Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obálka systému plôch

Diplomová práca

2024

Bc. Jana Tutková

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obálka systému plôch

Diplomová práca

Študijný program:	Počítačová grafika a geometria
Študijný odbor:	1113 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra algebry a geometrie
Školiteľ:	doc. RNDr. Pavel Chalmoviansky, PhD.

Bratislava, 2024

Bc. Jana Tutková

11962777

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jana Tutková
Študijný program: počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Obálka systému plôch
Envelope of a system of surfaces

Anotácia: Cieľom práce je študovať základné vlastnosti obálky systému plôch. Zameriame sa na jednoparametrické systémy kvadrík v trojrozmernom priestore. Okrem teoretických podkladov očakávame aj numerické experimenty a príklady postupov. Načrtneme aplikácie, v ktorých sa obálky používajú.

Cieľ: Študovať a opísať niektoré vlastnosti obálky systému kvadratických plôch.

Literatúra: do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Dover Publications Inc., 2017
Pottmann, Wallner: Computational Line Geometry, Springer, 2001

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Vedúci: doc. RNDr. Pavel Chalmoviansky, PhD.
Katedra: FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie
Vedúci katedry: doc. RNDr. Pavel Chalmoviansky, PhD.

Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:
prípustná pre vlastnú VŠ

Dátum zadania: 13.12.2022

Dátum schválenia: 14.12.2022 doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie: Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať môjmu školiteľovi doc. RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD. za odborné vedenie diplomovej práce, cenné rady, pripomienky a čas strávený na konzultáciách. Moje poďakovanie patrí aj Mgr. Adriane Bosákovej, PhD. za veľkú pomoc s 3D tlačou.

Abstrakt

Tutková J., Bc. Obálka systému plôch. Diplomová práca. Univerzita Komenského. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra algebry a geometrie. Bratislava, 2024.

Táto práca sa zaoberá výpočtom obálky jednoparametrického systému elíps v $\mathbb{R}^2$ a elipsoidov v $\mathbb{R}^3$, pričom elipsy a elipsoidy sú konštantne škálované faktorom a v dotykovom smere krivky $m(t)$ a faktorom b v ostatných smeroch krivky. Výpočet je založený na známej teórii obálky jednoparametrického systému sfér v $\mathbb{R}^3$. Na určenie obálky využívame symbolické a numerické výpočty v programovacom prostredí Python a vypočítané plochy vizualizujeme v 3D modelovacom softvéri Blender. Niektoré z plôch sme vytlačili v 3D tlačiarni.

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Abstract

Tutková J., Bc. Envelope of a system of surfaces. Master's thesis. Comenius University. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Algebra and Geometry. Bratislava, 2024.

This thesis deals with the computation of the envelope of a one-parameter system of ellipses in $\mathbb{R}^2$ and ellipsoids in $\mathbb{R}^3$, where these ellipses are scaled by a constant factor a in the tangent direction of the curve $m(t)$ and by a factor b in the other directions of the curve. The computation is based on known theory of envelopes of a one-parameter system of spheres in $\mathbb{R}^3$. To determine the envelope, we use symbolic and numerical calculations in the Python programming environment and visualize the calculated surfaces in the 3D modeling software Blender. We printed some of the surfaces in a 3D printer.

Keywords: envelope of surfaces, system of surfaces

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

Pojem obálky systému kriviek zaviedol v roku 1682 Tschirnhaus, nemecký matematik, fyzik a lekár. Dupin v dvoch knižných publikáciách Développements de géométrie (Rozvoj geometrie, 1813) a Applications de géométrie et de mécanique (Aplikácie geometrie a mechaniky, 1822) opísal triedu plôch zvaných cyklidy - obálky jednoparametrických systémov guľových plôch dotýkajúcich sa danej trojice guľových plôch.

Obálky plôch majú široké využitie vo viacerých odvetviach, ako optika, architektúra, robotika.

V optike sa obálka používa na popis dráhy svetelných lúčov, ktoré prechádzajú cez zakrivený povrch.

Výpočet obálky pohybujúcej sa plochy sa vyskytuje pri CNC obrábaní. *Computer Numerical Control machining* je výrobný subtraktívny proces, pri ktorom počítač riadi stroje, vŕtačky, frézy a sústruhy tak, aby odstraňovali materiál z obrobku, kým nevytvoria požadovaný tvar. Pri tomto procese rezný nástroj vytvára rotačnú plochu - obálku pohybom okolo svojej osi [35].

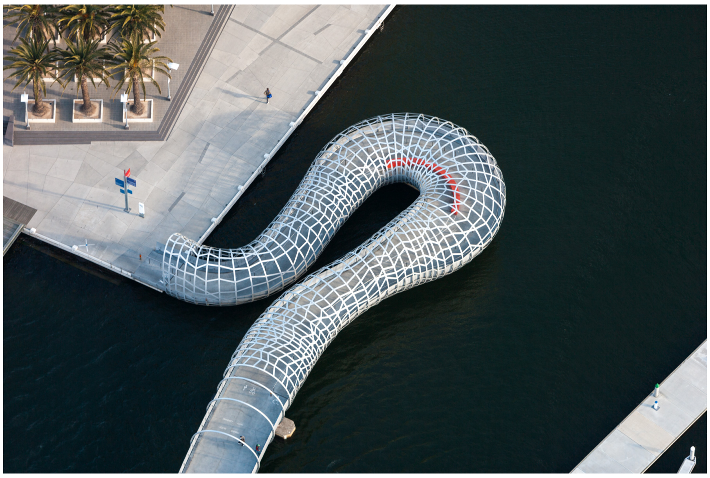
Obálky sa tiež používajú na výpočet trajektórie projektilov vo vzduchu. Napríklad, pri riešení problému pohybu projektilu vrhaného pod určitým uhlom k horizontu, používame rovnicu obálky na určenie maximálneho dosahu letu projektilu. [11].

Medzi ďalšie aplikácie obálok patrí *tollerancing* - krivka s kontrolou chyby, bezkolízne plánovanie pohybu robota, konštrukcia znakov v písmach pre typografické systémy, teda dizajn písma [26]. Kanálové plochy, rúrkové plochy a plochy používané v počítačom podporovanom geometrickom dizajne CAGD sa vyskytujú ako zmiešavacie a prechodové plochy medzi potrubiami a sú využívané aj v architektúre.

Ako príklad uvádzame Webbov most na obr. 1a v Melbourne. Tvar mosta vzdáva hold histórii domorodého obyvateľstva a je vytvorený podľa tradičnej rybárskej pasce Koorie, ktorá sa používala na lov úhorov.

Ďalším zaujímavým architektonickým projektom je hudobné divadlo a koncertná sála v gruzínskom Tbilisi, obr. 1b. Táto budova sa skladá z dvoch prepojených častí, ktoré poskytujú panoramatický výhľad na rieku a historické centrum mesta [19].

Obálku jednoparametrického systému sfér hľadáme tak, že v každom parametri systému rátame prienik sféry a derivácie systému. Ukáže sa, že prienikom je vždy kružnica a teda obálku môžeme zostrojiť použitím týchto kružníc.



(a) Webbov most [39].

(b) Hudobné divadlo a výstavná sieň [41].

Obr. 1: Projekty v architektúre.

Tento koncept chceme zovšeobecniť na plochy druhého rádu, pričom prvým zovšeobecnením, ktoré sa ponúka, je obálka elipsoidov. Naša práca sa zaoberá otázkou, ako zostrojiť obálku elipsoidov, ak budú škálované faktorom a v dotykovom smere krivky a v zostávajúcich dvoch smeroch budú škálované faktorom b, pričom $a > b$. Teda skúmame elipsoidy, ktoré budu natiahnuté v smere krivky.

Práca je rozdelená do štyroch kapitol. V prvej kapitole spomíname prístupy výpočtu obálky v rovine a uvádzame teoretické pozadie obálky sfér potrebné na zostrojenie obálky elipsoidov. V druhej kapitole sa nachádzajú odvodené rovnice pre obálku elíps a elipsoidov a ich interpretácia. Tretia kapitola pozostáva zo špecifikácie algoritmov, vymenovania a zdôvodnenia použitého softvéru, postupu implementácie algoritmov a parametrov 3D tlače. Vo štvrtej kapitole vyhodnocujeme uvedené postupy a na záver uvádzame pár vizualizácií a časových meraní.

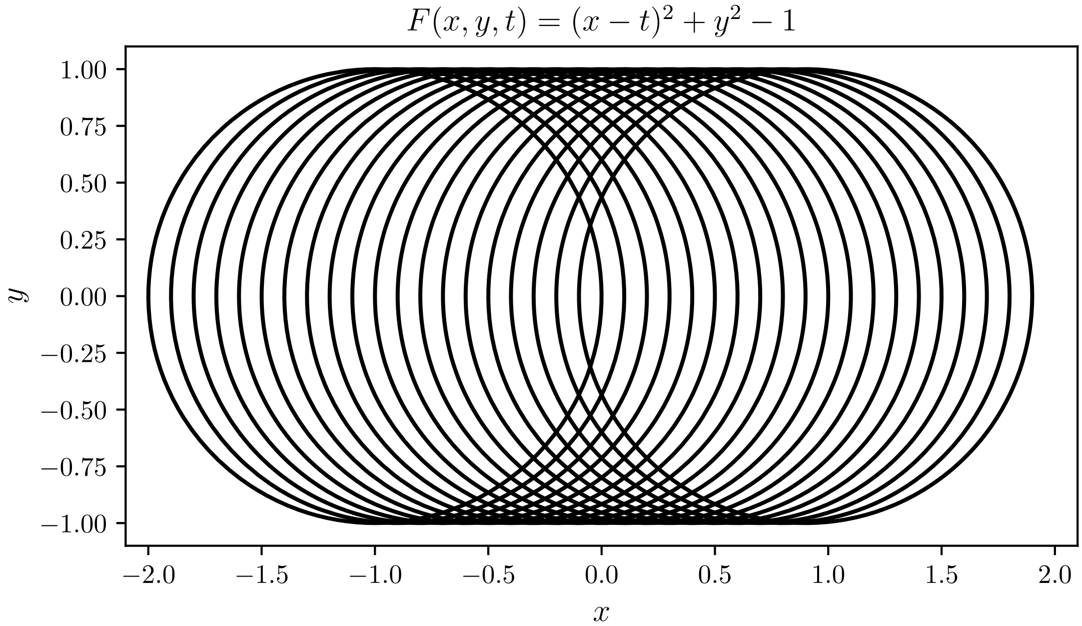
Kapitola 1

Prehľad problematiky

Prehľad definícií sme čerpali z [5], [6], [7] a [21].

1.1 Jednoparametrický systém

Ak nakreslíme kružnice so stredom na x-ovej osi s polomerom 1, ako na obr. 1.1, pohľad nám upútajú úsečky $y = \pm 1$ pre $x \in [-1, 1]$ idúce ponad a popod systém kružníc.



Obr. 1.1: Systém kružníc.

Každá z týchto úsečiek sa dotýka každej kružnice v jednom bode a v tomto bode majú spoločnú dotyčnicu. V nasledovnom texte túto myšlienku matematicky opíšeme, na základe nej zostrojíme tzv. obálku systému kriviek alebo plôch a porovnáme prístupy ich výpočtu. Budeme pracovať v reálnom vektorovom priestore so štandardným skalárnym súčinom, teda v euklidovskom priestore $\mathbb{E}^n$, rozmeru $n = 2, 3$. Najprv ilustrujeme príklady obálok a ich výpočet pre $n = 2$, neskôr pre $n = 3$. Po celý čas predpokladáme, že všetky zobrazenia sú dostatočne veľakrát diferencovateľné a pre prehľadnosť zápisov vynechávame parametre, ak sú z kontextu zrejmé.

Definícia 1.1. *Nech $F\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ je funkcia v premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a v parametri t, kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Definujeme jednoparametrický systém nadplôch ako systém množín*

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0,\ t \in I\}.$$

V $n = 2$ budeme pre lepšiu prehľadnosť značiť premenné x_1, x_2 ako x, y, pre $n = 3$ pribudne x_3 ako z. Pre lepšiu prehľadnosť neskôr označíme dvojicu (x, y) alebo trojicu (x, y, z) ako X, potom $\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \ F(X, t) = 0,\ t \in I\}$.

Pre horeuvedený prípad, vizualizovaný na obr. 1.1, teda máme jednoparameterický systém kružníc so stredmi kružníc, ktoré ležia na úsečke parametrizovanej $(t, 0)$ pre $t \in [-1, 1]$ a konštantným polomerom pre každú kružnicu $r = 1$ daný implicitnou funkciou

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ F(x, y, t) = 0,\ t \in [-1, 1]\},$$

kde

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1.$$

Systém budeme ilustrovať zobrazením niektorých prvkov systému pre diskrétne hodnoty parametra t. Pre $t = -1$ je zodpovedajúci prvok systému $\mathcal{F}_{-1} \in \mathcal{F}$ kružnica s implicitnou rovnicou

$$F_{-1}(x, y) = F(x, y, -1) = (x + 1)^2 + y^2 - 1.$$

Často budeme pre pevný parameter t_0 označovať prislúchajúcu rovnicu $F_{t_0}(X)$ a množinu bodov, ktoré rovnicu spĺňajú označíme $\mathcal{F}_{t_0}$.

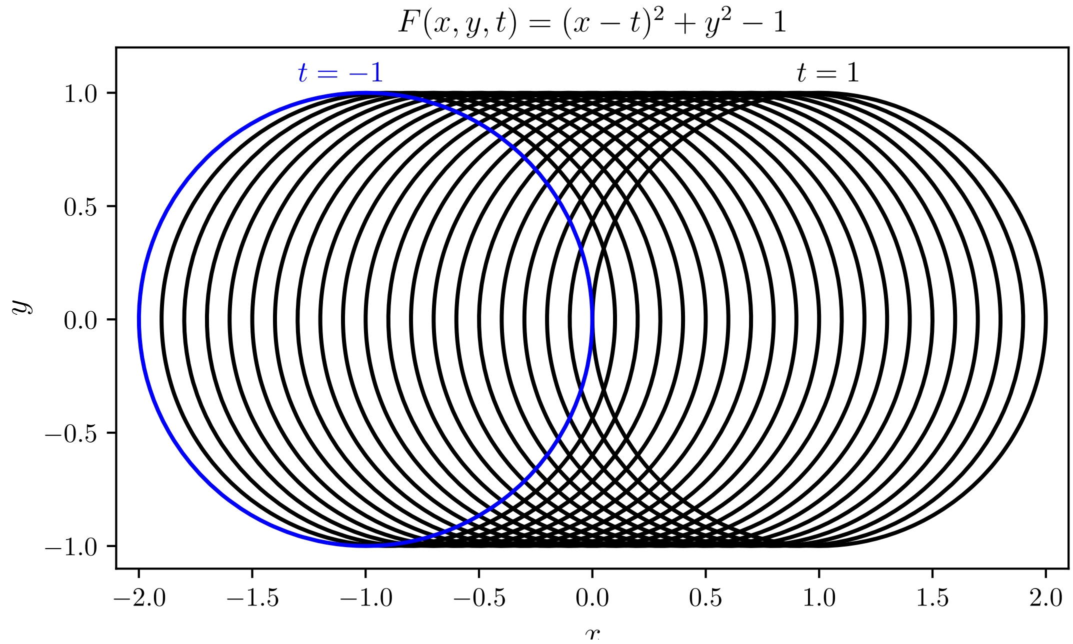
1.2 Obálka jednoparametrického systému nadplôch

Najskôr definujeme obálku jednoparametrického systému kriviek v $\mathbb{E}^2$. Uvedieme charakterizáciu obálok, ktorú možno použiť na výpočet pre jednoduchšie jednoparametrické systémy. Následne túto charakterizáciu použijeme ako definíciu pre obálku jednoparametrického systému plôch v $\mathbb{E}^n$.

