Алескеров Ф. Т.
Хабина Э. Л.
Шварц Д. А.

Бинарные отношения, графы и коллективные решения

Москва
Издательский дом ГУ ВШЭ
2005

УДК 519.1(075)
ББК 22.176
А48

Подготовлено при содействии НФПК — Национального фонда подготовки кадров в рамках программы «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах».

Рецензенты:
академик РАЕН,
доктор технических наук, профессор *В.Н. Бурков*
заведующий лабораторией ЦЭМИ РАН, академик РАН,
доктор экономических наук *В.М. Полтерович*

ISBN 5-7598-0345-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 8

Глава 1. Паросочетания

1.1 Введение 14
1.2 Графы 15
1.3 Двудольные графы 19
1.4 Паросочетания 22
1.5 Трансверсали семейств множеств 36
1.6 Задачи 39

Глава 2. Обобщенные паросочетания, или паросочетания при линейных предпочтениях участников

2.1 Введение 42
2.2 Предпочтения участников и паросочетания 43
2.3 Устойчивые паросочетания 48
2.4 Манипулирование предпочтениями 52
2.5 Примеры обобщенных паросочетаний 53
2.6 Задачи 57

Глава 3. Бинарные отношения и функции выбора

3.1 Введение 62
3.2 Бинарные отношения и их свойства 63
3.3 Матрица смежности графа 73
3.4 Специальные классы бинарных отношений 74
3.5 Выбор по отношению предпочтения 80
3.6 Задачи 84

Глава 4. Задача голосования

4.1 Введение 90
4.2 Примеры правил голосования 92
4.3 Парадокс Эрроу 98
4.4 Парадокс Сена 107
4.5 Стратегическое поведение участников в задаче голосования 113
4.6 Задачи 119

Глава 5. Коллективные решения на графе
5.1 Введение 124
5.2 Внутренняя и внешняя устойчивость. Ядро 125
5.3 Другие нелокальные правила принятия коллективных решений 129
5.3.1 Позиционные правила 131
5.3.2 Правила, использующие мажоритарное отношение 135
5.3.3 Правила, использующие вспомогательную числовую шкалу 138
5.3.4 Правила, использующие турнирную матрицу . 140
5.3.5 q-Паретовские правила большинства 143
5.4 Задача о лидере 143
5.5 Задачи 149

Глава 6. Коалиции и влияние групп в парламенте
6.1 Введение 153
6.2 Голосование с квотой 154
6.3 Индекс влияния Банцафа 159
6.4 Анализ влияния групп и фракций в Государственной Думе Российской Федерации . . . 162
6.5 Институциональный баланс власти в Совете министров расширенного Евросоюза 167
6.6 Другие индексы влияния 171
6.6.1 Индекс Шепли — Шубика 171
6.6.2 Индекс Джонсона 172
6.6.3 Индекс Дигена — Пакела 173
6.6.4 Индекс Холера — Пакела 175
6.7 Задачи 175

Глава 7. Знаковые графы
7.1 Введение 178
7.2 Сбалансированность малых групп 179
7.3 Сбалансированность выборного органа 188
7.4 Анализ сбалансированности пьесы У. Шекспира «Макбет» 193
7.5 Задачи 196

Глава 8. Задача дележа
8.1 Введение 199
8.2 Процедура «дели и выбирай» 201
8.3 Манипулирование 202
8.4 Критерии справедливости дележа 203
8.5 Процедура «подстраивающийся победитель» 206
8.6 Свойства процедуры «подстраивающийся победитель» 213
8.7 Слияния фирм 216
8.8 Дележ при числе участников больше двух 219
8.9 Задачи 220

Решения задач, указания, ответы
Глава 1 223
Глава 2 231
Глава 3 238
Глава 4 252
Глава 5 256
Глава 6 266
Глава 7 280
Глава 8 282

Литература 291

Предметный указатель 296

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние 50 лет было выполнено значительное число исследований, относящихся к области, которую можно было бы обозначить как «теория коллективных решений». Эта теория включает, в первую очередь, такой классический результат, как теорему о невозможности К. Эрроу об агрегировании индивидуальных предпочтений в коллективное.

Сюда же можно отнести результаты, впервые полученные Д. Гейлом и Л. Шепли, об обобщенных паросочетаниях, в частности, для решения задачи о найме на работу, когда наниматели имеют предпочтения относительно работников, а работники — относительно фирм, которые их нанимают; задача же состоит в том, чтобы построить устойчивое распределение работников по фирмам.

Еще одним типом моделей описывается распределение влияния между участниками в выборных органах — тема, которая активно обсуждается в последнее время, в частности, в связи с расширением Европейского Союза.

Другой тип моделей, которые начали развиваться в 50-е гг. XX в., относится к понятию сбалансированности выборного органа, под которой понимается степень близости выборного органа, например парламента, к двухпартийной структуре.

Наконец, последний тип моделей, также активно разрабатываемых в последнее время, относится к задаче справедливого дележа, т.е. к тому, как справедливо поделить какие-либо ресурсы между участниками дележа.

Вышеназванные модели объединяются тремя признаками. Во-первых, как множество альтернатив, так и множество участников предполагаются конечными. Во-вторых, эти модели используют некоторый общий аппарат, а именно: бинарные отношения и графы, которыми моделируются предпочтения участников в перечисленных задачах. В-третьих, обычно эти модели разъясняются в различных специальных курсах, изучаемых на старших курсах бакалавриата или даже в магистратуре. Исключение составляет лишь теорема Эрроу, которая (в очень простой форме) иногда излагается в курсах микроэкономики на II курсе.

На наш взгляд, есть необходимость в единообразном и доступном изложении этих моделей для экономистов, политологов, студентов, обучающихся по специальностям «Государственное и муниципальное управление» и «Бизнес-информатика» еще в бакалавриате, а именно: на I или II курсе. Это необходимо прежде всего потому, что умение работать с дискретными моделями чрезвычайно важно для профессиональной деятельности будущих выпускников. Кроме того, мы считаем, что следует прививать студентам навыки работы с моделями на конечных множествах, т.е. то, что не изучается в стандартных курсах математического анализа и линейной алгебры на I курсе. Изучение таких моделей прививает студентам навык самостоятельной работы. Более того, учитывая, что модели в этой области формализуются достаточно просто, самостоятельная работа студентов может перерасти, как мы надеемся, в любовь к научным исследованиям.

Настоящая книга преследует все вышеназванные цели. Она написана на основе курса лекций, прочитанных Ф.Т. Алескеровым в 2004—2005 гг. на факультетах экономики, бизнес-информатики и государственного и муниципального управления ГУ ВШЭ под названием «Дискретные математические модели», «Дискретное моделирование» и «Теория выбора». Лекции сопровождались семинарами, которые вели А.П. Молчанов, Э.Л. Хабина и Д.А. Шварц.

Предлагаемое читателям учебное пособие имеет существенное отличие от книг по дискретной математике, в которых в большинстве своем предлагается математический подход к изложению материала без учета профессиональных интересов будущих специалистов. При «классическом» изложении строится обширная математическая теория и лишь затем (притом не всегда) рассматриваются ее отдельные практические приложения. Такой подход создает впечатление оторванности излагаемого материала от практических нужд. В настоящем пособии авторы предлагают иной подход: в начале каждой из глав рассматриваются конкретные практические задачи и проблемы, заимствованные из социально-экономической и политической сфер жизни современного общества. Затем строятся математические модели, для изучения которых предлагается соответствующий компактный математический аппарат.

Авторы отдают предпочтение алгоритмическому подходу к изложению материала. Именно поэтому доказательства большинства теорем носят конструктивный характер, что позволяет строить дискретные объекты, обладающие заданными свойствами.

Глава 1 посвящена изложению элементов классической теории паросочетаний, т.е. случаю, когда не учитываются предпочтения участников. Здесь приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории множеств, теории графов, обсуждается применение двудольных графов для наглядного представления паросочетания, описывается постановка «задачи о свадьбах», определяются максимальные и совершенные паросочетания, доказывается критерий существования в графе совершенного паросочетания, строится алгоритм нахождения максимального паросочетания. Кроме того, в этой главе описываются возможности применения теории паросочетаний для построения систем различных представителей для заданных семейств множеств.

В главе 2 рассматриваются обобщенные паросочетания при предпочтениях участников, которые описываются линейными порядками. Здесь излагаются условия классической рациональности предпочтений, приводится один из возможных методов построения устойчивых паросочетаний, обсуждаются возможности манипулирования предпочтениями со стороны участников. В заключение приводится ряд моделей, описываемых обобщенными паросочетаниями.

Глава 3 полностью посвящена бинарным отношениям, описанию их свойств и специальных классов, т.е. здесь развивается тот математический аппарат, который позволяет моделировать и изучать предпочтения участников, что является особенно важным в самых различных задачах о принятии решений. Для наглядного представления бинарных отношений используются графы, поэтому особое внимание уделяется переформулировке свойств бинарных отношений «на языке» графов. В этой главе описываются отношения несравнимости для частичных, слабых и линейных порядков. Значительное место отводится изучению выбора по отношению предпочтения. С этой целью вводятся функции выбора, рационализируемые как строгими, так и нестрогими предпочтениями.

Вопросам построения коллективного выбора посвящена глава 4. При этом предпочтения участников по-прежнему описываются линейными порядками, а коллективное решение — некоторым бинарным отношением. Здесь приводятся различные правила голосования (правило простого большинства, относительного большинства, правило Борда и др.). Основное же внимание уделяется изложению аксиоматической теории агрегирования локальных правил, рассмотрению парадокса Эрроу, а также парадокса Сена (о невозможности паретовского либерала). Завершается глава обсуждением возможностей стратегического поведения участников голосования.

В главе 5 продолжается обсуждение вопросов агрегирования, но теперь это агрегирование на графах. Здесь устанавливается взаимосвязь ядра графа с внутренне и внешне устойчивыми множествами. Кроме того, рассматриваются некоторые нелокальные правила принятия коллективных решений (процедуры Кумбса, Нансона, Фишберна, правила Коупленда и др.). Особое место занимает «задача о лидере», в которой описывается процедура выявления победителя турнира, учитывающая относительную силу его участников.

Глава 6 посвящена коалициям и определению влияния участников коалиций. Здесь вводятся понятия выигрывающей коалиции, характеристической функции, ключевых участников выигрывающих коалиций, а также рассматриваются различные индексы влияния, среди которых индекс Банцафа, Шепли — Шубика, Джонсона и др. С помощью индекса Банцафа изучается влияние фракций и депутатских групп в Государственной Думе Российской Федерации 3-го созыва, институциональный баланс власти в Совете министров расширенного Евросоюза. Приводятся также необходимые сведения из комбинаторики.

В главе 7 рассматриваются проблемы сбалансированности групп. Для описания взаимоотношений в малых группах вводятся знаковые графы, определяются понятия сбалансированности малой группы и соответствующего ей графа, приводится критерий сбалансированности знакового графа, а также несколько различных мер относительной сбалансированности знаковых графов. Эти методы применяются для анализа сбалансированности Государственной Думы Российской Федерации 3-го созыва, а также для анализа литературных произведений на примере пьесы У. Шекспира «Макбет».

Глава 8 посвящена задаче справедливого дележа в ее дискретной формулировке. Рассматривается процедура «дели и выбирай», обсуждаются возникающие при ее реализации проблемы, формулируются условия справедливого дележа. В качестве альтернативы процедуре «дели и выбирай» приводится процедура «подстраивающийся победитель», исследуется вопрос о справедливости дележа, получаемого с помощью указанной процедуры.

Каждая глава снабжена задачами и упражнениями, решения, указания и ответы к которым приводятся в конце книги. Многие задачи носят профессионально-ориентированный характер и служат инструментом для выработки умений и навыков общения студентов с дискретными объектами социально-экономической и общественно-политической природы.

Обратим внимание преподавателей на то, что каждая глава содержит больше материала, чем может быть изложено в двухчасовой лекции. Поэтому за преподавателем остается выбор степени подробности, с которой будут излагаться те или иные вопросы.

Предполагается, что читатели хорошо знакомы с основами теории множеств, поэтому в книге в качестве напоминания приводятся лишь самые необходимые факты. Читателям, впервые знакомящимся с теорией множеств, авторы рекомендуют предварительно изучить специальную литературу по этому вопросу, например, [13], [15], [25].

Благодарности

Мы очень благодарны нашим студентам, которые одобрительно приняли курс, высказали много ценных замечаний по изложению материала и предложенным задачам.

Кроме того, мы благодарны ряду коллег, без поддержки которых этот курс вряд ли был бы прочитан. Среди них особенно отметим В.С. Автономова, Я.И. Кузьминова, М.И. Левина, Л.Л. Любимова, И.В. Прангишвили, Т.А. Протасевич, Р.М. Энтова, А.А. Яковлева, Е.Г. Ясина.

Особая благодарность В.М. Полтеровичу, который высказал много ценных замечаний по содержанию и фактически предложил настоящее название книги.

Мы очень признательны Н.А. Андрюшиной, Л.А. Судалиной и В.И. Якубе, которые помогли при подготовке текста, В.В. Шувалову, решившему многие технические проблемы, и редактору книги

О.А. Шестопаловой, «выловившей» не только огромное количество опечаток, но и несколько содержательных ошибок.

Ряд коллег оказали нам помощь в подготовке отдельных материалов. В первую очередь мы хотим упомянуть безвременно ушедшего А.П. Молчанова, который также вел семинары по этому курсу.

В.И. Якуба написал компьютерные программы по отдельным разделам курса.

Ф.Т. Алескеров благодарит за частичную поддержку работы грантом № 285/10-04 Государственного университета — Высшей школы экономики «Модели оценки влияния участников на коллективное принятие решений при учете предпочтений участников и их использование для анализа ГД РФ с 1994 по 2003 г.», а также грантом РФФИ № 05-01-00188 «Модели влияния групп в выборном органе и его устойчивости и их применение к ГД РФ 1993—2006 гг.».

Наконец, мы благодарны нашим семьям, которые терпеливо поддерживали нашу работу над книгой.

1 глава

ПАРОСОЧЕТАНИЯ

1.1 Введение

Одна из известных задач об организации работ состоит в следующем: задано множество работников и множество работ. Как наилучшим образом распределить работников по работам? Эта задача часто интерпретируется как «задача о свадьбах». Иначе говоря, речь идет об эффективном в каком-то смысле составлении пар «работник — работа» или «жених — невеста». Набор таких пар далее называется паросочетанием.

Эта задача была предметом активного исследования в теории графов в 20-е—30-е гг. XX в. ([8], [12], [21]).

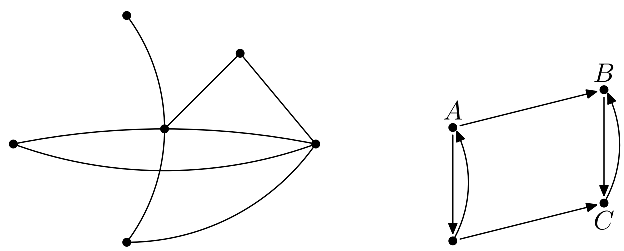
В параграфе 1.2 приводятся необходимые сведения из теории множеств, теории графов, описывается постановка «задачи о свадьбах». В параграфе 1.3 излагаются вопросы, связанные с двудольными графами и возможностью их применения для наглядного представления паросочетаний. Параграф 1.4 посвящен паросочетаниям специального вида, так называемым максимальным и совершенным паросочетаниям. Здесь приводится критерий существования в графе совершенного паросочетания, алгоритм построения максимального паросочетания, а также теорема, дающая представление о размере максимального паросочетания в графе. В параграфе 1.5 представлен материал о трансверсалях семейств множеств, описываются возможности применения теории паросочетаний для построения систем различных представителей для заданных семейств множеств. Эти системы имеют прямое отношение к задаче составления комиссий, когда надо наиболее полно учесть различную специализацию членов комиссий. Эта задача также описывется в параграфе 1.5.

Параграф 1.6 содержит задачи к данной главе.

1.2

Графы

Граф — это математический объект, который состоит из *вершин* и *дуг*. Например, вершины — это города и населенные пункты Московского региона, включая Москву, дуги могут означать дороги. Заметим, что и Москва, и самый мелкий населенный пункт представлены на этом графе одинаковыми вершинами (рис. 1.1а).



а))

Рис. 1.1

Дугами можно не только представить дороги, но и, например, показать наличие поставок товаров. Тогда может возникнуть такая ситуация: из пункта A в пункт B поставки есть, а из B в A поставок нет. Этот факт можно обозначить *ориентированной* (направленной) дугой (рис. 1.1б). Наличие двух ориентированных дуг из B в C и из C в B показывает, что поставки товаров проводятся как из B в C, так и обратно. Если речь идет о дорогах, наличие одной ориентированной дуги означает, например, дорогу с односторонним движением.

Ситуацию с ориентированными дугами из B в C и из C в B можно было бы обозначить *неориентированной* дугой, как на рис. 1.1а, и получился бы граф, в котором содержатся как ориентированные, так и неориентированные дуги. Однако далее такие графы рассматриваться не будут.

Также можно представить себе граф, в котором две вершины соединены более чем двумя дугами — так, как это показано на рис. 1.2. Здесь из C в A ведут три дуги, что вполне возможно, если речь идет о дорогах. Однако такие графы (их называют *мультиграфами*) также рассматривать не будем.

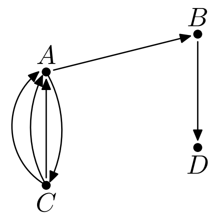


Рис. 1.2

Рассмотрим еще один пример. Вершинами графа могут обозначаться сотрудники какой-либо организации, а направленная дуга из вершины x в вершину y может означать согласие сотрудника x работать с сотрудником y. Заметим, что при этом y может не хотеть работать с x.

Такого рода задачи на графах используются для подбора сотрудников бригад, работающих над проектом. Подробнее об этом будет рассказано в главе 7.

Теперь можно дать несколько формальных определений.

Графом называется пара $G = (A, \Gamma)$, где A — конечное множество вершин, Γ — множество дуг (иногда их называют ребрами), связывающих эти вершины. Если вершины x и y из множества A соединены дугой, то дуга (x, y) принадлежит Γ, т.е. $(x, y) \in \Gamma$. Таким образом, $\Gamma \subseteq \{(x, y) | x \in A, y \in A\}$.

Напомним, что множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in A$, называется *декартовым* (или *прямым*) *произведением* множества A на себя и обозначается $A \times A$ или A^2, т.е.

$$A \times A = \{(x, y) | x \in A, y \in A\}.$$

Поэтому множество дуг Γ графа $G = (A, \Gamma)$ является подмножеством декартова произведения $A \times A$.

Напомним также, что *мощность* (число элементов) *конечного множества* X обозначается через $|X|$. Поэтому число дуг графа $G = (A, \Gamma)$ равно $|\Gamma|$. Например, для графа, изображенного на рис. 1.2, имеем $|\Gamma| = 6$.

Для ориентированных графов наличие дуги (x, y) означает, что дуга направлена из вершины x в вершину y. Иногда дуга (x, y) обозначается как xy.

Любое подмножество декартова произведения $A \times A$ называется *бинарным отношением*, заданным на множестве A. Уже исходя из смысла слова «бинарное» ясно, что таким отношением связываются пары элементов. Например, высказывание «x есть брат y» задает бинарное отношение на множестве людей, а «x есть делитель y» — на множестве натуральных чисел. Бинарное отношение, заданное на множестве автомобилей, может означать предпочтение какого-то покупателя.

Факт принадлежности пары (x, y) к бинарному отношению Γ обозначается как $x\Gamma y$ или $(x, y) \in \Gamma$.

Поскольку множество Γ дуг графа $G = (A, \Gamma)$ есть подмножество декартова произведения $A \times A$, можно сказать, что граф $G = (A, \Gamma)$ изображает бинарное отношение Γ, заданное на множестве A.

Рассмотрим последовательность пар вида (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\ldots$, (x_{n-1}, x_n), $n \geq 2$, обладающую тем свойством, что каждая пара (x_i, x_{i+1}), $i = 1, \ldots, n-1$ является дугой графа G. Такая последовательность называется *цепью* (иногда ее называют *путем*), ведущей из x_1 в x_n. Если $x_1 = x_n$, то такая цепь называется *циклом*. *Длиной* цепи (цикла) называется число входящих в него дуг, т.е. в данном случае $n - 1$. В неориентированных графах цикл называют также *контуром*.

Цепь, все вершины которой, кроме, возможно, начальной и конечной, попарно различны, называется *простой цепью*.

Цикл называется *простым,* если все его вершины, кроме начальной и конечной, различны.

Пример. Рассмотрим граф, показанный на рис. 1.3а (с. 18).

Здесь последовательность дуг (b, c), (c, d), (d, e) является цепью. Цепями являются также последовательность (a, b), (b, e), (e, b) и просто дуга (b, c). Циклом является последовательность дуг (b, c), (c, d), (d, e), (e, b)

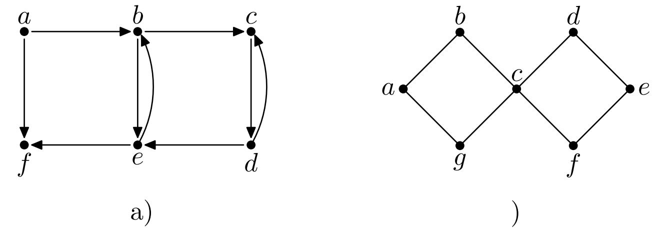


Рис. 1.3

и даже $(b,e),(e,b)$. Но из приведенных примеров простыми будут только цепь (b,c), (c,d), (d,e) и оба цикла.

На рис. 1.3б показан другой граф. Здесь последовательность дуг (a,b), (b,c), (c,d), (d,e) образует простую цепь, а (b,c), (c,d), (d,e), (e,f), (f,c) — цепь, которая не является простой, поскольку вершина c встречается в ней два раза.

Простыми циклами здесь будут (a,b), (b,c), (c,g), (g,a) и (e,d), (d,c), (c,f), (f,e). Цикл (a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,f), (f,c), (c,g), (g,a) простым не является, поскольку вершина c встречается в нем два раза.

Рассмотрим теперь следующую ситуацию. На танцы пришли трое мужчин и три женщины, которых обозначим через m_1, m_2, m_3 и w_1, w_2, w_3 соответственно. Обозначение m идет от слова *man*, w — от слова *woman* (такова традиция в этой области).

Предположим, что мужчины и женщины разбиваются на пары знакомых, и далее весь вечер пары партнерами не обмениваются. Естественно, знакомства могут быть организованы самым различным образом, например, как на рис. 1.4.

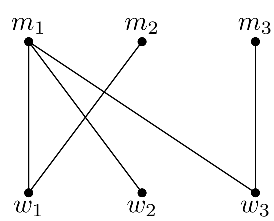


Рис. 1.4

Здесь элементы m_i и w_j соединены дугой, если мужчина m_i и женщина w_i знакомы. Из этого рисунка следует, что m_1 знаком со всеми женщинами, m_2 — только с w_1 и m_3 знаком с w_3.

Сформулируем задачу: как организовать пары, чтобы в танцах участвовало как можно больше людей? Ответ на этот вопрос дается в теории паросочетаний, которой и посвящена эта глава.

Рассмотрим следующее множество пар: $\{m_1w_1, m_3w_3\}$. При такой организации пар m_2 и w_2 в танцах не участвуют. Однако это не лучшее решение — если создать пары иначе, например, так: $\{m_1w_2, m_2w_1, m_3w_3\}$, — то все мужчины и женщины смогут получить удовольствие от вечера. Согласно старой традиции, эта задача называется также *задачей о свадьбах*.

Конечно, может возникнуть вопрос: стоит ли создавать теорию для решения такой задачи? Однако эта модель — самая простая. Более сложная модель подобного типа — распределение работников для выполнения работ. В такой модели M — множество работников, W — множество работ, а дуги между M и W означают умение работника выполнять ту или иную работу.

Тогда поставленная задача — задействовать как можно больше пар — имеет смысл для эффективного использования персонала.

Если множества M и W содержат по три элемента, как в рассмотренном выше примере, то очевидно, что решение можно найти «вручную». Если же эти множества содержат много элементов, сотни и тысячи (представьте себе биржу труда), то найти искомое решение без развитых вычислительных алгоритмов и компьютеров невозможно.

Далее как раз и описывается техника решения поставленной задачи.

1.3

Двудольные графы

В *двудольных графах* множество вершин A задается как объединение непересекающихся множеств X и Y, т.е. $A = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$, причем вершины из X могут быть соединены только с вершинами из

Y и наоборот, а две вершины из X (или две вершины из Y) между собой не соединяются.

Обозначим двудольный граф как $G = (X \cup Y, \Gamma)$. Формально вышеуказанное условие означает, что $\Gamma \subseteq ((X \times Y) \cup (Y \times X))$. Кроме того, двудольный граф не ориентирован, т.е. если $(x, y) \in \Gamma$, то и $(y, x) \in \Gamma$.

Такой граф удобно представлять в следующем виде (рис. 1.5):

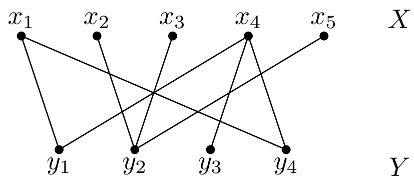


Рис. 1.5

Заметим, что множества X и Y могут содержать разное число элементов.

Для двудольных графов обычно принимается, что любая вершина в X соединена дугой с какой-нибудь вершиной в Y и любая вершина в Y соединена с какой-нибудь вершиной в X. Вершины графа, которые не соединены никакой дугой с другой вершиной, называются *изолированными*. Таким образом, принимается, что в двудольном графе изолированных вершин нет.

На рис. 1.6а изображен двудольный граф без изолированных вершин, а на рис. 1.6б — граф с одной изолированной вершиной x_1.

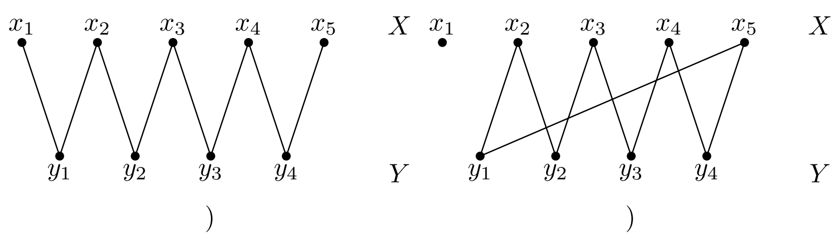


Рис. 1.6

Если X обозначает множество мужчин, Y — множество женщин, то упоминавшееся выше знакомство пар можно описывать двудольным графом.

Дуга называется *инцидентной* вершине x, если элемент x является одним из концов этой дуги. Так, на рис. 1.5 дуга x_1y_4 инцидентна вершинам x_1 и y_4. Аналогично вершина x *инцидентна* дуге, если она является одним из концов этой дуги.

Степенью вершины a в графе G называется число $\delta(a)$ инцидентных этой вершине дуг, т.е. дуг вида (a, b). Например, на рис. 1.5 имеем $\delta(x_1) = 2$, $\delta(x_4) = 3$, $\delta(y_3) = 1$.

Начнем изучение двудольных графов (и, тем самым, изучение проблемы распределения работ) с нескольких простых теорем.

Теорема 1. *В двудольном графе* $G = (X \cup Y, \Gamma)$ *имеет место равенство*

$$\sum_{x\in X} \delta(x) = \sum_{y\in Y} \delta(y) = |\Gamma|.$$

Доказательство. Поскольку каждое ребро инцидентно ровно одной вершине в X, то $|\Gamma| = \sum\limits_{x\in X} \delta(x)$. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. ■

Задача. Пусть есть множество работ Y и множество работников X, причем для каждого вида работ есть ровно k работников, которые могут выполнять эту работу, и каждый работник может выполнять ровно k работ.

Например, если имеется три работника и три вида работ, и при этом каждый вид работ могут выполнять ровно два работника, и каждый работник может выполнять ровно два вида работ, то описанная ситуация может быть изображена в виде графа, показанного на рис. 1.7.

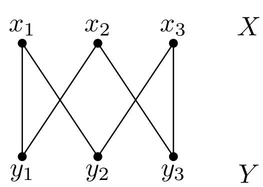


Рис. 1.7

Покажем, что:

а) число работников равно числу работ, т.е. $|X| = |Y|$;

б) для любого n-элементного подмножества A множества X существует не меньше n видов работ, которые может выполнять хотя бы один работник из A.

Решение. Согласно условию задачи $\delta(x) = \delta(y) = k$ для любых вершин $x \in X$ и $y \in Y$. Тогда по теореме 1 имеем $|X| \cdot k = |Y| \cdot k = |\Gamma|$, откуда следует, что $|X| = |Y|$. ■

Для решения части б) задачи определим множество

$$J(A) = \{y \in Y \,|\, (x, y) \in \Gamma \text{ для какого-нибудь } x \in A\}.$$

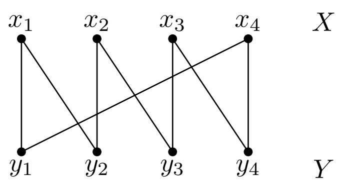


Рис. 1.8

На рис. 1.8 изображен двудольный граф G, обладающий тем свойством, что $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, $\delta(x) = \delta(y) = k$. Такие графы называются *регулярными степени* k (в нашем случае $k = 2$). Рассмотрим подмножество $A = \{x_1, x_2, x_4\}$ множества X. Множество $J(A)$ для A равно

$$J(A) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = Y.$$

Продолжим решение задачи. Поскольку каждая вершина инцидентна ровно k дугам, множество Γ_A дуг, которые инцидентны вершинам в A, содержит $k \cdot |A| = k \cdot n$ дуг (проверьте для графа на рис. 1.8). По определению множества $J(A)$ каждая из этих дуг имеет инцидентную ей вершину в Y. Согласно условию задачи общее число дуг, инцидентных вершинам в $J(A)$, равно $k \cdot |J(A)|$. Отсюда следует, что

$$|\Gamma_A| = k \cdot n \leq k \cdot |J(A)|,$$

т.е. $|J(A)| \geq n$.

1.4

Паросочетания

Естественный вопрос, который возникает при решении задач о женихах и невестах или о работах и работниках, — как задействовать максимальное число людей (поженить в первой задаче и нанять для выполнения работ во второй).

Паросочетанием в двудольном графе $G = (X \cup Y, \Gamma)$ называется такое подмножество дуг $M \subseteq \Gamma$, что никакие две дуги из M не имеют общей вершины. Примеры паросочетаний представлены на рис. 1.9 и выделены жирными линиями.

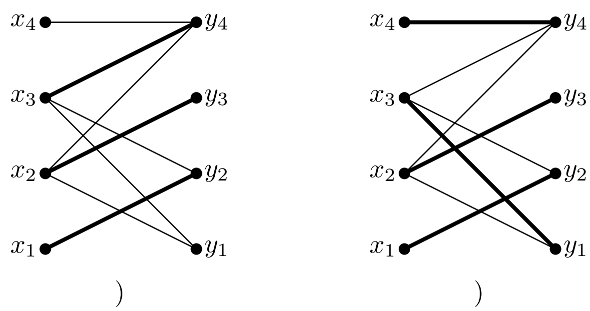


Рис. 1.9

Паросочетание в G называется *максимальным,* если в G не существует паросочетания большей мощности, т.е. содержащего большее число дуг.

Далее положим для определенности, что $|X| \leq |Y|$.

Если $|M| = |X|$ (т.е. все женихи находят невест), то паросочетание M называется *совершенным*.

Паросочетание, выделенное на рис. 1.9а жирными линиями, не максимально, т.к. содержит три дуги, а в графе G существует паросочетание, содержащее четыре дуги. Оно показано на рис. 1.9б. Поскольку $|X| = |Y| = 4$, то паросочетание на рис 1.9б по определению совершенно. Оно и максимально, т.к. число дуг в паросочетании не может быть больше числа вершин в X (или в Y), т.е. больше 4.

Паросочетание на рис. 1.10 (с. 24) максимально, но не совершенно. Действительно, мощность данного паросочетания — 3. Предположим, что существует паросочетание большей мощности, т.е. содержащее четыре дуги. Это означает, что дуги этого паросочетания выходят из всех вершин Y, в частности из y_1 и y_4. Из этих вершин выходят только дуги x_4y_1 и x_4y_4, но они имеют общую вершину и не могут одновременно принадлежать паросочетанию. Следовательно, первоначальное паросочетание максимально. Но поскольку в нем только три дуги, а $|X| = |Y| = 4$, то оно не совершенно.

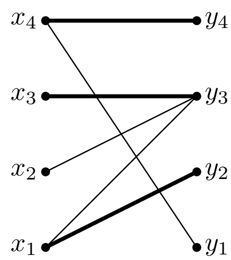


Рис. 1.10

Исследуем вопрос о существовании совершенных паросочетаний в двудольных графах. Для этого напомним определение множества $J(A)$, введенное в предыдущем параграфе: для $A \subseteq X$

$$J(A) = \{y \in Y \,|\, (x, y) \in \Gamma \text{ хотя бы для одного } x \in A\}.$$

Пусть $J(A)$ содержит меньше элементов, чем A, или, более формально, $|J(A)| < |A|$, тогда в терминах задачи о женихах и невестах число женщин, знакомых с мужчинами из A, меньше, чем число мужчин, т.е. кому-то из A невесты не достанется. Поэтому условие $|J(A)| \geq |A|$ является необходимым для существования совершенного паросочетания. Оказывается, что оно является и достаточным.

Это условие называется *условием Холла,* по имени математика Филиппа Холла[1], исследовавшего аналогичную проблему в 1935 г.

Теорема 2. *Двудольный граф $G = (X \cup Y, \Gamma)$ имеет совершенное паросочетание, если и только если для всех $A \subseteq X$ выполняется условие Холла, т.е.*

$$\forall A \subseteq X \quad |J(A)| \geq |A|.$$

Доказательство. Предположим, что в графе G имеется совершенное паросочетание. Тогда $\forall A \subseteq X$ вершины в Y, которые

[1] Филипп Холл (1904—1982) — английский математик, член Лондонского королевского общества (1942), с 1953 г. — профессор Кембриджского университета.

образуют паросочетание с вершинами из A, образуют подмножество $\Delta(A) \subseteq J(A)$ мощности $|\Delta(A)| = |A|$, т.е. $|J(A)| \geq |A|$.

Предположим теперь, что условие Холла выполняется. Пусть M — такое паросочетание, что $|M| < |X|$. Покажем, что можно построить паросочетание M', удовлетворяющее условию

$$|M'| = |M| + 1,$$

т.е. покажем, что можно увеличить число дуг в паросочетании на единицу. Доказательство проиллюстрируем примером. На рис. 1.11а выделено не совершенное паросочетание. Можно проверить, что для этого двудольного графа выполняется условие Холла.

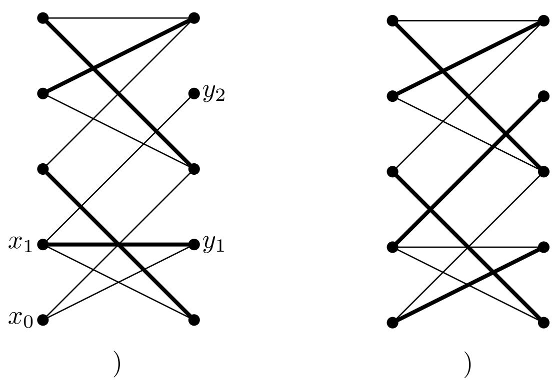


Рис. 1.11

Рассмотрим вершину x_0, которой не инцидентна ни одна дуга, образующая паросочетание M. Из условия Холла следует, что

$$|J(\{x_0\})| \geq |\{x_0\}| = 1,$$

т.е. существует хотя бы одна дуга вида x_0y_1. Эта дуга не входит в паросочетание M, и если никакая дуга паросочетания не инцидентна вершине y_1 , то добавим дугу x_0y_1 в M и получим искомое утверждение.

В противном случае (т.е. так, как это показано на рис. 1.11а) рассмотрим вершину x_1, которая связана дугой паросочетания с y_1. Тогда для множества $\{x_0, x_1\}$ по условию теоремы имеем

$$|J(\{x_0, x_1\})| \geq |\{x_0, x_1\}| = 2,$$

т.е. существует вершина y_2, помимо y_1, которая связана дугой либо с x_0, либо с x_1. Если какая-либо дуга паросочетания M инцидентна y_2 и связана с вершиной x_2, продолжим этот процесс и найдем вершину y_3, которая связана дугой либо с x_0, либо с x_1, либо с x_2. Поскольку граф G конечен, то, продолжая таким образом, придем к какой-то вершине y_r, которая не инцидентна никакой дуге паросочетания.

В нашем примере y_2 — такая вершина, на которой процесс поиска останавливается.

Теперь каждая вершина y_i $(1 \leq i \leq r)$ связана дугой хотя бы с одной из вершин $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$, т.е. мы получили цепь вида

$$x_0y_1, y_1x_1, x_1y_2, \dots, x_{r-1}y_r,$$

в которой дуги вида x_iy_i $(1 \leq i \leq r-1)$ принадлежат M, а дуги вида $x_{i-1}y_i$ $(1 \leq i \leq r)$ не принадлежит M. Такая цепь называется *чередующейся* цепью.

В примере на рис. 1.11а эта цепь имеет вид

$$x_0y_1, y_1x_1, x_1y_2.$$

Здесь дуга x_1y_1 принадлежит M, а дуги x_0y_1 и x_1y_2 M не принадлежат.

Построим теперь новое паросочетание M' так: исключим из M дуги чередующейся цепи вида x_iy_i и, наоборот, включим в него дуги, которые ранее в M не входили, но входят в найденную чередующуюся цепь. Поскольку теперь дуги x_0y_1 и $x_{r-1}y_r$ вошли в M', то $|M'| = |M| + 1$.

В нашем примере исключим из M дугу x_1y_1 и включим в M' дуги x_0y_1 и x_1y_2. Это паросочетание показано на рис. 1.11б. Оно уже получилось совершенным. Если же полученное паросочетание не совершенно, то построим новое паросочетание M'' с $|M''| = |M'| + 1$ и, продолжая этот процесс, в конце концов придем к совершенному паросочетанию. ■

Скажем еще несколько слов о чередующихся цепях. Цепь вида $x_0y_1, y_1x_1, x_1y_2, y_2x_2, \dots, x_{k-1}y_k$ называется чередующейся цепью для паросочетания M, если дуги вида x_iy_i находятся в M и дуги вида

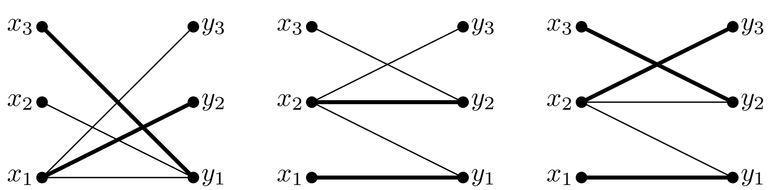
$x_{i-1}y_i$ паросочетанию M не принадлежат. Отметим, что первая дуга x_0y_1 и последняя дуга $x_{k-1}y_k$ паросочетанию M не принадлежат. Именно эти дуги включаются в M', а также все дуги вида $x_{i-1}y_i$, что увеличивает число дуг в M' по сравнению с M.

Рассмотрим два двудольных графа (рис. 1.12а и 1.12б). Проверим, выполняются ли для них условия Холла, заполнив таблицу (множества $J(A)$ для первого и второго графов обозначаются $J_1(A)$ и $J_2(A)$ соответственно).

A	$J_1(A)$	$J_2(A)$
$X = \{x_1, x_2, x_3\}$	$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$	Y
$\{x_1, x_2\}$	Y	Y
$\{x_1, x_3\}$	Y	$\{y_1, y_2\}$
$\{x_2, x_3\}$	$\{y_1\}$	Y
$\{x_1\}$	Y	$\{y_1\}$
$\{x_2\}$	$\{y_1\}$	Y
$\{x_3\}$	$\{y_1\}$	$\{y_2\}$

Для первого из графов условие Холла не выполняется, поэтому совершенного паросочетания в этом случае не существует, и паросочетание, показанное на рис. 1.12а, максимально.

Для второго графа условие Холла выполняется и показанное на рис. 1.12б паросочетание не максимально. Поэтому для него должна найтись чередующаяся цепь. Таковой является цепь x_3y_2, y_2x_2, x_2y_3. Удалив из паросочетания дугу y_2x_2 и добавив x_3y_2 и x_2y_3, получим совершенное паросочетание (рис. 1.12в).



)))

Рис. 1.12

В общем случае двудольные графы редко имеют совершенные паросочетания, т.к. условие Холла, вообще говоря, — достаточно ограничительное условие. Поэтому возникает вопрос о нахождении максимальных паросочетаний. В терминах задачи о женихах и невестах это означает, что требуется найти такое паросочетание, чтобы поженить наибольшее возможное число пар.

Заметим, что нарушение условия Холла означает, что существует $A \subseteq X$ такое, что $|A| > |J(A)|$, т.е. число женихов больше возможного числа невест. В этом случае при построении максимального паросочетания, как указывалось ранее, кому-то из множества A невесты не достанется. Очевидно, что число таких одиноких женихов (а в терминах «работники — работы» — число не получивших работу) не менее

$$|A| - |J(A)|.$$

Дефицитом двудольного графа $G = (X \cup Y, \Gamma)$ называется величина

$$d = \max_{A \subseteq X} (|A| - |J(A)|).$$

Поскольку по определению пустое множество является подмножеством X, т.е. $\varnothing \subseteq X$, и $|\varnothing| = |J(\varnothing)| = 0$, то всегда $d \geq 0$.

Используя понятие дефицита, теорему 2 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 2'. *Совершенное паросочетание в двудольном графе G существует тогда и только тогда, когда $d = 0$.*

Следующая теорема дает оценку мощности максимального паросочетания.

Теорема 3. *Мощность максимального паросочетания M в двудольном графе G равна*

$$|M| = |X| - d.$$

Прежде, чем провести доказательство этой теоремы, проиллюстрируем ее.

Пример. Рассмотрим двудольный граф, изображенный на рис. 1.13а (с. 29).

Найдем дефицит этого графа. Для этого рассмотрим табл. 1.1 (с. 29), в которой для каждого множества $A \subseteq X$ приведены $J(A)$ и $|A| - |J(A)|$.

Отсюда следует, что $d = \max\limits_{A \subseteq X}(|A| - |J(A)|) = 1$.

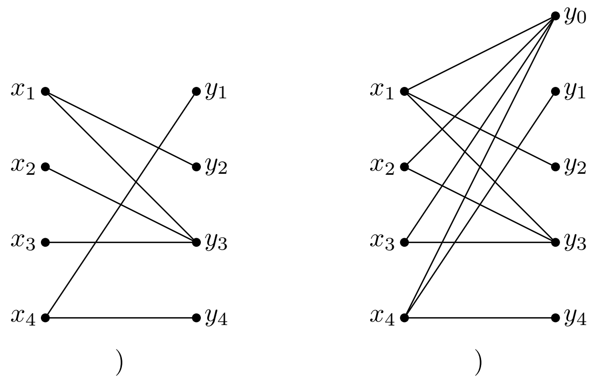


Рис. 1.13

Таблица 1.1. Вычисление дефицита графа

A	$J(A)$	$\lvert A\rvert - \lvert J(A)\rvert$
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$	0
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{y_2, y_3\}$	1
$\{x_1, x_2, x_4\}$	Y	-1
$\{x_1, x_3, x_4\}$	Y	-1
$\{x_2, x_3, x_4\}$	$\{y_1, y_3, y_4\}$	0
$\{x_1, x_2\}$	$\{y_2, y_3\}$	0
$\{x_1, x_3\}$	$\{y_2, y_3\}$	0
$\{x_1, x_4\}$	Y	-2
$\{x_2, x_3\}$	$\{y_3\}$	1
$\{x_2, x_4\}$	$\{y_1, y_3, y_4\}$	-1
$\{x_3, x_4\}$	$\{y_1, y_3, y_4\}$	-1
$\{x_1\}$	$\{y_2, y_3\}$	-1
$\{x_2\}$	$\{y_3\}$	0
$\{x_3\}$	$\{y_3\}$	0
$\{x_4\}$	$\{y_1, y_4\}$	-1

Рассмотрим теперь двудольный граф, который изображен на рис. 1.13а, и добавим к нему вершину y_0 и дуги, соединяющие все вершины множества X с y_0. Этот граф (обозначим его через G^*) изображен на рис. 1.13б.

Множество $J^*(A)$ вершин в $Y \cup \{y_0\}$, связанных дугами с вершинами $A \subseteq X$ в G^*, можно представить в виде $J(A) \cup \{y_0\}$.

Тогда

$$|J^*(A)| - |A| = |J(A) \cup \{y_0\}| - |A| = \\ = |\{y_0\}| + |J(A)| - |A| = d + |J(A)| - |A| \geq 0,$$

т.к. для рассматриваемого графа G имеем $|J(A)| - |A| \geq -1$, а $d = 1$ (табл. 1.1).

Поэтому G^* удовлетворяет условию Холла. Построим в G^* совершенное паросочетание и затем удалим из него дуги, которые оканчиваются в y_0. Такое паросочетание и будет искомым максимальным паросочетанием в G.

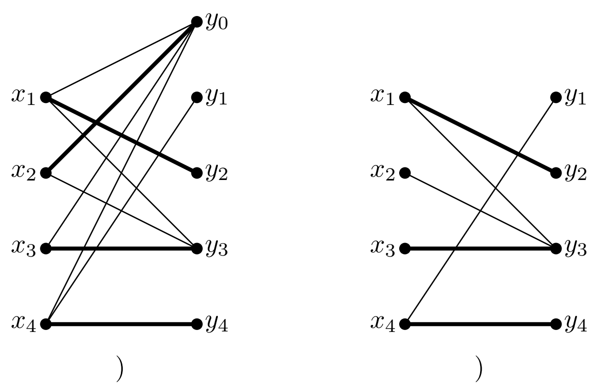


Рис. 1.14

На рис. 1.14а показано совершенное паросочетание в графе G^*. Удалив из него дугу x_2y_0, получим максимальное паросочетание в G, состоящее из дуг x_1y_2, x_3y_3 и x_4y_4 (рис. 1.14б).

Теперь докажем теорему 3.

Доказательство. Построим из графа $G = (X \cup Y, \Gamma)$, дефицит которого равен d, новый граф G^*, добавив в Y d новых вершин и соединив каждую их них со всеми вершинами X. Записывая формально,

$$G^* = (X^* \cup Y^*, \Gamma^*), \quad X^* = X, \quad Y^* = Y \cup \mathcal{D},$$

где $|\mathcal{D}| = d$, и $\Gamma^* = \Gamma \cup \Gamma'$, где Γ' содержит дуги, проведенные из всех вершин X^* во все вершины из $\mathcal{D}$.

Рассмотрим теперь произвольное множество $A \subseteq X^*$ и множество $J^*(A)$. Очевидно, что $J^*(A) = \mathcal{D} \cup J(A)$. Тогда

$$|J^*(A)| - |A| = |\mathcal{D}| + |J(A)| - |A| = d + |J(A)| - |A| \geq 0.$$

Из этого следует, что G^* удовлетворяет условию Холла и для него может быть построено совершенное паросочетание M^*. Удалив из M^* дуги, инцидентные вершинам из $\mathcal{D}$, получим максимальное паросочетание в G. По построению $|M| = |X| - d$. ■

Следует отметить, что способ построения максимального паросочетания, предлагаемый теоремой 3, с вычислительной точки зрения неэффективен, поскольку для нахождения d надо построить все подмножества множества X. Если $|X| = n$, то таких подмножеств, как известно, 2^n, что при больших n делает анализ невозможным.

Поэтому далее будет изложен экономный способ нахождения максимального паросочетания, однако прежде приведем два определения.

Рассмотрим произвольный (не обязательно двудольный) граф $G = (A, \Gamma)$. Граф G называется *связным,* если любые две его вершины соединены цепью.

Пусть B — подмножество A. *Подграфом* G_B графа G называется граф $(B, \Gamma \cap (B \times B))$, т.е граф, вершинами которого являются элементы из множества B, а дугами — только те дуги графа G, которые соединяют вершины из B.

Пример. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $A' = \{a_1, a_2, a_5\}$. На рис. 1.15а (с. 32) показан граф G, а на рис. 1.15б — его подграф $G_{A'}$.

Компонентой графа G называется максимальный по числу вершин связный подграф графа G.

На рис. 1.16 (с. 32) показан граф, состоящий из двух компонент.

Вернемся к паросочетаниям и обратимся к следующему примеру. Рассмотрим двудольный граф, показанный на рис. 1.17 (с. 32).

На этом графе выделены паросочетания: на рис. 1.17а не максимальное M, на рис. 1.17б — максимальное M^*. Рассмотрим множество дуг $F = (M \backslash M^*) \cup (M^* \backslash M)$, т.е. множество дуг из *симметрической разности* M и M^*. Другими словами, F содержит дуги, которые принадлежат ровно одному из паросочетаний, т.е.

$$F = \{x_1y_3,\ x_1y_2,\ x_3y_3\}.$$

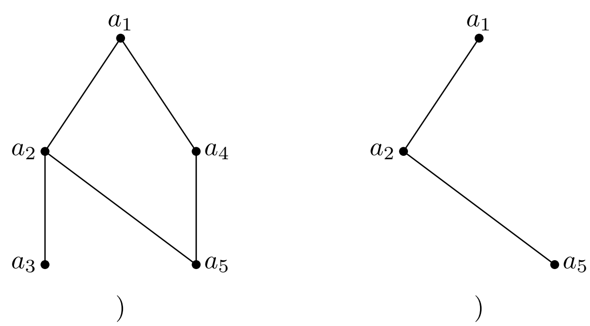


Рис. 1.15

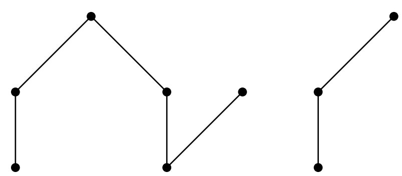


Рис. 1.16

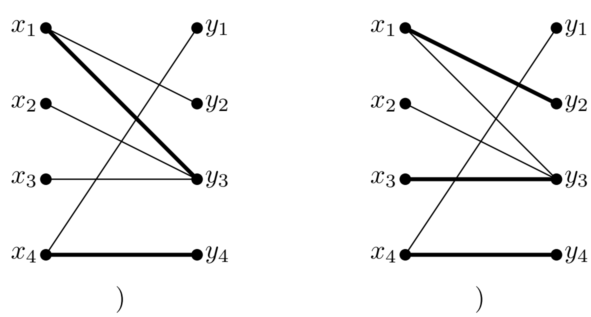


Рис. 1.17

Граф G_F, построенный на вершинах, которым инцидентны дуги из F, и содержащий эти дуги, показан на рис. 1.18.

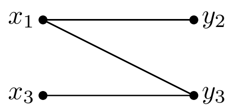


Рис. 1.18

Каждая из вершин этого графа имеет степень 1 или 2. Покажем, что в этом случае компонентами графа будут только цепи и циклы. Для этого потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Сумма степеней вершин неориентированного графа равна удвоенному числу его дуг.*

Доказательство. Сумма степеней вершин — это число входов дуг в вершины. С другой стороны, каждая дуга входит в две вершины, поэтому число входов в вершины в два раза больше числа дуг. ■

В частности, в любом неориентированном графе сумма степеней вершин — четное число.

Пусть G — компонента графа G_F. Возможны два случая:

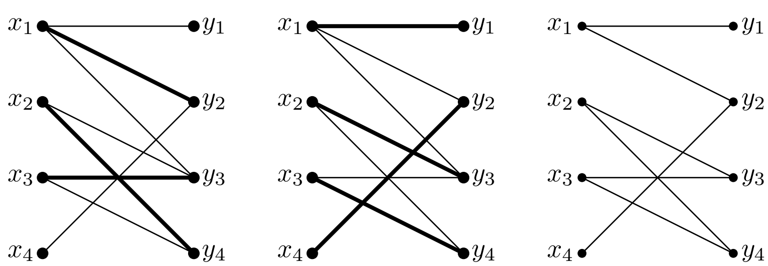
1) в этой компоненте есть вершина a степени 1. Поскольку общая сумма степеней четная, есть и вторая вершина b степени 1.

Рассмотрим минимальный путь G', соединяющий a и b. В G' входят все дуги, выходящие из a и b (их по одной и они входят в G'), и все дуги, выходящие из «средних» вершин (их не более двух по условию и ровно две в G'). Поэтому G' — компонента G и, поскольку G связен, $G = G'$, т.е. G — простая цепь;

2) в G есть только вершины степени 2. Выберем произвольную вершину и будем «идти» по дугам G, не проходя ни по какой дуге два раза. Попасть в уже пройденную вершину невозможно, поскольку тогда ее степень была бы как минимум 3. Если попадаем в новую вершину, то, поскольку ее степень 2, можем из нее выйти. Поэтому путь закончится возвращением в исходную вершину. Пройденные дуги и вершины образуют простой цикл. По тем же соображениям, что и в предыдущем пункте, этот цикл совпадает с G. Таким образом, утверждение доказано.

В рассматриваемом выше примере получаем цепь x_3y_3, y_3x_1, x_1y_2. Рассмотрим другой пример.

