Московский Авиационный Институт
(Национальный исследовательский университет)

Выпускная квалификационная работа на тему:

«Исследование операций переключения между классами эквивалентности матриц Адамара»

Дипломник: студентка группы М8О-407Б-16, Довженко Анастасия Александровна
Руководитель: доцент 806 каф. Зайцев Валентин Евгеньевич

Москва, 2020

Постановка задачи

Создание программ являющихся частью программного комплекса по исследованию матриц Адамара. Необходимо реализовать алгоритм определения принадлежности двух матриц Адамара к одному классу эквивалентности.

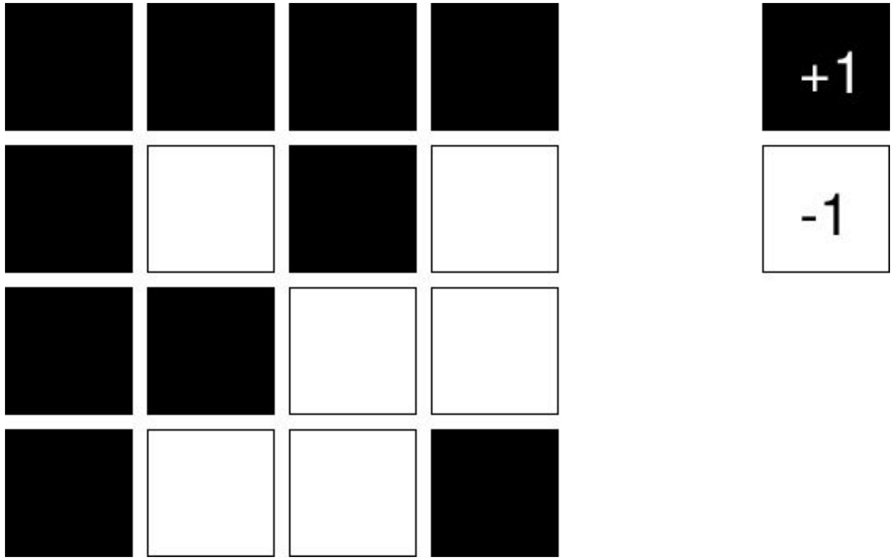
Матрица Адамара

- матрица Адамара порядка n — это матрица размера n × n, состоящая из чисел 1 и -1, для которой выполняется:

$$H \cdot H^T = nI,$$

где I — единичная матрица размера n × n.

- другими словами, строки матрицы Адамара ортогональны



Пример матрицы Адамара

Эквивалентность

- Если H — матрица Адамара, тогда матрица, полученная с помощью применения следующих операций, также является матрицей Адамара:
  - перестановка строк
  - перестановка столбцов
  - умножение на -1 всех элементов некоторой строки
  - умножение на -1 всех элементов некоторого столбца

- Если матрица Адамара A может быть получена путем применения этих операций к H, то матрицы A и H эквивалентны по Холлу.

Число классов эквивалентности

Порядок матрицы	Число классов эквивалентности
1, 2, 4, 8, 12	1
16	5
20	3
24	60
28	487
32	13710027
>=36	неизвестно

Источник: https://oeis.org/A007299

Отображение бинарной матрицы в целое число

Пусть A — бинарная матрица размера m × n, тогда

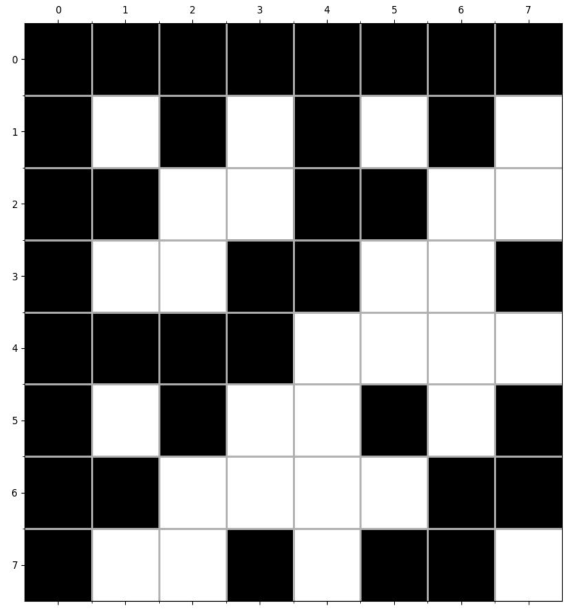
$$\rho(A) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}2^{n(m-i)+(n-j)}]$$

