

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH  
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024

BC. JANA TUTKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH  
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Počítačová grafika a geometria  
Študijný odbor: 1113 Matematika  
Školiace pracovisko: Katedra algebry a geometrie  
Školiteľ: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Bratislava, 2024  
Bc. Jana Tutková



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Jana Tutková  
**Študijný program:** počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Obálka systému plôch  
*Envelope of a system of surfaces*

**Anotácia:** Cieľom práce je študovať základné vlastnosti obálky systému plôch. Zameriame sa na jednoparametrické systémy kvadrík v trojrozmernom priestore. Okrem teoretických podkladov očakávame aj numerické experimenty a príklady postupov. Načrtujeme aplikácie, v ktorých sa obálky používajú.

**Cieľ:** Študovať a opísať niektoré vlastnosti obálky systému kvadratických plôch.

**Literatúra:** do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Dover Publications Inc., 2017  
Pottmann, Wallner: Computational Line Geometry, Springer, 2001

**Kľúčové slová:** obálka plôch, systém kvadratických plôch

**Vedúci:** doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie  
**Vedúci katedry:** doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

**Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:** prípustná pre vlastnú VŠ

**Dátum zadania:** 13.12.2022

**Dátum schválenia:** 14.12.2022

doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce



**Pod'akovanie:** Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať môjmu školiteľovi doc. RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD. za odborné vedenie diplomovej práce, cenné rady, pripomienky a čas strávený na konzultáciách.

## Abstrakt

Tutková J., Bc. Obálka systému plôch. Univerzita Komenského v Bratislava. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra algebry a geometrie. Bratislava, 2024.

Táto práca sa zaoberá výpočtom obálky jednoparametrického systému elíps v  $\mathbb{R}^2$  a elipsoidov v  $\mathbb{R}^3$ , pričom elipsy a elipsoidy sú konštantne škálované faktorom  $a$  v dotykovom smere krivky  $m(t)$  a faktorom  $b$  v ostatných smeroch krivky. Výpočet je založený na známej teórii obálky jednoparametrického systému sfér v  $\mathbb{R}^3$ . Na určenie obálky využijeme symbolické a numerické výpočty v programovacom prostredí Python a vypočítané plochy vizualizujeme v 3D modelovacom softvéri Blender.

**Kľúčové slová:** obálka plôch, systém kvadratických plôch

# Abstract

Tutková J., Bc. Envelope of a system of surfaces. Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Algebra and Geometry. Bratislava, 2024.

This thesis deals with the computation of the envelope of a one-parameter system of ellipses in  $\mathbb{R}^2$  and ellipsoids in  $\mathbb{R}^3$ , where these ellipses are scaled by a constant factor  $a$  in the tangent direction of the curve  $m(t)$  and by a factor  $b$  in the other directions of the curve. The computation is based on known theory of envelopes of a one-parameter system of spheres in  $\mathbb{R}^3$ . To determine the envelope, we use symbolic and numerical calculations in the Python programming environment and visualize the calculated surfaces in the 3D modeling software Blender.

**Keywords:** envelope of surfaces, system of surfaces





# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Prehľad problematiky</b>	<b>3</b>
1.1 Aplikácie obálok . . . . .	3
1.2 Jednparametrický systém . . . . .	5
1.3 Obálka jednparametrického systému nadplôch . . . . .	7
1.4 Výpočet obálky . . . . .	13
1.4.1 Prístup algebraickej geometrie . . . . .	13
1.4.2 Prístup projektívnej geometrie . . . . .	15
1.4.3 Kinematický prístup . . . . .	16
1.4.4 Obálky a ODR . . . . .	17
1.4.5 Lokálne prieniky . . . . .	18
1.5 Obálka sfér . . . . .	20
1.6 Charakteristická kružnica . . . . .	20
<b>2 Matematický model</b>	<b>23</b>
2.1 Obálka sfér . . . . .	23
2.2 Obálka elipsoidov . . . . .	24
2.3 Obálka elíps . . . . .	25
2.3.1 Zmena bázy . . . . .	25
2.3.2 Výpočet obálky elíps . . . . .	26
2.4 Obálka elipsoidov . . . . .	27
<b>3 Softvér</b>	<b>29</b>
3.1 Špecifikácia . . . . .	29
3.1.1 Požiadavky . . . . .	29
3.2 Výber softvéru a jeho inštalácia . . . . .	31
3.2.1 Blender . . . . .	32
3.2.2 Python . . . . .	32
3.2.3 Knižnice . . . . .	32
3.2.4 Programovacie prostredie . . . . .	33

3.2.5	Inštalácia knižníc . . . . .	34
3.3	Implementácia . . . . .	35
3.4	3D tlač . . . . .	35
3.4.1	PrusaSlicer . . . . .	35
3.4.2	Pronterface . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Výsledky práce</b>	<b>37</b>
	<b>Príloha A</b>	<b>45</b>
	<b>Príloha B</b>	<b>49</b>
4.1	Euklidovská teória kvadratických foriem a krivky 2. rádu . . . . .	49
4.1.1	Invarianty kriviek 2. rádu . . . . .	49

# Zoznam obrázkov

1.1	Hudobné divadlo a výstavná sieň. . . . .	4
1.2	Webbov most. . . . .	5
1.3	Systém kružníc. . . . .	6
1.4	Zobrazenie prvkov systému. . . . .	7
1.5	Sústredné kružnice. . . . .	10
1.6	Obálka systému podľa charakterizácie. . . . .	11
1.7	Obálka systému podľa definície. . . . .	11
1.8	Systém elíps. . . . .	12
1.9	Obálka vypočítaná rezultantom. . . . .	14
1.10	Systém priamok v normálovom tvare. . . . .	17
1.11	Regulárne riešenia a obálka. . . . .	18
1.12	Technika rolling ball blends. . . . .	22



# Zoznam tabuliek



# Úvod





# Kapitola 1

## Prehľad problematiky

### 1.1 Aplikácie obálok

#### Architektúra

Projekt hudobného divadla a koncertnej sály v Tbilisi sa nachádza v Rhike Park v gruzínskom Tbilisi. Budovu tvoria dve spojené časti, pôsobiace ako obrovské kovové rúry, ktoré rámujú výhľad na rieku Kura a staré mesto. Súčasťou severnej časti budovy je sála hudobného divadla s 566 miestami na sedenie, foyer a technické priestory. Výstavná hala disponuje veľkým vstupom pre návštevníkov.

Vzhľadom na výskyt obálok v aplikáciách sa obálkam venuje veľká pozornosť. Stručne spomenieme niektoré aplikácie a odkážeme na literatúru.

Výpočet obálky pohybujúcej sa plochy sa vyskytuje pri simulácii a CNC obrábaní. CNC obrábanie (*Computer Numerical Control machining*) je výrobný subtraktívny proces, pri ktorom počítač riadi stroje, napríklad vŕtačky, frézy a sústruhy tak, aby neustále odlamovali nadbytočnosti z obrobku. Tento postup sa vykonáva, kým sa nevytvorí požadovaný tvar. Rezný nástroj vytvára pri rýchlom otáčavom pohybe okolo svojej osi rotačnú plochu. Takto vytvorená plocha je časť obálky pohybujúceho sa nástroja. CNC frézovanie má široké priemyselné využitie v odvetviach ako letecký priemysel, zdravotníctvo a spotrebná elektronika. V článku [33] sa možno dočítať viac o výpočte obálok pri 5-osovom CNC obrábaní.

Obálky sa používajú aj na výpočet trajektórie projektilu vo vzduchu. Riešime klasický problém pohybu hmotného bodu (projektilu) vrhaného pod uhlom k horizontu. S nulovou silou odporu vzduchu je analytické riešenie dobre známe, trajektória projektilu je parabola. So zohľadnením odporu vzduchu úloha nemá presné analytické riešenie, a preto sa vo väčšine prípadov rieši numericky. Silu odporu vzduchu berieme do úvahy s konštantným členom odporu. Systém trajektórií vzniká pri vrhnutí projektilu s rovnakou počiatočnou rýchlosťou, ale s rôznymi uhlami hodu. Na určenie maximálneho rozsahu letu projektilu sa tak použije rovnica obálky [12].



Obr. 1.1: Hudobné divadlo a výstavná sieň. [39]

Medzi ďalšie aplikácie obálok patrí tollerancing – krivka s kontrolou chyby, bezkolízne plánovanie pohybu robota – uvažujeme o konvexných kompaktných krivkách reprezentujúcich pohyb robota v rovine, ktorý mení svoj lokálny tvar pomocou systému afinných transformácií. Dizajn písma – konštrukcia znakov v písmach pre typografické systémy. O ďalších aplikáciach sa čitateľ dozvie v [24].

Kanálové plochy (*channel surfaces*), rúrkové plochy/potrubia (*pipe surfaces*), *rolling ball blends* a prirodzené kanálové plochy (*natural channel surfaces*) sa vyskytujú ako zmiešavacie povrchy a prechodové plochy medzi potrubiami. Kanálové plochy sú používané v počítačom podporovanom geometrickom dizajne (*Computer Aided Geometric Design*). V ďalšom texte si ukážeme ich konštrukciu ako obálku sfér.

Obálky - kanálové plochy sa využívajú aj v architektúre. Ako príklad uvádzame Webbov most (*Webb Bridge*), obr. 1.2 v Melbourne v Austrálii. Tvar mosta vzdáva hold histórii domorodého obyvateľstva a je vytvorený podľa tradičnej rybárskej pasce Koorie, ktorá sa používala na lov úhorov.





Obr. 1.2: Webbov most. [37]

## 1.2 Jednparametrický systém

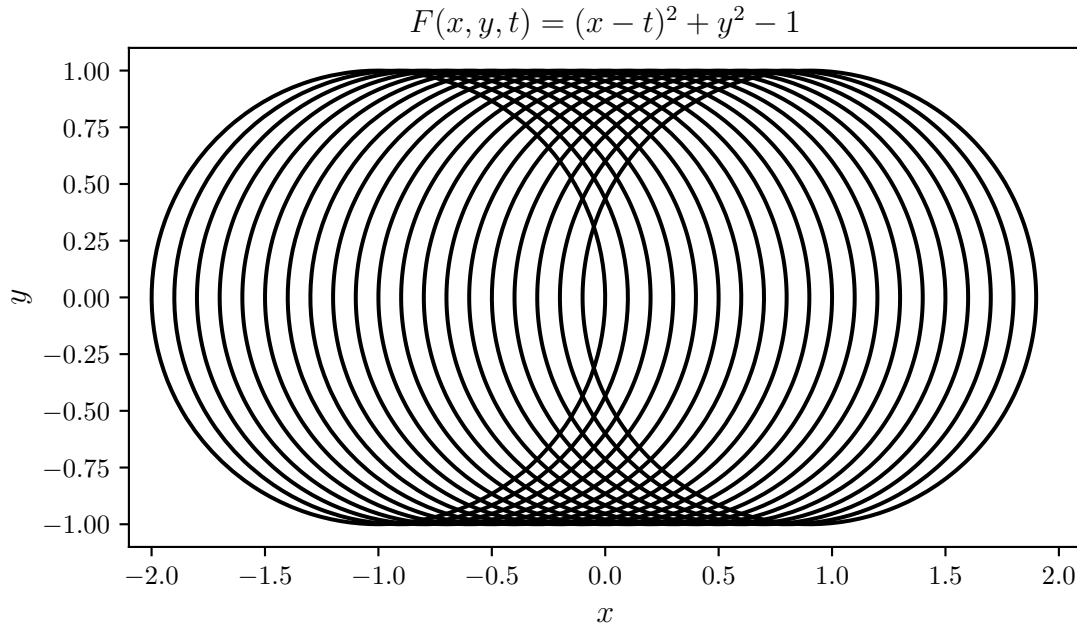
Ak nakreslíme kružnice so stredom na x-ovej osi s polomerom 1, ako na obrázku, pohľad nám upútajú horizontálne priamky  $y = \pm 1$  idúce ponad a popod systém kružníc.

Každá z týchto priamok sa dotýka každej kružnice v jednom bode a v tomto bode majú spoločnú dotyčnicu. V nasledovnom texte túto myšlienku matematicky opíšeme, na základe nej zostrojíme tzv. obálku systému kriviek alebo plôch a porovnáme prístupy ich výpočtu. Budeme pracovať v reálnom vektorovom priestore so štandardným skalárnym súčinom, teda v euklidovskom priestore, rozmeru  $n = 2, 3$ . Najprv ilustrujeme príklady obálok a ich výpočet pre  $n = 2$ , neskôr pre  $n = 3$ . Po celý čas predpokladáme, že všetky zobrazenia sú dostatočne veľakrát diferencovateľné. Tučným písmom značíme vektorovú funkciu a parametre pre prehľadnosť zápisov vynechávame, ak sú z kontextu zrejmé.

Vo všeobecnosti, začneme v  $\mathbb{R}^2$  s jednparametrickým systémom kriviek daným funkciou, v  $\mathbb{R}^3$  máme jednparametrický systém plôch.

**Definícia 1.1.** *Nech  $F: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia v premenných  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a v parametri  $t$ , kde  $I \subseteq \mathbb{R}$  je interval. Definujeme jednparametrický systém nadplôch ako systém množín*

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0, t \in I\}.$$



Obr. 1.3: Systém kružníc.

V  $n = 2$  budeme pre lepšiu prehľadnosť značiť premenné  $x_1, x_2$  ako  $x, y$ , pre  $n = 3$  pribudne  $x_3$  ako  $z$ . Pre lepšiu prehľadnosť neskôr označíme dvojicu  $(x, y)$  alebo trojicu  $(x, y, z)$  ako  $X$ , potom  $\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid F(X, t) = 0, t \in I\}$ .