Пример. На рис. 1.19 приведен двудольный граф G и два паросочетания: не максимальное (рис. 1.19а) и максимальное (рис. 1.19б). G_F (рис. 1.19в) содержит один цикл (x_2y_3, y_3x_3, x_3y_4, y_4x_2) и одну цепь (y_1x_1, x_1y_2, y_2x_4).



)))

Рис. 1.19

В каждой цепи или цикле графа G_F дуги из M чередуются с дугами из M^*. В каждом цикле число дуг из M равно числу дуг из M^*. Однако, поскольку M^* — максимальное паросочетание, то $|M^*| > |M|$. Отсюда следует, что в графе G_F хотя бы одна компонента должна быть чередующейся цепью для M.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Если в двудольном графе G паросочетание M не максимально, то G содержит чередующуюся цепь для M.*

Из доказательства теоремы 2 следует, что, пользуясь чередующейся цепью, можно увеличить мощность паросочетания M на 1.

Отсюда вытекает алгоритм поиска максимального паросочетания:

1) взять любое паросочетание M (даже содержащее всего одну дугу);

2) найти чередующуюся цепь для M;

3) если такая цепь найдена, то так, как это сделано в доказательстве теоремы 2, построить паросочетание M', содержащее на одну дугу больше, чем M.

Повторить пункт 2 для M';

4) если чередующаяся цепь не найдена, то M — максимальное паросочетание.

Чтобы реализовать алгоритм поиска максимального паросочетания, необходимо уметь находить чередующуюся цепь. Приведем алгоритм поиска, иллюстрируя его примером.

Рассмотрим двудольный граф G, изображенный на рис. 1.20а.

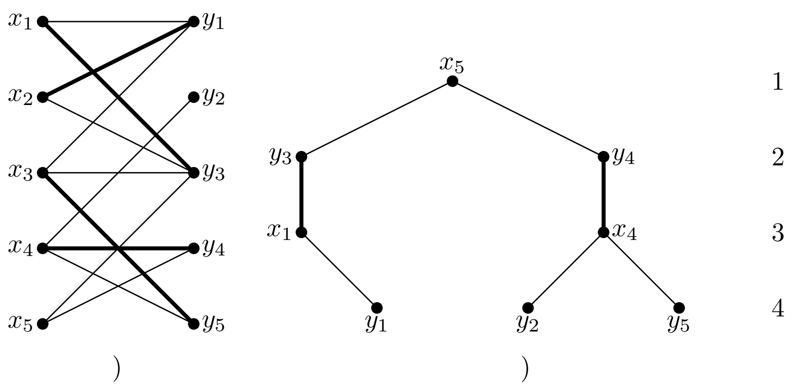


Рис. 1.20

Начнем с паросочетания $M = \{x_1y_3, x_2y_1, x_3y_5, x_4y_4\}$, выделенного на рис. 1.20а. Поиск чередующейся цепи начнем с вершины x_5, которой не инцидентна никакая дуга из M. Алгоритм строит «дерево», начинающееся в выбранной вершине x_0, в данном случае — x_5 (рис. 1.20б).

Поместим на следующий уровень вершины $y_1, \ldots, y_k$, с которыми x_0 связана дугами. Если никакая дуга из M не инцидентна хотя бы одной из этих вершин y_i, то дуга x_0y_i — чередующаяся цепь, и процесс поиска останавливается. В нашем случае в M есть дуги, инцидентные вершинам y_3 и y_4. Тогда на следующий уровень «дерева» поместим все вершины, с которыми $y_1, \ldots, y_k$ связаны дугами из паросочетания M. В примере это дуги y_3x_1 и y_4x_4. На следующий уровень «дерева» поместим вершины, соединенные дугами с предыдущим уровнем. В нашем случае это вершины y_1, y_2, y_5, соединяемые с x_1 и x_4 дугами x_1y_1, x_4y_2 и x_4y_5. Если никакая дуга из M не инцидентна хотя бы одной из вершин этого уровня, то чередующаяся цепь найдена. В рассматриваемом примере вершины y_1 и y_5 инцидентны дугам из паросочетания M, а y_2 — нет. Таким образом, найдена чередующаяся цепь x_5y_4, y_4x_4, x_4y_2. Если такой цепи на этом шаге не найдено, то продолжаем процесс.

Может так случиться, что процесс поиска остановится, а искомая вершина не будет найдена. Это означает, что чередующейся цепи, которая начиналась бы в x_0, нет. Тогда надо перейти к другой вершине из X.

Если чередующаяся цепь так и не найдена, то M — максимальное паросочетание.

После того, как найдена чередующаяся цепь, таким же способом, как это было сделано в доказательстве теоремы 2, можно найти паросочетание M', содержащее большее число дуг. В цепи x_5y_4, y_4x_4, x_4y_2 имеем $x_4y_4 \in M$. Исключаем ее из M и включаем в M' дуги x_5y_4 и x_4y_2. Полученное паросочетание максимально и, даже более того, совершенно (рис. 1.21).

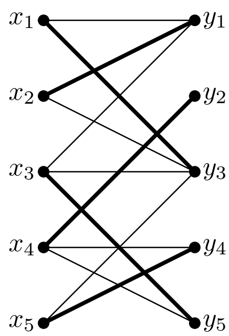


Рис. 1.21

1.5

Трансверсали семейств множеств

Рассмотрим следующий условный пример. На кафедре математики работают шесть преподавателей — A, B, C, D, E, F, которые являются членами четырех комиссий университета.

Распределяются эти преподаватели по комиссиям следующим образом:

методическая комиссия: A, B;

финансовая комиссия: A, C;

научная комиссия: A, B, C;

студенческая комиссия: D, E, F.

Необходимо избрать по одному представителю от каждой комиссии в Ученый совет при следующем ограничении: нельзя, чтобы член Ученого совета представлял более одной комиссии. Можно ли сделать это?

Ответ положительный, т.к. можно избрать представителей от комиссий следующим образом:

методическая комиссия — B,

финансовая комиссия — C,

научная комиссия — A,

студенческая комиссия — D.

Однако, если преподаватель A выходит из состава всех комиссий, то избрать представителей с учетом поставленного выше условия нельзя.

В общем виде данная проблема может быть сформулирована следующим образом: дано семейство множеств

$$\mathcal{L} = \{S_i | i \in I\},$$

которые могут иметь непустое пересечение. Надо выбрать представителей $\sigma_i, i \in I$, из каждого множества S_i так, чтобы

$$\sigma_i \in S_i \text{ и при } i \neq j \text{ имело место } \sigma_i \neq \sigma_j.$$

Такое множество различных представителей называется *трансверсалью семейства $\mathcal{L}$,* или *полной системой представителей семейства $\mathcal{L}$.*

Найдем условия, при которых трансверсаль для $\mathcal{L}$ существует.

Оказывается, что задача сводится к нахождению совершенного паросочетания в специально построенном двудольном графе. Обратимся к примеру с комиссиями.

Построим двудольный граф G, в котором множество X — это множество комиссий, Y — множество преподавателей, Γ — множество дуг, которые связывают каждую комиссию с входящими в нее преподавателями (рис. 1.22).

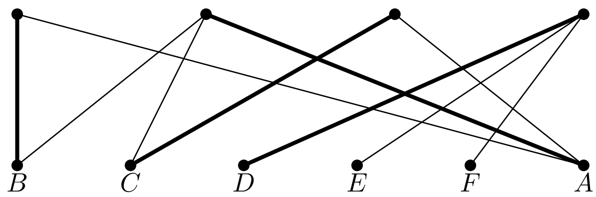


Рис. 1.22

Построенная выше трансверсаль для этой системы множеств (комиссий) показана на рис. 1.22 жирными линиями.

Таким образом, возвращаясь к общей формулировке задачи, имеем $X = I$, $Y = \bigcup\limits_{i \in I} S_i$ и дуга $ij \in \Gamma$, если $j \in S_i$.

Очевидно, что трансверсаль для этой задачи — это совершенное паросочетание для G. Напомним, что условие Холла является необходимым и достаточным для существования совершенного паросочетания в G, и переформулируем его в соответствующих терминах.

Подмножество $A \subseteq X$ — это набор множеств из семейства $\mathcal{L}$, а $J(A)$ — это множество элементов этих множеств, т.е. $\bigcup\limits_{i \in A} S_i$.

Теперь теорема 2 может быть переформулирована следующим образом:

Теорема 5. *Конечное семейство конечных множеств*

$$\mathcal{L} = \{S_i | \, i \in I\}$$

имеет трансверсаль в том и только в том случае, когда

$$|\bigcup_{i \in A} S_i| \geq |A| \quad \text{для всех} \quad A \subseteq I.$$

Иначе говоря, теорема 5 утверждает, что любые k множеств (комиссий) должны иметь не менее k элементов (преподавателей).

1.6

Задачи

1. Пусть $X = \{2, 3, 5, 11\}$ и $Y = \{99, 100, 102\}$.

Определим дугу между элементами x и y, если x является делителем y или y является делителем x. Постройте двудольный граф и проверьте, что выполняется теорема 1.

2. *Полным двудольным графом* $K_{r,s}$ называется двудольный граф, для которого $|X| = r$, $|Y| = s$ и любые две вершины в X и Y соединены дугой.

а) Какова степень каждой вершины x в X?

б) Какова степень каждой вершины y в Y?

в) Сколько дуг содержит граф $K_{r,s}$?

г) Постройте граф $K_{3,4}$.

3. На дискотеку пришли несколько ребят и девушек. Их отношение знакомства показано на рис. 1.23а и 1.23б. Каковы дефициты этих графов? Проинтерпретируйте полученные результаты.

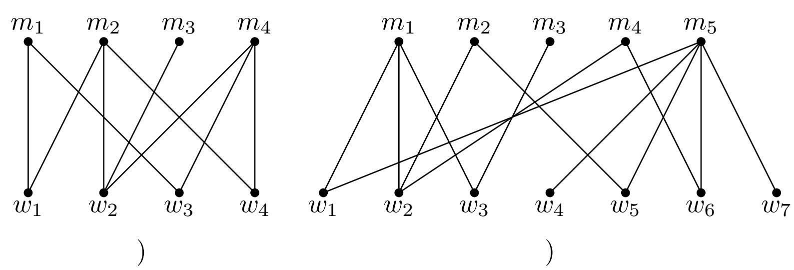


Рис. 1.23

4. Найдите дефициты двудольных графов, изображенных на рис. 1.24а и 1.24б (с. 40). Существуют ли в этих графах совершенные паросочетания?

5. Пусть $G = (X \cup Y, \Gamma)$, где $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{v, w, x, y, z\}$ и $\Gamma = \{av, ax, bv, bz, cw, cy, cz, dy, dz, ez\}$. Найдите, пользуясь алгоритмом, максимальное паросочетание в G. (*Указание:* начните с $M = \{av, bz, cy\}$.)

6. Пусть $G = (X \cup Y, \Gamma)$ — двудольный граф и $|X| = |Y| = n$.

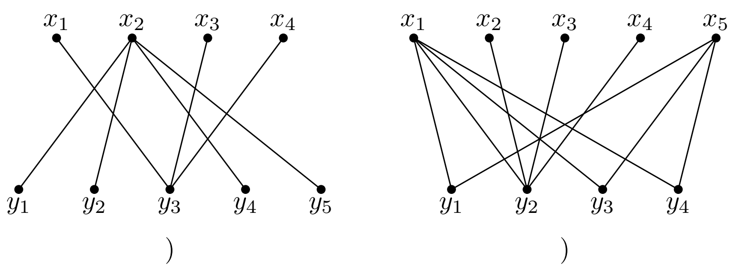


Рис. 1.24

Пусть δ — минимальная степень вершин графа G.

а) Покажите, что $\forall A \subseteq X$ имеет место неравенство $|A| - |J(A)| \leq n - \delta$.

б) Покажите, что если $|\Gamma| > (m-1)n$, то G имеет паросочетание с не менее чем m дугами.

7. На рис. 1.25 показан двудольный граф, в котором X — множество студентов, Y — множество учебных курсов (Мэ — микроэкономика, М — макроэкономика, Иэ — институциональная экономика, Ф — финансы). Дуга xy означает, что студент x хорошо знает курс y. Как бы Вы проинтерпретировали максимальное паросочетание этого графа? Найдите его.

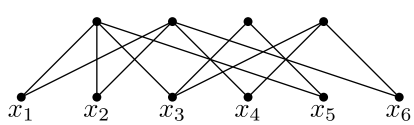


Рис. 1.25

8. *Вершинным покрытием* графа G называется множество вершин C такое, что каждая дуга графа G инцидентна хотя бы одной вершине в C. Покажите, что если G — двудольный граф, то мощность максимального паросочетания равна мощности минимального вершинного покрытия G.

9. Пусть $S = \{1, \ldots, 5\}$, а семейство $\mathcal{L}$ состоит из множеств $S_1 = \{2, 4, 5\}$, $S_2 = \{1, 5\}$, $S_3 = \{3, 4\}$, $S_4 = \{3, 4\}$. Найдите трансверсаль для $\mathcal{L}$.

10. Пусть $S = \{1, \ldots, 5\}$, а семейство $\mathcal{L}$ состоит из множеств $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{2, 3, 4, 5\}$, $S_4 = \{1, 2\}$. Найдите трансверсаль семейства множеств $\mathcal{L}$ или объясните, почему она не существует.

11. Пусть S — множество всех депутатов Государственной Думы Российской Федерации, а $\mathcal{L}$ состоит из n комиссий Госдумы РФ $S_1, \ldots, S_n$. В каком случае можно найти n различных депутатов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ таких, что депутат σ_j является членом комиссии S_j?

12. Предположим, что имеется m мужчин и n женщин и что женщина j считает мужчину i приемлемым или неприемлемым в качестве супруга. В каком случае можно заключить n браков так, чтобы каждая женщина имела приемлемого для нее мужа?

13. Рассмотрим следующие пять комитетов: $C_1 = \{a, c, e\}$, $C_2 = \{b, c\}$, $C_3 = \{a, b, d\}$, $C_4 = \{d, e, f\}$, $C_5 = \{e, f\}$. Комитеты должны послать различных представителей на годичное собрание, и C_1 выдвигает e, C_2 — b, C_3 — a и C_4 — f.

а) Покажите, что невозможно учесть пожелания всех комитетов.

б) Найдите систему различных представителей комитетов.

в) Можно ли найти полную систему различных представителей (трансверсаль), если комитет C_1 не хочет менять кандидатуру e; комитет C_2 — кандидатуру b?

14. Приведите пример трансверсали семейства множеств в мире спорта.

2 глава

ОБОБЩЕННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ, ИЛИ ПАРОСОЧЕТАНИЯ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЯХ УЧАСТНИКОВ

2.1 Введение

В главе 1 изучались паросочетания, которые в терминах задачи о женихах и невестах определялись только знакомством мужчин и женщин. Однако свадьбы определяются не только фактом знакомства, обычно значительную роль играют предпочтения участников относительно потенциальных партнеров.

Во второй главе излагаются вопросы, связанные с построением устойчивых паросочетаний, в том случае, если участники имеют предпочтения друг относительно друга и эти предпочтения задаются линейными порядками. Эта задача впервые рассматривалась американскими математиками Д. Гейлом и Л. Шепли. Поводом для этого послужила задача о распределении выпускников-медиков по клиникам. Далее эти результаты были существенно развиты в ставшей уже классической книге [62]. В дальнейшем изложении мы будем следовать этой книге.

В параграфе 2.2 рассматриваются условия классической рациональности предпочтений, вводится понятие обобщенного паросочетания. В параграфе 2.3 излагается конструктивный метод построения устойчивых паросочетаний при линейных предпочтениях участников. Параграф 2.4 посвящен описанию возможностей манипулирования предпочтениями. Наконец, в параграфе 2.5 описываются некоторые примеры обобщенных паросочетаний.

Параграф 2.6 содержит задачи к данной главе.

2.2 Предпочтения участников и паросочетания

Двудольный граф $G = (X \cup Y, \Gamma)$ может быть определен так, что $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество фирм, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — множество кандидатов, которые хотели бы работать в этих фирмах, а $(x, y) \in \Gamma$ означает, что кандидат y может работать в фирме x. Однако, помимо возможности кандидата y работать в фирмах $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, у него могут быть предпочтения относительно этих фирм. Эти предпочтения возникают потому, что одна фирма более известна, чем другая, или же ее расположение более удобно, чем у другой, и т.п.

С другой стороны, если множество Y составляют выпускники высших учебных заведений, фирма также может иметь предпочтения на множестве Y, зависящие, например, от оценок выпускников.

Поэтому сначала обсудим понятие предпочтений — частного вида бинарных отношений, которые начинают играть существенную роль в дальнейших рассмотрениях.

Предпочтения (которые иногда будут обозначаться символом $\succ$) кандидатов из Y удовлетворяют следующим трем условиям, которые обычно называют *условиями классической рациональности*:

— *связности*. Относительно любых двух различных y' и y'' из Y имеются недвусмысленные предпочтения: y' предпочтительнее y'', или y'' предпочтительнее y', т.е. $y' \succ y''$ или $y'' \succ y'$. Если использовать для обозначения предпочтения символ P, условие запишется в виде: $\forall\, y', y''$ имеет место $y' P y''$ или $y'' P y'$;

— *транзитивности*. Для любых трех y, y', y'', если y предпочтительнее y', и y' предпочтительнее y'', то y предпочтительнее y'', т.е.

из $y \succ y'$ и $y' \succ y''$ следует, что $y \succ y''$. При обозначениях с P имеем: $\forall y, y', y''$ yPy' и $y'Py'' \Rightarrow yPy''$;

— ***ацикличности***. Для любого $s \geq 1$ и любых $y_1, \ldots, y_s$ не может быть, что $y_1 \succ y_2 \succ \ldots \succ y_s \succ y_1$. Соответственно

$$\forall s \geq 1 \ y_1 P y_2 P \ldots P y_s \ \Rightarrow \ (y_s, y_1) \notin P.$$

Аналогично будем требовать, чтобы те же условия рациональности выполнялись и для предпочтений кандидатов относительно фирм.

Все эти условия представляются одинаково разумными с точки зрения описания предпочтений. Например, следуя [62], обсудим, что означает наличие цикла $y_1 \succ y_2 \succ y_3 \succ y_1$. Если какая-то фирма имеет такое предпочтение и рассматривает y_3 в качестве кандидата, то можно было бы предложить ей кандидата y_2 вместо y_3 за небольшую плату, например за 1 руб. Затем можно предложить y_1 вместо y_2 за еще 1 руб. и затем y_3 вместо y_1, взяв еще 1 руб. Таким образом, ситуация пришла к исходной, а мы стали богаче на 3 руб., и можно было бы играть в такую игру бесконечно [62].

Сделаем еще несколько замечаний относительно введенных выше условий классической рациональности. Во-первых, когда говорят о свойстве связности, имеют в виду связность именно бинарного отношения, а не связность графа, о которой говорилось в главе 1. Это разные понятия.

Во-вторых, условие связности предпочтений подразумевает возможность одновременного выполнения условий $y' \succ y''$ и $y'' \succ y'$ для некоторых $y', y'' \in Y$ $(y' \neq y'')$. Однако в сочетании с остальными условиями классической рациональности условие связности означает, что выполняется только одна из двух возможностей $y' \succ y''$ или $y'' \succ y'$ для любых различных $y', y'' \in Y$. В противном случае принадлежащие отношению пары (y', y'') и (y'', y') образуют цикл длины 2, что противоречит условию ацикличности.

Отношение предпочтения, удовлетворяющее условиям связности, транзитивности и ацикличности, называется *линейным порядком*.

Нетрудно видеть, что отношение линейного порядка можно представить как перенумерацию объектов, так что, например, меньшему номеру соответствует более предпочтительный объект, а большему, наоборот, менее предпочтительный.

Условие связности представляется достаточно ограничительным. Возможны естественные нарушения этого условия. В качестве иллюстрации можно привести следующий пример [37].

Пример. Родители хотят подарить ребенку на день рождения либо пони, либо велосипед. Ребенок безразличен к обоим подаркам, но если в качестве подарка будет выбран велосипед, то он предпочел бы иметь велосипед со звонком. Если обозначить через П — пони, через В — велосипед, а через ВЗ — велосипед со звонком, то предпочтения ребенка, представленные в виде ориентированного графа на рис. 2.1, имеют вид, противоречащий условию связности.

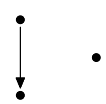


Рис. 2.1

Следуя традиции, далее будут рассматриваться двудольные графы вида $G = (M \cup W, \Gamma)$, где $M = \{m_1, \ldots, m_r\}$ обозначает множество мужчин, $W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ — множество женщин. Через $P(m_i)$ будем обозначать линейный порядок — предпочтение мужчины m_i на множестве W.

Тогда $P(m_i)$ выглядит так:

$$w_{j_1} \succ_{m_i} w_{j_2} \succ_{m_i} \ldots \succ_{m_i} w_{j_p}.$$

Это означает, что женщина w_{j_1} наиболее предпочтительна для m_i; следующей по предпочтительности является женщина w_{j_2} и т.д.

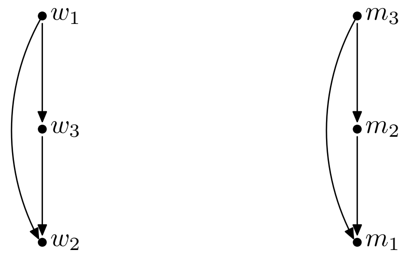
Аналогично $P(w_j)$ выглядит так:

$$m_{i_1} \succ_{w_j} m_{i_2} \succ_{w_j} \ldots \succ_{w_j} m_{i_r}.$$

Для простоты иногда будем записывать эти предпочтения так:

$$P(m_i) = w_{j_1}, \ldots, w_{j_p} \text{ и } P(w_j) = m_{i_1}, \ldots, m_{i_r}.$$

Пример. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ и $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Тогда предпочтения участников могут выглядеть, например, следующим образом: для



а) $P(m_1)$) $P(w_2)$

Рис. 2.2

мужчины m_1 $P(m_1) = w_1, w_3, w_2$, что может быть представлено в виде графа на рис. 2.2а.

Для женщины w_2 предпочтение может иметь вид: $P(w_2) = m_3, m_2, m_1$ (рис. 2.2б).

Далее несколько обобщим понятие предпочтения, т.к. в рассматриваемой задаче может быть ситуация, когда мужчина предпочтет вовсе не жениться, чем связать свою судьбу с одной из женщин, которые ему не интересны. Естественно, ситуация симметрична, и некоторые женщины предпочтут вовсе не выйти замуж, чем выйти за малопредпочтительных для них мужчин.

Поэтому будем рассматривать предпочтения вида:

$$P(m_i) = w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_s}, (m_i), w_{j_{s+1}}, \ldots, w_{j_p}.$$

В данном случае мужчина m_i предпочитает жениться на одной из женщин $w_{j_1}, \ldots, w_{j_s}$, но наличие после w_{j_s} в предпочтении элемента m_i означает, что далее он предпочитает остаться один, чем жениться на одной из женщин из множества $\{w_{j_{s+1}}, \ldots, w_{j_p}\}$.

Аналогично предпочтение $P(w_j)$ вида:

$$P(w_j) = m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_k}, (w_j), m_{i_{k+1}}, \ldots, m_{i_r}$$

означает, что женщина w_j предпочитает выйти замуж за одного из мужчин из множества $\{m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}\}$, но если такой союз невозможен, то женщина w_j предпочтет остаться одна.

В задаче о найме на работу эта постановка проблемы также осмысленна: фирма может захотеть взять на работу выпускников со средним выпускным баллом не менее $4,5$; соответственно, выпускник может упорядочивать фирмы по предлагаемой ими начальной заработной плате, и, очевидно, начиная с какого-то уровня заработной платы, хороший выпускник на фирму с низкой заработной платой не пойдет.

Теперь можно дать определение обобщенного паросочетания, модифицированное на рассматриваемый случай.

Определение 1. *Обобщенное паросочетание μ — это взаимнооднозначное отображение множества $M \cup W$ на себя, удовлетворяющее условиям:*

а) $\mu(\mu(m)) = m$, $\mu(\mu(w)) = w$;

б) если $\mu(m) \neq m$, то $\mu(m) \in W$;

в) если $\mu(w) \neq w$, то $\mu(w) \in M$.

Сделаем несколько разъяснений. Условие а) означает, что если m женится на w, то w выходит замуж за m. Условие б) означает, что если мужчина не остается в одиночестве, то он женится на женщине из множества W. Аналогичный смысл имеет и условие в).

Далее обобщенное паросочетание будем записывать в виде:

$$\mu = \begin{matrix} w_5 & w_1 & w_3 & (m_4) & w_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}.$$

Здесь m_1 женится на w_5, m_2 — на w_1, m_3 — на w_3, m_4 остается неженатым, m_5 женится на w_2.

Используя упорядочение по номерам элементов множества W, это же паросочетание можно представить так:

$$\mu = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & (m_4) & w_5 \\ m_2 & m_5 & m_3 & m_4 & m_1 \end{matrix}.$$

Пусть $P(m_5) = w_2, w_3, w_1, m_5, w_4, w_5$, и рассмотрим следующее паросочетание.

$$\mu' = \begin{matrix} w_5 & w_4 & (m_3) & w_1 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}.$$

В паросочетании μ мужчина m_5 женится на w_2 — наиболее предпочитаемой женщине, а в паросочетании μ' мужчина m_5 женится на w_3 — второй по предпочтительности женщине. Поэтому можно считать, что паросочетание μ более предпочтительно для m_5, чем паросочетание μ'.

Определение 2. *Говорят, что паросочетание μ более предпочтительно для m, чем паросочетание μ', если $\mu(m) \succ_m \mu'(m)$.*

2.3

Устойчивые паросочетания

.

Рассмотрим предпочтения мужчины m_i вида:

$$P(m_i) = w_{j_1}, \ldots, w_{j_s}, m_i, w_{j_{s+1}}, \ldots, w_{j_p}.$$

и паросочетание μ, которое ставит m_i в соответствие женщину $w_{j_{s+1}}$, т.е. $\mu(m_i) = w_{j_{s+1}}$.

Поскольку m_i предпочитает в этом случае остаться неженатым, то паросочетание, которое «приписывает» m_i женщину $w_{j_{s+1}}$, не будет принято мужчиной m_i. Заметим, что нельзя насильно связать m_i с женщиной, которую он не предпочитает.

Такие паросочетания можно назвать *индивидуально иррациональными*. Далее будут рассматриваться только *индивидуально рациональные* паросочетания.

Здесь и далее предполагается, что участники могут свободно обмениваться информацией о своих предпочтениях.

Пример. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ и $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_2, w_1, w_3; & P(w_1) = m_1, m_3, m_2; \\ P(m_2) = w_1, w_3, w_2; & P(w_2) = m_3, m_1, m_2; \\ P(m_3) = w_1, w_2, w_3; & P(w_3) = m_1, m_3, m_2. \end{array}$$

Рассмотрим паросочетание

$$\mu = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array}$$

и мужчину m_1. Ему паросочетанием μ предписывается жениться на женщине w_1, при том, что наиболее предпочтительным для него вариантом является женитьба на w_2. С другой стороны, женщина w_2 должна выйти замуж (согласно μ) за m_2, хотя мужчина m_1 для нее более предпочтителен. Но тогда пара (m_1, w_2) может отказаться принимать условия, предписываемые паросочетанием μ.

Можно представить себе, что брачная фирма предлагает своим клиентам организовать браки так, как это указано в примере. Тогда пара (m_1, w_2) не будет следовать советам этой фирмы.

В этом случае говорят, что пара (m_1, w_2) *блокирует* паросочетание μ.

Определение 3. *Говорят, что пара (m, w) блокирует паросочетание μ, если:*

а) $\mu(m) \neq w$,

б) $w \succ_m \mu(m)$ и $m \succ_w \mu(w)$.

Очевидно, что если пара (m, w) блокирует паросочетание μ, это паросочетание можно назвать *неустойчивым*. Соответственно, паросочетание μ называется *устойчивым*, если оно не блокируется никакой парой (m, w).

Вернемся к примеру и рассмотрим новое паросочетание

$$\mu' = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{matrix}.$$

Можно видеть, что каждый мужчина получает вторую по предпочтительности женщину, женщины w_1 и w_2 получают первых по предпочтительности мужчин, а w_3 — третьего по предпочтительности мужчину. Это паросочетание устойчиво, что может быть проверено непосредственно (сделайте это самостоятельно).

Поэтому возникает вопрос: всегда ли существует устойчивое паросочетание при данных предпочтениях участников, и если ответ на этот вопрос положительный, то как найти такое паросочетание?

Теорема 1. *При любых предпочтениях участников существует устойчивое паросочетание [62].*

Доказательство. Приведем конструктивное доказательство утверждения теоремы 1, т.е. приведем алгоритм, который строит искомое паросочетание при заданных предпочтениях участников.

На первом шаге алгоритма каждому мужчине приписывается первая в его предпочтении женщина. Если такой нет, то он остается один. Затем для каждой женщины просматривается, какие мужчины ей приписаны. Если эти мужчины (мужчина) менее предпочтительны для нее, чем одиночество, все эти мужчины отвергаются. Если это не так и если женщине w_j приписывается больше одного мужчины, то оставляем того из них, который стоит выше в ее предпочтении. Тот из мужчин, который таким образом не отвергается, остается в паросочетании на данном шаге.

На любом шаге алгоритма отвергнутому на предыдущем шаге мужчине приписывается следующая по предпочтительности после отвергнувшей его женщина. Если такой женщины нет, он остается один. На этом же шаге, если какой-либо женщине приписано более одного мужчины, оставляем более предпочтительного, если имеется мужчина более предпочтительный, чем одиночество. В противном случае она остается одна.

Покажем теперь, что таким способом можно построить устойчивое паросочетание.

Так как число мужчин и женщин конечно, алгоритм всегда приводит к какому-то паросочетанию, т.к. на каждом шаге каждому мужчине приписывается не более одной женщины и каждой женщине приписывается не более одного мужчины.

Построенное паросочетание индивидуально рационально, т.к. на каждом шаге каждому мужчине приписывается женщина, либо же он остается один, если более предпочтительных женщин нет. Это же утверждение верно и для женщин.

Предположим, что существует блокирующая пара (m, w), так что $w \succ_m \mu(m)$ и $m \succ_w \mu(w)$. Но по построению, если w более предпочтительна, чем $\mu(m)$, то w должна была быть приписана m раньше, чем $\mu(m)$. Поскольку $\mu(m) \neq w$, это означает, что m был отвергнут женщиной w, причем $\mu(w)$ было более предпочтительным, чем m, т.е. $\mu(w) \succ_w m$. Так как отношения предпочтения ацикличны и транзитивны, это и означает, что (m, w) не является блокирующей парой. ■

Пример [62]. $M = \{m_1, \ldots, m_5\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_4\}$ и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4; & P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5; \\ P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5; \\ P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2; & P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3; \\ P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2; & P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3. \\ P(m_5) = w_1, w_2, w_4, (m_5), w_3; & \end{array}$$

Построим устойчивое паросочетание, пользуясь алгоритмом, приведенным в доказательстве теоремы 1.

Шаг 1: мужчинам m_1, m_4, m_5 приписывается женщина w_1; m_2 и m_3 приписывается w_4. Женщина w_1 отвергает всех, кроме m_1; w_4 отвергает m_3. Таким образом, получаем

$$\mu_1 = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & & & m_2 \end{array}.$$

Шаг 2: m_3 приписывается женщина w_3, m_4 — w_4 и m_5 — w_2. Женщина w_4 отвергает приписанного ей ранее мужчину m_2, как менее предпочтительного по сравнению с m_4. Получаем

$$\mu_2 = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_5 & m_3 & m_4 \end{array}.$$

Шаг 3: отвергнутому на 2-м шаге мужчине m_2 приписывается следующая после отвергнувшей его w_4 женщина w_2. Она отвергает приписанного ей ранее мужчину m_5. Получаем

$$\mu_3 = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{array}.$$

Шаг 4: отвергнутому на 3-м шаге мужчине m_5 приписывается следующая в списке его предпочтений женщина w_4, но для нее он менее предпочтителен, чем приписанный ей ранее мужчина m_4. Таким образом, m_5 снова отвергнут и остается в одиночестве. Здесь алгоритм останавливается. Следовательно, полученное паросочетание устойчиво и имеет вид:

$$\mu = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}.$$

Заметим теперь, что в алгоритме право «первого хода» было дано мужчинам. Если это право передать женщинам, то, вообще говоря, паросочетание получится иным.

Вернемся к нашем примеру. Пусть теперь женщины выбирают мужчин.

Шаг 1: женщине w_1 приписывается мужчина m_2, w_2 — m_3, w_3 — m_5, w_4 — m_1. Мужчина m_5 отвергает w_3, поскольку остаться холостым для него предпочтительнее. Получаем

$$\mu_1 = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_3 & & m_1 \end{array} .$$

Шаг 2: женщине w_3 приписывается m_4. Отвергутых женщин нет, и алгоритм останавливается. Искомое паросочетание имеет вид:

$$\mu = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_1 & m_5 \end{array} .$$

Для того, чтобы различать паросочетания, построенные двумя версиями алгоритма, будем обозначать их через μ_M и μ_W соответственно.

Заметим, что в этом примере все мужчины предпочитают паросочетание μ_M паросочетанию μ_W, а все женщины считают более предпочтительным для себя паросочетание μ_W.

2.4

Манипулирование предпочтениями

Покажем, как участники могут искажать свои истинные предпочтения. Для этого рассмотрим пример, который использовался выше для иллюстрации алгоритма построения устойчивого паросочетания. В этом примере устойчивое паросочетание μ_M выглядит так:

$$\mu_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array} .$$

Мужчина m_1 для женщины w_1 является третьим по предпочтительности вариантом.

Теперь рассмотрим случай, когда все участники, кроме w_1, имеют те же предпочтения, что и раньше, а w_1 искажает свои реальные предпочтения и сообщает, что они таковы:

$$P'(w_1) = m_2, m_3, m_4, m_5, m_1$$

вместо

$$P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5.$$

Тогда результирующее устойчивое паросочетание μ'_M имеет вид (постройте его самостоятельно):

$$\mu'_M = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_4 & m_5 \end{matrix} .$$

Заметим, что путем искажения предпочтений w_1 получает m_3 — второго по предпочтительности для нее мужчину.

Общий результат о манипулировании со стороны участников в задаче построения обобщенных паросочетаний таков: каждому участнику почти всегда выгодно искажать свои истинные предпочтения.

2.5

Примеры обобщенных паросочетаний

Приведем три модели, в которых используются обобщенные паросочетания.

1. Распределение студентов по комнатам общежития [62]. Есть n студентов, которых надо расселить по двое в комнаты общежития. Каждый студент ранжирует других $n-1$ студентов по предпочтительности. Необходимо построить устойчивое паросочетание, т.е. разбить множество студентов на пары так, что не найдется двух таких студентов, которые не попали в одну комнату, но предпочли бы жить вместе, а не с партнерами, предписываемыми им паросочетанием.

Рассмотрим четырех студентов a, b, c, d, которые имеют следующие предпочтения:

$$
\begin{aligned}
&P(a) : b \succ c \succ d;\\
&P(b) : c \succ a \succ d;\\
&P(c) : a \succ b \succ d;\\
&P(d) : \text{произвольное}.
\end{aligned}
$$

Никакое паросочетание в этой задаче устойчивым не будет. Покажем это. Существует всего три паросочетания:

$$\mu_1 = \begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix}, \qquad \mu_2 = \begin{matrix} b & c \\ d & a \end{matrix}, \qquad \mu_3 = \begin{matrix} c & a \\ d & b \end{matrix}.$$

В первом соседями являются a и d, b и c, во втором — b и d, c и a, в третьем — c и d, a и b.

Рассмотрим паросочетание μ_1. Студент a предпочитает быть соседом c, а c — быть соседом a. Таким образом, пара (a, c) блокирует паросочетание μ_1. Аналогичные рассуждения применимы и к паросочетаниям μ_2 и μ_3. Здесь блокирующими являются пары (a, b) и (b, c) соответственно.

2. «3-сочетания» [36]. Имеются три множества людей: мужчины N_m, женщины N_w и дети N_c, причем $|N_m| = |N_w| = |N_c|$. *3-сочетанием* называется разбиение множества всех людей на группы по три человека, причем в каждую группу входит мужчина, женщина и ребенок. Каждый человек может иметь предпочтения относительно пар, которые могут входить в 3-сочетания, т.е. мужчины имеют предпочтения на множестве $N_w \times N_c$, женщины — на $N_m \times N_c$ и дети — на $N_m \times N_w$.

Говорят, что тройка (m, w, c) блокирует 3-сочетание μ, если m предпочитает (w, c) паре $\mu(m)$, w предпочитает (m, c) паре $\mu(w)$ и c предпочитает (m, w) паре $\mu(c)$, т.е.

$$
\begin{aligned}
&(w, c) \succ_m \mu(m),\\
&(m, c) \succ_w \mu(w),\\
&(m, w) \succ_c \mu(c).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим множества N_m, N_w и N_c, состоящие из трех мужчин, трех женщин и трех детей, имеющих следующие предпочтения:

$$
\begin{aligned}
&P(m_1): && (w_1, c_3), (w_2, c_3), (w_1, c_1), \ldots; \\
&P(m_2): && (w_2, c_3), (w_2, c_2), (w_3, c_3), \ldots; \\
&P(m_3): && (w_3, c_3), \ldots; \\
&P(w_1): && (m_1, c_1), \ldots; \\
&P(w_2): && (m_2, c_3), (m_1, c_3), (m_2, c_2), \ldots; \\
&P(w_3): && (m_2, c_3), (m_3, c_3), \ldots; \\
&P(c_1): && (m_1, w_1), \ldots; \\
&P(c_2): && (m_2, w_2), \ldots; \\
&P(c_3): && (m_1, w_3), (m_2, w_3), (m_1, w_2), (m_3, w_3), \ldots
\end{aligned}
$$

Здесь нет ни одного устойчивого 3-сочетания. Покажем это. Все 3-сочетания, которые дают m_1 (соответственно m_2 и w_2) «семью», более предпочтительную, чем (m_1, w_1, c_1) (соответственно (m_2, w_2, c_2)) неустойчивы.

Действительно, любое 3-сочетание, содержащее (m_1, w_1, c_3) или (m_2, w_2, c_3), блокируется тройкой (m_3, w_3, c_3), а любое 3-сочетание, содержащее (m_1, w_2, c_3), — тройкой (m_2, w_3, c_3).

Любое 3-сочетание, которое не содержит (m_1, w_1, c_1) (соответственно (m_2, w_2, c_2)) блокируется либо (m_1, w_1, c_1) (соответственно (m_2, w_2, c_2)), либо неустойчиво, как показано выше. Наконец, (m_1, w_2, c_3) блокирует любое 3-сочетание, которое содержит (m_1, w_1, c_1) и (m_2, w_2, c_2).

Таким образом, все возможные 3-сочетания неустойчивы.

3. **$(n, 1)$-сочетания** [62].

Рассмотрим в завершение главы следующую задачу. Имеется s фирм $F_1, \ldots, F_s$ и n работников $w_1, \ldots, w_n$, каждый работник может работать только на одной фирме, и он имеет предпочтения относительно фирм. Каждая фирма может нанять любое число работников и имеет предпочтения относительно множеств работников, которых она нанимает. Это очень важное условие, т.к. предполагается, что фирма имеет предпочтения не на множестве работников, а на их подмножествах — на бригадах работников; в частности, бригада может состоять из одного работника.

В этой задаче $(n, 1)$-сочетание μ состоит из набора s пар (F, C), где F — фирма, а C — множество работников.

Будем говорить, что пара (F, C) блокирует μ, если фирма F предпочитает C множеству работников, которые определены ей паросочетанием μ и, кроме того, каждый работник в C, который не приписан F, предпочитает F той фирме, которой он приписан сочетанием μ.

Рассмотрим случай двух фирм F_1, F_2 и трех работников w_1, w_2 и w_3 со следующими предпочтениями:

$$\begin{array}{ll}
P(F_1): & \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \varnothing \ldots; \\
P(F_2): & \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \varnothing \ldots; \\
P(w_1): & F_2, F_1; \\
P(w_2): & F_2, F_1; \\
P(w_3): & F_1, F_2.
\end{array}$$

Таким образом, наиболее предпочтительной для фирмы F_1 является бригада $\{w_1, w_3\}$, затем следует $\{w_1, w_2\}$ и т.д. У работников w_1 и w_2 предпочтения относительно фирм одинаковы: сначала F_2, затем F_1, что может определяться, например, более высокой заработной платой. Работник w_3 более предпочитает F_1, что может определяться, например, близостью этой фирмы к дому.

Существует всего $8 = 2^3$ сочетаний, при которых все работники оказываются заняты. Рассмотрим каждое из этих сочетаний:

$$\mu_1 = \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \varnothing & \{w_1, w_2, w_3\} \end{array}$$

блокируется парой $(F_2, \varnothing)$;

$$\mu_2 = \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \{w_1\} & \{w_2, w_3\} \end{array}$$

блокируется парой $(F_2, \{w_1, w_3\})$;

$$\mu_3 = \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \{w_2\} & \{w_1, w_3\} \end{array}$$

блокируется парой $(F_1, \{w_2, w_3\})$;

$$\mu_4 = \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \{w_3\} & \{w_1, w_2\} \end{array}$$

блокируется парой $(F_1, \varnothing)$;

$$\mu_5 = \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \{w_1, w_2\} & \{w_3\} \end{array}$$

блокируется парой $(F_2, \{w_1, w_2\})$;

$$\mu_6 = \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \{w_1, w_3\} & \{w_2\} \end{array}$$

блокируется парой $(F_2, \{w_1\})$;

$$\mu_7 = \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \{w_2, w_3\} & \{w_1\} \end{array}$$

блокируется парой $(F_2, \{w_1, w_2\})$; и, наконец,

$$\mu_8 = \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \{w_1, w_2, w_3\} & \varnothing \end{array}$$

блокируется парой $(F_1, \varnothing)$.

Осталось заметить, что любое сочетание, оставляющее кого-либо без работы, неустойчиво. Если без работы остается w_1, сочетание блокируется либо парой $(F_1, \{w_1\})$, либо $(F_2, \{w_1\})$. Если без работы остается w_2, сочетание блокируется либо парой $(F_1, \{w_2\})$, либо $(F_2, \{w_2\})$, либо $(F_2, \{w_2, w_3\})$. Если без работы остается w_3, сочетание блокируется парой $(F_2, \{w_1, w_3\})$.

2.6

Задачи

1. Приведите примеры, в которых нарушаются условия классической рациональности.

2. Пусть предпочтения участников из множеств $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ и $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4; & P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5; \\
P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5; \\
P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2; & P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3; \\
P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2; & P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3. \\
P(m_5) = w_1, w_2, w_4, (m_5), w_3; &
\end{array}$$

Рассмотрим два паросочетания μ и μ', где

$$\mu = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_1) \\ m_5 & m_3 & m_4 & m_2 & m_1 \end{array},$$

$$\mu' = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_1 & m_5 \end{array}.$$

Проанализируйте предпочтения участников относительно этих паросочетаний.

3. Пусть предпочтения участников из множеств $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ и $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_2, w_1, w_3; & P(w_1) = m_1, m_3, m_2; \\
P(m_2) = w_1, w_3, w_2; & P(w_2) = m_3, m_1, m_2; \\
P(m_3) = w_1, w_2, w_3; & P(w_3) = m_1, m_3, m_2.
\end{array}$$

Рассмотрим паросочетания

$$\mu = \begin{array}{ccc} w_2 & w_1 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \text{ и } \mu' = \begin{array}{ccc} w_3 & w_2 & w_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array}.$$

Какие пары блокируют эти паросочетания?

4. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_3, w_2, w_1, w_4; & P(w_1) = m_4, m_3, m_2, m_1; \\
P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_3, m_2, m_4, m_1; \\
P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2; & P(w_3) = m_3, m_4, m_1, (w_3), m_2; \\
P(m_4) = w_2, w_4, w_1, (m_4), w_3; & P(w_4) = m_2, m_1, m_4, m_3.
\end{array}$$

Является ли устойчивым паросочетание

$$\mu = \begin{matrix} w_2 & w_4 & w_3 & w_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{matrix} \;?$$

Ответ обоснуйте.

5. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{aligned} &P(m_1) = w_1, w_2, w_3; \\ &P(m_2) = w_1, w_3, w_2; \\ &P(m_3) = w_2, w_3, w_1; \\ &P(w_1) = P(w_2) = P(w_3) = m_1, m_2, m_3. \end{aligned}$$

Найдите все устойчивые паросочетания. Проинтерпретируйте полученные результаты.

6. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{aligned} &P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4; && P(w_1) = m_1, m_2, m_3; \\ &P(m_2) = w_2, w_1, w_3, w_4; && P(w_2) = m_2, m_1, m_3; \\ &P(m_3) = w_1, w_3, w_4, w_2; && P(w_3) = m_1, m_3, m_2; \\ & && P(w_4) = m_3, m_2, m_1. \end{aligned}$$

Найдите устойчивые паросочетания μ_M и μ_W.

7. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{aligned} &P(m_1) = w_2, w_3, w_1; && P(w_1) = m_2, m_1, m_3; \\ &P(m_2) = w_2, w_3, w_1; && P(w_2) = m_3, m_2, m_1; \\ &P(m_3) = w_1, w_3, w_2; && P(w_3) = m_3, m_1, m_2. \end{aligned}$$

Найдите устойчивые паросочетания μ_M и μ_W.

8. Пусть $M = \{m_1, \ldots, m_5\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_4\}$ и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{aligned} &P(m_1) = w_3, w_1, w_2, w_4; && P(w_1) = m_1, m_3, m_2, m_4, m_5; \\ &P(m_2) = w_4, w_3, w_1, w_2; && P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_5, m_4; \\ &P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2; && P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3; \\ &P(m_4) = w_1, w_4, w_2, w_3; && P(w_4) = m_1, m_5, m_4, m_3, m_2. \\ &P(m_5) = w_1, w_2, w_4, (m_5), w_3; && \end{aligned}$$

Постройте паросочетания μ_M и μ_W. Выясните, есть ли мужчины, которые более предпочитают μ_W, чем μ_M, и есть ли женщины, которые более предпочитают μ_M, чем μ_W?

9. Пусть в условиях задачи 8 предпочтения $P(m_5)$ и $P(w_4)$ изменились:

$$P(m_5) = w_1, w_2, w_3, w_4;$$
$$P(w_4) = m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.$$

Постройте паросочетания μ_M и μ_W.

10. Пусть в условиях задачи 8 предпочтения $P(m_1)$ и $P(w_2)$ изменились:

$$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4;$$
$$P(w_2) = m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.$$

Постройте паросочетания μ_M и μ_W.

11. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Предпочтения участников имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2; & P(w_1) = m_2, m_1, m_4, m_3; \\
P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4; \\
P(m_3) = w_1, w_2, w_3, w_4; & P(w_3) = m_2, m_3, m_4, m_1; \\
P(m_3) = w_2, w_4, w_1, w_3; & P(w_4) = m_3, m_2, m_4, m_1.
\end{array}$$

Постройте устойчивые паросочетания μ_M и μ_W.

12. Приведите примеры, показывающие манипулирование предпочтениями со стороны участников.

13. Приведите примеры, когда участникам невыгодно искажать предпочтения.

14. Пусть в задаче распределения студентов $\{a, b, c, d\}$ по комнатам общежития предпочтения выглядят следующим образом:

$$P(a) : b \succ d \succ c;$$
$$P(b) : d \succ c \succ a;$$
$$P(c) : a \succ b \succ d;$$
$$P(d) : b \succ a \succ c.$$

Существует ли при данных условиях устойчивое паросочетание?

15. Пусть профессора A и B собираются прочесть два спецкурса студентам S_1, S_2, S_3, S_4.

Предпочтения студентов относительно спецкурсов следующие:

$$\begin{aligned} P(S_1):&\quad A, B;\\ P(S_2):&\quad A, B;\\ P(S_3):&\quad B, A;\\ P(S_4):&\quad A, B. \end{aligned}$$

Предпочтения профессоров относительно студентов следующие:

$$\begin{aligned} P(A):&\quad \{S_1, S_3\}, \{S_1\}, \{S_3\}, \{S_2\}, \{S_4\}, \varnothing, \ldots;\\ P(B):&\quad \{S_2, S_3\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1\}, \{S_4\}, \varnothing, \ldots \end{aligned}$$

Проанализируйте блокирование в возможных $(n, 1)$-сочетаниях при условии, что каждый студент должен посещать спецкурс, а каждый из профессоров — прочесть спецкурс.

3
глава

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ФУНКЦИИ ВЫБОРА

3.1

Введение

В главе 2 уже рассматривались бинарные отношения, описывающие индивидуальные предпочтения и удовлетворяющие ряду свойств (ацикличность, транзитивность, связность). Бинарными отношениями описываются не только предпочтения, но и многие другие отношения, поэтому настоящая глава посвящена более глубокому изучению бинарных отношений, описанию их свойств и специальных классов. Здесь рассматривается специальный случай $P \subseteq A \times A$.

Бинарные отношения впервые, по-видимому, введены де Морганом[2]. Активный интерес к бинарным отношениям был связан, в частности, с развитием ординального подхода к описанию поведения экономических агентов [59] и развитием математической логики.

В параграфе 3.2 вводится понятие бинарного отношения, определяются операции над этими отношениями и их различные свойства. В параграфе 3.3 свойства бинарных отношений формулируются в терминах свойств матриц смежности соответствующих графов. Параграф 3.4 посвящен специальным классам бинарных отношений. Здесь изучаются отношения частичного порядка, введенные в рас-

---

[2] Морган Огастес де (1806—1871) — шотландский математик и логик, профессор математики Университетского колледжа в Лондоне (1828—1831; 1836—1866), первый президент (1866) Лондонского математического общества. Дал первую развитую систему алгебры отношений.

смотрение Пирсом[3] еще в конце XIX в. и описанные в современном виде Хаусдорфом[4], отношения слабого порядка, введенные Шредером[5], а также отношения линейного порядка, введенные Пирсом. Для этих видов бинарных отношений описываются структуры отношений несравнимости. В параграфе 3.5 рассматриваются отношения предпочтения, определяются функции выбора, рационализируемые строгими и нестрогими предпочтениями, приводится критерий совпадения функций выбора, рационализируемых такими предпочтениями.

Параграф 3.6 содержит задачи к данной главе.

3.2

Бинарные отношения и их свойства

Пусть A — произвольное множество. Будем говорить, что на множестве A задано *бинарное отношение* P, если P есть подмножество прямого произведения $A \times A$, т.е. $P \subseteq A \times A$. Тот факт, что пара (x, y) находится в отношении P, обозначается как xPy или $(x, y) \in P$.

На самом деле бинарное отношение P может определяться как отношение на прямом произведении множеств $A \times B$. Например, если A обозначает множество мужчин, а B — множество женщин, то P можно определить, как отношение знакомства. Такая модель была рассмотрена в главе 1.

[3] Пирс Чарлз (Сантьяго) Сандерс (1839—1914) — американский математик, философ и логик, член Американской академии искусств и наук в Бостоне (1877), национальной академии наук США (1879), профессор Гарвардского университета (1884—1911). Обосновал логику отношений.

[4] Хаусдорф Феликс (1868—1942) — немецкий математик, с 1902 г. — профессор Лейпцигского университета, позднее — профессор университета в Грайфсвальде, с 1921 г. — в Бонне. Основные труды по теории множеств, топологии, функциональному анализу.

[5] Шредер Эрнст (1841—1902) — немецкий математик и логик, с 1876 г. — профессор Высшей технической школы в Карлсруэ. Дал систематическое изложение алгебры логики, ввел термин «исчисление высказываний». Автор принципа двойственности и ряда других законов математической логики.

Теперь же будет рассматриваться именно специальный случай $P \subseteq A \times A$. В такой модели A обозначает множество допустимых альтернатив. В экономике это может быть множество наборов товаров, и обычно оно предполагается бесконечным. В этой книге рассматриваются только конечные множества A. Такая ситуация может иметь место, когда A — множество проектов, множество автомобилей и т.п.

Отношение P на таких множествах A может строиться самым различным образом. Например, на множестве проектов отношение P может означать коллективное предпочтение членов комиссии относительно проектов[6]. Другими словами, xPy означает, что для членов комиссии проект x предпочтительнее проекта y. В этой модели основной вопрос, очевидно, следующий: можно ли найти самый предпочтительный проект на множестве всех проектов?

На множестве автомобилей отношение P может означать предпочтение потребителя, например, по цене. В этом случае xPy, если автомобиль x дешевле автомобиля y.

Однако бинарное отношение может быть не только предпочтением. Например, на множестве A жителей города отношение P может быть определено следующим образом: xPy, если x находится в родственных отношениях с y.

Другим примером бинарного отношения является отношение «не больше» на множестве целых чисел: xPy, если и только если целое число x не больше целого числа y, т. е. $x \leq y$.

Бинарное отношение удобно изображать в виде ориентированного графа $G = (A, P)$. Вершины графа соответствуют элементам множества A, а дуга ведет из x в y, если и только если xPy. Далее будем пользоваться обоими терминами: бинарное отношение и граф.