Пример:

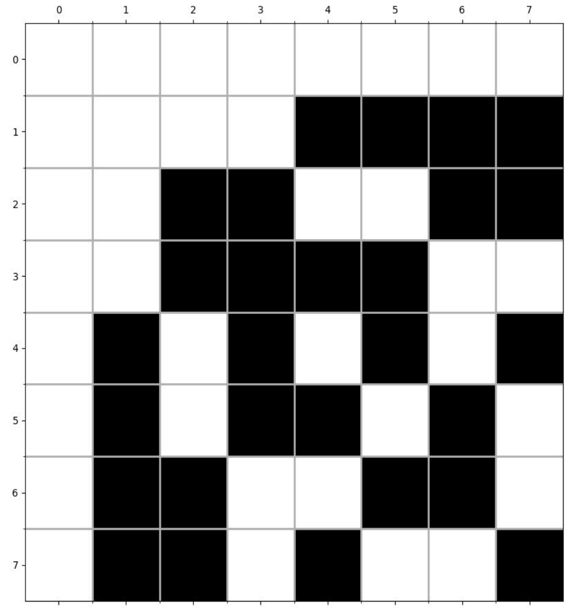
$$\rho\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1111\ 1010\ 1100\ 1001_{(2)} = 64201$$

Минимальная матрица

Минимальная матрица — матрица, которая имеет минимальное ρ в данном классе эквивалентности.



Матрица Адамара 8 порядка



Минимальная матрица соответствующего КЭ

Проверка эквивалентности двух матриц

- две матрицы Адамара эквивалентны, если они принадлежат одному классу эквивалентности

- класс эквивалентности имеет только одну минимальную матрицу

- необходимо найти минимальные матрицы из двух исходных матриц Адамара, а затем сравнить их

Вычислительная сложность

- Время работы алгоритма полного перебора:

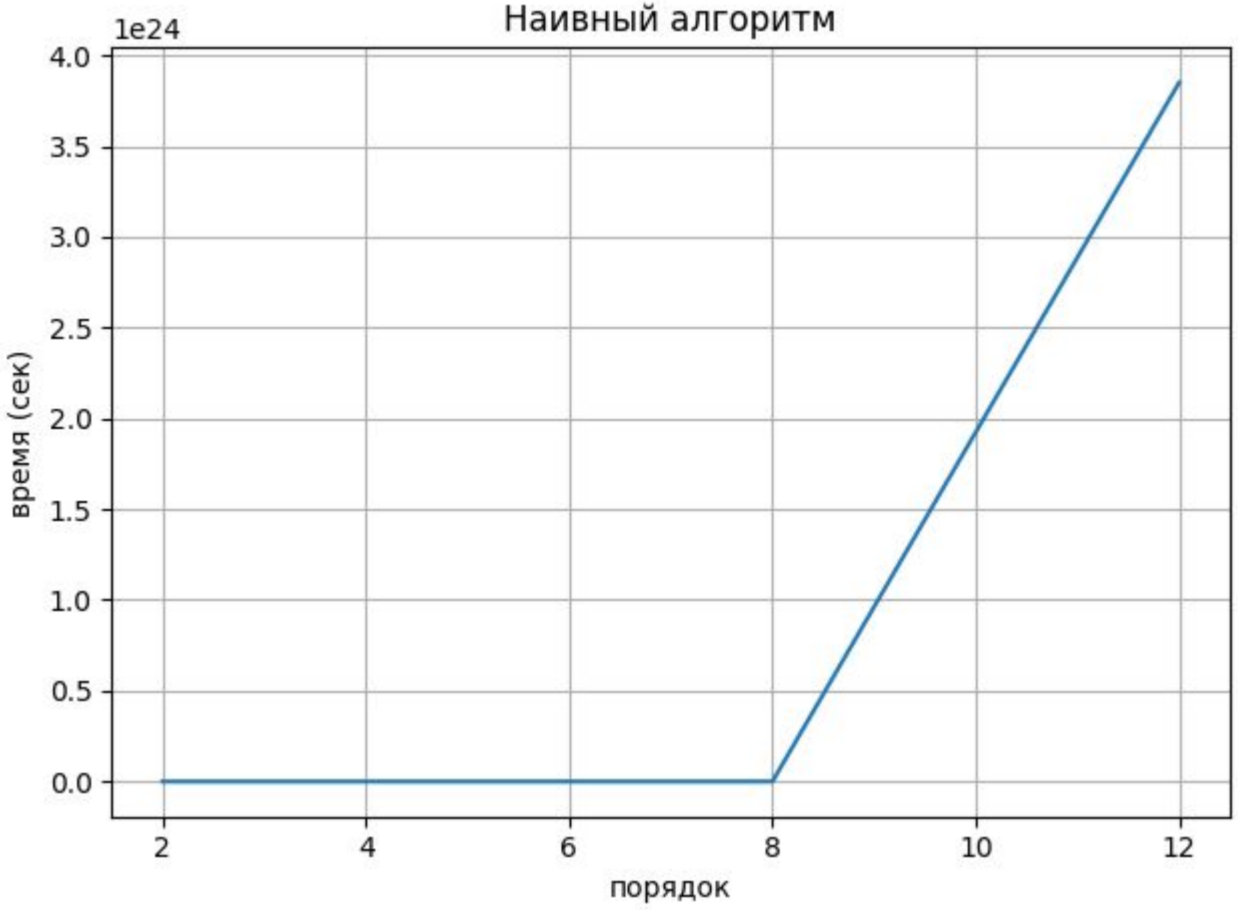
  Необходимо выполнить m! перестановок строк, n! перестановок столбцов и 2^(m+n) умножений строк и столбцов на -1.
  Общая сложность: $O(m!n!2^{m+n})$

- Время работы реализованного алгоритма:
  a. Все элементы в первой строке и первом столбце минимальной матрицы равны нулю.
  b. Для исходной двоичной матрицы H и минимальной матрицы L существуют матрицы перестановок P_r и P_c для которых выполняется