Definícia 1.2. *Definujme gradient funkcie $F\colon \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}$ vzhľadom na x a y ako*

$$\nabla F(x, y, t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t)\right).$$

Definícia 1.3. *Obálkou systému kriviek $\mathcal{F}$ je parametrizovaná krivka $\gamma(t)\colon J \subseteq I \to \mathbb{R}^2$ taká, že*



Obr. 1.2: Modrou farbou je vyznačená kružnica systému v parametri $t = -1$.

1. *$\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$ pre všetky $t \in J$,*

2. *$\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F\left(\gamma(t), t\right).$*

Obálka $\gamma(t)$ sa dotýka každej krivky zo systému $F(x, y, t)$ v bode (x, y) pre nejaké t a v tomto bode má s krivkou zo systému rovnakú dotyčnicu. To znamená, že každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t, a teda platí prvá podmienka $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$. Gradient funkcie $\nabla F(x, y, t)$ možno geometricky interpretovať ako normálový vektor k $F(x, y, t)$ v regulárnom bode (x, y) a parametri t. V spoločnom bode (x, y) a parametri t požadujeme lineárnu závislosť dotykového vektora obálky $\gamma(t)$ a systému $F(x, y, t)$, z čoho dostávame $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F\left(\gamma(t), t\right)$, druhú podmienku v definícii obálky. Interval J, na ktorom dostávame výslednú obálku môže byť menší ako interval I, na ktorom bol definovaný systém kriviek, teda máme $J \subseteq I$.

Pre všetky (x, y, t) predpokladáme, že $\nabla F(x, y, t) \neq \vec{0}$. Ak by bol gradient $\nabla F(x, y, t)$ v nejakom bode nulový, nevieme jednoznačne nájsť dotykový vektor systému $F(x, y, t)$.

Veta 1.1. *Regulárna krivka $\gamma(t)\colon J \subseteq I \to \mathbb{R}^2$ kde $t \in J \subseteq I$ je obálkou jednoparametrického systému $\mathcal{F}$ práve vtedy, keď spĺňa:*

1. $F(\gamma(t), t) = 0,$

2. $\dfrac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0.$

Dôkaz. Táto odlišná charakterizácia je ekvivalentná definícii, ktorú sme postavili na geometrických podmienkach. Stačí zistiť korešpondenciu podmienok.

1. Ako sme už vysvetlili, každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu jednoparametrického systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t, teda podmienky
$$F(\gamma(t), t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$$
a
$$\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$$
sú ekvivalentné.

2. Derivujme $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ podľa parametra t, kde $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma_1}(t), \dot{\gamma_2}(t))$.
$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma_1}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma_2}(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot 1 = 0.$$
Nakoľko požadujeme, aby gradient funkcie $\nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ bol kolmý na $\dot{\gamma}(t)$ tak
$$\langle \nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$
a teda platí
$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma_1}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma_2}(t) = 0,$$
z čoho dostávame
$$\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0.$$

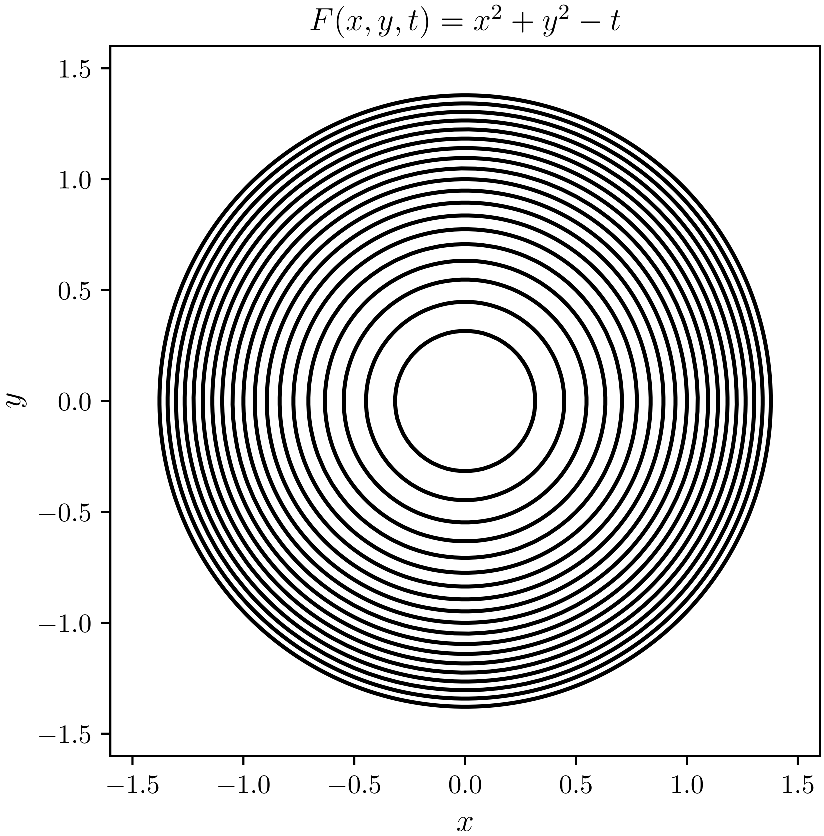
□

Často sa v literatúre môžeme stretnúť s rôznymi opismi obálky, ktoré však bez ďalších predpokladov nemusia definovať rovnakú množinu bodov. Príkladom je ďalšia charakterizácia obálky ako množiny limitných bodov prienikov kriviek systému. Vzťahy medzi jednotlivými charakterizáciami možno nájsť v [6].

Dokonca, daný systém nemusí mať obálku. Príkladom sú sústredné kružnice s rastúcim polomerom.

Príklad 1. Obálku systému sústredných kružníc pre $t \in I = [\frac{1}{10}, 2]$ rátame ako riešenie systému rovníc
$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= x^2 + y^2 - t, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= -1. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice máme $t = -1 \neq 0$, teda systém nemá riešenie. Aj keď by sa nám mohlo zdať, že by obálkou mohli byť body kružnice s najväčším polomerom $\mathcal{F}_2$ a kružnice s najmenším polomerom $\mathcal{F}_{\frac{1}{10}}$, práve podmienka existencie takej krivky $\gamma(t)$, ktorá by patrila do systému kružníc $\mathcal{F}$ pre všetky t z intervalu $J \subseteq I$, nie je splnená.



Obr. 1.3: Sústredné kružnice.

Prístup, ktorý sme využili pre jednoparametrický systém kriviek, možno zovšeobecniť pre ľubovoľný jednoparametrický systém plôch v $\mathbb{E}^n$.

Definícia 1.4. (Charakterizácia.) *Obálkou jednoparametrického systému plôch $\mathcal{F}$ je množina bodov $\mathcal{E}$ daná*

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^n \colon \exists t \in \mathbb{R} \mid F(X, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = 0\}.$$

Ak by sme chápali obálku podľa definície ako množinu bodov, problém by sme mohli riešiť ako systém nelineárnych rovníc v parametri t, kde chceme z rovníc

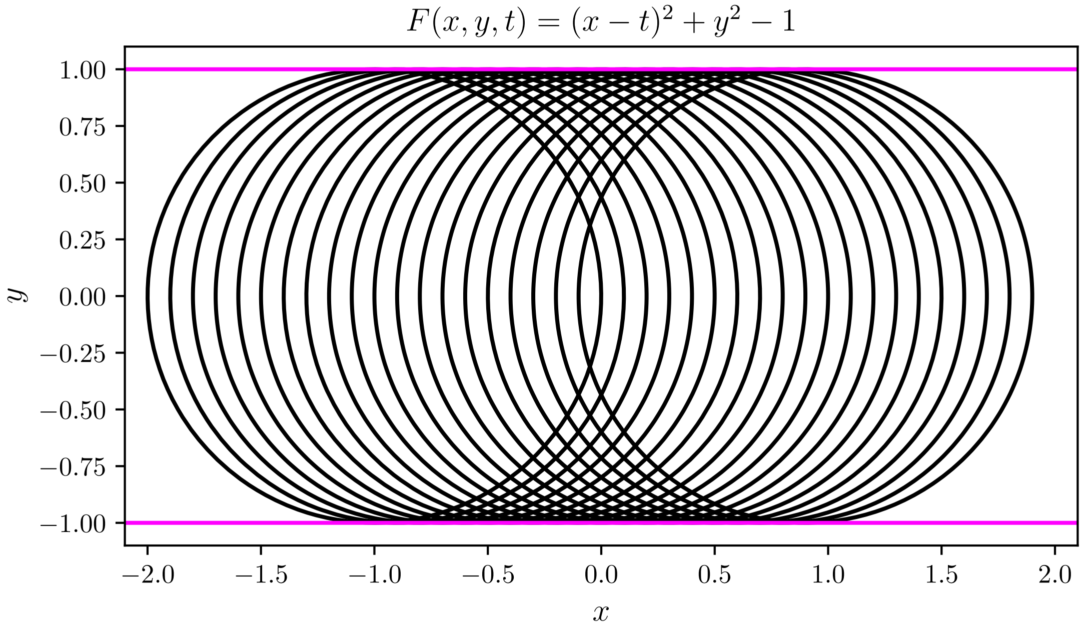
$$F(x, y, t) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0.$$

eliminovať t. Na riešenie nelineárneho systému dvoch rovníc síce existujú pokročilé nástroje, no eliminovaním parametra t strácame informáciu o tom, na akom intervale I je obálka definovaná.

Príklad 2. Pre náš príklad $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$ máme

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2(t - x) = 0.$$

Ak $t = x$, tak $y^2 = 1$. Teda obálka je podľa tejto charakterizácie $y = \pm 1$, ako sme očakávali.



Obr. 1.4: Obálka systému podľa charakterizácie.

V skutočnosti sú obálkou úsečky $y = \pm 1$ definované na intervale $[-1, 1]$.

Tento problém možno ošetriť tak, že budeme uvažovať systémy kriviek, ktoré sú v parametri t definované na celej reálnej priamke $\mathbb{R}$.

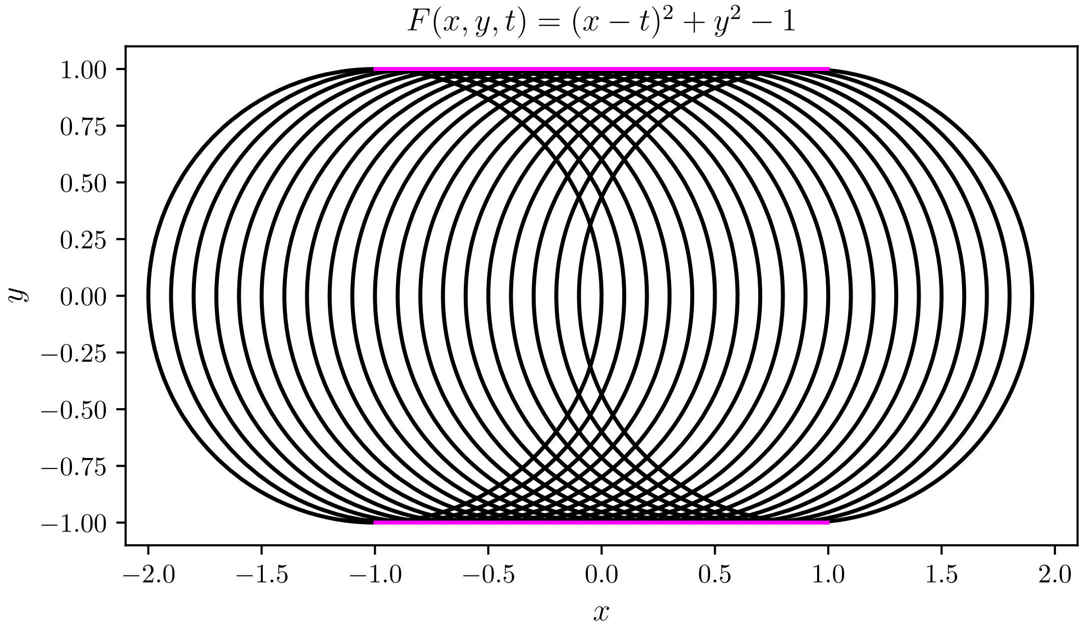
Príklad 3. Počítajme obálku systému kriviek, znázorneného na obrázku 1.6, ktorý je daný vzťahmi

$$F(x, y, t) = \frac{x^2}{(t^2 + 1)^2} + (y - 2t)^2 - 1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{4x^2 t}{\left(t^2 + 1\right)^3} - 4\left(y - 2t\right).$$

Vynásobením prvej rovnice $\lambda(t) = (t^2 + 1)^2$ a derivovaním získavame

$$F^\lambda = 4t^6 - 4t^5 y + t^4 y^2 + 7t^4 - 8t^3 y + 2t^2 y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,$$
$$F_t^\lambda = 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2 t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2 t + 4t - 4y.$$

Na obrázku 1.6 je znázornený tento systém elíps pre $t \in [-2, 2]$ s krokom $\Delta t = 0.1$. Obálku nájdeme ako riešenie rovníc $F^\lambda \cap F_t^\lambda$. Rovnice sú však príliš vysokého stupňa v parametri t, preto nevieme implicitnú rovnicu obálky bez vhodného nástroja vyjadriť. V ďalšej časti rozoberieme prístupy výpočtu.



Obr. 1.5: Obálka systému podľa definície.