Так как бинарное отношение P является множеством, можно по аналогии с множествами ввести понятие *объединения и пересечения бинарных отношений* P' и P'', заданных на множестве A:

$$P' \cup P'' = \{(x,y) | \, (x,y) \in P' \quad \text{или} \quad (x,y) \in P''\},$$

$$P' \cap P'' = \{(x,y) | \, (x,y) \in P' \quad \text{и} \quad (x,y) \in P''\}.$$

[6] В следующих главах будет обсуждаться, как можно получить такое коллективное предпочтение.

Пример. Пусть P' — отношение «быть братом», а P'' — отношение «быть сестрой», заданное на множестве людей. Тогда $P' \cup P''$ — отношение «быть братом или сестрой».

Пример. Пусть P' — отношение «быть не меньше», а P'' — отношение «быть не больше» на множестве действительных чисел. Тогда $P' \cap P''$ — отношение «быть равными».

Произведением двух бинарных отношений P' и P'' называется бинарное отношение

$$P' \cdot P'' = \{(x,y) \mid \exists z \in A : \ (x,z) \in P' \quad \text{и} \quad (z,y) \in P''\}.$$

Пример. Пусть $wP'z$ означает «z есть мать w», а $xP''y$ означает «x и y — сестры». Тогда $a(P' \cdot P'')b$ означает, что существует c такое, что $aP'c$ и $cP''b$. По определению отношений P' и P'' c является матерью a и сестрой b, т.е. $aP' \cdot P''b$ означает, что b есть тетя a.

Пример. Рассмотрим два отношения P' и P'' на множестве $A = \{x, y, z\}$, показанные на рис. 3.1а и 3.1б соответственно.

Рис. 3.1

Отношения $P' \cap P''$, $P' \cup P''$, $P' \cdot P''$, $P'' \cdot P'$ показаны на рис. 3.2а—г. Заметим, что в общем случае произведения $P' \cdot P''$ и $P'' \cdot P'$ не совпадают, что проиллюстрировано на рис. 3.2в—г.

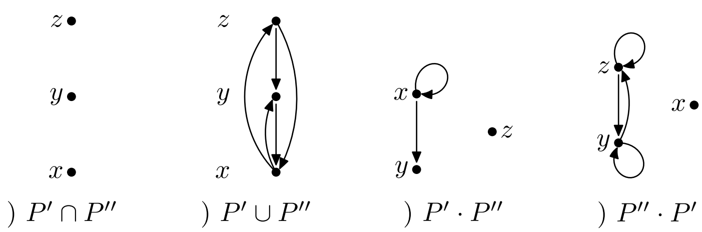


Рис. 3.2

Если $P' = P''$, то произведение $P \cdot P$ обозначается через P^2, а $\underbrace{P \cdot \ldots \cdot P}_{n \text{ раз}}$ — через P^n, где n — натуральное число, $n \geq 1$. Вообще говоря, такое определение некорректно, поскольку не задан порядок выполнения умножений. Но легко проверить, что результат вычислений в данном случае не зависит от порядка действий. Таким образом, $P^n = P^{n-1} \cdot P = P \cdot P^{n-1}$.

Введем еще несколько определений, которые понадобятся в дальнейшем.

Отношением P^d, *обратным (или двойственным)* к отношению P, называется отношение

$$P^d = \{(x, y) | \, (y, x) \in P\}.$$

Заметим, что $(P^d)^d = P$.

Если P обозначает предпочтение между альтернативами, то P^d представляет собой обратное предпочтение. Например, если A — множество автомобилей и P — отношение предпочтения на множестве A по более низкой цене автомобиля, то обратное отношение P^d — предпочтение более дорогих автомобилей.

Отношением P^c, *дополнительным* к P, называется отношение

$$P^c = \{(x, y) | \, (x, y) \notin P\}.$$

Заметим, что $(P^c)^c = P$.

Операции взятия обратного и дополнительного бинарного отношения можно менять местами. Более точно, верна следующая теорема.

Теорема 1. $(P^c)^d = (P^d)^c$.

Доказательство. Напомним, что для проверки равенства множеств A и B необходимо и достаточно доказать, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. что любой элемент из множества A принадлежит множеству B и наоборот.

Пусть $(x, y) \in (P^c)^d$. Отсюда по определению обратного отношения следует, что $(y, x) \in P^c$. Значит, по определению дополнительного отношения $(y, x) \notin P$.

Тогда $(x, y) \notin P^d$ и $(x, y) \in (P^d)^c$.

Аналогично доказывается, что если $(x,y) \in (P^d)^c$, то $(x,y) \in (P^c)^d$. ■

Благодаря доказанной теореме отношение $(P^c)^d$ будет далее обозначаться просто через P^{cd}.

Отношение $I_P = A^2 \backslash (P \cup P^d) = (P \cup P^d)^c = P^c \cap P^{cd}$ называется *отношением несравнимости* для отношения P. Оно содержит пары, которые не входят ни в прямое, ни в обратное бинарное отношение, т.е. действительно может интерпретироваться как отношение несравнимости.

Проверить корректность определения I_P, т.е. доказательство равенства $A^2 \setminus (P \cup P^d) = (P \cup P^d)^c = P^c \cap P^{cd}$, предоставим читателю.

На рис. 3.3 показан пример бинарных отношений P, P^c, P^d, P^{cd}, I_P соответственно.

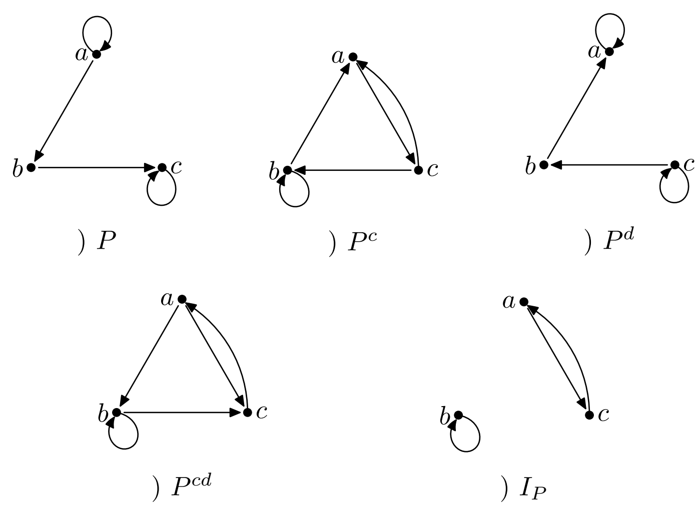


Рис. 3.3

Пример. Пусть P — отношение «быть больше» на множестве натуральных чисел. Тогда P^d — отношение «быть меньше»; P^c — отношение «быть не больше»; P^{cd} — отношение «быть не меньше»; I_P — отношение «быть равными».

Введем теперь несколько свойств бинарных отношений.

Отношение P называется:

— *рефлексивным*, если для любого $x \in A$ $(x,x) \in P$;

— *антирефлексивным*, если для любого $x \in A$ $(x,x) \notin P$;

— *связным*, если для любых $x,y \in A$, $x \neq y$ xPy или yPx;

— *полным*, если для любых $x,y \in A$ xPy или yPx;

— *симметричным*, если для любых $x,y \in A$ $xPy \Rightarrow yPx$;

— *асимметричным*, если для любых $x,y \in A$ $xPy \Rightarrow yP^cx$;

— *транзитивным*, если для любых $x,y,z \in A$ xPy и $yPz \Rightarrow xPz$;

— *отрицательно транзитивным*, если для любых $x,y,z \in A$ xP^cy и $yP^cz \Rightarrow xP^cz$.

Пример. Пусть A — множество всех людей, а отношение P — «быть сестрой». Тогда P антирефлексивно, поскольку любой человек не может быть сестрой самому себе.

Это отношение не будет ни асимметричным, ни симметричным, поскольку если a — сестра b, то b может быть как сестрой, так и братом a.

Если задать отношение «быть сестрой» на множестве всех женщин, то оно будет симметрично, т.к. для любых $a,b \in A$ $aPb \Rightarrow bPa$, т.е. a и b — сестры.

Асимметричным является отношение «быть матерью», заданное на множестве людей, т.к. если a — мать b, то b не является матерью a.

Пример. Отношение «быть выше», заданное на множестве всех зданий г. Москвы, транзитивно, т.к., если здание A выше здания B, а B выше здания C, то здание A выше, чем C, для любых A, B и C.

Отношение «быть не выше», заданное на том же множестве, будет не только транзитивным (по аналогичным причинам), но также и рефлексивным, поскольку для любого здания A верно, что A не выше A, и связным, поскольку для любых различных зданий A и B или A не выше B, или B не выше A. Отношение же «быть выше» будет связно, только если считать, что в Москве нет зданий одинаковой высоты.

То же отношение «быть не выше» будет примером полного бинарного отношения.

Пример. Пусть A — множество людей, а P — отношение «быть старше». Бинарное отношение P отрицательно транзитивно, т.к. для любых людей a, b и c если a не старше, чем b, а b не старше, чем c, то a не старше, чем c.

З а м е ч а н и е. Обратим внимание на одно обстоятельство, которое часто упускается при первом знакомстве с предметом. Является ли отношение, показанное на рис. 3.4 (с. 69), транзитивным?

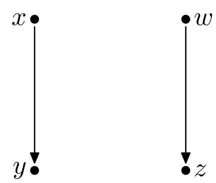
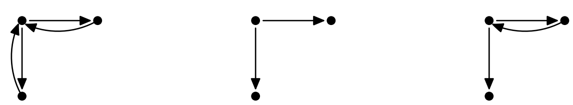


Рис. 3.4

Ответ — да, т.к. нарушение транзитивности возникает только тогда, когда имеет место xPy и yPz, но не имеет места xPz. Здесь посылка условия выполняется тривиально, потому это отношение транзитивно.

Рассмотрим теперь графы, показанные на рис. 3.5.



)))

Рис. 3.5

Можно видеть, что бинарное отношение на рис. 3.5а симметрично, на рис. 3.5б асимметрично, а на рис. 3.5в не может быть отнесено ни к симметричным, ни к асимметричным бинарным отношениям.

Симметричные бинарные отношения принято изображать с помощью неориентированных графов, заменяя дуги (x, y) и (y, x) на одну неориентированную дугу (x, y). В частности, неориентированным графом изображается отношение несравнимости I_P, которое симметрично по определению.

Действительно, если $(x, y) \in I_P$, то по определению $(x, y) \notin P$ и $(x, y) \notin P^d$. Но тогда и $(y, x) \notin P^d$, и $(y, x) \notin P$. Следовательно, $(y, x) \in I_P$.

Бинарное отношение на рис. 3.6а (с. 70) рефлексивно, на рис. 3.6б антирефлексивно, а на рис. 3.6в не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным.

Примеры связного и не связного бинарного отношения представлены на рис. 3.7а и 3.7б (с. 70) соответственно, а полного и неполного — на рис. 3.7в и 3.7г соответственно.

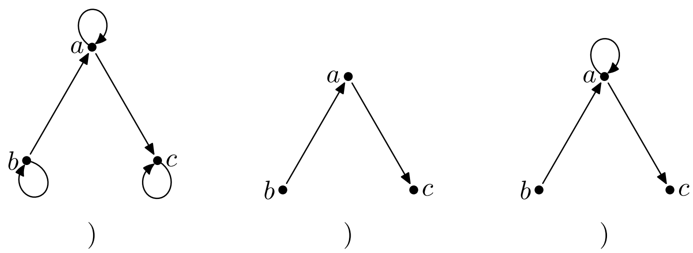


Рис. 3.6

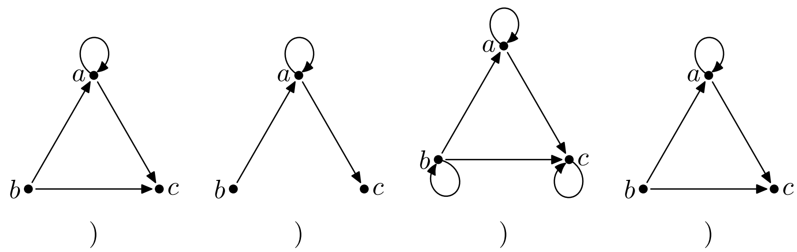


Рис. 3.7

Заметим, что полное бинарное отношение всегда является связным, но обратное, вообще говоря, неверно. Так, бинарное отношение на рис. 3.7г связно, но не полно.

Полное бинарное отношение не всегда изображается полным ориентированным графом. Полнота бинарного отношения требует только, чтобы в соответствующем графе для любых двух вершин a и b была проведена хотя бы одна из дуг (a, b) и (b, a), в то время как в *полном графе* должны быть обе эти дуги.

Так, полное бинарное отношение, показанное на рис. 3.7в, соответствует неполному графу — здесь только 6 дуг, в то время как в полном графе, построенном на трех вершинах, должно быть $3 \cdot 3 = 9$ дуг.

Рассмотрим еще одно свойство бинарных отношений, которое называется *условием Чипмана* [47]: $\forall x, y, z \ xPy \Rightarrow xPz$ или zPy. Это условие графически изображено на рис. 3.8 (с. 71); пунктиром обозначены пары, хотя бы одна из которых обязательно должна быть в отношении P. Обратим внимание на то, что условие Чипмана допускает, чтобы обе пары xPz и zPy включались в P.

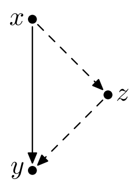


Рис. 3.8

Теорема 2. *Условие Чипмана эквивалентно условию отрицательной транзитивности.*

Доказательство. Чтобы доказать эквивалентность условий Чипмана и отрицательной транзитивности, необходимо и достаточно доказать, что из условия Чипмана следует условие отрицательной транзитивности и наоборот, из условия отрицательной транзитивности следует условие Чипмана.

($\Rightarrow$) Пусть условие Чипмана выполняется, т.е. $\forall x, y, z \in A$ $xPy \Rightarrow xPz$ или zPy. Докажем, что при этом выполняется условие отрицательной транзитивности, т.е. $\forall x, y, z \in A$ таких, что $(x, y) \notin P$ и $(y, z) \notin P \Rightarrow (x, z) \notin P$.

Возьмем произвольные $x, y, z \in A$ так, что $(x, y) \notin P$ и $(y, z) \notin P$. Пусть $(x, z) \in P$. Тогда по условию Чипмана $(x, y) \in P$ или $(y, z) \in P$, что противоречит выбору элементов x, y, z. Поэтому $(x, z) \notin P$, и условие отрицательной транзитивности выполняется.

($\Leftarrow$) Пусть выполняется условие отрицательной транзитивности, т.е. $\forall x, y, z \in A$: $(x, y) \notin P$ и $(y, z) \notin P \Rightarrow (x, z) \notin P$. Докажем, что выполняется условие Чипмана. Возьмем произвольные $x, y, z \in A$ такие, что xPy, и пусть $(x, z) \notin P$ и $(z, y) \notin P$. Тогда по условию отрицательной транзитивности $(x, y) \notin P$, что противоречит выбору элементов x, y, z. Таким образом, xPz или zPy, т.е. условие Чипмана выполняется. ■

Возможны очень естественные нарушения условия Чипмана. Достаточно вспомнить пример о подарке родителей ко дню рождения ребенка, приведенный на с. 45 в главе 2.

Важной операцией на бинарных отношениях является операция транзитивного замыкания. В терминах произведения отношения на себя эта операция может быть выражена следующим образом: отношение P^T называется *транзитивным замыканием* P, если

$$P^T = P \cup P^2 \cup P^3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} P^i.$$

Отметим, что транзитивное замыкание P^T — это наименьшее по включению транзитивное бинарное отношение, содержащее P, т.е. если Q — транзитивное бинарное отношение и $P \subseteq Q$, то $P^T \subseteq Q$.

Пример. Построим транзитивное замыкание для отношения, показанного на рис. 3.9а. На рис. 3.9б и 3.9в показаны графы P^2 и P^3 (графы P в более высоких степенях не содержат ни одной дуги), а на рис. 3.9г — граф P^T.

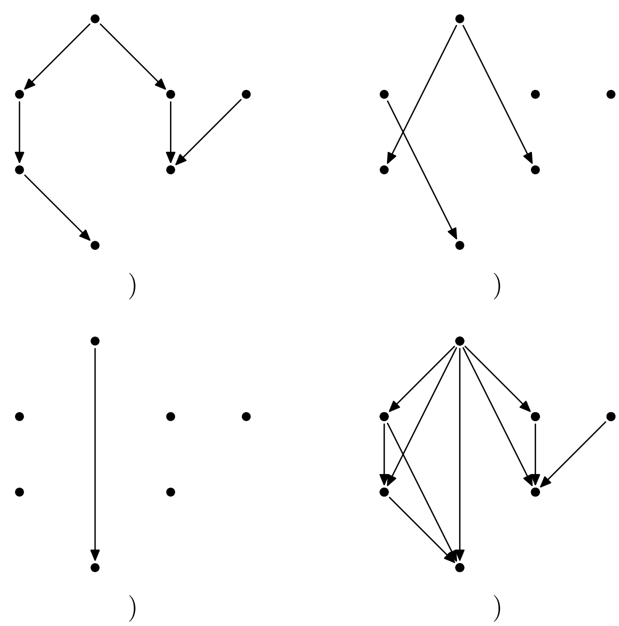


Рис. 3.9

3.3

Матрица смежности графа

Определим для графа (A, P) матрицу смежности.

Матрица смежности $\|a_{xy}\|$ для графа G — это квадратная матрица размерности $|A| \times |A|$, в которой

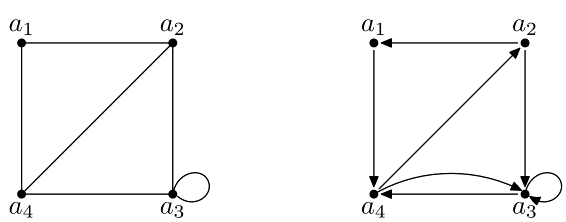
$$a_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x, y) \in P, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что матрица смежности определяется как для ориентированных, так и для неориентированных графов. В последнем случае она будет симметрична относительно главной диагонали.

Пример. На рис. 3.10 приведены графы (ориентированный и неориентированный) и их матрицы смежности.

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	1	0	1
a_2	1	0	1	1
a_3	0	1	1	1
a_4	1	1	1	0

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	0	1
a_2	1	0	1	0
a_3	0	0	1	1
a_4	0	1	1	0



))

Рис. 3.10

Для *пустого графа*[7], т.е. такого, что $P = \varnothing$, матрица смежности будет, очевидно, состоять из одних нулей. Для полного графа, т.е. такого, что $P = A \times A$, матрица смежности будет состоять из одних единиц.

[7] Такие графы называются также *нуль-графами.*

Рассмотрим теперь свойства бинарных отношений в терминах матриц смежности соответствующих графов.

Пусть $||a_{ij}||$ — матрица смежности бинарного отношения P. Тогда P:

— рефлексивно, если $\forall\, i\ a_{ii} = 1$;

— антирефлексивно, если $\forall\, i\ a_{ii} = 0$;

— связно, если $\forall\, i, j\ i \neq j\ a_{ij} = 1$ или $a_{ji} = 1$;

— полно, если $\forall\, i, j\ a_{ij} = 1$ или $a_{ji} = 1$;

— симметрично, если $\forall\, i, j\ a_{ij} = a_{ji}$;

— асимметрично, если $\forall\, i, j\ a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ji} = 0$;

— транзитивно, если $\forall\, i, j, k$ из $a_{ij} = 1$ и $a_{jk} = 1$ следует, что $a_{ik} = 1$;

— отрицательно транзитивно, если $\forall\, i, j, k$ из $a_{ij} = 0$ и $a_{jk} = 0$ следует, что $a_{ik} = 0$.

Так, бинарное отношение на рис. 3.10б не удовлетворяет ни одному из вышеописанных свойств, а именно:

— не рефлексивно, т.к. $a_{11} = 0$ (т.е. $(a_1, a_1) \notin P$);

— не антирефлексивно, т.к. $a_{33} = 1$ (т.е. $(a_3, a_3) \in P$);

— не связно, т.к. $a_{31} = a_{13} = 0$ (т.е. $(a_3, a_1) \notin P$ и $(a_1, a_3) \notin P$);

— не полно, т.к. $a_{31} = a_{13} = 0$ (т.е. $(a_3, a_1) \notin P$ и $(a_1, a_3) \notin P$);

— не симметрично, т.к. $a_{14} = 1$, но $a_{41} = 0$ (т.е. $(a_1, a_4) \in P$, но $(a_4, a_1) \notin P$);

— не асимметрично, т.к. $a_{43} = 1$, но $a_{34} = 1$ (т.е. $(a_3, a_4) \in P$ и $(a_4, a_3) \in P$);

— не транзитивно, т.к. $a_{21} = 1$ и $a_{14} = 1$, но $a_{24} = 0$ (т.е. $(a_2, a_1) \in P$, $(a_1, a_4) \in P$, но $(a_2, a_4) \notin P$);

— не отрицательно транзитивно, т.к. $a_{41} = 0$ и $a_{13} = 0$, но $a_{43} = 1$ (т.е. $(a_4, a_1) \notin P$, $(a_1, a_3) \notin P$, но $(a_4, a_3) \in P$).

3.4

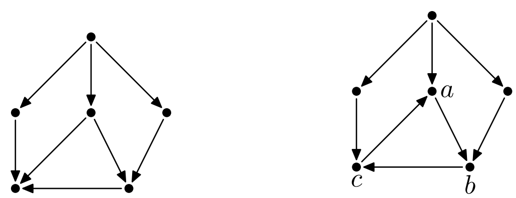
Специальные классы бинарных отношений

Далее будем рассматривать связь ориентированных графов с предпочтениями. Понятие предпочтения является едва ли не самым основным понятием микроэкономики, теории выбора, математической психологии, некоторых разделов математической политологии и сейчас активно начинает использоваться в макроэкономике.

Напомним понятие ациклического бинарного отношения, введенное в главе 2: отношение P называется *ациклическим*, если оно не содержит циклов, т.е. не существует $t \geq 1$ такого, что $a_1 P a_2$, $a_2 P a_3, \ldots$, $a_{t-1} P a_t$ и $a_t P a_1$. Если указанный цикл существует, то его *длина* равна t.

Соответствующий ациклическому бинарному отношению граф также называется *ациклическим.*

На рис. 3.11а и 3.11б приведены два графа. Первый — ациклический, а второй содержит цикл ab, bc, ca.



а))

Рис. 3.11

Определение 1. *а) Ациклическое и транзитивное бинарное отношение называется частичным порядком.*

б) Отрицательно транзитивный частичный порядок называется слабым порядком.

в) Связный слабый порядок называется линейным порядком.

Эти виды отношений являются основными в описании рациональности предпочтений. Обозначим множество ациклических отношений на A через $\mathcal{AC}$, множество частичных порядков — через $\mathcal{PO}$, слабых порядков — через $\mathcal{WO}$ и линейных порядков — через $\mathcal{LO}$. Непосредственно из определений этих отношений следует, что

$$\mathcal{LO} \subset \mathcal{WO} \subset \mathcal{PO} \subset \mathcal{AC}.$$

В главе 2 линейный порядок определялся как связное, транзитивное и ациклическое бинарное отношение. Если же «расшифровать» сформулированное здесь определение, то получится, что линейный порядок определен как ациклическое, транзитивное, отрицательно транзитивное и связное отношение, т.е. дополнительно использовано условие отрицательной транзитивности. Необходимо проверить эквивалентность этих двух определений, а именно: показать, что из условий связности, ацикличности и транзитивности следует и условие отрицательной транзитивности. Докажем это.

Пусть P связно, ациклично, транзитивно, $(x,y) \notin P$ и $(y,z) \notin P$. Тогда, в силу связности P yPx и zPy. Так как P ациклично, то $(x,z) \notin P$ (иначе P будет содержать цикл (x,z), (z,y), (y,x)), что и означает отрицательную транзитивность P.

Отметим, что введение условия отрицательной транзитивности в определение линейного порядка связано с тем, что в данной главе линейный порядок определяется через другие виды порядков, т.е. происходит сужение класса определяемых объектов путем введения нового, дополнительного по отношению к предыдущим, свойства.

Вообще говоря, опеределение линейного порядка можно еще более упростить, отказавшись от условия транзитивности. Читатель может проверить это самостоятельно.

Заметим, и это понадобится в дальнейшем, что антирефлексивность бинарного отношения означает отсутствие циклов длины 1, а асимметричность — отсутствие циклов длины 1 и 2. Поэтому ациклическое бинарное отношение антирефлексивно и асимметрично. Асиметричными и, в частности, антирефлексивными будут частичные, линейные и слабые порядки.

Исследуем свойства отношений несравнимости для линейных, слабых и частичных порядков. Иначе говоря, рассмотрим вопрос о том, как «устроено» отношение I_P, если P принадлежит одному из введенных выше классов бинарных отношений. Начнем изучение структуры отношения несравнимости со случая линейных порядков.

Теорема 3. *Если P — линейный порядок, то*

$$I_P = \{(x,x) | x \in A\}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $x \neq y$ и $(x,y) \in I_P$. Отсюда следует, что $(x,y) \notin (P \cup P^d)$, т.е. $(x,y) \notin P$ и $(x,y) \notin P^d$. Поэтому $(x,y) \notin P$ и $(y,x) \notin P$, что противоречит связности P. Значит, если $x \neq y$, то $(x,y) \notin I_P$.

Пусть теперь $(x,x) \notin I_P$. Тогда $(x,x) \in (P \cup P^d)$, т.е. $(x,x) \in P$, что противоречит ацикличности (антирефлексивности) линейного порядка. ■

Таким образом, линейный порядок представляется в виде простой транзитивной цепи, а его отношение несравнимости — в виде изолированных вершин с петлями (рис. 3.12а и 3.12б).

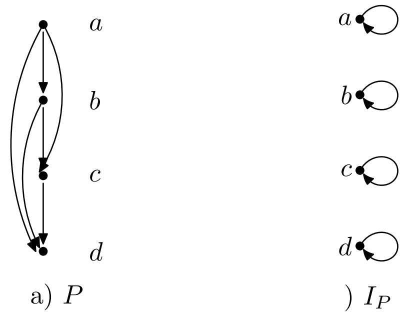


Рис. 3.12

В терминах матриц смежности соответствующего графа $G = (A, P)$ отношение I_P для линейного порядка имеет вид: $\forall\, i, j\ a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Обратим внимание на то, что условие связности требует полной сравнимости альтернатив. Действительно, в линейном порядке относительно любых двух различных альтернатив можно сказать, какая из них более предпочтительна. Очевидно, что это — крайняя форма рациональности, которая требует от индивидуума, чтобы он всегда мог установить различие между двумя альтернативами.

Определение 2. *Рефлексивное и симметричное бинарное отношение называется отношением толерантности. Транзитивное отношение толерантности называется отношением эквивалентности.*

Теорема 4. *Отношение несравнимости I_P для слабого порядка P является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Пара (x,x) принадлежит I_P для всех $x \in A$, поскольку P ациклично и, следовательно, антирефлексивно. Значит, отношение I_P рефлексивно.

Покажем, что отношение I_P удовлетворяет условию симметричности. Пусть $(x, y) \in I_P$. Отсюда следует, что $(x, y) \notin (P \cup P^d)$, т.е. $(y, x) \notin (P \cup P^d)$ и, значит, $(y, x) \in I_P$. Таким образом, отношение I_P симметрично.

Покажем, что I_P транзитивно. Пусть $(x, y) \in I_P$ и $(y, z) \in I_P$. Отсюда следует, что $(x, y) \in P^c$ и $(y, z) \in P^c$. По условию отрицательной транзитивности, присущему слабым порядкам, $(x, z) \in P^c$. Аналогично $(y, x) \in P^c$ и $(z, y) \in P^c$, откуда следует, что $(z, x) \in P^c$, поэтому $(x, z) \in P^{cd}$.

Имеем $(x, z) \in P^c$ и $(x, z) \in P^{cd}$. Следовательно, $(x, z) \in (P^c \cap P^{cd}) = I_P$, а это означает, что I_P транзитивно.

Так как отношение несравнимости I_P рефлексивно, симметрично и транзитивно, то оно по определению является отношением эквивалентности. ■

На рис. 3.13а показано отношение слабого порядка P (для удобства чтения — без транзитивных дуг), а на рис. 3.13б — отношение несравнимости I_P для этого отношения P.

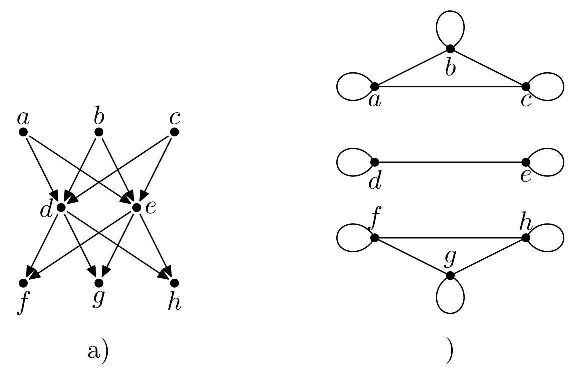


Рис. 3.13

На рис. 3.13б симметричные пары вида (a, b) и (b, a), так же, как и пары вида (c, c), показаны неориентированными дугами.

Отношение несравнимости для слабого порядка является отношением эквивалентности и, в частности, удовлетворяет условию транзитивности. Это означает, что если альтернатива x несравнима с y, а y несравнима с z, то x несравнима с z.

Рассмотрим **пример,** показывающий, что это условие может не выполняться. Любой человек вряд ли различает на вкус сахар, положенный в его кофе, в количестве 1 или 2 мг. Но тогда вряд ли тот же индивидуум отличает сахар в количестве 2 или 3 мг. По транзитивности, индивидуум не почувствует и разницу между 1 и 3 мг сахара. Продолжая так рассуждать, придем к выводу, что индивидуум не различает 1 мг и 20 г сахара в своем кофе, что, конечно же, неверно.

Одним из тех, кто впервые обратил внимание на то, что предпочтения индивидуумов могут не описываться отношениями слабого порядка, был великий французский математик А. Пуанкаре[8].

Другим интересным примером нарушения транзитивности I_P является работа Яна Диббетса «Кратчайший день 1970 г., фотографировавшийся из моего дома каждые 6 минут (Амстердам, 1970)». Эта работа представлена в музее современного искусства Соломона Гуггенхайма в Бильбао (Испания). Фотографии висят на стене в ряд, на них запечатлен один и тот же вид из дома автора с деревом и другим домом. Более светлые фотографии повешены в середине, и чем дальше от центра, тем темнее становятся фотографии — по мере приближения к краям. На соседних фотографиях различие почти незаметно; но чем дальше они расположены друг от друга, тем заметнее различие, особенно между центром и краями.

Наконец, установим соответствующий результат для частичных порядков.

Теорема 5. *Отношение I_P для частичного порядка P является отношением толерантности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фактически повторяет доказательство первых двух утверждений теоремы 4. Условие транзитивности I_P в этом случае не выполняется, т.к. P не удовлетворяет условию отрицательной транзитивности. ■

Пример. Покажем, что отношение I_P для частичного порядка P не удовлетворяет условию транзитивности. Этот пример изображен на с. 80 на рис. 3.14а (отношение P) и 3.14б (отношение I_P). Для отношения P пары (b,e) и (e,c) находятся в отношении I_P, однако пара (b,c) в I_P не находится.

[8] Пуанкаре Жюль Анри (1854—1912) — французский математик и астроном, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук, член Парижской академии наук. Построил качественную теорию дифференциальных уравнений, ввел основные понятия комбинаторной топологии и т.д. Интересовался философскими проблемами науки и методологией научного познания.

З а м е ч а н и е. Как следует из доказательства теоремы 4, отношение несравнимости для антирефлексивного бинарного отношения рефлексивно, и на его графе должны присутствовать петли у всех вершин. В случаях, когда это не может вызвать путаницы, например, для графов, изображающих отношение несравнимости частичных порядков, эти петли иногда опускают, как и сделано на рис. 3.14б.

а))

Рис. 3.14

Между классом слабых порядков и частичных порядков существуют классы бинарных отношений, которые, если их интерпретировать как предпочтения, отвечают разным требованиям рациональности [35]. Однако их изучение выходит за рамки данной книги.

3.5

Выбор по отношению предпочтения

В теории выбора рассматриваются два типа отношений предпочтения — строгое и нестрогое.

Строгое отношение предпочтения интерпретируется в терминах «лучше, чем» и обозначается через P. Тот факт, что x находится в отношении P к y, т.е. xPy, интерпретируется, как «x лучше, чем y».

Нестрогое отношение предпочтения R интерпретируется в терминах «столь же хорош, как» или «не хуже, чем».

Непосредственно из интерпретации отношений P и R следует, что P должно быть асимметрично (т.к. не может быть, чтобы одновременно выполнялись условия x лучше, чем y, а y лучше, чем x), а отношение R должно быть рефлексивно (т.к. альтернатива x не хуже, чем она сама). Более того, отношение «не хуже, чем» должно содержать отношение «лучше, чем», т.е. имеет место $P \subset R$.

Важнейшее понятие теории выбора — понятие *предъявления*: изучается выбор не только на множестве всех альтернатив A, но и на его подмножествах $X \subseteq A$. Эти подмножества называют предъявлениями; они имеют смысл допустимых множеств альтернатив.

Исследование рациональности выбора производится сравнением выбранных элементов на различных предъявлениях. Этот подход восходит к первой половине XX в., когда такие основатели современной экономики, как П. Самуэльсон[9] [65], пытались охарактеризовать рациональность поведения экономических агентов в терминах более общих, чем предпочтение. Это направление развивалось, в частности, такими великими экономистами, как К. Эрроу[10], А. Сен[11] и другие, — [38], [39], [67], [68], [69], [70].

Введем теперь понятие выбора по отношению предпочтения.

Начнем с выбора по отношению строгого предпочтения. Естественно считать, что на каждом подмножестве X (предъявлении X) универсального множества (множества всех альтернатив) A выбирается такая альтернатива(ы) y, что на X не существует альтернативы лучшей, чем y.

Запишем это формально. Для любого предъявления $X \subseteq A$

---

[9] Самуэльсон Пол Энтони (р. 1915) — ученый-теоретик, внесший фундаментальный вклад в развитие экономической науки и получивший за это Нобелевскую премию. Его знаменитый учебник «Экономикс» был впервые опубликован в 1948 г. и с тех пор выдержал уже более 15 изданий. Одним из самых значительных достижений Самуэльсона был его успех в создании прочной математической основы для экономической науки.

[10] Эрроу Кеннет (р. 1921) — американский экономист, профессор Стенфордского университета, лауреат Нобелевской премии, которую получил за огромный вклад в теорию общего экономического равновесия и теорию благосостояния.

[11] Сен Амартия (р. 1933) — профессор экономики и магистр Тринити-Колледжа в Кембридже (ранее был профессором экономики и философии в Гарвардском университете). После получения степени бакалавра в Калькуттском университете доктор Сен был удостоен степени бакалавра, магистра и доктора в Тринити-Колледже. Лауреат Нобелевской премии по экономике (1998). Среди его наиболее известных трудов — книги «Развитие как свобода» (2000) и «Об экономическом равенстве» (1997).

$$C(X) = \{y \in X | \nexists\, x \in X,\ \text{такого что } xPy\}, \qquad (3.1)$$

где P — отношение строгого предпочтения на A.

Функция C, ставящая в соответствие каждому X подмножество лучших по некоторому отношению P альтернатив, называется *функцией выбора, рационализируемой отношением P*.

В общем случае функция выбора определяется как отображение $C : 2^A \to 2^A$, удовлетворяющее условию $C(X) \subseteq X$.

Напомним, что через 2^A принято обозначать множество всех подмножеств множества A.

Не всякая функция выбора может быть рационализируема отношением P.

Рассмотрим **пример**, приведенный в табл. 3.1, для $A = \{x, y, z\}$.

Таблица 3.1. Функция выбора, не рационализируемая бинарным отношением

X	A	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{y,z\}$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$
$C(X)$	$\{x,z\}$	$\{x\}$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$

Если C рационализируема отношением P, то, поскольку $C(\{x,z\}) = \{x\}$, пара (x,z) должна принадлежать P. Но это означает, что по определению (3.1) $z \notin C(\{x,y,z\})$, а это противоречит определению функции C в табл. 3.1.

Можно видеть, что функция выбора, рационализируемая отношением P, определяет выбор на каждом предъявлении X путем попарных сравнений альтернатив — выбираются те альтернативы, которые «выдерживают» попарное сравнение с другими альтернативами.

Определение 3. *Будем говорить, что C является функцией:*
а) непустого выбора, если $\forall\, X \subseteq A,\ X \neq \varnothing$, имеем $C(X) \neq \varnothing$;
б) однозначного выбора, если $\forall\, X \subseteq A,\ X \neq \varnothing\ |C(X)| = 1$.

Так, функция выбора, построенная в табл. 3.1, является функцией непустого выбора, но не является функцией однозначного выбора, поскольку $|C(A)| = 2$.

Основываясь на интерпретации нестрогого отношения R как отношения «не хуже, чем», естественно определить выбор на X как подмножество альтернатив, которые не хуже, чем остальные альтернативы в X, т.е. $\forall X \subseteq A$

$$C(X) = \{y \in X | \forall x \in X \ yRx\}. \tag{3.2}$$

Аналогично предыдущему, будем называть C *функцией выбора, рационализируемой отношением* R, если C представима в виде (3.2) для некоторого отношения R.

Рассмотрим теперь следующую проблему. Каким условиям должны удовлетворять отношения P и R, чтобы функции выбора, порожденные формулами (3.1) и (3.2) соответственно, совпадали? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6. *Для того, чтобы функции непустого выбора, рационализируемые отношениями P и R соответственно, совпадали, необходимо и достаточно, чтобы*

$$P = R^{cd}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Заметим, что условия $P = R^{cd}$ и $P^{cd} = R$ равносильны (проверьте самостоятельно). Пусть выполняется (3.3). Следовательно, и $P^{cd} = R$. Условие $y \in C_P(X)$ означает, что $\nexists x \in X : xPy$, т.е. $\forall x \in X \ xP^c y$. Это условие равносильно тому, что $\forall x \in X \ yP^{cd}x$. По условию $P^{cd} = R$, следовательно $\forall x \in X \ yRx$. А это в точности означает, что $y \in C_R(x)$. Итак, условия $y \in C_P(X)$ и $y \in C_R(x)$ равносильны, поэтому $C_P(X) = C_R(X)$ для всех $X \subseteq A$.

Обратно, пусть $C_P = C_R$. Покажем, что (3.3) выполняется. Пусть $P^{cd} \neq R$. Тогда существует либо такая пара (x, y), что $(x, y) \in P^{cd}$, но $(x, y) \notin R$, либо такая пара (z, w), что $(z, w) \in R$, но $(z, w) \notin P^{cd}$.

В первом случае $(y, x) \in P^c$ и $(y, x) \notin P$. Поэтому $C_P(\{x, y\})$ содержит x. С другой стороны, $(x, y) \notin R$, поэтому $C_R(\{x, y\})$ не содержит x, что противоречит равенству C_P и C_R.

Второй случай рассматривается аналогично. ■

Отметим, что условие непустоты функции выбора в данном случае не является ограничительным. Теорему 6 можно переформулировать и на тот случай, когда функция C допускает на некоторых X пустой выбор [1], [30].

3.6

Задачи

1. Постройте $P' \cap P''$, $P' \cup P''$, $P' \cdot P''$, $P'' \cdot P'$ для графов на рис. 3.15—3.18 (с. 85).

2. Постройте обратные и дополнительные отношения для графов на рис. 3.15—3.18.

3. Постройте графы, соответствующие отношениям несравнимости, для бинарных отношений, изображенных на рис. 3.19 (с. 86).

4. Пусть P_1—P_5 представляют следующие отношения родства между людьми:

$(x, y) \in P_1 \Leftrightarrow x$ отец y,

$(x, y) \in P_2 \Leftrightarrow x$ мать y,

$(x, y) \in P_3 \Leftrightarrow x$ дед y,

$(x, y) \in P_4 \Leftrightarrow x$ и y — дети одной матери,

$(x, y) \in P_5 \Leftrightarrow x$ племянник y.

С помощью операций над бинарными отношениями выразить P_3, P_4, P_5 через P_1 и P_2.

5. Пусть бинарные отношения P_1 и P_2:

а) рефлексивны,

б) антирефлексивны,

в) симметричны,

г) асимметричны,

д) транзитивны.

Будет ли их объединение обладать теми же свойствами?

6. Пусть бинарные отношения P_1 и P_2:

а) рефлексивны,

б) антирефлексивны,

в) симметричны,

г) асимметричны,

д) транзитивны.

Будет ли их пересечение обладать теми же свойствами?

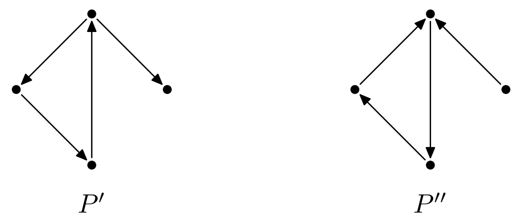


Рис. 3.15

Рис. 3.16

Рис. 3.17

Рис. 3.18

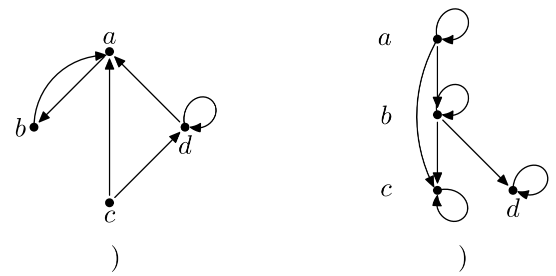


Рис. 3.19

7. Пусть бинарные отношения P_1 и P_2:
а) рефлексивны,
б) антирефлексивны,
в) симметричны,
г) асимметричны,
д) транзитивны.
Будет ли их произведение $P_1 \cdot P_2$ обладать теми же свойствами?
8. Пусть P — произвольное бинарное отношение. Докажите, что:
а) если P связно, то P^d также связно;
б) если P транзитивно, то P^d также транзитивно;
в) если P ациклично, то P^d также ациклично;
г) если P антирефлексивно и транзитивно, то оно асимметрично.
9. Бинарные отношения P_1 и P_2 заданы своими матрицами:

$$P_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Какими свойствами они обладают? Постройте графы, изображающие эти бинарные отношения.

10. Пусть $X = \{2, 3, 10, 12, 15\}$. Определим бинарное отношение P следующим образом: $xPy \Leftrightarrow x$ делится нацело на y и x/y нечетно. Какими свойствами обладает бинарное отношение P?

11. Пусть A — непустое конечное множество, на котором задана функция полезности $u : A \to \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел. Бинарное отношение P определим так, что $xPy \Leftrightarrow u(x) - u(y) > \varepsilon$, где ε — фиксированное положительное число. Какими свойствами обладает бинарное отношение P?

12. Докажите, что бинарное отношение P:

а) рефлексивно, если и только если $E \subseteq P$, где E — диагональное отношение: $E = \{(x, x) | x \in A\}$;

б) антирефлексивно, если и только если $E \subseteq P^c$;

в) асимметрично, если и только если $P \subseteq P^{cd}$;

г) симметрично, если и только если $P = P^d$;

д) полно, если и только если $P^{cd} \subseteq P$;

е) связно, если и только если $P^c \cap P^{cd} \subseteq E$;

ж) транзитивно, если и только если $P^2 \subseteq P$;

з) отрицательно транзитивно, если и только если $(P^c)^2 \subseteq P^c$.

13. Докажите, что если бинарное отношение P отрицательно транзитивно, то P^{cd} транзитивно.

14. Докажите, что если P — асимметричное бинарное отношение, то P^{cd} — полно.

15. Докажите, что условия $P^d \subseteq P$ и $P \subseteq P^d$ эквивалентны.

16. Пусть P — произвольное бинарное отношение. Докажите, что $P \cap P^d$ и $P \cup P^d$ симметричны.

17. Пусть P_1 и P_2 рефлексивны и транзитивны. Докажите, что $(P_1 \cup P_2) \subseteq (P_1 \cdot P_2)$.

18. Проверьте корректность определения I_P: для произвольного бинарного отношения P докажите тождество

$$A^2 \setminus (P \cup P^d) = (P \cup P^d)^c = P^c \cap P^{cd}.$$

19. Бинарное отношение P называется *полутранзитивным*, если

$$\forall x, y, z, w \in A \ xPy \text{ и } yPz \Rightarrow xPw \text{ или } wPz.$$

Докажите, что:

а) антирефлексивное полутранзитивное отношение транзитивно,

б) антирефлексивное полутранзитивное отношение асимметрично.

20. Приведите пример, показывающий, что отношение несравнимости для антирефлексивного связного полутранзитивного отношения не всегда удовлетворяет условию связности.

21. Постройте транзитивные замыкания для бинарных отношений, графы которых показаны на рис. 3.20 (с. 88).

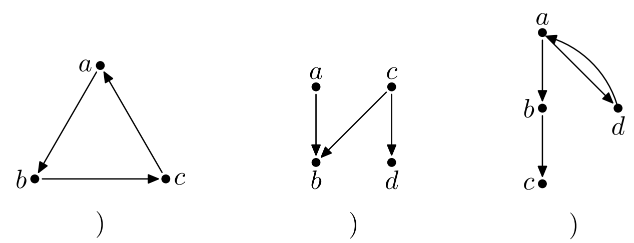


Рис. 3.20

22. Пусть P представляет собой цикл $x_1Px_2P\dots Px_mPx_1$, в который входят все элементы A. Докажите, что $P^T = A \times A$.

23. Пусть P представляет собой цепь $x_1Px_2P\dots Px_m$, в которую входят все элементы A. Докажите, что P^T удовлетворяет условию связности, ацикличности и транзитивности, т.е. является линейным порядком.

24. Пусть P транзитивно. Докажите, что для любого натурального n $P^n \subseteq P$.

25. Пусть P рефлексивно и транзитивно. Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство $P^n = P$.

26. Определим бинарное отношение P на множестве действительных чисел следующим образом: $xPy \Leftrightarrow (x - y)$ — целое число. Докажите, что P — отношение эквивалентности.

27. Будет ли отношением эквивалентности объединение двух отношений эквивалентности? А пересечение? Приведите соответствующие примеры.

28. Пусть P — произвольное бинарное отношение. Докажите, что:

а) если P — слабый порядок, то P^d также слабый порядок;

б) если P — линейный порядок, то P^d также линейный порядок.

29. Будет ли частичным порядком объединение двух частичных порядков? А пересечение?

30. Приведите примеры частичных порядков, не являющихся слабыми порядками.

31. Приведите примеры слабых порядков, не являющихся ни линейными порядками, ни пустым бинарным отношением.

32. Пусть C — функция выбора, рационализируемая линейным порядком P. Докажите, что C является функцией однозначного выбора.

33. Пусть P — отношение, показанное на рис. 3.21.

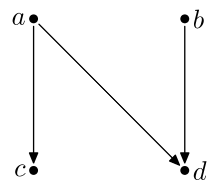


Рис. 3.21

Постройте функцию выбора C_P, рационализируемую отношением P. Постройте отношение $R = P^{cd}$ и функцию выбора C_R, рационализируемую отношением R. Проверьте, что $C_P = C_R$.

34. Пусть R — отношение, показанное на рис. 3.22.

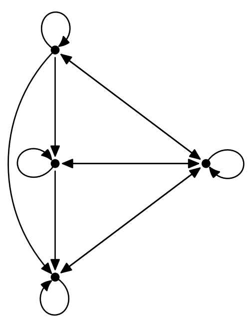


Рис. 3.22

Постройте функцию выбора C_R, рационализируемую отношением R. Постройте отношение $P = R^{cd}$ и функцию выбора C_P, рационализируемую отношением P. Проверьте, что $C_R = C_P$.

35. Докажите, что любая функция выбора, рационализируемая слабым порядком, удовлетворяет условию АСА (аксиоме выбора Эрроу): $\forall X, X' : X' \subseteq X$ и $C(X) \cap X' \neq \varnothing$,

$$C(X') = C(X) \cap X'.$$

4
глава

ЗАДАЧА ГОЛОСОВАНИЯ

4.1

Введение

Человечество с незапамятных времен задумывалось о процедурах и методах принятия коллективных решений. Поэтому в течение многих столетий люди пытались найти «наилучшее» правило агрегирования индивидуальных предпочтений.

В «Жизнеописаниях» Плутарха содержится пример процедур коллективных решений, использовавшихся в IX в. до н.э. В письмах Плиния Младшего обсуждаются возможности манипулирования при голосовании.

Начало систематических исследований по теории голосования принято относить к концу XVIII в., когда два члена французской академии, Кондорсе[12] и Борда[13], опубликовали свои работы на эту тему. Кроме того, Кондорсе построил замечательный пример, пока-

[12] Кондорсе Мари Жан Антуан Никола де Карита (1743—1794) — французский философ-просветитель, математик, политический деятель, иностранный почетный член Петербургской академии наук (1776—1792, исключен по указу Екатерины II как член Конвента и участник суда над Людовиком XVI), член Французской академии наук (1769). Написал ряд статей для «Энциклопедии» Д. Дидро и Ж. Д'Аламбера. Маркиз Кондорсе был одним из тех ученых и общественных деятелей, которые создали современное понимание демократии и, в частности, теорию голосований.

[13] Борда Жан-Шарль де (1733—1799) — французский математик, член Французской академии наук, участник военных сражений и мореплаватель, один из создателей теории голосований.

зывающий, что правило простого большинства (мажоритарное правило) может приводить к неразрешимым парадоксам. Полученный результат, который называется теперь парадоксом Кондорсе, или парадоксом голосования, стимулировал значительное число исследований. Их целью было получение новых правил агрегирования, позволяющих избежать таких парадоксов. Среди ученых, внесших вклад в эту область, назовем Ч.Л. Доджсона (более известного как Льюис Кэрролл, автор «Алисы в стране чудес»).

Важный шаг в теории голосований был сделан в 1951 г. К. Эрроу, который переформулировал и решил задачу в иных терминах. Вместо рассмотрения конкретных процедур голосования, как делалось до него, К. Эрроу сформулировал условия, которым должно удовлетворять любое разумное правило принятия коллективного решения. Он явно пытался описать такую процедуру и получил неожиданный результат — процедуру, удовлетворяющую всем аксиомам, построить нельзя. Это утверждение называют парадоксом Эрроу, или теоремой о невозможности.

На современном этапе исследования в области теории коллективных решений направлены на построение разумных процедур голосования в рамках аксиоматического подхода при ослаблении или модификации условий, предложенных К. Эрроу.

В данной главе рассматриваются несколько вопросов, связанных с теорией агрегирования для того случая, когда мнения участников представляются линейными порядками, а коллективное решение представляется бинарным отношением. Возможны также и иные постановки этой задачи, однако в этой книге они не рассматриваются.

В параграфе 4.2 приводятся примеры правил голосования. В параграфе 4.3 излагается аксиоматическая теория агрегирования локальных правил — знаменитая теорема о невозможности К. Эрроу [38]. В параграфе 4.4 приводится парадокс Сена, так называемая теорема о невозможности паретовского либерала. Наконец, в параграфе 4.5 обсуждается возможность стратегического поведения участников в задаче голосования.

В параграфе 4.6 представлены задачи к данной главе.

4.2

Примеры правил голосования

Рассмотрим следующую *задачу голосования*: члены группы $N = \{1, \ldots, n\}$, состоящей из n участников, $n > 2$, выражают свое мнение относительно вариантов из множества $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geq 2$, в виде n отношений линейного порядка P_i. Любое подмножество множества участников называется коалицией.

Напомним, что отношение P называется линейным порядком, если оно удовлетворяет условиям связности ($\forall x, y, x \neq y \Rightarrow xPy$ или yPx), антирефлексивности ($\forall x\,(x, x) \notin P$) и транзитивности ($\forall x, y, z$ $xPyPz \Rightarrow xPz$).

Поясним сначала, почему задача рассматривается при $n > 2$ и $m \geq 2$. Если в принятии коллективного решения участвует только один или два человека, вряд ли эту задачу можно отнести к задачам голосования. Как и в том случае, когда $m = 1$, т.е. имеется всего один вариант решения.

Набор отношений $(P_1, \ldots, P_n)$ называется *профилем участников* и обозначается как $\vec{P}$ или $\{P_i\}_1^n$.

Задача голосования состоит в построении бинарного отношения P, отражающего мнение коллектива относительно вариантов из A.

Теперь рассмотрим пример.

Пример. Пусть три друга (обозначим их как 1, 2 и 3) решают, куда поехать в отпуск. В качестве альтернатив рассматриваются Турция (Т), Египет (Е) и Мальта (М). Предположим, что предпочтения участников имеют вид:

1	2	3
Т	Т	Е
М	Е	Т
Е	М	М.

Каким должно быть предпочтение коллектива в случае таких индивидуальных предпочтений?

Как и в главе 2, будем рассматривать линейные порядки, используя обозначение $\succ$ или же в виде:

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z. \end{matrix}$$

Это будет означать, что альтернатива x лучше, чем y, и y лучше, чем z; соответственно x лучше, чем z.

Определим сначала два конкретных правила голосования. Первое из них — *правило простого большинства*, т.е. пара (x, y) включается в коллективное отношение P, если ее включает в свои отношения P_i простое большинство участников.