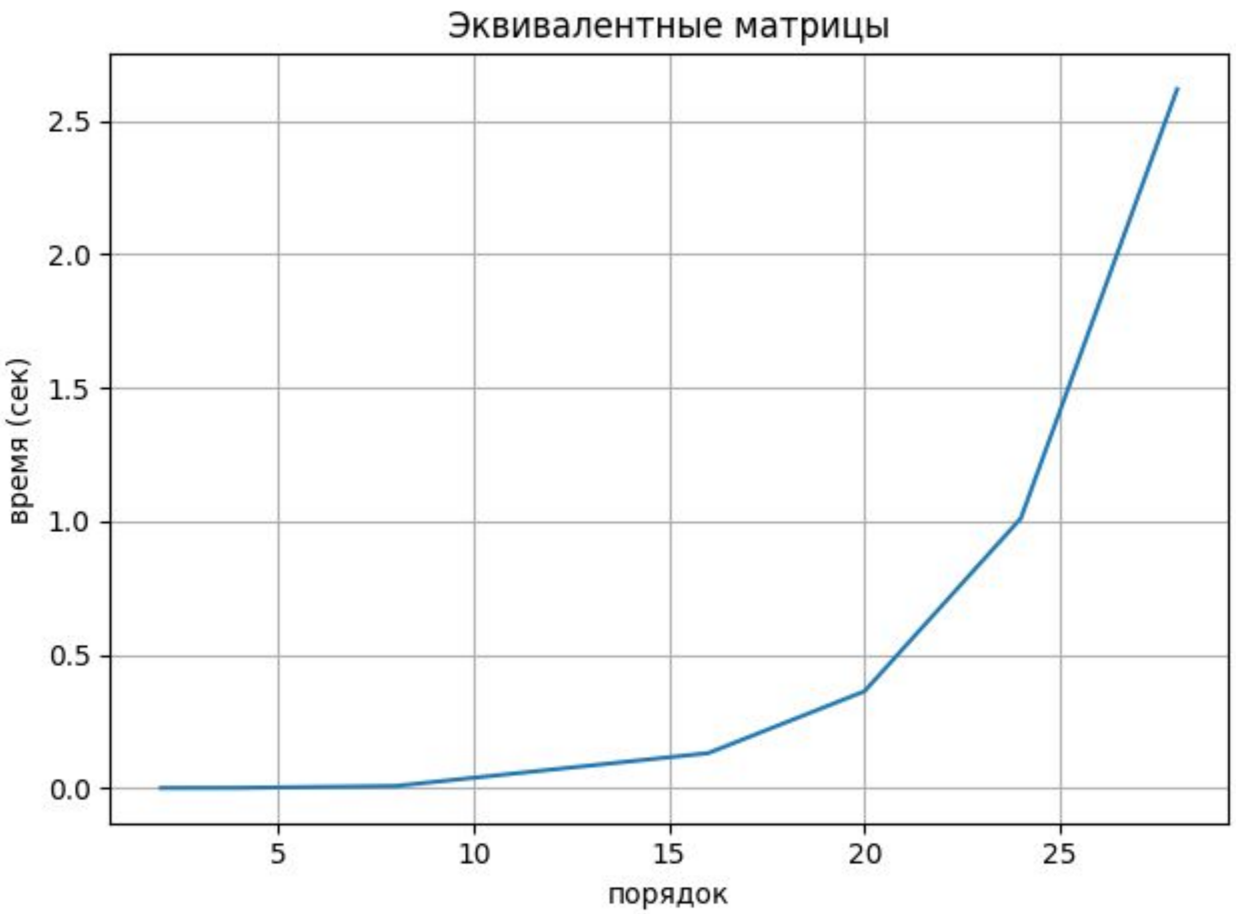
     L = N(P_r H P_c), где N — нормализация.
  c. Когда P_r и первый столбец P_c известны, оставшиеся столбцы P_c могут быть получены из пункта b.