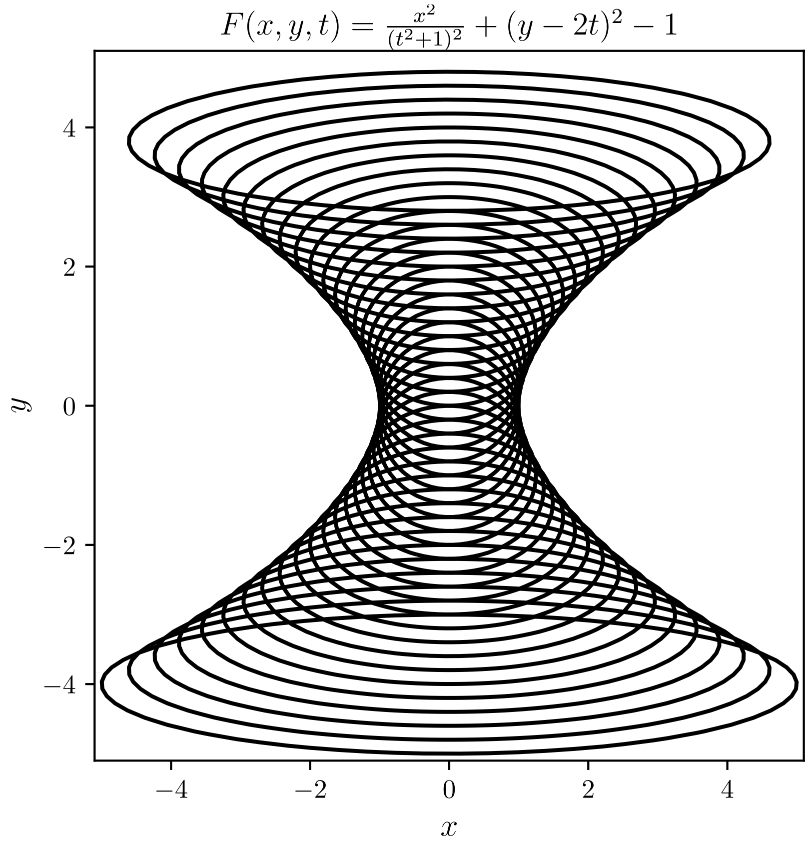
1.3 Výpočet obálky

Vo väčšine prípadov sú rovnice charakterizujúce obálku systému plôch príliš vysokého stupňa v parametri t a nedokážeme z nich ľahko odvodiť rovnicu obálky, preto pristupujeme aj k numerickým riešeniam. Spoľahlivá aproximácia obálky je jednou z aktuálnych výskumných tém. Na začiatok si však rozoberme existujúce analytické prístupy. Naledujúce prístupy sú prevzaté z [37].

1.3.1 Prístup algebraickej geometrie

Dokonca aj v prípade jednoduchého príkladu 3, obe polynomické rovnice charakterizujúce obálku sú vysokého stupňa v parametri t, preto je odstránenie parametera t náročné bez vhodného nástroja. Štandardným aparátom na túto úlohu sú Gröbnerove bázy. Gröbnerove bázy sú kľúčovým pojmom v algebraickej geometrii a počítačovej algebre. Ide o špeciálnu množinu polynómov vo viacerých premenných, ktoré majú niekoľko dôležitých vlastností a zohrávajú kľúčovú úlohu pri riešení rôznych matematických problémoch vrátane riešenia sústav polynomických rovníc, zjednodušovania polynómov a dokazovania rôznych algebraických tvrdení. Vybudovanie tejto teórie je pomerne zdĺhavé, preto odkážeme na bohaté teoretické pozadie v [10]. Keďže výpočet Gröbnerovej bázy trvá pomerne dlho, neuvádzame postup a výsledok možno nájsť v prílohe 4.

Gröbnerovu bázu je možné určiť vzhľadom na usporiadanie monómov, existujú aj iné metódy na riešenie polynomických rovníc, ktoré nie sú závislé na usporiadaní monó-



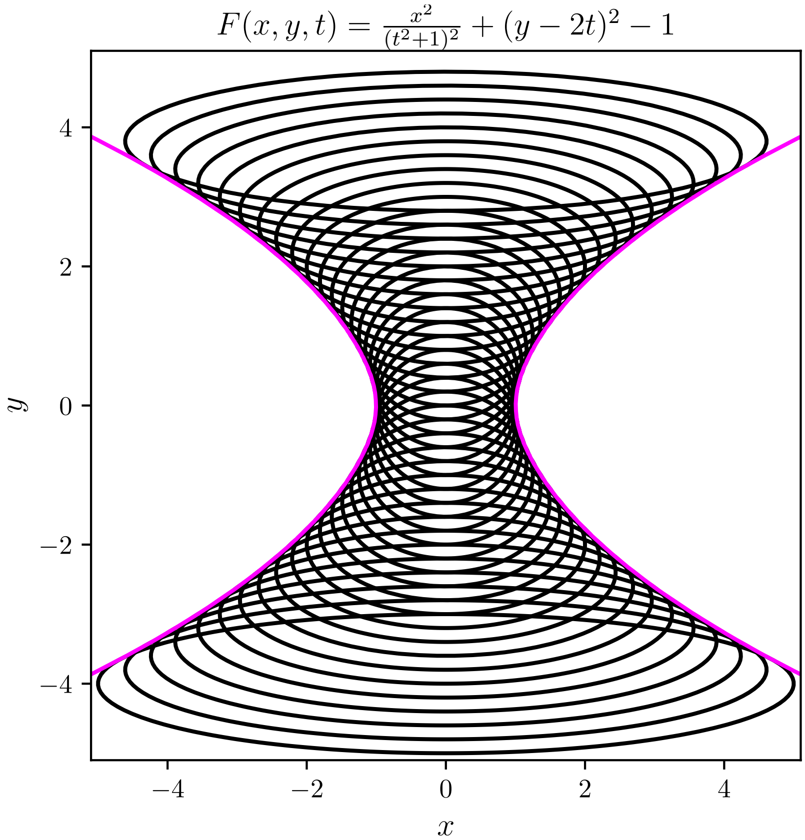
Obr. 1.6: Systém elíps.

mov. Jednou z metód je výpočet rezultantu, determinant špeciálnej matice polynómov. Hoci výpočet determinantov veľkých matíc je výpočtovo aj časovo náročný problém, poznáme metódy, ako vypočítať determinant efektívnejšie. V príklade 3 uvedieme výsledný polynóm $Res(F^\lambda, F_t^\lambda, t)$ a na 1.7 obálku nájdenú pomocou rezultantu.

$Res(F^\lambda, F_t^\lambda, t) = 191102976x^{10} + 262144x^8y^6 - 9584640x^8y^4 + 83165184x^8y^2 - 633470976x^8 - 16384x^6y^{10} - 81920x^6y^8 - 14483456x^6y^6 - 113311744x^6y^4 + 96419840x^6y^2 + 698368000x^6 - 16384x^4y^{12} - 294912x^4y^{10} - 2998272x^4y^8 - 18284544x^4y^6 - 74956800x^4y^4 - 184320000x^4y^2 - 256000000x^4$.

Navyše táto metóda, rovnako ako metóda založená na eliminačnej teórii s použitím Gröbnerových báz, nám vypočíta správnu obálku len vtedy, ak uvažujeme parameter t jednoparametrického systému z celej reálnej priamky.

Pri použití rezultantov máme lepšiu kontrolu nad zložitosťou výpočtu. Pre dané dva polynómy totiž vieme, ako sa konštruuje rezultant, a tak vieme odhadnúť, s akými veľkými polynómami sa bude počas výpočtu manipulovať, avšak pri hľadaní Gröbnerovej bázy je ťažké odhadnúť, aké zložité polynómy sa behom algoritmu vyskytnú.



Obr. 1.7: Obálka vypočítaná rezultantom.

1.3.2 Prístup projektívnej geometrie

Body duálneho projektívneho priestoru $\mathbb{P}^3$ možno stotožniť s nadrovinami v $\mathbb{R}^3$. Plochu v duálnom projektívnom priestore možno teda interpretovať ako množinu všetkých jej dotykových nadrovín. Pomocou duálneho prístupu sa dá dokázať, že obálky jednoparametrických systémov sú pre racionálne vstupné údaje racionálne. Potrebné vybudovanie teórie možno nájsť v [28], z čoho čerpajú články s mnohými výsledkami [23], [24] a príklady pre výpočet obálky možno nájsť v [37].

Príklad 4. Uvažujme dva systémy kružníc $\mathcal{F}$ s konštantným polomerom $\frac{1}{2}$ a $\mathcal{G}$ s funkciou polomeru $\frac{t}{2}$, ktorých stredy ležia na rovinnej krivke $m(t) = (t^3, t^2)$, kde $t \in \mathbb{R}$. So systémom

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x-t^3)^2 + (y-t^2)^2 - \frac{1}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}.$$

korešponduje krivka $m_1 = (t^3, t^2, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^3$. Pre

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x-t^3)^2 + (y-t^2)^2 - \frac{t^2}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}$$

máme krivku $m_2(t) = (t^3, t^2, \frac{t}{2})$. Kružnice zodpovedajúce $t < 0$ sú negatívne orientované, pre $t > 0$ pozitívne orientované, pre $t = 0$ je prvok $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$ bod $(0,0) \in m(t)$, čo je kružnica s nulovým polomerom a bez určenej orientácie. Krivka $m(t)$ je ortogonálna projekcia oboch kriviek m_1 a m_2 a často sa nazýva stredná os *(medial axis)* jednoparametrického systému.

Rovnakým spôsobom môžeme definovať jednoparametrický systém sfér v $\mathbb{R}^3$ ako obraz kriviek v $\mathbb{R}^4$. Jedným z dôležitých výsledkov je, že pomocou tohto prístupu možno rozhodnúť o reálnosti obálky a to tak, že systém korešpondujúci s krivkou $m(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ má reálnu obálku práve vtedy, keď pre všetky $t \in I$ platí

$$\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle \geq 0$$

a rovnosť platí len pre izolované hodnoty t, kde za skalárny súčin vezmeme pseudoskalárny súčin vyjadrený ako $\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle = m_1^2(t) + m_2^2(t) + \ldots + m_n^2(t) - m_{n+1}^2(t)$.

Pre príklad tak 4 máme

$$\begin{aligned} \langle \dot{m}_1(t), \dot{m}_1(t) \rangle &= 9t^4 + 4t^2 \geq 0, \text{ pre } t \in \mathbb{R}, \\ \langle \dot{m}_2(t), \dot{m}_2(t) \rangle &= 9t^4 + 4t^2 - \frac{1}{4} \geq 0, \text{ pre } t \in \mathbb{R} \setminus \{(-0.236, 0) \cup (0, 0.236)\}, \end{aligned}$$

preto na týchto intervaloch existuje reálna obálka systémov $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$.

1.3.3 Kinematický prístup

Ďalším zo spôsobov, ako chápať jednoparametrické systémy plôch v $\mathbb{R}^n$ je pozerať sa na ne ako na množinu všetkých transformácií daného povrchu $\mathcal{P}$. Povrch $\mathcal{P}$ sa transformuje na ostatné prvky systému prostredníctvom prvkov vhodnej grupy transformácií. Táto množina transformácii má okrem štruktúry grupy aj štruktúru hladkej variety *(smooth manifold)*. Tieto grupy nazývame Lieove grupy.

Príklad 5. Ilustrujme tento postup na jednoduchom rovinnom príklade. Zobrazením g_t, kde pre každé $t \in \mathbb{R}$, zodpovedá g_t rotácii, transformujme priamku l parametrizovanú

$$\begin{aligned} l\colon x(u) &= 1 \\ y(u) &= u. \end{aligned}$$

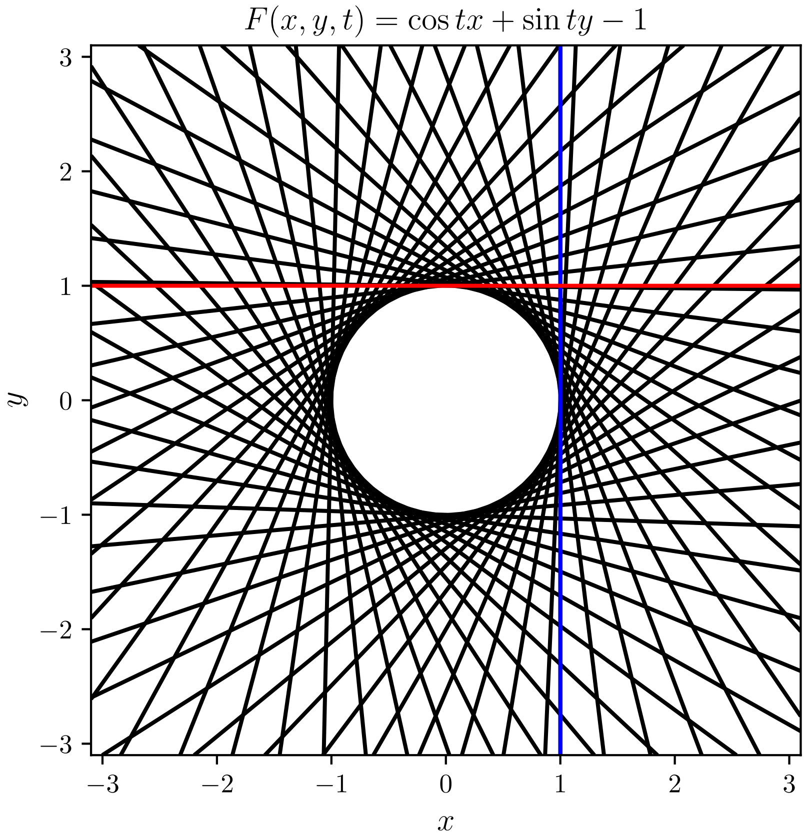
Vo všeobecnosti

$$g_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Zobrazením $g_0(l)$, dostávame opäť priamku l. Pre iné t, napríklad $t = \frac{\pi}{2}$, dostávame priamku

$$\begin{aligned} g_{\pi/2}(l)\colon x(u) &= -u \\ y(u) &= 1. \end{aligned}$$

Na obrázku 1.8 je znázornená priamka l modrou farbou a transformovaná priamka $g_{\pi/2}(l)$ červenou farbou.



Obr. 1.8: Systém priamok v normálovom tvare.

Transformácie g_t z príkladu sú prvkami špeciálna ortogonálnej grupy $SO(n)$. Táto grupa je Lieova grupa. Viac informácií o Lieovych grupách a Lieovych algebrách možno nájsť v [16]. Použili sme štruktúru Lieovej grupy, aby sme opísali, ako sa grupa transformuje daný povrch. Ďalej, využijúc štruktúru hladkej variety môžeme opísať jednoparametrický systém plôch výlučne pomocou terminológie Lieových grúp. Táto teória sa aplikuje na nájdenie parametrizácie obálok kvadratických plôch v [37].

1.3.4 Obálky a ODR

Obálky súvisia aj so štúdiom obyčajných diferenciálnych rovníc, a najmä ich singulárnych riešení. Predpokladajme, že jednoparametrický systém kriviek $\mathcal{F}$ je riešením nejakej diferenciálnej rovnice prvého rádu. Potom môže existovať aj ďalšia krivka spĺňajúca túto diferenciálnu rovnicu, ktorá je dotyčnicou k $\mathcal{F}$ v každom bode. Táto krivka je obálka. V literatúre sa nazýva aj singulárne riešenie diferenciálnej rovnice. Uvažujme ODR

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Jej regulárnym riešením sú integrálne krivky

$$y = -t^2 + 2tx, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Riešenie môžeme reprezentovať ako jednoparametrický systém kriviek $\mathcal{F}$ s funkciou

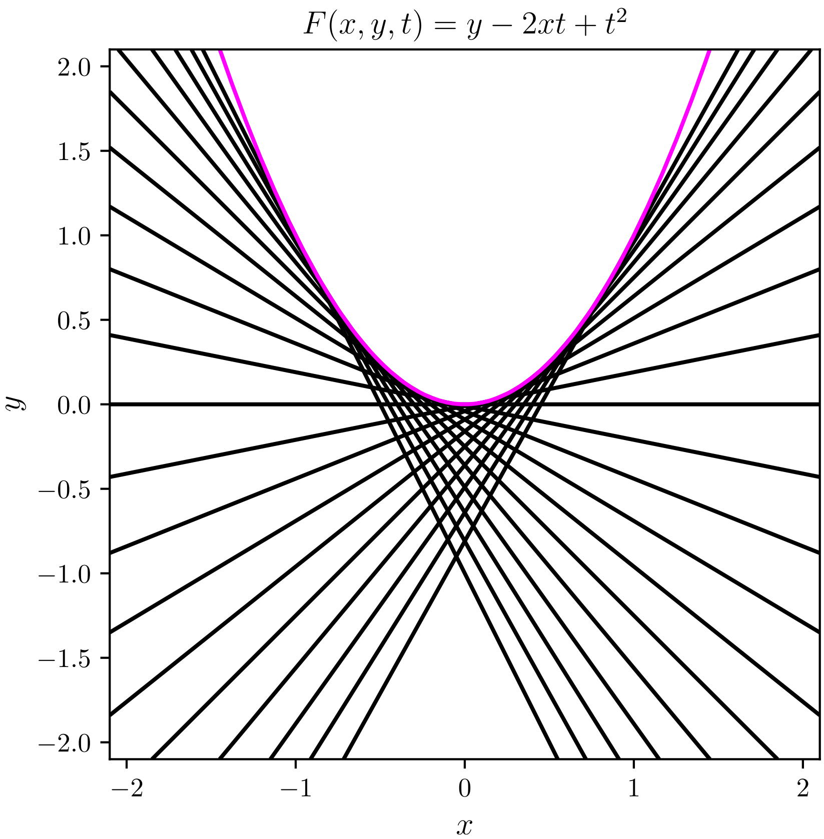
$$F(x, y, t) = t^2 - 2tx + y.$$

Derivovaním podľa parametra t dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2t - 2x,$$

z čoho máme $t = x$ a dosadením do funkcie F máme $F = -x^2 + y$, teda obálka je $y = x^2$.