В нашем примере два из трех участников (1 и 2), т.е. простое большинство, включает пару (Т,Е) в свои отношения P_1 и P_2. Тогда коллективное решение P, выстраиваемое по правилу простого большинства, содержит эту пару. Аналогично P содержит пару (Т,М) (она включается в свои отношения всеми тремя участниками) и пару (Е,М) (которая включается в свои отношения участниками 2 и 3).

Поэтому коллективное решение P имеет следующий вид:

$$\begin{matrix} \text{Т} \\ \text{Е} \\ \text{М}. \end{matrix}$$

В полученном коллективном решении Т (Турция) — наиболее предпочтительный вариант, Е (Египет) — следующий по предпочтительности, наконец, М (Мальта) — наименее предпочтительный вариант.

Для дальнейшего изложения необходимо выделить в профиле $\vec{P}$ множество участников, которые включают пару (a, b) в свои отношения P_i, т.е.

$$V(a, b; \vec{P}) = \{i \in N | \, (a, b) \in P_i\}.$$

В рассматриваемом примере получаем, что:

$$V(\text{Т,Е};\vec{P}) = \{1, 2\},$$
$$V(\text{Т,М};\vec{P}) = \{1, 2, 3\} = N,$$

$$V(\text{E,M};\vec{P}) = \{2,3\},$$
$$V(\text{E,T};\vec{P}) = \{3\},$$
$$V(\text{M,T};\vec{P}) = \varnothing,$$
$$V(\text{M,E};\vec{P}) = \{1\}.$$

Рассмотрим ориентированный граф $G = (A, \Gamma)$, который строится следующим образом: $(x, y) \in \Gamma$, если и только если существует хотя бы одна коалиция простого большинства, в которой каждый игрок предпочитает исход x исходу y. Такой граф называется *мажоритарным.*

Исход, соответствующий недоминируемой вершине в этом графе, т.е. вершине, в которую не входят дуги, называется *победителем Кондорсе.*

Множество победителей Кондорсе может быть пусто. Этот результат называется *парадоксом Кондорсе* (или *парадоксом голосования*) в честь великого французского ученого маркиза Кондорсе, который впервые его описал.

Действительно, пусть $N = \{1, 2, 3\}$, $A = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$$P_1 : x_1 \succ x_2 \succ x_3;$$
$$P_2 : x_3 \succ x_1 \succ x_2;$$
$$P_3 : x_2 \succ x_3 \succ x_1.$$

Мажоритарный граф выглядит следующим образом (рис. 4.1а). Так как $x_1 \succ x_2$ для участников 1 и 2 (т.е. для двух из трех участников), то $x_1 \Gamma x_2$. Аналогично получим $x_2 \Gamma x_3$, $x_3 \Gamma x_1$.

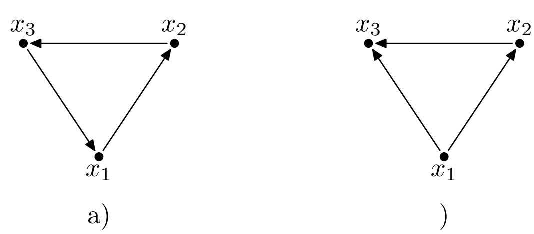


Рис. 4.1

Таким образом, мажоритарный граф является циклом, откуда следует, что победителей Кондорсе нет.

Итак, при очень разумных (но различных) мнениях участников правило простого большинства оказывается несостоятельным, т.к. не приводит ни к какому решению.

Заметим, что если предпочтения участников выглядят иначе, победитель Кондорсе может существовать. Рассмотрим другое предпочтение для третьего участника:

$$P_3' \,:\, x_2 \succ x_1 \succ x_3.$$

При предпочтениях участников P_1, P_2, P_3' получим мажоритарный граф, показанный на рис. 4.1б. Здесь есть единственный победитель Кондорсе — x_1.

Рассмотрим теперь второе правило голосования.

Припишем каждому варианту в линейном порядке P_i число (которое называется *рангом*) в зависимости от того места, на котором этот вариант находится. Если $A = \{x, y, z\}$ и P_i имеет вид $x \succ y \succ z$, то самому лучшему варианту x припишем ранг 3, следующему по предпочтительности варианту y — ранг 2; наконец, варианту z — ранг 1.

На рис. 4.2 приведены примеры отношений линейного порядка с выписанными рядом рангами вариантов в каждом отношении $P_i, i = 1, 2, 3$.

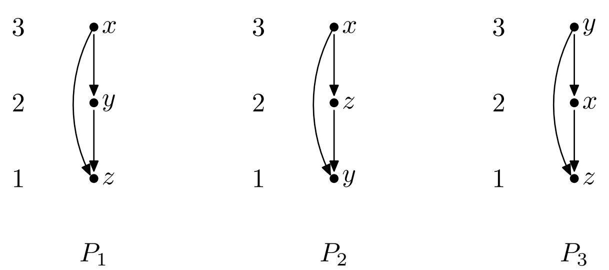


Рис. 4.2

Правило Борда, названное в честь великого французского математика Жана-Шарля де Борда, который его впервые предложил, состоит в том, что суммируются ранги каждого варианта, а затем вариант с наибольшим рангом объявляется самым предпочтительным, и далее предпочтения выстраиваются в порядке убывания рангов.

Пример. На рис. 4.2 сумма рангов для x равна 8, для y — 6 и для z — 4. Поэтому коллективное отношение, полученное по правилу Борда, имеет вид, показанный на рис. 4.3.

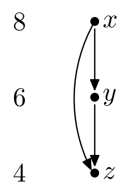


Рис. 4.3

Обозначим ранг варианта x в отношении P_i через $r_i(x)$. Тогда сумма рангов для альтернативы x по всем упорядочениям P_i равна

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x).$$

Для парадокса Кондорсе сумма рангов вариантов равна $r(x) = r(y) = r(z) = 6$ (проверьте самостоятельно). Тогда результирующее предпочтение по правилу Борда пусто (рис. 4.4).

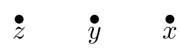


Рис. 4.4

Этот результат — прямой аналог парадокса Кондорсе.

Всегда ли применение правила Борда и правила простого большинства приводит к одному и тому же результату, как это произошло с парадоксом Кондорсе и в примере на рис. 4.2? Оказывается, нет!

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть множество A состоит из четырех альтернатив: x, y, z, t, а предпочтения трех участников имеют вид:

$$\begin{aligned} P_1 &: x \succ y \succ z \succ t, \\ P_2 &: x \succ y \succ z \succ t, \\ P_3 &: y \succ z \succ t \succ x. \end{aligned}$$

Применим правило Борда: $r(x) = 4 + 4 + 1 = 9$, $r(y) = 3 + 3 + 4 = 10$, $r(z) = 2 + 2 + 3 = 7$, $r(t) = 1 + 1 + 2 = 4$, и результирующий порядок имеет вид:

$$y \succ x \succ z \succ t,$$

в то время как при использовании правила простого большинства получаем

$$x \succ y \succ z \succ t,$$

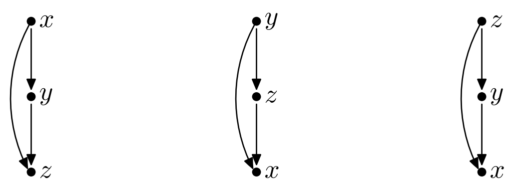
поскольку участники 1 и 2 более предпочитают x, чем y.

Этот пример делает правомерным следующий вопрос: есть ли такое правило, которое в каком-то смысле лучше, точнее других?

Интуиция подсказывает, что таким правилом является правило простого большинства, однако из парадокса Кондорсе следует, что это правило может не приводить к какому бы то ни было результату.

Рассмотрим еще одно правило, которое часто используется в реальных голосованиях, — *правило относительного большинства*. В этом правиле участники сообщают только о своих самых предпочтительных вариантах, и коллективным решением является вариант, который получил максимальное количество голосов.

Рассмотрим пример, показанный на рис. 4.5.



4 3 3

Рис. 4.5

Таким образом, группа состоит из 10 участников, которые имеют следующие предпочтения: для четырех участников предпочтение имеет вид $x \succ y \succ z$, т.е. x является самой предпочтительной альтернативой, для трех участников самая предпочтительная альтернатива y и для оставшихся трех участников — z. Тогда, если использовать правило относительного большинства, т.е. использовать только информацию о самых предпочтительных вариантах, то лучшим вариантом для коллектива будет назван x. Если же использовать всю информацию о предпочтениях участников, то можно видеть, что шесть участников из 10 считают его наименее предпочтительным вариантом.

Заметим, что, если в этом примере применить правило простого большинства, то получим коллективное отношение вида: $y \succ z \succ x$.

В следующем параграфе попробуем понять, можно ли найти самое разумное правило голосования.

В заключение рассмотрим отдельно случай, когда альтернатив всего две: ($A = \{x, y\}$). Его можно интерпретировать следующим образом: альтернатива x означает, что какое-то решение поддерживается, а y — что отвергается. Тогда факт, что xP_iy означает, что участник i предпочитает поддержать решение. Соответственно yP_ix означает, что участник i отвергает (голосует против) предлагаемое решение.

Заметим также, что в случае двух альтернатив в применении правил голосования никаких сложностей не возникает: правила Борда, простого большинства и относительного большинства дают один и тот же результат (проверьте это самостоятельно), и это правило выбора коллективного решения является единственно разумным (конечно, если считать участников голосования равноправными).

Поэтому далее будем считать, что $|A| > 2$.

4.3

Парадокс Эрроу

Выше обсуждались три наиболее часто используемых правила голосования, и было показано, что они могут приводить к различным результатам. Поэтому оценить сами процедуры голосования можно, только используя некоторые внешние условия, т.е. характеризуя некоторые свойства, которым должны удовлетворять разумные процедуры.

Именно в этом состоит суть аксиоматического подхода к построению процедур голосования, который впервые предложил в 1951 г. выдающийся американский ученый, лауреат Нобелевской премии Кеннет Эрроу [38].

Он сформулировал несколько аксиом, которым должны удовлетворять процедуры голосования и которые приводятся ниже в несколько измененном виде.

Сформулируем теперь аксиомы, которым должна удовлетворять процедура голосования F, выстраивающая отношение P по профилю $\vec{P}$, т.е.

$$P = F(\vec{P}).$$

1. Локальность (независимость от посторонних альтернатив)

Для любой пары вариантов x и y решение о том, какой вариант предпочтительнее другого в коллективном решении P, зависит от информации относительно только этих вариантов в индивидуальных отношениях P_i.

Поясним эту аксиому. Предположим, группа из трех человек выбирает в ресторане второе блюдо для обеда. В качестве возможностей рассматриваются блюда из мяса (m — *meat*), птицы (c — *chicken*) и рыбы (f — *fish*). Аксиома 1 требует, чтобы при решении вопроса о том, что, например, предпочтительнее — m или c, принималась во внимание только информация о том, какое предпочтение высказывают об этой паре альтернатив участники, и чтобы не принималась во внимание информация о других парах, например, о том, каковы предпочтения относительно мяса и рыбы (m и f).

Условно аксиому локальности можно записать так:

$$xPy = F(xP_iy),$$

т.е. что решение о включении пары (x, y) в коллективное предпочтение зависит только от индивидуальных предпочтений относительно этой пары.

Формально же эта аксиома записывается следующим образом: для любой пары (x, y) и любых двух профилей $\vec{P}$ и $\vec{P}'$

$$V(x, y; \vec{P}) = V(x, y; \vec{P}') \Rightarrow (xPy \Leftrightarrow xP'y),$$

где $P = F(\vec{P})$, $P' = F(\vec{P}')$ и $V(x, y; \vec{P}) = \{i \in N | xP_iy\}$.

Правило простого большинства удовлетворяет условию локальности, поскольку если $V(x, y; \vec{P}) = V(x, y; \vec{P}')$, то либо и $V(x, y; \vec{P})$ и $V(x, y; \vec{P}')$ образуют простое большинство, либо оба не образуют, т.е. либо xPy и $xP'y$, либо xP^cy и $x(P')^cy$.

А вот правило Борда этому условию не удовлетворяет. Рассмотрим пример.

Пример. Пусть $N = \{1,2,3\}$, $A = \{x,y,z\}$ и профили P и P' имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_1 &: x \succ y \succ z, \\ P_2 &: z \succ x \succ y, \\ P_3 &: y \succ z \succ x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_1 &: x \succ y \succ z, \\ P'_2 &: z \succ x \succ y, \\ P'_3 &: z \succ y \succ x. \end{aligned}$$

По правилу Борда для профиля P имеем, что $r(x) = r(y) = r(z) = 6$, а для P' — $r(x) = 6$, $r(y) = 5$ и $r(z) = 7$. Заметим, что $V(x,y;\vec{P}) = V(x,y;\vec{P}') = \{1,2\}$, однако результирующие профили P и P' отличаются: $(x,y) \notin P$, но $(x,y) \in P'$. Аналогично $V(z,x;\vec{P}) = V(z,x;\vec{P}') = \{2,3\}$, однако $(z,x) \notin P$, но $(z,x) \in P'$.

2. Единогласие

Если все участники считают, что x лучше, чем y, то таким же должно быть мнение всего коллектива.

Комментарии здесь излишни — было бы странно считать разумной процедуру, которая при том, что все участники предпочитают x варианту y, строит противоположное решение, т.е. yPx.

Формально условие единогласия можно записать так:

$$\forall (x,y), \forall \vec{P} \;\; V(x,y;\vec{P}) = N \Rightarrow xPy.$$

3. Ненавязанность

Коллективное решение зависит только от мнений участников и не может быть навязано процедурой голосования.

Иначе говоря, процедура голосования не может предписать, что $(x,y) \in P$ или $(x,y) \notin P$ независимо от мнений участников. Например, с предпочтениями относительно блюд в ресторане не может быть, чтобы в коллективном решении было $m \succ c$ независимо от того, каково мнение участников. Аналогично не может быть, что $(m,c) \notin P$ независимо от предпочтений участников.

Формально условие ненавязанности записывается так:

а) $\forall (x,y)\, \exists \vec{P} : \; (x,y) \in P$ и

б) $\forall (x,y)\, \exists \vec{P}' : \; (x,y) \notin P$.

4. Монотонность

Рассмотрим ситуацию с выбором блюд в ресторане. Предположим, что двое участников, например, 1 и 2, имеют предпочтения mP_1c и mP_2c, и пусть таково и коллективное решение, т.е. mPc даже при том, что участник 3 имеет противоположное предпочтение cP_3m. Пусть теперь третий участник изменил свое предпочтение так, что mP'_3c, а предпочтения первого и второго в профиле $\vec{P}'$ останутся прежними, т.е. mP'_ic, $i = 1, 2$. Тогда условие монотонности требует, чтобы имело место $mP'c$.

Формально условие монотоности можно записать так: пусть для некоторого профиля $\vec{P}$ имеет место xPy и пусть

$$V(x, y; \vec{P}) \subseteq V(x, y; \vec{P}').$$

Тогда $xP'y$.

Условия единогласия, ненавязанности и монотонности называются нормативными условиями.

5. Нейтральность

Рассмотрим следующий пример. Пусть для того, чтобы в коллективном решении принять xPy, необходимо простое большинство голосов, а для принятия решения о том, что z лучше w (zPw), надо, чтобы все проголосовали единогласно.

Понятно, что такая процедура «обрабатывает» варианты (x, y) и (y, z) по-разному, т.е. имеет место дискриминация по отношению к различным парам вариантов. Такая ситуация может иметь место, если, например, x, y, z — мужчины, а w — женщина.

Условие нейтральности запрещает такую дискриминацию.

Формально оно записывается так: $\forall\,(x, y)$, (z, w) и $\forall\,\vec{P}, \vec{P}'$

$$V(x, y; \vec{P}) = V(z, w; \vec{P}') \Rightarrow (xPy \Leftrightarrow zP'w).$$

Нетрудно видеть, что условие локальности является сужением условия нейтральности. Достаточно положить $x = z$ и $y = w$.

6. Ограничения на область определения и область принимаемых значений процедуры голосования

Любые линейные порядки возможны в качестве индивидуальных предпочтений. Коллективное решение должно быть линейным порядком.

Первая часть аксиомы требует, чтобы индивидуальные предпочтения не были ограничены как-либо — участник имеет право высказывать любые предпочтения (в форме линейных порядков) относительно вариантов. Вторая же ее часть ограничивает коллективное решение таким образом, что если индивидуальные мнения рациональны, то и коллективное решение должно быть рационально, т.е. представляться линейным порядком.

Исследуем теперь правила голосования, удовлетворяющие аксиомам 1—5. Для этого введем в рассмотрение промежуточный «язык», на котором все свойства процедур голосования выражаются единым образом.

Назовем семейство $\Omega(x,y)$ множеств $\omega_1,\ldots,\omega_s$, $\omega_i \subseteq N$, $i = \overline{1,s}$, *семейством выигрывающих коалиций* для пары (x,y), если для любого профиля $\vec{P}$

$$xPy \Leftrightarrow V(x,y;\vec{P}) \in \Omega(x,y) \tag{4.1}$$

Набор семейств $\{\Omega(x,y)\}$ для всех пар (x,y) совместно с правилом (4.1) назовем *списочным представлением процедуры голосования*.

Лемма 1. *Любое правило голосования, удовлетворяющее аксиоме локальности, имеет списочное представление. Обратно, любое правило, имеющее списочное представление, удовлетворяет аксиоме локальности.*

Доказательство. Пусть задано правило голосования F, удовлетворяющее аксиоме локальности. Построим $\Omega(x,y)$ следующим образом: рассмотрим все мыслимые профили $\vec{P}$ и включим в $\Omega(x,y)$ множество $V(x,y;\vec{P})$ в том случае, если $(x,y) \in P$ для данного профиля.

Определим теперь, используя $\Omega(x,y)$ и правило (4.1), процедуру голосования Ψ. Покажем, что $F = \Psi$.

Действительно, если для некоторого профиля $\vec{P}$ имеет место $xF(\vec{P})y$, то по построению $\Omega(x,y)$ будет иметь место и $x\Psi(\vec{P})y$.

Предположим теперь, что для некоторого профиля $\vec{P}$ имеет место $x\Psi(\vec{P})y$, но $(x,y) \notin F(\vec{P})$. Так как $x\Psi(\vec{P})y$, то $V(x,y;\vec{P}) \in \Omega(x,y)$. По построению $\Omega(x,y)$ это означает, что существует профиль $\vec{P}'$ такой, что $(x,y) \in F(\vec{P}')$ и $V(x,y;\vec{P}') \in \Omega(x,y)$ и $V(x,y;\vec{P}') = V(x,y;\vec{P})$. Но тогда по условию локальности $(x,y) \in F(\vec{P})$.

Обратное утверждение леммы очевидно: если правило голосования имеет списочное представление и $V(x,y;\vec{P}) = V(x,y;\vec{P}')$, то $V(x,y;\vec{P})$ и $V(x,y;\vec{P}')$ принадлежат или не принадлежат $\Omega(x,y)$ одновременно. ■

В лемме 1 устанавливается взаимно-однозначное соответствие между локальными правилами и списочным представлением. Установим, как свойства локальных процедур реализуются в виде списочного представления.

Лемма 2. *Для любых $x,y \in A$:*
1) единогласие: $N \in \Omega(x,y)$;
2) ненавязанность а): $\Omega(x,y) \neq \varnothing$;
3) ненавязанность б): $\Omega(x,y) \neq 2^N$;
4) монотонность: $\forall\, \omega, \tilde{\omega}$: $\omega \in \Omega(x,y)$, $\omega \subseteq \tilde{\omega} \Rightarrow \tilde{\omega} \in \Omega(x,y)$.
5) нейтральность: $\Omega(x,y) = \Omega$.

Доказательство.

1. Следует непосредственно из условия единогласия и определения $\Omega(x,y)$.

2. Следует из части а) условия ненавязанности. Действительно, если $\Omega(x,y) = \varnothing$, т.е. не содержит никаких множеств ω, то пара (x,y) по правилу (4.1) не будет принадлежать коллективному отношению P ни при каком профиле $\vec{P}$, а это противоречит аксиоме ненавязанности.

3. Если $\Omega(x,y) = 2^N$, т.е. содержит все подмножества множества N, включая пустое, то пара (x,y) будет принадлежать отношению P при любом профиле $\vec{P}$. Это нарушает часть б) условия ненавязанности.

4. Свойство следует из условия монотонности. Действительно, пусть xPy для некоторого профиля $\vec{P}$. По правилу (4.1) отсюда следует, что $V(x,y;\vec{P}) = \omega \in \Omega(x,y)$. Рассмотрим теперь профиль $\vec{P}'$ такой, что $\tilde{\omega} = V(x,y;\vec{P}')$ и $V(x,y;\vec{P}) \subseteq V(x,y;\vec{P}')$. Тогда по условию монотонности имеем $xP'y$, т.е. $\tilde{\omega} \in \Omega(x,y)$.

5. Действительно, условие нейтральности требует, чтобы $\forall\,(x,y)$ и (z,w) имело место $\Omega(x,y) = \Omega(z,w)$, т.е. для всех пар множества A $\Omega(x,y)$ одинаковы. ■

Теперь исследуем важные структурные свойства процедур голосования, вытекающие из того, что индивидуальные предпочтения и коллективное решение удовлетворяют условиям транзитивности и связности.

Напомним, что индивидуальные предпочтения описываются линейными порядками. Далее будем рассматривать только правила, удовлетворяющие аксиомам 1—6. Более общее рассмотрение проведено в [38].

Лемма 3. *а) Выстраиваемое правилом F коллективное отношение P удовлетворяет условию транзитивности тогда и только тогда, когда списочное представление правила F удовлетворяет условию: для любых ω_1, ω_2*

$$\omega_1, \omega_2 \in \Omega \Rightarrow \omega_1 \cap \omega_2 \in \Omega. \tag{4.2}$$

б) Выстраиваемое правилом F коллективное отношение P удовлетворяет условию связности тогда и только тогда, когда списочное представление правила F удовлетворяет условию: для любого ω

$$\omega \notin \Omega \Rightarrow N \backslash \omega \in \Omega. \tag{4.3}$$

Доказательство.

а) Пусть коллективное отношение P транзитивно. Покажем, что выполняется условие (4.2). Предположим противное, т.е. пусть существуют такие ω_1, ω_2, что $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$, но $\omega_1 \cap \omega_2 \notin \Omega$. Построим следующий профиль $\vec{P}$:

$$\begin{array}{ll}
i \in \omega_1 \cap \omega_2 : & x \succ y \succ z, \\
i \in (N \setminus \omega_1) \cap \omega_2 : & y \succ z \succ x, \\
i \in \omega_1 \cap (N \setminus \omega_2) : & z \succ x \succ y, \\
i \in (N \setminus \omega_1) \cap (N \setminus \omega_2) : & z \succ y \succ x.
\end{array}$$

Тогда $V(x, y; \vec{P}) = \omega_1$. Поскольку $\omega_1 \in \Omega$, имеем xPy. Аналогично $V(y, z; \vec{P}) = \omega_2$ и yPz.

Но $V(x, z; \vec{P}) = \omega_1 \cap \omega_2$ и по предположению $\omega_1 \cap \omega_2 \notin \Omega$, значит $(x, z) \notin P$, что противоречит транзитивности отношения P.

Пусть теперь существует профиль $\vec{P}$ такой, что $xPyPz$, но $xP^c z$. Покажем, что при этом нарушается условие п. а). Рассмотрим

$V(x,y;\vec{P}) \in \Omega$ и $V(y,z;\vec{P}) \in \Omega$. Поскольку все P_i — линейные порядки, из xP_iy следует, что для любого z xP_iz или zP_iy (условие Чипмана). Аналогично из yP_iz следует, что для любого x yP_ix или xP_iz. Поэтому минимальным множеством ω' таким, что $\forall i \in \omega'$ xP_iz, будет $V(x,y;\vec{P}) \cap V(y,z;\vec{P})$ (возможно, что $\omega' = \varnothing$). Поскольку F удовлетворяет условию монотонности, то любое $\omega'' \supset \omega'$ принадлежит Ω.

Поскольку xP^cz, существует множество $\widetilde{\omega}$ такое, что $(\omega' \cap \omega'') \subseteq \widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\omega} \notin \Omega$, что противоречит утверждению теоремы.

б) Предположим, что нарушается условие (4.3), т.е. существует $\omega \subseteq N$ такое, что $\omega \notin \Omega$ и $N \backslash \omega \notin \Omega$. Рассмотрим профиль $\vec{P}$ такой, что $\forall i \in \omega$ xP_iy, и $\forall i \in N \setminus \omega$ yP_ix. Поскольку $(xP_iy \Leftrightarrow i \in \omega)$, имеем, что xP^cy. С другой стороны, $(yP_ix \Leftrightarrow i \in N \backslash \omega)$ и yP^cx, т.е. P не связно, а это противоречит условию теоремы.

Пусть, наоборот, существуют такие $x, y \in A$ и профиль $\vec{P}$, что xP^cy и yP^cx. Тогда $V(x,y;\vec{P}) \notin \Omega$ и $V(y,x;\vec{P}) \notin \Omega$. Но, поскольку все P_i являются линейными порядками и, следовательно, связными бинарными отношениями, имеем $V(x,y;\vec{P}) \cup V(y,x;\vec{P}) = N$, что противоречит условию (4.3), значит, предположение неверно. ■

Лемма 4. *Правило F выстраивает коллективные линейные порядки тогда и только тогда, когда в списочном представлении правила F множество Ω «устроено» следующим образом: существует единственное $\omega \in \Omega$, такое, что $|\omega| = 1$ и $\forall \omega'$ $\omega \subseteq \omega' \Leftrightarrow \omega' \in \Omega$.*

Доказательство. Из утверждения леммы 3 следует, что $\forall \omega_1$, ω_2 из Ω имеет место $(\omega_1 \cap \omega_2) \in \Omega$. Рассмотрим минимальное по вложению множество ω_0 в Ω. Оно не может быть пустым, т.к. тогда по условию монотонности $\Omega = 2^N$, что противоречит части б) условия ненавязанности.

Если $|\omega_0| = 1$, т.е. $\omega_0 = \{i\}$, то, очевидно, $P = P_i$ для любого $\vec{P}$, и поэтому P является линейным порядком, т.е. прямое утверждение леммы доказано.

Предположим, что $\omega_0 = \{i, j\}$ причем, вследствие минимальности ω_0 множества $\{i\}$ и $\{j\}$ не принадлежат Ω. По условию б) леммы 3, т.к. $\{i\} \notin \Omega$, то $N \backslash \{i\}$ должно принадлежать Ω. Но тогда $\{i\} = \omega_0 \cap (N \backslash \{i\})$ по условию а) леммы 3 должно принадлежать Ω в противоречие с минимальностью ω_0. ■

Обсудим теперь подробнее, что означает наличие такого множества в Ω. Сначала обсудим это на конкретном примере.

Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, т.е. группа состоит из трех участников, и Ω имеет вид: $\Omega = (\{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\})$. Тогда для любой пары (x, y), если xP_2y, то такое же будет и коллективное решение, т.е. для любого профиля будет иметь место xPy независимо от мнений других участников. Естественно назвать такого участника *диктатором*, а подобное правило принятия решения — *диктаторским*.

Очевидно, что такая структура Ω сохраняется при произвольном числе участников, диктатором же может быть любой из них.

Подводя итог полученным результатам, можно сформулировать теорему.

Теорема 1. *Правило голосования F, удовлетворяющее аксиомам 1—6, является диктаторским правилом.*

Этот результат составляет суть знаменитой теоремы К. Эрроу о невозможности, которая часто называется парадоксом Эрроу.

Обсудим парадокс Эрроу. Выше были сформулированы шесть естественных условий, которым, казалось бы, должна удовлетворять разумная процедура голосования. Более того, часть этих условий приводит к выполнению другого естественного условия — нейтральности, запрещающего дискриминацию альтернатив. Однако оказывается, что все вместе эти условия приводят к другому типу дискриминации — дискриминации участников, когда один из них объявляется диктатором, а мнение всех остальных никакого значения не имеет.

После появления замечательной книги К. Эрроу [38] предпринимались значительные попытки ослабить аксиомы 1—6, чтобы избежать парадокса. Например, если ослабить часть аксиомы 6, касающуюся вида коллективных решений P таким образом, что P является частичным порядком, то получаемое правило голосования называется *«олигархией»:* выделяется не один, а некоторая группа участников ω, и коллективное решение представляет собой единогласное мнение всех членов этой группы. Мнение всех остальных членов коллектива не учитывается. Формально правило «олигархии» записывается следующим образом:

$$P = \bigcap_{i \in \omega} P_i.$$

В частности, группа «олигархов» может совпадать со всем множеством участников, т.е. $\omega = N$. Тогда правило имеет вид:

$$P = \bigcap_{i \in N} P_i,$$

и называется *правилом единогласия* (не путать с аксиомой единогласия, которая утверждает, что единогласное мнение членов коллектива должно содержаться в коллективном решении).

Следует, однако, отметить, что правило единогласия может приводить к ситуациям, когда коллективное решение может быть вырожденным. Например, представим себе профиль, в котором 1000 участников имеют на множестве $A = \{x, y, z\}$ предпочтение вида $x \succ y \succ z$, а один, 1001-й, участник — $z \succ y \succ x$. Тогда коллективное решение, принимаемое по правилу единогласия, приводит к пустому отношению $P = \varnothing$.

Парадокс Эрроу лег в основу аксиоматической теории коллективного выбора. Общая теория аксиоматического построения локальных правил голосования изложена в [31], [32]. Для нелокальных правил общей теории нет, отдельные результаты даны, например, в [18].

4.4

Парадокс Сена

Исходным положением рассматриваемой далее модели, впервые предложенной и изученной лауреатом Нобелевской премии А. Сеном, является то, что относительно некоторых пар альтернатив решения могут и должны приниматься только теми индивидуумами, которых касаются эти альтернативы.

Например, если это не мешает соседям, каждый может решить, что ему слушать у себя дома — классическую ли музыку, например И.-С. Баха, или поп-музыку, например Элтона Джона.

Рассмотрим, следуя А. Сену [68], следующую условную ситуацию: в одном доме живут два индивидуума, A и B, и есть всего одна книга Д. Лоуренса «Любовник леди Чаттерлей». Зная о фривольном содержании книги и заботясь о нравственности г-на B, г-н A предпочел бы, чтобы ее никто не читал (альтернатива z), но если все же книгу кто-то будет читать, то A предпочел бы читать книгу сам (альтернатива x), чем дать ее читать г-ну B (альтернатива y).

В свою очередь, уважая A, г-н B предпочел бы, чтобы книгу читал A, но если этого не произойдет, он более предпочел бы читать книгу сам, чем чтобы ее никто не читал.

Эти рассуждения дают нам следующие предпочтения на множестве альтернатив $\{x, y, z\}$:

$$P(A) : z \succ x \succ y; \qquad P(B) : x \succ y \succ z.$$

Рассмотрим, каким должно быть коллективное решение, если искать его в классе транзитивных отношений. Так как г-на A касаются только альтернативы z и x (никто не читает книгу и читает ее он сам), надо учитывать его предпочтения в виде $z \succ_A x$.

Так как B касаются только альтернативы y и z, то можно говорить о предпочтении вида $y \succ_B z$. Каким бы ни было правило агрегирования этих частных мнений, оно, уважая эти мнения, должно включать в коллективное решение пары $y \succ z$ и $z \succ x$. По транзитивности коллективного решения получим $y \succ x$.

Если же теперь потребовать, чтобы правило агрегирования удовлетворяло условию единогласия, т.е. «учитывало» единогласные предпочтения участников, получим $x \succ y$, т.к. оба индивидуума имеют такое предпочтение.

Полученное противоречие показывает, что не существует правила агрегирования, которое одновременно «уважает» частные мнения отдельных индивидуумов (либерализм), удовлетворяет условию единогласия и строит коллективное решение в классе транзитивных отношений.

Разобранный пример является ключевым для понимания теоремы о паретовском либерале. Прежде, чем ее сформулировать, необходимо ввести несколько определений.

Формально модель включает конечное множество индивидуумов $N = \{1, \ldots, n\}$, причем считается, что $n > 1$, конечное множество альтернатив $A = \{a, b, c, \ldots\}$, $|A| > 2$, каждый индивидуум $i \in N$ выражает свое мнение в виде линейного порядка P_i, коллективное решение также ищется в виде линейного порядка P.

Напомним, что $\vec{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ — профиль индивидуальных предпочтений, $V(x, y; \vec{P}) = \{i \in N | xP_iy\}$ — множество индивидуумов, предпочитающих альтернативу x альтернативе y.

Индивидуум i называется *решающим* относительно пары (x, y), если из того, что $V(x, y; \vec{P}) = \{i\}$, следует xPy.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

— как индивидуальное, так и коллективное решение являются линейными порядками;

— правило построения коллективных решений, удовлетворяет условию единогласия;

— существуют альтернативы a, b, c и d и два индивидуума i и j такие, что i является решающим для пар (a, b) и (b, a), а j — для пар (c, d) и (d, c).

Тогда правила построения коллективных решений, удовлетворяющего перечисленным условиям, не существует.

Доказательство. Проводится, следуя [17]. Заметим, что из антирефлексивности линейных порядков следует, что $a \neq b$ и $c \neq d$. Рассмотрим последовательно три случая:

1) пары (a, b) и (c, d) совпадают;

2) среди альтернатив a, b, c и d совпадают две;

3) все альтернативы a, b, c и d различны.

1) Если $(a, b) = (c, d)$, то представим себе, что i включает в P_i пару (a, b), а j включает в P_j пару (b, a). Так как по условию i является решающим для (a, b), а j — для (b, a), то получим в коллективном упорядочении aPb и bPa, что противоречит асимметричности P. (Напомним, что в главе 3 была показана асимметричность линейного порядка.)

2) Пусть совпадают a и c. Рассмотрим пары (a, b), (b, d), $(d, a) = (d, c)$ и профиль, показанный на рис. 4.6 (с. 110).

Тогда, т.к. $V(a, b; \vec{P}) = \{i\}$, имеем aPb, т.к. $V(d, a; \vec{P}) = \{j\}$, имеем dPa; наконец, из условия единогласия, т.к. $V(b, d; \vec{P}) = N$,

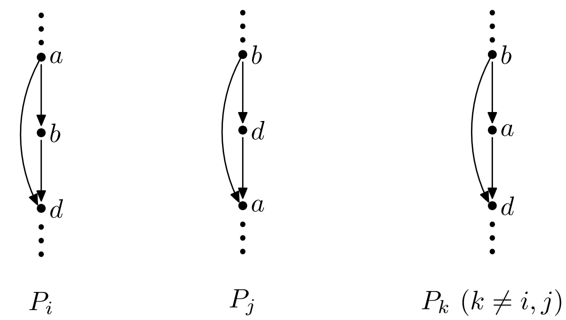


Рис. 4.6

имеем bPd. По транзитивности из aPb и bPd следует aPd. Поэтому имеем aPd и dPa, что противоречит асимметричности коллективного предпочтения. Значит, $a \neq c$.

Пусть совпадают a и d. Рассмотрим пары (b, a), $(a, c) = (d, c)$ и (c, b). Построим профиль $\vec{P}$, показанный на рис. 4.7.

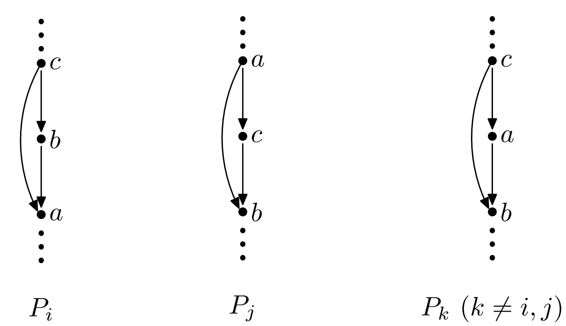


Рис. 4.7

Тогда, поскольку i — решающий участник относительно пары (b, a), то имеет место bPa. Так как $V(a, c; \vec{P}) = \{j\}$, то aPc. По транзитивности из bPa и aPc получаем bPc. Но по условию единогласия имеем cPb, т.е. вновь нарушается условие асимметричности P. Значит, $a \neq d$.

Пусть совпадают b и c. Рассмотрим пары (a, b), $(b, d) = (c, d)$ и (d, a) и профиль $\vec{P}$, показанный на рис. 4.8 (с. 111).

Так как $V(a, b; \vec{P}) = \{i\}$, то aPb. Так как $V(b, d; \vec{P}) = \{j\}$, то получим bPd. По транзитивности P имеем aPd, а из условия еди-

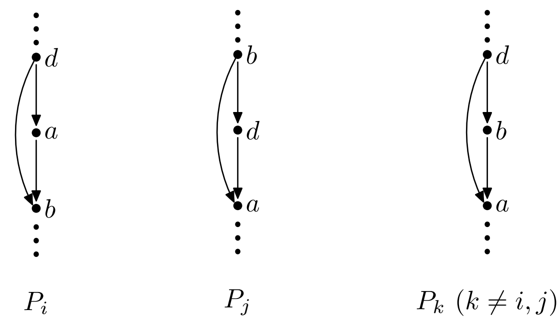


Рис. 4.8

ногласия получаем dPa, т.е. противоречие с асимметричностью P. Значит, $b \neq c$.

Рассмотрим, наконец, случай $b = d$ и пары (a, b), $(b, c) = (d, c)$ и (c, a). Построим профиль, показанный на рис. 4.9.

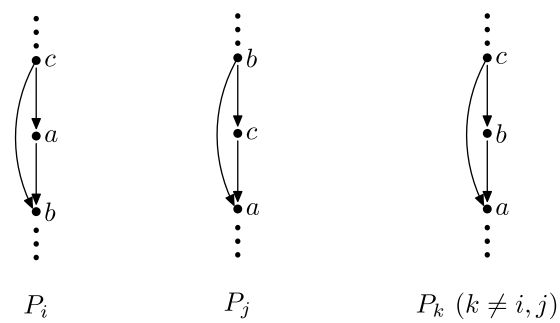


Рис. 4.9

Из $V(a, b; \vec{P}) = \{i\}$ и $V(b, c; \vec{P}) = \{j\}$ следует aPb и bPc. По транзитивности получим, что aPc. Из $V(c, a, \vec{P}) = N$ следует, что cPa, т.е. опять имеет место нарушение асимметричности P, а значит, $b \neq d$.

Таким образом, рассмотрены все варианты совпадения ровно одной пары альтернатив. Следовательно, случай 2) невозможен.

3) Построим профиль $\vec{P}$ следующим образом. Положим aP_ib, cP_jd и для всех $k \in N$ bP_kc и dP_ka. Один из возможных профилей показан на рис. 4.10, другой — на рис. 4.11 (с. 112).

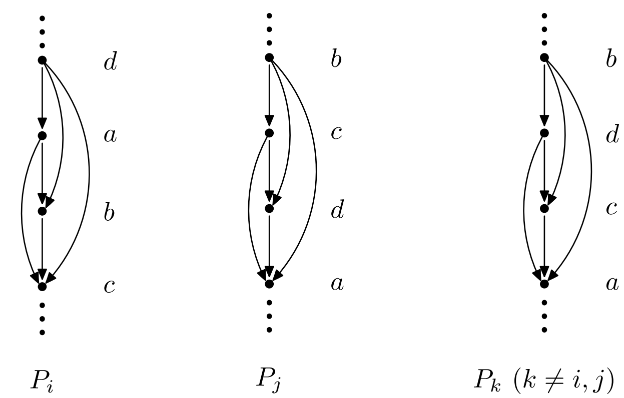


Рис. 4.10

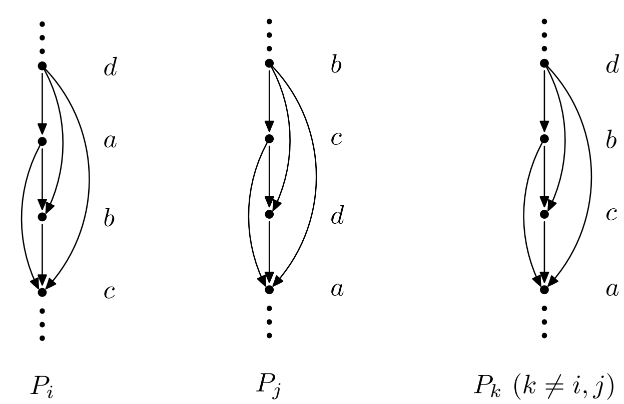


Рис. 4.11

Тогда $V(b, c; \vec{P}) = V(d, a; \vec{P}) = N$, а значит, bPc и dPa. Также $V(a, b; \vec{P}) = \{i\} \Rightarrow aPb$; $V(c, d; \vec{P}) = \{j\} \Rightarrow cPd$.

По транзитивности P из aPb и bPc следует aPc, из aPc и cPd следует aPd, а последнее вкупе с dPa противоречит асимметричности P.

Рассмотрение этих трех случаев исчерпывает доказательство теоремы. ■

4.5

Стратегическое поведение участников в задаче голосования

Немного упростим решаемую задачу. Пусть, как и ранее, A — множество альтернатив, P_i — предпочтения участников, описываемые линейными порядками, но в качестве коллективного решения будет рассматриваться только лучшая альтернатива, т.е. правило голосования $F(\vec{P})$ есть отображение из $\mathcal{L}O^n$ в A.

Правило F называется *защищенным от манипулирования,* если ни один из кандидатов ни в одном профиле не может изменить свои предпочтения так, чтобы в результате выбранной оказалась лучшая с его точки зрения альтернатива. Более формально:

$$\forall \vec{P}\, \forall i \in N\, \forall P \in \mathcal{L}O\, (F(P_1, \dots, P, \dots, P_n))P_i^c(F(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n)).$$

В противном случае эффект приведшего к успеху искажения своих предпочтений называется *манипулированием со стороны избирателя,* а правило голосования, которое позволяет получить избирателю более желательный результат при изменении своих мнений, — *манипулируемым.*

Возможность манипулирования при голосовании представляется, на первый взгляд, нежелательной, и поэтому возникает вопрос, можно ли отделить манипулируемые процедуры от неманипулируемых. Ответ на этот вопрос, как оказалось, отрицательный.

Потребуем, чтобы F было «отображением на»:

$$\forall a \in A\; \exists \vec{P}\; F(\vec{P}) = a.$$

Это означает, что ни одна из альтернатив не может быть априори отброшена — для каждой альтернативы существует профиль, при котором выбирается именно эта альтернатива (это аналог условия ненавязанности из параграфа 4.3).

Заметим, что это условие практически не ограничительное — оно слабее, например, условия единогласия.

Тем не менее верна известная теорема Гиббарда — Саттертуэйта, приведенная здесь без доказательства (см., например, [18]).

Теорема 3. *Пусть число альтернатив не меньше трех, а правило голосования является «отображением на». Правило голосования защищено от манипулирования тогда и только тогда, когда оно является диктаторским.*

Таким образом, любое недиктаторское правило голосования не защищено от манипулирования.

Пример. Пусть множество избирателей составлено из трех групп A, B и C, включающих в себя трех, двух и двух избирателей соответственно. Множество кандидатов состоит из x, y и z. Предпочтения избирателей показаны в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Истинные предпочтения избирателей

Группа A (три избирателя)	*Группа B (два избирателя)*	*Группа C (два избирателя)*
x	z	y
y	x	z
z	y	x

Если в качестве правила голосования используется правило относительного большинства голосов, то будет избран кандидат x, получивший три голоса, поскольку кандидаты y и z получат только по два голоса. Однако в этой ситуации избиратели из группы C, не желая избрания худшего с их точки зрения кандидата x, могут «исказить» свои истинные предпочтения, поставив в них на первое место кандидата z. Тогда табл. 4.1 перепишется в виде табл. 4.2, и четырьмя голосами из семи будет избран кандидат z.

Таблица 4.2. «Искаженные» предпочтения избирателей

Группа A (три избирателя)	*Группа B (два избирателя)*	*Группа C (два избирателя)*
x	z	z
y	x	y
z	y	x

Если считать, что в табл. 4.1 приведены истинные мнения избирателей, то «искажение» избирателями группы C своих истинных предпочтений (табл. 4.2) привело к более желательному для этой группы результату.

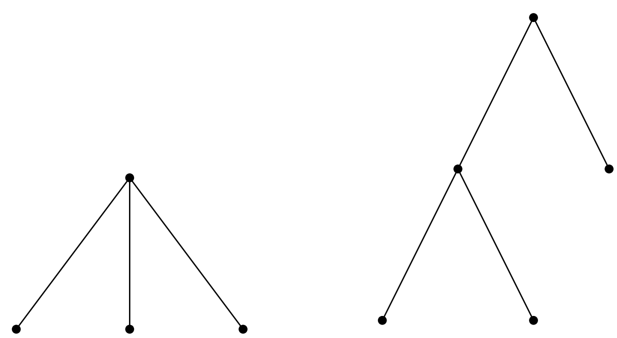
Манипулирование при голосовании может происходить различным образом. Во-первых, оно может иметь осуществляться избирателями — ситуация обсуждалась в вышеизложенном примере. Во-вторых, манипулирование может осуществляться организатором голосования путем подбора соответствующего правила голосования или предложения голосовать альтернативы в определенном порядке. В-третьих, манипулирование может происходить как со стороны избирателя, так и со стороны организатора голосования путем предложения к рассмотрению новых альтернатив или изменения формы представления рассматриваемых вариантов. Наконец, может иметь место комбинация указанных форм манипулирования.

Рассмотрим реальный пример манипулирования со стороны организатора голосования, который имел место во II веке н.э. Плиний Младший ([22], письмо XIV, книга VIII) обсуждает в письме Аристону (крупному юристу II века н.э.) следующее дело, которое рассматривалось в Римском Сенате: консул Афраний Декстр был найден убитым, и было не ясно, покончил ли он с собой или же, повинуясь приказу хозяина, его убил слуга.

Мнения в Сенате относительно наказания слуги разделились следующим образом: группа A, которая составляла относительное большинство в Сенате, считала, что слугу можно освободить; группа B высказывалась за ссылку, а группа C — за казнь слуги. При этом группа $B + C$ составляла в Сенате простое большинство.

Плиний, который председательствовал в Сенате и был сторонником альтернативы «свобода», рассуждал следующим образом: если поставить на голосование все три альтернативы (рис. 4.12а на с. 116) и использовать процедуру простого большинства голосов, то члены группы B скорее присоединятся к членам группы C, чем группы A, и будет принято решение о казни слуги. Если же альтернативы «казнь» и «ссылка» объединить в единую альтернативу «наказание», и сначала выбирать между альтернативами «наказание» и «свобода» (рис. 4.12б), то группы B и C могут объединиться и выбрать альтернативу «наказание», а затем, если поставить на голосование альтернативы «казнь» или «ссылка», то уже группы A и

B могут объединиться и принять решение о ссылке. Поэтому Плиний предложил считать мнения порознь и далее использовать правило «относительного большинства голосов», полагая, что альтернативы слишком различны, чтобы объединять их, и, конечно же, желая получить в виде результата альтернативу «свобода». Однако при подсчете голосов часть сторонников смертной казни перешла в группу *B*, и относительным большинством голосов было поддержано решение о ссылке.



))

Рис. 4.12

Итак, со стороны Плиния имело место манипулирование как множеством альтернатив, так и процедурой голосования (вместо процедуры «простое большинство голосов» использовалась процедура «относительное большинство голосов»).

Тот факт, что часть сторонников смертной казни изменила мнение и выбрала вариант «ссылка», показывает, что имело место манипулирование со стороны избирателей, и, таким образом, в целом имела место комбинация сразу трех разных типов манипулирования.

Отметим, что схема на рис. 4.12б в некоторой степени отражает англо-американскую систему принятия решений в уголовных процессах — сначала присяжные выносят решение о виновности обвиняемого и уже после назначается мера наказания, а схема на рис. 4.12а представляет европейскую (континентальную) систему принятия решений в уголовных судах — мера наказания определяется сразу.

Рассмотрим теперь третий вариант манипулирования: манипулирование как со стороны избирателя, так и со стороны организатора голосования путем предложения к рассмотрению новых альтернатив или путем изменения формы представления рассматриваемых вариантов. Приведем пример из истории США. До принятия XVII поправки к Конституции члены Сената назначались законодательными органами штатов. В начале XX в. возникло мнение, что сенаторов надо избирать прямым голосованием в штатах.

Таким образом, обсуждались две альтернативы:

S: status quo (оставить все как есть — сенаторы назначаются штатами);

a: XVII поправка (сенаторы избираются прямым голосованием в штатах).

В 1905 г. большинство в Сенате предпочитало альтернативу a альтернативе S. Сенат в то время состоял из трех групп:

— членов Демократической партии из южных штатов, которые, в основном, предпочитали альтернативу a;

— либеральных членов Демократической партии из северных штатов и либеральных членов Республиканской партии, которые также поддерживали решение a;

— консервативных членов Демократической и Республиканской партий, которые поддерживали альтернативу S.

Представитель третьей группы с целью предотвратить принятие альтернативы a предложил рассмотреть третью альтернативу b: принять XVII поправку с условием, что федеральное правительство будет иметь право контролировать проведение выборов в штатах.

Эта альтернатива не встретила возражений либералов, но демократы из южных штатов, поскольку они различными способами не допускали темнокожее население этих штатов к голосованию, встретили эту поправку «в штыки». Предпочтения стали выглядеть следующим образом (табл. 4.3 на с. 118).

Поскольку согласно принятым процедурам Сенат сначала должен голосовать поправки к законопроекту, выбор осуществлялся между альтернативами a и b. Благодаря либералам и консерваторам была принята альтернатива b. Далее при сравнении альтернатив b и S была выбрана альтернатива S. Такая тактика внесения на рассмотрение альтернативы b продолжалась до 1912 г., пока возросшие

Таблица 4.3. К истории принятия XVII поправки

Либералы	*Демократы из южных штатов*	*Консерваторы*
b	a	S
a	S	b
S	b	a

числом либералы не проголосовали против b и при окончательном сравнении a и S — за a.

Манипулирование не всегда приводит к отрицательным последствиям.

Рассмотрим **пример.** Пусть предпочтения избирателей таковы:

Группа A (три избирателя)	*Группа B (два избирателя)*	*Группа C (два избирателя)*
x	y	z
y	z	y
z	x	x

При использовании правила относительного большинства голосов в такой ситуации будет выбран кандидат x, который для большинства избирателей (групп B и C) является наименее предпочтительным из всех кандидатов. Заметим теперь, что в парных сравнениях кандидатов вариант y лучше любого другого для большинства избирателей, а именно: y предпочтительнее x для избирателей из групп B и C и y лучше z для избирателей из групп A и B, т.е. y является победителем Кондорсе.

Если избиратели группы C, манипулируя своими мнениями, изменят свои истинные предпочтения так, как это показано ниже, то будет выбран кандидат y. Таким образом, манипулирование избирателями из группы C приводит к более выгодному для большинства избирателей результату.

Группа A (три избирателя)	*Группа B (два избирателя)*	*Группа C (два избирателя)*
x	y	y
y	z	z
z	x	x

Заметим, что в некоторых ситуациях манипулирования можно избежать. Если процедура голосования достаточно сложна или если предпочтения других избирателей неизвестны, то избиратель может и не знать, как манипулирование с его стороны может отразиться на результате с учетом того, что и другие избиратели могут манипулировать мнениями. Тогда он может отказаться от манипулирования.

4.6

Задачи

1. Постройте мажоритарный граф при следующих предпочтениях участников на множестве $N = \{1, 2, 3\}$ относительно кандидатов из множества $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\begin{aligned} P_1 &: x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3; \\ P_2 &: x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_3; \\ P_3 &: x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4. \end{aligned}$$

Есть ли здесь победитель Кондорсе?

2. Постройте мажоритарный граф при предпочтениях из задачи 1, если участник 1 изменил свои предпочтения следующим образом:

$$P_1' : x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4.$$

Предпочтения остальных участников остались неизменными. Есть ли здесь победитель Кондорсе?

3. Постройте мажоритарный граф при следующих предпочтениях участников на множестве $N = \{1, 2, 3\}$ относительно кандидатов из множества $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$:

$$\begin{aligned} P_1 &: x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3; \\ P_2 &: x_3 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4; \\ P_3 &: x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_3. \end{aligned}$$

Есть ли здесь победитель Кондорсе?

4. Постройте мажоритарный граф при следующих предпочтениях участников на множестве $N = \{1, 2, 3, 4\}$ относительно кандидатов из множества $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$:

$$
\begin{aligned}
P_1 &: x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2;\\
P_2 &: x_1 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2;\\
P_3 &: x_4 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3;\\
P_4 &: x_5 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2.
\end{aligned}
$$

Есть ли здесь победитель Кондорсе? Проанализируйте полученный результат.

5. Покажите, что при нечетном числе участников:

а) бинарное отношение, соответствующее мажоритарному графу, связно;

б) если победитель Кондорсе существует, то он единственный;

в) если a — победитель Кондорсе, то $\forall x \in A$ имеет место $a\Gamma x$, где Γ — множество дуг соответствующего ориентированного графа.

6. Приведите пример существования двух победителей Кондорсе.

7. Пусть три друга выбирают место отдыха из следующих вариантов: $A = \{$Сочи (С), Туапсе (Т), Валдай (В), Подмосковье (П)$\}$. Их предпочтения на множестве A имеют вид:

P_1	P_2	P_3
С	С	Т
Т	Т	С
В	В	П
П	П	В.

