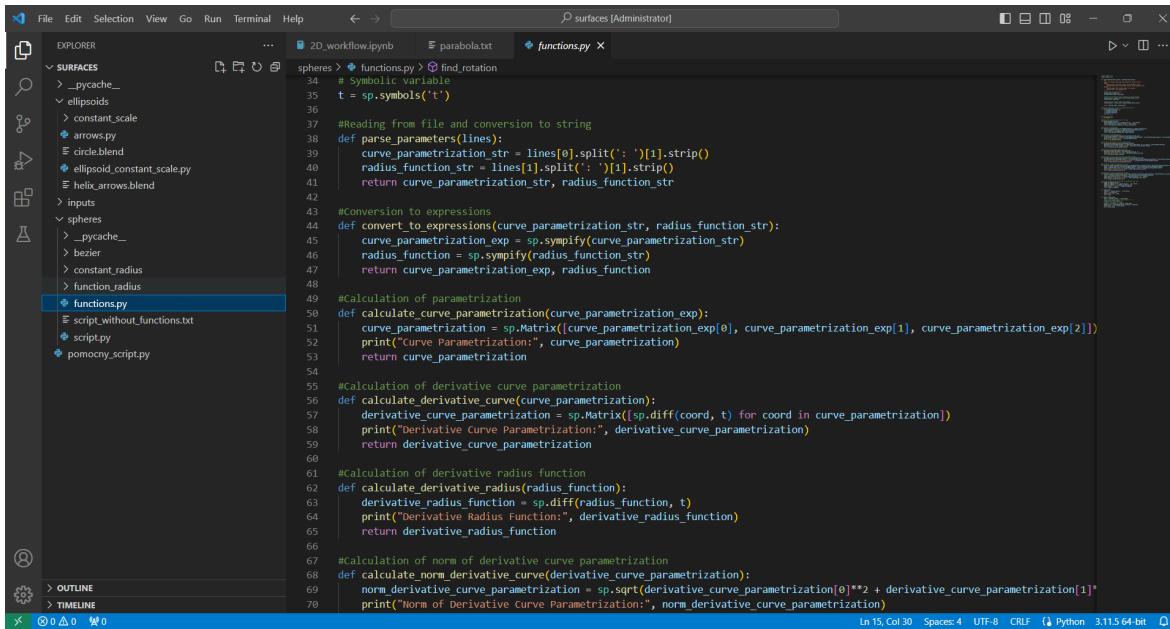
Kedže prostredie Scripting v Blendri nedisponuje mnohými vlastnosťami, ktoré by sme na zjednodušenie tvorby skriptov potrebovali, využijeme externé programovacie prostredie, a to Visual Studio Code.

#### Visual Studio Code

Na úpravu skriptov pre Python a Python-Blender sme využili programovacie prostredie Visual Studio Code vo verzii 1.82.2, ktorý disponuje farebným zvýrazňovaním kódu, súčasným zobrazením viacerých skriptov, zobrazením súborov v priečinku, kontrolou chýb, ladením programu a ďalšími funkciami. Má intuitívny a prehľadný dizajn, no jeho najväčšou výhodou je množstvo rozšírení, z ktorých je pre prepojenie programov Python a Blender potrebné Blender Development. Toto rozšírenie slúži na ladenie skriptov, ktoré sa spúšťajú v prostredí Blenderu.