Obálka tohto jednoparametrického systému priamok, ktorou je parabola $y = x^2$, rieši taktiež diferenciálnu rovnicu. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [9].



Obr. 1.9: Regulárne riešenia a obálka.

1.3.5 Lokálne prieniky

Lokálny prienik systému kriviek $\mathcal{F}$ pozostáva z prienikov nekonečne blízkych susedných kriviek systému. Definujme túto myšlienku formálne.

Definícia 1.5 (Lokálny prienik)**.** *Lokálny prienik systému $\mathcal{F}$ je množina všetkých prienikov infinitezimálne blízkych prvkov pre všetky parametre $t \in I$. Označuje sa ako $\mathcal{L}$ a platí $\mathcal{L} := \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t$ kde*

$$\mathcal{L}_t = \lim_{\varepsilon \to 0} F_t \cap F_{t+\varepsilon}$$

pre nejaké pevné $t \in I$.

Lokálny priesečník regulárneho systému sa v mnohých prípadoch zhoduje s jeho obálkou. Ilustrujme to na nasledovnom príklade.

Príklad 6. Vezmime dva ľubovoľné, ale odlišné prvky systému $F(x,y,t) = y - 2tx - t$. Pre fixné parametre $t_1 \neq t_2$ tak máme

$$F(x_1, y_1, t_1) = y_1 - 2t_1x_1 - t_1^2,$$

$$F(x_2, y_2, t_2) = y_2 - 2t_2x_2 - t_2^2.$$

Označme priesečník týchto dvoch priamok $Q = (q_x, q_y)^T$. Pre priesečník Q platí

$$F(Q, t_1) = 0 = F(Q, t_2),$$

odkiaľ vyplýva

$$(t_2 - t_1)(2q_x + t_1 + t_2) = 0.$$

Keďže podľa predpokladu $t_1 \neq t_2$, jediné riešenie tejto rovnice je $q_x = -\dfrac{t_1 + t_2}{2}$ a priesečník je potom daný

$$Q = (-\frac{t_1 + t_2}{2}, -t_1t_2)^T.$$

Definujme $\varepsilon := t_2 - t_1$ a nechajme ε smerovať k nule, dostávame priesečník

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \begin{pmatrix} -t_1 - \dfrac{\varepsilon}{2} \\ -t_1(t_1 + \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1^2 \end{pmatrix}.$$

Po reparametrizácii $t_1(t) = -t$ je ľahké vidieť, že množina všetkých týchto priesečníkov $\mathcal{L} = \{(t, -t^2) : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{E}$, ktorá predstavuje lokálny priesečník, sa zhoduje s vypočítanou množinou bodov obálky.

Dôsledok 1.1. Nech je daný systém $\mathcal{F}$. Každý bod lokálneho priesečníka systému $\mathcal{L}$ je aj bodom obálky systému $\mathcal{E}$. Teda platí

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}.$$

Dôkaz. Pre každý bod $Q \in \mathcal{L}$ lokálneho prieniku systému $\mathcal{F}$ existuje podľa definície 1.5 aspoň jedno $t_0 \in I$, pre ktoré $Q \in \mathcal{L}_{t_0}$, a teda Q patrí do prieniku nekonečne blízkych prvkov pre $\mathcal{F}$ pre t_0, to znamená, že platí

$$F(Q, t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(Q, t_0) = 0,$$

čo je z definície 1.4 bod obálky $\mathcal{E}$. □

1.4 Obálka sfér

Označme $X \in \mathbb{R}^3$ a predpokladajme, že $m(t)\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ je parametrizácia krivky a $r(t)\colon I \to \mathbb{R}^+$ je funkcia definovaná na tom istom intervale. Krivka m sa nazýva kostrová krivka obálky (*spine curve*) a r sa nazýva funkcia polomeru (*radius function*). Jednoparametrický systém sfér $\mathcal{S}$ je daný rovnicou

$$F(X,t) = \langle X - m(t), X - m(t)\rangle - r^2(t) = 0.$$

Podľa definície 1.4, obálku $\mathcal{E}$ možno nájsť ako prienik systému sfér $\mathcal{S}$ a ich derivácií $\dot{\mathcal{S}}$ pre všetky $t \in I$. Derivácia $\mathcal{S}$ nám dáva jednoparametrický systém rovín $\dot{\mathcal{S}}$ daný rovnicou

$$\frac{\partial F}{\partial t}(X,t) = \langle \dot{m}(t), X - m(t)\rangle + r(t)\dot{r}(t) = 0.$$

Pre nájdenie obálky $\mathcal{E}$ budeme teda hľadať prieniky sféry $\mathcal{S}_t$ a roviny $\dot{\mathcal{S}}_t$ pre každý parameter $t \in I$.

1.5 Charakteristická kružnica

Definícia 1.6 (Charakteristická kružnica)**.** *V prípade, že pre $t \in I$ je $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t \neq \emptyset$, sa tento prienik nazýva sa charakteristická kružnica c_t. V prípade $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t = \emptyset$, pre t neexistuje žiadna charakteristická kružnica.*

Lema 1. *Zjednotenie všetkých charakteristických kružníc c_t jednoparametrického systému sfér $\mathcal{S}_t$ je obálka $\mathcal{E}$ tohto systému, teda platí*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t\in I} c_t.$$

Dôkaz. Nech bod X patrí do zjednotenia kružníc $\bigcup_{t\in I} c_t$, potom existuje aspoň jedno $t_0 \in I$, pre ktoré $X \in c_{t_0}$. Keďže $c_{t_0} = \mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0}$, tak sú rovnice $\mathcal{S}_{t_0}$ a $\dot{\mathcal{S}}_{t_0}$ splnené pre nejaké t_0 a X, a preto patrí X obálke $\mathcal{E}$, a teda platí inklúzia $\bigcup_{t\in I} c_t \subseteq \mathcal{E}$.

Opačne, ak X patrí obálke $\mathcal{E}$, existuje podľa definície 1.4 $t_0 \in I$ také, že platí $F(X,t_0) = 0$ a súčasne $\dfrac{\partial F}{\partial t}(X,t_0) = 0$, to znamená, že X leží v prieniku $\mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0} = c_{t_0}$ a $c_{t_0} \subseteq \bigcup_{t\in I} c_t$. Preto platí inklúzia $\mathcal{E} \subseteq \bigcup_{t\in I} c_t$.

Týmto je rovnosť $\mathcal{E} = \bigcup_{t\in I} c_t$ dokázaná. □

Obálka sfér sa teda skladá zo systému kružníc. Charakteristická kružnica leží celá v rovine $\dot{\mathcal{S}}_t$, takže v tejto rovine leží aj jej stred. Dotykový vektor kostrovej krivky $m(t)$ je kolmý na rovinu $\dot{\mathcal{S}}_t$, teda stred C_t charakteristickej kružnice leží na dotyčnici $T(t,s) = m(t) + s \cdot \dot{m}(t)$, $s \in \mathbb{R}$, preto stred C_t nájdeme ako

$$\dot{\mathcal{S}}_t \cap T(t,s).$$

Pre parameter s potom platí $s = \dfrac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t)\rangle}$, po dosadení do $T(t,s)$ získavame

$$C_t = m(t) - \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t)\rangle}\dot{m}(t). \tag{1.1}$$

Rozoberme si nasledujúce dva prípady

- Ak je funkcia polomeru $r(t)$ konštantná, $\dot{r} \equiv 0$ a rovina $\dot{\mathcal{S}}_t$ obsahuje stred sféry M_t pre všetky $t \in I$, v tomto prípade možno obálku $\mathcal{E}$ považovať za posunutie (*offset*) kostrovej krivky m. Tieto obálky sú známe ako rúrkové plochy (*pipe surfaces*). Keďže rovina $\dot{\mathcal{S}}_t$ charakteristickej kružnice c_t obsahuje stred sféry M_t v každom $t \in I$, charakteristická krivka je hlavnou kružnicou sféry a obálka $\mathcal{E}$ je pokrytá jednoparametrickým systémom zhodných kružníc.

- Ak funkcia polomeru $r(t)$ nie je konštantná, potom $\dot{r}(t) \neq 0$ a rovina $\dot{\mathcal{S}}_t$ neprechádza stredom sféry M_t. V tomto prípade obálka $\mathcal{E}$ patrí do triedy kanálových plôch.

Polomer l_t charakteristiskej kružnice možno vypočítať z pravouhlého trojuholníka M_tC_tP, kde P je ľubovoľný bod na charakteristickej kružnici c_t, a teda aj na sfére $\mathcal{S}_t$.

$$l_t = \sqrt{r^2(t) - \|M_tC_t\|^2} = r(t)\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t)\rangle}}.$$

V prípade, že $\|M_tC_t\| > r(t)$, sféra $\mathcal{S}_t$ nemá s obálkou $\mathcal{E}$ reálny kontakt.

Príklad 7. Uvažujme kostrovú krivku $m(t)$ a polomer $r(t)$

$$m(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad r(t) = \frac{t}{\sqrt{26}}.$$

potom obálka systému je daná rovnicami

$$\begin{aligned} \mathcal{S}&\colon x^2 + y^2 + (z-t)^2 - \frac{t^2}{26} = 0, \\ \dot{\mathcal{S}}&\colon z - \frac{25}{26}t = 0. \end{aligned}$$

Počítajme $\mathcal{S} \cap \dot{\mathcal{S}}$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$. Z druhej rovnice dostaneme $t = \frac{26}{25}z$. Po dosadení do prvej rovnice, dostávame implicitnú rovnicu pre obálku $\mathcal{E}$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{25}z^2 = 0,$$

čo je rovnica rotačného kužeľa.

Napríklad, pre $t = 1 \in I$ charakteristická krivka je prienikom dvoch plôch daných

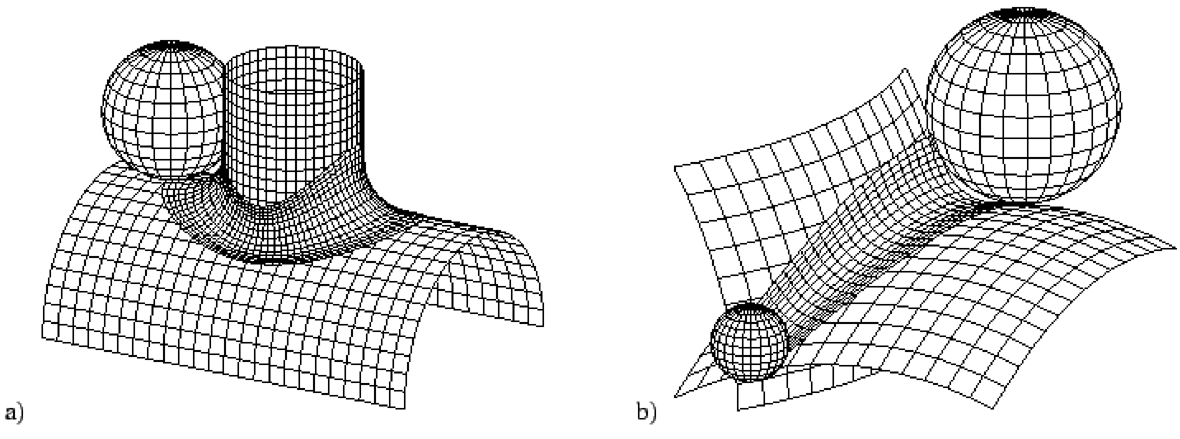
$$\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 - \frac{1}{26} = 0,$$
$$\dot{\mathcal{S}}_1 : z - \frac{25}{26} = 0.$$

Z toho môžeme usúdiť, že charakteristická krivka c_1 je kružnica so stredom v bode $C_1 = (0, 0, \frac{25}{26})$ v rovine $z = \frac{25}{26}$ a neprechádza stredom sféry $M_1 = m(1) = (0, 0, 1)$, polomer c_1 je $l_1 = \frac{\sqrt{25}}{26}$. Vzdialenosť bodov $\|M_t C_t\| = \frac{1}{26}$ a $r(1) = \frac{1}{\sqrt{26}}$, takže platí, že $r(1) > \|M_t C_t\|$ a sféra $\mathcal{S}_1$ má s obálkou $\mathcal{E}$ reálny kontakt.

Jedným z dôležitých výsledkov je, že kanálové plochy, definované ako obálka jednoparametrického systému sfér s racionálnou funkciou polomeru $r(t)$ a stredmi v racionálnej krivke $m(t)$ možno racionálne parametrizovať [22].

Bohužiaľ, vo väčšine prípadov sú rovnice, ktoré charakterizujú obálky, príliš zložité a odvodiť z nich rovnicu obálky nie sme schopní.

Rúrkové povrchy sa často objavujú pri výrobe potrubia. Hladké spojenie medzi dvoma nie nevyhnutne valcovými rúrami $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$ sa modeluje tak, aby bol prechod hladký, bez záhybov, vodotesný alebo dokonca aj parotesný. Na to sa používa technika *rolling ball blends*, využívajúca nasledujúcu myšlienku: Kým sa sféra S s konštantným alebo nekonštantným polomerom r kotúľa na oboch rúrach súčasne, zanecháva stopu s_i na oboch rúrach. Zmiešavacia plocha je tá časť obálky $\mathcal{E}$ jednoparametrického systému sfér, ktorá leží medzi dvoma stopami s_1 a s_2. Kostrová krivka obálky $\mathcal{E}$ je priesečníkom ekvidištánt *(offsetov)* plôch $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$ vo vzdialenosti r. Každá charakteristická krivka spája dva dotykové body zmiešavacej plochy a plochami $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$, ktoré sa majú zmiešavať. Viac detailov možno nájsť v [14] a [21]. Na obrázku 1.10 vľavo je znázornená metóda so sférou s konštantným polomerom r, vpravo s nekonštantným.