Предпочтения их жен имеют вид:

P_1'	P_2'	P_3'
С	Т	Т
Т	С	С
В	В	В
П	П	П.

Предположим, что коллективное решение P содержит пару (Т,В). Если правило построения коллективного решения локально, то содержится ли пара (Т,В) в коллективном решении по профилю P'?

Пусть правило построения коллективного решения удовлетворяет условию единогласия. Какие пары обязано содержать коллективное решение по профилю $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$? По профилю $\vec{P}' = (P_1', P_2', P_3')$?

Пусть коллективное решение содержит пару (C,T), если первый участник имеет такое предпочтение. Является ли он диктатором в смысле Эрроу?

8. Рассмотрим следующее правило построения коллективного решения по индивидуальным предпочтениям n участников: пара (x, y) входит в коллективное решение, если она принадлежит:

а) ровно $n/3$;

б) ровно $n/2 + 1$;

в) более $n/2$;

г) не менее $n/2$;

д) не менее $n - 1$;

е) n индивидуальных предпочтений.

Является ли это правило локальным? Каким аксиомам оно удовлетворяет? Приведите (если это возможно) пример, когда это правило приводит к циклам в коллективном решении.

9. Удовлетворяет ли локальное, ненавязанное и монотонное правило условию единогласия?

10. Найдите списочное представление правила простого большинства для $N = \{1, 2, 3\}$. Каким нормативным условиям удовлетворяет это правило?

11. Пусть $|N| = 5$ и коллективное решение строится следующим образом:

$$\forall x, y\ xPy \Leftrightarrow xP_1y \text{ и } xP_2^cy \text{ и } xP_3y \text{ и } xP_4^cy \text{ и } xP_5y.$$

Является ли это правило локальным? Каким еще аксиомам оно удовлетворяет? Являются ли участники 1, 3 и 5 диктаторами?

12. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $N = \{1, 2, 3\}$ и коллективное решение строится следующим образом:

$$\forall i\ a_iPx \Leftrightarrow a_iP_ix,$$

для всех $x \in A$. Является ли это правило локальным? Каким аксиомам оно удовлетворяет? Какими свойствами обладает коллективное предпочтение?

13. Пусть семья из трех человек, т.е. $N = \{1, 2, 3\}$, собирается купить автомобиль. В качестве альтернатив рассматриваются элементы множества $A = \{$«фольксваген» (W), «рено» (R), «пежо» $(P)\}$. Предпочтения членов семьи выглядят следующим образом:

P_1	P_2	P_3
W	P	R
P	W	W
R	R	P.

Пусть коллективное решение, которое строится по локальному правилу, имеет вид:

$$\begin{array}{c} W \\ R \\ P. \end{array}$$

Каким будет коллективное решение, если исключить из рассмотрения альтернативу W?

14. Покажите, что «олигархическое» правило:

а) удовлетворяет аксиомам 1—4;

б) не всегда строит слабые порядки;

в) всегда строит частичные порядки.

15. Покажите, что если P_i — линейные порядки, то

$$(\Omega(x, y) \cap \Omega(y, z)) \subseteq \Omega(x, z) \subseteq (\Omega(x, y) \cup \Omega(y, z)).$$

16. Постройте пример ненейтрального правила голосования.

17. Правило голосования называется анонимным, если оно учитывает мнения участников равным образом. Формально пусть ν — взаимно-однозначное отображение N на N. Тогда

$$F(\{P_i\}) = F(\{P_{\nu(i)}\}).$$

Пусть F — локальное правило, удовлетворяющее условиям ненавязанности, нейтральности и анонимности. Найдите общий вид списочного представления для таких правил. Сделайте то же для случая, когда условие нейтральности не выполняется.

5 глава

КОЛЛЕКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ НА ГРАФЕ

5.1 Введение

В главе 4 было показано, что выбор недоминируемых альтернатив на мажоритарном графе может быть пуст, т.е. победителя Кондорсе может не существовать. Понимание этого факта привело Дж. фон Неймана[14] и О. Моргенштерна[15] в их книге «Теория игр и экономическое поведение» [19] к тому, что они ввели иные определения лучшего варианта или подмножества лучших вариантов при построении коллективных решений.

Эти определения опираются на понятия внутренне и внешне устойчивых множеств на графе и вводятся в параграфе 5.2. Здесь же дается определение ядра графа.

Тот факт, что в множестве локальных правил при еще нескольких естественных ограничениях единственным правилом, удовлетворяющим этим ограничениям, является диктаторское правило (парадокс Эрроу), привел к многочисленным попыткам построить ин-

[14] Нейман Джон фон (1903—1957) — американский математик, член Национальной академии наук США. Занимался исследованиями в области функционального анализа и его применений и математической логики. Совместно с О. Моргенштерном дал систематическое изложение теории игр (1944). Внес большой вклад в создание первых ЭВМ и разработку методов их применения.

[15] Моргенштерн Оскар (1902—1977) — американский математик и экономист. Основные труды посвящены применению математики к экономическим проблемам. Совместно с Дж. фон Нейманом дал систематическое изложение теории игр.

тересные нелокальные правила получения коллективных решений, примеры которых рассматриваются в параграфе 5.3.

Параграф 5.4 посвящен решению задачи о лидере. Мотивация предложенного Г. Бержем подхода [8] состоит в том, чтобы учитывать относительную силу игроков в турнире, т.е. выигрыш у сильного игорка оценивать выше, чем выигрыш у слабого. Этот подход использует методы линейной алгебры, а именно: поиск собственных значений векторов турнирной матрицы. Здесь же приводится пример использования этой процедуры для решения задачи построения коллективного упорядочения по индивидуальным линейным порядкам.

Параграф 5.5 содержит задачи к данной главе.

5.2

Внутренняя и внешняя устойчивость. Ядро

Пусть задан ориентированный граф $G = (A, \Gamma)$. Подмножество S множества вершин A называется *внутренне устойчивым,* если для всех $x, y \in S$ имеет место

$$(x,y) \notin \Gamma \text{ и } (y,x) \notin \Gamma.$$

В качестве **примера** рассмотрим граф G, изображенный на рис. 5.1.

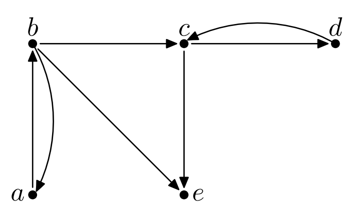


Рис. 5.1

В этом графе внутренне устойчивыми множествами являются $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, d\}$, $\{e, d\}$, $\{a, e, d\}$.

Заметим, что если S — внутренне устойчивое множество и S' — подмножество S, то S' тоже внутренне устойчивое множество.

Максимальное внутренне устойчивое множество — это такое внутренне устойчивое множество, которое не является собственным подмножеством другого внутренне устойчивого множества.

Числом внутренней устойчивости $\alpha(G)$ называется мощность наибольшего по числу элементов из внутренне устойчивых множеств.

Если $\mathcal{S}$ — семейство всех максимальных внутренне устойчивых множеств графа G, то

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}} |S|.$$

Для примера на рис. 5.1 множества $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ и $\{a, e, d\}$ являются максимальными внутренне устойчивыми множествами, а число внутренней устойчивости $\alpha(G)$ равно, очевидно, 3.

В частичном порядке внутренне устойчивое множество часто называется *антицепью* [21].

Рассмотрим граф, представленный на рис. 5.2.

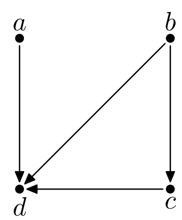


Рис. 5.2

Внутренне устойчивыми множествами здесь будут $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$. Значит, $\alpha(G) = 2$. Бинарное отношение, соответствующее этому графу, ациклично и транзитивно, т.е. является частичным порядком. Поэтому, например, $\{a, b\}$ — антицепь.

Пусть задан ориентированный граф $G = (A, \Gamma)$. Подмножество T множества вершин A называется ***внешне устойчивым,*** если $\forall x \notin T$ $\exists y \in T$ такой, что $y \Gamma x$.

На рис. 5.3 (с. 127) изображен граф, в котором множество $\{c, d, e, f, h\}$ внешне устойчиво. Но при этом $f \Gamma h$, т.е. в определении ничего не говорится о том, как связаны элементы внутри T.

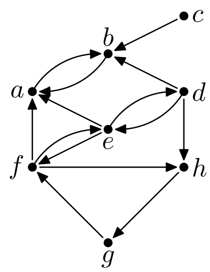


Рис. 5.3

Минимальное внешне устойчивое множество — это внешне устойчивое множество, не содержащее никакого другого внешне устойчивого множества.

Соответственно *числом внешней устойчивости* $\beta(G)$ называется мощность наименьшего по числу элементов из внешне устойчивых множеств, т.е.

$$\beta(G) = \min_{T \in \mathcal{T}} |T|,$$

где $\mathcal{T}$ — семейство внешне устойчивых множеств графа G.

Для графа на рис. 5.3 минимальным внешне устойчивым множеством является $\{c, e, h\}$, и число внешней устойчивости $\beta(G) = 3$.

Для частичного порядка, изображенного на рис. 5.2, внешне устойчивыми будут все множества, содержащие элементы a и b, минимальным внешне устойчивым множеством — $\{a, b\}$, $\beta(G) = 2$.

Определение 1. *Пусть $G = (A, \Gamma)$ — ориентированный граф. Множество $S \subseteq A$ называется ядром графа, если оно является одновременно внутренне устойчивым и внешне устойчивым множеством.*

Понятие ядра графа под названием «решение» было предложено О. Моргенштерном и Дж. фон Нейманом [19].

Если Γ — коллективное предпочтение на множестве альтернатив, то понятие ядра может использоваться для выбора наилучших альтернатив. Действительно, внутренняя устойчивость означает, что никакая альтернатива внутри ядра не является менее предпочтительной, чем любая другая альтернатива внутри ядра. С другой стороны, внешняя устойчивость означает, что любая альтернатива вне ядра является менее предпочтительной, чем какая-нибудь альтернатива внутри ядра.

Ядром графа, изображенного на рис. 5.4а, является множество $\{a\}$.

))

Рис. 5.4

В графе на рис. 5.4б внутренне устойчивыми множествами будут $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, а внешне устойчивыми — $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$. Таким образом, здесь нет множеств, которые были бы одновременно и внешне и внутренне устойчивыми, т.е. в данном графе ядра нет. Заметим, что в этом случае нет и победителей Кондорсе.

С другой стороны, граф может содержать более одного ядра. На рис. 5.5 показан граф, в котором множества $\{a,c\}$ и $\{b,d\}$ являются ядрами. Победителей Кондорсе, как легко заметить, в этом графе нет.

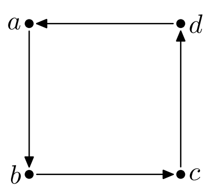


Рис. 5.5

Вообще, понятие ядра более общее по сравнению с понятием победителя Кондорсе. Победитель (победители) Кондорсе входит в любое из ядер игры (проверьте это самостоятельно), но возможна ситуация, например, как на рис. 5.5, когда победителя Кондорсе нет, а ядра есть.

То обстоятельство, что ядро мажоритарного графа может быть пусто, привело к появлению более тонких правил объединения подмножеств лучших вариантов в мажоритарном графе, некоторые из которых рассматриваются далее в параграфе 5.3.

5.3

Другие нелокальные правила принятия коллективных решений

В главе 4 было рассмотрено несколько правил принятия коллективных решений: правило относительного большинства, правило Борда и др. Далее будут рассмотрены примеры других нелокальных правил.

Для дальнейшего изложения потребуются некоторые определения.

Пусть имеется множество участников $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n > 2$) и множество альтернатив $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ($m > 2$). Предпочтения участников относительно вариантов из A заданы профилем $\vec{P} = (P_1, \ldots, P_n)$, где P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — линейные порядки.

Определение 2. *Мажоритарным отношением μ для данного профиля $\vec{P}$ называется такое бинарное отношение, что*

$$x \mu y \Leftrightarrow |V(x, y; \vec{P})| > |V(y, x; \vec{P})|.$$

Обратим внимание, что при нечетном числе альтернатив это определение совпадает с определением мажоритарного графа, которое было дано в главе 4.

Пример. Предпочтения троих участников на множестве $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ имеют вид:

P_1	P_2	P_3
x_1	x_3	x_2
x_2	x_1	x_1
x_3	x_2	x_3.

Здесь $V(x_1, x_2; \vec{P}) = \{1, 2\}$, $V(x_2, x_1; \vec{P}) = \{3\}$, $V(x_1, x_3; \vec{P}) = \{1, 3\}$, $V(x_3, x_1; \vec{P}) = \{2\}$, $V(x_2, x_3; \vec{P}) = \{1, 3\}$, $V(x_3, x_2; \vec{P}) = \{2\}$. Так как

$|V(x_1,x_2;\vec{P})| > |V(x_2,x_1;\vec{P})|$, то $(x_1,x_2) \in \mu$, где μ — мажоритарное отношение. Аналогично $(x_1,x_3) \in \mu$, $(x_2,x_3) \in \mu$. Граф, соответствующий мажоритарному отношению μ, показан на рис. 5.6.

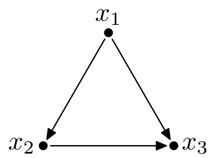


Рис. 5.6

Определение 3. *Сужением профиля $\vec{P}$ на множество $X \subseteq A$, $X \neq \varnothing$, называется профиль $\vec{P}/X = (P_1/X,\ldots,P_n/X)$, $P_i/X = P_i \bigcap (X \times X)$.*

Пример. Пусть профиль участников из множества $N = \{1,2,3,4\}$ относительно вариантов из $A = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ имеет следующий вид:

P_1	P_2	P_3	P_4
x_2	x_3	x_4	x_1
x_3	x_4	x_1	x_3
x_1	x_2	x_3	x_2
x_4	x_1	x_2	x_4.

Рассмотрим множество $X = A \setminus \{x_4\}$. Тогда сужение профиля $\vec{P}$ по множеству X, т.е. P/X, выглядит следующим образом:

P_1	P_2	P_3	P_4
x_2	x_3	x_1	x_1
x_3	x_2	x_3	x_3
x_1	x_1	x_2	x_2.

Определение 4. *Верхним срезом (верхним конусом) варианта x в бинарном отношении P называется множество $Px = \{y \in A | yPx\}$.*

Пример. Граф, изображающий бинарное отношение P, представлен на рис. 5.7 (с. 131).

Здесь $Px_1 = \{x_3\}$, $Px_2 = \{x_1,x_3\}$, $Px_3 = \{x_4\}$, $Px_4 = \{x_2\}$.

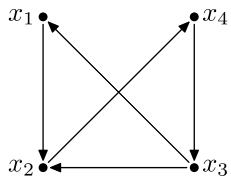


Рис. 5.7

Определение 5. *Нижним срезом (нижним конусом) варианта x в бинарном отношении P называется множество $xP = \{y \in A \,|\, xPy\}$.*

Для бинарного отношения, изображенного на рис. 5.7, имеем $x_1P = \{x_2\}$, $x_2P = \{x_4\}$, $x_3P = \{x_1, x_2\}$, $x_4P = \{x_3\}$.

Замечание. Примем следующее соглашение: коллективным решением является выбор наилучшей альтернативы, т.е. по сравнению с ситуацией главы 4 задача упрощается — необходимо не упорядочить все альтернативы, а только найти лучшую (лучшие). В случае получения нескольких равноправных вариантов и необходимости получения однозначного выбора на промежуточных этапах применения процедур будем выбирать альтернативу с наименьшим номером в исходной нумерации элементов множества A (или в алфавитном порядке). Например, при одинаковых свойствах вариантов x_2, x_3 и x_5 будет выбираться альтернатива x_2, а вариантов a, b и c — вариант a. Однако в качестве коллективного решения оставляют все получившиеся варианты.

Нелокальные правила принятия коллективных решений можно разделить на пять групп:

1) позиционные правила;
2) правила, использущие мажоритарное отношение;
3) правила, использущие вспомогательную числовую шкалу;
4) правила, использущие турнирную матрицу;
5) q-Паретовские правила большинства.

Далее будут рассмотрены примеры правил из каждой группы.

5.3.1

Позиционные правила

В позиционных правилах при построении коллективного решения в явном виде учитываются позиции, занимаемые альтернативами в индивидуальных предпочтениях участников. К *позиционным правилам* относятся уже рассмотренные в главе 4 правило относительного большинства и правило Борда. Рассмотрим еще несколько примеров.

Система передачи голосов (правило Хара)

Первоначально для построения коллективного решения выбирается вариант, получивший больше 50% первых мест в профиле участников $\vec{P}$.

Если такой вариант найден, то процедура останавливается и данный вариант считают коллективным решением. В противном случае из списка альтернатив удаляется вариант x, занявший наименьшее число первых мест в $\vec{P}$. Затем процедура вновь применяется к множеству $X = A \backslash \{x\}$ и профилю $\vec{P}/X$.

Пример. Пусть предпочтения четырех участников на множестве альтернатив $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ имеют следующий вид:

P_1	P_2	P_3	P_4
x_2	x_3	x_2	x_1
x_1	x_1	x_3	x_2
x_3	x_2	x_4	x_4
x_4	x_4	x_1	x_3.

Отсюда видно, что ни один из вариантов не набрал больше 50% первых мест, поэтому удалим из списка альтернатив вариант, набравший наименьшее число первых мест, т.е. x_1. Рассмотрим множество $X = A \backslash \{x_1\}$, т.е. $X = \{x_2, x_3, x_4\}$, и профиль $\vec{P}/X$, который будет выглядеть следующим образом:

P_1	P_2	P_3	P_4
x_2	x_3	x_2	x_2
x_3	x_2	x_3	x_4
x_4	x_4	x_4	x_3.

Отсюда следует, что вариант x_2 набирает более 50% голосов (три первых места из четырех) и объявляется коллективным решением.

Обратная процедура Борда (с передачей голосов)

Подсчитывается оценка (ранг) Борда для всех вариантов (см. главу 4) и исключается вариант x с наименьшей такой оценкой.

Затем оценка Борда пересчитывается для профиля $\vec{P}/X$, где $X = A \setminus \{x\}$, и процедура продолжается до тех пор, пока не останутся неисключаемые варианты.

Пример. Пусть три участника имеют следующие препочтения на множестве альтернатив $A = \{x_1, x_2, x_3\}$:

P_1	P_2	P_3
x_1	x_2	x_3
x_2	x_1	x_1
x_3	x_3	x_2.

Тогда оценки Борда следующие: $r(x_1) = 7$, $r(x_2) = 6$, $r(x_3) = 5$. Удаляем вариант x_3 как имеющий наименьшую оценку r, и рассматриваем множество альтернатив $X = A \backslash \{x_3\} = \{x_1, x_2\}$ и профиль $\vec{P}/X$:

P_1	P_2	P_3
x_1	x_2	x_1
x_2	x_1	x_2.

Теперь имеем $r(x_1) = 5$, $r(x_2) = 4$. Вариант x_2 имеет наименьшую оценку и потому далее не рассматривается. Коллективный выбор — вариант x_1.

Процедура Нансона

Подсчитывается оценка Борда для всех вариантов из списка альтернатив $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ $(m > 2)$ по профилю $\vec{P}$. Затем вычисляется средняя оценка

$$\bar{r} = \frac{\sum\limits_{x_i \in A} r(x_i)}{|A|}$$

и исключаются из дальнейшего рассмотрения все варианты $x_i \in A$, для которых $r(x_i) < \bar{r}$. Далее процедура применяется к суженному профилю $\vec{P}/X$, где $X = \{x_i \in A | \, i \in \{1, \ldots, m\}, r(x_i) \geq \bar{r}\}$. Процедура продолжается до тех пор, пока не останутся только неисключаемые варианты.

Пример. Участники из множества $N = \{1, 2, 3, 4\}$ имеют на множестве альтернатив $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ следующие предпочтения:

P_1	P_2	P_3	P_4
x_1	x_4	x_3	x_2
x_4	x_3	x_2	x_4
x_3	x_1	x_4	x_3
x_2	x_2	x_1	x_1.

Отсюда получаем, что $r(x_1) = 4+2+1+1 = 8$, $r(x_2) = 1+1+3+4 = 9$, $r(x_3) = 2+3+4+2 = 11$, $r(x_4) = 3+4+2+3 = 12$ и $\bar{r} = \frac{8+9+11+12}{4} = 10$.

Значит, из дальнейшего рассмотрения исключаются альтернативы x_1 и x_2, т.к. $r(x_1) < \bar{r}$ и $r(x_2) < \bar{r}$.

Рассмотрим сужение профиля $\vec{P}$ на множество альтернатив $\{x_3, x_4\}$. Оно имеет следующий вид:

P_1	P_2	P_3	P_4
x_4	x_4	x_3	x_4
x_3	x_3	x_4	x_3.

Следовательно, $r(x_3) = 1+1+2+1 = 5$, $r(x_4) = 2+2+1+2 = 7$ и $\bar{r} = \frac{5+7}{2} = 6$. Так как $r(x_3) < \bar{r}$, то вариант x_3 удаляется из дальнейшего рассмотрения. Таким образом, остается один неисключаемый вариант x_4, который и считается коллективным выбором.

Процедура Кумбса

Первоначально из списка альтернатив $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ $(m > 2)$ удаляется вариант, который считают худшим максимальное число участников. Затем профиль сужается до нового множества X, и процедура продолжается, пока не останутся только неисключаемые варианты.

Пример. Профиль участников $\vec{P}$ имеет следующий вид:

P_1	P_2	P_3
x_1	x_2	x_3
x_2	x_3	x_1
x_3	x_1	x_4
x_4	x_4	x_2.

Вариант x_4, который считают худшим большинство участников (двое из трех), исключается из списка альтернатив. Получаем следующее сужение профиля $\vec{P}$:

P_1	P_2	P_3
x_1	x_2	x_3
x_2	x_3	x_1
x_3	x_1	x_2.

Каждый из вариантов x_1, x_2 и x_3 считается худшим только для одного из участников, поэтому удаляем из списка альтернатив вариант с наименьшим номером, т.е. x_1. Получаем следующее сужение профиля:

P_1	P_2	P_3
x_2	x_2	x_3
x_3	x_3	x_2.

Здесь исключается вариант x_3, занявший два (из трех) последних места. Таким образом, согласно процедуре Кумбса коллективное решение — вариант x_2.

5.3.2 Правила, использующие мажоритарное отношение

Правило с использованием минимального доминирующего множества

Множество Q называется *доминирующим,* если каждая альтернатива в Q доминирует каждую альтернативу вне Q в смысле мажоритарного отношения μ, т.е. $\forall x \in Q \;\; \forall y \in A \backslash Q$ имеет место $x\mu y$.

Доминирующее множество Q называется *минимальным,* если никакое его собственное подмножество не является доминирующим множеством.

Для мажоритарного графа, представленного на рис. 5.8 (с. 136), доминирующими являются множества $\{x_1\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Минимальным доминирующим здесь является только множество $\{x_1\}$. Множество $\{x_1, x_2\}$, например, не является доминирующим, т.к. $x_3 \notin \{x_1, x_2\}$ и $x_3 \mu x_2$, т.е x_3 доминирует вариант x_2 в смысле μ.

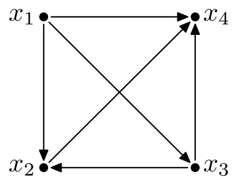


Рис. 5.8

Если для мажоритарного отношения μ существует единственное минимальное доминирующее множество, то коллективным решением объявляется именно оно. В противном случае коллективный выбор представляет собой объединение этих множеств.

Данное правило называется *правилом с использованием минимального доминирующего множества.*

Таким образом, в рассматриваемом примере (рис. 5.8) в качестве коллективного решения выбирается вариант x_1.

Правило с применением минимального недоминируемого множества

Множество Q называется *недоминируемым,* если никакая альтернатива вне Q не доминирует какую бы то ни было альтернативу из Q по мажоритарному отношению μ, т.е. $\forall x \in A \backslash Q$, $\forall y \in Q$ имеем $(x, y) \notin \mu$.

Недоминируемое множество Q называется *минимальным,* если никакое его собственное подмножество не является недоминируемым множеством.

На рис. 5.8 недоминирумыми множествами являются множества $\{x_1\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, минимальным среди них является только множество $\{x_1\}$. Множество $\{x_1, x_2\}$, например, не является недоминируемым, т.к. $x_3 \notin \{x_1, x_2\}$ и $x_3 \mu x_2$.

Если для мажоритарного отношения μ минимальное недоминируемое множество единственно, то его и считают коллективным выбором. В противном случае коллективное решение представляет собой объединение таких множеств. Это и есть *правило с использованием минимального недоминируемого множества.*

Пример. Пусть профиль участников $\vec{P}$ имеет вид:

P_1	P_2	P_3	P_4
x_1	x_4	x_2	x_3
x_4	x_1	x_1	x_4
x_3	x_2	x_4	x_1
x_2	x_3	x_3	x_2.

Мажоритарный граф для него представлен на рис. 5.9.

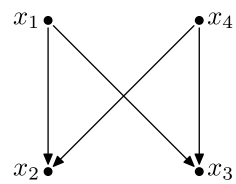


Рис. 5.9

Недоминируемыми здесь являются множества $\{x_1\}$, $\{x_4\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_1, x_2, x_4\}$, $\{x_1, x_3, x_4\}$, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а минимальными — $\{x_1\}$ и $\{x_4\}$. Поэтому коллективное решение — $\{x_1, x_4\}$.

Замечание. Поскольку при нечетном числе участников мажоритарное отношение является связным (параграф 4.6, задача 5), т.е. $\forall x, y \in A$ $(x \neq y)$ $x\mu y$ или $y\mu x$, то можно показать, что результат применения процедур с минимальным доминирующим множеством и с минимальным недоминируемым множеством в этом случае будет одинаковым.

Правило Фишберна

Для определения правила Фишберна необходимо построить верхний срез Px альтернативы x в мажоритарном отношении μ и новое бинарное отношение γ таким образом, что $x\gamma y \Longleftrightarrow Px \subset Py$.

Тогда по *правилу Фишберна* в качестве коллективного решения выбираются недоминируемые в бинарном отношении γ варианты, т.е. $x \in P \Longleftrightarrow \forall y \in A\ (y, x) \notin \gamma$.

Заметим, что γ антирефлексивно и транзитивно, т.е. γ — частичный порядок.

Пример. Пусть множество участников состоит из трех человек, которые делают выбор относительно четырех альтернатив $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Предпочтения участников относительно них выглядят следующим образом:

P_1	P_2	P_3
x_1	x_2	x_3
x_4	x_3	x_4
x_2	x_1	x_2
x_3	x_4	x_1.

Соответствующий мажоритарному отношению μ граф представлен на рис. 5.10.

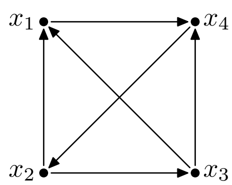


Рис. 5.10

Тогда $Px_1 = \{x_2, x_3\}$, $Px_2 = \{x_4\}$, $Px_3 = \{x_2\}$, $Px_4 = \{x_1, x_3\}$. Отсюда видно, что только верхний срез варианта x_3 содержится в верхнем срезе другого варианта, а именно: $Px_3 \subset Px_1$. Поэтому бинарное отношение γ содержит только одну пару (x_3, x_1). По правилу Фишберна выбираются варианты, недоминируемые в отношении γ, т.е. в данном случае — x_2, x_3, x_4.

5.3.3

Правила, использующие вспомогательную числовую шкалу

Рассмотрим три правила Коупленда.

Эти правила основаны на построении числовой функции по мажоритарному отношению, соответствующему заданному профилю участников $\vec{P}$, и ее максимизации (первое и второе правила Коупленда) или минимизации (третье правило Коупленда).

Первое правило Коупленда требует построения числовой функции $u(x)$, равной разности мощностей нижнего и верхнего среза альтернативы x в мажоритарном отношении μ, т.е. $\forall x \in A$ $u(x) = |xP| - |Px|$. Тогда коллективное решение — это та альтернатива x_i, для которой $u(x_i) = \max\limits_{x_j \in A} u(x_j)$.

Пример. Пусть имеется множество участников $N = \{1, 2, 3\}$, множество альтернатив $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, и профиль участников имеет вид:

P_1	P_2	P_3
x_1	x_4	x_3
x_2	x_1	x_4
x_3	x_3	x_2
x_4	x_2	x_1.

Граф, соответствующий мажоритарному отношению для профиля $\vec{P}$, показан на рис. 5.11.

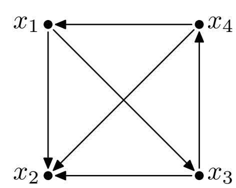


Рис. 5.11

При этом $Px_1 = \{x_4\}$, $x_1P = \{x_2, x_3\}$, $Px_2 = \{x_1, x_3, x_4\}$, $x_2P = \varnothing$, $Px_3 = \{x_1\}$, $x_3P = \{x_2, x_4\}$, $Px_4 = \{x_3\}$, $x_4P = \{x_1, x_2\}$, и функция $u(x)$ имеет вид:

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$u(x)$	1	-3	1	1

$$\max_{x \in A} u(x) = 1 = u(x_1) = u(x_3) = u(x_4).$$

Таким образом, в качестве коллективного решения выбираются x_1, x_3 и x_4.

Во *втором правиле Коупленда* функция $u(x)$ определяется мощностью нижнего среза альтернативы $x\,(x \in A)$ в мажоритарном отношении μ для профиля участников $\vec{P}$. При этом коллективное решение определяется как вариант x_i такой, что $u(x_i) = \max\limits_{x_j \in A} u(x_j)$.

Проиллюстрируем второе правило Коупленда следующим **примером**.

Пусть имеется четыре участника, строящих коллективное решение на множестве альтернатив $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Их предпочтения имеют вид:

P_1	P_2	P_3	P_4
x_1	x_4	x_2	x_3
x_2	x_3	x_1	x_4
x_3	x_2	x_3	x_2
x_4	x_1	x_4	x_1.

Мажоритарный граф для данного профиля $\vec{P}$ представлен на рис. 5.12.

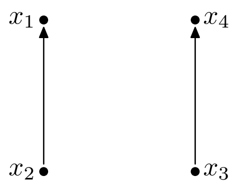


Рис. 5.12

Отсюда имеем $x_1 P = \varnothing$, $x_2 P = \{x_1\}$, $x_3 P = \{x_4\}$, $x_4 P = \varnothing$.

Так как $\forall x_i \in A\ u(x_i) = |x_i P|$, то функция $u(x)$ имеет вид:

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$u(x)$	0	1	1	0

Второе правило Коупленда предписывает в качестве коллективного решения выбрать альтернативы x_2 и x_3.

Третье правило Коупленда во многом сходно со вторым. Функция $u(x)$ определяется также мощностью среза, только теперь верхнего, варианта x в мажоритарном отношении μ, т.е. $\forall x \in A\ u(x) = |Px|$. В качестве коллективного решения выбирается такая альтернатива $x_i \in A$, что $u(x_i) = \min\limits_{x_j \in A} u(x_j)$.

5.3.4

Правила, использующие турнирную матрицу

Рассмотрим два правила принятия коллективных решений с использованием турнирной матрицы.

Пусть имеется множество участников $N = \{1, \dots, n\}$, где $n > 2$, которые имеют свои предпочтения относительно вариантов из множества $A = \{x_1, \dots, x_m\}$, где $m > 2$, и $\vec{P} = (P_1, \dots, P_n)$ — соответствующий профиль участников. Определим матрицу $S^+ = \|a_{ij}\|$

так, что $a_{ij} = |V(x_i, x_j; \vec{P})|$ для любых x_i, x_j из множества A. Для определенности положим $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ $a_{ii} = +\infty$. Коллективное решение определяется как вариант, соответствующий значению

$$\max_{x_i \in A} \min_{x_j \in A} |V(x_i, x_j; \vec{P})|.$$

Такая процедура называется *максиминной процедурой* и формально ее можно записать в виде:

$$x \in P \Longleftrightarrow x \in \arg\max_{x_i \in A} \min_{x_j \in A} |V(x_i, x_j; \vec{P})|.$$

Пример. Пусть имеется множество участников $N = \{1, 2, 3\}$ и множество вариантов $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Профиль участников имеет вид:

P_1	P_2	P_3
x_1	x_2	x_3
x_3	x_1	x_4
x_2	x_3	x_1
x_4	x_4	x_2.

Тогда имеем, что $V(x_1, x_2; \vec{P}) = \{1, 3\}$, $V(x_2, x_1; \vec{P}) = \{2\}$, $V(x_1, x_3; \vec{P}) = \{1, 2\}$, $V(x_3, x_1; \vec{P}) = \{3\}$, $V(x_1, x_4; \vec{P}) = \{1, 2\}$, $V(x_4, x_1; \vec{P}) = \{3\}$, $V(x_2, x_3; \vec{P}) = \{2\}$, $V(x_3, x_2; \vec{P}) = \{1, 3\}$, $V(x_2, x_4; \vec{P}) = \{1, 2\}$, $V(x_4, x_2; \vec{P}) = \{3\}$, $V(x_3, x_4; \vec{P}) = \{1, 2, 3\}$, $V(x_4, x_3; \vec{P}) = \varnothing$. Соответствующая матрица S^+ выглядит следующим образом:

$$S^+ = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 2 \\ 1 & \infty & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \infty & 3 \\ 1 & 1 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \min\limits_{x_j \in A} |V(x_i, x_j; \vec{P})| \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0. \end{array}$$

Согласно максиминной процедуре в качестве коллективного решения выбирается вариант x_1.

Другое правило, использущее турнирную матрицу, носит название *минимаксной процедуры*. Аналогично предыдущему случаю строится матрица $S^- = ||a_{ij}||$ так, что $a_{ij} = |V(x_i, x_j; \vec{P})|$ и $a_{ii} = -\infty$, а коллективное решение определяется как вариант, который соответствует значению $\min\limits_{x_j \in A} \max\limits_{x_i \in A} |(V(x_i, x_j; \vec{P})|$. Формально это правило можно записать следующим образом:

$$x \in P \Longleftrightarrow x \in \arg \min_{x_j \in A} \max_{x_i \in A} |(V(x_i, x_j; \vec{P})|.$$

Пример. Трое друзей выбирают подарок ко дню рождения для четвертого друга. В качестве альтернатив ими рассматриваются мобильный телефон (T), набор компакт-дисков любимого исполнителя (M), кроссовки последней модели (C), фотоаппарат (F). Предпочтения друзей относительно подарков имеют вид:

P_1	P_2	P_3
M	M	F
F	C	T
C	F	C
T	T	M.

Отсюда видно, что $V(T, M; \vec{P}) = \{3\}$, $V(M, T; \vec{P}) = \{1, 2\}$, $V(T, C; \vec{P}) = \{3\}$, $V(C, T; \vec{P}) = \{1, 2\}$, $V(T, F; \vec{P}) = \varnothing$, $V(F, T; \vec{P}) = \{1, 2, 3\}$, $V(M, C; \vec{P}) = \{1, 2\}$, $V(C, M; \vec{P}) = \{3\}$, $V(M, F; \vec{P}) = \{1, 2\}$, $V(F, M; \vec{P}) = \{3\}$, $V(C, F; \vec{P}) = \{2\}$, $V(F, C; \vec{P}) = \{1, 3\}$.

Матрица S^- имеет вид:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} T & M & C & F \end{array} \\ S^- = \begin{array}{c} T \\ M \\ C \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} -\infty & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -\infty & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -\infty & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -\infty \end{pmatrix} \\ \max\limits_{x_i \in A} |V(x_i, x_j; \vec{P})| & \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 2 \end{array} \end{array}$$

Согласно минимаксной процедуре выбирается вариант M, т.е. друзья выбирают для подарка набор компакт-дисков. Заметим, что этот вариант наилучший для двоих друзей, а для третьего он является наихудшим.

Замечание. При нечетном числе участников результаты, полученные с помощью максиминной процедуры и минимаксной процедуры, совпадают.

5.3.5

q-Паретовские правила большинства

Эти правила основаны на рассмотрении $q+1$ варианта от наилучшего и ниже в линейных порядках P_i и коалиций простого большинства. Интересующийся читатель может прочитать об этом в [32].

5.4

Задача о лидере

Рассмотрим сообщество, моделируемое ориентированным графом, в котором вершинам соответствуют люди, а направленная дуга из вершины x в вершину y означает, что x может влиять на y. Кто является лидером в этом сообществе? Вопросы подобного вида изучались в социологии, причем не только при анализе человеческих сообществ [23]. Далее приводится одно из возможных решений этой задачи, в котором ищется победитель в турнире. Идея такого решения была предложена Бержем.

Рассмотрим, следуя [17], турнир, в котором участвуют пять команд, и результаты игр между этими командами представлены в матрице B.

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Здесь игры вничью оценены в 1 очко, выигрыш — в 2 очка, проигрыш — в 0 очков. Поскольку элементы матрицы интерпретируются как результаты попарной оценки силы команд, то диагональные элементы заполнены единицами.

Рассмотрим граф, соответствующий матрице B. Он изображен на рис. 5.13.

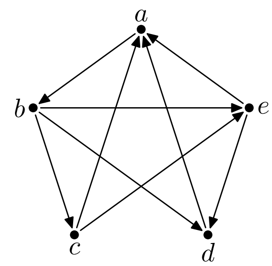


Рис. 5.13

В этом графе дуга от команды x к y проводится в том случае, если x победил y. В случае ничьей дуги между x и y нет.

Попробуем определить сначала победителя турнира путем суммирования очков. Тогда результатирующий выбор имеет вид:

$$q^{(1)} = (3, 7, 6, 4, 5)^T,$$

где на первом месте стоит сумма очков для команды a, затем для команды b и т.д.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Наименьшее количество очков набрала команда a, которая, однако, победила самую сильную команду — лидера b. Можно ли учесть это обстоятельство при подсчете очков, т.е. учесть как бы силу команд, с которыми играет a?

Чтобы учесть это обстоятельство, прибавим к очкам каждой команды очки тех, с кем она сыграла вничью, и удвоенное количество очков команд, побежденных ею. Иначе говоря, прибавим к очкам a удвоенное количество очков b, т.е. 14 очков и очки самого a, т.е. 3 очка. Получим:

Команда	*Очки* $q^{(1)}$	*Команда*					*Очки* $q^{(2)}$
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	
a	3	—	14	0	0	0	17
b	7	0	—	12	8	10	37
c	6	6	0	—	4	10	26
d	4	6	0	6	—	0	16
e	5	6	0	0	8	—	19

Теперь $q^{(2)} = (17, 37, 26, 16, 19)^T$, т.е. команда d, которая была на четвертом месте, переместилась на пятое, а команда a поднялась с пятого места на четвертое.

Продолжим этот процесс:

$$\begin{aligned}
q_a^{(3)} &= 17 + 2 \cdot 37 = 91,\\
q_b^{(3)} &= 37 + 2(26 + 16 + 19) = 159,\\
q_c^{(3)} &= 26 + 2(17 + 19) + 16 = 114,\\
q_d^{(3)} &= 16 + 2 \cdot 17 + 26 = 76,\\
q_e^{(3)} &= 19 + 2(17 + 16) = 85.
\end{aligned}$$

Таким образом, $q^{(3)} = (91, 159, 114, 76, 85)^T$. Заметим, что команда a вышла на третье место.

Аналогично получим $q^{(4)} = (409, 709, 542, 372, 419)^T$, и распределение мест выглядит так: $b \succ c \succ e \succ a \succ d$.

На пятом шаге получим $q^{(5)} = (1827, 3375, 2570, 1732, 1981)^T$, т.е. снова имеет место $b \succ c \succ e \succ a \succ d$, и распределение мест среди команд стабилизировалось.

Относительная сила команд может быть рассчитана так:

$$\overline{q}^{(5)} = \left(\frac{q_a^{(5)}}{\sum\limits_i q_i^{(5)}}, \ldots, \frac{q_e^{(5)}}{\sum\limits_i q_i^{(5)}} \right)^T =$$
$$= (0,159,\ 0,294,\ 0,224,\ 0,151,\ 0,172)^T.$$

Если положить $q^{(0)} = (1, \ldots, 1)^T$ — вектор-столбец, то можно видеть, что

$$q^{(1)} = Bq^{(0)},$$

и далее значение $q^{(i)}$ определяется через $q^{(i-1)}$ следующим образом:

$$q^{(i)} = Bq^{(i-1)}$$

или

$$q^{(i)} = B^i q^{(0)}.$$

Покажем, как этот результат может быть получен с использованием аппарата линейной алгебры.

Если положить $\overline{q}^{(0)} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^T$, где n — число команд, то

$$\overline{q}^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} B\overline{q}^{(0)},$$

где $\lambda^{(1)} = \sum_i \sum_j b_{ij}\overline{q}_j^{(0)}$, и $\overline{q}^{(1)}$ — нормированные на 1 относительные оценки силы участников (команд), т.е. $\sum_j \overline{q}_j^{(1)} = 1$.

Соответственно

$$\overline{q}^{(t)} = \frac{1}{\lambda^{(t)}} B\overline{q}^{(t-1)}, \tag{5.1}$$

где $\lambda^{(t)} = \sum_i \sum_j b_{ij}\overline{q}_j^{(t-1)}$.

Оказывается, что если граф G, построенный по матрице B, связен, то процесс, определяемый формулой (5.1), сходится в пределе к

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \lambda^{(t)},$$

где λ — максимальное собственное значение матрицы B, причем это максимальное собственное значение всегда существует и неотрицательно.

Этот факт следует из теоремы Перрона — Фробениуса (см., например, [11]), которая утверждает, что в случае неотрицательной неразложимой[16] матрицы B всегда существует неотрицательное и превосходящее по модулю все другие собственное число λ такое, что $Bq = \lambda q$.

Собственный вектор q, соответствующий этому λ, удовлетворяет условию

$$q = \lim_{t\to\infty} q^{(t)},$$

где $q^{(t)}$ вычисляется по формуле (5.1).

Пример. Рассмотрим таблицу Чемпионата России по футболу 2004 г. (табл. 5.1 на с. 147). 16 команд играли между собой в два круга, за победу

[16] Неотрицательность матрицы означает, что все ее элементы неотрицательны. Неразложимость матрицы B означает, что ее нельзя перестановкой строк и столбцов привести к виду $\begin{bmatrix} B' & 0 \\ C & B'' \end{bmatrix}$, где B' и B'' — квадратные матрицы, что соответствует связности графа G, построенного по матрице B.

давалось 3 очка, за ничью — одно, за поражение — нуль. В таблице показана сумма очков, набранных командами во встречах друг с другом. Например, во встречах «Зенита» и ЦСКА один раз победил ЦСКА, и один раз команды сыграли вничью. Соответственно ЦСКА получает $4 = 3 + 1$ очков, «Зенит» — $1 = 0 + 1$. На диагонали таблицы стоят нули.

Таблица 5.1. Чемпионат России по футболу 2004 г.

№ п/п	*Команда*	*Набранные очки*															
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
1	ЦСКА	0	4	3	0	1	2	6	4	2	6	6	6	6	4	4	6
2	«Зенит»	1	0	4	3	3	6	4	3	3	6	3	3	6	1	4	6
3	«Рубин»	3	1	0	2	1	2	1	3	0	3	1	4	4	3	2	3
4	«Локомотив»	6	3	2	0	6	6	6	4	3	4	4	1	6	3	4	3
5	«Шинник»	4	3	4	0	0	3	4	3	3	1	4	6	1	1	4	3
6	«Динамо»	2	0	2	0	3	0	1	1	1	2	0	4	3	3	6	1
7	«Сатурн»	0	1	4	0	1	4	0	4	1	4	6	3	6	1	2	4
8	«Торпедо»	1	3	3	1	3	4	1	0	3	6	6	6	4	4	3	6
9	«Крылья Советов»	2	3	6	3	3	4	4	3	0	3	6	3	6	3	3	4
10	«Спартак»	0	0	3	1	4	2	1	0	3	0	3	4	3	6	6	4
11	«Ростов»	0	3	4	1	1	6	0	0	0	3	0	6	2	1	1	1
12	«Ротор»	0	3	1	4	0	1	3	0	3	1	0	0	1	1	2	2
13	«Спартак-Алания»	0	0	1	0	4	3	0	1	0	3	2	4	0	4	0	6
14	«Москва»	1	4	3	3	4	3	4	1	3	0	4	4	1	0	3	2
15	«Амкар»	1	1	2	1	1	0	2	3	3	0	4	2	6	3	0	1
16	«Кубань»	0	0	3	3	3	4	1	0	1	1	4	2	0	2	4	0

Результаты чемпионата показаны в табл. 5.2 (с. 148). Первая колонка — место команды в чемпионате (R_1, в случае равенства очков использовались дополнительные показатели), третья — число набранных в чемпионате очков.

Заметим, что количество очков, набранных командой, — в точности сумма чисел в соответствующей строке, т.е $q^{(1)}$.

Вычислим относительную силу команд, пользуясь методами линейной алгебры. В четвертой колонке табл. 5.2 — вычисленные с помощью компьютера координаты собственного вектора матрицы турнира (q) с максимальным собственным значением ($\lambda = 37,3$), в последней — место в упорядочении команд в соответствии с полученным q (R_2).

Таблица 5.2. Результаты чемпионата

R_1	*Команда*	$q^{(1)}$	q	R_2
1	«Локомотив»	61	0,099	1
2	ЦСКА	60	0,088	2
3	«Крылья Советов»	56	0,086	3
4	«Зенит»	56	0,085	4
5	«Торпедо»	54	0,080	5
6	«Шинник»	44	0,069	6
7	«Сатурн»	41	0,057	9
8	«Спартак»	40	0,059	8
9	«Москва»	40	0,066	7
10	«Рубин»	33	0,053	10
11	«Амкар»	30	0,048	11
12	«Ростов»	29	0,042	14
13	«Динамо»	29	0,044	12
14	«Спартак-Алания»	28	0,040	16
15	«Кубань»	28	0,043	13
16	«Ротор»	22	0,041	15

Изменения в расстановке команд коснулись в основном середины и низа турнирной таблицы. Дело в том, что случайные поражения лидеров от аутсайдеров не сильно меняют рейтинг лидеров, в то время как случайная победа аутсайдера над лидером не приносит ему много очков, но существенно увеличивает его относительную силу.

Другая причина полученных изменений связана со способом распределения мест в чемпионате при равенстве очков. Тут большое значение играют личные встречи. Но личные встречи лидеров сильно влияют на относительную силу команд, в то время как личные встречи аутсайдеров — незначительно.

Впрочем, такое четкое проявление закономерностей вполне могло и не наблюдаться. Проиграй «Локомотив» в последнем туре, он занял бы второе место с 58 очками вместо 61, но остался бы первым по относительной силе (тут запас был очень большой).

5.5

Задачи

1. Найдите число внутренней устойчивости для графа, показанного на рис. 5.14.

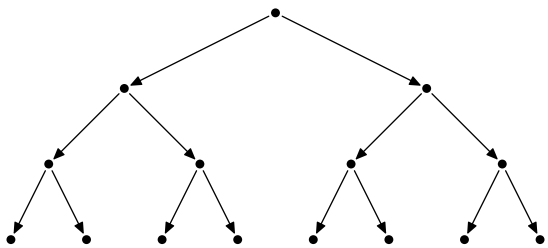


Рис. 5.14

2. Найдите максимальные внутренне устойчивые множества для полного графа. (*Полным ориентированным графом* $G = (A, \Gamma)$ называется граф, у которого $\Gamma = A \times A$.) Как определить его число внутренней устойчивости?

3. Найдите максимальные внутренне устойчивые множества для нуль-графа. (*Нуль-графом* $G = (A, \Gamma)$ называется граф, у которого $\Gamma = \varnothing$.) Как определить его число внутренней устойчивости?

4. Найдите максимальные внутренне устойчивые множества для линейного порядка. Как определить его число внутренней устойчивости?

5. Найдите максимальные внутренне устойчивые множества для слабого порядка. Как определить его число внутренней устойчивости?

6. Найдите максимальные внутренне устойчивые множества и определите числа внутренней устойчивости для графов, показанных на рис. 5.15 (с. 150).

Графы, аналогичные показанному на рис. 5.15в, называются *короной* и обозначаются через C_n (в данном случае — C_3).

7. Найдите число внешней устойчивости для графа, показанного на рис. 5.14.

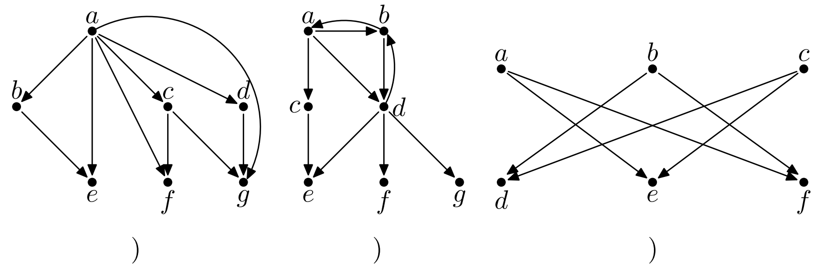


Рис. 5.15

8. Найдите минимальные внешне устойчивые множества и числа внешней устойчивости для графов, показанных на рис. 5.15.

9. Докажите, что если S — ядро графа G, то S — максимальное внутренне устойчивое множество.

10. Четверо друзей выбирают место отдыха на лето для всей компании. Ими рассматриваются в качестве вариантов Испания (S), Греция (G), Кипр (C) и Болгария (B), относительно которых друзья имеют следующие предпочтения:

P_1	P_2	P_3	P_4
C	G	B	S
S	C	C	G
G	B	S	C
B	S	G	B.

Постройте коллективное решение с помощью системы передачи голосов. Сможет ли что-нибудь выиграть для себя второй участник, если намеренно исказит свои истинные предпочтения и представит их в виде $P_2' : G \succ B \succ C \succ S$ (остальные участники своих предпочтений не меняют)?

11. Семья из трех человек собирается покупать новый автомобиль. Выбор осуществляется среди моделей (в одной ценовой категории) следующих марок: «пежо» (P), «рено» (R), «ситроен» (C), «опель» (O). Предпочтения членов семьи относительно этих альтернатив имеют вид:

P_1	P_2	P_3
R	P	C
O	O	R
P	C	O
C	R	P.

Постройте коллективное решение по правилу Фишберна и сравните его с решением, получаемым с помощью процедуры Нансона.

12. Семья из четырех человек выбирает ресторан, в котором собирается отметить некое семейное торжество. Ресторан выбирается на основе гастрономических пристрастий членов семьи. Исходя из этого, рассматриваются следующие варианты: итальянский ресторан (I), японский (J), мексиканский (M) и французский (F). Предпочтения членов семьи выглядят следующим образом:

P_1	P_2	P_3	P_4
M	F	J	J
F	J	I	F
I	I	M	I
J	M	F	M.

Какой ресторан будет выбран, если коллективное решение строится по первому правилу Коупленда?

13. Компания из трех человек выбирает вариант совместного проведения вечернего досуга. Ими рассматриваются четыре альтернативы: поход на дискотеку (D), поход в кино (C), поход в театр (T), поход на модное фотобиеннале (F). Предпочтения участников имеют вид:

P_1	P_2	P_3
D	C	T
C	D	F
F	F	C
T	T	D.

Какое коллективное решение будет получено, если применить максиминную процедуру? Убедитесь, что в этом случае тот же результат дает и минимаксная процедура.

14. В параграфе 4.4 рассмотрена манипулируемость правила относительного большинства. Покажите манипулируемость правил:

а) Борда,

б) Фишберна,

в) Нансона.

15. Приведите пример, в котором выбор по правилам Борда, Хара (система передачи голосов) и простого большинства различен.

16. Верно ли следующее утверждение: вариант, считающийся наилучшим по Борда, является недоминируемым исходом хотя бы для одного из участников. Тот же вопрос для правила Хара.

17. Является ли локальным правилом голосования процедура Кумбса?

18. Найдите, пользуясь методом, описанным в задаче о лидере, ранжирование участников в следующих турнирах:

$$\text{а)}\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad \text{б)}\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$\text{в)}\quad \begin{array}{cc} \begin{matrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad \text{г)}\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$\text{д)}\quad \begin{array}{cc} \begin{matrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad \text{е)}\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

6
глава

КОАЛИЦИИ И ВЛИЯНИЕ ГРУПП В ПАРЛАМЕНТЕ

6.1
Введение

В выборных органах, например парламентах, решения принимаются путем голосования. Решение считается принятым, если число голосов, поданных за него, не меньше некоторой квоты голосов, которая определяется конкретной процедурой голосования (например, наиболее распространенная процедура «простое большинство голосов», в которой для принятия решения требуется более 50% голосов «за»). При наличии трех или более партий в парламенте вполне возможно, что ни одна из них не обладает числом голосов, превосходящим заданную квоту, и, следовательно, не может в одиночку обеспечить принятие решений; таким образом, для проведения решений партиям необходимо вступать в коалиции. Важную роль играют коалиции, которые могут обеспечить необходимое большинство.

Напомним, что коалиция называется выигрывающей, если она может принять решение без голосов остальных партий. Чем больше коалиций, которые данная партия делает выигрывающими, тем больше у нее возможностей влиять на исход голосования. На первый взгляд кажется, что влияние партии напрямую зависит от числа ее голосов. Чтобы проиллюстрировать, что это не совсем так, рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть парламент, состоящий из 99 мест, представлен тремя партиями A, B, C с числом голосов каждой партии равным 33. Правило принятия решений — простое большинство, т.е. 50 голосов. В этом случае выигрывающими будут коалиции $A+B$, $A+C$, $B+C$, $A+B+C$, т.е. любая партия делает выигрывающими две парные коалиции. В силу симметрии очевидно, что все партии имеют одинаковое влияние.