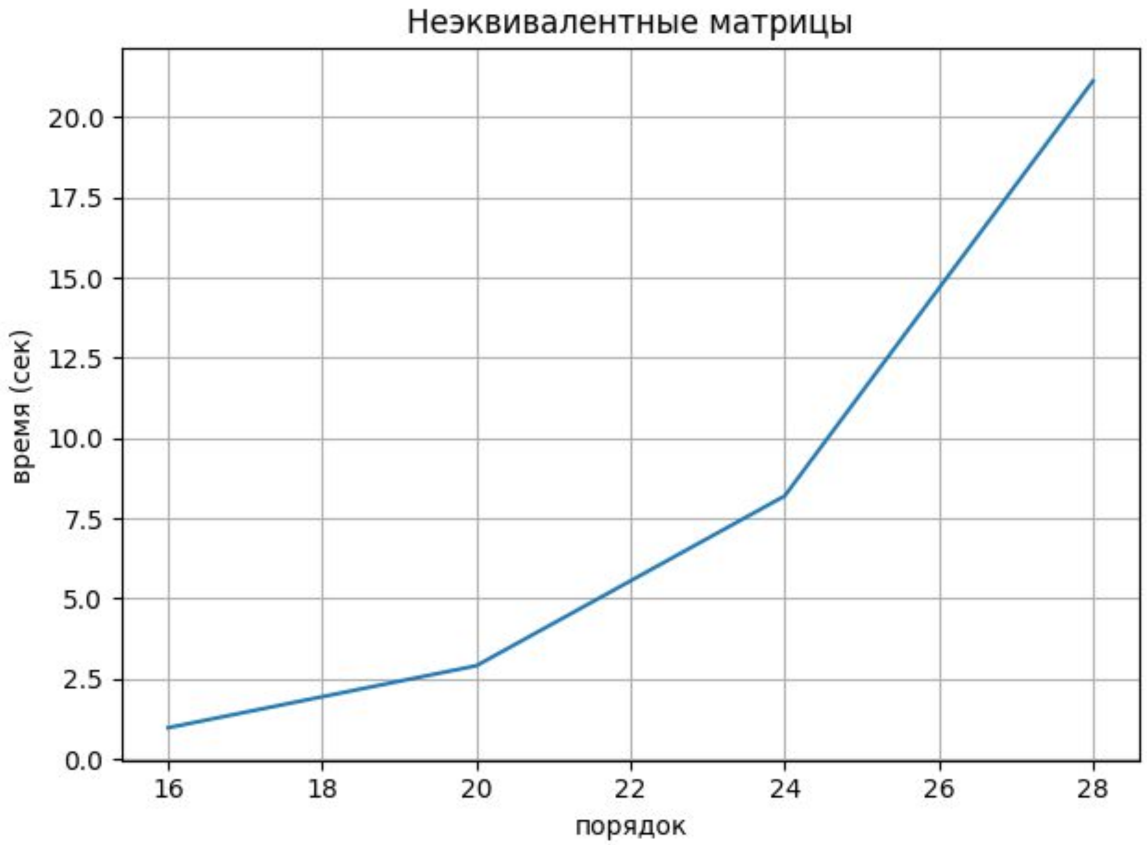
  Сложность нахождения P_r и первого столбца P_c — O(m!n)
  Сложность нахождения оставшихся столбцов P_c (сортировкой столбцов) —O(nlogn)
  Общая сложность: $O(m!n^2\log(n))$

Результаты тестирования



Результаты тестирования





Эвристика для ускорения проверки эквивалентности

- Реализованный алгоритм не смог посчитать минимальную матрицу порядка 32 за достаточно длительное время.

- Если две матрицы эквивалентны, то минимум может быть найден достаточно быстро. Для этого нужно установить ограничения по времени и/или по количеству итераций основного алгоритма. Далее происходит следующее:
    a. Запускаем основной алгоритм для двух исходных матриц
    b. При достижении ограничений, если минимальная матрица еще не найдена, останавливаем алгоритм и сравниваем полученные на этом шаге матрицы.
    c. Если полученные матрицы не равны, то продолжаем выполнение основного алгоритма. Если полученные матрицы равны, то запоминаем их, применяем к исходным матрицам операции, сохраняющие эквивалентность и запускаем основной алгоритм на них.
    d. Повторяем описанные процесс несколько раз. Если все сохраненные матрицы равны, то исходные матрицы эквивалентны. Если различны, то попробовать выполнить алгоритм с увеличенными ограничениями.

- Этот алгоритм ускоряет проверку только для эквивалентных матриц. Неэквивалентность матриц может быть проверена только с помощью основного алгоритма.

Заключение

В результате выполнения выпускной квалификационной работы:

- реализован алгоритм эффективной проверки эквивалентности двух матриц Адамара
- автоматизировано тестирование полученного алгоритма
- была оптимизирована проверка эквивалентности для матриц большого порядка
- исходный код: https://github.com/tutkarma/hadamard-matrix