#### Konfigurácia VS Code - Python - Blender

Pre systém Windows sme v prvom kroku nainštalovali samostatnú verziu Pythonu [35]. Kedže Blender používa Python verziu 3.10.13, mohli sme stiahnuť akúkoľvek vyššiu. Používame verziu 3.11.5. Pri inštalácii je potrebné odkliknúť možnosť `Add Python Executable to the path`. Zo stránky [37] sme stiahli VS Code, ktorý sme následne inštalovali. Vo VS Code sme v paneli rozšírení na ľavej strane vyhľadali rozšírenie Python, ktoré vytvorila spoločnosť Microsoft a aj to sme inštalovali. Tým sa umožnila práca VS Code s jazykom Python. Pre používateľsky príjemnejšie používanie knižnice bpy v skriptoch bolo potrebné nainštalovať falošný bpy modul [9] príkazom v termináli `pip install fake-bpy-module-latest`. Po dokončení inštalácie sme reštartovali VS



```

File Edit Selection View Go Run Terminal Help < > surfaces [Administrator]
... 2D.workflow.pybn  parabola.txt  functions.py
EXPLORER ... 2D.workflow.pybn  parabola.txt  functions.py
SURFACES > _pycache_ > functions.py > find_rotation
> ellipsoids > constant_scale
> arrows.py > circle.blend
> ellipsoid_constant_scale.py > helix_arrows.blend
> inputs > spheres
> _pycache_ > bezier
> constant_radius > function_radius
functions.py > script.py > pomocny_script.py
script_without_functions.txt
< OUTLINE < TIMELINE
Ln 15 Col 30 Spaces: 4 UTF-8 CRLF Python 3.11.5 64-bit

```

Obr. 3.2: Skript funkcií pre obálku sfér a elipsoidov vo VS Code.

Code. V bočnom paneli rozšírení sme vyhľadali Blender development. Po inštalácii sme v priečinku Python v inštalačnom adresári programu Blender otvorili vlastnosti, kartu zabezpečenia a skupinu používateľov **Users**, ktorým sme povolili možnosť **Write**. Vďaka tomuto rozšíreniu sme mohli ladiť program pomocou **Ctrl+Shift+P**. Po stlačení tejto klávesovej skratky sa v hornom paneli zobrazilo kontextové menu, kde sme vybrali **Blender: Build and Start**, čím sme spustili Blender. Proces ladenia programu sme spúšťali možnosťou **Blender: Run Script**.

## Jupyter Notebook

Pre účely našej práce sme potrebovali niekoľko pomocných skriptov na výpočet obálok konkrétnych prípadov v 2D a 3D a na prepis symbolických výpočtov z Maximy do programu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Pri programovaní týchto skriptov sme využívali Jupyter Notebook vo verzii 7.0.4, výpočtový nástroj, pôvodne navrhnutý pre úlohy dátovej vedy, ktorý umožňuje interaktívnu prácu s kódom, rovnicami a vizualizáciami s podporou v 40 programovacích jazykoch. S jeho pomocou je možné vytvárať dokumenty vo formáte JSON, ktoré sú rozdelené do buniek a komunikujú s výpočtovými jadrami cez Interactive Computing Protocol. Jadrá sú zodpovedné za vykonávanie kódu a výstupy. Jupyter Notebook ponúka modulárny dizajn, ktorý umožňuje jednoduché manipulácie s jednotlivými bunkami, vrátane možnosti úpravy bunky bez ďalšieho vplyvu na zvyšnú časť kódu, spätného vrátenia sa a vymazania bunky [14]. Jupyter Notebook sa nainštaluje rovnako ako Blender Development vo VS Code rozšíreniach. Jednou možnosťou je spustiť Jupyter Notebook v termináli príkazom `jupyter notebook` alebo si vytvoriť súbor vo VS Code možnosťou `New File` a zvoliť `Jupyter Notebook .ipynb`.

My sme využívali druhú možnosť.

```

[10]: print(parametric_curve)
print("systém: ")
system = sp.latex(sp.simplify(ellipse_in_new_basis))
display(Math(system))

[11]: print("Derivácia sústavy: ")
der = sp.latex(sp.simplify(derivation))
display(Math(der))

[12]: print("Determinant derivácie: ")
display(Math(sp.latex(sp.simplify(determinant))))

```

Obr. 3.3: Výstupy po každej vykonanej bunke v JupyterNotebook.

### 3.3 Implementácia

V tejto časti sa budeme venovať vývoju našich skriptov. Skritov máme niekoľko. Skript na vymodelovanie obálky sfér, skript na vymodelovanie obálky elipsoidov, skript s používanými funkciami, skript pre rovninné príklady obálky elíps, skript pre príklady obálky elipsoidov, skript na symbolické výpočty, skript pre prepísanie rovníc do programu LATEX a skript pre vizualizáciu jednoparametrického systému kriviek v rovine. Hlavnou úlohou bolo však zstrojenie obálky, preto budeme primárne hovoriť o skriptoch pre vymodelovanie obálky.