Теперь представим, что распределение мест в этом парламенте изменилось и у партий A и B стало по 48 голосов, а у партии C — только три голоса. Однако выигрывающие коалиции остались теми же, и партия C, несмотря на резкое уменьшение числа голосов, делает выигрывающими то же число коалиций, что и остальные партии, т.е. возможности всех партий влиять на исход голосования по-прежнему одинаковы.

Приведенный пример показывает, что число голосов не является точным показателем влияния партии. Поэтому вводятся индексы влияния, измеряющие степень влияния или, как иногда говорят, относительную силу партии в парламенте на основании числа коалиций, которые партия делает выигрывающими.

Данная глава посвящена исследованию влияния участников в выборных органах. В параграфе 6.2 рассматривается голосование с квотой, дается понятие выигрывающей коалиции, приводятся необходимые сведения из комбинаторики. Параграф 6.3 посвящен индексу Банцафа и его применению для оценки относительной влиятельности участников в выборных органах. Здесь же оценивается влиятельность членов Совета Безопасности ООН. В параграфе 6.4 индекс Банцафа применяется для анализа влиятельности фракций и депутатских групп в Государственной Думе 3-го созыва, а в параграфе 6.5 — для анализа институционального баланса власти в Совете министров расширенного Евросоюза. Параграф 6.6 посвящен описанию других индексов влияния (Шепли — Шубика, Джонсона, Дигена — Пакела, Холера — Пакела).

Параграф 6.7 содержит задачи к данной главе.

6.2

Голосование с квотой

Рассмотрим комитет N, состоящий из n членов, т.е. $N = \{1, \ldots, n\}$. Каждый член комитета i имеет число голосов, равное k_i. Например, в качестве комитета можно рассмотреть собрание акционеров крупной компании, а число голосов каждого акционера пропорционально числу акций, которыми он владеет.

В общем случае рассмотрим процедуру голосования, в которой определена *квота* q, и решение предполагается принятым, если число голосов, поданных за это решение, не меньше квоты, т.е.

$$\sum_{\text{по } i, \text{ голосующим за решение}} k_i \geq q.$$

Примем следующее соглашение: при голосовании нельзя воздерживаться, т.е. каждый участник может голосовать только «за» или «против» принятия решения.

Пусть S — *коалиция* участников, т.е. подмножество множества N, $S \subseteq N$. Считается, что члены коалиции голосуют одинаково. *Коалиция* называется *выигрывающей,* если

$$\sum_{i \in S} k_i \geq q,$$

в противном случае она называется *проигрывающей.*

Введем *характеристическую функцию* $\nu : 2^N \to \{0, 1\}$ так, что

$$\nu(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \text{ выигрывающая коалиция,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Иначе говоря, для каждой коалиции S можно заранее посчитать, является ли S выигрывающей, и положить $\nu(S) = 1$, и для всех проигрывающих коалиций положить $\nu(S) = 0$.

Задача. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, $k_1 = 40$, $k_2 = 30$, $k_3 = 30$, $q = 51$, т.е. квота равна 51 голосу. Такую ситуацию голосования с квотой будем обозначать как $(51; 40, 30, 30)$, где первое число обозначает q, а следующие три числа — k_1, k_2 и k_3 «веса» участников. Какие коалиции являются выигрывающими?

Решение. Естественно, множество N, т.е. коалиция, состоящая из всех участников, является выигрывающей. Другими выигрывающими коалициями будут $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$. Первые две коалиции располагают 70 голосами из 100 каждая, а третья — 60 голосами.

Отсюда следует, что $\nu(\varnothing) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = 0$, $\nu(\{1, 2\}) = \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\}) = 1$. ■

Рассмотрим вопрос о числе коалиций в парламенте. Аппарат, который позволяет отвечать на такого рода вопросы, разрабатывается в рамках раздела математики, называемого комбинаторикой.

Пусть парламент состоит из n депутатов. Коалицией может быть любое подмножество множества депутатов. Кроме того, для удобства, пустой коалицией считаем подмножество, не включающее ни одного депутата.

Теорема 1. *Общее число возможных коалиций, включая пустую коалицию, при n депутатах равно 2^n.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Если в парламент входит только один депутат, возможны только две (2^1) коалиции — пустая и состоящая из этого депутата.

Пусть в парламенте из n депутатов K коалиций. Если добавить еще одного депутата, коалиций станет $2K$ — к тем K коалициям, которые уже были, добавится K коалиций, в которые входит новый депутат.

Таким образом, с увеличением численности парламента на одного человека число коалиций удваивается. Поэтому в парламенте из двух депутатов — $2 \cdot 2 = 4 = 2^2$ коалиции, ..., в парламенте из n депутатов — 2^n коалиций. ■

Пусть множество S состоит из чисел от 1 до n, т.е. $S = \{1, \ldots, n\}$. Определим множество упорядоченных наборов

$$\Omega = \{\omega = (s_1, \ldots, s_k) | s_1, \ldots, s_k \in S,\ s_i \neq s_j \text{ при } i \neq j\}$$

различных между собой чисел. Множество Ω называется *пространством размещений* из n элементов по k.

Посчитаем число элементов во множестве Ω, которое обозначается через A_n^k (иногда также $(n)_k$).

Теорема 2. *Для любых n и $k \leq n$ число размещений из n по k равно*

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Доказательство. Проводится методом математической индукции. Зафиксируем n и проведем индукцию по k.

1. При $k = 1$ очевидно, что $A_n^k = |\Omega| = n$ по определению множества Ω.

2. Пусть $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ при всех k, где $k \le t < n-1$. Докажем, что формула верна при $k = t+1$. Набор $(s_1, \ldots, s_{t+1})$ может быть получен из набора $(s_1, \ldots, s_t)$ приписыванием справа любого числа из оставшихся в множестве $S \backslash \{s_1, \ldots, s_t\}$. Поскольку $|S \backslash \{s_1, \ldots, s_t\}| = n - t$, то $A_n^{t+1} = (n-t)A_n^t$. Но по предположению индукции $A_n^t = n(n-1)\ \ldots (n-t+1)$, и тогда

$$A_n^{t+1} = n(n-1)\ldots(n-t+1)(n-t) = n(n-1)\ldots(n-(t+1)+1).$$

Отсюда следует, что формула для числа размещений верна и при $k = t+1$, т.е. для всех $k \le n$. ■

Заметим, что $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$. По соглашению принимается $0! = 1$. Отсюда и из утверждения теоремы непосредственно выводится, что

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В модели размещений рассматриваются упорядоченные подмножества элементов исходного множества S. Применительно к задаче о коалициях упорядоченные подмножества такого вида можно интерпретировать, например, как комитеты, члены которых упорядочены по должностям.

Пример. Пусть S (парламент) состоит из 10 элементов, т.е. $S = \{1, \ldots, 10\}$. Рассмотрим комитеты, состоящие из четырех членов. В этой модели комитет $(1, 2, 3, 9)$ и комитет $(3, 2, 9, 1)$ различны.

Всего же число таких комитетов, состоящих из четырех членов, будет равно

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

Перейдем теперь к решению задачи о коалициях, т.е. неупорядоченных наборах элементов множества S. Иначе говоря, рассмотрим множество

$$\Delta = \{\delta = (s_1, \ldots, s_k) | 1 \le s_1, \ldots, s_n \le n,\ s_i \ne s_j \text{ при } i \ne j\}$$

неупорядоченных k-элементных наборов из множества S.

Это множество называется *пространством сочетаний* из n по k; число элементов в нем обозначается $|\Delta| = C_n^k$ (или $\binom{n}{k}$).

Теорема 3. *Число различных упорядочений множества из k элементов равно $k!$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по k.

При $k = 1$ имеется ровно одно упорядочение множества из одного элемента.

Предположим теперь, что число упорядочений множества из $k-1$ элемента равно $(k-1)!$. Упорядочение множества из k элементов задается упорядочиванием первых $k-1$ элементов и местом, в которое в это упорядочение попадает k-й элемент. А мест ровно k: перед всеми элементами, между первым и вторым, между вторым и третьим, ..., после последнего элемента. Всего имеем $(k-1)! \cdot k = k!$ упорядочений. ■

Теперь рассмотрим число упорядоченных наборов из n по k. Оно равно, как было показано выше, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Поскольку число различных упорядочений из k элементов равно $k!$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 4.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Рассмотрим теперь примеры коалиций.

Пример. Число коалиций из трех депутатов в парламенте, состоящем из 10 депутатов, равно

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Пример. Госдума РФ состоит из 450 депутатов. Федеральные законы принимаются простым большинством голосов, т.е. 226 голосами, а конституционные законы — 301 голосом «за». Оценим число коалиций для простого большинства голосов:

$$C_{450}^{226} = \frac{450!}{226! \cdot 224!} =$$

$$= 108808959629621996809673031448112872957657446628532417$$
$$137640956008335073874206499165662351628657901109687706 5$$
$$810239110367842671924270000 \approx 1,09 \cdot 10^{134}.$$

Число коалиций для квалифицированного большинства в 301 голос равно

$$C_{450}^{301} = \frac{450!}{301! \cdot 149!} \approx 4,94 \cdot 10^{122}.$$

Всего же число выигрывающих коалиций в этих случаях соответственно равно

$$C_{450}^{226} + C_{450}^{227} + \ldots + C_{450}^{450} \approx 1,40 \cdot 10^{135}$$

и

$$C_{450}^{301} + C_{450}^{302} + \ldots + C_{450}^{450} \approx 9,66 \cdot 10^{122}.$$

6.3

Индекс влияния Банцафа

Рассмотрим парламент, в котором представлено n партий. Партия в выигрывающей коалиции называется *ключевой,* если при ее выходе коалиция перестает быть выигрывающей.

Индекс Банцафа является показателем влияния партии в данном парламенте, т.е. оценивает ее возможность влиять на исход голосования. Он основан на вычислении доли коалиций, в которых партия является ключевой: если b_i — число коалиций, в которых партия i является ключевой, то индекс Банцафа $\beta(i)$ для партии i вычисляется следующим образом [40], [45]:

$$\beta(i) = \frac{b_i}{\sum\limits_j b_j}.$$

Пример. Рассмотрим парламент на 100 мест, в котором представлены три партии A, B, C с голосами 50, 49 и 1 соответственно. Пусть правилом принятия решений является правило простого большинства. Выигрывающими являются следующие коалиции: $A + B$, $A + C$, $A + B + C$. Тогда индекс Банцафа для партии A, которая является ключевой во всех трех коалициях, вычисляется следующим образом:

$$\beta(A) = \frac{3}{3+1+1} = \frac{3}{5}.$$

Аналогично для партий B и C, каждая из которых является ключевой лишь в одной коалиции ($A + B$ и $A + C$ соответственно), получаем:

$$\beta(B) = \beta(C) = \frac{1}{3+1+1} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, влияние партии B меньше влияния партии A в три раза, несмотря на то, что разница голосов этих партий составляет 1%, а партия C, обладая всего одним голосом, имеет такое же влияние, как партия B с 49 голосами.

Этот пример еще раз доказывает, что влияние партий не обязательно пропорционально числу их голосов.

Пример. Пусть, как и в предыдущем примере, в парламенте три партии A, B и C со следующим распределением голосов: A — 50 голосов, B — 49 голосов и C — 1 голос. Предположим, что по каким-либо причинам партии A и B в коалицию не вступают. Выигрывающими коалициями будут теперь только $\{A, C\}$ и $\{A, B, C\}$. Здесь предполагается, что при наличии третьей партии A и B могут вступать в такую коалицию.

Вычислим индекс Банцафа:

$$\beta(A) = \tfrac{2}{2+1} = \tfrac{2}{3},$$
$$\beta(B) = 0,$$
$$\beta(C) = \tfrac{1}{2+1} = \tfrac{1}{3}.$$

Теперь значение индекса Банцафа для партии B оказалось нулевым, а для партии C увеличилось почти в два раза.

Естественно, возникает вопрос о том, как оценить возможность вступления партий в коалицию и, более широко, как оценить распределение влияния в парламенте, когда не все коалиции возможны. Однако этот вопрос выходит за рамки нашего курса. Подробное исследование на эту тему можно найти в [4].

Оценим влиятельность участников в Совете Безопасности ООН [23] (далее — СБ). СБ является главным исполнительным органом ООН. Он состоит из 15 членов: пяти постоянных (Великобритания, Китай, Россия, США, Франция) и 10 переизбираемых ежегодно. Решение в СБ принимается большинством в девять голосов, причем пять из них должны принадлежать постоянным членам. Иначе говоря, если хотя бы один из пяти постоянных членов голосует «против», то решение не принимается, т.е. постоянные члены СБ обладают правом вето.

Можно непосредственно проверить, что процедура голосования в СБ эквивалентна следующей процедуре голосования с квотой:

$$(39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

т.е. $q = 39$, каждый постоянный член имеет по семь голосов, а каждый временный член СБ — по одному голосу.

Выясним, как распределено влияние постоянных и временных членов СБ.

Будем для краткости обозначать постоянных членов СБ буквой P, а временных — буквой T (от англ. *permanent* — «постоянный» и *temporary* — «временный»). Участник T будет ключевым, только если в коалиции

$$5 \cdot P + 4 \cdot T = 39 \text{ голосов},$$

отсюда $b(T) = C_9^3 = 84$, где $b(T)$ — число коалиций, в которых T — ключевой участник.

Участник P будет ключевым в коалициях с числом голосов:

$$\begin{gathered} 5 \cdot P + 4 \cdot T = 39, \\ 5 \cdot P + 5 \cdot T = 40, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ 5 \cdot P + 10 \cdot T = 45. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$b(P) = C_{10}^4 + C_{10}^5 + \ldots + C_{10}^{10} = 848.$$

Число всех коалиций, в которых хотя бы один из участников ключевой, равно

$$\sum_i b(i) = 10b(T) + 5b(P) = 5080.$$

Теперь можно посчитать значение индекса Банцафа для участников типа P и T.

$$\beta(P) = \frac{b(P)}{\sum\limits_i b(i)} = \frac{848}{5080} = 0,1669,$$
$$\beta(T) = \frac{b(T)}{\sum\limits_i b(i)} = \frac{84}{5080} = 0,0165.$$

Теперь оценим суммарное влияние участников типа P, т.е. суммарное влияние постоянных членов СБ:

$$\beta(\text{всех постоянных членов СБ}) = 5 \cdot 0,1669 = 0,8345.$$

Влияние всех временных членов СБ равно соответственно:

$$\beta(\text{всех временных членов СБ}) = 10 \cdot 0,0165 = 0,1650.$$

Отсюда следует, что пять постоянных членов СБ имеют $83,5\%$ влияния в СБ; в то же время 10 временных членов имеют в совокупности $16,5\%$ влияния.

6.4

Анализ влияния групп и фракций в Государственной Думе Российской Федерации

В этом параграфе с помощью индекса Банцафа будет изучаться распределение влияния в Государственной Думе Российской Федерации 3-го созыва (1999—2003 гг.).

Госдума РФ состоит из 450 депутатов и формируется наполовину по одномандатным округам и наполовину — по партийным спискам. Право на образование фракции получают избирательные объединения, прошедшие по общефедеральному избирательному округу. Кроме того, в регламенте предусмотрена возможность создания депутатских групп, в состав которых (на тот момент) должно было входить не менее 35 депутатов. Правила принятия решений — простое большинство (т.е. 226 голосов) для федеральных законов и 2/3 плюс один голос (т.е. 301) для конституционных. Для того, чтобы проследить динамику изменения влияния каждой фракции в течение одного парламентского срока структура депутатских групп анализировалась на 16-е число каждого месяца по следующему принципу:

— за «основу» выбиралось текущее на заданный момент времени распределение депутатов по фракциям и депутатским группам;

— для классификации депутатов, не входящих в депутатские объединения, учитывались два основных фактора: во-первых, пребывание депутата во фракциях в будущем и, частично, в прошлом по отношению к заданному моменту времени, и, во-вторых, индивидуальные особенности депутата, специфика его политической позиции.

На основании этого распределения рассчитывался[17] индекс Банцафа при принятии федеральных законов.

В качестве источника информации о Госдуме РФ использовалась база данных проекта «ИНДЕМ-Статистика» (http://www.indem.ru/indemstat/index.htm) — постоянного проекта фонда ИНДЕМ с 1990 г. [24], основным содержанием которого является изучение политических позиций депутатов российских органов представительной власти на основе результатов их поименных голосований.

При предположении о допустимости и равновероятности всех коалиций изменения в оценке распределения влияния наблюдаются только в случае переходов депутатов из одной группы в другую, а существенные изменения ожидаются только в моменты «массовых» переходов, которые чаще всего бывают связаны с удачными или неудачными попытками создания новых фракций. Поэтому осуществлялась проверка согласованности изменений в распределении влияния и реальных событий — переходов депутатов по фракциям.

Учитывая важность содержательной интерпретации перехода, а также адекватной интерпретации позиции депутатов, находящихся вне фракций, может быть реализовано несколько подходов, позволяющих классифицировать таких депутатов. В данном параграфе

---

[17] Программный комплекс разработан в Центре исследования политических процессов Института проблем управления РАН (http://www.ipu.ru/rccp/).

индексы влияния рассчитываются по следующей схеме: к фракции прибавляются независимые депутаты, которые впоследствии перешли в эту партию, исходя из предположения, что данные депутаты, будучи независимыми, придерживаются политического курса данной партии; и далее индексы Банцафа считаются для объединенных групп — партия плюс независимые. Результаты расчетов показали, что отличие влияния объединенных групп от влияния самих партий составляет не более 0,5%, в исключительных случаях — не более 1%.

В III Думе были представлены следующие девять партий и депутатских групп:

— «Агропромышленная группа» (АПГ);

— «Единство»;

— «Коммунистическая партия Российской Федерации» (КПРФ);

— «Либерально-демократическая партия России» (ЛДПР);

— «Народный депутат» (НарДеп);

— «Отечество — вся Россия» (ОВР);

— «Регионы России» (РегРос);

— «Союз правых сил» (СПС);

— «Яблоко».

Для классификации депутатов Госдумы 3-го созыва, не входящих в депутатские объединения на заданный момент, были выделены следующие группы:

— независимые (ЛР) — группа депутатов «Либеральной России», вышедших из фракции СПС (С. Юшенков, В. Головлев, В. Похмелкин, Ю. Рыбаков);

— независимые (фракция или группа) — депутаты, не входящие в депутатские объединения на заданный момент времени и впоследствии присоединившиеся к данной фракции или группе. Рассматривались фракции КПРФ, «Народный депутат», СПС, «Регионы России» и «Единая Россия» — «условное» объединение «Единства» и ОВР. Однако, учитывая, что численность таких «групп» невелика, рассматривается вариант, в котором депутаты из этих мелких групп добавлены в соответствующую фракцию или группу;

— независимые — депутаты, не состоящие в депутатских объединениях на заданный момент времени и до рассматриваемого момента не присоединившиеся ни к одной из фракций. Объединяет эту небольшую группу депутатов (В. Рыжков, О. Дмитриева, Н. Гончар, В. Черепков, И. Грачев) публичная известность, реальная (насколько это возможно) независимость, в основе которой — личный политический капитал.

Однако в целом количество депутатов, не входящих в депутатские объединения, и соответственно их влияние на принятие решений в III Думе (в отличие от первых двух, особенно от первой) невелико и в большей степени связано с личным авторитетом депутатов. Показательно, что серьезных событий, связанных с существенным перераспределением влияния (в рамках выбранной модели, основанной на распределении депутатов по группам), в III Думе не происходило, и можно отметить лишь «локальные» события: довыборы в апреле 2000 г. и приход новых депутатов, переход из «Единства» в СПС депутатов, представлявших движение «Поколение свободы», и, наконец, выход из СПС депутатов из «Либеральной России».

Изменение индекса Банцафа для каждой группы показано на рис. 6.1 (с. 166).

Как видно из рис. 6.1, в III Думе представлены две относительно сильные фракции — КПРФ и «Единство», причем если в начале работы Думы КПРФ имела самый высокий индекс Банцафа, то далее она постепенно «сдавала» позиции, и влияние «Единства» и КПРФ на конец рассматриваемого периода было примерно одинаковым ($\beta = 0,2$). Третью и четвертую строчку в рейтинге влияния занимают группы «Народный депутат» и ОВР, которые ближе к концу рассматриваемого периода имели равный индекс Банцафа ($\beta = 0,118$), хотя в 2000 г. индекс «НарДепа» был выше почти на 4%. Далее по степени влияния идут «РегРос», АПГ, СПС, «Яблоко» и ЛДПР соответственно.

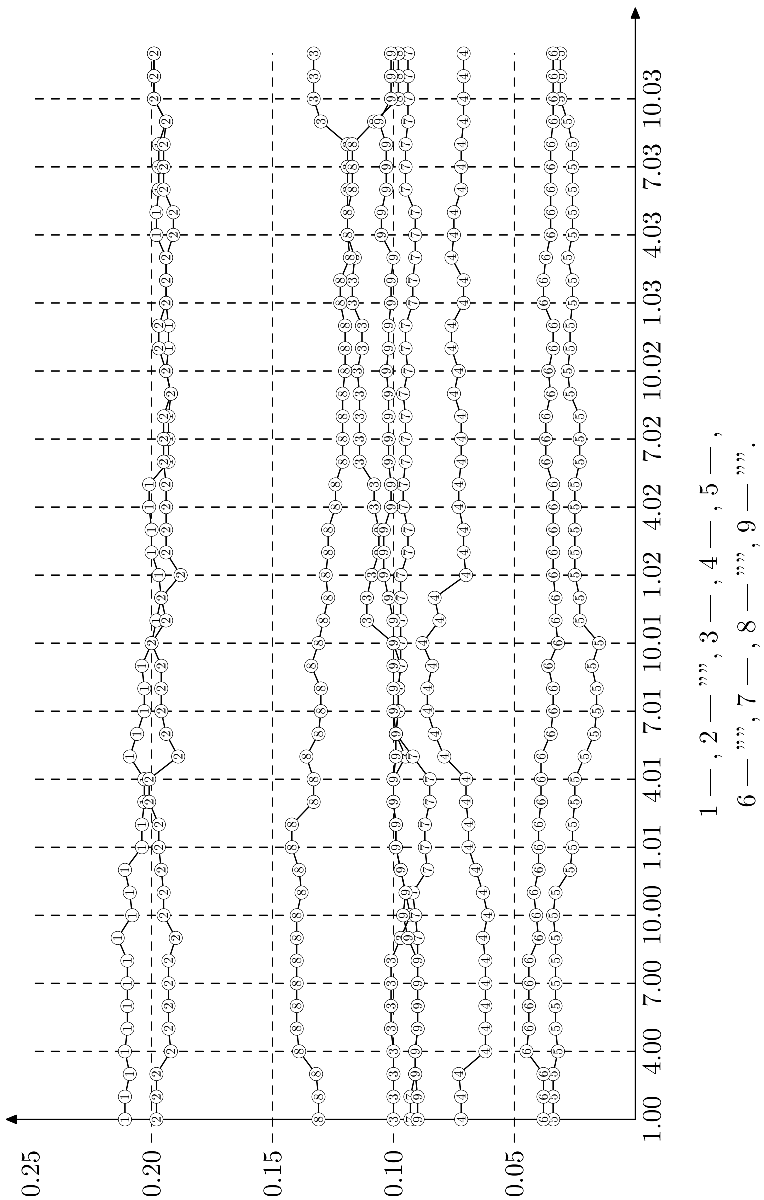

(3-)
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
1.00 4.00 7.00 10.00 1.01 4.01 7.01 10.01 1.02 4.02 7.02 10.02 1.03 4.03 7.03 10.03
1 — , 2 — "", 3 — , 4 — , 5 — ,
6 — "", 7 — , 8 — "", 9 — "".

Рис. 6.1

6.5

Институциональный баланс власти в Совете министров расширенного Евросоюза

Институциональным балансом власти называется распределение влияния участников в выборном органе. В качестве выборного органа далее рассматривается Совет министров Европейского Союза (European Council, далее — СМ) и анализируется распределение власти, с учетом вступления в Евросоюз 12 стран-кандидатов, как результат договоренностей принятых на встрече стран — участниц Евросоюза в Ницце в декабре 2000 г. Подписанный там договор о расширении Евросоюза устанавливает общие положения для перехода к новым правилам принятия решений[18].

Для оценки уровня власти стран — членов СМ для различных вариантов правил принятия решения используется индекс Банцафа. Считается, что в СМ страны-участницы могут формировать любые коалиции без ограничений.

В табл. 6.1 (с. 168) приведено распределение голосов, которыми обладали в СМ страны — члены Евросоюза. В качестве правила принятия решения использовалось правило простого большинства — 44 из 87 голосов [33], [51].

Непосредственно видно, что, например, коалиция, включающая Германию, Италию, Великобританию, Францию и Испанию, является выигрывающей, т.к. эти страны имеют 48 из 87 голосов при необходимых 44 голосах; коалиция, включающая Швецию, Данию, Бельгию, Ирландию и Люксембург, является проигрывающей, т.к. имеет 17 голосов при необходимых 44 голосах.

Институциональный баланс власти в СМ до вступления в 2004 г. в Евросоюз новых членов представлен в табл. 6.2 (с. 168).

Группа крупных стран Европейского Союза пользовалась наибольшей властью в СМ. В соответствии с индексом Банцафа четыре

[18] Очень подробный анализ этих правил приведен в [29].

Таблица 6.1. Распределение голосов в Совете министров — ситуация до вступления в мае 2004 г. новых членов

Страна	*Голоса в Совете министров каждой страны*
Германия, Италия, Великобритания, Франция	10
Испания	8
Нидерланды, Португалия, Греция, Бельгия	5
Швеция, Австрия	4
Дания, Финляндия, Ирландия	3
Люксембург	2
Итого	87

Таблица 6.2. Распределение власти в Совете министров — ситуация до вступления в мае 2004 г. новых членов

Страна	*Индекс Банцафа*
Германия, Италия, Великобритания, Франция	0,112
Испания	0,092
Нидерланды, Португалия, Греция, Бельгия	0,059
Швеция, Австрия	0,049
Дания, Финляндия, Ирландия	0,036
Люксембург	0,023

крупнейшие страны имели вместе 45% влияния в СМ, хотя в этих странах проживало 68% населения ЕС. Далее по убыванию влияния были расположены: Испания, затем Нидерланды, Португалия, Греция и Бельгия, далее Швеция и Австрия, после которых Дания, Финляндия и Ирландия. Наименьшим влиянием в СМ пользовался Люксембург. Далее индексы власти стран в СМ расширенного Евросоюза будут сравниваться с имевшимся до 1 мая 2004 г. распределением влияния.

Договор в Ницце устанавливает правила принятия решений в институтах власти расширенного Европейского Союза. Декларация о расширении Евросоюза (Декларация 20) определяет число голосов в СМ для каждой из стран — участниц расширенного Евросоюза. В процессе прохождения законопроекта через СМ представитель каждой страны должен подать все голоса, приписанные данной стране, «за» или «против» такого законопроекта. Распределение голосов стран-участниц в СМ приведено в табл. 6.3.

Таблица 6.3. Распределение голосов в Совете министров расширенного Евросоюза (согласно Декларации 20 договора в Ницце)

Страна	*Голоса в Совете министров каждой страны*
Германия, Великобритания, Франция, Италия	29
Испания, Польша	27
Румыния	14
Нидерланды	13
Греция, Чехия, Бельгия, Венгрия, Португалия	12
Швеция, Болгария, Австрия	10
Словакия, Дания, Финляндия, Ирландия, Литва	7
Латвия, Словения, Эстония, Кипр, Люксембург	4
Мальта	3
Итого	345

Декларация 20 устанавливает также требования к квалифицированному большинству при голосовании за законопроекты, внесенные на рассмотрение ЕС.

Для того чтобы законопроект был принят, необходима квота в 258 голосов и квалифицированное большинство членов СМ (14 из 27). Кроме того, любая страна — член СМ может затребовать подтверждения того, что население стран, составляющих квалифицированное большинство, представляет по крайней мере 62% общего населения Евросоюза.

Так как в СМ применяется трехмажоритарное правило принятия решений, т.е. требуется одновременно 258 голосов «за» из 345, 14 голосов «за» из 27 (по странам) и поддержка стран, обладающих в сумме 62% населения ЕС, для расчета индексов власти используется скорректированное определение выигрывающей коалиции.

Таблица 6.4. Распределение власти стран — членов Совета министров (индекс Банцафа)

Член Совета министров	*После*	*До*	%
Германия, Великобритания, Франция, Италия	0,0771	0,112	68,88
Испания	0,0737	0,092	80,14
Польша	0,0737		
Румыния	0,0428		
Нидерланды	0,0399	0,059	67,63
Греция, Бельгия, Португалия	0,0371	0,059	62,87
Чехия, Венгрия	0,0371		
Австрия, Швеция	0,0311	0,049	63,52
Болгария	0,0311		
Дания, Ирландия, Финляндия	0,0220	0,036	61,07
Литва, Словакия	0,0220		
Люксембург	0,0126	0,023	54,79
Кипр, Латвия, Словения, Эстония	0,0126		
Мальта	0,0095		

Пусть S — некоторая коалиция стран — участниц СМ. Переопределим понятие выигрывающей коалиции. Будем говорить, что *коалиция S выигрывающая при использовании трехмажоритарного правила*, если выполнены все требования: квота, большинство для стран-членов и преодоление порога для населения. Говорят, что коалиция S проигрывающая, если по крайней мере одно из необходимых требований не выполнено. Формально пусть каждой стране-участнице i присвоено два числа: k_i — число голосов и p_i — население (в процентах от всего населения Евросоюза). Говорят, что коалиция S выигрывающая при использовании трехмажоритарного правила, если выполнены все три следующих требования:

1) $\sum\limits_{i\in S} k_i \geq$ квоте,

2) $|S| \geq$ большинства для членов,

3) $\sum\limits_{i\in S} p_i \geq$ порога для населения $= 62\%$.

Пример. Рассмотрим три страны A, B и C с голосами 40, 40 и 20 соответственно. Пусть правило принятия решения — простое большинство, т.е. 51 голос. Пусть население стран составляет 20, 20 и 60% соответственно и порог для населения составляет 51%. Выигрывающими коалициями при применении трехмажоритарного правила являются только $A + C$, $B + C$, $A + B + C$. Коалиция $A + B$ не удовлетворяет требованию порога для населения (51%), т.е. не является выигрывающей при использовании трехмажоритарного правила. В этом случае значения индекса Банцафа равны соответственно $\beta(A) = \beta(B) = 0,2$, $\beta(C) = 0,6$.

В табл. 6.4 (с. 170) приведены индексы Банцафа для распределения власти до и после момента вступления в 2004 г. новых членов Евросоюза, а также процент проигрыша во влиянии при сравнении индексов.

6.6

Другие индексы влияния

6.6.1

Индекс Шепли — Шубика

Этот индекс имеет очень похожую логику с индексом Банцафа. Он определяет влияние партии путем вычисления отношения числа коалиций, в которых данная партия является ключевой, к числу всех выигрывающих коалиций. Однако, в отличие от индекса Банцафа, индекс Шепли — Шубика приписывает коалициям разный вес в зависимости от их размера.

Индекс Шепли — Шубика вычисляется следующим образом [23], [33], [51]:

$$\sigma(i) = \sum_{S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \left(\nu(S) - \nu(S \setminus \{i\})\right),$$

где n — это число партий, s — размер коалиции S (т.е. число партий в S), $\nu(S)$ — значение характеристической функции для S.

Пример. Рассмотрим три партии A, B и C с голосами 50, 49 и 1 соответственно. Предположим, что правило принятия решений — простое большинство (т.е. 51 голос). Выигрывающими являются коалиции: $A+B$, $A+C$, $A+B+C$. Тогда индекс Шепли — Шубика для партии A рассчитывается следующим образом:

$$\sigma(A) = \sum_S \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}\left(\nu(S) - \nu(S \setminus \{A\})\right) =$$
$$= 2 \cdot \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!} + \frac{(3-3)!(3-1)!}{3!} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично для партий B и C получаем

$$\sigma(B) = \sigma(C) = \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Индексы Шепли — Шубика и Банцафа дают хорошо согласованные результаты.

6.6.2

Индекс Джонсона

Основная идея этого индекса ([45]) состоит в том, что если партия p в коалиции C является ключевой, причем единственной ключевой партией в данной коалиции, то она имеет больший показатель влияния, чем если бы все партии в C были ключевыми. В этом отличие индекса Джонсона от индекса Банцафа, который не учитывает общего числа ключевых партий в данной коалиции.

Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — выигрывающие коалиции, в которых партия p_i является ключевой, а $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — число ключевых партий в коалициях $C_1, C_2, \ldots, C_k$ соответственно.

Тогда *общий индекс Джонсона* партии p_i вычисляется следующим образом:

$$TJI(p_i) = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k},$$

а *индекс влияния Джонсона* партии p_i определяется как

$$JI(p_i) = \frac{TJI(p_i)}{TJI(p_1) + \ldots + TJI(p_k)}.$$

При этом полагаем, что если партия p_i не является ключевой ни в одной из коалиций, то $TJI(p_i) = JI(p_i) = 0$.

Пример. Рассмотрим три партии A, B и C с голосами 50, 49 и 1 соответственно. Предположим, что правило принятия решений — простое большинство. Выигрывающими коалициями будут $A+B$, $A+C$, где ключевой является каждая входящая в них партия, и коалиция $A+B+C$, где ключевой является только партия A.

Таким образом, общий индекс Джонсона для партии A будет равен $TJI(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$. Для партий B и C общий индекс равен $TJI(B) = TJI(B) = \frac{1}{2}$.

Тогда индекс Джонсона для этих партий вычисляется следующим образом:

$$JI(A) = \frac{2}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \qquad JI(B) = JI(C) = \frac{\frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

6.6.3

Индекс Дигена — Пакела

Построение этого индекса ([45]) основано на трех предположениях:

1) при вычислении относительной власти партии рассматриваются только минимальные выигрывающие коалиции,

2) все минимально выигрывающие коалиции равновероятны,

3) власть партии, получаемая ею вследствие принадлежности к какой-либо минимально выигрывающей коалиции, точно такая же, как и у любой другой партии, принадлежащей к той же коалиции.

Выигрывающая коалиция называется *минимальной,* если при удалении из нее любого участника она становится проигрывающей.

Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — минимальные выигрывающие коалиции, к которым принадлежит партия p_i, а $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — число партий в коалициях $C_1, C_2, \ldots, C_k$ соответственно.

Тогда *общий индекс Дигена — Пакела* партии p_i вычисляется следующим образом:

$$TDPI(p_i) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_k},$$

а *индекс влияния Дигена — Пакела* партии p_i равен

$$DPI(p_i) = \frac{TDPI(p_i)}{TDPI(p_1) + \ldots + TDPI(p_k)}.$$

При этом, если партия p_i не входит ни в одну из минимальных выигрывающих коалиций, то для нее $TDPI(p_i) = DPI(p_i) = 0$.

В рассмотренном выше примере (три партии A, B, C с голосами 50, 49 и 1 соответственно) минимальными выигрывающими коалициями являются $A + B$ и $A + C$. Следовательно, общий индекс Дигена — Пакела для партий A, B, C имеет вид:

$$TDPI(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad TDPI(B) = TDPI(C) = \frac{1}{2}.$$

Тогда индексы Дигена — Пакела для рассматриваемых партий вычисляются как

$$DPI(A) = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2}, \quad DPI(B) = DPI(C) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{4}.$$

Отметим, что индексы Джонсона и Дигена — Пакела дают довольно противоречивые результаты. Индекс Джонсона завышает влияние наиболее сильных партий за счет того, что приписывает большой вес коалициям с одной ключевой партией. Индекс Дигена — Пакела, наоборот, занижает показатель влияния сильных партий, т.к. берет в расчет только минимальные выигрывающие коалиции, а большие коалиции, ключевую роль в которых играют именно сильные партии, просто не рассматривает. Таким образом, индекс Дигена — Пакела при вычислении степени влияния не учитывает именно те коалиции, которые в индексе Джонсона дают основной вклад в результат.

6.6.4

Индекс Холера — Пакела

Этот индекс ([45]), так же как и индекс Банцафа, основан на вычислении доли коалиций, в которых партия является ключевой, но, подобно индексу Дигена — Пакела, берет в расчет только минимальные выигрывающие коалиции.

Итак, пусть h_i — число минимальных выигрывающих коалиций, к которым принадлежит партия i; тогда *индекс Холера — Пакела* вычисляется следующим образом:

$$HPI(i) = \frac{h_i}{\sum\limits_j h_j}.$$

Для рассмотренного выше примера (три партии A, B и C с голосами 50, 49 и 1 соответственно) индексы Холера — Пакела равны

$$HPI(A) = \frac{2}{2+1+1} = \frac{1}{2}, \qquad HPI(B) = HPI(C) = \frac{1}{2+1+1} = \frac{1}{4}.$$

6.7

Задачи

1. Постройте характеристические функции для следующих голосований с квотой:

а) $(51; 50, 30, 20)$,

б) $(51; 60, 30, 10)$,

в) $(6; 1, 2, 3, 4)$.

2. Найдите выигрывающие коалиции в голосованиях с квотой и подсчитайте для каждого из участников индекс Банцафа.

а) $(51; 35, 35, 30)$,

б) $(20; 10, 10, 1)$,

в) $(51; 49, 47, 4)$,

г) $(3; 1, 1, 1, 2)$,
д) $(20; 10, 10, 10, 1)$,
е) $(51; 26, 26, 26, 22)$,
ж) $(151; 100, 100, 100, 1)$,
з) $(51; 40, 30, 20, 10)$,
и) $(12; 5, 5, 2, 2, 1)$,
к) $(201; 100, 100, 100, 100, 1)$,
л) $(16; 9, 9, 7, 3, 1, 1)$,
м) $(6; 1, 1, 1, 2, 3, 3)$,
н) $(5; 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$,
о) $(6; 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$,
п) $(7; 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

3. Совет директоров банка состоит из пяти человек P, A, B, C, D. Президент банка P имеет два голоса, остальные члены совета директоров — по одному. Решение считается принятым, если за него подано не менее четырех голосов. Известно, что P и вице-президент A находятся в оппозиции друг к другу и никогда не голосуют за одно решение. Найдите индексы Банцафа для каждого члена совета директоров.

4. Совет директоров банка состоит из пяти человек P, A, B, C, D. Президент банка P имеет три голоса, остальные члены совета директоров — по одному. Правило принятия решения — минимум пять голосов «за». Известно, что P и вице-президенты A и B в силу определенных причин никогда не голосуют все вместе за одно решение. Найдите индексы Банцафа для каждого члена совета директоров.

5. В австралийском правительстве при голосовании по некоторым вопросам каждый из шести штатов получает один голос, а федеральное правительство — два голоса. Для принятия решения требуется не менее пяти голосов «за». В случае равенства голосов (четыре — «за», четыре — «против») федеральное правительство принимает решение самостоятельно [23]. Покажите, что это правило принятия решений является голосованием с квотой типа $(5; 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Найдите все выигрывающие коалиции и вычислите индексы Банцафа для всех участников.

6. Является ли следующее правило принятия решений голосованием с квотой? Имеются три участника, и коалиция выигрывает тогда и только тогда, когда:

а) в нее входит участник 1,

б) в нее не входит участник 1.

7. Является ли следующее правило принятия решения голосованием с квотой? Имеются четыре участника, и коалиция выигрывает тогда и только тогда, когда:

а) в нее входят участники 1 и 2,

б) в нее не входят участники 1 и 2 вместе.

8. Является ли правило принятия решений с четырьмя участниками a, b, c и d голосованием с квотой, если выигрывающими являются все коалиции из трех и четырех участников и

а) $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$,

б) $\{a, b\}$ и $\{b, c\}$?

9. Предположим, что в Совет Безопасности ООН приняли нового постоянного члена — Японию. Тогда постоянных членов становится шесть, а временных по-прежнему остается 10. Правило принятия решений — все постоянные члены голосуют «за» и нужны голоса «за» еще четырех временных членов. Запишите эту игру как голосование с квотой. Определите индексы Банцафа для каждого участника.

10. Сейчас обсуждается вопрос о включении Германии, Индии и Японии в число постоянных членов Совета Безопасности ООН и увеличении числа временных членов до 13. Проанализируйте эту ситуацию, запишите ее в виде процедуры голосования с квотой и рассчитайте индекс Банцафа для каждого участника, для всех постоянных и всех временных участников.

11. Вычислите для каждого участника индекс влияния Шепли — Шубика, Джонсона, Дигена — Пакела, Холера — Пакела в следующих голосованиях с квотой:

а) (60; 39, 20, 41),

б) (40; 45, 20, 10),

в) (35; 30, 20, 15, 10),

г) (3; 2, 1, 1, 1),

д) (59; 31, 31, 21, 28, 2, 2) (Совет инспекторов в округе Нассау штата Нью-Йорк, США, 1964 г.) [23],

е) (39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) (Совет Безопасности ООН).

7
глава

ЗНАКОВЫЕ ГРАФЫ

7.1

Введение

Задачи, приводящие к знаковым графам, возникли впервые в социологии при изучении проблемы сбалансированности малых групп, т.е. того, насколько группа, состоящая из нескольких участников, может эффективно работать [50]. Изучение знаковых графов восходит к [49] (см. также [23]).

Предположим, что следует составить группу (бригаду) из трех человек и необходимо спрогнозировать, насколько бесконфликтно будет работать эта группа. Можно предполагать, что бесконфликтная работа будет обеспечена, если отношения между членами группы хорошие. Они могут быть описаны в терминах «симпатия — антипатия», «дружба — неприязнь» и т.п., т.е. отношения между членами группы описываются бинарными отношениями. Если же говорить о работе группы без конфликтов, необходимо найти уже какую-то интегральную характеристику, касающуюся группы в целом. Такой характеристикой является мера сбалансированности соответствующего знакового графа.

В параграфе 7.2 для описания взаимоотношений в малых группах вводится понятие знакового графа, определяется понятие сбалансированности малой группы и соответствующего ей знакового графа, приводится критерий сбалансированности полного графа, который является более слабой версией соответствующей теоремы Картрайта — Харари, а также вводится одна из возможных мер относительной сбалансированности знакового графа.

К исследованию сбалансированности сводятся также некоторые задачи политического анализа, исследования сложных систем разного рода и даже анализ литературных произведений. Например, понятие баланса применялось к анализу союзных отношений среди стран, принимавших участие в решении проблемы Ближнего Востока (включая США, СССР и т.д.) [23].

В качестве примера применения меры сбалансированности знаковых графов в параграфе 7.3 анализируется сбалансированность Государственной Думы Российской Федерации 3-го созыва [20].

При анализе литературных произведений предполагается, что «напряженность», или «кульминация», создается авторами путем построения несбалансированных ситуаций, которые в конце произведения становятся более сбалансированными, и тем самым разрешается «конфликт» (см., например, [23]). Такой анализ произведен в параграфе 7.4 на примере пьесы У. Шекспира «Макбет».

В параграфе 7.5 представлены задачи к данной главе.

7.2

Сбалансированность малых групп

Введем в рассмотрение граф, вершины которого соответствуют членам группы. Для краткости они будут называться участниками, или индивидуумами. Дуги между вершинами a и b отмечаются знаком «$+$», если участник a симпатизирует участнику b, и знаком «$-$», если между ними существуют неприязненные отношения. Если же a и b равнодушны друг к другу, дуга между соответствующими вершинами отсутствует. Такой граф называется *знаковым*.

Пример знакового графа приведен на рис. 7.1 (с. 180).

Здесь все участники симпатизируют друг другу.

Однако можно представить себе ситуацию, когда a симпатизирует b, но b не считает свои отношения с a хорошими. Эту ситуацию можно было бы описать графом, в котором имеются две ориентированные дуги между a и b: со знаком «$+$» от a к b и со знаком «$-$» от b к a (рис. 7.2 на с. 180). Однако далее такие ситуации не

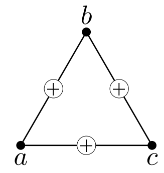


Рис. 7.1

рассматриваются, т.е. предполагается, что отношение «симпатия — антипатия» симметрично.

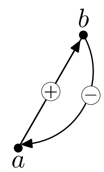
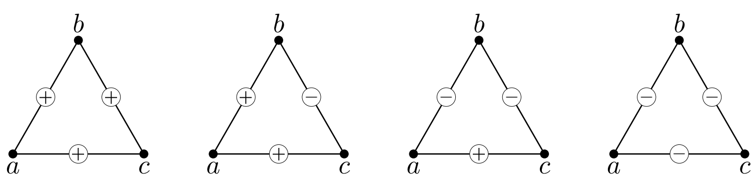


Рис. 7.2

Рассмотрим все возможные типы ситуаций, которые характеризуют отношения между членами группы из трех человек. Они показаны на рис. 7.3.



))))

Рис. 7.3

Изучая эти ситуации, австрийский психолог Ф. Хайдер [50] заметил, что группы 7.3а и 7.3в были сбалансированы, а группы 7.3б и 7.3г — нет.

Объяснение этому было дано следующим образом: в группе 7.3а все участники симпатизируют друг другу, поэтому все охотно работают вместе.

В группе 7.3в участники a и c готовы работать друг с другом, а с участником b никто работать не хочет. Поэтому в этой группе a и c могут работать вместе, а b — в одиночку.

В группе 7.3б ситуация иная: a готов работать с обоими участниками — b и c, однако b и c работать вместе не хотят. Поэтому в группе возникает напряжение.

Наконец, группа 7.3г полностью несбалансирована, никто друг с другом работать не хочет.

Как можно распространить понятие сбалансированности на группы, содержащие более трех участников?

Обобщим понятие сбалансированности малой группы, описываемое графами 7.3а и 7.3в. Будем говорить, что *группа N,* состоящая из n участников, *сбалансирована,* если ее можно разделить на две подгруппы N_1 и N_2 такие, что внутри любой подгруппы все участники симпатизируют или равнодушны друг к другу, а любые два участника из разных подгрупп находятся в отношении антипатии или равнодушия друг к другу.

Отсюда следует, что в соответствующем знаковом графе вершины можно разбить на два подмножества таким образом, что любая дуга, соединяющая вершины из одного множества, имеет знак «+», а дуги, соединяющие вершины из разных подмножеств, — знак «−».

Подмножество N_2 может оказаться пустым, как, например, на рис. 7.3а.

На рис. 7.4а и 7.4б изображены два графа, первый из которых сбалансирован, а второй — нет.

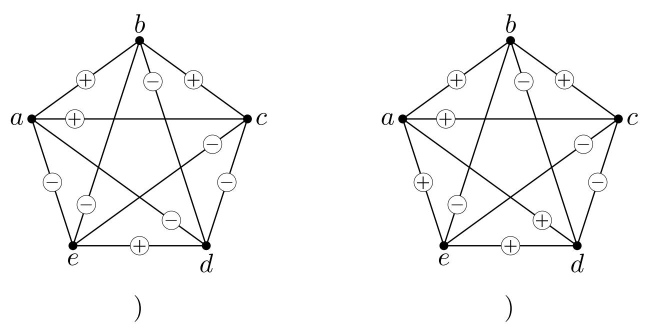


Рис. 7.4

Действительно, вершины графа на рис. 7.4а могут быть поделены на две подгруппы: $N_1 = \{a, b, c\}$ и $N_2 = \{d, e\}$. Участники в группе N_1 симпатизируют друг другу, так же как и участники в группе N_2, а любые два участника из разных групп друг другу не симпатизируют.

Такого разбиения вершин в графе на рис. 7.4б сделать, очевидно, нельзя, т.е. граф не сбалансирован.

Здесь возникает прямая аналогия с двухпартийным парламентом. Парламент можно назвать *сбалансированным,* если он состоит из двух партий (рис. 7.5). Одна партия при этом контролирует большинство (при нечетном числе парламентариев), а другая находится в оппозиции. Тогда, если считать, что дисциплина голосования в партиях высока, первой партии нет необходимости вступать в коалицию, чтобы провести необходимое решение.

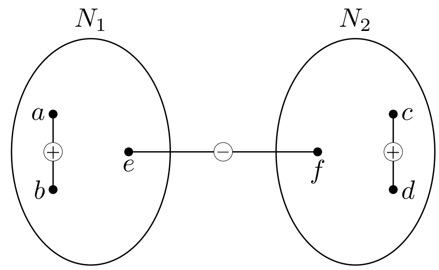


Рис. 7.5

Теперь возникает следующая проблема. Как определить, сбалансирован граф или нет? Ведь невозможно в общем случае проверить всевозможные разбиения на два подмножества множества вершин соответствующего графа. Для нахождения конструктивного решения проблемы определения сбалансированности знакового графа введем понятие *знака цикла* как знака произведения входящих в этот цикл дуг. Естественно, дуга, имеющая знак «$+$» в этом произведении, рассматривается как дуга с «весом», равным $+1$. Соответственно, если знак дуги отрицателен, эта дуга в произведении учитывается в виде сомножителя, равного -1.

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Полный граф является сбалансированным, если и только если любой цикл этого графа положителен.*

Доказательство. Пусть знаковый граф G сбалансирован, т.е. множество его вершин можно разбить на два подмножества N_1

и N_2 так, что вершины внутри каждого подграфа связаны между собой дугами со знаками «$+$», а любые две вершины из разных подмножеств связаны дугой со знаком «$-$».

Рассмотрим произвольный цикл и предположим, что он отрицательный. Это значит, что в нем существует нечетное число дуг со знаком «$-$». Поскольку граф G сбалансирован, этот цикл содержит вершины не только из одного подмножества. Зафиксируем любую вершину в этом цикле. Так как цикл содержит вершины из двух подмножеств N_1 и N_2, то обязательно этот цикл содержит дугу из N_1 в N_2 и дугу из N_2 в N_1, или, более общо, четное число дуг из N_1 в N_2 и из N_2 в N_1 (рис. 7.6). Тогда хотя бы одна отрицательная дуга должна соединить вершины либо в N_1, либо в N_2. А это невозможно, т.к. граф G по предположению сбалансирован.

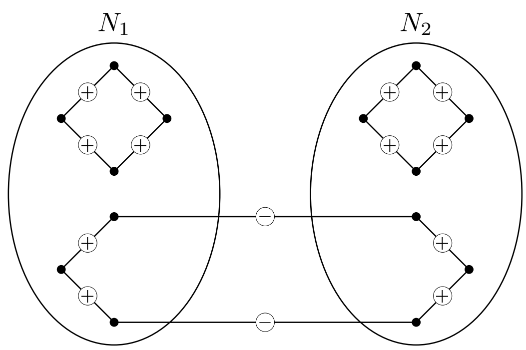


Рис. 7.6

Обратно, пусть любой цикл в G положителен. Покажем, что граф сбалансирован. Рассмотрим какую-либо вершину $u \in A$ и концы всех положительных дуг, исходящих из u. Объединим эти вершины во множество N^+, множество остальных вершины обозначим через N^-. Таким образом, $N^- = A \backslash N^+$.

Пусть теперь x и y — произвольные вершины. Возможны три случая:

1) $x, y \in N^+$. Цикл, включающий дуги ux, xy и yu, положителен, как и любой цикл данного графа. Дуги ux и yu также положительны, поэтому и дуга xy будет положительна;

2) $x, y \in N^-$. Цикл, включающий дуги ux, xy и yu, по условию положителен. Дуги ux и yu отрицательны, поэтому дуга xy будет положительна;

3) x и y лежат в разных множествах. Не ограничивая общности, пусть $x \in N^+$, $y \in N^-$. Цикл, включающий дуги ux, xy и yu, положителен, как и любой цикл данного графа. Дуга ux положительна, а yu отрицательна, поэтому дуга xy будет отрицательна.

Итак, доказано, что если две произвольные вершины лежат в одном из множеств, то они соединены положительной дугой, а если в разных, то отрицательной, т.е. требуемое разбиение A на два множества построено, и граф сбалансирован. ■

Замечание. Теорема 1 есть более слабая версия теоремы Картрайта — Харари, в которой полнота графа G не предполагается [49], т.е. полученный результат верен и для неполных графов. Мы воспользуемся этим в задачах к данной главе.

Пример. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 7.7.

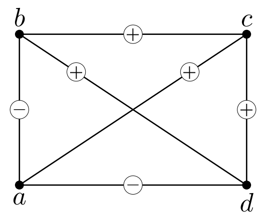


Рис. 7.7

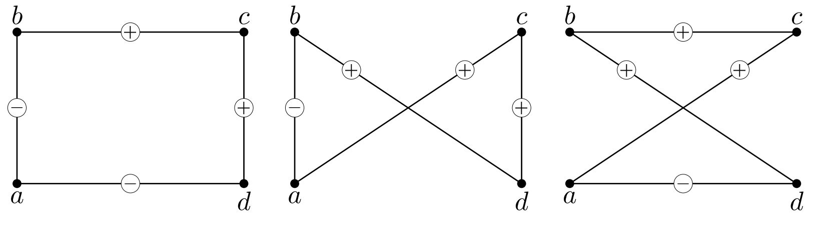
На рис. 7.8 (с. 185) показаны простые циклы (т.е. циклы, в которых совпадают только начальная и конечная вершины) длины 4 этого графа. Цикл на рис. 7.8а положителен, а циклы на рис. 7.8б и 7.8в — отрицательны. Следовательно, данный граф не сбалансирован.