Pre horeuvedený prípad teda máme jednoparameterický systém kružníc so stredmi kružníc, ktoré ležia na úsečke parametrizovanej  $(t, 0)$  pre  $t \in [-1, 1]$  a konštantným polomerom pre každú kružnicu  $r = 1$  daný implicitnou funkciou

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, t) = 0, t \in [-1, 1]\},$$

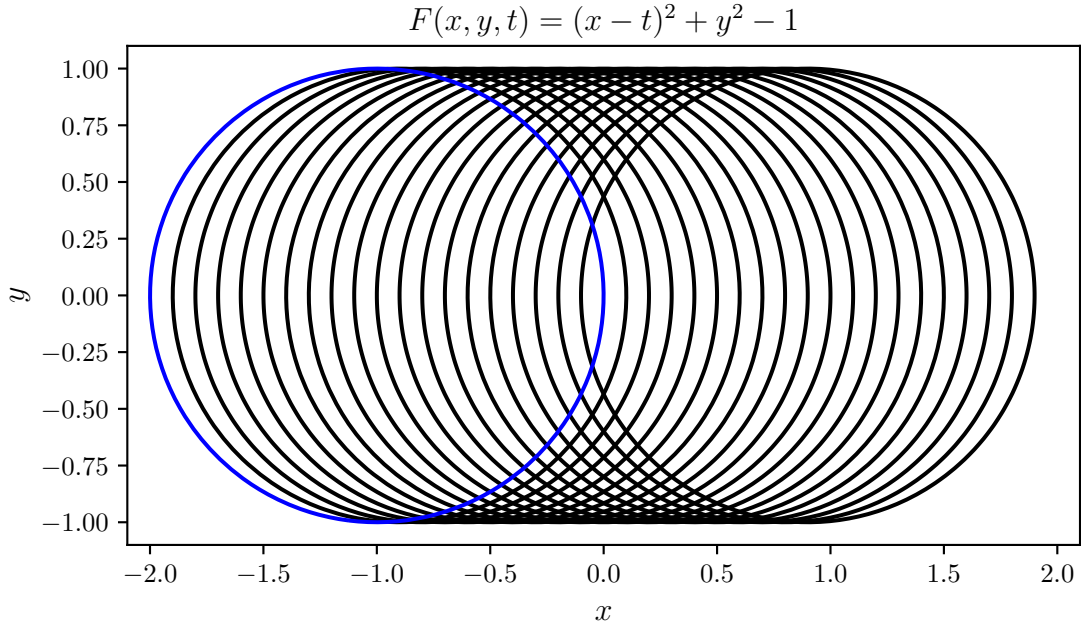
kde

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1.$$

Systém budeme ilustrovať zobrazením niektorých prvkov systému pre diskkrétne hodnoty parametra  $t$ . Pre  $t = -1$  je zodpovedajúci prvok systému  $\mathcal{F}_{-1} \in \mathcal{F}$  kružnica s implicitnou rovnicou

$$F_{-1}(x, y) = F(x, y, -1) = (x + 1)^2 + y^2 - 1.$$

Často budeme pre pevný parameter  $t_0$  označovať prislúchajúcu rovnicu  $F_{t_0}(X)$  a množinu bodov, ktoré rovnicu spĺňajú označíme  $\mathcal{F}_{t_0}$ .



Obr. 1.4: Modrou farbou je vyznačená kružnica systému v parametri  $t = -1$ .

### 1.3 Obálka jednoparametrického systému nadplôch

Najskôr definujeme obálku jednoparametrického systému kriviek v  $\mathbb{R}^2$ . Uvedieme charakterizáciu obálok, ktorú možno použiť na výpočet pre jednoduchšie jednoparametrické systémy. Následne túto charakterizáciu použijeme ako definíciu pre obálku jednoparametrického systému plôch v  $\mathbb{R}^n$ .

**Definícia 1.2.** Definujme gradient funkcie  $F: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$  vzhľadom na  $x$  a  $y$  ako

$$\nabla F(x, y, t) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t) \right).$$

Predpokladáme, že  $\nabla F(x, y, t) \neq \vec{0}$ .

**Definícia 1.3.** Obálkou systému kriviek  $\mathcal{F}$  je parametrizovaná krivka  $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$  taká, že

1.  $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$  pre všetky  $t \in J$ ,
2.  $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$ .

Obálka  $\gamma(t)$  sa dotýka každej krivky zo systému  $F(x, y, t)$  v bode  $(x, y)$  pre nejaké  $t$  a v tomto bode má s krivkou zo systému rovnakú dotyčnicu. To znamená, že každý bod obálky  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  spĺňa rovnicu systému  $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$  pre nejaké  $t$ , a teda platí prvá podmienka  $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$ . Gradient funkcie  $\nabla F(x, y, t)$  je normálový vektor k  $F(x, y, t)$  v regulárnom bode  $(x, y)$  a parametri  $t$ . V spoločnom bode  $(x, y)$  a parametri

$t$  chceme rovnaký smer dotykového vektora pre  $\gamma(t)$  a  $F(x, y, t)$ , z čoho vyplýva, že  $\dot{\gamma}(t)$  a dotykový vektor k funkcii  $F(x, y, t)$  sú lineárne závislé, z čoho dostávame  $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$ , druhú podmienku v definícii obálky. Interval  $J$ , na ktorom dostávame výslednú obálku môže byť menší ako interval  $I$ , na ktorom bol definovaný systém kriviek, teda máme  $J \subseteq I$ . Ak by bol gradient  $\nabla F(x, y, t)$  v nejakom bode nulový, nevieme nájsť jednoznačne dotykový vektor obálky a systému.

**Veta 1.1.** *Regulárna krivka  $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$  kde  $t \in J \subseteq I$  je obálkou jednoparametrického systému  $\mathcal{F}$  práve vtedy, keď spĺňa:*

1.  $F(\gamma(t), t) = 0$ ,
2.  $\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0$ .

*Dôkaz.* Táto odlišná charakterizácia je ekvivalentná definícii, ktorú sme postavili na geometrických podmienkach. Stačí zistiť korešpondenciu podmienok.

1. Ako sme už vysvetlili, každý bod obálky  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  spĺňa rovnicu jednoparametrického systému  $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$  pre nejaké  $t$ , teda podmienky

$$F(\gamma(t), t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$$

a

$$\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$$

sú ekvivalentné.

2. Derivujme  $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$  podľa parametra  $t$ , kde  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot 1 = 0.$$

Nakoľko požadujeme, aby gradient funkcie  $\nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$  bol kolmý na  $\dot{\gamma}(t)$  tak

$$\langle \nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

teda platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) = 0,$$

z čoho dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0.$$

□

Obálka sa počíta riešením rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

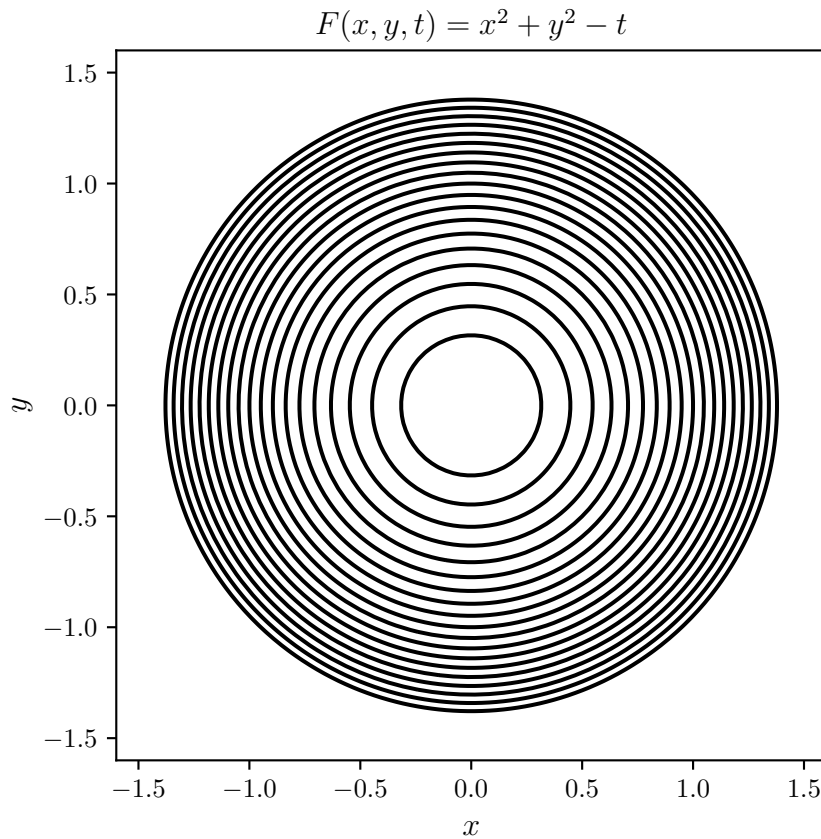
Často sa v literatúre môžeme stretnúť s rôznymi opismi obálky, ktoré však bez ďalších predpokladov nemusia definovať rovnakú množinu bodov. Príkladom je ďalšia charakterizácia obálky ako množiny limitných bodov prienikov kriviek systému. Vzťahy medzi jednotlivými charakterizáciami možno nájsť v [6].

Dokonca, daný systém nemusí mať obálku. Príkladom sú sústredné kružnice s rastúcim polomerom.

**Príklad 1.** Obálku systému sústredných kružníc pre  $t \in I = [\frac{1}{10}, 2]$  rátame ako systém rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= x^2 + y^2 - t, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= -1. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice máme  $t = -1 \neq 0$ , teda systém nemá riešenie. Aj keď by sa nám mohlo zdať, že by obálkou mohli byť body kružnice s najväčším polomerom  $\mathcal{F}_2$  a kružnice s najmenším polomerom  $\mathcal{F}_{\frac{1}{10}}$ , práve podmienka existencie takej krivky  $\gamma(t)$ , ktorá by patrila do systému kružníc  $\mathcal{F}$  pre všetky  $t$  z intervalu  $J \subseteq I$ , nie je splnená.



Obr. 1.5: Sústredné kružnice.

Prístup, ktorý sme využili pre jednoparametrický systém kriviek, možno zovšeobecniť pre ľubovoľný jednoparametrický systém plôch v  $\mathbb{R}^n$ .

**Definícia 1.4. (Charakterizácia.)** *Obálkou jednoparametrického systému plôch  $\mathcal{F}$  je množina bodov  $\mathcal{E}$  daná*

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \mid F(X, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = 0\}.$$

Ak by sme chápali obálku podľa definície ako množinu bodov, problém by sme mohli riešiť ako systém nelineárnych rovníc v parametri  $t$ , kde chceme z rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

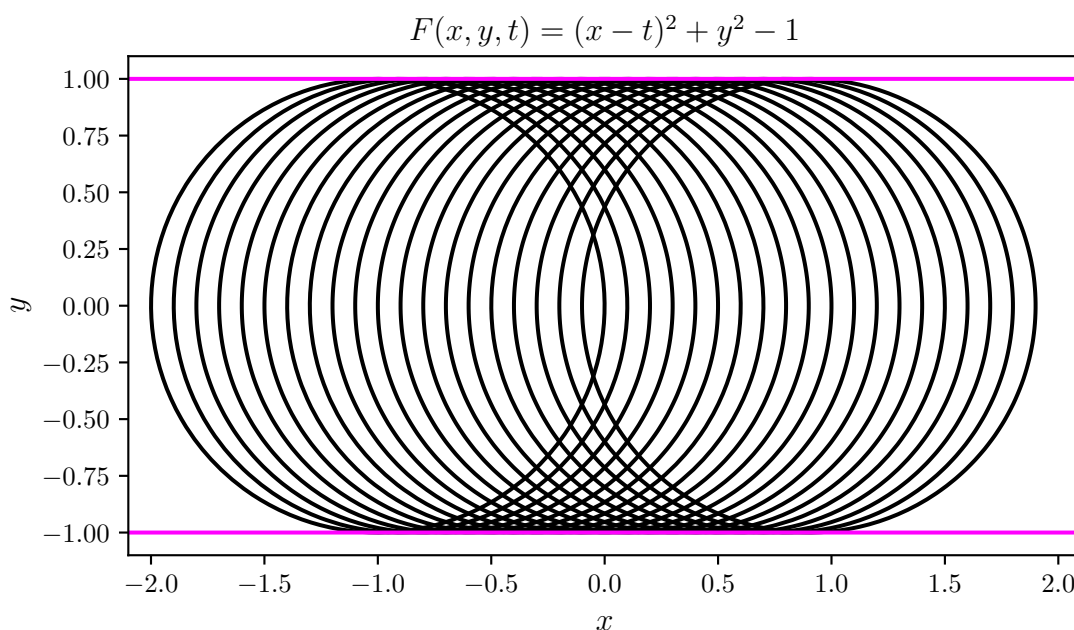
eliminovať  $t$ . Na riešenie nelineárneho systému dvoch rovníc síce existujú pokročilé nástroje, no eliminovaním parametra  $t$  strácame informáciu o tom, kde je obálka definovaná.