#### 3.3.1 Realizácia procesu workflow

**Obálka sfér:** Najprv sme začali vyvíjať skript pre obálku sfér, kde bolo hlavnou myšlienkovou zstrojenie obálky sfér na intervale  $I$  s vhodným vzorkovaním plochy pre parameter  $t \in I$  iba pomocou charakteristických kružník. Po importe knižníc sme spustili časomieru, prečítali parametre z textového súboru, vypočítali dotykové vektory krivky  $m(t)$ , stredy a polomery sfér a zodpovedajúcich charakteristických kružníc a začali sme pridávať objekty do scény. Vymodelovanie obálky sme realizovali, tak že charakteristické kružnice sme postupne v for cykle pridávali do ich vypočítaných stredov s normálou  $(0, 0, 1)$ . Následne sme kružnice v priestore otočili podľa dotykového vektora krivky  $m(t)$  pomocou `circle_object.rotation_mode = 'AXIS_ANGLE'`. Vymodelo-

vané kružnice sme označili, vytvorili z nich jeden objekt pomocou `bpy.ops.object.join()` a pospájali ich v `Edit Mode` funkciou `bpy.ops.mesh.bridge_edge_loops()`. Zobrazenie jednoparametrického systému sfér sme vykonali v ďalšom `for` cykle vykreslením sfér na s im zodpovedajúcimi parametrami a vizualizáciu charakteristických kružníc sme vykonali v tom istom cykle, opäť s prislúchajúcimi parametrami a výpočtom rotácie s posunom v priestore. Tieto kružnice sme už však nespájali. Týmto spôsobom sme v scéne vytvorili tri plochy, ktoré sme mohli porovnať. Na záver sme scénu uložili do vhodného priečinku menšej databázy a vyčislili sme čas behu skriptu. Skript `envelope_of_spheres.py` má 127 riadkov a všetky výpočty vrátane rotácie kružníc sú realizované pomocou vlastných funkcií uložených v skripte `functions.py`, ktorý má 108 riadkov.

**Obálka elipsoidov:** V skripte `envelope_of_ellipsoids.py` je jedinou zmenou oproti obálke sfér pridanie faktorov škálovania  $a$  a  $b$ , ktoré možno meniť v skripte, teda nenačítavajú sa priamo z textového súboru. Výpočty prebiehajú rovnako pomocou `functions.py`, pridáme vykreslenie jednoparametrického systému elipsoidov jedným `for` cyklom, kde najprv pridáme elipsoid na správnu pozíciu so škálovaním v smere súradnicových osí s hodnotami  $(b, b, a)$  a potom tento elipsoid správne natočíme podľa dotykového vektora krivky  $m(t)$ .

**Porovnanie plôch:** V skripte `comparison_of_surfaces.py` sa nachádzajú štyri vymodelované plochy pre danú krivku  $m(t)$ , jednoparametrický systém sfér, jeho obálka, jednoparametrický systém elipsoidov a jeho obálka.