Замечание. Здесь и далее рассматриваются только простые циклы по той простой причине, что число всех циклов в графе бесконечно. Например, любой цикл на рис. 7.8 можно пройти не только один раз, но и $2, 3, 4, \ldots$.

Проиллюстрируем доказательство теоремы 1 следующим **примером**. На рис. 7.9 (с. 185) показан знаковый граф, для которого $N = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Рассмотрим вершину x_1. Эта вершина соединена положительными дугами с x_2 и x_3 которые, в свою очередь, соединены между собой положительной дугой.

Таким образом, $N^+ = \{x_1, x_2, x_3\}$. Соответственно $N^- = \{x_4, x_5\}$.



)))

Рис. 7.8

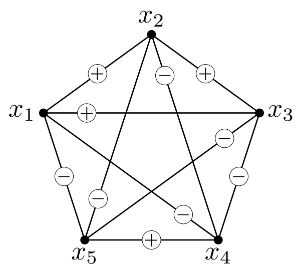


Рис. 7.9

Как это следует из определения, сбалансированность знакового графа — достаточно уникальное явление. Вместе с тем можно представить себе ситуацию, изображенную на рис. 7.10.

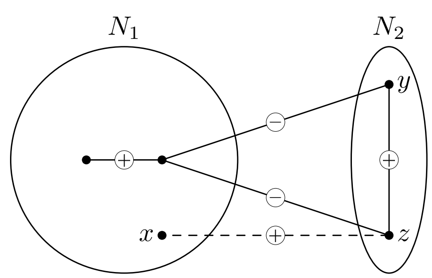


Рис. 7.10

Здесь N_1 содержит большое число (например 1000) вершин, связанных положительными дугами. В N_2 есть только две вершины, также связанные положительными дугами. В N_1 есть только одна вершина x, связанная положительной дугой с вершиной $z \in N_2$; все остальные вершины из N_1 связаны с y и z отрицательными дугами.

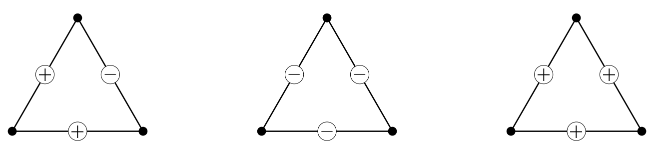
Этот граф почти сбалансирован, т.е. если бы дуга xz была отрицательной, он был бы сбалансированным.

Поэтому для сравнения сбалансированности графов необходимо для каждого знакового графа определить меру сбалансированности, соответствующую «относительному» балансу графа, так, чтобы у более сбалансированных графов была выше и мера сбалансированности.

Такая мера сбалансированности знакового графа была введена в [49]. Обозначим через C^+ число положительных простых циклов в графе G, а через C — число всех простых циклов. Тогда *мера сбалансированности* G определяется как

$$b(G) = \frac{C^+}{C}. \tag{7.1}$$

Очевидно, что значение $b(G) \in [0, 1]$. Для графов на рис. 7.11а и 7.11б мера сбалансированности $b(G) = 0$, а для графа на рис. 7.11в и вообще любого сбалансированного графа — $b(G) = 1$.



)))

Рис. 7.11

Пример. Рассмотрим граф на рис. 7.12 и подсчитаем для него меру сбалансированности.

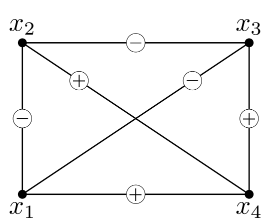


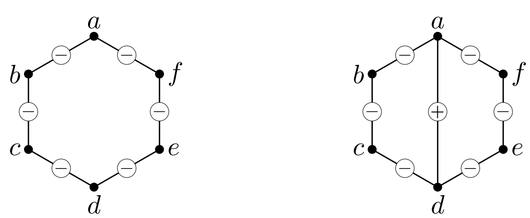
Рис. 7.12

В первом столбце таблицы выписаны все простые циклы графа, во втором стоит «+» или «−» в зависимости от знака цикла.

Цикл	*Знак цикла*
$x_1x_2x_3x_1$	$-$
$x_1x_2x_4x_1$	$-$
$x_1x_3x_4x_1$	$-$
$x_2x_3x_4x_2$	$-$
$x_1x_2x_3x_4x_1$	$+$
$x_1x_2x_4x_3x_1$	$+$
$x_1x_3x_2x_4x_1$	$+$

Здесь $b(G) = \frac{C^+}{C} = \frac{3}{7}$.

Внимательный читатель мог заметить следующее, кажущееся на первый взгляд парадоксальным, обстоятельство: в графе, изображенном на рис. 7.13а только один цикл, причем положительный, поэтому мера сбалансированности этого графа равна 1. Следовательно, знаковый граф сбалансирован, и множества $N_1 = \{a, c, e\}$ и $N_2 = \{b, d, f\}$ определяются однозначно. Но, если двое из ранее нейтрально относившихся друг к другу участников из разных подмножеств, например, a и d, оказались в хороших отношениях, то возникнет ситуация, показанная на рис. 7.13б. В этом графе три простых цикла, один положительный, два отрицательных, и мера сбалансированности равна $\frac{1}{3}$. То есть от улучшения отношений между участниками a и d сбалансированность графа уменьшилась!



))

Рис. 7.13

Но в этом нет ничего удивительного. Например, в начале пьесы У. Шекспира «Ромео и Джульетта» герои разбиты на два лагеря («Две равно уважаемых семьи, // В Вероне, где встречают нас событья, // Ведут междоусобные бои // И не хотят унять кровопролитья...»), и знаковый граф отношений полностью сбалансирован.

Но, как только в противоположных лагерях появляются влюбленные, события накаляются и приводят к трагедии.

Более подробно о применении знаковых графов к анализу литературных произведений будет сказано ниже.

7.3

Сбалансированность выборного органа

Теоретические основы исследования сбалансированности выборного органа уже содержатся в определении сбалансированности знакового графа. Если вершины графа изображают депутатов парламента, то мера сбалансированности может быть определена по формуле (7.1). Здесь, однако, следует сказать несколько слов о вычислительной сложности алгоритмов.

Как это ясно из самого определения меры сбалансированности, необходимо проверить все простые циклы графа G. Будем считать, что этот граф полный, т.е. все депутаты находятся между собой в некоторых отношениях, хороших или плохих. Тогда его простые циклы соответствуют подмножествам множества N, кроме подмножеств, содержащих два элемента. Таким образом, для того, чтобы найти все подмножества графа G и рассчитать, являются ли соответствующие циклы положительными, необходимо проделать не менее 2^n операций, где n — число вершин графа.

При $n = 100$ это число имеет порядок 10^{30}, и при быстродействии компьютера 10^9 операций в секунду соответствующие вычисления займут $\approx 10^{21}$ секунд, или примерно 10^{14} лет. Это очень большое число.

Как известно, в Государственной Думе Российской Федерации (далее — Госдума, Дума) 450 депутатов, т.е. полное исследование сбалансированности Думы, когда вершинами графа являются депутаты, представляется невозможным. Поэтому будем рассматривать постановку задачи, в которой вершинами графа G будут фракции и депутатские группы в Госдуме. Для простоты примем гипотезу о том, что все члены фракции голосуют одинаково. Это, вообще говоря, неверно. Есть парламенты, в которых дисциплина голосования во фракциях очень сильна; это не так в российском парламенте. Можно отказаться от этого предположения, но это потребует достаточно тонкого и длительного анализа, который, безусловно, не является предметом данной книги (см. [20]). Поэтому все же примем это упрощающее предположение.

В Госдуме 3-го созыва присутствовали фракции и депутатские группы, представленные[19] в табл. 7.1.

Таблица 7.1. Распределение мест в Государственной Думе Российской Федерации 3-го созыва на 16.01.2000

Название группы	*Число мест*
Независимые депутаты	15
КПРФ	91
«Единство»	82
ОВР	46
СПС	32
ЛДПР	17
«Яблоко»	21
АПГ	39
«Народный депутат»	57
«Регионы России»	41
Всего	441

Заметим теперь, что каждый простой цикл графа G соответствует коалиции в парламенте, а положительный простой цикл соответствует такой коалиции, которая «сбалансирована» (согласно определению выше). Однако нас интересуют не все возможные коалиции, а только те, число участников которых при единогласном голосовании может обеспечить принятие соответствующего закона. Для принятия федеральных законов в Госдуме требуется простое большинство голосов. Поэтому далее будем рассматривать те циклы (коалиции), число участников которых превышает 225 депутатов. Для этого бу-

[19] В табл. 7.1 общее число депутатов равно 441. Это вызвано тем, что в ряде округов выборы не состоялись, и иными естественными причинами.

дем рассматривать граф G, при вершинах которого стоит число депутатов в соответствующей фракции или группе.

В Госдуме 3-го созыва (1999—2003 гг.) были выделены следующие фракции и группы: КПРФ, «Единство» (Е), «Народный депутат» (НД), ОВР, АПГ, «Регионы России» (РР), СПС, ЛДПР, «Яблоко». Кроме того, была еще группа независимых депутатов (Н). Граф для Госдумы 3-го созыва представлен на рис. 7.14.

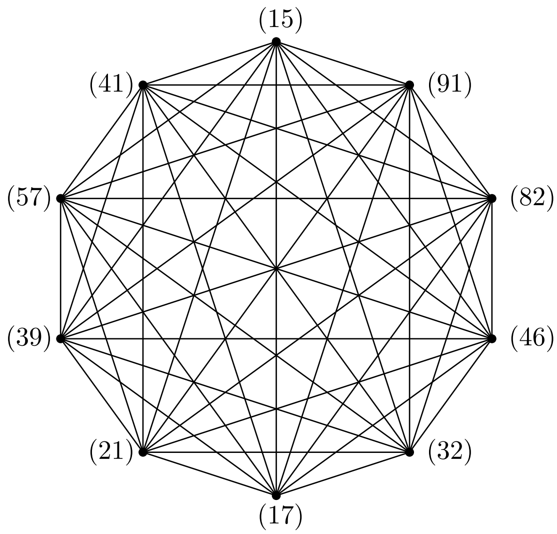


Рис. 7.14

Из рисунка видно, что некоторые коалиции содержат меньше 226 членов; такими коалициями являются, например, СПС + ЛДПР + «Яблоко» (70 голосов). Коалиция «Единство» + ОВР + «Народный депутат» + «Регионы России» содержит больше 225 членов, и именно такие коалиции (соответственно циклы) будут нас интересовать.

Знаки дуг в графе G для рассматриваемого случая, т.е. взаимные отношения между фракциями и группами, определены в [20] путем анализа результатов многих голосований. Здесь не приводятся результаты данного анализа, т.к. это увело бы нас слишком далеко от темы.

В табл. 7.2 приведены по месяцам значения меры сбалансированности ГД РФ 3-го созыва.

Таблица 7.2. Мера сбалансированности Государственной Думы Российской Федерации (2000—2003 гг.)

Месяц	$b(G)$, *год*			
	2000	*2001*	*2002*	*2003*
Январь	1,000	0,504	0,497	0,519
Февраль	0,500	0,483	0,489	0,533
Март	0,481	0,506	0,782	0,483
Апрель	0,626	0,498	0,533	0,497
Май	0,501	0,505	0,564	0,556
Июнь	0,550	0,547	0,653	0,498
Июль	0,493	0,520	—	—
Август	—	—	—	—
Сентябрь	0,501	0,491	1,000	0,499
Октябрь	0,501	0,510	0,502	0,499
Ноябрь	0,502	1,000	0,495	0,497
Декабрь	0,502	0,626	0,477	—

Прокомментируем эти значения меры сбалансированности. Работа Госдумы 3-го созыва началась с «пакетного соглашения», которое не устроило четыре депутатских объединения и привело к парламентскому кризису. Значение меры сбалансированности, равное 1, свидетельствует об этом конфликте. Отказ от «пакетного соглашения» и перераспределение комитетов в марте 2002 г. также сопровождались высоким значением меры сбалансированности $(0,782)$. Наконец, высокое значение меры для III Думы наблюдается в моменты принятия крупных решений (реформа Совета Федерации, принятие Земельного кодекса, реформа РАО ЕЭС и др.).

Максимумы и минимумы меры сбалансированности (b) и соответствующие им политические события показаны в табл. 7.3 (с. 192).

В [20] показано, что за весь период (с 1994 по 2003 г.) рост меры сбалансированности наблюдается в ситуациях, когда явно проявляются интересы партий и групп или возникает необходимость в принятии крупных решений, и большинство формируется на уровне 250—270 голосов.

Таблица 7.3. Максимумы и минимумы меры сбалансированности

Дата	b	*Политическое событие*
Январь 2000	1,000	Парламентский кризис, «пакетное соглашение» по Председателю Госдумы РФ и распределению комитетов
Апрель 2000	0,626	Определенность после проведения президентских выборов
Июнь 2000	0,550	Реформа Совета Федерации, Налоговый кодекс, подоходный налог 13%
Июнь 2001	0,547	Земельный кодекс в первом чтении, Уголовно-процессуальный кодекс во втором чтении, судебная реформа в первом чтении
Июль 2001	0,520	Земельный кодекс во втором чтении, Трудовой кодекс, закон «О лицензировании...»
Ноябрь 2001	1,000	Пенсионная реформа, Уголовно-процессуальный кодекс, бюджет в третьем чтении
Март 2002	0,782	Начало парламентского кризиса, перераспределение комитетов
Июнь 2002	0,653	Завершение парламентского кризиса, перераспределение комитетов
Сентябрь 2002	1,000	Принятие конституционного закона о проведении референдумов
Февраль 2003	0,533	Принятие во втором чтении законов о РАО ЕЭС

Сбалансированность ранее определялась как возможность разбиения парламента на две группы, одна из которых контролирует большинство. В российском парламенте в течение 10 лет постоянно представлено не менее 7—8 депутатских объединений, которые до последнего времени не могли (ситуация изменилась в Госдуме 4-го созыва) сформировать «устойчивое» большинство на уровне 250—270 голосов. Полученные значения меры сбалансированности подтверждают это утверждение. В то же время в отдельные моменты, особенно в Госдуме 3-го созыва, наблюдается высокая консолидация депутатов и фракций.

Среднее значение меры сбалансированности увеличивается от созыва к созыву. Госдуму 1-го созыва можно охарактеризовать как несбалансированную (среднее значение b равно $0,496$), что согласуется с крупными изменениями в составе фракций за время ее работы. Сбалансированность Госдумы 2-го созыва (среднее значение b равно $0,500$) достигается в основном в моменты начала работы Правительства во главе с новым премьером или при крупных перестановках в Правительстве. Госдума 3-го созыва оказалась наиболее сбалансированной (среднее значение меры равно $0,566$).

Представляется крайне важным, чтобы «сверхвысокая» сбалансированность IV Думы не достигалась в ущерб многообразию политических позиций, конкуренции различных решений и качеству принимаемых законопроектов.

7.4

Анализ сбалансированности пьесы У. Шекспира «Макбет»

В [49] понятие меры сбалансированности применялось для анализа литературных произведений. Проведем анализ сбалансированности пьесы У. Шекспира «Макбет». В основу анализа положено следующее предположение: интрига литературного произведения реализуется созданием несбалансированных ситуаций, а развязка заключается в том, что ситуация становится более сбалансированной.

На рис. 7.15 (с. 195) показаны графы для первых четырех актов пьесы «Макбет». Естественно, при анализе сбалансированности пьесы будем ограничиваться только главными персонажами, причем в разных актах будем рассматривать разных действующих лиц. Кроме того, для упрощения анализа объединяем лорда и леди Макбет и рассматриваем их как одну вершину на соответствующем графе. Такое объединение допустимо, т.к. позиции этих персонажей одинаковы на протяжении всей пьесы.

Аналогично объединим сыновей короля, хотя после второго акта о втором сыне короля Дональбайне почти ничего не говорится, и все время упоминается Малькольм, будущий король.

Акт 1. Мятеж. Норвежский король нападает на Шотландию. Банко и Макбет выигрывают сражение. Ведьмы предрекают Макбету, что он станет Кавдорским таном (титул, принадлежащий мятежнику) и королем. Затем приходят посланцы короля, которые именуют Макбета Кавдорским таном, и он впервые задумывается об убийстве короля.

Дворец Макбета. Король с сыновьями и свитой приезжает в гости к Макбету.

Акт 2. Дворец Макбета. Убийство короля. Сыновья короля бегут из Шотландии. Макбет избран королем.

Акт 3. Банко приглашают на ужин. Макбет договаривается с двумя убийцами об убийстве Банко. Банко убивают.

Ленокс и другой лорд обсуждают ситуацию. Ленокс говорит, что Макбет невиновен, лорд прямо говорит о «похитителе власти». В беседе выясняется, что Макдуф не явился на приглашение Макбета и уехал в Англию.

Акт 4. Макбет у ведьм. Они предрекают ему непобедимость («Пока не двинется наперерез // На Дунсинанский холм Бирнамский лес»).

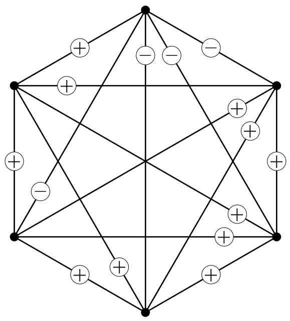
Приходит известие о бегстве Макдуфа. Макбет говорит, что возьмет его замок и вырежет всех.

Малькольм и Макдуф в Англии. Росс приезжает к ним, рассказывает об убийстве сына Макдуфа.

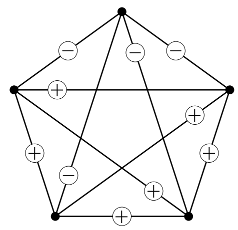
Акт 5. Английские войска у замка Дунсинана. Умирает леди Макбет. Люди Макбета разбиты. Сражение Макбета с Макдуфом, Макдуф убивает Макбета. Малькольм коронован.

Граф, характеризующий взаимные отношения персонажей в пятом акте, не приводится, т.к. здесь уже все ясно: леди Макбет умирает, Макбет находится в одиночестве.

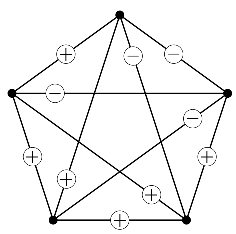
Можно видеть, что интрига в первом акте приводит к сложным отношениям между персонажами, и поэтому $b = 0,68$. После убийства короля во втором акте все думают, что это сделали его сыновья, т.е. ситуация полностью сбалансирована и $b = 1$. В третьем акте все опять усложняется: часть людей за Макбета, часть против, между ними сложные отношения, и мера сбалансированности $b = 0,59$. В четвертом акте все уже определилось, главные действующие лица переходят на сторону Малькольма, сына короля; Макбет и леди Макбет остаются фактически без поддержки. Соответственно $b = 1$.



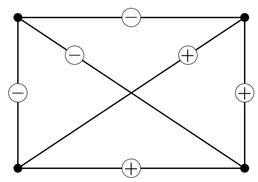
1



2



3



4

Сокращения: Б — Банко, Дл — другой лорд, К — Король,
Л — Ленокс, М — Макбет и леди Макбет, Мф — Макдуф,
Р — Росс, Ск — сыновья короля.

Рис. 7.15

Обратим внимание, что за пределами этого анализа осталась поразительная красота и глубина самого литературного произведения. В такой анализ невозможно вместить следующие строки[20]:

Макбет:
Бесчисленные «завтра», «завтра», «завтра»
Крадутся мелким шагом, день за днем,
К последней букве вписанного срока;
И все «вчера» безумцам освещали

[20] Перевод М.Л. Лозинского.

Путь к пыльной смерти. Истлевай, огарок!
Жизнь — ускользающая тень, фигляр,
Который час кривляется на сцене
И навсегда смолкает; это — повесть,
Рассказанная дураком, где много
И шума и страстей, но смысла нет.

7.5 Задачи

1. Для графов на рис. 7.16 (с. 197) найдите все простые циклы и определите их знаки.

2. Вычислите меру сбалансированности для графов на рис. 7.16.

3 [23]. Можно ввести другую меру сбалансированности, которая учитывает длину цикла, а именно: циклам большей длины приписывается меньший вес. Такая мера задается формулой

$$b_1(G) = \frac{\sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{k} p_k}{\sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{k} t_k},$$

где p_k — число положительных простых циклов длины k, t_k — число всех простых циклов длины k, n — длина самого длинного цикла в графе G. Вычислите значение b_1 для графов на рис. 7.16.

4. Совет директоров фирмы состоит из четырех человек. Глава совета A обладает при голосовании тремя голосами, члены B и C — двумя голосами каждый, а член совета D — одним голосом. Для принятия решения необходимо набрать не менее шести голосов. При этом члены совета A, B и C имеют давние дружеские отношения, A и D высоко оценивают профессиональные качества друг друга и поэтому всегда поддерживают друг друга, но B и C не долюбливают D за излишнее служебное рвение, D также отвечает им недове-

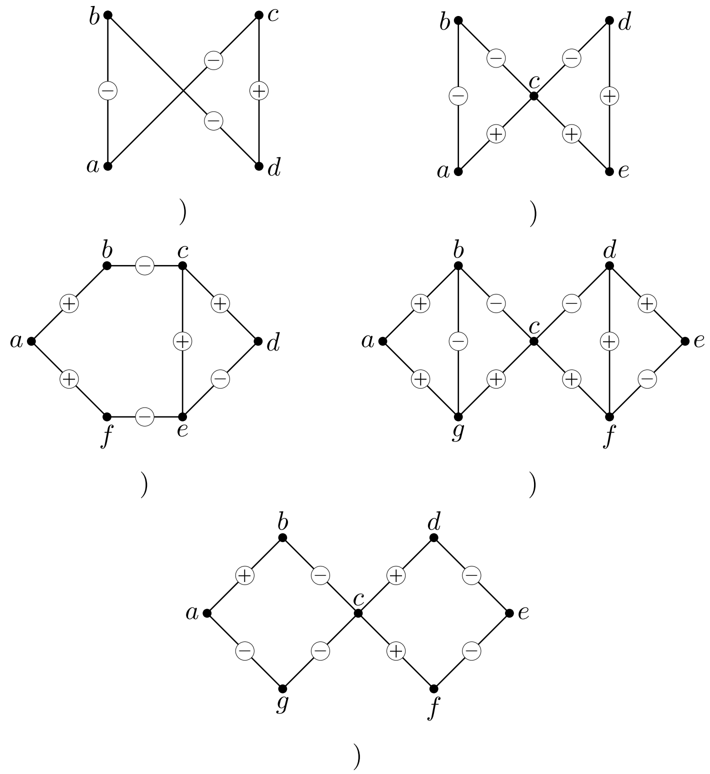


Рис. 7.16

рием. Определите, насколько сбалансирован совет директоров этой фирмы.

5. В правление банка входят четыре человека: председатель A, имеющий два голоса в своем распоряжении, и члены правления B, C и D, обладающие одним голосом каждый. Для принятия какого-либо решения при голосовании должно быть набрано хотя бы четыре голоса. Следует отметить, что между членами правления сложились определенные взаимоотношения. Председатель A и член правления B связаны многолетней дружбой; D является протеже A, поэтому они поддерживают друг друга; B и C испытывают взаимную симпатию; C и D высоко оценивают друг друга по профессиональным критериям; A и C считают свои позиции по ключевым вопросам противоположными, так же, как B и D. Насколько сбалансировано правление?

6. Постройте знаковый граф, описывающий взаимные отношения микрогрупп студентов вашей группы. Подсчитайте меру сбалансированности этого графа.

7. Постройте знаковый граф, описывающий взаимные отношения персонажей в различных актах пьесы У. Шекспира «Отелло», драмы А.С. Пушкина «Борис Годунов». Подсчитайте меры сбалансированности этих графов.

8. Постройте знаковый граф для анализа взаимных отношений стран Ближнего Востока. Вычислите меру сбалансированности этого графа. Проинтерпретируйте, что означала бы его полная сбалансированность.

8
глава

ЗАДАЧА ДЕЛЕЖА

8.1

Введение

Задача дележа имеет столь же долгую историю, как и сам род человеческий[21]. Можно ли прийти к соглашению в конфликтной ситуации так, чтобы были удовлетворены обе стороны? Справедливое разрешение спорных ситуаций, будь то разрешение трудовых споров, раздел имущества при разводе или проведение границы между двумя странами на спорном участке территории, часто представляется невозможным.

Самая распространенная ситуация дележа, встречающаяся постоянно, — это задача дележа в непрерывной версии. Самой же распространенной процедурой дележа, вероятно, является процедура «один делит, другой выбирает», которую читатели наверняка использовали при дележе торта. Эту процедуру далее для краткости будем называть процедурой «дели и выбирай».

Таким образом, в задаче дележа торта есть два участника, один из которых делит торт на две части, а другой выбирает. Поэтому делящему торт невыгодно делить его на две неравные части, т.к. второй участник — выбирающий — выберет бо́льшую часть.

В Ветхом Завете говорится об Аврааме и Лоте, которые странствовали вместе и попали в страну, где не хватало пропитания для

[21] При изложении материала этой главы мы пользовались и часто даже цитировали книги [10], [42].

их семей. Начались ссоры между их пастухами. Решение, предложенное Авраамом Лоту, было на диво простым:

«...да не будет раздора между мною и тобою, и между пастухами моими и пастухами твоими, ибо мы родственники; не вся ли земля перед тобою? отделись же от меня: если ты налево, то я направо; а если ты направо, то я налево» (Быт. 13:8—9).

Этот выбор подошел Лоту, который выбрал долину Иордана, а Авраам остался в земле Ханаанской. На самом деле Авраам предложил, как поделить земли, а Лот выбрал из предложенного.

И вот здесь возникает вопрос о том, что же такое справедливый дележ, можно ли построить процедуру, которая бы приводила к решению, удовлетворяющему обоих участников.

Однако далее «непрерывная» версия задачи изучаться не будет, и (имея в виду общую направленность книги) перейдем к ее дискретной формулировке.

Таким образом, рассматривается следующая задача: есть m объектов, которые надо поделить между n участниками. Такие задачи возникают при дележе наследства, при разделе имущества после развода супругов, в территориальных конфликтах и даже в таких ситуациях, как слияние фирм. Рассмотрим эти задачи далее.

В параграфах 8.2 и 8.3 приводятся примеры, показывающие, какие проблемы возникают при дележе с помощью процедуры «дели и выбирай», когда участники информированы о предпочтениях друг друга. В параграфе 8.4 даются критерии, которым должна удовлетворять любая разумная процедура дележа. В параграфе 8.5 дается описание процедуры «подстраивающийся победитель», которая была предложена недавно американскими учеными С. Брамсом и А. Тейлором. В параграфе 8.6 исследуется, удовлетворяет ли данная процедура критериям справедливости, изложенным в параграфе 8.4. В параграфе 8.7 приводится несколько примеров использования процедуры «подстраивающийся победитель» в различных ситуациях дележа. В параграфах 8.2—8.7 изучается модель дележа в случае двух участников, т.е. $n = 2$. В параграфе 8.8 показывается, что не существует дележа, удовлетворяющего всем трем критериям справедливости из параграфа 8.4 при числе участников $n > 2$.

В параграфе 8.9 представлены задачи к данной главе.

8.2

Процедура «дели и выбирай»

Чтобы проиллюстрировать более детально *процедуру «дели и выбирай»,* рассмотрим, следуя [10], случай дележа наследства двумя наследниками в штате Мэн (США). Бенджамин Франклин как-то сказал: «Если вы хотите узнать правду о характере другого человека, поделите с ним наследство».

Наследство делилось между двумя братьями, Брэдом и Диком. Оно состояло из следующих предметов:

— двенадцатифутовая алюминиевая гребная лодка,
— лодочный мотор в 3 лошадиные силы,
— пианино в прекрасном состоянии,
— небольшой персональный компьютер,
— охотничье ружье,
— набор инструментов,
— трактор фирмы «Форд» 1953 г. выпуска с прицепным плугом,
— сравнительно старенький крытый грузовичок,
— два мопеда.

Для того, чтобы смоделировать предпочтения братьев, примем, что Брэд получил бизнес-образование, живет в городе и интересуется музыкой, а Дик — спортсмен и живет в сельской местности. Таким образом, пианино и компьютер больше привлекают Брэда, чем Дика. С другой стороны, Дика больше привлекают лодка, мотор, трактор и грузовичок. Эти рассуждения позволяют предположить такие оценки (выраженные в виде процента от общей ценности) различных предметов Брэдом и Диком:

Предмет	*Оценка, %*	
	Брэд	*Дик*
Двенадцатифутовая алюминиевая гребная лодка	6	14
Лодочный мотор в 3 лошадиные силы	6	14
Пианино в прекрасном состоянии	17	2
Небольшой персональный компьютер	17	1
Охотничье ружье	4	4
Набор инструментов	6	2

Предмет	*Оценка, %*	
	Брэд	*Дик*
Трактор фирмы «Форд» 1953 г. выпуска с прицепным плугом	2	21
Сравнительно старенький крытый грузовичок	8	14
Мопед	17	14
Мопед	17	14
Всего	100	100

Если Дик делит и не знает предпочтений Брэда, то он может поделить наследство пополам (50 на 50) на основе собственных предпочтений:

набор 1: лодка (14%), компьютер (1%), трактор (21%), мопед (14%);

набор 2: мотор (14%), пианино (2%), ружье (4%), инструменты (2%), грузовичок (14%), мопед (14%).

Брэд выберет набор 2, поскольку, по его оценкам, тот составляет 58% (6 + 17 + 4 + 6 + 8 + 17%) общей ценности.

Если делить будет Брэд, не зная предпочтений Дика, он может построить распределение (50 на 50) на основе своих собственных предпочтений:

набор 1: лодка (6%), компьютер (17%), трактор (2%), грузовичок (8%), мопед (17%);

набор 2: мотор (6%), пианино (17%), ружье (4%), инструменты (6%), мопед (17%).

Дик выберет набор 1, потому что, по его представлениям, он составляет 64% (14 + 1 + 21 + 14 + 14%) общей ценности.

Совсем иначе будет обстоять дело, если тот, кто делит, знает предпочтения того, кто выбирает, и хочет употребить это знание для собственной выгоды.

8.3

Манипулирование

Представим себе, что братья достаточно хорошо знают предпочтения друг друга. Что, если бы они хотели выгадать от этого знания?

Например, если делить наследство будет Дик, он может разделить его на две части так (указаны оценки Дика):

набор 1: лодка (14%), мотор (14%), ружье (4%), трактор (21%), грузовичок (14%), мопед (14%);

набор 2: пианино (2%), компьютер (1%), инструменты (2%), мопед (14%).

Для Дика набор 1 имеет ценность 81%, а набор 2 — только 19%. Однако Брэд выберет набор 2, поскольку он его оценивает в 57% (17 + 17 + 6 + 17%) общей ценности.

На самом деле Дик мог бы включить инструменты в набор 1, сделав соотношение наборов 1 и 2 в глазах Брэда 49% к 51%, а в глазах самого Дика — 83% к 17%, но это было бы слишком рискованно: Брэд мог бы тогда выбрать набор 1, поскольку разница для Брэда крайне мала, а Дику тогда досталось бы всего 17% общей ценности.

С другой стороны, если бы делил Брэд, он мог разделить так (указаны оценки Брэда):

набор 1: пианино (17%), компьютер (17%), инструменты (6%), грузовичок (8%), два мопеда (34%);

набор 2: лодка (6%), мотор (6%), ружье (4%), трактор (2%).

Для Брэда набор 1 оценивается в 82%, а набор 2 — только в 18%. Однако Дик выберет набор 2, потому что он оценивает его в 53% (14 + 14 + 4 + 21%) общей ценности.

8.4

Критерии справедливости дележа

Существуют четыре критерия, по которым можно судить о справедливости дележа. Первый критерий является более сильной формой второго, поэтому далее будет рассматриваться только второй. Процедура является *справедливой* в той степени, в какой ее результат удовлетворяет этим критериям.

1. *Пропорциональность*. Считается, что дележ удовлетворяет условию пропорциональности, если (при двух участниках) каждый

участник считает, что получил не менее половины общей ценности делимых предметов. Если участников трое, то каждый участник считает, что получил не менее трети, и т.д.

2. *Отсутствие зависти.* По-видимому, дележ можно считать справедливым, если ни у одного из участников не возникает желания отдать полученную долю в обмен на долю, полученную другим участником. Это и значит, что ни одна из сторон не испытывает зависти по отношению к другим сторонам.

Одна из реформ Солона, законодателя Древней Греции VI в. до н.э., состояла в следующем: тот, кто считал, что платит большой налог на недвижимость, мог поменяться своей недвижимостью с другим человеком, который платил меньше. Тем самым была сделана попытка реализовать требование отсутствия зависти. Отметим, что истории неизвестен результат этой реформы.

В задаче дележа с двумя участниками нет различия между пропорциональным дележом и дележом, не вызывающим зависти. Докажем это. Предположим, что решение обладает свойством пропорциональности, т.е. один из участников считает, что получил не менее половины спорного добра. Тогда он не будет завидовать другому участнику. Если участник 1 считает, что получил не меньше половины, стало быть, участник 2 получил от силы половину. Симметрично: если участник 2 получил не менее половины, то он не станет завидовать участнику 1, т.е. решение не вызывает зависти. И, обратно, если решение не вызывает зависти, то, значит, каждый из двоих считает, что получил не менее половины, поскольку в противном случае хотя бы один завидовал другому, получившему больше половины. Таким образом, при двух участниках пропорциональность и отсутствие зависти эквивалентны.

В случае с тремя участниками отсутствие зависти более сильное условие, чем пропорциональность. Например, один из участников может считать, что получил свою треть, но другой получил половину (потому что третий, на взгляд первого, получил лишь шестую часть), тогда первый участник будет завидовать тому, кто получил половину. С другой стороны, если при распределении между тремя участниками отсутствует зависть, то любой из участников должен считать, что получил хотя бы треть, т.к. в противном случае он будет считать, что остальные участники вместе получили больше двух третей, и станет завидовать одному или обоим, получившим больше трети. Следовательно, при распределении, когда отсутствует зависть, всегда наличествует пропорциональность, даже если имеется больше двух участников. Однако пропорциональный дележ не всегда обеспечивает отсутствие зависти.

3. *Равноценность.* Для того чтобы объяснить это условие, прибегнем к примеру. Представим себе раздел при разводе, когда бывший муж считает, что получил 51% общего имущества, а бывшая жена считает, что ей досталось 90%, поскольку то, что досталось ему, ее мало интересует. Станет ли муж завидовать? Ответ, очевидно, отрицательный.

Пусть муж считает, что получил 51%. Тогда (вне зависимости от того, что думает жена о своей доле), с его точки зрения, она получила только 49%. Однако ему, возможно, не понравится то, что его жена куда больше довольна разделом (считая, что получила 90%), чем он (получивший, по своему мнению, 51%). Таким образом, хотя он и не завидует полученной ею доле, он может завидовать тому, что она сильнее радуется своей доле, чем он — своей.

Условие равноценности означает следующее: обе стороны считают, что получили одинаковую долю, в соответствии с тем, как каждый из них оценивает разные объекты дележа. В совокупности с отсутствием зависти это означает не только то, что каждый получил больше половины, но и то, что это превышение одинаковое! Например, равноценность имеет место, если муж считает, что ему досталось 70%, и его жена считает, что ей досталось также 70%, что совсем не похоже на случай, когда оценка своей доли мужем составляет 51%, а женой — 90%. Ясно, что, если оба супруга считают себя получившими по 70%, они одинаково довольны разделом.

4. *Эффективность.* Решение эффективно, или *Парето-оптимально,* если не существует никакого другого дележа, который был бы лучше для одного из участников, не будучи хуже для другого участника.

Выполнение только свойства эффективности (без выполнения свойств пропорциональности, отсутствия зависти или равноценности) не является гарантией справедливости дележа. Например, дележ, при котором одному достается все, а другому — ничего, является эффективным: любой другой дележ ухудшит положение того, кто получил все.

Теперь у нас есть три критерия, чтобы убедиться, удовлетворены ли стороны способом дележа: отсутствие зависти, равноценность и эффективность.

Эти критерии имеют смысл, если есть несколько различных дележей. Если вы торгуетесь о цене приобретаемого автомобиля, какой смысл может иметь «отсутствие зависти»? Здесь цену автомобиля надо сравнить с так называемой *наилучшей альтернативой выторгованному соглашению* (НАВС), или запасным вариантом. В данном случае НАВС — это средства, требуемые для приведения в порядок старого автомобиля.

Нет очевидной наилучшей альтернативы выторгованному соглашению в случае развода, коллективных трудовых споров, межгосударственных конфликтов, когда стороны не могут легко разрешить проблему. В отсутствие удовлетворительной альтернативы, которая может быть реализована самостоятельно каждым из участников, приходится определять, какого рода урегулирование является приемлемым для участников.

Процедура, обеспечивающая справедливость избранного решения, т.е. удовлетворяющая критериям отсутствия зависти, равноценности и эффективности, необходима в ситуациях, когда у участников нет другого выхода, кроме как пытаться жить друг с другом (пусть раздельно и практически не общаясь, как иногда при разводах).

8.5

Процедура «подстраивающийся победитель»

Далее будет описана изобретенная в 90-е гг. XX в. американскими учеными С. Брамсом и А. Тейлором процедура, которой они да-ли несколько необычное название: *«подстраивающийся победитель» (adjusted winner)*.

Проиллюстрируем эту процедуру на примере ее использования в достижении договоренности между трудящимися и работодателями [6], [10]. Пусть объединение работодателей и профсоюз наемных работников обсуждают трудовое соглашение, в котором присутствуют шесть пунктов: повышение заработной платы в начале года, величина минимальной заработной платы, доля медицинской страховки, которую должен оплачивать работодатель, пенсионный возраст, размер надбавки за выслугу лет и пособие, выплачиваемое при увольнении.

Пусть желательные для каждой стороны решения приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1. Разрешение трудовых споров: предложения сторон

№ п/п	*Проблема*	*Решение, предлагаемое работодателями*	*Решение, предлагаемое профсоюзом*
1	Повышение заработной платы в начале года, %	10	15
2	Величина минимальной заработной платы, руб.	1500	2000
3	Доля медицинской страховки, которую должен оплачивать работодатель, %	50	75
4	Пенсионный возраст, лет	60	55
5	Размер надбавки за выслугу лет, руб.	600	1000
6	Пособие, выплачиваемое при увольнении, в размере	трехмесячной заработной платы	шестимесячной заработной платы

Итак, по всем шести пунктам мнения работодателей и профсоюза различаются. Например, профсоюз предлагает установить минимальную заработную плату в размере 2000 руб. в месяц, а работодатели предлагают 1500 руб. Если в качестве окончательного будет принято решение выплачивать 1500 руб., то работодатели оценивают это решение как свою победу, а профсоюз — как свое поражение по этому пункту переговоров.

В процедуре «подстраивающийся победитель» сторонам предлагается независимо друг от друга распределить 100 очков между этими шестью пунктами так, чтобы большее число очков приписывалось более значимому пункту. Затем результаты распределения передаются некоему «арбитру». Подчеркнем сразу, что у арбитра нет никаких прав настаивать на каком-либо решении, принуждать стороны к чему-либо. Он просто собирает и обрабатывает информацию.

Предположим, что стороны распределили очки между пунктами согласно табл. 8.2.

Таблица 8.2. Разрешение трудовых споров: оценки сторон

№ *п/п*	*Проблема*	*Оценка решения*	
		работодателями	*профсоюзом*
1	Повышение заработной платы в начале года, %	10∗	5
2	Величина минимальной заработной платы, руб.	35	40∗
3	Доля медицинской страховки, которую должен оплачивать работодатель, %	15	20∗
4	Пенсионный возраст, лет	15∗	10
5	Размер надбавки за выслугу лет, руб.	15∗	5
6	Пособие, выплачиваемое при увольнении, в размере	10	20∗
	Итого	100	100

Так, например, по п. 3 (доля медицинской страховки, которую должен оплачивать работодатель) собственная оценка своего предложения (50%) работодателями составляет 15 очков, а собственная оценка своего предложения (75%) профсоюзом — 20 очков.

Затем около максимального элемента строки арбитр ставит $*$, т.е. в первой строке $*$ ставится у 10, во второй строке — у 40, и т.д. (табл. 8.2).

Рассмотрим теперь, что получит каждая сторона, если будет принято решение, оцененное этой стороной больше, чем их оппонентами. Тогда работодатели получат выигрыш в $10 + 15 + 15 = 40$ очков, а профсоюз — выигрыш в $40 + 20 + 20 = 80$ очков. Иначе говоря, такой раздел не удовлетворяет условию равноценности, т.е. не является справедливым.

Вторая часть процедуры «подстраивающийся победитель» как раз предназначена для «выравнивания» того, что получают стороны. Это достигается путем перераспределения доли того, кто получил больше, в пользу того, кто получил меньше.

Эта часть процедуры должна работать с «делимым» решением. Отметим, что очень часто решение может рассматриваться как неделимое только в силу привычки или традиций. Например, странным в силу непривычности может показаться предложение установить пенсионный возраст в виде 57 лет 3 месяцев.

В рассматриваемом примере есть несколько очевидно делимых решений: повышение заработной платы в начале года, величина минимальной заработной платы, доля медицинской страховки, которую должен оплачивать работодатель, и размер надбавки за выслугу лет. Тогда возникает вопрос: какой из этих пунктов следует выбрать на втором этапе процедуры. Для этого выбирается пункт, у которого отношение максимальной оценки к минимальной будет наименьшим. Оценим указанные отношения: для п. 1 имеем $\frac{10}{5} = 2$; для п. 2 отношение равно $\frac{40}{35} = 1,14$; для п. 3 имеем $\frac{20}{15} = 1,33$, и т.д. В результате выбирается тот пункт, для которого это отношение минимально, т.е. в данном случае п. 2.

Теперь будем считать, что работодатель получит не весь выигрыш по п. 2, а только его часть x. Тогда выигрыш работодателя составит $10 + 15 + 15 + 35x = 40 + 35x$.

Профсоюз по этому пункту получит оставшуюся часть, т.е. $1-x$, и выигрыш профсоюза составит $(1-x)\cdot 40+20+20 = 40+20+20-40x = 80 - 40x$. Естественно приравнять теперь выигрыши сторон, т.е. $40 + 35x = 80 - 40x$.

Решая это уравнение относительно x, получим $x = 0,533$.

Это означает, что по п. 2 работодатели и профсоюз приходят к следующему компромиссному решению:

$$1500 \cdot 0,533 + 2000 \cdot 0,467 = 1733,50.$$

Теперь по всем пунктам, кроме второго, в качестве решения принимается то, которое помечено $*$, т.е. наиболее предпочтительное решение одной из сторон. Так, по вопросу о повышении заработной платы в начале года принимается предложение работодателей, по вопросу оплаты страховки — предложение профсоюза, и т.д. И лишь по единственному п. 2 стороны приходят к компромиссу — принимается промежуточное решение между их предложениями.

Оценим теперь выигрыши сторон. Для работодателей получим

$$10 + 15 + 15 + 35 \cdot 0,533 = 58,655,$$

а для профсоюза получим

$$40 + 20 + 20 - 40 \cdot 0,533 = 58,682,$$

т.е. выигрыши на этом этапе выравнялись.

Окончательное решение приведено в табл. 8.3.

Таблица 8.3. Разрешение трудовых споров: компромисс

№ *п/п*	*Проблема*	*Принятое решение*
1	Повышение заработной платы в начале года, %	На 10%
2	Величина минимальной заработной платы, руб.	1733, 50
3	Доля медицинской страховки, которую должен оплачивать работодатель, %	75%
4	Пенсионный возраст, лет	60
5	Размер надбавки за выслугу лет, руб.	600
6	Пособие, выплачиваемое при увольнении, в размере	шестимесячной заработной платы

Можно видеть, что это решение удовлетворяет критериям справедливости: стороны не завидуют друг другу, распределение равноценно и эффективно.

Приведенный пример показывает, что метод «подстраивающегося победителя» вполне просто и удобно применим при решении такой важнейшей и весьма болезненной проблеме, как выработка трудовых соглашений. Следует отметить, что, хотя понимание и применение этого метода не требует специальной подготовки и математических знаний за пределами требований начальной школы, способность оценить численно предпочтения не так проста, как может показаться на первый взгляд. Однако уверенность в том, что мнение каждой из сторон принято во внимание полностью, а полученное решение удовлетворяет критериям справедливости, стоит определенных усилий.

Хотелось бы обратить особое внимание на то, что этот метод можно применять и в ситуациях, когда нужно определить не самые желательные, а наоборот, самые неприемлемые пункты. На бытовом уровне это можно пояснить ситуацией, когда молодые супруги делят обязанности по хозяйству. Обычно все ссоры происходят из-за активного нежелания делать особенно нелюбимую работу. Оценив, исходя из собственных предпочтений, привлекательность домашних дел и применив указанную процедуру, получим справедливое распределение.

Последний пример имеет прямые аналоги при решении задачи распределения обязанностей в трудовом коллективе. При таком распределении обычно руководствуются должностной инструкцией. Вместе с тем известно, что люди выполняют разную работу с разной степенью эффективности. Например, в отделе маркетинга фирмы один из сотрудников может с удовольствием общаться с внешними организациями, ездить в командировки, принимать посетителей и т.д. Другой сотрудник, наоборот, с удовольствием будет заниматься «черновой работой»: сидеть по вечерам в офисе, вводить в компьютер и анализировать данные, писать отчет, но никогда не захочет выехать в командировку. Во многих случаях даже такие достаточно очевидно устранимые противоречия могут вызвать проблему. Не всегда человек хочет или решается высказывать свое негативное отношение к функциям, входящим в его обязанности. Начальник может не понять ситуации, могут быть искажения предпочтений, вызванные подозрительностью или неприязнью. Весьма распространена зависть, когда человека вроде и устраивает то, что он делает, но ему кажется, что другому — лучше, что он воспринимает как обидную несправедливость.

Рассмотрим следующий условный пример по использованию процедуры «подстраивающийся победитель» в задаче распределения обязанностей [6].

Предложив каждому сотруднику заполнить таблицу (разделив 100 очков по шести пунктам согласно своим предпочтениям), получим распределение, показанное в табл. 8.4 (с. 212).

Таблица 8.4. Задача распределения обязанностей. Первый случай

№ п/п	Проблема	Предпочтения, очков	
		первого сотрудника	*второго сотрудника*
1	Командировка сроком не более недели	5	40
2	Командировка сроком более недели	5	30
3	Необходимость задержаться после окончания рабочего дня	20	5
4	Необходимость работать в выходной	10	10
5	Участие в семинаре в родном городе	10	10
6	Написание аналитического отчета	50	5

Применим процедуру «подстраивающийся победитель». Первый «проход» показывает, что 3-я и 6-я позиции даются первому работнику, а 1-я и 2-я — второму. Позиции 4-я и 5-я оценены ими одинаково. У первого и второго сотрудников уже по 70 очков, поэтому естественно поделить обе спорные позиции поровну, что приведет к равной удовлетворенности каждого — по 80 очков. Любитель поездок будет ездить в командировки, любитель кабинетной работы — писать аналитические отчеты и задерживаться по вечерам, один из них при необходимости будет работать в выходные дни, другой — участвовать в семинарах. Безусловно, это простое решение будет приносить значительно больший психологический эффект и способствовать высокой мотивации работников, которые убедились в справедливости этого решения и столь высоком уровне учета высказанных ими предпочтений.

В заключение рассмотрим еще один случай, когда различие установок более «смазано» (табл. 8.5 на с. 213).

Первый проход предполагает следующий раздел: первому, согласно его предпочтениям, достается 5-я и 6-я позиции (55 очков),

Таблица 8.5. Задача распределения обязанностей. Второй случай

№ п/п	*Проблема*	*Предпочтения, очков*	
		первого сотрудника	*второго сотрудника*
1	Командировка сроком не более недели	20	20
2	Командировка сроком более недели	5	10
3	Необходимость задержаться после окончания рабочего дня	15	15
4	Необходимость работать в выходной	5	10
5	Участие в семинаре в родном городе	30	25
6	Написание аналитического отчета	25	20

второму — 2-я и 4-я (20 очков), при этом нераспределенными остаются 1-я и 3-я позиции, оцененные обоими участниками одинаково (35 очков). И опять решение не требует в данном случае дополнительных расчетов. Удовлетворенность обоих на уровне 55 очков достигается передачей 1-й и 3-й позиций второму работнику.

Еще раз подчеркнем, что для применения этого метода требуется умение оценить свои предпочтения. Это не всегда легко, но без этого невозможно!

8.6

Свойства процедуры «подстраивающийся победитель»

В этом параграфе будет показано, что процедура «подстраивающийся победитель» удовлетворяет условиям отсутствия зависти, равноценности и эффективности, но для этого необходимо несколько формализовать предложенный алгоритм.

Пусть участники A и B делят ресурсы $G_1, \ldots, G_n$; a_i — оценка привлекательности i-го ресурса для A, b_i — для B. Оценки даются в долях от единицы, т.е.

$$\sum_i a_i = \sum_i b_i = 1.$$

Упорядочим ресурсы по убыванию величины a_i/b_i, т.е. будем считать, что $a_1/b_1 \geq a_2/b_2 \geq \ldots \geq a_n/b_n$ (здесь предполагается, что все ресурсы имеют некоторую ценность, т.е. $a_i > 0$ и $b_i > 0$). Пусть r — максимальное i, для которого $a_i/b_i \geq 1$.

На первом шаге процедуры «подстраивающийся победитель» участнику A приписывают все ресурсы G_i, где $1 \leq i \leq r$, а участнику B — ресурсы G_i, где $r+1 \leq i \leq n$.

Если выигрыши сторон равны, то процедура закончена. Иначе изучается, как нужно переделить ресурс G с наиболее близким к 1 отношением a_i/b_i, чтобы стороны были одинаково удовлетворены: это ресурс G_r, если по результатам первого шага больше очков набрал участник A, или G_{r+1}, если больше очков набрал B. Возможно, что даже если передать весь этот ресурс G пока проигрывающему участнику, он останется проигрывающим. Тогда необходимо передать ему весь этот ресурс и перейти к следующему (G_{r-1} или G_{r+2} соответственно), пока не будет достигнуто равенство очков, получаемых участниками.

В результате получается следующий дележ: существует некоторое k, $1 \leq k \leq n$, такое, что ресурсы с 1-го по $(k-1)$-й получает A, с $k+1$ по n-ный — B, а k-тый ресурс делится между ними так, чтобы было достигнуто равенство очков.

Теперь можно доказать следующую теорему:

Теорема 1 [10]. *Дележ, полученный при применении процедуры «подстраивающийся победитель», удовлетворяет условиям отсутствия зависти, равноценности и эффективности.*

Доказательство. Заметим, что полученный дележ будет равноценным по построению. Предположим, что уже доказано, что он эффективен. Тогда дележ должен быть для обоих участников как минимум не хуже любого другого равноценного дележа, например, не хуже «честного» дележа, при котором все ресурсы делятся пополам и каждый из участников получает по 50 очков. Следовательно, процедура «подстраивающийся победитель» удовлетворяет и условию отсутствия зависти. Осталось доказать эффективность.

Предположим, что дележ не эффективен, т.е. существует другой дележ, лучший для какого-то из участников (например для A) и не худший для другого (B). Тогда он получается из дележа по процедуре «подстраивающийся победитель» путем передачи $S_1, \ldots, S_m$ единиц ресурсов $G_{i_1}, \ldots, G_{i_m}$ соответственно участнику A и участнику B — $T_1, \ldots, T_l$ единиц ресурсов $G_{j_1}, \ldots, G_{j_l}$.

Доказательство состоит из двух частей. Сначала будет показано, что если дележ не эффективен, то его можно улучшить передачей только одного ресурса участнику A и только одного участнику B, т.е. достаточно рассмотреть случай $i = j = 1$. Во второй части будет показано, что таким способом дележ, полученный при процедуре «подстраивающийся победитель», улучшить нельзя.

1. Поскольку B при замене исходного дележа новым не проигрывает, а ресурсы считаются делимыми, то B может разделить получаемые им ресурсы на m частей так, чтобы k-тая часть с его точки зрения была не хуже S_k единиц ресурса G_{i_k}. Поскольку, отдав все эти части и получив $S_1, \ldots, S_m$ единиц ресурсов $G_{i_1}, \ldots, G_{i_m}$, A выигрывает, то он выигрывает и при замене какой-либо из этих частей соответствующим S_k. Итак, если A получает S_k единиц ресурса G_{i_k} вместо некоторых количеств $T'_1, \ldots, T'_l$ единиц ресурсов $G_{j_1}, \ldots, G_{j_l}$, он от обмена выигрывает, а B не проигрывает.

Повторим прием. B может поделить S_k единиц ресурса G_{i_k} на l частей так, чтобы при отдаче s-той из этих частей взамен T'_s единиц ресурса G_{j_s} он не проигрывал. В свою очередь, A может выбрать из этих обменов тот, при котором он выиграет. Итак, если дележ не эффективен, то его можно улучшить, отдав A некоторое количество одного ресурса взамен некоторого количества другого.