**Príklad 2.** Pre náš príklad  $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$  máme

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2(t - x) = 0.$$

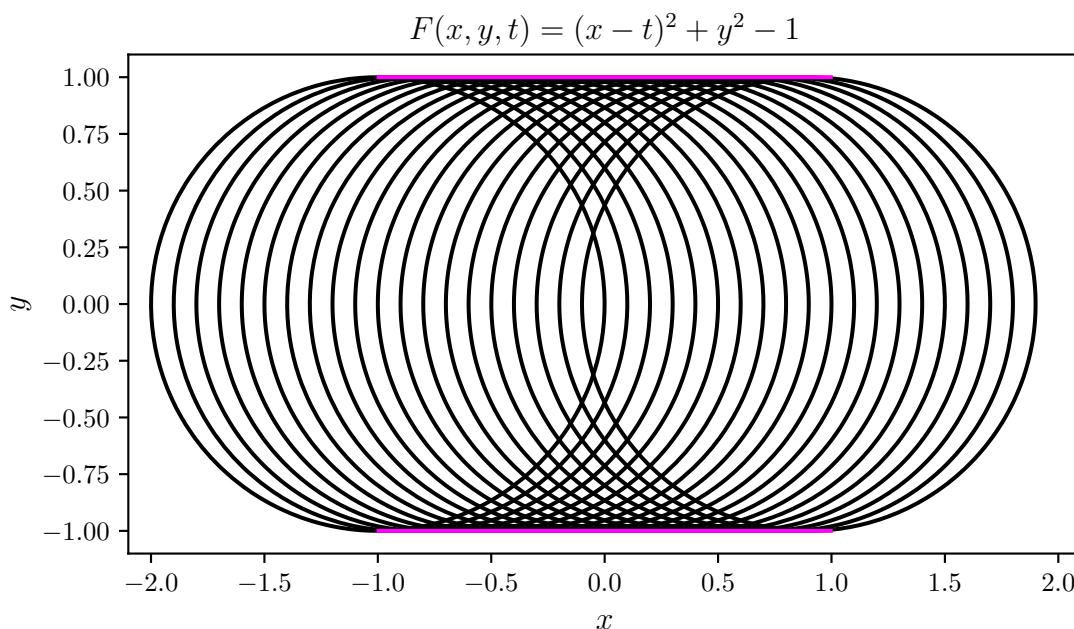


Ak  $t = x$ , tak  $y^2 = 1$ . Teda obálka je podľa tejto charakterizácie  $y = \pm 1$ , ako sme očakávali.



Obr. 1.6: Obálka systému podľa charakterizácie.

V skutočnosti sú obálkou úsečky  $y = \pm 1$  definované na intervale  $[-1, 1]$ .



Obr. 1.7: Obálka systému podľa definície.

Tento problém možno ošetriť tak, že budeme uvažovať systémy kriviek, ktoré sú v parametri  $t$  definované na celej reálnej priamke  $\mathbb{R}$ .

**Príklad 3.** Počítajme obálku systému kriviek, znázorneného na obrázku 1.8, ktorý je daný vzťahmi

$$F(x, y, t) = \frac{x^2}{(t^2 + 1)^2} + (y - 2t)^2 - 1,$$

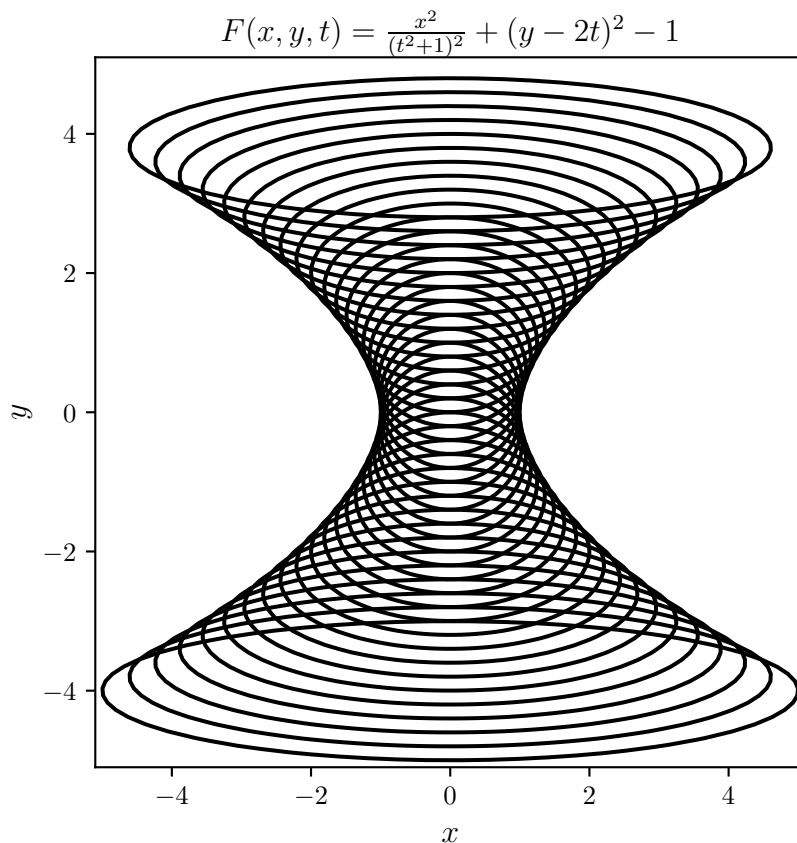
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{4x^2 t}{(t^2 + 1)^3} - 4(y - 2t).$$

Vynásobením prvej rovnice  $\lambda(t) = (t^2 + 1)^2$  a derivovaním získavame

$$F^\lambda = 4t^6 - 4t^5 y + t^4 y^2 + 7t^4 - 8t^3 y + 2t^2 y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,$$

$$F_t^\lambda = 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2 t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2 t + 4t - 4y.$$

Na obrázku 1.8 je znázornený tento systém elíps pre  $t \in [-2, 2]$  s krokom  $\Delta t = 0.1$ . Obálku nájdeme ako riešenie rovníc  $F^\lambda \cap F_t^\lambda$ . Rovnice sú však príliš vysokého stupňa v parametri  $t$ , preto nevieme implicitnú rovnicu obálky bez vhodného nástroja vyjadriť. V ďalšej časti rozoberieme prístupy výpočtu.



Obr. 1.8: Systém elíps.

## 1.4 Výpočet obálky

Vo väčšine prípadov sú rovnice charakterizujúce obálku systému plôch príliš vysokého stupňa v parametri  $t$  a nedokážeme z nich ľahko odvodiť rovnicu obálky, preto pristupujeme aj k numerickým riešeniam. Spoľahlivá aproximácia obálky je jednou z aktuálnych výskumných tém. Na začiatok si však rozoberme existujúce analytické prístupy. Naledujúce prístupy sú prevzaté z [35].

### 1.4.1 Prístup algebraickej geometrie

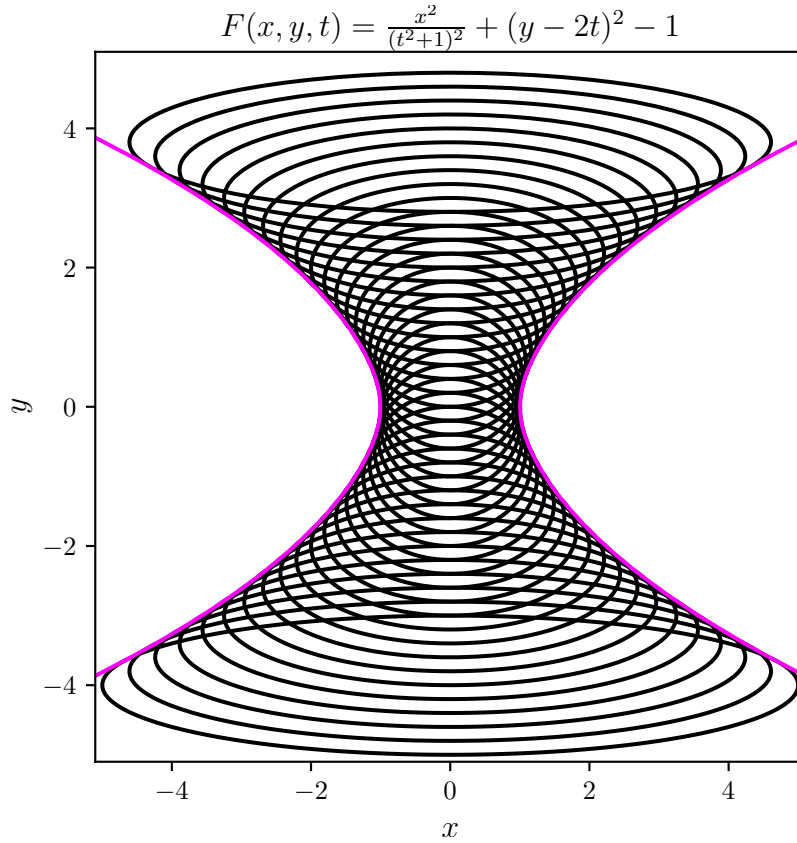
Dokonca aj v prípade jednoduchého príkladu ako 3, obe polynomicke rovnice charakterizujúce obálku sú vysokého stupňa v parametri  $t$ , preto je odstránenie parametera  $t$  náročné bez vhodného nástroja. Štandardným aparátom na túto úlohu sú Gröbnerove bázy. Gröbnerove bázy sú kľúčovým pojmom v algebraickej geometrii a počítačovej algebre. Ide o špeciálnu množinu polynómov vo viacerých premenných, ktoré majú niekoľko dôležitých vlastností a zohrávajú kľúčovú úlohu pri riešení rôznych matematických problémoch vrátane riešenia sústav polynomických rovníc, zjednodušovania polynómov a dokazovania rôznych algebraických tvrdení. Vybudovanie tejto teórie je pomerne zdĺhavé, preto odkážeme na bohaté teoretické pozadie v [11]. Najprv vypočítame Gröbnerovu bázu Buchbergerovým algoritmom pre ideál generovaný sústavou polynomických rovníc, ktorá obsahuje všetky premenné vrátane tej, ktorú chceme eliminovať. Z Gröbnerovej bázy vyberieme polynómy, ktoré obsahujú premennú, ktorú chceme eliminovať. Tieto polynómy použijeme na vyjadrenie tejto premennej v závislosti od ostatných premenných. Po vyriešení nových rovníc získame výraz, ktorý opisuje vzťah medzi zvyšnými premennými a eliminovanou premennou. Týmto spôsobom úspešne eliminujeme premennú. Pokúsme sa vypočítať Gröbnerovu bázu príkladu 3 vzhľadom na lexikografické usporiadanie monómov  $t > x > y$ . Keďže výpočet Gröbnerovej bázy trvá pomerne dlho, neuvádzame postup a výsledok možno nájsť v prílohe 4.

Gröbnerova báza vzhľadom na iné usporiadanie, napr. grevlex je zvyčajne vypočítaná oveľa rýchlejšie a jej polynómy majú krajšie koeficienty, no na druhej strane, tento prístup nie je vo všeobecnosti možné použiť na odstránenie premennej  $t$  z rovníc.

Existujú aj iné metódy na riešenie polynomických rovníc, ktoré nie sú závislé na usporiadaní monómov. Spôsob, ako nájsť polynóm, ktorý leží v prvom eliminačnom ideáli, ktorý je nezávislý na Gröbnerovej báze a monómických usporiadaniach, využíva teóriu resultantov. Resultant je determinant matice polynómov.

Hoci výpočet determinantov veľkých matic je výpočtovo aj časovo náročný problém, existujú metódy, ako vypočítať determinant efektívnejšie. V príklade 3 uvedieme výsledný polynóm  $Res(F^\lambda, F_t^\lambda, t)$  a ukážeme obálku nájdenu resultantom, pozri 1.9.

$$\begin{aligned} \text{Res}(F^\lambda, F_t^\lambda, t) = & 191102976x^{10} + 262144x^8y^6 - 9584640x^8y^4 + 83165184x^8y^2 - \\ & 633470976x^8 - 16384x^6y^{10} - 81920x^6y^8 - 14483456x^6y^6 - 113311744x^6y^4 + 96419840x^6y^2 + \\ & 698368000x^6 - 16384x^4y^{12} - 294912x^4y^{10} - 2998272x^4y^8 - 18284544x^4y^6 - 74956800x^4y^4 - \\ & 184320000x^4y^2 - 256000000x^4. \end{aligned}$$



Obr. 1.9: Obálka vypočítaná rezultantom.

Navyše táto metóda, rovnako ako metóda založená na eliminačnej teórii s použitím Gröbnerových báz, nám vypočíta správnu obálku len vtedy, ak uvažujeme parameter  $t$  jednoparametrického systému z celej reálnej priamky. Ak obmedzíme oblasť parametra na interval, tak obálka zvyčajne nemôže byť daná implicitnou rovnicou, a preto je potrebné nájsť nejakú parametrizáciu obálky.

Pri použití rezultantov máme lepšiu kontrolu nad zložitou výpočtu. Pre dané dva polynómy totiž vieme, ako sa konštruuje rezultant, a tak vieme odhadnúť, s akými veľkými polynómami sa bude počas výpočtu manipulovať, avšak pri hľadaní Gröbnerovej bázy je ťažké odhadnúť, aké zložité S-polynómy sa behom algoritmu vyskytnú. Nie je zriedkavosťou, že S-polynómy sú podstatne komplikovanejšie než vstupné polynómy a výsledná Gröbnerova báza.

### 1.4.2 Prístup projektívnej geometrie

Body duálneho projektívneho priestoru  $\mathbb{P}^3$  možno stotožniť s nadrovinami v  $\mathbb{R}^3$ . Plochu v duálnom projektívnom priestore možno teda interpretovať ako množinu všetkých jej dotykových nadrovín. Pomocou duálneho prístupu sa dá dokázať, že obálky jednoparametrických systémov sú racionálne pre racionálne vstupné údaje. Potrebné teoretické pozadie možno nájsť v [26], z čoho čerpajú články s mnohými výsledkami [21], [22] a príklady pre výpočet obálky možno nájsť v [35].

**Príklad 4.** Uvažujme dva systémy kružníc  $\mathcal{F}$  s konštantným polomerom  $\frac{1}{2}$  a  $\mathcal{G}$  s funkciou polomeru  $\frac{t}{2}$ , ktorých stredy ležia na rovinnej krivke  $m(t) = (t^3, t^2)$ , kde  $t \in \mathbb{R}$ . So systémom

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{1}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}.$$

korešponduje v cyklografickom modeli krivka  $m_1 = (t^3, t^2, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^3$ . Pre

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{t^2}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}$$

máme v cyklografickom modeli krivku  $m_2(t) = (t^3, t^2, \frac{t}{2})$ . Kružnice korešpondujúce s  $t < 0$  sú negatívne orientované a orientácia sa mení pre kružnice korešpondujúce s  $t > 0$ . Pre  $t = 0$  je prvok  $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$  bod  $(0, 0) \in m(t)$ , čo je kružnica s nulovým polomerom a bez určenej orientácie. Krivka  $m(t)$  je ortogonálna projekcia oboch kriviek  $m_1$  a  $m_2$  a často sa nazýva stredná os (*medial axis*) jednoparametrického systému. Pozrite si obrázok pre krivky  $m_1, m_2 \subset \mathbb{R}^3$ , jednoparametrické systémy  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{G}$  rovinných kružníc a ich stredné osy.