## 3.4 3D tlač

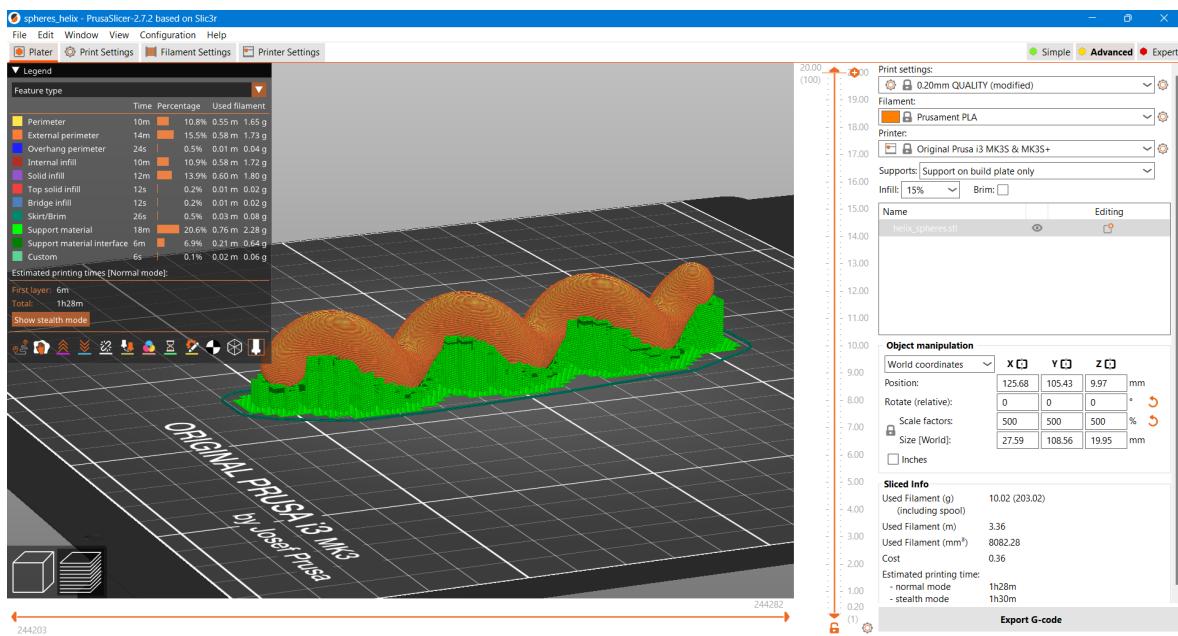
Tlačiareň, v ktorej sme plochy tlačili je typu Original Prusa i3 MK3S+. Všetky jej parametre a taktiež manuál k tlači sa nachádza na [31]. Na vytlačenie modelov plôch bolo potrebné exportovať plochy v Blendri do vhodného formátu. Pre tlač bolo potrebné inštalovať softvér PrusaSlicer, ktorý možno stiahnuť z [30].

### 3.4.1 PrusaSlicer

Popis procesu v programe PrusaSlicer vo verzii 2.7.2.

1. Načítanie modelu: Používateľ načíta do PrusaSliceru 3D model, ktorý chce vytlačiť, vo vhodnom formáte.
2. Nastavenie parametrov tlače: Používateľ nastaví parametre tlače, ako je typ tlačiarne, materiál, hrúbka vrstvy, percento výplne (infill), teplota tlače atď. Tieto parametre ovplyvňujú kvalitu a vlastnosti vytlačeného modelu.

3. Slicing: PrusaSlicer rozdelí 3D model na tenké horizontálne vrstvy a vytvorí inštrukcie pre tlačiareň, ktoré určujú pohyb tlačiarne.
4. Príprava G-kódu: Na základe slicovania PrusaSlicer vytvorí súbor **.gcode**, ktorý obsahuje sériu príkazov pre tlačiareň, ako sú pohyby osí, rýchlosť a teploty.
5. Export G-kódu: Po príprave exportovať G-kód a nahrať ho na SD kartu alebo do počítača, pomocou ktorého budeme tlačiť.



Obr. 3.4: Slicing plochy v softvéri PrusaSlicer.

### Parametre tlače

Ako vstupný formát do PrusaSlicer-u sme používali **.stl**.