Obr. 1.10: Technika rolling ball blend s konštatným polomerom vľavo, s nekonštantným polomerom vpravo. [40]

Kapitola 2

Matematický model

2.1 Krivky druhého stupňa

Nasledujúca teória a klasifikácia nadplôch druhého rádu je prevzatá zo [12], [15], [20], [21], [38]. Krivka druhého stupňa c je v karteziánskych súradniciach $(x, y) \in \mathbb{E}^2$ daná rovnicou

$$q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Prípad $A = B = C = 0$ môžeme vylúčiť, pretože potom je rovnica lineárna a opisuje priamku. Vo všeobecnosti rovnica vyjadruje kužeľosečku, ktorá je daná piatimi bodmi. Ak $F \neq 0$, môžeme ju vydeliť F a potom riešiť sústavu lineárnych rovníc s piatimi neznámymi. Okrem klasických prípadov, ako elipsy, paraboly a hyperboly, môžu kužeľosečky degenerovať na dvojice priamok, bod alebo prázdnu množinu.

V algebraickom zmysle má kužeľosečka c vždy dva priesečníky S_1 a S_2 s danou priamkou s. Oba môžu byť reálne alebo komplexne združené. Limitný prípad $S_1 = S_2$ nastáva vtedy, keď s je dotyčnicou k c.

V závislosti od počtu reálnych priesečníkov s priamkou s v nekonečne rozlišujeme tri typy kužeľosečiek

1. eliptický typ: bez reálnych priesečníkov,

2. hyperbolický typ: dva reálne priesečníky,

3. parabolický typ: priamka v nekonečne sa dotýka krivky.

Matica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sa nazýva ortogonálna, ak platí $A^T \cdot A = I_n$, alebo, čo je to isté, $A^{-1} = A^T$. Prvá podmienka hovorí, že stĺpce matice A tvoria ortonormálnu bázu euklidovského priestoru $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom. Potom tiež platí $A \cdot A^T = I_n$, teda takisto riadky matice A tvoria ortonormálnu bázu v $\mathbb{R}^n$.

Veta 2.1. *Matica prechodu od ortonormálnej bázy v $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom k ortonormálnej báze je ortogonálna matica. Tiež, ak od ortonormálnej bázy* *v $\mathbb{R}^n$ prejdeme pomocou ortogonálnej matice prechodu k novej báze, tak aj nová báza bude ortonormálna.*

2.1.1 Invarianty kriviek druhého stupňa

Definícia 2.1. *Invariantom krivky druhého stupňa, vyjadrenej rovnicou*

$$q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

je každý taký algebraický výraz, závisiaci od $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$, ktorého hodnota sa nezmení, ak túto krivku vyjadríme v inom karteziánskom súradnicovom systéme, ku ktorému prejdeme pomocou otočení alebo posunutí (čím od rovnice, viažúcej staré premenné x, y, prejdeme k rovnici, viažúcej nové premenné x', y').

Veta 2.2. *Nasledujúce číselné výrazy sú invariantmi krivky druhého stupňa, vyjadrenej rovnicou $q(x, y)$.*

$$\Delta(x, y) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \delta(x, y) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \ s(x, y) \quad = a_{11} + a_{22}.$$

Z tohto možno odvodiť nasledujúcu klasifikáciu kužeľosečiek.

Typ	δ	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
eliptický	> 0	ak $s\Delta < 0$, tak elipsa ak $s\Delta > 0$, tak $\emptyset$	bod
hyperbolický	< 0	hyperbola	dve rôznobežné priamky
parabolický	$= 0$	dve rovnobežné priamky priamka $\emptyset$	parabola

Tabuľka 2.1: Klasifikácia kužeľosečiek.

2.2 Plochy druhého stupňa

Plocha druhého stupňa Q je v karteziánskych súradniciach $(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ daná rovnicou

$$q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Je zrejmé, že ak je prvých šesť koeficientov nulových, uvedená rovnica je lineárna a opisuje rovinu v priestore. Vo všeobecnosti rovnica opisuje kvadriku, ktorá je daná deviatimi bodmi. Ak $J \neq 0$, môžeme ju vydeliť J a potom vyriešiť sústavu lineárnych rovníc s deviatimi neznámymi. Okrem klasických prípadov, ako elipsoidy, paraboloidy a hyperboloidy, môžu kvadriky degenerovať aj na kvadratické kužele, kvadratické valce a dvojice rovín.

V algebraickom zmysle je kvadrika Q plocha druhého stupňa, ktorá má vždy dva priesečníky $S1$ a $S2$ s danou priamkou s. Oba môžu byť reálne alebo komplexne združené. Limitný prípad $S1 = S2$ nastáva vtedy, keď s je dotyčnicou Q.

V závislosti od počtu reálnych priesečníkov s rovinou s v nekonečne rozlišujeme tri typy kvadrík:

1. eliptický typ: bez reálnych priesečníkov,
2. hyperbolický typ: dva reálne priesečníky,
3. parabolický typ: kvadriky sa dotýka rovina v nekonečne.

Nasledujúce číselné výrazy sú invariantmi plochy druhého rádu, vyjadrenej rovnicou

$$q(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{23}z + a_{44} = 0.$$

$$\Delta(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \ \delta(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$T(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{pmatrix},$$

$$s(x,y,z) = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \ \Delta'(x,y,z) = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33},$$

kde $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\Delta_{ij})$.

Z tohto možno odvodiť nasledujúce dve tabuľky.

Typ	δ	$s\delta$ a T	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
eliptický	$\neq 0$	$s\delta > 0$ a $T > 0$	$\emptyset$	elipsoid	$\emptyset$
hyperbolický	$\neq 0$	$s\delta > 0$ alebo $T \leq 0$	jednodielny hyperboloid	dvojdielny hyperboloid	kužeľ
parabolický	$= 0$		hyperbolický paraboloid	eliptický paraboloid	valcové a reducibilné plochy

Tabuľka 2.2: Klasifikácia kvadrík.

Typ	T	$\Delta' \neq 0$	$\Delta' = 0$
eliptický	> 0	ak $s\Delta < 0$, tak eliptický valec ak $s\Delta > 0$, tak $\emptyset$	bod
hyperbolický	< 0	hyperbolický valec	dve rôznobežné roviny
parabolický	$= 0$	parabolický valec	dve rovnobežné roviny rovina $\emptyset$

Tabuľka 2.3: Klasifikácia degenerovaných kvadrík.

2.3 Obálka elíps

2.3.1 Zmena bázy

Nech $m(t)\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je aspoň dvakrát diferencovateľná krivka, napíšme rovnicu elipsy Q so stredom na krivke $m(t)$, hlavnou polosou a v smere vektora $\dot{m}(t)$ a vedľajšou polosou b v smere normálového vektora $n(t)$ ku krivke $m(t)$. Vydelením normou vektorov $\dot{m}(t)$ a $n(t)$ dostávame novú ortonormálnu bázu tvorenú stĺpcovými vektormi matice $P(t)$, kde

$$P(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & n_1(t) \\ \dot{m}_2(t) & n_2(t) \end{pmatrix}.$$

Keďže sme prešli od štandardnej bázy k ortonormálnej báze, matica $P(t)$ je ortogonálna, a teda

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ n_1(t) & n_2(t) \end{pmatrix}.$$

V súradniciach $(u(t), v(t))$ má elipsa Q rovnicu v kanonickom tvare

$$\frac{u^2(t)}{a^2} + \frac{v^2(t)}{b^2} = 1,$$

kde vzťah medzi súradnicami $(u(t), v(t))$ a (x, y) je daný

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ n_1(t) & n_2(t) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{pmatrix} \right).$$

Elipsa Q sa potom transformuje na tvar

$$\frac{1}{\|\dot{m}\|^2} \left((x - m_1)^2 \left(\frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) + (y - m_2)^2 \left(\frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) \right) \tag{2.1}$$

$$+ \frac{1}{\|\dot{m}\|^2} \left(2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) (x - m_1)(y - m_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 \right) - 1 = 0, \tag{2.2}$$

po miernej úprave tak dostávame výraz

$$\frac{1}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2}\left((x-m_1)^2\left(b^2\dot{m}_1^2+a^2\dot{m}_2^2\right)+(y-m_2)^2\left(a^2\dot{m}_1^2+b^2\dot{m}_2^2\right)\right)$$
$$+\frac{1}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2}\left(2(b^2-a^2)(x-m_1)(y-m_2)\dot{m}_1\dot{m}_2\right)-1=0.$$

Uvažovali sme $\vec{n}=(-\dot{m}_2,\dot{m}_1)$, no výber orientácie normály nemá na výsledok žiaden vplyv.

Príklad 8 (Parabola)**.** Majme parabolu s parametrizáciou $m(t)=(t,t^2)$, kde $\dot{m}(t)=(1,2t)$. Transformujme elipsu,

$$\frac{1}{a^2b^2\left(4t^2+1\right)}\left((x-t)^2(b^2+a^24t^2)+(y-t^2)^2(a^2+b^24t^2)\right)$$
$$+\frac{1}{a^2b^2\left(4t^2+1\right)}\left(2(b^2-a^2)(x-t)(y-t^2)2t\right)-1=0.$$

2.3.2 Výpočet obálky elíps

Prepíšme rovnicu 2.1 do maticového zápisu. Máme kužeľosečku Q tvaru

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

ktorá má v maticovom tvare vyjadrenie $X^TM(t)X=0$, kde $X=(x,y,1)\in\mathbb{R}^3$ a $M(t)$ je symetrická matica rozmerov 3×3 s prvkami $A(t)....,F(t)$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}A&\frac{B}{2}&\frac{D}{2}\\\frac{B}{2}&C&\frac{E}{2}\\\frac{D}{2}&\frac{E}{2}&F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

Koeficienty matice $M(t)$ majú nasledovný tvar

$$A=\frac{b^2\dot{m}_1^2+a^2\dot{m}_2^2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2}$$
$$B=\frac{2(b^2-a^2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2}$$
$$C=\frac{a^2\dot{m}_1^2+b^2\dot{m}_2^2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2}$$
$$D=\frac{-2m_1\left(b^2\dot{m}_1^2+a^2\dot{m}_2^2\right)-2\left(b^2-a^2\right)m_2\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2}$$
$$E=\frac{-2m_2\left(a^2\dot{m}_1^2+b^2\dot{m}_2^2\right)-2\left(b^2-a^2\right)m_1\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2}$$
$$F=\frac{\dot{m}_1^2(b^2m_1^2+a^2m_2^2-a^2b^2)+2(b^2-a^2)m_1m_2\dot{m}_1\dot{m}_2+\dot{m}_2^2(a^2m_1^2+b^2m_2^2-a^2b^2)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2}-1$$

Pozrime sa deriváciu jednoparametrického systému elíps podľa parametra t.

$$\frac{\partial X^T M(t) X}{\partial t} : \; = X^T \dot{M}(t) X.$$

Máme teda kužeľosečku $\dot{Q}$ tvaru

$$\dot{A}x^2 + \dot{B}xy + \dot{C}y^2 + \dot{D}x + \dot{E}y + \dot{F} = 0$$

kde $\dot{A}(t), \dots, \dot{F}(t)$ sú prvky matice $\dot{M}(t)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= \frac{2(b^2 - a^2)(\ddot{m}_1\dot{m}_2 - \dot{m}_1\ddot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\
\frac{\dot{B}}{2} &= \frac{(a^2 - b^2)(2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 - (\dot{m}_1\ddot{m}_2 + \ddot{m}_1\dot{m}_2)\|\dot{m}\|^2)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2} \\
\dot{C} &= \frac{2(b^2 - a^2)(\dot{m}_1\ddot{m}_2 - \ddot{m}_1\dot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{D}}{2} &= \frac{(2a^2(m_1\dot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_2}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\
&+ \frac{a^2(\|\dot{m}\|^2(-2m_1\dot{m}_2\ddot{m}_2 + m_2\dot{m}_1\ddot{m}_2 + m_2\ddot{m}_1\dot{m}_2)}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\
&+ \frac{b^2(m_1\dot{m}_1 + m_2\dot{m}_2)(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\
&- \frac{b^2\|\dot{m}\|^2(2m_1\dot{m}_1\ddot{m}_1 + m_2\dot{m}_1\ddot{m}_2 + m_2\ddot{m}_1\dot{m}_2 + (\dot{m}_1)^3 + \dot{m}_1(\dot{m}_2)^2))}{a^2b^2\|\dot{m}\|^4} \\
\dot{E} &= \frac{2 \cdot (2a^2(-m_1\dot{m}_2 + m_2\dot{m}_1)(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1 + a^2(\|m\|^2(m_1\dot{m}_1\ddot{m}_2 + m_1\ddot{m}_1\dot{m}_2 - 2m_2\dot{m}_1\ddot{m}_1) + 2b^2(m_1}{} \\
\dot{F} &= \frac{2(a^2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)(-m_1^2(\dot{m}_2)^2 + 2m_1m_2\dot{m}_1\dot{m}_2 - m_2^2(\dot{m}_1)^2) + a^2\|m\|^4(m_1^2\dot{m}_2\ddot{m}_2 - m_1m_2\dot{m}_1\ddot{m}_2 - m_1}{}
\end{aligned}$$

Determinant matice $\dot{M}(t) = 0$, pre všetky t, čo znamená, že kužeľosečka je singulárna.
Pozrime sa na subdeterminant

$$\dot{M}_{33}(t) = \dot{A}\dot{C} - \frac{\dot{B}^2}{4} = -\frac{(b^2 - a^2)^2}{a^4b^4}\frac{(\dot{m}_1\ddot{m}_2 - \ddot{m}_1\dot{m}_2)^2 + \dot{m}_1\dot{m}_2\ddot{m}_1\ddot{m}_2}{\|m\|^4}.$$

Hodnota $\dot{M}_33(t) < 0$, pre všetky t, teda kužeľosečka degeneruje na dve rôznobežné priamky.

2.4 Obálka elipsoidov

Pre jednoparametrické systémy plôch druhého rádu existuje maticový zápis tvaru

$$S : X^T M(t) X = 0,$$

kde $X = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ a $M(t)$ je symetrická matica rozmeru $4x4$, ktorej koeficienty sú závislé od $t \in I$. Rovnicu jednoparametrického systému sfér S

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xm_1 - 2ym_2 - 2zm_3 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - r^2 = 0,$$

tak vieme zapísať ako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & 0 & -m_2 \\ 0 & 0 & 1 & -m_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 & m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Deriváciu jednoparametrického systému sfér $\dot{S}$

$$-2x\dot{m}_1 - 2y\dot{m}_2 - 2z\dot{m}_3 + 2m_1\dot{m}_1 + 2m_2\dot{m}_2 + 2m_3\dot{m}_3 - 2r\dot{r} = 0$$

možno tiež zapísať v tvare $X^T \dot{M}(t) X = 0$, kde $\dot{M}(t) = \dfrac{\partial M(t)}{\partial t}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dot{m}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{m}_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{m}_3 \\ -\dot{m}_1 & -\dot{m}_2 & -\dot{m}_3 & 2m_1\dot{m}_1 + 2m_2\dot{m}_2 + 2m_3\dot{m}_3 - 2r\dot{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Matica $\dot{M}(t)$ reprezentuje v každom $t \in I$ rovinu, ktorej normálový vektor $\vec{N}$ je $(-2\dot{m}_1, -2\dot{m}_2, -2\dot{m}_3)$. Vektor $\vec{N}$ je lineárne závislý s dotykovým vektorom $\dot{m}$ ku krivke m.