Rovnakým spôsobom môžeme definovať jednoparametrický systém sfér v  $\mathbb{R}^3$  ako obraz kriviek v  $\mathbb{R}^4$ . Jedným z dôležitých výsledkov je, že pomocou cyklografického zobrazenia racionálnej krivky možno rozhodnúť o reálnosti obálky a to tak, že cyklografický obraz  $m(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  má reálnu obálku práve vtedy, keď pre všetky  $t \in I$  platí

$$\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle \geq 0$$

a rovnosť platí len pre izolované hodnoty  $t$ , kde za skalárny súčin vezmeme pseudo-skalárny súčin vyjadrený ako  $\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle = m_1^2(t) + m_2^2(t) + \dots + m_n^2(t) - m_{n+1}^2(t)$ .

Pre príklad tak 4 máme

$$\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle = 9t^4 - 4t^2 = t^2(9t^2 - 4) \geq 0, \text{ pre } t \in I = \mathbb{R} \setminus \{[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]\},$$

preto na tomto intervale existuje reálna obálka.

### 1.4.3 Kinematický prístup

Ďalším zo spôsobov, ako chápať jednoparametrické systémy plôch v  $\mathbb{R}^n$  je pozeráť sa na ne ako na množinu všetkých transformácií daného povrchu  $\mathcal{P}$ . Povrch  $\mathcal{P}$  sa transformuje na ostatné prvky systému prostredníctvom prvkov vhodnej grupy transformácií. Táto množina transformácií má okrem štruktúry grupy aj štruktúru hladkej variety (*smooth manifold*). Tieto grupy nazývame Lieove grupy.

**Príklad 5.** Ilustrujme tento postup na jednoduchom rovinnom príklade. Transformujme zobrazením  $g_t$  priamku  $l$ , kde pre každé  $t \in \mathbb{R}$ , zodpovedá  $g_t$  rotácii.

$$\begin{aligned} l: x(u) &= 1 \\ y(u) &= u \end{aligned}$$

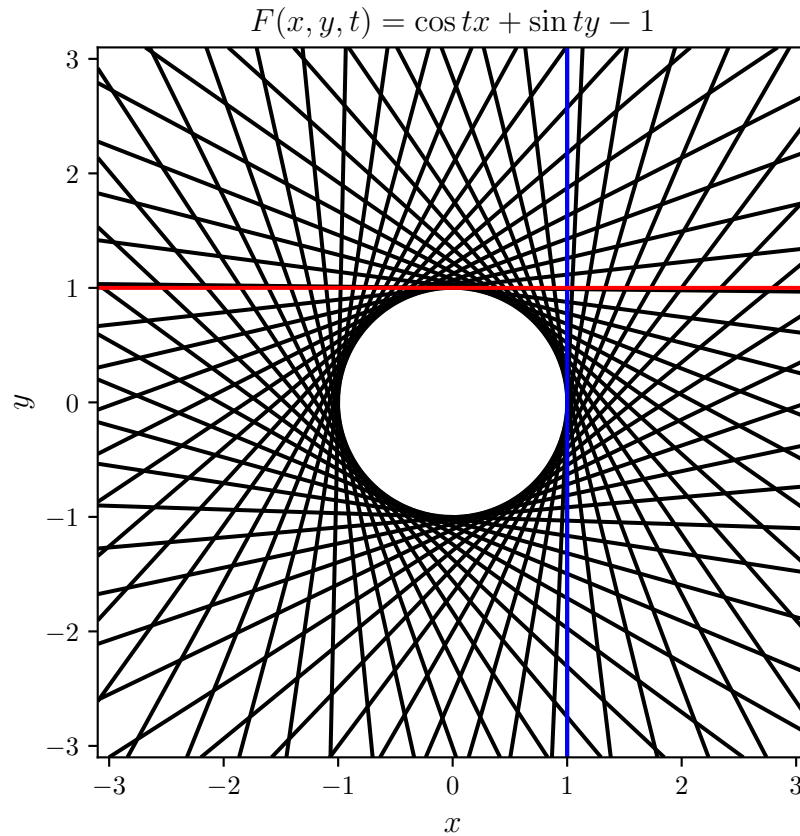
Vo všeobecnosti

$$g_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Grupa všetkých rotácií je  $SO(n)$  a nazýva sa špeciálna ortogonálna grupa. Pre  $t = 0$ , dostávame priamku  $l$ . Pre iné  $t$ , napríklad  $t = \frac{\pi}{2}$ , dostávame priamku

$$\begin{aligned} g_t(l): x(u) &= -u \\ y(u) &= 1. \end{aligned}$$

Na obrázku 1.10 je znázornená priamka  $l$  modrou farbou, transformovaná priamka  $g_t(l)$  červenou farbou.



Obr. 1.10: Systém priamok v normálovom tvare.

Transformácie  $g_t$  z príkladu sú prvkami Lieovej grupy  $SO(n)$ . Ďalšie známe príklady maticových Lieových grúp sú ortogonálna grupa  $O(n)$ , unitárna  $U(n)$  a špeciálna unitárna grupa  $SU(n)$ . Pre nájdenie podrobnejších informácií, sa môže čitateľ obrátiť na ľubovoľnú úvodnú učebnicu o Lieových grupách a Lieových algebrách, ako je napríklad [16]. Použili sme štruktúru Lieovej grupy, aby sme opísali, ako sa grupa transformuje daný povrch. Ďalej, využijúc štruktúru hladkej variety môžeme opísať jednoparametrický systém plôch výlučne pomocou terminológie Lieových grúp. Táto teória sa aplikuje na nájdenie parametrizácie obálok kvadratických plôch. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [35].

#### 1.4.4 Obálky a ODR

Obálky súvisia aj so štúdiom obyčajných diferenciálnych rovníc, a najmä ich singulárnych riešení. Predpokladajme, že jednoparametrický systém kriviek  $\mathcal{F}$  je riešením nejakej diferenciálnej rovnice prvého rádu. Potom môže existovať aj ďalšia krivka spĺňajúca túto diferenciálnu rovnicu, ktorá je dotyčnicou k  $\mathcal{F}$  v každom bode. Táto krivka je obálka. V literatúre sa nazýva aj singulárne riešenie diferenciálnej rovnice. Uvažujme ODR

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Jej regulárnym riešením sú integrálne krivky

$$y = -t^2 + 2tx, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Riešenie môžeme reprezentovať ako jednoparametrický systém kriviek  $\mathcal{F}$  s funkciou

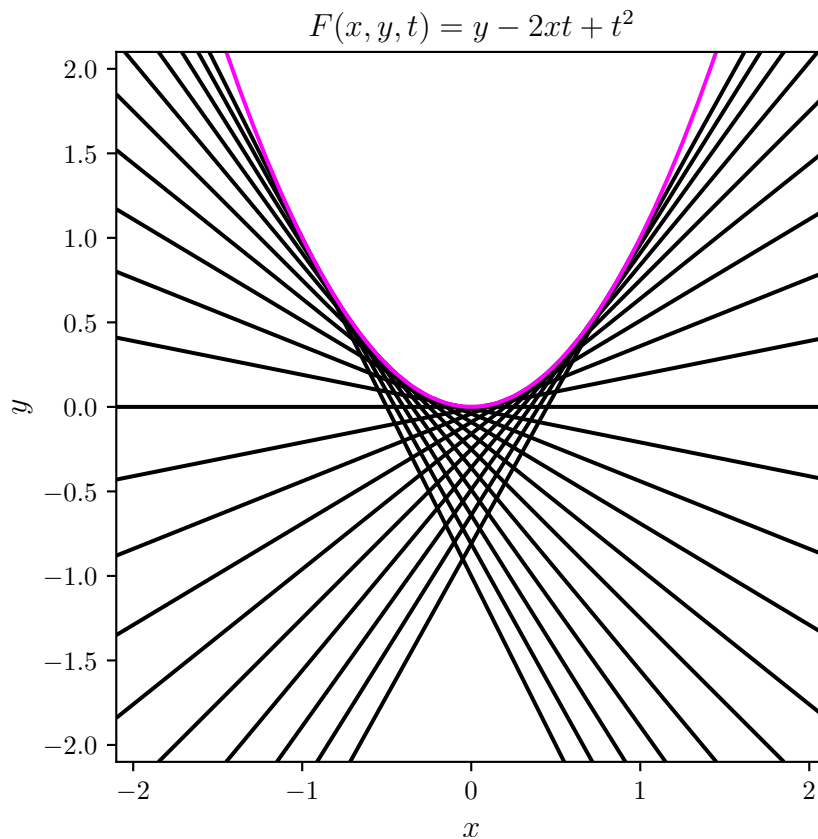
$$F(x, y, t) = t^2 - 2tx + y.$$

Derivovaním podľa parametra  $t$  dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2t - 2x,$$

z čoho máme  $t = x$  a dosadením do funkcie máme  $F = -x^2 + y$ , teda obálka je  $y = x^2$ .

Obálka tohto jednoparametrického systému priamok, ktorou je parabola  $y = x^2$ , rieši taktiež diferenciálnu rovnicu. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [9].



Obr. 1.11: Regulárne riešenia a obálka.

### 1.4.5 Lokálne prieniky

Lokálny prienik systému kriviek  $\mathcal{F}$  pozostáva z prienikov nekonečne blízkyh susedných kriviek systému. Definujme túto myšlienku formálne.



**Definícia 1.5** (Lokálny prienik). *Lokálny prienik systému  $\mathcal{F}$  je množina všetkých prienikov infinitezimálne blízkych prvkov pre všetky parametre  $t \in I$ . Označuje sa ako  $\mathcal{L}$  a platí  $\mathcal{L} := \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t$  kde*

$$\mathcal{L}_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_t \cap F_{t+\varepsilon}$$

pre nejaké pevné  $t \in I$ .

Lokálny priesečník regulárneho systému sa v mnohých prípadoch zhoduje s jeho obálkou. Ilustrujme to na nasledovnom príklade.

**Príklad 6.** Vezmime dva ľubovoľné, ale odlišné prvky systému  $F(x, y, t) = y - 2tx - t$ . Pre fixné parametre  $t_1 \neq t_2$  tak máme

$$F(x_1, y_1, t_1) = y_1 - 2t_1x_1 - t_1^2,$$

$$F(x_2, y_2, t_2) = y_2 - 2t_2x_2 - t_2^2.$$

Označme priesečník týchto dvoch priamok  $Q = (q_x, q_y)^T$ . Pre priesečník  $Q$  platí

$$F(Q, t_1) = 0 = F(Q, t_2),$$

odkiaľ vyplýva

$$(t_2 - t_1)(2q_x + t_1 + t_2) = 0.$$

Keďže podľa predpokladu  $t_1 \neq t_2$ , jediné riešenie tejto rovnice je  $q_x = -\frac{t_1 + t_2}{2}$  a priesečník je potom daný

$$Q = \left(-\frac{t_1 + t_2}{2}, -t_1 t_2\right)^T.$$

Definujme  $\varepsilon := t_2 - t_1$  a nechajme  $\varepsilon$  smerovať k nule, dostávame priesečník

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -t_1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ -t_1(t_1 + \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1^2 \end{pmatrix}.$$

Po reparametrizácii  $t_1(t) = -t$  je ľahké vidieť, že množina všetkých týchto priesečníkov  $\mathcal{L} = \{(t, -t^2) : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{E}$ , ktorá predstavuje lokálny priesečník, sa zhoduje s vypočítanou množinou bodov obálky.

**Dôsledok 1.1.** Nech je daný systém  $\mathcal{F}$ . Každý bod lokálneho priesečníka systému  $\mathcal{L}$  je aj bodom obálky systému  $\mathcal{E}$ . Teda platí

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}.$$

*Dôkaz.* Pre každý bod  $Q \in \mathcal{L}$  lokálneho prieniku systému  $\mathcal{F}$  existuje podľa definície 1.5 aspoň jedno  $t_0 \in I$ , pre ktoré  $Q \in \mathcal{L}_{t_0}$ , a teda  $Q$  patrí do prieniku nekonečne blízkych prvkov pre  $\mathcal{F}$  pre  $t_0$ , to znamená, že platí

$$F(Q, t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(Q, t_0) = 0,$$

čo je z definície 1.4 bod obálky  $\mathcal{E}$ . □

## 1.5 Obálka sfér

Označme  $X \in \mathbb{R}^3$  a predpokladajme, že  $m(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  je parametrizácia krivky a  $r(t): I \rightarrow \mathbb{R}^+$  je funkcia definovaná na tom istom intervale. Krivka  $m$  sa nazýva kostrová krivka obálky (*spine curve*) a  $r$  sa nazýva funkcia polomeru (*radius function*). Jednparametrický systém sfér  $\mathcal{S}$  je daný rovnicou

$$F(X, t) = \langle X - m(t), X - m(t) \rangle - r^2(t) = 0.$$

Podľa definície 1.4, obálku  $\mathcal{E}$  možno nájsť ako prienik systému sfér  $\mathcal{S}$  a ich derivácií  $\dot{\mathcal{S}}_t$  pre všetky  $t \in I$ . Derivácia  $\mathcal{S}$  nám dáva roviny  $\dot{\mathcal{S}}$  dané rovnicou

$$\frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = \langle \dot{m}(t), X - m(t) \rangle + r(t)\dot{r}(t) = 0.$$

Pre nájdenie obálky  $\mathcal{E}$  budeme teda hľadať prieniky sféry  $\mathcal{S}_t$  a roviny  $\dot{\mathcal{S}}_t$  pre každý parameter  $t \in I$ .