Typ tlačiarne: Original Prusa i3 MK3S & MK3S+

Nastavenie tlače: 0.20mm QUALTY

Filament: Prusament PLA

Podpory: Podpora len na stavebnej doske

Infill: 15%

Teplota trysky: 215°C

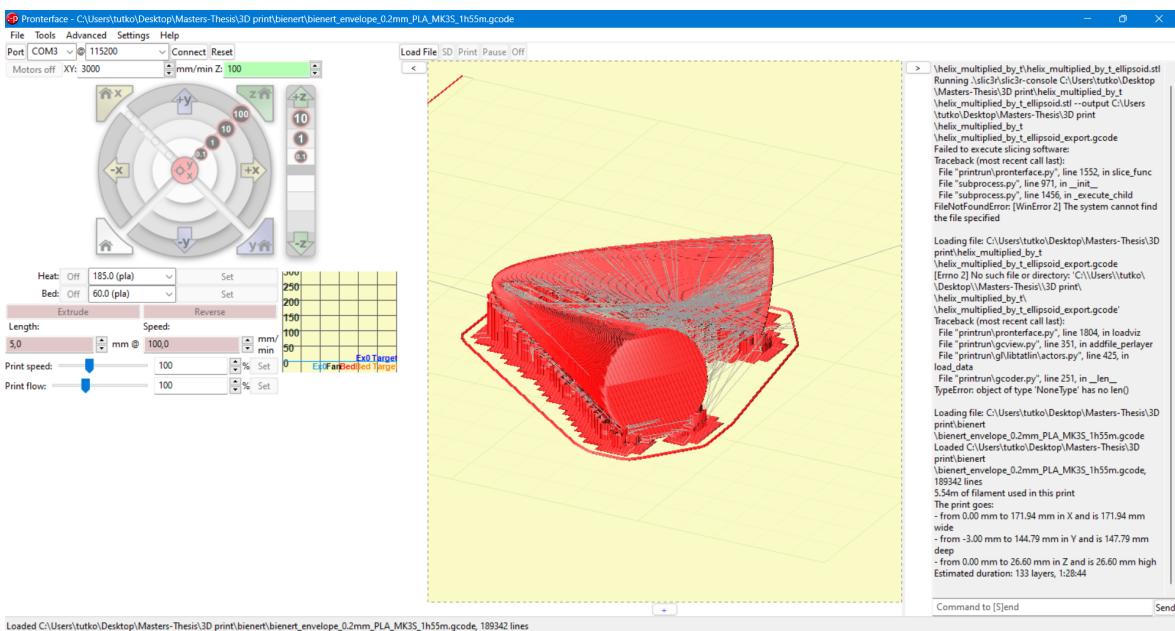
Teplota podložky: 60°C

Kvôli nefunkčnosti tlače z SD karty, sme pre 3D tlač používali počítač prepojený USB káblom s tlačiarňou. Počítač musel byť počas tlače neustále pripojený k tlačiarne a nesmel prejsť do režimu spánku, hibernácie alebo sa vypnúť. Prerušenie pripojenia k počítaču by malo za následok prerušenie tlače bez možnosti obnovenia tlače.

### 3.4.2 Pronterface

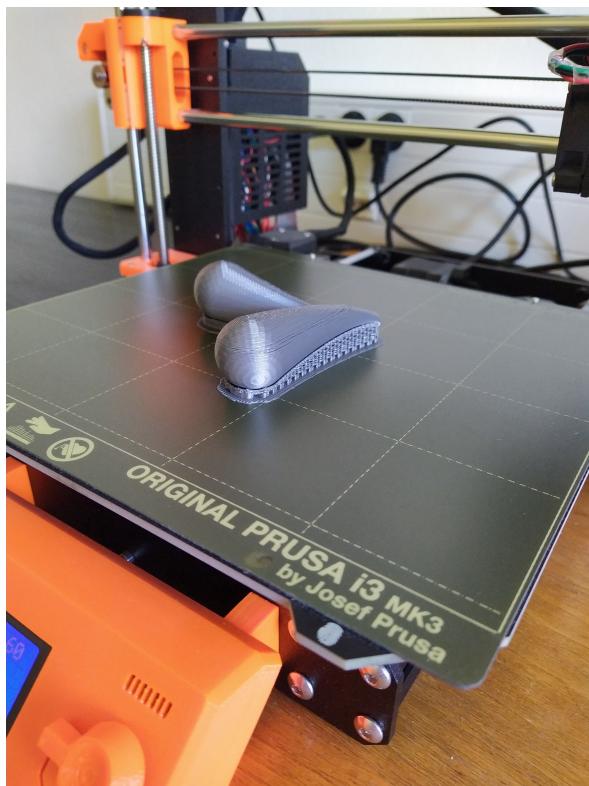
Pronterface je jednoduché grafické používateľské rozhranie, ktoré používateľom ponúka možnosť monitorovať a ovládať tlačiareň z počítača pripojeného cez USB. Pomocou neho možno priamo pohybovať krokovými motormi, ovládať teplotu lôžka a trysky, posielat príkazy G-kódu priamo cez terminál alebo konzolové okno a mnoho ďalšieho. Pronterface je súčasťou balíka jednoduchých nástrojov Printrun na správu a ovládanie 3D tlačiarnej aj CNC strojov. Napriek svojmu základne vyzerajúcemu dizajnu a zastaranej grafike zostáva užitočným nástrojom, ktorý si udržiava silnú pozíciu v komunite 3D tlačiarov [33].