Rovnako zapíšme rovnicu jednoparametrického systému elipsoidov Q

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2\frac{xm_1}{a^2} - 2\frac{ym_2}{b^2} - 2\frac{zm_3}{c^2} + \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & \frac{-m_1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & \frac{-m_2}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & \frac{-m_3}{c^2} \\ \frac{-m_1}{a^2} & \frac{-m_2}{b^2} & \frac{-m_3}{c^2} & \frac{m_1}{a^2} + \frac{m_2}{b^2} + \frac{m_3}{c^2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

potom derivácia jednoparametrického systému elipsoidov, ktorú označíme $\dot{Q} = \dfrac{\partial Q(t)}{\partial t}$

$$-\frac{\dot{m}_1 x}{a^2} + \frac{\dot{m}_2 y}{b^2} + \frac{\dot{m}_3 z}{c^2} + \frac{m_1\dot{m}_1}{a^2} + \frac{m_2\dot{m}_2}{b^2} + \frac{m_3\dot{m}_3}{c^2} = 0,$$

má v maticovom zápise tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_1}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} \\ \frac{-\dot{m}_1}{a^2} & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} & \frac{2m_1\dot{m}_1}{a^2} + \frac{2m_2\dot{m}_2}{b^2} + \frac{2m_3\dot{m}_3}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

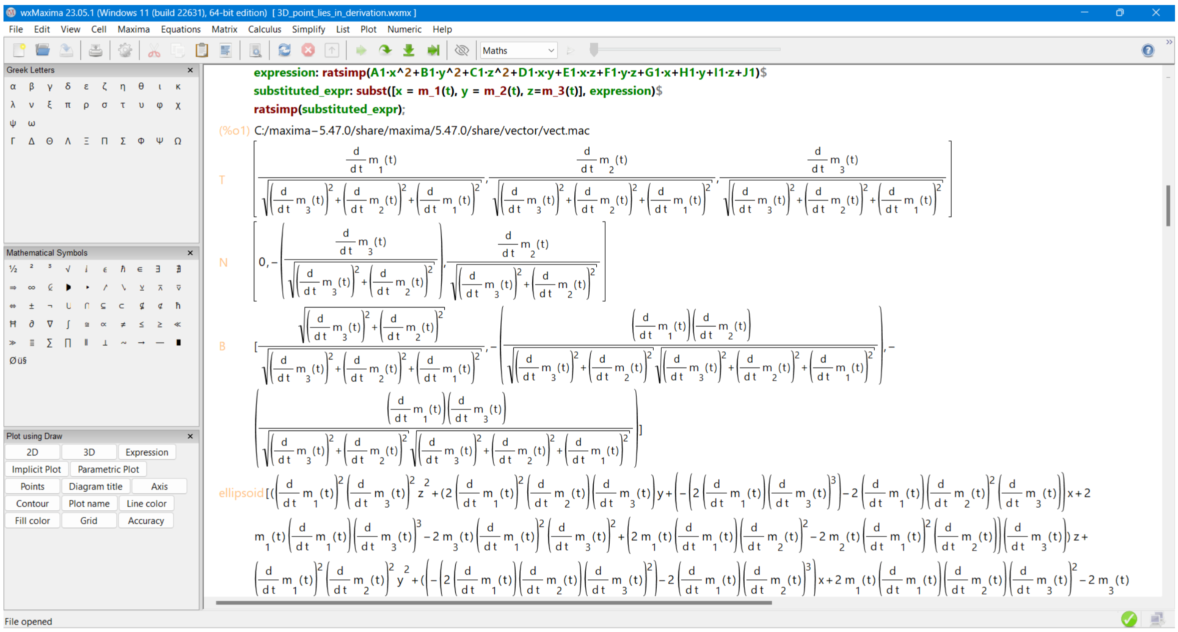
$\dot{Q}$ je rovina kolmá na dotykový vektor $\dot{m}(t)$, práve vtedy keď vektory $(\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3)$ a $(\frac{\dot{m}_1}{a^2}, \frac{\dot{m}_2}{b^2}, \frac{\dot{m}_3}{c^2})$ sú lineárne závislé. Ak budeme elipsoid škálovať tak, že a, b, c budú škálovacie faktory také, aby sa elipsoid naškáloval v dotykovom smere, tak kolmá rovina na dotykový vektor vytne kružnicu, pretože elipsoid je v ostatných smeroch homogénny. Vyriešme toto odvodenie pre jednoduchší prípad, a to prípad elíps.

Upravme rovnice pre obálku sféry tak, aby zodpovedali obálke elipsoidov. Vezmime elipsoid so škálovaním v smere súradnicových osí konštantnými reálnymi číslami a, b, c. Upravme škálovanie elipsoidu tak, aby a, škálovanie v smere osi x zodpovedalo škálovaniu v dotykovom smere priestorovej krivky $m(t)$. Teda pre elipsoid s rovnicou

$$\frac{(x - m_1(t))^2}{a^2} + \frac{(y - m_2(t))^2}{b^2} + \frac{(z - m_3(t))^2}{c^2} = 1$$

zmeníme štandardnú bázu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ na bázu Frenetovho repéra $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ v každom bode krivky $m(t)$. Naše očakávanie je, že obálku elipsoidu škálovaného v dotykovom smere budeme môcť zostrojiť znova ako obálku kružníc, a teda, deriváciou jednoparametrického systému elipsoidov je podľa parametra t bude opäť rovina. V ďalších výpočtoch budeme parameter t pre väčšiu prehľadnosť zápisov vynechávať.

Na všetky výpočty v tejto kapitole bol použitý voľne dostupný softvér počítačovej algebry Maxima s grafickým užívateľským rozhraním wmMaxima. Celý balík a dokumentácia sú dostupné na [17], [18]. Rovnice z Maximy boli prevedené do LaTeXu pomocou Python skriptu `conversion-to-latex.ipynb`, ktorý sa nachádza v GitHub repozitári `https://github.com/tutka13/Masters-Thesis/tree/main/symbolic-computations`.



Obr. 2.1: Výpočet: bod v paramteri t na krivke $m(t)$ leží v derivácii jednoparametrického systému elipsoidov.

Kapitola 3

Softvér

V našej práci je cieľom implementácie matematicky odvodených konceptov vizualizácia vypočítaných plôch a následne aj ich 3D tlač. V tejto kapitole v prvej časti uvedieme stručnú špecifikáciu softvéru, v druhej časti zdôvodnime výber programovacieho jazyka a knižníc, opíšeme proces ich inštalácie, zdôvodnime použité programovacie prostredie a uvedieme jeho konfiguráciu pre naše použitie. V tretej časti uvedieme vývoj skriptov, demo a chyby, ktoré sa počas riešenia vyskytli a na záver, vo štvrtej časti, krátko opíšeme proces 3D tlače plôch. Všetky vytvorené skripty a ďalšie súbory sa nachádzajú na GitHube v repozitári `https://github.com/tutka13/Masters-Thesis`.

3.1 Špecifikácia

3.1.1 Požiadavky

Používateľ zadá parametre pre vykreslenie 3D plôch, ktoré vypočíta a vymodeluje softvér podľa procesu workflow.

Vstup

Obálka sfér:

Zadať parametrizáciu priestorovej krivky $m(t)$ stredov sfér, funkciu polomeru $r(t)$, interval I parametra t a vzorkovanie plochy.

Obálka elipsoidov:

Zadať parametrizáciu priestorovej krivky $m(t)$ stredov elipsoidov, konštanty a a b, interval I parametra t a vzorkovanie plochy.

Výstup

Obálka sfér:

Vizualizácia jednoparametrického systému sfér, charakteristických kružníc a výslednej plochy - obálky sfér.

Obálka elipsoidov:

Vizualizácia jednoparametrického systému elipsoidov, charakteristických kružníc a výslednej plochy - obálky elipsoidov.

Workflow

Obálka sfér:

- vymazanie scény
- čítanie parametrov z textového súboru
- symbolické výpočty
- vytvorenie prázdnych polí
- numerické vyčíslenie symbolických výrazov
- uloženie hodnôt do poľa
- určenie normál charakteristických kružníc
- označenie charakteristických kružníc
- interpolácia medzi dvoma charakteristickými kružnicami
- posun plôch v priestore
- vizualizácia plôch
- uloženie scény do databázy

Obálka elipsoidov:

- čítanie parametrov
- natočenie a posun elipsoidov
- určenie parametrov škálovania
- umiestnenie elipsodiu do každého bodu krivky $m(t)$
- derivácia jednoparametrického systému plôch
- extrahovanie koeficientov

- určenie typu plochy
- nahradenie elipsoidov zodpovedajúcimi kružnicami
- výpočet natočenia kružníc
- vizualizácia plochy
- uloženie plochy do databázy

Funkčnosť softvéru

Zoznam funkcií, ktoré budeme potrebovať. Sféru a elipsoid nazveme plochy.

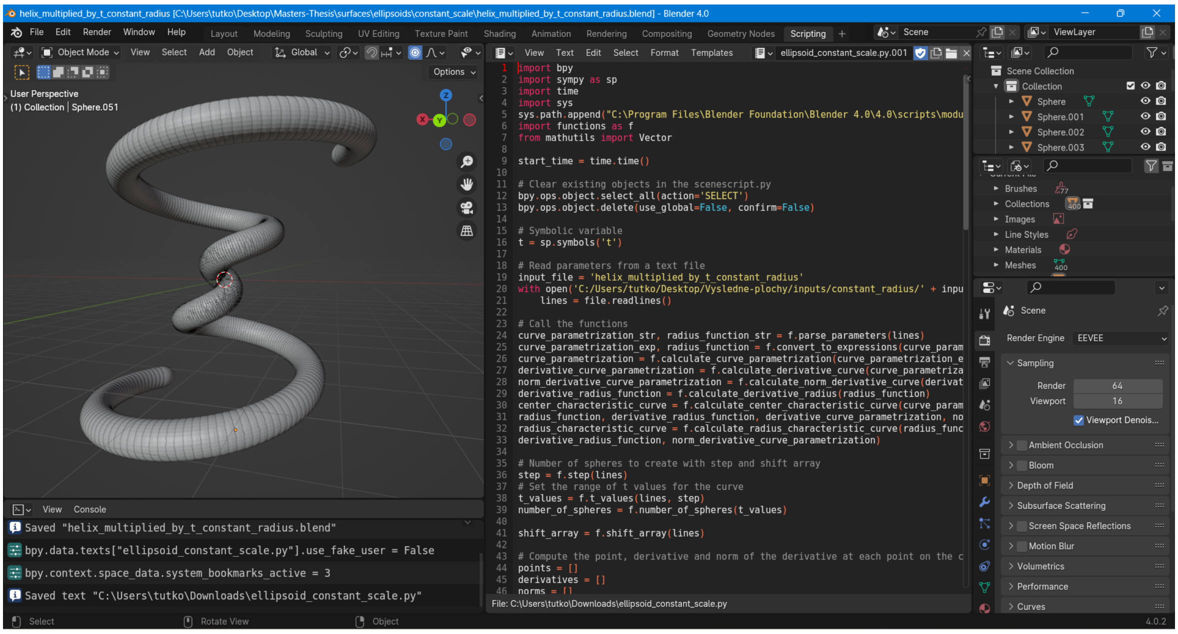
- čítanie parametrov z textového súboru
- symbolické výpočty
- numerické vyčíslenie
- výpočet charakteristických kružníc
- uloženie hodnôt do poľa
- interpolácia medzi 2 charakteristickými kružnicami
- posun plochy v priestore
- vizualizácia plochy
- uloženie plochy do databázy

3.2 Výber softvéru a jeho inštalácia

Na výpočet a vizualizáciu plôch sme sa rozhodli využiť kombináciu Blenderu a jazyka Python. Python je momentálne jedným z najpopulárnejších a najpoužívanejších programovacích jazykov, s knižnicami vhodnými pre matematické výpočty. Okrem toho dokáže generovať výstupy vo formáte LaTeX. Je užívateľsky intuitívny. Blender je významným nástrojom pre prácu s 3D grafikou. Vzhľadom na trojrozmernú povahu našich plôch, nám jeho použitie umožnilo vytlačiť aj niekoľko fyzických modelov v 3D tlačiarni.

3.2.1 Blender

Blender je open source balík na tvorbu 3D. Podporuje celú 3D technológiu - modelovanie, rigging, animáciu, simuláciu, renderovanie, kompozíciu a sledovanie pohybu, dokonca aj strih videa a tvorbu hier. Pokročilí používatelia využívajú rozhranie API programu Blender pre skriptovanie v jazyku Python na prispôsobenie aplikácie a písanie špecializovaných nástrojov [1]. Pre účely tejto práce sme využili Blender 4.0.2, stiahnuteľný na webstránke [3]. Blender umožňuje rozšírenie svojej funkcionality pomocou skriptovacieho jazyka Python, ktorý je integrovaný priamo do softvéru, teda nie je potreba samostatnej inštalácie. Okrem toho Blender obsahuje špeciálnu knižnicu bpy, ktorá slúži na vykonávanie príkazov v Blenderi. Na vytváranie skriptov slúži prostredie Scripting, ktoré obsahuje okná na písanie, úpravu textu a Python konzolu. Je možné pracovať aj v externom programovacom prostredí [2].



Obr. 3.1: Plocha vygenerovaná skriptom v Blendri.

3.2.2 Python

Python je vysokoúrovňový programovací jazyk, ktorý je populárny pre svoju jednoduchosť a čitateľnosť syntaxe. Má široké využitie v rôznych odvetviach, ako sú web development, vedecké výpočty, umelá inteligencia, automatizácia, spracovanie dát a mnoho ďalších. Pri používaní priamo v Blendri nie je potrebná inštalácia. Pri otvorení prostredia Scripting v Blendri sa vľavo v konzole nachádza informácia o verzii Pythonu, ktorú Blender používa. V našom prípade je to 3.10.13.

3.2.3 Knižnice

Na výpočet a zobrazenie plôch v Blendri sme využili nasledovné knižnice

- bpy: knižnica Blenderu, ktorá umožňuje manipuláciu s objektmi v Blendri pomocou príkazov vytvorených v skriptoch,
- math: základné matematické funkcie a konštanty pre numerické výpočty, obsahuje funkcie ako $\sin, \cos, \log$ a ďalšie, ako aj konštanty ako π a e,
- mathutils: je súčasťou Blenderu a poskytuje množstvo matematických funkcií a nástrojov pre prácu s 3D objektami, obsahuje funkcie na rotácie, transformácie, výpočet normál a ďalšie operácie v 3D priestore,
- matplotlib.pyplot: rozhranie na tvorbu vizualizácií a grafického zobrazenia dát, tvorbu grafov, histogramov, kontúrových máp a ďalších typov vizuálnych reprezentácií dát,
- numpy: nástroje na manipuláciu s vektormi, maticami, poliami a ďalšími objektami potrebnými pre zložitejšie výpočty,
- sympy: nástroje na symbolické výpočty, algebraické manipulácie, riešenie rovníc a ďalšie matematické operácie potrebné pre pokročilé výpočty,
- sys: prístup k niektorým systémovým špecifikáciám a funkciám, medzi jej použitia patrí prístup k argumentom príkazového riadku, manipulácia s cestami k súborom a niektoré informácie o systéme, ako verzia Pythonu,
- time: získanie času v milisekundách.