## 1.6 Charakteristická kružnica

**Definícia 1.6** (Charakteristická kružnica). *V prípade, že pre  $t \in I$  je  $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t \neq \emptyset$ , sa tento prienik nazýva sa charakteristická kružnica  $c_t$ . V prípade  $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t = \emptyset$ , pre  $t$  neexistuje žiadna charakteristická kružnica.*

**Lema 1.** *Zjednotenie všetkých charakteristických kružníc  $c_t$  jednparametrického systému sfér  $\mathcal{S}_t$  je obálka  $\mathcal{E}$  tohto systému, teda platí*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t.$$

*Dôkaz.* Nech bod  $X$  patrí do zjednotenia kružníc  $\bigcup_{t \in I} c_t$ , potom existuje aspoň jedno  $t_0 \in I$ , pre ktoré  $X \in c_{t_0}$ . Keďže  $c_{t_0} = \mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0}$ , tak sú rovnice  $\mathcal{S}_{t_0}$  a  $\dot{\mathcal{S}}_{t_0}$  splnené pre nejaké  $t_0$  a  $X$ , a preto patrí  $X$  obálke  $\mathcal{E}$ , a teda platí inklúzia  $\bigcup_{t \in I} c_t \subseteq \mathcal{E}$ .

Opačne, ak  $X$  patrí obálke  $\mathcal{E}$ , existuje podľa definície 1.4  $t_0 \in I$  také, že platí  $F(X, t_0) = 0$  a súčasne  $\frac{\partial F}{\partial t}(X, t_0) = 0$ , to znamená, že  $X$  leží v prieniku  $\mathcal{S}_{t_0} \cap \dot{\mathcal{S}}_{t_0} = c_{t_0}$  a  $c_{t_0} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$ . Preto platí inklúzia  $\mathcal{E} \subseteq \bigcup_{t \in I} c_t$ .

Týmto je rovnosť  $\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t$  dokázaná.  $\square$

Obálka sfér sa teda skladá zo systému kružníc. Charakteristická kružnica leží celá v rovine  $\dot{\mathcal{S}}_t$ , takže v tejto rovine leží aj jej stred. Dotykový vektor kostrovej krivky  $m(t)$  je kolmý na rovinu  $\dot{\mathcal{S}}_t$ , teda stred  $C_t$  charakteristickej kružnice leží na dotyčnici  $T(t, s) = m(t) + s \cdot \dot{m}(t)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , preto stred  $C_t$  nájdeme ako

$$\dot{\mathcal{S}}_t \cap T(t, s).$$

Pre parameter  $s$  potom platí  $s = \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}$ , po dosadení do  $T(t, s)$  získavame

$$C_t = m(t) - \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle} \dot{m}(t). \quad (1.1)$$

Rozoberme si nasledujúce dva prípady

- Ak je funkcia polomeru  $r(t)$  konštantná,  $\dot{r} \equiv 0$  a rovina  $\dot{\mathcal{S}}_t$  obsahuje stred sféry  $M_t$  pre všetky  $t \in I$ , v tomto prípade možno obálku  $\mathcal{E}$  považovať za posunutie (*offset*) kostrovej krivky  $m$ . Tieto obálky sú známe ako rúrkové plochy (*pipe surfaces*). Keďže rovina  $\dot{\mathcal{S}}_t$  charakteristickej kružnice  $c_t$  obsahuje stred sféry  $M_t$  v každom  $t \in I$ , charakteristická krivka je hlavnou kružnicou sféry a obálka  $\mathcal{E}$  je pokrytá jednoparametrickým systémom zhodných kružníc.
- Ak funkcia polomeru  $r(t)$  nie je konštantná, potom  $\dot{r}(t) \neq 0$  a rovina  $\dot{\mathcal{S}}_t$  neprechádza stredom sféry  $M_t$ . V tomto prípade obálka  $\mathcal{E}$  patrí do triedy kanálových plôch.

Polomer  $l_t$  charakteristickej kružnice možno vypočítať z pravouhlého trojuholníka  $M_t C_t P$ , kde  $P$  je ľubovoľný bod na charakteristickej kružnici  $c_t$ , a teda aj na sfére  $\mathcal{S}_t$ .

$$l_t = \sqrt{r^2(t) - \|M_t C_t\|^2} = r(t) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}}.$$

V prípade, že  $\|M_t C_t\| > r(t)$ , sféra  $\mathcal{S}_t$  nemá s obálkou  $\mathcal{E}$  reálny kontakt.

**Príklad 7.** Uvažujme kostrovú krivku  $m(t)$  a polomer  $r(t)$

$$m(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad r(t) = \frac{t}{\sqrt{26}}.$$

potom obálka systému je daná rovnicami

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t: x^2 + y^2 + (z - t)^2 - \frac{t^2}{26} &= 0, \\ \dot{\mathcal{S}}_t: z - \frac{25}{26}t &= 0. \end{aligned}$$

Počítajme  $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t$  pre všetky  $t \in \mathbb{R}$ . Z druhej rovnice dostaneme  $t = \frac{26}{25}z$ . Po dosadení do prvej rovnice, dostávame implicitnú rovnicu pre obálku  $\mathcal{E}$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{25}z^2 = 0,$$

čo je rovnica rotačného kužeľa.

Napríklad, pre  $t = 1 \in I$  charakteristická krivka je prienikom dvoch plôch daných

$$\mathcal{S}_1: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - \frac{1}{26} = 0,$$

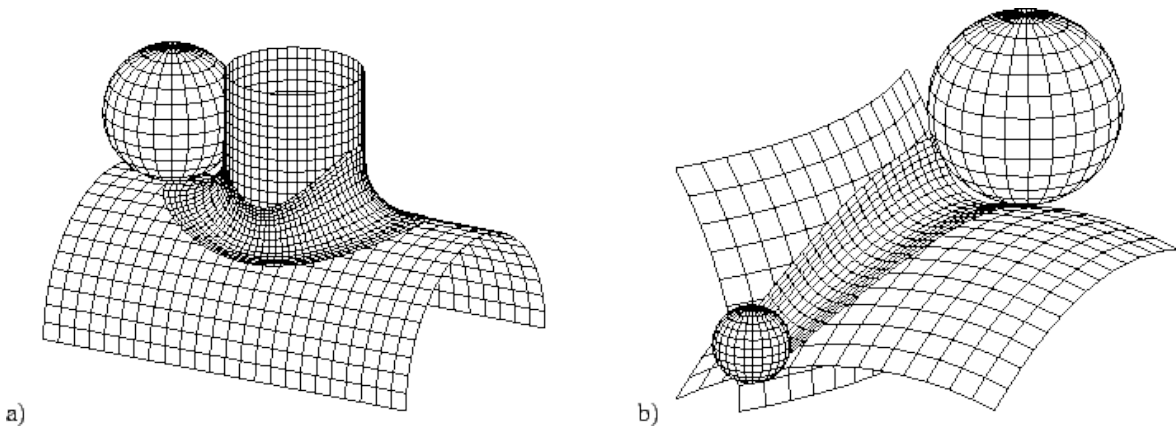
$$\dot{\mathcal{S}}_1: z - \frac{25}{26} = 0.$$

Z toho môžeme usúdiť, že charakteristická krivka  $c_1$  je kružnica so stredom v bode  $C_1 = (0, 0, \frac{25}{26})$  v rovine  $z = \frac{25}{26}$  a neprechádza stredom sféry  $M_1 = m(1) = (0, 0, 1)$ , polomer  $c_1$  je  $l_1 = \frac{\sqrt{25}}{26}$ . Vzdialenosť bodov  $\|M_1 C_1\| = \frac{1}{26}$  a  $r(1) = \frac{1}{\sqrt{26}}$ , takže platí, že  $r(1) > \|M_1 C_1\|$  a sféra  $\mathcal{S}_1$  má s obálkou  $\mathcal{E}$  reálny kontakt.

Jedným z dôležitých výsledkov je, že kanálové plochy, definované ako obálka jednoparametrického systému sfér s racionálnou funkciou polomeru  $r(t)$  a stredmi v racionálnej krivke  $m(t)$  možno racionálne parametrizovať [20].

Bohužiaľ, vo väčšine prípadov sú rovnice, ktoré charakterizujú obálky, príliš zložité a odvodiť z nich rovnicu obálky nie sme schopní.

Rúrkové povrchy sa často objavujú pri výrobe potrubia. Hladké spojenie medzi dvoma nie nevyhnutne valcovými rúrami  $\mathcal{P}_1$  a  $\mathcal{P}_2$  sa modeluje tak, aby bol prechod hladký, bez záhybov, vodotesný alebo dokonca aj parotesný. Na to sa používa technika *rolling ball blends*, využívajúca nasledujúcu myšlienku: Kým sa sféra  $S$  s konštantným alebo nekonštantným polomerom  $r$  kotúľa na oboch rúrach súčasne, zanecháva stopu  $s_i$  na oboch rúrach. Zmiešavacia plocha je tá časť obálky  $\mathcal{E}$  jednoparametrického systému sfér, ktorá leží medzi dvoma stopami  $s_1$  a  $s_2$ . Kostrová krivka obálky  $\mathcal{E}$  je priesečníkom ekvidistánt (*offsetov*) plôch  $\mathcal{P}_1$  a  $\mathcal{P}_2$  vo vzdialenosti  $r$ . Každá charakteristická krivka spája dva dotykové body zmiešavacej plochy a plochami  $\mathcal{P}_1$  a  $\mathcal{P}_2$ , ktoré sa majú zmiešavať. Viac detailov možno nájsť v [14] a [19]. Na obrázku 1.12 vľavo je znázornená metóda so sférou s konštantným polomerom  $r$ , vpravo s nekonštantným.



Obr. 1.12: Technika rolling ball blend s konštantným polomerom vľavo, s nekonštantným polomerom vpravo. [38]

## Kapitola 2

### Matematický model

Upravme rovnice pre obálku sféry tak, aby zodpovedali obálke elipsoidov. Vezmime elipsoid so škálovaním v smere súradnicových osí konštantnými reálnymi číslami  $a, b, c$ . Upravme škálovanie elipsoidu tak, aby  $a$ , škálovanie v smere osi  $x$  zodpovedalo škálovaniu v dotykovom smere priestorovej krivky  $m(t)$ . Teda pre elipsoid s rovnicou

$$\frac{(x - m_1(t))^2}{a^2} + \frac{(y - m_2(t))^2}{b^2} + \frac{(z - m_3(t))^2}{c^2} = 1$$

zmeníme štandardnú bázu  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  na bázu Frenetovho repéra  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  v každom bode krivky  $m(t)$ . Naše očakávanie je, že obálku elipsoidu škálovaného v dotykovom smere budeme môcť zostrojiť znova ako obálku kružníc, a teda, deriváciou jednoparametrickeho systému elipsoidov je podľa parametra  $t$  bude opäť rovina. V ďalších výpočtoch budeme parameter  $t$  pre väčšiu prehľadnosť zápisov vynechávať.

#### 2.1 Obálka sfér

Obálku sfér vieme zapísať skalárnym súčinom, no existuje však aj všeobecný zápis pre plochy druhého rádu, a to maticový

$$S : X^T M(t) X = 0,$$

kde  $X = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$  a  $M(t)$  je symetrická matica rozmeru  $4 \times 4$ , ktorej koeficienty sú závislé od  $t \in I$ . Rovnicu jednoparametrickeho systému sfér  $S$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xm_1 - 2ym_2 - 2zm_3 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - r^2 = 0,$$

tak vieme zapísať ako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & 0 & -m_2 \\ 0 & 0 & 1 & -m_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 & m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Deriváciu jednoparametrického systému sfér  $\dot{S}$

$$-2x\dot{m}_1 - 2y\dot{m}_2 - 2z\dot{m}_3 + 2m_1\dot{m}_1 + 2m_2\dot{m}_2 + 2m_3\dot{m}_3 - 2r\dot{r} = 0$$

možno tiež zapísať v tvare  $X^T \dot{M}(t)X = 0$ , kde  $\dot{M}(t) = \frac{\partial M(t)}{\partial t}$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dot{m}_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{m}_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{m}_3 \\ -\dot{m}_1 & -\dot{m}_2 & -\dot{m}_3 & 2m_1\dot{m}_1 + 2m_2\dot{m}_2 + 2m_3\dot{m}_3 - 2r\dot{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Matica  $\dot{M}(t)$  reprezentuje v každom  $t \in I$  rovinu, ktorej normálový vektor  $\vec{N}$  je  $(-2\dot{m}_1, -2\dot{m}_2, -2\dot{m}_3)$ . Vektor  $\vec{N}$  je lineárne závislý s dotykovým vektorom  $\dot{m}$  ku krivke  $m$ .

## 2.2 Obálka elipsoidov

Rovnako zapíšme rovnicu jednoparametrického systému elipsoidov  $Q$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2\frac{xm_1}{a^2} - 2\frac{ym_2}{b^2} - 2\frac{zm_3}{c^2} + \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & \frac{-m_1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & \frac{-m_2}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & \frac{-m_3}{c^2} \\ \frac{-m_1}{a^2} & \frac{-m_2}{b^2} & \frac{-m_3}{c^2} & \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

potom derivácia jednoparametrického systému elipsoidov, ktorú označíme  $\dot{Q} = \frac{\partial Q(t)}{\partial t}$

$$-\frac{\dot{m}_1 x}{a^2} + \frac{\dot{m}_2 y}{b^2} + \frac{\dot{m}_3 z}{c^2} + \frac{m_1 \dot{m}_1}{a^2} + \frac{m_2 \dot{m}_2}{b^2} + \frac{m_3 \dot{m}_3}{c^2} = 0,$$

má v maticovom zápise tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_1}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} \\ \frac{-\dot{m}_1}{a^2} & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} & \frac{2m_1\dot{m}_1}{a^2} + \frac{2m_2\dot{m}_2}{b^2} + \frac{2m_3\dot{m}_3}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$\dot{Q}$  je rovina kolmá na dotykový vektor  $\dot{m}(t)$ , práve vtedy keď vektory  $(\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3)$  a  $(\frac{\dot{m}_1}{a^2}, \frac{\dot{m}_2}{b^2}, \frac{\dot{m}_3}{c^2})$  sú lineárne závislé. Ak budeme elipsoid škálovať tak, že  $a, b, c$  budú škálovacie faktory také, aby sa elipsoid naškaloval v dotykovom smere, tak kolmá rovina na dotykový vektor vytne kružnicu, pretože elipsoid je v ostatných smeroch homogénny. Vyriešme toto odvodenie pre jednoduchší prípad, a to prípad elíps.