Stiahli sme jeho poslednú verziu 2.0.1 na webovej lokalite [32]. Pomocou Správcu zaradení systému Windows sme skontrolovali, ktorý port COM bol priradený našej 3D tlačiarnej, bol to COM3. Po pripojení k tlačiarnej sme zvolili tlačidlo Connect. Potom sme načítali model tlačidlom Load file a vybrali súbor vo formáte .gcode. V aplikácii sme skontrolovali nastavenú teplotu trysiek a podložky, aby zodpovedala zvolenému materiálu podľa našich pokynov. Po načítaní modelu sa v pravom stĺpci zobrazil pesimisticky odhad času tlače.



Obr. 3.5: Príprava na tlač plochy v softvéri Pronterface.

Po niekoľkých neúspešných pokusoch a nevydarených prototypoch plôch sme napokon spustili 3D tlač. Nás plán bol vytlačiť tri bezchybné sady plôch pre danú krviku  $m(t)$ , jednoparametrický systém sfér, jeho obálku, jednoparametrický systém elipsoidov a jeho obálku a porovnať si tieto plochy. Plochy bolo potrebné rôzne škálovať, príliš tenké časti by boli príliš krehké. Po tlači sme ešte odstránili podporné štruktúry a tak sme dostali výsledné plochy.



Obr. 3.6: Plocha v 3D tlačiarni.



# Kapitola 4

## Výsledky práce



# Záver



# Literatúra

- [1] Blender documentation: Blender 4.0 Reference Manual. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/manual/en/latest/index.html>.
- [2] Blender documentation: Blender 4.0 Python API Documentation. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/api/current/>.
- [3] Blender download. Dostupné na internete: <https://www.blender.org/download/>.
- [4] Biernet A. 2016. Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Naturwissenschaftliche Fakultät III. Halle (Saale). Dissertation. Dostupné na internete: <https://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/2416652>.
- [5] Bruce, J., Giblin, P. 1992. Envelopes. In *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory* (pp. 99-132). Cambridge: Cambridge University Press. Dostupné na internete: doi:10.1017/CBO9781139172615.007.
- [6] Bruce J. W., Giblin P. J. 1981. What Is an Envelope? *The Mathematical Gazette*, 65(433), 186-192. Dostupné na internete: <http://www.jstor.org/stable/3617131>.
- [7] Čižmár J. 2017. *Dejiny matematiky*. Bratislava. Perfekt. ISBN 978-80-8046-829-3.
- [8] do Carmo M. P. 2017. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York. Dover Publications Inc., Mineola. ISBN 978-0-486-80699-0.
- [9] Fake-bpy-module. Dostupné na internete: <https://github.com/nutti/fake-bpy-module>.
- [10] Grossfield A. 1997. What Are Differential Equations: A Review Of Curve Families. Paper presented at 1997 Annual Conference, Milwaukee, Wisconsin. 10.18260/1-2-6898. Dostupné na internete: <https://216.185.13.174/what-are-differential-equations-a-review-of-curve-families>.