3.2.4 Inštalácia knižníc

Pip je inštalátor balíkov pre Python, ktorý spravuje knižnice pre jazyk Python. Používa sa na inštaláciu z Python Package Index. PyPI je knižníc pre programovací jazyk Python. Keďže sme Python stiahli z oficiálnej stránky Python [34], pip sa inštaloval automaticky [25]. Overiť, či máme naištalovaný pip, možno pomocou príkazového riadku, ktorý otvoríme vyhľadaním cmd v ponuke vyhľadávania a zadaním `python -m pip --version`. V našom prípade pracujeme s verziou pip 24.0. Následne je možné inštalovať všetky potrebné knižnice v príkazovom riadku zadaním

```
pip install bpy,
pip install math,
pip install mathutils,
pip install matplotlib,
```

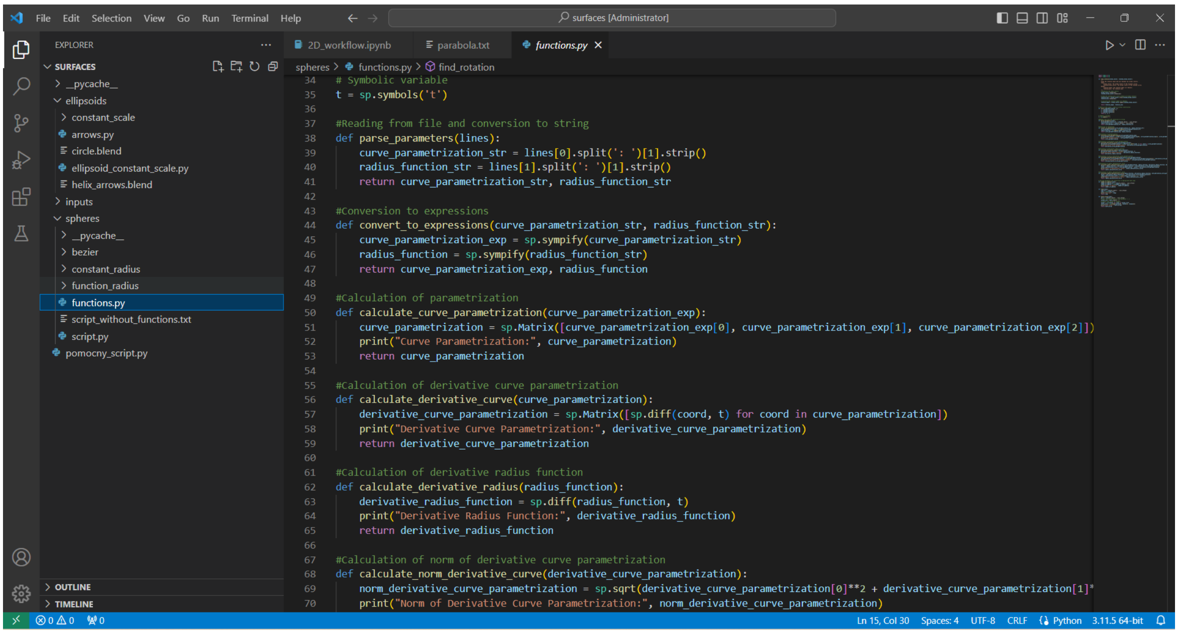
```
pip install numpy,
pip install sympy,
pip install sys,
pip install time.
```

3.2.5 Programovacie prostredie

Keďže prostredie Scripting v Blendri nedisponuje mnohými vlastnosťami, ktoré by sme na zjednodušenie tvorby skriptov potrebovali, využijeme externé programovacie prostredie, a to Visual Studio Code.

Visual Studio Code

Na úpravu skriptov pre Python a Python-Blender sme využili programovacie prostredie Visual Studio Code vo verzii 1.82.2, ktorý disponuje farebným zvýrazňovaním kódu, súčasným zobrazením viacerých skriptov, zobrazením súborov v priečinku, kontrolou chýb, ladením programu a ďalšími funkciami. Má intuitívny a prehľadný dizajn, no jeho najväčšou výhodou je množstvo rozšírení, z ktorých je pre prepojenie programov Python a Blender potrebné Blender Development. Toto rozšírenie slúži na ladenie skriptov, ktoré sa spúšťajú v prostredí Blenderu.



Obr. 3.2: Skipt funkcií pre obálku sfér a elipsoidov vo VS Code.

Konfigurácia VS Code - Python - Blender

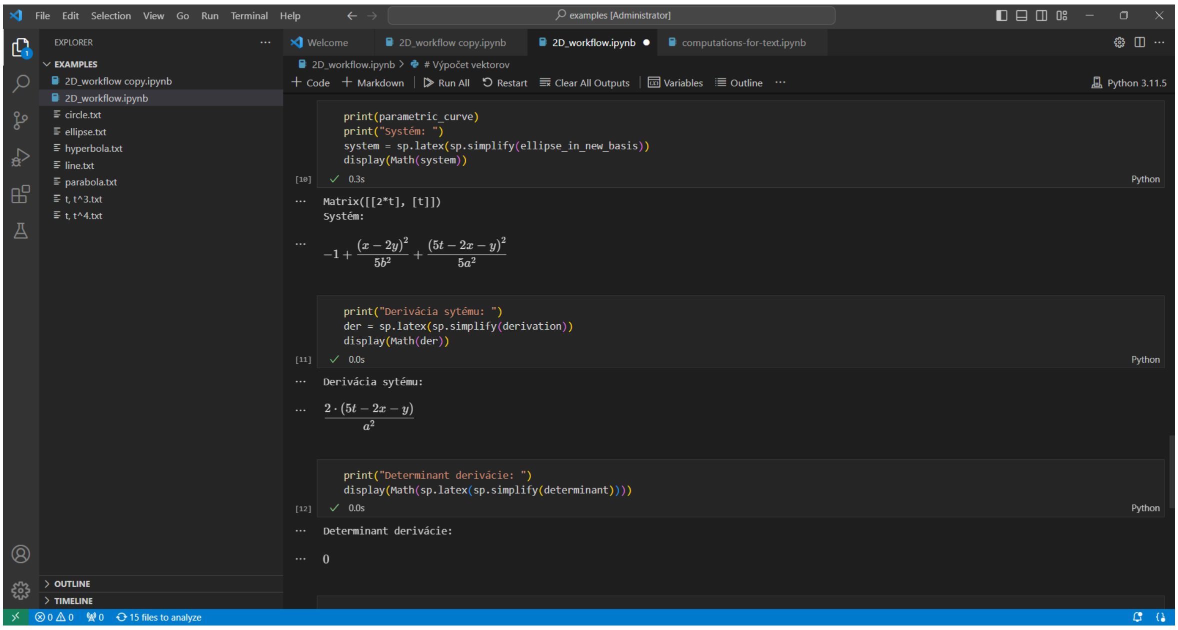
Pre systém Windows sme v prvom kroku nainštalovali samostatnú verziu Pythonu [34]. Keďže Blender používa Python verziu 3.10.13, mohli sme stiahnuť akúkoľvek vyššiu. Používame verziu 3.11.5. Pri inštalácii je potrebné odkliknúť možnosť `Add Python Executable to the path`. Zo stránky [36] sme stiahli VS Code, ktorý sme následne inštalovali. Vo VS Code sme v paneli rozšírení na ľavej strane vyhľadali rozšírenie Python, ktoré vytvorila spoločnosť Microsoft a aj to sme inštalovali. Tým sa umožnila práca VS Code s jazykom Python. Pre lepšie používanie knižnice bpy v skriptoch bolo potrebné nainštalovať falošný bpy modul [8] príkazom v termináli `pip install fake-bpy-module-latest.` Po dokončení inštalácie sme reštartovali VS Code. V bočnom paneli rozšírení sme vyhľadali Blender development. Po inštalácii sme v priečinku Python v inštalačnom adresári programu Blender otvorili vlastnosti, kartu zabezpečenia a skupinu používateľov, ktorým sme povolili možnosť `Write`. Vďaka tomuto rozšíreniu sme mohli ladiť program pomocou `Ctrl+Shift+P.` Po stlačení tejto klávesovej skratky sa v hornom paneli zobrazilo kontextové menu, kde sme vybrali `Blender: Build and Start,` čím sme spustili Blender. Proces ladenia programu sme spúšťali možnosťou `Blender: Run Script.`

Jupyter Notebook

Pre účely našej práce sme potrebovali niekoľko pomocných skriptov na výpočet obálok konkrétnych prípadov v 2D a 3D a na prepis symbolických výpočtov z Maximy do LaTeX-u. Pri programovaní týchto skriptov sme využívali Jupyter Notebook vo verzii 7.0.4, výpočtový nástroj, pôvodne navrhnutý pre úlohy dátovej vedy, ktorý umožňuje interaktívnu prácu s kódom, rovnicami a vizualizáciami s podporou v 40 programovacích jazykoch. S jeho pomocou je možné vytvárať dokumenty vo formáte JSON, ktoré sú rozdelené do buniek a komunikujú s výpočtovými jadrami cez Interactive Computing Protocol. Jadrá sú zodpovedné za vykonávanie kódu a výstupy. Jupyter Notebook ponúka modulárny dizajn, ktorý umožňuje jednoduché manipulácie s jednotlivými bunkami, vrátane možnosti úpravy bunky bez ďalšieho vplyvu na zvyšnú časť kódu, spätného vrátenia sa a vymazania bunky [13]. Jupyter Notebook sa nainštaluje rovnako ako Blender Development vo VS Code rozšíreniach. Jednou možnosťou je spustiť Jupyter Notebook v termináli príkazom `jupyter notebook` alebo si vytvoriť súbor vo VS Code možnosťou `New File` a zvoliť `Jupyter Notebook .ipynb.` My sme využívali druhú možnosť.

3.3 Implementácia

V tejto časti sa budeme venovať vývoju našich skriptov. Skritov máme niekoľko. Skript na generovanie obálky sfér, skript na generovanie obálky elipsoidov, skript s používanými funkciami, skipt pre rovninné príklady obálky elíps, skript pre príklady obálky elipsoidov, skript na symbolické výpočty a skript pre prepísanie rovníc do programu



Obr. 3.3: Výstupy po každej vykonanej bunke v JupyterNotebook.

LaTeX. Najprv sme začali vyvíjať skript pre obálku sfér, kde bolo hlavnou myšlienkou zostrojenie obálky sfér na intervale I s vhodným vzorkovaním plochy pre parameter $t \in I$ iba pomocou charakteristických kružníc. Kružnice sme uložili tak, aby ich normálový vektor bol $(0, 0, 1)$. Následne sme kružnice otočili podľa dotykového vektora krivky $m(t)$. Kružnice sme pospájali v `Edit Mode` funkciou Blendru.

3.4 3D tlač

Tlačiareň, v ktorej sme plochy tlačili je typu Original Prusa i3 MK3S+. Všetky jej parametre a taktiež manuál k tlači sa nachádza na [30]. Na vytlačenie modelov plôch bolo potrebné exportovať plochy v Blendri do vhodného formátu. Pre tlač bolo potrebné inštalovať softvér PrusaSlicer, ktorý možno stiahnuť z [29].

3.4.1 PrusaSlicer

Popis procesu v programe PrusaSlicer vo verzii 2.7.2.

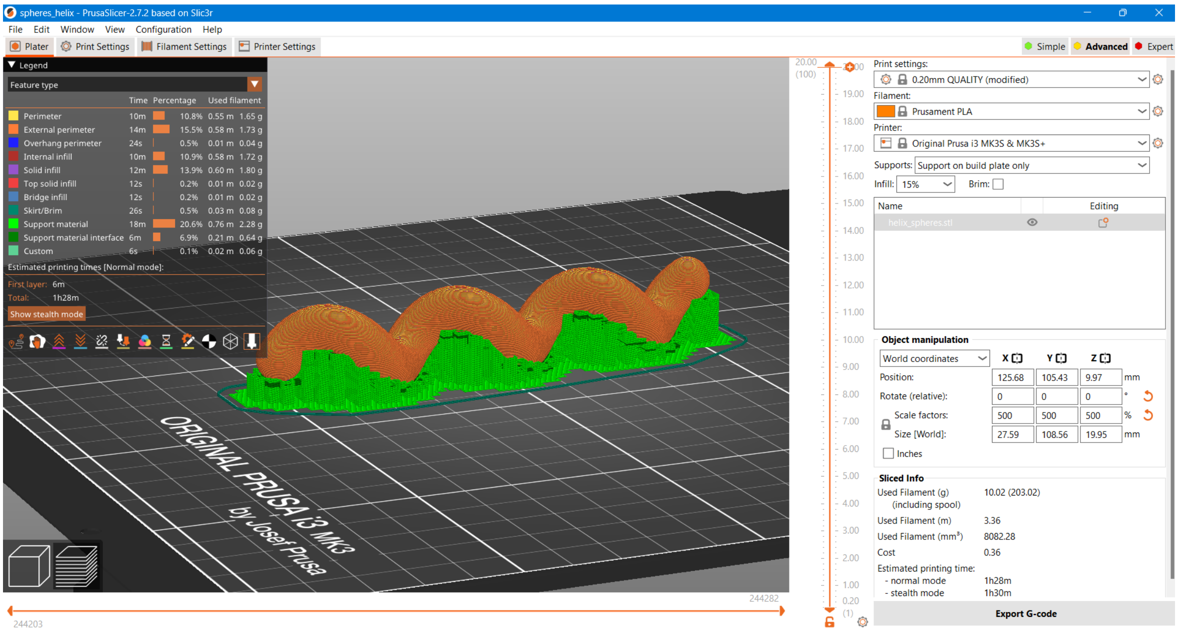
1. Načítanie modelu: Používateľ načíta do PrusaSliceru 3D model,ktorý chce vytlačiť, vo vhodnom formáte.

2. Nastavenie parametrov tlače: Používateľ nastaví parametre tlače, ako je typ tlačiarne, materiál, hrúbka vrstvy, percento výplne (infill), teplota tlače atď. Tieto parametre ovplyvňujú kvalitu a vlastnosti vytlačeného modelu.

3. Slicing: PrusaSlicer rozdelí 3D model na tenké horizontálne vrstvy a vytvorí inštrukcie pre tlačiareň, ktoré určujú pohyb tlačiarne.

4. Príprava G-kódu: Na základe slicovania PrusaSlicer vytvorí súbor `.gcode`, ktorý obsahuje sériu príkazov pre tlačiareň, ako sú pohyby osí, rýchlosti a teploty.

5. Export G-kódu: Po príprave exportovať G-kód a nahrať ho na SD kartu alebo do počítača, pomocou ktorého budeme tlačiť.



Obr. 3.4: Slicing plochy v softvéri PrusaSlicer.