## 2.3 Obálka elíps

### 2.3.1 Zmena bázy

Nech  $m(t): I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  je aspoň dvakrát diferencovateľná krivka, položíme elipsu  $Q$  s osami  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$  na túto krivku v každom bode  $t \in I$ .

$$\frac{(x - m_1(t))^2}{a_0^2} + \frac{(y - m_2(t))^2}{b_0^2} = 1$$

Matica prechodu k novej báze je tvaru

$$A(t) = \begin{pmatrix} \vec{t}(t) & \vec{n}(t) \end{pmatrix},$$

čo po rozpísaní do súradníc  $\vec{t}(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|}(\dot{m}_1(t), \dot{m}_2(t))$  a  $\vec{n}(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|}(-\dot{m}_2(t), \dot{m}_1(t))$  dáva

$$A(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & n_1(t) \\ \dot{m}_2(t) & n_2(t) \end{pmatrix}.$$

Keďže sme maticu  $A(t)$  zostrojili tak, aby bola ortogonálna, ľahko dostávame aj vyjadrenie inverznej matice

$$A^{-1}(t) = A^T(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ n_1(t) & n_2(t) \end{pmatrix}.$$

Vyjadríme elipsu  $Q$  v novej báze  $u, v$  nasledovnou transformáciou

$$\frac{u^2(t)}{a^2} + \frac{v^2(t)}{b^2} = 1,$$

kde

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ n_1(t) & n_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m_1(t) \\ y - m_2(t) \end{pmatrix}.$$

Elipsa  $Q$  sa potom transformuje na

$$\frac{1}{\|m\|^2} \left( (x - m_1)^2 \left( \frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) + (y - m_2)^2 \left( \frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) \right) \quad (2.1)$$

$$+ \frac{1}{\|m\|^2} \left( 2(x - m_1)(y - m_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right) - 1 = 0, \quad (2.2)$$

po miernej úprave tak dostávame výraz

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2 b^2 \|m\|^2} \left( (x - m_1)^2 (b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2) + (y - m_2)^2 (a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2) \right) \\ & + \frac{1}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} (2(b^2 - a^2)(x - m_1)(y - m_2)\dot{m}_1\dot{m}_2) - 1 = 0, \end{aligned}$$

kde konštanta  $a$  zabezpečí škálovanie elipsy v dotykovom smere a konštanta  $b$  určí škálovanie v normálovom smere. Výber orientácie normály nemá na výsledok žiaden vplyv. Štandardne uvažujeme  $\vec{n} = (-\dot{m}_2, \dot{m}_1)$ .

**Príklad 8** (Parabola). Majme parabolu s parametrizáciou  $m(t) = (t, t^2)$ , kde  $\dot{m}(t) = (1, 2t)$ . Transformujme elipsu v stredovom zápise so škálovaním v smere súradnicových osí

$$\frac{(x-t)^2}{a_0^2} + \frac{(y-t^2)^2}{b_0^2} = 1$$

na elipsu so škálovaním  $a$  v dotykovom a  $b$  v normálovom smere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2 b^2 (4t^2 + 1)} ((x-t)^2 (b^2 + a^2 4t^2) + (y-t^2)^2 (a^2 + b^2 4t^2)) \\ & + \frac{1}{a^2 b^2 (4t^2 + 1)} (2(b^2 - a^2)(x-t)(y-t^2)2t) - 1 = 0. \end{aligned}$$

### 2.3.2 Výpočet obálky elíps

Prepíšme rovnicu 2.1 do maticového zápisu. Máme kužeľosečku  $Q$  tvaru

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

ktorá má v maticovom tvare vyjadrenie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Všetky koeficienty matice  $M(t)$  sú závislé od  $t$  a majú nasledovný tvar

$$\begin{aligned} A &= \frac{b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ B &= \frac{2(b^2 - a^2) \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ C &= \frac{a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ D &= \frac{-2m_1 (b^2 \dot{m}_1^2 + a^2 \dot{m}_2^2) - 2(b^2 - a^2) m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ E &= \frac{-2m_2 (a^2 \dot{m}_1^2 + b^2 \dot{m}_2^2) - 2(b^2 - a^2) m_1 \dot{m}_1 \dot{m}_2}{a^2 b^2 \|m\|^2} \\ F &= \frac{\dot{m}_1^2 (b^2 m_1^2 + a^2 m_2^2 - a^2 b^2) + 2(b^2 - a^2) m_1 m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2 + \dot{m}_2^2 (a^2 m_1^2 + b^2 m_2^2 - a^2 b^2)}{a^2 b^2 \|\dot{m}\|^2} - 1 \end{aligned}$$

Pozrime sa deriváciu jednoparametrického systému elíps podľa parametra  $t$ . Máme teda kužeľosečku  $\dot{Q}$  tvaru

$$\dot{A}x^2 + \dot{B}xy + \dot{C}y^2 + \dot{D}x + \dot{E}y + \dot{F} = 0$$

kde  $\dot{A}, \dots, \dot{F}$  sú koeficienty matice  $\dot{M}(t)$ .



$$\begin{aligned}
\dot{A} &= \frac{2(a^2\dot{m}_1\ddot{m}_2 - a^2\ddot{m}_1\dot{m}_2 - b^2\dot{m}_1\ddot{m}_2 + b^2\ddot{m}_1\dot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|m\|^4} \\
\dot{B} &= 2 \frac{(2a^2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 - a^2(\dot{m}_1\ddot{m}_2 + \ddot{m}_1\dot{m}_2)(\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2) - 2b^2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 + b^2(\dot{m}_1\ddot{m}_2 + \ddot{m}_1\dot{m}_2)(\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2))\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|m\|^4} \\
\dot{C} &= \frac{2(-a^2\dot{m}_1\ddot{m}_2 + a^2\ddot{m}_1\dot{m}_2 + b^2\dot{m}_1\ddot{m}_2 - b^2\ddot{m}_1\dot{m}_2)\dot{m}_1\dot{m}_2}{a^2b^2\|m\|^4} \\
\dot{D} &= \frac{2 \cdot (2a^2(m_1\dot{m}_2 - m_2\dot{m}_1)(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_2 + a^2(\|m\|^2(-2m_1\dot{m}_2\ddot{m}_2 + m_2\dot{m}_1\ddot{m}_2 + m_2\ddot{m}_1\dot{m}_2) - \\
\dot{E} &= \frac{2 \cdot (2a^2(-m_1\dot{m}_2 + m_2\dot{m}_1)(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)\dot{m}_1 + a^2(\|m\|^2(m_1\dot{m}_1\ddot{m}_2 + m_1\ddot{m}_1\dot{m}_2 - 2m_2\dot{m}_1\ddot{m}_1) - \\
\dot{F} &= \frac{2(a^2(\dot{m}_1\ddot{m}_1 + \dot{m}_2\ddot{m}_2)(-m_1^2(\dot{m}_2)^2 + 2m_1m_2\dot{m}_1\dot{m}_2 - m_2^2(\dot{m}_1)^2) + a^2\|m\|^4(m_1^2\dot{m}_2\ddot{m}_2 - m_1m_2\dot{m}_1\ddot{m}_2))}{a^2b^2\|m\|^4}
\end{aligned}$$

Determinant matice  $\dot{M}(t) = 0$ , pre všetky  $t$ , čo znamená, že kužeľosečka je singulárna.

Pozrime sa na subdeterminant

$$\dot{M}_{33}(t) = \dot{A}\dot{C} - \frac{\dot{B}^2}{4} = -\frac{(b^2 - a^2)^2}{a^4b^4} \frac{(\dot{m}_1\ddot{m}_2 - \ddot{m}_1\dot{m}_2)^2 + \dot{m}_1\dot{m}_2\ddot{m}_1\ddot{m}_2}{\|m\|^4}.$$

Hodnota  $\dot{M}_{33}(t) < 0$ , pre všetky  $t$ , teda kužeľosečka degeneruje na dve rôznobežné priamky.

## 2.4 Obálka elipsoidov

Na všetky výpočty v tejto kapitole bol použitý voľne dostupný softvér počítačovej algebry Maxima s grafickým užívateľským rozhraním wmMaxima. Celý balík a dokumentácia sú dostupné na [17], [18]. Rovnice z Maximy boli prevedené do L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xu pomocou Python skriptu `conversion-to-latex.ipynb`, ktorý sa nachádza v GitHub repozitári <https://github.com/tutka13/Masters-Thesis/tree/main/symbolic-computations>.



# Kapitola 3

## Softvér

V našej práci je cieľom implementácie matematicky odvodených konceptov vizualizácia vypočítaných plôch a následne aj ich 3D tlač. V tejto kapitole v prvej časti uvedieme stručnú špecifikáciu softvéru, v druhej časti zdôvodnime výber programovacieho jazyka a knižníc, opíšeme proces ich inštalácie, zdôvodnime použité programovacie prostredie a uvedieme jeho konfiguráciu pre naše použitie. V tretej časti uvedieme vývoj skriptov, demo a chyby, ktoré sa počas riešenia vyskytli a na záver, vo štvrtej časti, krátko opíšeme proces 3D tlače plôch. Všetky vytvorené skripty a ďalšie súbory sa nachádzajú na GitHube v repozitári <https://github.com/tutka13/Masters-Thesis>.

### 3.1 Špecifikácia

#### 3.1.1 Požiadavky

Používateľ zadá parametre pre vykreslenie 3D plôch, ktoré vypočíta a vymodeluje softvér podľa procesu workflow.

##### Vstup

###### Obálka sfér:

Zadať parametrizáciu priestorovej krivky  $m(t)$  stredov sfér, funkciu polomeru  $r(t)$ , interval  $I$  parametra  $t$  a vzorkovanie plochy.

###### Obálka elipsoidov:

Zadať parametrizáciu priestorovej krivky  $m(t)$  stredov elipsoidov, konštanty  $a$  a  $b$ , interval  $I$  parametra  $t$  a vzorkovanie plochy.

##### Výstup

###### Obálka sfér:

Vizualizácia jednoparametrického systému sfér, charakteristických kružníc a výslednej plochy - obálky sfér.

**Obálka elipsoidov:**

Vizualizácia jednoparametrického systému elipsoidov, charakteristických kružníc a výslednej plochy - obálky elipsoidov.

**Workflow****Obálka sfér:**

- vymazanie scény
- čítanie parametrov z textového súboru
- symbolické výpočty
- vytvorenie prázdnych polí
- numerické vyčíslenie symbolických výrazov
- uloženie hodnôt do poľa
- určenie normál charakteristických kružníc
- označenie charakteristických kružníc
- interpolácia medzi dvoma charakteristickými kružnicami
- posun plôch v priestore
- vizualizácia plôch
- uloženie scény do databázy

**Obálka elipsoidov:**

- čítanie parametrov
- natočenie a posun elipsoidov
- určenie parametrov škálovania
- umiestnenie elipsoidu do každého bodu krivky  $m(t)$
- derivácia jednoparametrického systému plôch
- extrahovanie koeficientov

- určenie typu plochy
- nahradenie elipsoidov zodpovedajúcimi kružnicami
- výpočet natočenia kružníc
- vizualizácia plochy
- uloženie plochy do databázy

### **Funkčnosť softvéru**

Zoznam funkcií, ktoré budeme potrebovať. Sféru a elipsoid nazveme plochy.

- čítanie parametrov z textového súboru
- symbolické výpočty
- derivácia
- výpočet charakteristických kružníc
- uloženie hodnôt do poľa
- interpolácia medzi 2 charakteristickými kružnicami
- posun plochy v priestore
- vizualizácia plochy
- uloženie plochy do databázy

## **3.2 Výber softvéru a jeho inštalácia**

Na výpočet a vizualizáciu plôch sme sa rozhodli využiť kombináciu Blenderu a jazyka Python. Python je momentálne jedným z najpopulárnejších a najpoužívanějších programovacích jazykov, s knižnicami vhodnými pre matematické výpočty. Okrem toho dokáže generovať výstupy vo formáte  $\text{\LaTeX}$ . Je užívateľsky intuitívny. Blender je významným nástrojom pre prácu s 3D grafikou. Vzhľadom na trojrozmernú povahu našich plôch, nám jeho použitie umožnilo vytlačiť aj niekoľko fyzických modelov v 3D tlačiarňi.

### 3.2.1 Blender

Blender je open source balík na tvorbu 3D. Podporuje celú 3D technológiu - modelovanie, rigging, animáciu, simuláciu, renderovanie, kompozíciu a sledovanie pohybu, dokonca aj strih videa a tvorbu hier. Pokročilí používatelia využívajú rozhranie API programu Blender pre skriptovanie v jazyku Python na prispôsobenie aplikácie a písanie špecializovaných nástrojov [2]. Pre účely tejto práce sme využili Blender 4.0, stiahnuteľný na webstránke [4]. Blender umožňuje rozšírenie svojej funkcionality pomocou skriptovacieho jazyka Python, ktorý je integrovaný priamo do softvéru, teda nie je potreba samostatnej inštalácie. Okrem toho Blender obsahuje špeciálnu knižnicu bpy, ktorá slúži na vykonávanie príkazov v Blenderi. Na vytváranie skriptov slúži prostredie Scripting, ktoré obsahuje okná na písanie, úpravu textu a Python konzolu. Je možné pracovať aj v externom programovacom prostredí [3].