- [11] Chalmovianská J. Skriptá k predmetu Algebraická geometria. Dostupné na interne: <http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~pilnikova/ag1.html>.
- [12] Chudinov P. 2009. Numerical-analytical Algorithm for Constructing the Envelope of the Projectile Trajectories in Midair. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.0520>.
- [13] Ivanov A.B. Surface of the second order. *Encyclopedia of Mathematics*. Volume 10. ISBN 1402006098. [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Surface\\_of\\_the\\_second\\_order&oldid=24131](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Surface_of_the_second_order&oldid=24131).
- [14] Jupyter Notebook. <https://jupyter.org/>.
- [15] Karčiauskas K., Krasauskas R. 2000. Rational rolling ball blending of natural quadrics. *Mathematical Modelling and Analysis*, Volume 5, Pages 97-107. Dostupné na internete: [https://www.researchgate.net/publication/233265253\\_Rational\\_rolling\\_ball\\_blending\\_of\\_natural\\_quadrics](https://www.researchgate.net/publication/233265253_Rational_rolling_ball_blending_of_natural_quadrics).
- [16] Korbaš J. 2013. *Prednášky z lineárnej algebry a geometrie*. Prvé vydanie. Univerzita Komenského v Bratislave: Vydavateľstvo UK. ISBN 978-80-223-3408-2.
- [17] Lee J. 2012. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. New York. Springer. 2. edition. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [18] Maxima documentation: Maxima 5.47.0 Manual. Dostupné na internete: [https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima\\_singlepage.html](https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_singlepage.html).
- [19] Maxima download. Dostupné na internete: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
- [20] Mészárosová K., Rückschlossová T., Tereňová Z. 2018. *Deskriptívna geometria II. Druhá časť – Priamkové, translačné, klinové a kanálové plochy*. STU v Bratislave. ISBN 978-80-227-4767-7. Dostupné na internete: <https://www.math.sk/skriptaDG2/2/>.
- [21] Glaeser G., Odehnal B., Stachel H. 2016. *The Universe of Conics*. Berlin Heidelberg. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-45449-7. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-45450-3>.
- [22] Odehnal B., Stachel H., Glaeser G. 2020. *The Universe of Quadrics*. Vienna. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-61052-7. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61053-4>.

- [23] Peternell M., Pottmann H. 1997. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, Volume 23, Issues 2–3, Pages 255-266, ISSN 0747-7171. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0087>.
- [24] Peternell M., Odehnal B., Sampoli M. L. 2008. On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 25, Issues 4–5, Pages 342-355, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.10.007>.
- [25] Peternell M., Pottmann H. 1998. A Laguerre geometric approach to rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 3, Pages 223-249, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00024-1](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00024-1).
- [26] Pip. Dostupné na internete: <https://pip.pypa.io/en/stable/>.
- [27] Pottmann H., Peternell M. 2009. Envelopes – Computational Theory and Applications. Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Budmerice. Dostupné na internete: <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/ig/peternell/env.pdf>.
- [28] Pottmann H., Peternell M. 1998. Applications of Laguerre geometry in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 2, Pages 165-186, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00023-X](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00023-X).
- [29] Pottmann H., Wallner, J. 2001. *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag. ISBN 3-540-42058-4.
- [30] PrusaSlicer download. Dostupné na internete: <https://www.prusa3d.com/cs/>.
- [31] Příručka 3D tiskaře. Dostupné na internete: <https://help.prusa3d.com/cs/downloads>.
- [32] Pronterface download. Dostupné na internete: <https://www.pronterface.com/>.
- [33] Pronterface setup. Dostupné na internete: <https://all3dp.com/2/pronterface-how-to-download-install-and-set-it-up/>.
- [34] Python documentation. Dostupné na internete: <https://docs.python.org/3/>.
- [35] Python download. Dostupné na internete: <https://www.python.org/downloads>.

- [36] Skopenkov M. et al. 2020. Characterizing envelopes of moving rotational cones and applications in CNC machining, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 83, 101944, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101944>.
- [37] Visual Studio Code download. Dostupné na internete: <https://code.visualstudio.com/download>.
- [38] Vráblíková J. 2022. Envelopes of implicit surfaces. Mathematical Institute of Charles University. Prague. Master's thesis. Dostupné na internete: <https://dodo.is.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/171858/120411574.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- [39] Zlatoš P. 2011. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Bratislava. Marenčin PT. ISBN 978-80-8114-111-9.
- [40] Obrázok Webbov Most. Dostupné na internete: <http://www.yannarthusbertrand2.org/collection/australia/#mw1-3844>.
- [41] Obrázok Rolling ball blends. Dostupné na internete: [https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb\\_abs/parblrb\\_abs.html](https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb_abs/parblrb_abs.html).
- [42] Obrázok Hudobné divadlo a výstavná sieň. Dostupné na internete: <https://www.archdaily.com/789123/music-theatre-and-exhibition-hall-massimiliano-and-doriana-fuksas>.  
Všetky online zdroje boli dostupné dňa 03.05.2024.