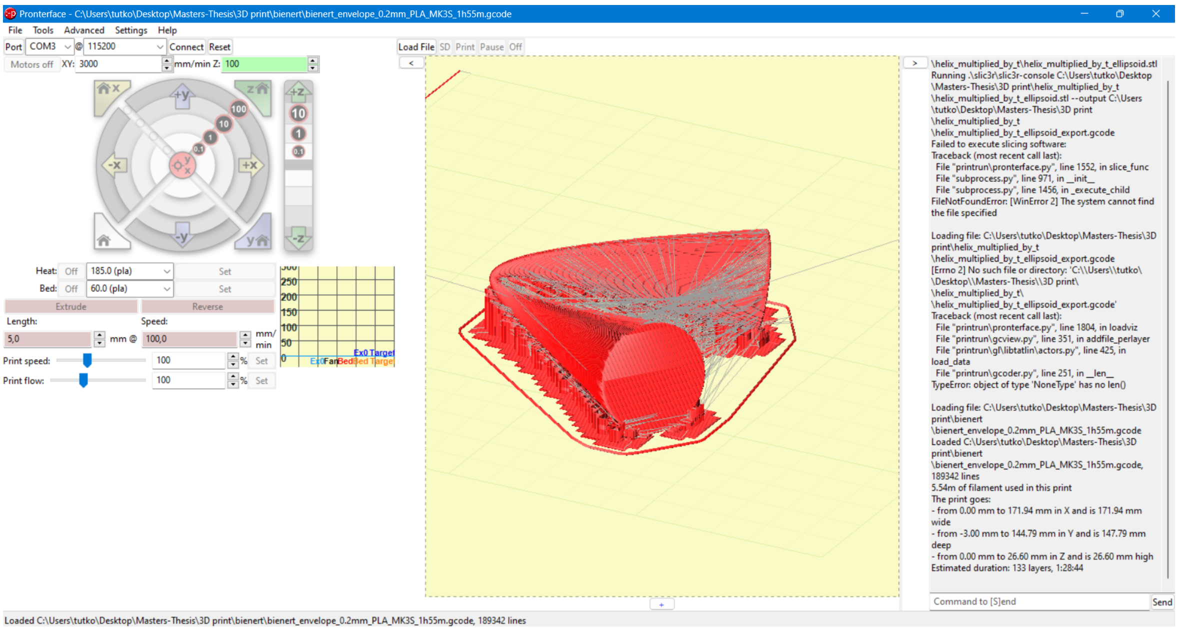
Parametre tlače

Ako vstupný formát do PrusaSlicer-u sme používali `.stl`.
Typ tlačiarne: Original Prusa i3 MK3S & MK3S+
Nastavenie tlače: 0.20mm QUALTY
Filament: Prusament PLA
Podpory: Podpora len na stavebnej doske
Infill: 15%
Teplota trysky: 215°C
Teplota podložky: 60°C
Kvôli nefunkčnosti tlače z SD karty, sme pre 3D tlač používali počítač prepojený USB káblom s tlačiarňou. Počítač musel byť počas tlače neustále pripojený k tlačiarni a nesmel prejsť do režimu spánku, hibernácie alebo sa vypnúť. Prerušenie pripojenia k počítaču by malo za následok prerušenie tlače bez možnosti obnovenia tlače.

3.4.2 Pronterface

Pronterface je jednoduché grafické používateľské rozhranie, ktoré používateľom ponúka možnosť monitorovať a ovládať tlačiareň z počítača pripojeného cez USB. Pomocou neho možno priamo pohybovať krokovými motormi, ovládať teplotu lôžka a trysky, posielať príkazy G-kódu priamo cez terminál alebo konzolové okno a mnoho ďalšieho. Pronterface je súčasťou balíka jednoduchých nástrojov Printrun na správu a ovládanie 3D tlačiarní aj CNC strojov. Napriek svojmu základne vyzerajúcemu dizajnu a zastaranej grafike zostáva užitočným nástrojom, ktorý si udržiava silnú pozíciu v komunite 3D tlačiarov [32].

Stiahli sme jeho poslednú veziu 2.0.1 na webovej lokalite [31]. Pomocou Správcu zariadení systému Windows sme skontrolovali, ktorý port COM bol priradený našej 3D tlačiarni, bol to COM3. Po pripojení k tlačiarni sme zvolili tlačidlo Connect. Potom sme načítali model tlačidlom Load file a vybrali súbor vo formáte `.gcode`. V aplikácii sme skontrolovali nastavenú teplotu trysiek a podložky, aby zodpovedala zvolenému materiálu podľa našich pokynov. Po načítaní modelu sa v pravom stĺpci zobrazil pesimisticky odhad času tlače.



Obr. 3.5: Príprava na tlač plochy v softvéri Pronterface.

Kapitola 4

Výsledky práce

Záver

Literatúra

[1] Blender documentation: Blender 4.0 Reference Manual. Dostupné na internete: https://docs.blender.org/manual/en/latest/index.html.

[2] Blender documentation: Blender 4.0 Python API Documentation. Dostupné na internete: https://docs.blender.org/api/current/.

[3] Blender download. Dostupné na internete: https://www.blender.org/download/.

[4] Biernet A. 2016. Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Naturwissenschaftliche Fakultät III. Halle (Saale). Dissertation. Dostupné na internete: https://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/2416652.

[5] Bruce, J., Giblin, P. 1992. Envelopes. *In Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory* (pp. 99-132). Cambridge: Cambridge University Press. Dostupné na internete: doi:10.1017/CBO9781139172615.007.

[6] Bruce J. W., Giblin P. J. 1981. What Is an Envelope? *The Mathematical Gazette*, 65(433), 186-192. Dostupné na internete: http://www.jstor.org/stable/3617131.

[7] do Carmo M. P. 2017. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York. Dover Publications Inc., Mineola. ISBN 978-0-486-80699-0.

[8] Fake-bpy-module. Dostupné na internete: https://github.com/nutti/fake-bpy-module.

[9] Grossfield A. 1997. What Are Differential Equations: A Review Of Curve Families. Paper presented at 1997 Annual Conference, Milwaukee, Wisconsin. 10.18260/1-2–6898. Dostupné na internete: https://216.185.13.174/what-are-differential-equations-a-review-of-curve-families.

[10] Chalmovianská J. Skriptá k predmetu Algebraická geometria. Dostupné na internete: http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~pilnikova/ag1.html.

[11] Chudinov P. 2009. Numerical-analytical Algorithm for Constructing the Envelope of the Projectile Trajectories in Midair. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.0520`.

[12] Ivanov A.B. Surface of the second order. *Encyclopedia of Mathematics.* Volume 10. ISBN 1402006098. `http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Surface_of_the_second_order&oldid=24131`.

[13] Jupyter Notebook. `https://jupyter.org/`.

[14] Karčiauskas K., Krasauskas R. 2000. Rational rolling ball blending of natural quadrics. *Mathematical Modelling and Analysis,* Volume 5, Pages 97-107. Dostupné na internete: `https://www.researchgate.net/publication/233265253_Rational_rolling_ball_blending_of_natural_quadrics`.

[15] Korbaš J. 2013. *Prednášky z lineárnej algebry a geometrie.* Prvé vydanie. Univerzita Komenského v Bratislave: Vydavateľstvo UK. ISBN 978-80-223-3408-2.

[16] Lee J. 2012. *Introduction to Smooth Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics. New York. Springer. 2. edition. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5`.

[17] Maxima documentation: Maxima 5.47.0 Manual. Dostupné na internete: `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_singlepage.html`.

[18] Maxima download. Dostupné na internete: `https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/`.

[19] Mészárosová K., Rückschlossová T., Tereňová Z. 2018. *Deskriptívna geometria II. Druhá časť – Priamkové, translačné, klinové a kanálové plochy.* STU v Bratislave. ISBN 978-80-227-4767-7. Dostupné na internete: `https://www.math.sk/skriptaDG2/2/`.

[20] Glaeser G., Odehnal B., Stachel H. 2016. *The Universe of Conics.* Berlin Heidelberg. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-45449-7. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1007/978-3-662-45450-3`.

[21] Odehnal B., Stachel H., Glaeser G. 2020. *The Universe of Quadrics.* Vienna. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-61052-7. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1007/978-3-662-61053-4`.

[22] Peternell M., Pottmann H. 1997. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, Volume 23, Issues 2–3, Pages 255-266, ISSN 0747-7171. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0087`.

[23] Peternell M., Odehnal B., Sampoli M. L. 2008. On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 25, Issues 4–5, Pages 342-355, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.10.007`.

[24] Peternell M., Pottmann H. 1998. A Laguerre geometric approach to rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 3, Pages 223-249, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00024-1`.

[25] Pip. Dostupné na internete: `https://pip.pypa.io/en/stable/`.

[26] Pottmann H., Peternell M. 2009. Envelopes – Computational Theory and Applications. Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Budmerice. Dostupné na internete: `https://www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/ig/peternell/env.pdf`.

[27] Pottmann H., Peternell M. 1998. Applications of Laguerre geometry in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 2, Pages 165-186, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00023-X`.

[28] Pottmann H., Wallner, J. 2001. *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag. ISBN 3-540-42058-4.

[29] PrusaSlicer download. Dostupné na internete: `https://www.prusa3d.com/cs/`.

[30] Příručka 3D tiskaře. Dostupné na internete: `https://help.prusa3d.com/cs/downloads`.

[31] Pronterface download. Dostupné na internete: `https://www.pronterface.com/`.

[32] Pronterface setup. Dostupné na internete: `https://all3dp.com/2/pronterface-how-to-download-install-and-set-it-up/`.

[33] Python documentation. Dostupné na internete: `https://docs.python.org/3/`.

[34] Python download. Dostupné na internete: `https://www.python.org/downloads`.

[35] Skopenkov M. et al. 2020. Characterizing envelopes of moving rotational cones and applications in CNC machining, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 83, 101944, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101944`.

[36] Visual Studio Code download. Dostupné na internete: https://code.visualstudio.com/download.

[37] Vráblíková J. 2022. Envelopes of implicit surfaces. Mathematical Institute of Charles University. Prague. Master's thesis. Dostupné na internete: https://dodo.is.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/171858/120411574.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[38] Zlatoš P. 2011. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Bratislava. Marenčin PT. ISBN 978-80-8114-111-9.

[39] Obrázok Webbov Most. Dostupné na internete: http://www.yannarthusbertrand2.org/collection/australia/#mwl-3844.

[40] Obrázok Rolling ball blends. Dostupné na internete: https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb_abs/parblrb_abs.html.

[41] Obrázok Hudobné divadlo a výstavná sieň. Dostupné na internete: https://www.archdaily.com/789123/music-theatre-and-exhibition-hall-massimiliano-and-doriana-fuksas.

Všetky online zdroje boli dostupné dňa 03.05.2024.

Príloha A

Výpočet obálky pomocou Gröbnerovej bázy pre príklad 3 so sústavou rovníc

$$
\begin{aligned}
F^\lambda &= 4t^6 - 4t^5y + t^4y^2 + 7t^4 - 8t^3y + 2t^2y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,\\
F_t^\lambda &= 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2t + 4t - 4y.
\end{aligned}
$$

Uvažujme lexikografické usporiadanie monómov $t >_{\text{lex}} x >_{\text{lex}} y$. Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$L_{lex} = \{l_1, \ldots, l_6\}, \text{ kde}$$

$$
\begin{aligned}
l_1 = {} & 8232129896496000t^3 - 15949751674461t^2y^7 - 161384046512557t^2y^5\\
& - 1204463505481071t^2y^3 - 6169809854717575t^2y + 15430671472tx^2y^{12}\\
& + 426513396863tx^2y^{10} - 15006102325790tx^2y^8 - 319921877859794tx^2y^6\\
& + 3932980083404115tx^2y^4 + 26096343414243210tx^2y^2\\
& - 5927133525477120tx^2 + 8232129896496000t - 89991676024704x^6y^3\\
& + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 + 5668842986368x^4y^7\\
& - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 - 17414290688695056x^4y\\
& - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 + 43203483205279x^2y^7\\
& - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 + 19070089710359527x^2y\\
& - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 - 1204463505481071y^3\\
& - 6169809854717575y,\\
l_2 = {} & 1029016237062t^2x^2 + 3835312tx^2y^{11} + 224556467tx^2y^9 + 2456837050tx^2y^7\\
& - 42939029714tx^2y^5 - 622020302148tx^2y^3 - 2792792777023tx^2y\\
& - 22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6\\
& + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10}\\
& + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2\\
& - 1254254177448x^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_3 = {} & 171502706177t^2y^8 + 2058032474124t^2y^6 + 14749232731222t^2y^4 \\
& + 51450811853100t^2y^2 + 107189191360625t^2 + 8570784208tx^2y^{11} \\
& + 447143859077tx^2y^9 + 2637043681390tx^2y^7 - 114540691274161tx^2y^5 \\
& - 650595377992068tx^2y^3 - 329349595559310tx^2y - 49984813501056x^6y^2 \\
& + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 + 1466755633792x^4y^6 \\
& + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 + 188859580240104x^4 \\
& - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 + 53352589022478x^2y^6 \\
& + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 - 296888240050025x^2 \\
& + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 \\
& + 10718919136062514749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625, \\
l_4 = {} & 3319374168tx^4 + 4112tx^2y^{12} + 419465tx^2y^{10} + 11960430tx^2y^8 + 9104606tx^2y^6 \\
& - 3087637940tx^2y^4 - 14225835735tx^2y^2 - 3841868250tx^2 - 23981184x^6y^3 \\
& - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 + 484488324x^4y^3 \\
& + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 + 1348048703x^2y^5 \\
& + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y, \\
l_5 = {} & 16tx^2y^{13} + 1321tx^2y^{11} + 29688tx^2y^9 - 92522tx^2y^7 - 7839424tx^2y^5 \\
& - 31597167tx^2y^3 - 1560600tx^2y - 93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 \\
& - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 \\
& - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 \\
& + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2, \\
l_6 = {} & 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
& - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
& - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2.
\end{aligned}
$$

Eliminovaná Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$G_{lex} = \{g_1, \ldots, g_6\}, \text{ kde}$$

$$
\begin{aligned}
g_1 = {} & -89991676024704x^6y^3 + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 \\
& + 5668842986368x^4y^7 - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 \\
& - 17414290688695056x^4y - 138876043248x^2y^11 + 5550943018945x^2y^9 \\
& + 43203483205279x^2y^7 - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 \\
& + 19070089710359527x^2y - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 1204463505481071y^3 - 6169809854717575y,\\
g_2 = &-22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6\\
&+ 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10}\\
&+ 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2\\
&- 1254254177448x^2,\\
g_3 = &-49984813501056x^6y^2 + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8\\
&+ 1466755633792x^4y^6 + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2\\
&+ 188859580240104x^4 - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8\\
&+ 53352589022478x^2y^6 + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2\\
&- 296888240050025x^2 + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6\\
&+ 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625\\
g_4 = &-23981184x^6y^3 - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5\\
&+ 484488324x^4y^3 + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7,\\
&+ 1348048703x^2y^5 + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y\\
g_5 = &-93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6\\
&+ 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10}\\
&+ 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2,\\
g_6 = &\,11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6\\
&- 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6\\
&- 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2.
\end{aligned}
$$

Body $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spĺňajúce uvedené rovnice určujú obálku z príkladu 1.6. Je to rovnaká krivka ako na obr. 1.7.