### 3.2.2 Python

Python je vysokoúrovňový programovací jazyk, ktorý je populárny pre svoju jednoduchosť a čitateľnosť syntaxe. Má široké využitie v rôznych odvetviach, ako sú web development, vedecké výpočty, umelá inteligencia, automatizácia, spracovanie dát a mnoho ďalších. Pri používaní priamo v Blendri nie je potrebná inštalácia. Pri otvorení prostredia Scripting v Blendri sa vľavo v konzole nachádza informácia o verzii Pythonu, ktorú Blender používa. V našom prípade je to 3.10.13.

### 3.2.3 Knižnice

Na výpočet a zobrazenie plôch v Blendri sme využili nasledovné knižnice

- bpy: knižnica Blenderu, ktorá umožňuje manipuláciu s objektmi v Blendri pomocou príkazov vytvorených v skriptoch,
- math: základné matematické funkcie a konštanty pre numerické výpočty, obsahuje funkcie ako sin, cos, log a ďalšie, ako aj konštanty ako  $\pi$  a  $e$ ,
- mathutils: je súčasťou Blenderu a poskytuje množstvo matematických funkcií a nástrojov pre prácu s 3D objektami, obsahuje funkcie na rotácie, transformácie, výpočet normál a ďalšie operácie v 3D priestore,
- matplotlib.pyplot: rozhranie na tvorbu vizualizácií a grafického zobrazenia dát, tvorbu grafov, histogramov, kontúrových máp a ďalších typov vizuálnych reprezentácií dát,
- numpy: nástroje na manipuláciu s vektormi, maticami, poliami a ďalšími objektami potrebnými pre zložitejšie výpočty,

- `sympy`: nástroje na symbolické výpočty, algebraické manipulácie, riešenie rovníc a ďalšie matematické operácie potrebné pre pokročilé výpočty,
- `sys`: prístup k niektorým systémovým špecifikáciám a funkciám, medzi jej použitia patrí prístup k argumentom príkazového riadku, manipulácia s cestami k súborom a niektoré informácie o systéme, ako verzia Pythonu,
- `time`: získanie času v milisekundách.

### 3.2.4 Inštalácia knižníc

Pip je inštalátor balíkov pre Python, ktorý spravuje knižnice pre jazyk Python. Používa sa na inštaláciu z Python Package Index. PyPI je knižnica pre programovací jazyk Python. Keďže sme Python stiahli z oficiálnej stránky Python [32], pip sa inštaloval automaticky [23]. Overiť, či máme nainštalovaný pip, možno pomocou príkazového riadku, ktorý otvoríme vyhľadáním `cmd` v ponuke vyhľadávania a zadaním `python -m pip --version`. V našom prípade pracujeme s verziou pip 24.0. Následne je možné inštalovať všetky potrebné knižnice v príkazovom riadku zadaním

```
pip install bpy
pip install math
pip install mathutils
pip install matplotlib
pip install numpy
pip install sympy
pip install sys
pip install time.
```

### 3.2.5 Programovacie prostredie

Keďže prostredie Scripting v Blendri nedisponuje mnohými vlastnosťami, ktoré by sme na zjednodušenie tvorby skriptov potrebovali, využijeme externé programovacie prostredie, a to Visual Studio Code.

#### Visual Studio Code

Na úpravu skriptov pre Python a Python-Blender sme využili programovacie prostredie Visual Studio Code vo verzii 1.82.2, ktorý disponuje farebným zvýrazňovaním kódu, súčasným zobrazením viacerých skriptov, zobrazením súborov v priečinku, kontrolou chýb, ladením programu a ďalšími funkciami. Má intuitívny a prehľadný dizajn, no

jeho najväčšou výhodou je množstvo rozšírení, z ktorých je pre prepojenie programov Python a Blender potrebné Blender Development. Toto rozšírenie slúži na ladenie skriptov, ktoré sa spúšťajú v prostredí Blenderu.

### Konfigurácia VS Code - Python - Blender

Pre systém Windows sme v prvom kroku nainštalovali samostatnú verziu Pythonu [32]. Keďže Blender používa Python verziu 3.10.13, mohli sme stiahnuť akúkoľvek vyššiu. Používame verziu 3.11.5. Pri inštalácii je potrebné odkliknúť možnosť **Add Python Executable to the path**. Zo stránky [34] sme stiahli VS Code, ktorý sme následne inštalovali. Vo VS Code sme v paneli rozšírení na ľavej strane vyhľadali rozšírenie Python, ktoré vytvorila spoločnosť Microsoft a aj to sme inštalovali. Tým sa umožnila práca VS Code s jazykom Python. Pre lepšie používanie knižnice bpy v skriptoch bolo potrebné nainštalovať falošný bpy modul [8] príkazom v termináli `pip install fake-bpy-module-latest`. Po dokončení inštalácie sme reštartovali VS Code. V bočnom paneli rozšírení sme vyhľadali Blender development. Po inštalácii sme v priečinku Python v inštalačnom adresári programu Blender otvorili vlastnosti, kartu zabezpečenia a skupinu používateľov, ktorým sme povolili možnosť **Write**. Vďaka tomuto rozšíreniu sme mohli ladiť program pomocou **Ctrl+Shift+P**. Po stlačení tejto klávesovej skratky sa v hornom paneli zobrazilo kontextové menu, kde sme vybrali **Blender: Build and Start**, čím sme spustili Blender. Proces ladenia programu sme spúšťali možnosťou **Blender: Run Script**.

### Jupyter Notebook

Pre účely našej práce sme potrebovali niekoľko pomocných skriptov na výpočet obálok konkrétnych prípadov v 2D a 3D a na prepis symbolických výpočtov z Maximy do L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-u. Pri programovaní týchto skriptov sme využívali Jupyter Notebook vo verzii 7.0.4, výpočtový nástroj, pôvodne navrhnutý pre úlohy dátovej vedy, ktorý umožňuje interaktívnu prácu s kódom, rovnicami a vizualizáciami s podporou v 40 programovacích jazykoch. S jeho pomocou je možné vytvárať dokumenty vo formáte JSON, ktoré sú rozdelené do buniek a komunikujú s výpočtovými jadrami cez Interactive Computing Protocol. Jadrá sú zodpovedné za vykonávanie kódu a výstupy. Jupyter Notebook ponúka modulárny dizajn, ktorý umožňuje jednoduché manipulácie s jednotlivými bunkami, vrátane možnosti úpravy bunky bez ďalšieho vplyvu na zvyšnú časť kódu, spätného vrátenia sa a vymazania bunky [13]. Jupyter Notebook sa nainštaluje rovnako ako Blender Development vo VS Code rozšíreniach alebo v príkazovom riadku zadaním

```
pip install jupyterlab
pip install jupyter notebook.
```



Jednou možnosťou je spustiť Jupyter Notebook príkazom `jupyter notebook` alebo si vytvoriť súbor vo VS Code možnosťou `New File` a zvoliť Jupyter Notebook `.ipynb`. My sme využívali druhú možnosť.

## 3.3 Implementácia

V tejto časti sa budeme venovať vývoju našich skriptov.

## 3.4 3D tlač

Tlačiareň, v ktorej sme plochy tlačili je typu Original Prusa i3 MK3S+. Všetky jej parametre a taktiež manuál k tlači sa nachádza na [28]. Na vytlačenie modelov plôch bolo potrebné exportovať plochy v Blendri do vhodného formátu. Pre tlač bolo potrebné inštalovať softvér PrusaSlicer, ktorý možno stiahnuť z [27].

### 3.4.1 PrusaSlicer

Popis procesu v programe PrusaSlicer vo verzii 2.7.2.

1. Načítanie modelu: Používateľ načíta do PrusaSliceru 3D model, ktorý chce vytlačiť, vo vhodnom formáte.
2. Nastavenie parametrov tlače: Používateľ nastaví parametre tlače, ako je typ tlačiarne, materiál, hrúbka vrstvy, percento výplne (infill), teplota tlače atď. Tieto parametre ovplyvňujú kvalitu a vlastnosti vytlačeného modelu.
3. Slicing: PrusaSlicer rozdelí 3D model na tenké horizontálne vrstvy a vytvorí inštrukcie pre tlačiareň, ktoré určujú pohyb tlačiarne.
4. Príprava G-kódu: Na základe slicovania PrusaSlicer vytvorí súbor `.gcode`, ktorý obsahuje sériu príkazov pre tlačiareň, ako sú pohyby osí, rýchlosti a teploty.
5. Export G-kódu: Po príprave exportovať G-kód a nahráť ho na SD kartu alebo do počítača, pomocou ktorého budeme tlačiť.

#### Parametre tlače

Ako vstupný formát do PrusaSlicer-u sme používali `.stl`.

Typ tlačiarne: Original Prusa i3 MK3S & MK3S+

Nastavenie tlače: 0.20mm QUALITY

Filament: Prusament PLA

Podpory: Podpora len na stavebnej doske

Infill: 15%

Teplota trysky: 215°C

Teplota podložky: 60°C

Kvôli nefunkčnosti tlače z SD karty, sme pre 3D tlač používali počítač prepojený USB káblom s tlačiarňou. Počítač musel byť počas tlače neustále pripojený k tlačiarňe a nesmel prejsť do režimu spánku, hibernácie alebo sa vypnúť. Prerušenie pripojenia k počítaču by malo za následok prerušenie tlače bez možnosti obnovenia tlače.

### 3.4.2 Pronterface

Pronterface je jednoduché grafické používateľské rozhranie, ktoré používateľom ponúka možnosť monitorovať a ovládať tlačiareň z počítača pripojeného cez USB. Pomocou neho možno priamo pohybovať krokovými motormi, ovládať teplotu lôžka a trysky, posielat príkazy G-kódu priamo cez terminál alebo konzolové okno a mnoho ďalšieho. Pronterface je súčasťou balíka jednoduchých nástrojov Printron na správu a ovládanie 3D tlačiarní aj CNC strojov. Napriek svojmu základne vyzerajúcemu dizajnu a zastaranej grafike zostáva užitočným nástrojom, ktorý si udržiava silnú pozíciu v komunite 3D tlačiarov [30].

Stiahli sme jeho poslednú verziu 2.0.1 na webovej lokalite [29]. Pomocou Správcu zariadení systému Windows sme skontrolovali, ktorý port COM bol priradený našej 3D tlačiarňe, bol to COM3. Po pripojení k tlačiarňe sme zvolili tlačidlo Connect. Potom sme načítali model tlačidlom Load file a vybrali súbor vo formáte `.gcode`. V aplikácii sme skontrolovali nastavenú teplotu trysiek a podložky, aby zodpovedala zvolenému materiálu podľa našich pokynov. Po načítaní modelu sa v pravom stĺpci zobrazil pessimisticky odhad času tlače.

## Kapitola 4

### Výsledky práce



## Záver



# Literatúra

- [1] Babušíková J., Slodička M., Weisz J. 2000. *Numerické metody*. Univerzita Komenského v Bratislave. ISBN 80-223-1384-X. Dostupné na internete: <http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/skripta.pdf>.
- [2] Blender documentation: Blender 4.0 Reference Manual. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/manual/en/latest/index.html>.
- [3] Blender documentation: Blender 4.0 Python API Documentation. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/api/current/>.
- [4] Blender download. Dostupné na internete: <https://www.blender.org/download/>.
- [5] Biernet A. 2016. Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Naturwissenschaftliche Fakultät III. Halle (Saale). Dissertation. Dostupné na internete: <https://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/2416652>.
- [6] Bruce, J. W., Giblin, P. J. 1981. What Is an Envelope? *The Mathematical Gazette*, 65(433), 186-192. Dostupné na internete: <http://www.jstor.org/stable/3617131>.
- [7] do Carmo M. P. 2017. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York. Dover Publications Inc., Mineola. ISBN-13: 978-0-486-80699-0.
- [8] Fake-bpy-module. Dostupné na internete: <https://github.com/nutti/fake-bpy-module>.
- [9] Grossfield, A. 1997. What Are Differential Equations: A Review Of Curve Families. Paper presented at 1997 Annual Conference, Milwaukee, Wisconsin. 10.18260/1-2-6898. Dostupné na internete: <https://216.185.13.174/what-are-differential-equations-a-review-of-curve-families>.
- [10] Hlavička R., Růžicková I. Numerické metody. Brno. Dostupné na internete: <http://physics.ujep.cz/jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf>.

- [11] Chalmovianská, J. Skriptá k predmetu Algebraická geometria. Dostupné na internete: <http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~pilnikova/ag1.html>.
- [12] Chudinov P. 2009. Numerical-analytical Algorithm for Constructing the Envelope of the Projectile Trajectories in Midair. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.0520>.
- [13] Jupyter Notebook. <https://jupyter.org/>.
- [14] Karčiauskas K., Krasauskas R. 2000. Rational rolling ball blending of natural quadrics. *Mathematical Modelling and Analysis*, Volume 5, Pages 97-107. Dostupné na internete: [https://www.researchgate.net/publication/233265253\\_Rational\\_rolling\\_ball\\_blending\\_of\\_natural\\_quadrics](https://www.researchgate.net/publication/233265253_Rational_rolling_ball_blending_of_natural_quadrics).
- [15] Korbaš, J. *Prednášky z lineárnej algebry a geometrie*. 2013. Prvé vydanie. Univerzita Komenského v Bratislave: Vydavateľstvo UK. ISBN 978-80-223-3408-2.
- [16] Lee, J. 2012. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. New York. Springer. 2. edition. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [17] Maxima documentation: Maxima 5.47.0 Manual. Dostupné na internete: [https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima\\_singlepage.html](https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_singlepage.html).
- [18] Maxima download. Dostupné na internete: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
- [19] Odehnal B., Stachel H., Glaeser G. 2020. *The Universe of Quadrics*. Vienna. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-61052-7. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61053-4>.
- [20] Peternell, M., Pottmann H. 1997. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, Volume 23, Issues 2–3, Pages 255-266, ISSN 0747-7171. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0087>.
- [21] Peternell M., Odehnal B., Sampoli M. L., On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 25, Issues 4–5, 2008, Pages 342-355, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.10.007>.
- [22] Peternell M., Pottmann H. 1998. A Laguerre geometric approach to rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 3, Pages 223-249, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00024-1](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00024-1).