# Príloha A

Výpočet obálky pomocou Gröbnerovej bázy pre príklad 3 so sústavou rovníc

$$F^\lambda = 4t^6 - 4t^5y + t^4y^2 + 7t^4 - 8t^3y + 2t^2y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,$$

$$F_t^\lambda = 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2t + 4t - 4y.$$

Uvažujme lexikografické usporiadanie monómov  $t >_{\text{lex}} x >_{\text{lex}} y$ . Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$L_{\text{lex}} = \{l_1, \dots, l_6\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} l_1 = & 8232129896496000t^3 - 15949751674461t^2y^7 - 161384046512557t^2y^5 \\ & - 1204463505481071t^2y^3 - 6169809854717575t^2y + 15430671472tx^2y^{12} \\ & + 426513396863tx^2y^{10} - 15006102325790tx^2y^8 - 319921877859794tx^2y^6 \\ & + 3932980083404115tx^2y^4 + 26096343414243210tx^2y^2 \\ & - 5927133525477120tx^2 + 8232129896496000t - 89991676024704x^6y^3 \\ & + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 + 5668842986368x^4y^7 \\ & - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 - 17414290688695056x^4y \\ & - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 + 43203483205279x^2y^7 \\ & - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 + 19070089710359527x^2y \\ & - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 - 1204463505481071y^3 \\ & - 6169809854717575y, \\ l_2 = & 1029016237062t^2x^2 + 3835312tx^2y^{11} + 224556467tx^2y^9 + 2456837050tx^2y^7 \\ & - 42939029714tx^2y^5 - 622020302148tx^2y^3 - 2792792777023tx^2y \\ & - 22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\ & + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\ & + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\ & - 1254254177448x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 = & 171502706177t^2y^8 + 2058032474124t^2y^6 + 14749232731222t^2y^4 \\
& + 51450811853100t^2y^2 + 107189191360625t^2 + 8570784208tx^2y^{11} \\
& + 447143859077tx^2y^9 + 2637043681390tx^2y^7 - 114540691274161tx^2y^5 \\
& - 650595377992068tx^2y^3 - 329349595559310tx^2y - 49984813501056x^6y^2 \\
& + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 + 1466755633792x^4y^6 \\
& + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 + 188859580240104x^4 \\
& - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 + 53352589022478x^2y^6 \\
& + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 - 296888240050025x^2 \\
& + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 \\
& + 10718919136062514749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625, \\
l_4 = & 3319374168tx^4 + 4112tx^2y^{12} + 419465tx^2y^{10} + 11960430tx^2y^8 + 9104606tx^2y^6 \\
& - 3087637940tx^2y^4 - 14225835735tx^2y^2 - 3841868250tx^2 - 23981184x^6y^3 \\
& - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 + 484488324x^4y^3 \\
& + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 + 1348048703x^2y^5 \\
& + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y, \\
l_5 = & 16tx^2y^{13} + 1321tx^2y^{11} + 29688tx^2y^9 - 92522tx^2y^7 - 7839424tx^2y^5 \\
& - 31597167tx^2y^3 - 1560600tx^2y - 93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 \\
& - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 \\
& - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 \\
& + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2, \\
l_6 = & 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
& - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
& - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2.
\end{aligned}$$

Eliminovaná Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$G_{lex} = \{g_1, \dots, g_6\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}
g_1 = & -89991676024704x^6y^3 + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 \\
& + 5668842986368x^4y^7 - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 \\
& - 17414290688695056x^4y - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 \\
& + 43203483205279x^2y^7 - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 \\
& + 19070089710359527x^2y - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1204463505481071y^3 - 6169809854717575y, \\
g_2 = & - 22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\
& + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\
& + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\
& - 1254254177448x^2, \\
g_3 = & - 49984813501056x^6y^2 + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 \\
& + 1466755633792x^4y^6 + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 \\
& + 188859580240104x^4 - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 \\
& + 53352589022478x^2y^6 + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 \\
& - 296888240050025x^2 + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 \\
& + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
g_4 = & - 23981184x^6y^3 - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 \\
& + 484488324x^4y^3 + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7, \\
& + 1348048703x^2y^5 + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
g_5 = & - 93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 \\
& + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} \\
& + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2, \\
g_6 = & 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
& - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
& - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2.
\end{aligned}$$

Body  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  splňajúce uvedené rovnice určujú obálku z príkladu 1.7. Je to rovnaká krivka ako na obr. 1.8.