- [23] Pip. <https://pip.pypa.io/en/stable/>.
- [24] Pottmann H., Peternell M. 2009. Envelopes – Computational Theory and Applications. Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Dostupné na internete: <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/ig/peternell/env.pdf>.
- [25] Pottmann H., Peternell M. 1998. Applications of Laguerre geometry in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 2, Pages 165-186, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00023-X](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00023-X).
- [26] Pottmann, H., Wallner, J. 2001. *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag.
- [27] PrusaSlicer download. Dostupné na internete: <https://www.prusa3d.com/cs/>.
- [28] Příručka 3D tiskaře. Dostupné na internete: [https://www.prusa3d.com/downloads/manual/prusa3d\\_manual\\_mk3s\\_cs.pdf?\\_gl=1\\*13onli8\\*\\_ga\\*MTE1MzgxmDQONS4xNzEwMjQxMTM0\\*\\_ga\\_3HK7B7RT5V\\*MTcxMjMzMDU3My43LjEuMTcxMjMzMDI1My42MC4wLjA&fbclid=IwAR06q0hsPPUMy42H0m-zS6RgoDZ5cvhJmfW8ZSK7da\\_qo6oD-iH0I1\\_lch0\\_aem\\_AcV6EthMrWxjh4BNaUJb-\\_vAreZ\\_faKf34c9V0u-XeGLlp\\_5WfT6Rx8\\_euvvEuSvLsAlZWM-Mb9vdp-OfXFGvMRz](https://www.prusa3d.com/downloads/manual/prusa3d_manual_mk3s_cs.pdf?_gl=1*13onli8*_ga*MTE1MzgxmDQONS4xNzEwMjQxMTM0*_ga_3HK7B7RT5V*MTcxMjMzMDU3My43LjEuMTcxMjMzMDI1My42MC4wLjA&fbclid=IwAR06q0hsPPUMy42H0m-zS6RgoDZ5cvhJmfW8ZSK7da_qo6oD-iH0I1_lch0_aem_AcV6EthMrWxjh4BNaUJb-_vAreZ_faKf34c9V0u-XeGLlp_5WfT6Rx8_euvvEuSvLsAlZWM-Mb9vdp-OfXFGvMRz) alebo <https://help.prusa3d.com/cs/downloads>.
- [29] Pronterface download. Dostupné na internete: <https://www.pronterface.com/>.
- [30] Pronterface setup. Dostupné na internete: <https://all3dp.com/2/pronterface-how-to-download-install-and-set-it-up/>.
- [31] Python documentation. Dostupné na internete: <https://docs.python.org/3/>.
- [32] Python download. Dostupné na internete: <https://www.python.org/downloads>.
- [33] Skopenkov M. et al. 2020. Characterizing envelopes of moving rotational cones and applications in CNC machining, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 83, 101944, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101944>.
- [34] Visual Studio Code download. Dostupné na internete: <https://code.visualstudio.com/download>.
- [35] Vráblíková J. 2022. Envelopes of implicit surfaces. Mathematical Institute of Charles University. Prague. Master's thesis. Dostupné na internete: <https://dodo.is.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/171858/120411574.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

- [36] Zlatoš P. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. 2011. Bratislava. Marenčin PT. ISBN 978-80-8114-111-9.
- [37] Obrázok Webbov Most. Dostupné na internete: <http://www.yannarthusbertrand2.org/collection/australia/#mw1-3844>.
- [38] Obrázok Rolling ball blends. Dostupné na internete: [https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb\\_abs/parblrb\\_abs.html](https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb_abs/parblrb_abs.html).
- [39] Obrázok Hudobné divadlo a výstavná sieň. Dostupné na internete: <https://www.archdaily.com/789123/music-theatre-and-exhibition-hall-massimiliano-and-doriana-fuksas>.

Všetky online zdroje boli dostupné dňa 03.05.2024.

# Príloha A

Výpočet obálky pomocou Gröbnerovej bázy pre príklad 3 so sústavou rovníc

$$\begin{aligned}F^\lambda &= 4t^6 - 4t^5y + t^4y^2 + 7t^4 - 8t^3y + 2t^2y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1, \\F_t^\lambda &= 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2t + 4t - 4y.\end{aligned}$$

Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$G_{lex} = \{l_1, \dots, l_6\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}l_1 &= 8232129896496000t^3 - 15949751674461t^2y^7 - 161384046512557t^2y^5 \\&\quad - 1204463505481071t^2y^3 - 6169809854717575t^2y + 15430671472tx^2y^{12} \\&\quad + 426513396863tx^2y^{10} - 15006102325790tx^2y^8 - 319921877859794tx^2y^6 \\&\quad + 3932980083404115tx^2y^4 + 26096343414243210tx^2y^2 \\&\quad - 5927133525477120tx^2 + 8232129896496000t - 89991676024704x^6y^3 \\&\quad + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 + 5668842986368x^4y^7 \\&\quad - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 - 17414290688695056x^4y \\&\quad - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 + 43203483205279x^2y^7 \\&\quad - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 + 19070089710359527x^2y \\&\quad - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 - 1204463505481071y^3 \\&\quad - 6169809854717575y \\l_2 &= 1029016237062t^2x^2 + 3835312tx^2y^{11} + 224556467tx^2y^9 + 2456837050tx^2y^7 \\&\quad - 42939029714tx^2y^5 - 622020302148tx^2y^3 - 2792792777023tx^2y \\&\quad - 22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\&\quad + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\&\quad + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\&\quad - 1254254177448x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 = & 171502706177t^2y^8 + 2058032474124t^2y^6 + 14749232731222t^2y^4 \\
& + 51450811853100t^2y^2 + 107189191360625t^2 + 8570784208tx^2y^{11} \\
& + 447143859077tx^2y^9 + 2637043681390tx^2y^7 - 114540691274161tx^2y^5 \\
& - 650595377992068tx^2y^3 - 329349595559310tx^2y - 49984813501056x^6y^2 \\
& + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 + 1466755633792x^4y^6 \\
& + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 + 188859580240104x^4 \\
& - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 + 53352589022478x^2y^6 \\
& + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 - 296888240050025x^2 \\
& + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 \\
& + 10718919136062514749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
l_4 = & 3319374168tx^4 + 4112tx^2y^{12} + 419465tx^2y^{10} + 11960430tx^2y^8 + 9104606tx^2y^6 \\
& - 3087637940tx^2y^4 - 14225835735tx^2y^2 - 3841868250tx^2 - 23981184x^6y^3 \\
& - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 + 484488324x^4y^3 \\
& + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 + 1348048703x^2y^5 \\
& + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
l_5 = & 16tx^2y^{13} + 1321tx^2y^{11} + 29688tx^2y^9 - 92522tx^2y^7 - 7839424tx^2y^5 \\
& - 31597167tx^2y^3 - 1560600tx^2y - 93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 \\
& - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 \\
& - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 \\
& + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2 \\
l_6 = & 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
& - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
& - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2
\end{aligned}$$

Eliminovaná Grobnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie

$$\begin{aligned}
g_1 &= -89991676024704x^6y^3 + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 \\
&\quad + 5668842986368x^4y^7 - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 \\
&\quad - 17414290688695056x^4y - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 \\
&\quad + 43203483205279x^2y^7 - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 \\
&\quad + 19070089710359527x^2y - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 \\
&\quad - 1204463505481071y^3 - 6169809854717575y \\
g_2 &= -22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\
&\quad + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\
&\quad + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\
&\quad - 1254254177448x^2 \\
g_3 &= -49984813501056x^6y^2 + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 \\
&\quad + 1466755633792x^4y^6 + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 \\
&\quad + 188859580240104x^4 - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 \\
&\quad + 53352589022478x^2y^6 + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 \\
&\quad - 296888240050025x^2 + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 \\
&\quad + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
g_4 &= -23981184x^6y^3 - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 \\
&\quad + 484488324x^4y^3 + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 \\
&\quad + 1348048703x^2y^5 + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
g_5 &= -93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 \\
&\quad + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} \\
&\quad + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2 \\
g_6 &= 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
&\quad - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
&\quad - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2
\end{aligned}$$

Gröbnerova báza vzhľadom na graduované reverzné lexikografické usporiadanie obsahuje 10 polynómov

$$G_{grevlex} = \{g_1, \dots, g_{10}\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= -2706889t^2x^2y^2 + 48735498t^2x^2 - 248832tx^6y - 618540tx^4y^3 - 18691704tx^4y \\
&\quad - 11148241tx^2y^3 - 113858467tx^2y + 82944x^6y^2 + 1391904x^6 + 2592x^4y^6 \\
&\quad + 227460x^4y^4 + 7282128x^4y^2 + 48599388x^4 + 2592x^2y^8 + 136740x^2y^6 \\
&\quad + 5322840x^2y^4 + 25315237x^2y^2 - 49991292x^2 \\
g_2 &= -5926019t^2x^2y - 381024tx^6 + 17542tx^4y^4 + 536256tx^4y^2 + 2639556tx^4 \\
&\quad + 549118tx^2y^4 + 7633231tx^2y^2 - 2544625tx^2 + 127008x^6y - 4802x^4y^5 \\
&\quad - 137396x^4y^3 - 3196866x^4y - 4802x^2y^7 - 232456x^2y^5 - 1612916x^2y^3 \\
&\quad + 3355951x^2y \\
g_3 &= -257t^2x^2y^2 + 4998t^2x^2 - 1728tx^4y + 36tx^2y^5 - 1037tx^2y^3 - 11867tx^2y \\
&\quad + 576x^4y^2 + 5292x^4 + 540x^2y^4 + 2729x^2y^2 - 5292x^2 \\
g_4 &= 49t^2x^2y^3 + 1392t^2x^2y - 648tx^4 - 11tx^2y^4 - 983tx^2y^2 + 750tx^2 \\
&\quad + 216x^4y + 227x^2y^3 - 318x^2y \\
g_5 &= 216t^2x^4 + 227t^2x^2y^2 - 318t^2x^2 - 180tx^4y - 181tx^2y^3 + 497tx^2y + 36x^4y^2 \\
&\quad - 72x^4 + 36x^2y^4 - 179x^2y^2 + 72x^2 \\
g_6 &= 59t^4 + t^3y^3 - 61t^3y - 24t^2x^2 + 18t^2y^2 + 48t^2 + 8tx^2y + ty^3 - 61ty + 11x^2 \\
&\quad + 18y^2 - 11 \\
g_7 &= 168t^4 - 192t^3y - 42t^2x^2 + t^2y^4 + 54t^2y^2 + 121t^2 + 11tx^2y - 192ty + x^2y^2 \\
&\quad + 47x^2 + y^4 + 54y^2 - 47 \\
g_8 &= 37t^5 - 18t^3y^2 + 64t^3 + 5t^2y^3 - 17t^2y - 15tx^2 - 18ty^2 + 27t + 5x^2y + 5y^3 \\
&\quad - 17y \\
g_9 &= 6t^3x^2 - 5t^2x^2y + tx^2y^2 + tx^2 - x^2y \\
g_{10} &= 37t^4y - 29t^3y^2 + 25t^3 + 6t^2y^3 + 24t^2y - 18tx^2 - 29ty^2 + 25t + 6x^2y + 6y^3 \\
&\quad - 13y
\end{aligned}$$

# Príloha B

## 4.1 Euklidovská teória kvadratických foriem a krivky 2. rádu

**Veta 4.1.** *Ortogonalné matice typu  $n \times n$  tvoria grupu, volá sa ortogonálna grupa a zvyčajne sa označuje  $O(n)$ .*

**Veta 4.2.** *Matica prechodu od ortonormálnej bázy v  $\mathbb{R}^n$  so štandardným skalárnym súčinom k ortonormálnej báze je ortogonálna matica. Tiež, ak od ortonormálnej bázy v  $\mathbb{R}^n$  prejdeme pomocou ortogonálnej matice prechodu k novej báze, tak aj nová báza bude ortonormálna.*

### 4.1.1 Invarianty kriviek 2. rádu

**Definícia 4.1.** *Invariantom krivky druhého rádu, vyjadrenej rovnicou*

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$$

*je každý taký algebraický výraz, závisiaci od  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a$ , ktorého hodnota sa nezmení, ak túto krivku vyjadríme v inom karteziánskom súradnicovom systéme, ku ktorému prejdeme pomocou otočení alebo posunutí (čím od rovnice, viažúcej staré premenné  $x_1, x_2$ , prejdeme k rovnici, viažúcej nové premenné  $x'_1, x'_2$ ).*

**Veta 4.3.** *Nasledujúce číselné výrazy sú invariantmi krivky 2. rádu, vyjadrenej rovnicou*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0.$$

Označíme  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  a vlastné hodnoty tejto matice označíme  $\lambda_1, \lambda_2$ .

$$s(x_1, x_2) = \text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22},$$

$$\delta(x_1, x_2) = \det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2,$$

$$\Delta(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix}.$$

Dá sa odvodiť nasledujúca prehľadná tabuľka.

<b>Typ</b>	$\delta$	<b>Tvar</b>
eliptický	$> 0$	ak $s_1 < 0$ : elipsa ak $s_1 > 0$ : kružnica; ak $s_1 = 0$ : bod
hyperbolický	$< 0$	hyperbola
parabolický	$= 0$	parabola