2. Пусть участнику A передается S единиц ресурса G_i, а B — T единиц ресурса G_j. Тогда выигрыш A составляет $Sa_i - Ta_j$, а выигрыш b — $Tb_j - Sb_i$. Представим себе, что выигрыш A положителен, а выигрыш b неотрицателен. Тогда

$$\frac{a_i}{a_j} > T/S, \ \frac{b_j}{b_i} \geq S/T.$$

Перемножая эти неравенства, получаем

$$\frac{a_i \cdot b_j}{a_j \cdot b_i} > 1 \text{ или } \frac{a_i : b_i}{a_j : b_j} > 1,$$

т.е. $a_i/b_i > a_j/b_j$ Поскольку ресурсы упорядочены по убыванию отношения a_i/b_i, получаем $i < j$. Но это противоречит свойствам процедуры «подстраивающийся победитель». Действительно, если A получил какую-то часть ресурса G_i, то этот участник первоначально либо не имел G_j вообще, либо имел только его часть. Но тогда он первоначально вообще не имел ресурсов с бóльшими номерами, чем i, и не мог передать их B. ■

8.7

Слияния фирм

Слияния банков и фирм, которые начали массово происходить в 1990-х гг., принадлежат к самым впечатляющим экономическим событиям нашего времени. Так, активы банка, образовавшегося в результате слияния в 1996 г. *Mitsubishi Bank* и *Bank of Tokyo*, составили 752 млрд. долл.; в 1998 г. слились *Bank of America* и *Nations Bank* с совокупными активами 570 млрд. долл.; в ноябре 1998 г. произошло слияние *Exxon* и *Mobil* с активами 80 млрд. долл.

Наряду с успешными слияниями, о которых много пишут и говорят, имели место несостоявшиеся попытки слияния, которые не только нанесли огромный ущерб имиджу фирм, но и привели к существенным финансовым потерям.

В 1996 г. *CCB Financial Corp.* и *United Carolina Bankshares* прекратили переговоры о слиянии, т.к. руководители не сумели договориться о том, кто займет должности в высшем руководстве объединенного банка и где будет находиться их штаб-квартира.

В январе 1996 г. *Boeing* и *McDonnel Douglas* прервали переговоры о слиянии из-за того, что не смогли прийти к соглашению о кадрах. Однако через год переговоры возобновились.

После несостоявшегося в феврале 1998 г. слияния *Glaxo Wellcome* со *SmithKline Beecham,* двух фармацевтических гигантов, финансовая пресса была полна нелестных описаний безудержных амбиций глав корпораций, нанесших огромный ущерб интересам акционеров. Главу *SmithKline* Яна Лешли и главу *Glaxo* сэра Ричарда Сайкса обвиняли в мании величия, что привело к забвению интересов акционеров ради собственной власти и престижа. Как писал в это время «Wall Street Journal», компании «потеряли почти 19 млрд. долл. своей биржевой стоимости из-за столкновения амбиций двух руководителей корпораций».

Несмотря на экономический спад в начале XXI в., активность фирм относительно слияния уменьшилась ненамного. 16 июля 2002 г. было объявлено о слиянии двух фармацевтических гигантов — *Pfizer* и *Pharmacia*. Объединенная компания будет контролировать 11% мирового рынка лекарств и иметь годовой доход в 40 млрд. долл. В процессе слияния находятся малые банки с активами в несколько сот миллионов долларов. В начале июля 2002 г. в Японии было объявлено, что предполагается поощрение слияния региональных банков, кредитных ассоциаций и кредитных кооперативов.

Одной из самых важных составляющих успеха слияния является то, что принято называть «социальными проблемами»: как власть, положение и статус будут распределяться между руководителями объединенной компании.

В противовес очевидным финансовым факторам, таким как распределение общей собственности между акционерами после слияния, «социальные проблемы» касаются таких тонких вопросов, как статус, престиж, роль сотрудников в объединенной компании. Иначе говоря, в отличие от измеримых финансовых показателей, здесь требуется решить проблему столкновения специфических интересов, когда участники зачастую плохо представляют себе, как можно прийти к компромиссам в этой ситуации.

Большинство слияний не вызвано желанием освоить новые виды деятельности, разнообразить активность компаний. Напротив, слияния, как правило, вызваны желанием увеличить контроль в фиксированном сегменте рынка и тем самым увеличить прибыль. Именно поэтому в ряде стран существуют ограничения на слияние, связанные с монополизацией сектора экономики. Например, в Канаде при слиянии банков отслеживается, чтобы объединенный банк контролировал не более 35% активности на локальном рынке, а четыре самых крупных банка владели не более чем 65% рынка банковских услуг в стране [2].

Таким образом, компании, которые ведут переговоры о слиянии, функционируют в одном сегменте рынка и их взаимоотношения окрашены предыдущей конкурентной борьбой. При слиянии бывшие соперники оказываются за столом переговоров, пытаясь наладить тесное сотрудничество, что, естественно, на первых порах может оказаться трудной и даже непосильной задачей. Неудача в переговорах о слиянии фирм или поглощении одной фирмы другой может предоставить преимущество их конкурентам и дорого обойтись акционерам этих фирм.

Приведем перечень некоторых социальных проблем, которые решаются при слиянии фирм [10].

- Как будет называться объединенная фирма?
- Где будет находиться ее штаб-квартира?
- Кто из партнеров назначает президента компании, а кто — исполнительного директора?
- Как, в какой пропорции осуществляется увольнение персонала?

Завершим параграф рассказом о том, как выбиралось название для корпорации, образовавшейся при объединении компаний *Daimler-Benz* и *Chrysler* («The New Yorker», ноябрь 1998 г.) [10].

По словам Роберта Итона, президента корпорации *Chrysler*, к вопросу о названии обратились «в последнюю очередь»; это был один из труднейших вопросов, вобравший в себя все сомнения и опасения, связанные с такой гигантской международной сделкой.

Руководство компании *Chrysler* предлагало название *«Chrysler Daimler-Benz»*, а их немецким коллегам нравилось название *«Daimler-Benz Chrysler»*.

По словам Юргена Шремппа, президента *Daimler-Benz*, «этот вопрос был высокоэмоциональным для обеих сторон. Мы оба принимали его очень близко к сердцу». У немецкой компании, как известно, было два основателя: Готлиб Даймлер и Карл Бенц. А Уолтер Крайслер, легендарный пионер автомобилестроения из Детройта, практически создал *Chrysler Corp.* в 1925 г. Проблема названия «не разрушала сделку, — как сказал Шремпп, — но возникла взаимная холодность». Наконец, они сошлись на названии *DaimlerChrysler.* «Оно здорово смотрится, и в нем много классного», — объяснил Итон. Шремпп утверждал, что «обе компании не допускали мысли о совершенно новом названии, вроде *Novartis* или *Diageo.* В бизнесе немало значат чувства. *Daimler* и *Chrysler* — имена из истории и кое-что значат для продавцов и работников».

8.8

Дележ при числе участников больше двух

Пусть есть три участника дележа — 1, 2 и 3. Предположим, что они оценивают свои предпочтения относительно предметов X, Y и Z так, как показано ниже.

Предмет	*Участник*		
	1	*2*	*3*
X	40	30	30
Y	50	40	30
Z	10	30	40

Единственным эффективным и равноценным распределением оказывается следующее: отдать X участнику 1, Y — участнику 2 и Z — участнику 3. Очевидно, что такое (40 — 40 — 40) распределение равноценно, можно показать, что оно и эффективно.

Но оно не является свободным от зависти, потому что 1 будет завидовать 2, получившему Y, который первый оценил в 50 очков. Если отдать Y участнику 1, а X — 2, оставив Z участнику 3, то распределение будет эффективным, но перестанет быть равноценным, да и свободным от зависти все равно не станет, потому что 2 будет завидовать 1.

Конечно, этот трехсторонний пример не исключает возможности существования ситуации, когда все три критерия будут удовлетворены, он просто показывает, что не всегда возможно гарантировать удовлетворение всем критериям справедливого дележа, когда в нем участвует больше двух сторон. Невозможность одновременного выполнения всех трех требований (отсутствия зависти, эффективности и равноценности) означает трудный выбор между ними в ситуациях, в которых участвует более двух сторон.

8.9

Задачи

1. Разрешение трудовых споров [6]. В начале 2003 г. авиадиспетчеры некоторых аэропортов России объявили забастовку, требуя повышения заработной платы. Бастующие объясняли свое требование тем, что заработная плата диспетчеров в Западной Европе намного выше. Министерство труда сначала отказало им в удовлетворении запросов, мотивируя это тем, что нагрузка на одного диспетчера в России намного меньше, чем у его коллеги в Западной Европе. Однако после того, как забастовка продолжилась, министерство удовлетворило все требования бастующих.

Попробуйте проанализировать эту ситуацию, используя не только параметры заработной платы и часовой нагрузки, и постройте решение, удовлетворительное для обеих сторон.

2. Раздел имущества при разводе. При разводе супруги делят следующее имущество:

а) квартиру в Париже;

б) дачу в Подмосковье, примерно той же стоимости, что и квартира в Париже;

в) автомобиль Мерседес-500;

г) джип Lexus;

д) квартиру в Москве;

е) квартиру в Туле;

ж) акции общей стоимостью 15 млн. руб.

Постройте оценки имущества мужем и женой. Используя процедуру «подстраивающийся победитель», постройте справедливый дележ имущества.

3. Предположим, что Вы представляете группу консультантов, в которую входят «аналитики» и «расчетчики». Постройте перечень работ, которые должны выполнить члены Вашей группы, оценки работ разными членами группы и решите задачу распределения работ с помощью процедуры «подстраивающийся победитель».

4. Слияние фирм. Рассмотрим проблему, возникающую при слиянии двух фирм, A и B. Их оценки относительно четырех вопросов показаны ниже.

Проблема	*Фирма*	
	A	*B*
Название фирмы	10	20
Местонахождение штаб-квартиры	30	30
Назначение президента	10	20
Назначение исполнительного директора	20	10
Увольнение персонала	30	20

Постройте решение, используя процедуру «подстраивающийся победитель».

5. Предположим, что страна A ведет со страной B переговоры об аренде на территории B военной базы в прибрежной зоне. Основные пункты, по которым ведутся переговоры, и оценки важности каждого пункта для стран A и B представлены ниже.

№ *п/п*	*Пункт переговоров*	*Страна*	
		A	*B*
1	Право на использование базы в случае военных действий в третьих странах	22	9
2	Использование прибрежных вод	22	15
3	Продолжительность аренды	15	15
4	Компенсации	11	15
5	Использование прилегающей территории	14	3
6	Количество персонала	6	5
7	Право страны B на получение соответствующей информации от страны A	4	11
8	Юрисдикция	2	7
9	Права на продление аренды	2	7
10	Гарантии безопасности стране B	2	13

Пользуясь процедурой «подстраивающийся победитель», определите для обеих стран справедливый дележ. Продумайте, как страна A могла бы воспользоваться знанием предпочтений страны B. Аналогичный вопрос для страны B.

6. Пусть страны, входящие в два блока, претендуют на раздел некоторой спорной территории, состоящей из нескольких участков, которые назовем A, B, C, D, E.

Блок 1 оценивает значение этих участков по трем параметрам: а) политическая кооперация, б) военное значение, в) экономическая выгода.

Блок 2 оценивает участки по двум параметрам: а) политическая кооперация и экономическая выгода, б) сохранение контроля.

Оценки участков территории блоками 1 и 2 по этим параметрам представлены ниже.

Участок	*Блок 1*			*Блок 2*	
	$а_1$)	$б_1$)	$в_1$)	$а_2$)	$б_2$)
A	40	30	20	0	0
B	30	0	0	0	30
C	10	0	0	20	30
D	10	30	30	40	40
E	10	40	50	40	0
Итого	100	100	100	100	100

Рассмотрите комбинации сценариев: $а_1$)—$а_2$), ..., $в_1$)—$б_2$). Таких сценариев шесть. Проанализируйте их. Примените процедуру «подстраивающийся победитель». Проанализируйте получающиеся решения. Какие меры Вы можете предложить, чтобы удовлетворить требования обоих блоков?

Замечание. Этот пример заимствован из [10], где рассматривается проблема контроля над островами Спратли со стороны Китая и стран АСЕАН.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

Глава 1

1.

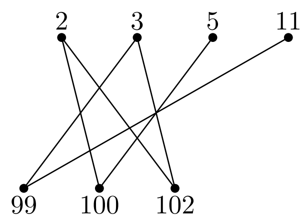


Рис. Р.1

Двудольный граф показан на рис. Р.1.

$\delta(2) = 2$; $\delta(3) = 2$; $\delta(5) = 1$; $\delta(11) = 1 \Rightarrow \sum\limits_{x \in X} \delta(x) = 2 + 2 + 1 + 1 = 6$.

$\delta(99) = 2$; $\delta(100) = 2$; $\delta(102) = 2 \Rightarrow \sum\limits_{y \in Y} \delta(y) = 2 + 2 + 2 = 6$.

$|\Gamma| = 6$.

Таким образом, имеем, что верно равенство

$$|\Gamma| = \sum_{x \in X} \delta(x) = \sum_{y \in Y} \delta(y),$$

т.е. теорема 1 выполняется.

2. а) $\forall x \in X\ \delta(x) = s$, т.к. каждая вершина $x \in X$ соединена дугой с каждой вершиной в Y, а их s штук, т.е. столько же дуг выходят из вершины x.

б) $\forall y \in Y\ \delta(y) = r$.

в) $|K_{r,s}| = \sum\limits_{x \in X} \delta(x)$.

$\forall x \in X\ \delta(x) = s.$

$|K_{r,s}| = \sum\limits_{x \in X} \delta(x) = s \cdot |X| = s \cdot r.$

г) Граф $K_{3,4}$ показан на рис. Р.2.

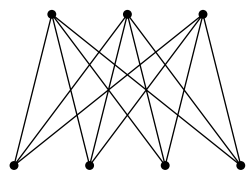


Рис. Р.2

3. **а)** Для нахождения дефицита указанного графа составим таблицу.

A	$J(A)$	$\lvert A\rvert - \lvert J(A)\rvert$
$\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	$4 - 4 = 0$
$\{m_1, m_2, m_3\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	$3 - 4 = -1$
$\{m_1, m_2, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	$3 - 4 = -1$
$\{m_1, m_3, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	$3 - 4 = -1$
$\{m_2, m_3, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	$3 - 4 = -1$
$\{m_1, m_2\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	$2 - 4 = -2$
$\{m_1, m_3\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$	$2 - 3 = -1$
$\{m_1, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	$2 - 4 = -2$
$\{m_2, m_3\}$	$\{w_1, w_2, w_4\}$	$2 - 3 = -1$
$\{m_2, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	$2 - 4 = -2$
$\{m_3, m_4\}$	$\{w_2, w_3, w_4\}$	$2 - 3 = -1$
$\{m_1\}$	$\{w_1, w_3\}$	$1 - 2 = -1$
$\{m_2\}$	$\{w_1, w_2, w_4\}$	$1 - 3 = -2$
$\{m_3\}$	$\{w_2\}$	$1 - 1 = 0$
$\{m_4\}$	$\{w_2, w_3, w_4\}$	$1 - 3 = -2$
$\varnothing$	$\varnothing$	$0 - 0 = 0$

$$d = \max_{A \subseteq M}(|A| - |J(A)|) = 0.$$

Значит, в графе G существует совершенное паросочетание, т.е. пары можно организовать таким образом, что все юноши и девушки смогут участвовать в танцах.

б) Для нахождения дефицита указанного графа составим таблицу.

A	$J(A)$	$\|A\| - \|J(A)\|$
M	W	$5-7=-2$
$\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_5, w_6\}$	$4-5=-1$
$\{m_2, m_3, m_4, m_5\}$	W	$4-7=-3$
$\{m_1, m_2, m_4, m_5\}$	W	$4-7=-3$
$\{m_1, m_3, m_4, m_5\}$	W	$4-7=-3$
$\{m_1, m_2, m_3, m_5\}$	W	$4-7=-3$
$\{m_1, m_2, m_3\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_5\}$	$3-4=-1$
$\{m_1, m_2, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_5, w_6\}$	$3-5=-2$
$\{m_1, m_2, m_5\}$	W	$3-7=-4$
$\{m_1, m_3, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_5, w_6\}$	$3-5=-2$
$\{m_1, m_3, m_5\}$	W	$3-7=-4$
$\{m_1, m_4, m_5\}$	W	$3-7=-4$
$\{m_2, m_3, m_4\}$	$\{w_2, w_3, w_5, w_6\}$	$3-4=-1$
$\{m_2, m_3, m_5\}$	W	$3-7=-4$
$\{m_3, m_4, m_5\}$	W	$3-7=-4$
$\{m_2, m_4, m_5\}$	$\{w_1, w_2, w_4, w_5, w_6, w_7\}$	$3-6=-3$
$\{m_1, m_2\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_5\}$	$2-4=-2$
$\{m_1, m_3\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$	$2-3=-1$
$\{m_1, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_6\}$	$2-4=-2$
$\{m_1, m_5\}$	W	$2-7=-5$
$\{m_2, m_3\}$	$\{w_2, w_3, w_5\}$	$2-3=-1$
$\{m_2, m_4\}$	$\{w_2, w_5, w_6\}$	$2-3=-1$
$\{m_2, m_5\}$	$\{w_1, w_2, w_4, w_5, w_6, w_7\}$	$2-6=-4$
$\{m_3, m_4\}$	$\{w_2, w_3, w_6\}$	$2-3=-1$
$\{m_3, m_5\}$	$\{w_1, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}$	$2-6=-4$
$\{m_4, m_5\}$	$\{w_1, w_2, w_4, w_5, w_6, w_7\}$	$2-6=-4$
$\{m_1\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$	$1-3=-2$
$\{m_2\}$	$\{w_2, w_5\}$	$1-2=-1$
$\{m_3\}$	$\{w_3\}$	$1-1=0$
$\{m_4\}$	$\{w_2, w_6\}$	$1-2=-1$
$\{m_5\}$	$\{w_1, w_4, w_5, w_6, w_7\}$	$1-5=-4$
$\varnothing$	$\varnothing$	$0-0=0$

$$d = \max_{A \subseteq M}(|A| - |J(A)|) = 0.$$

Это означает, что в данном графе существует совершенное паросочетание, т.е. все юноши смогут найти пару для участия в танцах.

Построим совершенное паросочетание.

Начнем построение с паросочетания $M = \{m_1w_1, m_2w_2, m_3w_3\}$. Найдем для него чередующуюся цепь. Возьмем вершину m_4, которой не инцидентна никакая дуга из M. Дуги из M не инцидентны w_6. Для M найдена чередующаяся цепь: m_4w_6. Можем построить паросочетание $M' = \{m_1w_1, m_2w_2, m_3w_3, m_4w_6\}$.

Найдем чередующуюся цепь для M': возьмем вершину m_5, которой не инцидентна никакая дуга из M'. Чередующаяся цепь для M': m_5w_5. Тогда $M'' = \{m_1w_1, m_2w_2, m_3w_3, m_4w_6,\ m_5w_5\}$.

Это паросочетание является совершенным. Изобразим его ниже.

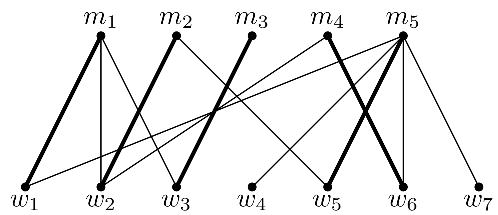


Рис. Р.3

4. а) $d = 2$, совершенное паросочетание не существует;

б) $d = 1$, совершенное паросочетание не существует.

5. Начнем построение с паросочетания $M = \{av, bz, cy\}$. Найдем чередующуюся цепь для M. Начнем с вершины d, которой не инцидентны дуги из M (рис. Р.4).

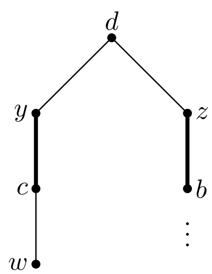


Рис. Р.4

Вершине w не инцидентна никакая дуга из M. Значит, найдена чередующаяся цепь для M: dy, yc, cw. Исключим дугу yc из M и включим в M' дуги dy и cw. Получим паросочетание $M' = \{av, bz, cw, dy\}$. Повторим процесс поиска чередующейся цепи для паросочетания M'. С этой целью возьмем вершину e (ей не инцидентна никакая дуга из M') (рис. Р.5 на с. 227).

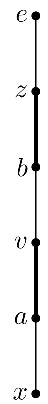


Рис. Р.5

Вершине x не инцидентна никакая дуга из M'. Значит, найдена чередующаяся цепь: ez, zb, bv, va, ax. Исключим из M' дуги zb и va и добавим дуги ez, bv, ax.

$$M'' = \{ax, bv, cw, dy, ez\}.$$

Это и есть совершенное паросочетание (рис. Р.6).

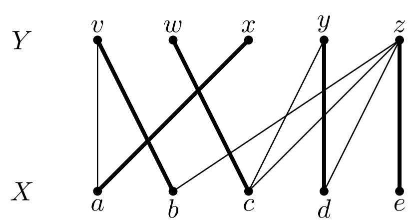


Рис. Р.6

6. а) Пусть A непусто. Выберем произвольную вершину $x \in A$. Из x ведут дуги в не менее чем δ вершин множества Y, т.е. $|J(\{x\})| \geq \delta$, а дуги, выходящие из A, включают дуги, выходящие из x, поэтому $|J(A)| \geq |J(\{x\})| \geq \delta$.

Так как в A не больше вершин, чем во всем X, то $|A| - |J(A)| \leq |X| - |J(A)| \leq n - \delta$.

Если A пусто, то $J(A)$ тоже пусто и $|A| - |J(A)| = 0 - 0 = 0$. С другой стороны, степень любой вершины из G не может превосходить n и соответственно $n \geq \delta$ и $|A| - |J(A)| = 0 \leq n - \delta$.

б) Пусть A — произвольное подмножество X и $|A| = k$. Тогда $|X\backslash A| = n - k$. Поэтому из вершин, входящих в $X\backslash A$, выходит не более $(n - k)n$ дуг. Соответственно из вершин, входящих в A, выходит более $(m - 1)n - (n - k)n = (m + k - n - 1)n$ дуг. Так как в каждую вершину Y ведет не более n дуг и, тем более, не более n дуг, соединяющих Y с элементами A, то дуги из вершин, входящих в A, ведут в более чем $(m+k-n-1)n/n = m+k-n-1$ вершин из Y. То есть $|J(A)| > m + k - n - 1$, следовательно $|J(A)| \geq m + k - n$. Тогда $|A| - |J(A)| \leq k - (m + k - n) = n - m$ и

$$d(G) = \max_{A \subseteq X} \big(|A| - |J(A)|\big) \leq n - m.$$

Поэтому в графе G существует паросочетание с не менее чем $n - (n - m) = m$ дугами.

7. Начнем с паросочетания $M = \{Мэx_1, Мx_4, Иэx_5, Фx_6\}$. Данное паросочетание является совершенным, а значит, и максимальным.

Максимальное паросочетание в данном графе можно проинтерпретировать следующим образом: представим себе, что университет должен выставить команду для участия в многопрофильной олимпиаде, при этом каждый студент может участвовать в олимпиаде только по одному предмету. Состав команды, соответствующий максимальному паросочетанию, может обеспечить наиболее успешное выступление университета на олимпиаде.

8. Пусть $C_{\min}$ — одно из минимальных вершинных покрытий графа G, M — максимальное паросочетание в G. Рассмотрим дуги, входящие в M. Хотя бы один из концов каждой из них должен входить в $C_{\min}$, поэтому $|M| \leq |C_{\min}|$.

Пусть $|X| = n$, d — дефицит G, $A \subseteq X$ — множество, на котором этот дефицит реализуется, т.е. $|A| - |J(A)| = d$. Положим $C = (X \setminus A) \cup J(A)$ и покажем, что C — вершинное покрытие.

Действительно, дуга может соединять либо вершины из $(X \setminus A)$ и Y, либо вершины из A и $J(A)$. В первом случае один из концов дуги входит в $(X \setminus A)$, во втором — в $J(A)$, что и требовалось.

Но $|C| = |X \setminus A| + |J(A)| = |X| - |A| + |J(A)| = n - d = |M|$, следовательно $|C_{min}| \leq |C| = |M|$. Выше доказано, что $|M| \leq |C_{\min}|$, следовательно $|C_{min}| = |M|$.

9. 1) Очевидно, что условие Холла выполняется:

$\forall S_i\,(i=1,\dots,4)\ |S_i| \geq 1$;

$\forall S_i, S_j\ i \neq j\ |S_i \bigcup S_j| \geq 2$;

$\forall S_i, S_j, S_k,\ i \neq j, j \neq k, i \neq k\ |S_i \bigcup S_j \bigcup S_k| \geq 3$;

$|S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3 \bigcup S_4| = 5 \geq 4$.

Значит, существует трансверсаль для семейства множеств $\mathcal{L}$.

2) Найдем трансверсаль для $\mathcal{L}$ (или совершенное паросочетание для графа G).

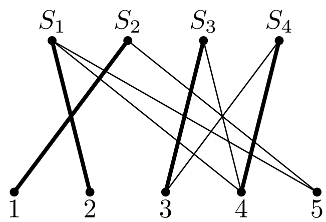


Рис. Р.7

Трансверсаль: $(2, 1, 3, 4)$. Совершенное паросочетание: $\{(S_1, 2), (S_2, 1), (S_3, 3), (S_4, 4)\}$ (рис. Р.7).

10. Проверим выполнимость условия Холла. Очевидно, что оно нарушается, т.к. для S_1, S_2, S_4 имеем: $|S_1 \cup S_2 \cup S_4| = |\{1, 2\}| = 2$, но $2 < 3$ (т.е. три множества содержат только два элемента).

Это означает, что трансверсаль семейства множеств $\mathcal{L}$ не существует.

11. Можно, если любые k комиссий ($k = 1, 2, \dots, n$) содержат не менее k депутатов, т.е. если выполняется условие Холла для семейства множеств $\mathcal{L}$.

12. Заметим, что $n \leq m$ (иначе нельзя заключить n браков); n браков можно заключить, если выполняется условие Холла, т.е. если любые k женщин считают приемлемыми в смысле супружества не менее k мужчин ($k = 1, 2, \dots, n$).

13. а) Пожелания всех комитетов невозможно учесть, т.к. комитет C_5 не может в этом случае никого выдвинуть на собрание. C_5 мог выдвинуть только e или f, но они выдвинуты другими комитетами — C_1 и C_4 соответственно.

б) $M = \{C_1a, C_2b, C_3d, C_4f, C_5e\}$.

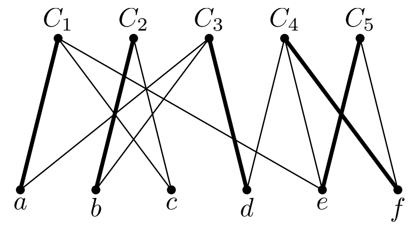


Рис. Р.8

Это паросочетание совершенное, значит, оно будет и максимальным (рис. Р.8).

в) Пусть комитет C_1 выдвигает кандидатуру e.

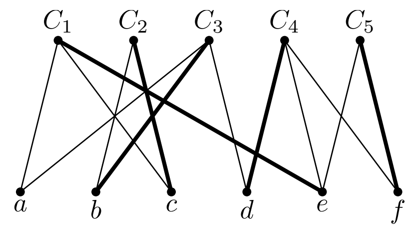


Рис. Р.9

1) Рассмотрим паросочетание $M = \{(C_1, e)\}$.

2) $f : (C_5, f)$ — чередующаяся цепь. $M' = \{(C_1, e), (C_5, f)\}$.

3) $d : (C_4, d)$ — чередующаяся цепь. $M'' = \{(C_1, e), (C_4, d), (C_5, f)\}$.

4) $c : (C_2, c)$ — чередующаяся цепь. $M''' = \{(C_1, e), (C_2, c), (C_4, d), (C_5, f)\}$.

5) $b : (C_3, b)$ — чередующаяся цепь. $M_{соверш.} = \{(C_1, e), (C_2, c), (C_3, b), (C_4, d), (C_5, f)\}$ (рис. Р.9).

Таким образом, если комитет C_1 выдвигает кандидатуру e, то можно построить систему полных представителей.

Пусть комитет C_2 выдвигает кандидатуру b.

1) Рассмотрим паросочетание $M = \{(c_2, b)\}$.

2) a: (C_3, a) — чередующаяся цепь. $M' = \{(C_2, b), (C_3, a)\}$.

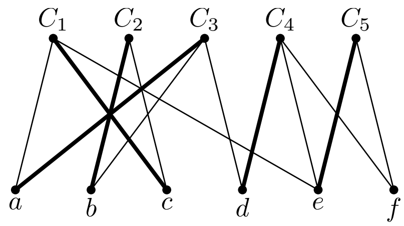


Рис. Р.10

3) c: (C_1, c) — чередующаяся цепь. $M'' = \{(C_1, c), (C_2, b), (C_3, a)\}$.

4) d: (C_4, d) — чередующаяся цепь. $M''' = \{(C_1, c), (C_2, b), (C_3, a), (C_4, d)\}$.

5) e: (C_5, e) — чередующаяся цепь. $M_{\text{соверш.}} = \{(C_1, c), (C_2, b), (C_3, a), (C_4, d), (C_5, e)\}$ (рис. Р.10).

Значит, если комитет C_2 выдвигает кандидатуру b, то можно построить полную систему представителей.

Глава 2

1. Индивидуальные предпочтения часто содержат цикл. Например, преподаватель, проснувшись утром, размышляет:

— Хочется спать. Но, раз я проснулся так рано, лучше покатаюсь на лыжах. Нет, нужно проверять контрольные работы. Но эта морока на весь день... Лучше еще немного поспать.

Полученное в результате отношение связно, но нетранзитивно и содержит цикл (рис. Р.11).

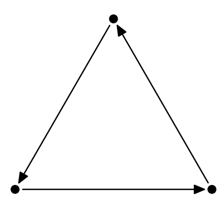


Рис. Р.11

2.

$$\begin{array}{ll} \mu' \succ_{m_1} \mu; & \mu' \succ_{w_1} \mu; \\ \mu \succ_{m_2} \mu'; & \mu =_{w_2} \mu'; \\ \mu =_{m_3} \mu'; & \mu =_{w_3} \mu'; \\ \mu =_{m_4} \mu'; & \mu' \succ_{w_4} \mu. \\ \mu \succ_{m_5} \mu'. & \end{array}$$

3. а) Блокирующие пары: (m_3, w_2), (m_3, w_1).

б) Блокирующие пары: (m_1, w_2), (m_1, w_1).

4. В данном паросочетании пара (m_4, w_2) является блокирующей. Значит, паросочетание не устойчиво.

5. μ_M:

Шаг 1: m_1, m_2 — w_1, m_3 — w_2, w_1 отвергает m_2.

$$\mu_1 = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & \end{array}.$$

Шаг 2: m_2 — w_3, никто не отвергается.

$$\mu_M = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{array}.$$

Если $\mu(m_1) \neq w_1$, то пара (m_1, w_1) — блокирующая.

Тогда возможны только два случая: $\mu' = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{array}$ (устойчивое по построению) или $\mu'' = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array}$.
(Здесь есть блокирующая пара (m_2, w_3), т.е. паросочетание не устойчиво.)

Устойчиво только паросочетание

$$\mu = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{array}.$$

6. 1) Построим паросочетание μ_M:

Шаг 1: m_1, m_3 — w_1; m_2 — w_2, w_1 отвергает m_3.

$$\mu_1 = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & & \end{array}.$$

Шаг 2: m_3 — w_3, никто не отвергается.

$$\mu_M = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & (w_4) \end{array}.$$

μ_M устойчиво по построению.

2) Построим паросочетание μ_W:

Шаг 1: w_1, w_3 — m_1; w_2 — m_2; w_4 — m_3, m_1 отвергает w_3.

$$\mu_1 = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array}.$$

Шаг 2: w_3 — m_3, m_3 отвергает w_4.

$$\mu_2 = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array}.$$

Шаг 3: w_4 — m_2, m_2 отвергает w_4, $\mu_3 = \mu_2$.

Шаг 4: w_4 — m_1, m_1 отвергает w_4, $\mu_4 = \mu_3$.

Шаг 5: Список предпочтений w_4 исчерпан, поэтому

$$\mu_W = \mu_4 = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & (w_4) \end{array}.$$

Получаем $\mu_M = \mu_W$.

7.

$$\mu_M = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{array}; \qquad \mu_W = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array}.$$

8. 1) Построим паросочетание μ_M:

Шаг 1: мужчине m_1 приписывается w_3, m_2 и m_3 — w_4, m_4 и m_5 — w_1. Женщина w_4 отвергает мужчину m_2 как менее предпочтительного, а w_1 отвергает m_5. Получаем паросочетание

$$\mu_1 = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_4 & & m_1 & m_3 \end{array}.$$

Шаг 2: отвергнутому на первом шаге мужчине m_2 приписывается женщина w_3 (следующая в его списке предпочтений после отвергнувшей его w_4), а m_5 приписывается w_2. Женщине w_3 оказались приписаны двое мужчин: m_1 и m_2. Для нее m_2 менее предпочтительный, поэтому w_3 отвергает его. На этом шаге имеем:

$$\mu_2 = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_4 & m_5 & m_1 & m_3 \end{array}.$$

Шаг 3: на предыдущем шаге был отвергнут мужчина m_2, ему приписывается женщина w_1 (следующая в списке предпочтений после той, которая его отвергла, т.е. после w_1). Женщине w_1 приписаны теперь m_4 и m_2. Она выбирает из них m_2 (как более предпочтительного для нее). Имеем

$$\mu_3 = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_5 & m_1 & m_3 \end{matrix}\,.$$

Шаг 4: отвергнутому ранее мужчине m_4 приписываем следующую в его предпочтениях женщину после отвергнувшей его w_1, т.е. w_4. Женщине w_4 приписаны двое мужчин: m_3 и m_4. Она отвергает m_3 (как менее предпочтительного).

Получаем паросочетание

$$\mu_4 = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_5 & m_1 & m_4 \end{matrix}\,.$$

Шаг 5: мужчине m_3 приписываем женщину w_3, которая выбирает теперь между ним и m_1. Она отвергает мужчину m_3. Имеем

$$\mu_5 = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_5 & m_1 & m_4 \end{matrix}\,.$$

Шаг 6: мужчине m_3 приписываем следующую по предпочтению после w_3 женщину w_1. Женщине w_1 приписаны мужчины m_2 и m_3. Она отвергает m_2. Получаем

$$\mu_6 = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_3 & m_5 & m_1 & m_4 \end{matrix}\,.$$

Шаг 7: мужчине m_2 приписываем женщину w_2 (следующую в его предпочтениях после отвергнувшей его w_1). Женщина w_2 выбирает между m_5 и m_2 и отвергает m_5. Получаем паросочетание

$$\mu_7 = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_3 & m_2 & m_1 & m_4 \end{matrix}\,.$$

Шаг 8: отвергнутому на шаге 7 мужчине m_5 приписываем женщину w_4, которая выбирает теперь между ним и m_4. Она отвергает m_4. Имеем

$$\mu_8 = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_3 & m_2 & m_1 & m_5 \end{matrix}\,.$$

Шаг 9: мужчине m_4 приписываем женщину w_2. Она выбирает между m_4 и m_2 и отвергает m_4. Паросочетание имеет вид:

$$\mu_9 = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_3 & m_2 & m_1 & m_5 \end{matrix} .$$

Шаг 10: мужчине m_4 приписываем следующую (после w_2) по предпочтительности женщину w_3, которая теперь делает выбор между ним и m_1. Она отвергает m_1. Получаем

$$\mu_{10} = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_3 & m_2 & m_4 & m_5 \end{matrix} .$$

Шаг 11: мужчине m_1 приписываем женщину w_1, и она делает выбор между ним и m_3 в пользу m_1. Имеем

$$\mu_{11} = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_4 & m_5 \end{matrix} .$$

Шаг 12: отвергнутому мужчине m_3 приписываем женщину w_2. Она выбирает между m_2 и m_3 и отвергает m_2. Получаем паросочетание

$$\mu_{12} = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix} .$$

Шаг 13: мужчине m_2 приписываем следующую по предпочтительности женщину после отвергнувшей его w_2. Но такой женщины в списке нет. Таким образом, алгоритм останавливается. Паросочетание μ_M имеет вид:

$$\mu_M = \begin{matrix} w_1 & (m_2) & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix} .$$

Оно будет устойчивым (по теореме 1).

2) Построим паросочетание μ_W.

Шаг 1: женщине w_1 приписываем мужчину m_1, w_2 — m_3, w_3 — m_5 и w_4 — m_1. Мужчине m_1 оказались приписаны две женщины w_1 и w_4. Он отвергает женщину w_4 как менее предпочтительную для него. Мужчина m_5 отвергает женщину w_3. Имеем

$$\mu_1 = \begin{matrix} w_1 & & w_2 & & \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}.$$

Шаг 2: отвергнутой ранее женщине w_4 приписываем следующего по предпочтительности мужчину m_5, а женщине w_3 — m_4. Каждой женщине приписано по одному мужчине, т.е. на этом шаге никто не отвергнут. Значит, алгоритм останавливается и получаем устойчивое паросочетание

$$\mu_W = \begin{matrix} w_1 & (m_2) & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}.$$

Заметим, что $\mu_M = \mu_W$. Это означает, что для всех мужчин и женщин оба паросочетания одинаковы по предпочтительности.

9.

$$\mu_M = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_4) \\ m_1 & m_3 & m_5 & m_2 & m_4 \end{matrix}; \quad \mu_W = \begin{matrix} w_1 & w_4 & w_2 & (m_4) & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}.$$

10.

$$\mu_M = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_3) \\ m_1 & m_2 & m_4 & m_5 & m_3 \end{matrix}; \quad \mu_W = \begin{matrix} w_1 & w_2 & (m_3) & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}.$$

11.

$$\mu_M = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_3 & m_4 & m_1 & m_2 \end{matrix}; \quad \mu_W = \begin{matrix} w_1 & w_4 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{matrix}.$$

12. Пусть $M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$, а предпочтения участников таковы:

$$P(m_1) = w_1, w_2; \quad P(w_1) = m_2, m_1;$$
$$P(m_2) = w_2, w_1; \quad P(w_2) = m_1, m_2.$$

В этом случае

$$\mu_M = \begin{matrix} w_1 & w_2 \\ m_1 & m_2 \end{matrix},$$

что для женщин не лучший вариант. Но женщины могут изменить свои предпочтения следующим образом:

$$P(w_1) = m_2, (w_1), m_1;$$
$$P(w_2) = m_1, (w_2), m_2.$$

Теперь

$$\mu_M = \begin{matrix} w_1 & w_2 \\ m_2 & m_1 \end{matrix}$$

— наилучший из возможных вариантов для женщин.

13. Например, можно рассмотреть ситуацию, в которой все участники игры получают в качестве пары самого предпочтительного из возможных партнеров. В этом случае искажение предпочтений, в лучшем случае, ничего не изменит.

14. *Указание:* рассмотрите все возможные паросочетания.

Ответ: студентов рекомендуется распределить по комнатам следующим образом: a с c и b с d.

15. $\mu_1 = \begin{matrix} A & B \\ \varnothing & \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \end{matrix}$ — $(A, \{S_1\})$ — блокирующая пара;

$\mu_2 = \begin{matrix} A & B \\ \{S_1\} & \{S_2, S_3, S_4\} \end{matrix}$ — $(A, \varnothing)$ — блокирующая пара;

$\mu_3 = \begin{matrix} A & B \\ \{S_2\} & \{S_1, S_3, S_4\} \end{matrix}$ — $(A, \{S_1\})$ — блокирующая пара;

$\mu_4 = \begin{matrix} A & B \\ \{S_3\} & \{S_1, S_2, S_4\} \end{matrix}$ — $(A, \{S_1\})$ — блокирующая пара;

$\mu_5 = \begin{matrix} A & B \\ \{S_4\} & \{S_1, S_2, S_3\} \end{matrix}$ — $(A, \{S_1\})$ — блокирующая пара;

$\mu_6 = \begin{matrix} A & B \\ \{S_1, S_2\} & \{S_3, S_4\} \end{matrix}$ — $(A, \{S_4\})$ — блокирующая пара;

$\mu_7 = \begin{matrix} A & B \\ \{S_1, S_3\} & \{S_2, S_4\} \end{matrix}$ — $(B, \{S_3\})$ — блокирующая пара;

$\mu_8 = \begin{matrix} A & B \\ \{S_1, S_4\} & \{S_2, S_3\} \end{matrix}$ — $(A, \{S_2\})$ — блокирующая пара;

$\mu_9 = \begin{matrix} A & B \\ \{S_2, S_3\} & \{S_1, S_4\} \end{matrix}$ — $(B, \{S_3\})$ — блокирующая пара;

$\mu_{10} = \begin{matrix} A & B \\ \{S_2, S_4\} & \{S_1, S_3\} \end{matrix}$ — $(A, \{S_1\})$ — блокирующая пара;

$\mu_{11} = \begin{matrix} A & B \\ \{S_3, S_4\} & \{S_1, S_2\} \end{matrix}$ — $(A, \{S_1\})$ — блокирующая пара;

$\mu_{12} = \begin{matrix} A & B \\ \{S_1, S_2, S_3\} & \{S_4\} \end{matrix}$ — $(B, \{S_3\})$ — блокирующая пара;

$\mu_{13} = \begin{matrix} A & B \\ \{S_1, S_3, S_4\} & \{S_2\} \end{matrix}$ — $(B, \{S_2, S_3\})$ — блокирующая пара;

$\mu_{14} = \begin{matrix} A & B \\ \{S_1, S_2, S_4\} & \{S_3\} \end{matrix}$ — нет блокирующих пар;

$\mu_{15} = \begin{matrix} A & B \\ \{S_2, S_3, S_4\} & \{S_1\} \end{matrix}$ — $(B, \{S_3\})$ — блокирующая пара;

$\mu_{16} = \begin{matrix} A & B \\ \{S_1, S_2, S_3, S_4\} & \varnothing \end{matrix}$ — $(B, \{S_3\})$ — блокирующая пара.

Глава 3

1. а) Рис. P.12 (с. 239).

б) Рис. P.13 (с. 239). Заметим, что $P'' \subset P'$, поэтому $P' \cup P'' = P'$, $P' \cap P'' = P''$.

в) Рис. P.14 (с. 239).

г) Рис. P.15 (с. 239).

2. а) Рис. P.16 (с. 240).

б) Рис. P.17 (с. 240).

в) Рис. P.18 (с. 241). P'' совпадает с одноименным бинарным отношением из предыдущего пункта.

г) Рис. P.19 (с. 241). Отношения для P'' отличаются от соответствующих отношений для P' только перестановкой букв.

3. Рис. P.20 (с. 241).

4. 1) x — дед y, если существует человек z такой, что x — отец z, а z — отец или мать y. Таким образом, $P_3 = P_1 \cdot (P_1 \cup P_2)$.

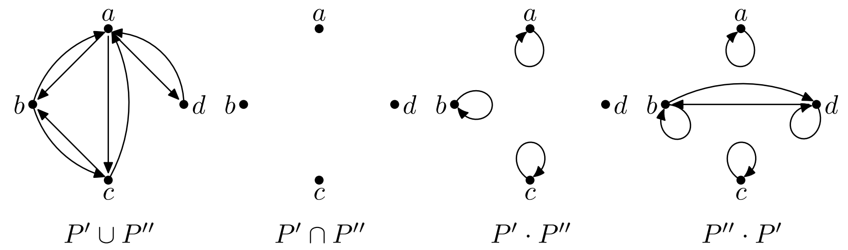


Рис. Р.12

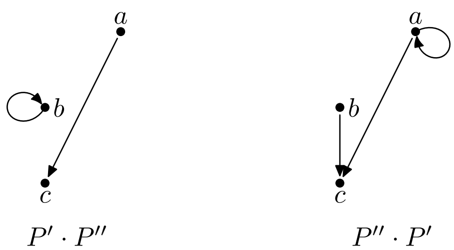


Рис. Р.13

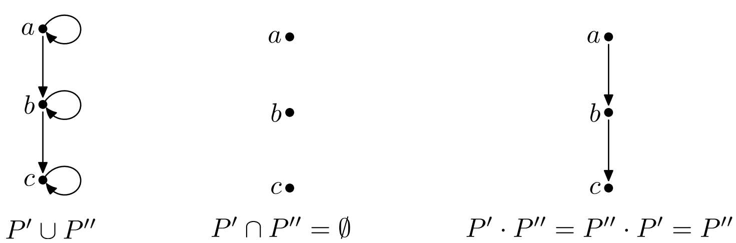


Рис. Р.14

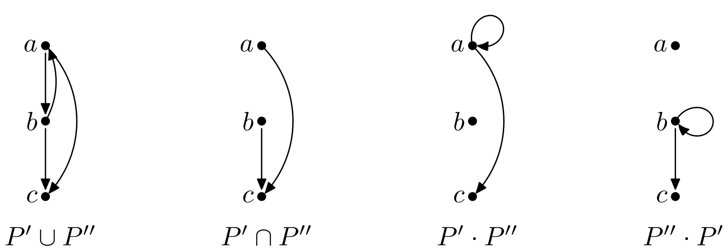


Рис. Р.15

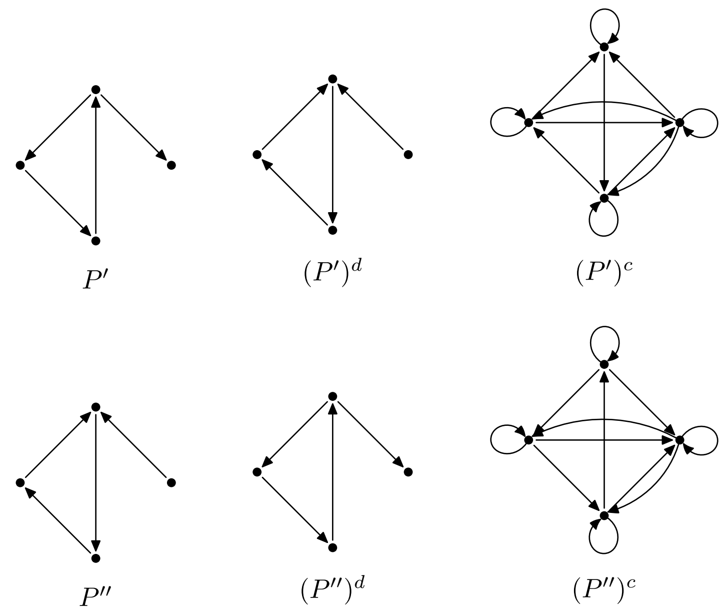


Рис. Р.16

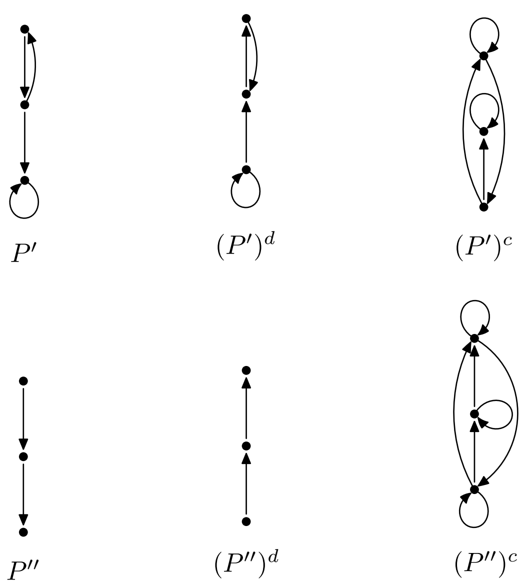


Рис. Р.17

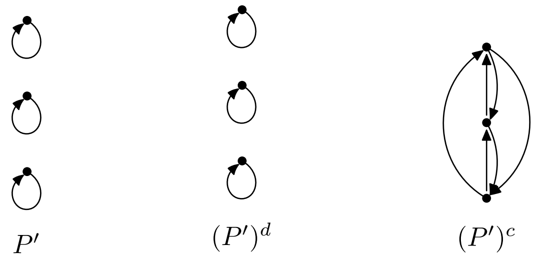


Рис. Р.18

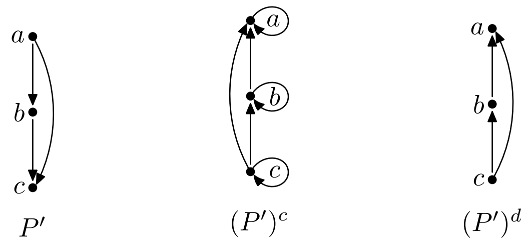


Рис. Р.19

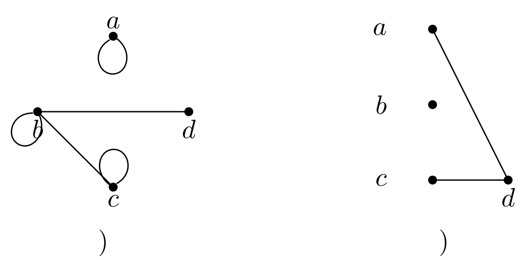


Рис. Р.20

2) x и y — дети одной матери, если существует женщина z такая, что z — мать x и z — мать y. То есть zP_2x и zP_2y, что равносильно xP_2^dz и zP_2y. А это в свою очередь означает, что $x(P_2^d \cdot P_2)y$. Итак, $P_4 = P_2^d \cdot P_2$.

3) x — племянник y, если существует z такой, что z — брат или сестра y и z — отец или мать x. Пусть P_6 — бинарное отношение «быть братом или сестрой». Тогда xP_5y, если существует z такой, что yP_6z и $z(P_1 \cup P_2)x$, т.е. xP_5y равносильно тому, что $y(P_6 \cdot (P_1 \cup P_2))x$. Поэтому $P_5 = (P_6 \cdot (P_1 \cup P_2))^d$. Осталось выразить P_6.

xP_6y тогда и только тогда, когда существует z такое, что либо z — отец x и z — отец y, либо z — мать x и z — мать y, т.е. $P_6 = (P_1^d \cdot P_1) \cup (P_2^d \cdot P_2)$.

Итак, $P_5 = (((P_1^d \cdot P_1) \cup (P_2^d \cdot P_2)) \cdot (P_1 \cup P_2))^d$.

5. а) Пусть бинарные отношения P_1 и P_2 рефлексивны. Это означает, что для любого $x \in A$ $(x,x) \in P_1$ и $(x,x) \in P_2$. Но тогда для любого x пара $(x,x) \in (P_1 \cup P_2)$, что и означает рефлексивность отношения $P_1 \cup P_2$.

б) $P_1 \cup P_2$ антирефлексивно.

в) Пусть бинарные отношения P_1 и P_2 симметричны. Возьмем произвольную пару $(x,y) \in (P_1 \cup P_2)$. Это означает, что $(x,y) \in P_1$ или $(x,y) \in P_2$. Пусть, например, $(x,y) \in P_1$. Так как P_1 симметрично, то и $(y,x) \in P_1$. Аналогично, если $(x,y) \in P_2$, то и $(y,x) \in P_2$. Но в любом из этих случаев $(y,x) \in (P_1 \cup P_2)$, т.е. отношение $P_1 \cup P_2$ симметрично.

г) $P_1 \cup P_2$ может быть не асимметричным. Приведем контрпример. Пусть $A = \{x,y\}$, $P_1 = \{(x,y)\}$, $P_2 = \{(y,x)\}$. P_1 и P_2 асимметричны, но $P_1 \cup P_2 = \{(x,y),(y,x)\}$ не асимметрично.

д) $P_1 \cup P_2$ может быть не транзитивно. Рассмотрите пример из п. г).

6. а) $P_1 \cap P_2$ — рефлексивно.

б) $P_1 \cap P_2$ — антирефлексивно,

в) $P_1 \cap P_2$ — симметрично,

г) $P_1 \cap P_2$ — асимметрично,

д) $P_1 \cap P_2$ — транзитивно.

7. а) $P_1 \cdot P_2$ — рефлексивно.

б) $P_1 \cdot P_2$ не антирефлексивно. *Указание:* рассмотрите пример $A = \{x,y\}$, $P_1 = \{(x,y)\}$, $P_2 = \{(y,x)\}$.

в) Пусть $A = \{x,y,z\}$, $P_1 = \{(x,y),(y,x)\}$, $P_2 = \{(x,z),(z,x)\}$. P_1 и P_2 симметричны, но $P_1 \cdot P_2 = \{(y,z)\}$ не симметрично.

г) *Указание:* рассмотрите пример из п. б).

д) Пусть $A = \{x,y,z,t\}$, $P_1 = \{(x,y),(z,t)\}$, $P_2 = \{(y,z),(t,t)\}$. P_1 и P_2 транзитивны, но $P_1 \cdot P_2 = \{(x,z),(z,t)\}$ не транзитивно.

8. а) Так как P — связно, то $\forall x,y \in A$, $x \neq y$ $(x,y) \in P$ или $(y,x) \in P$.

Если $(x,y) \in P$, то $(y,x) \in P^d$. Если $(y,x) \in P$, то $(x,y) \in P^d$. Значит, имеем $\forall x,y \in A$ $x \neq y$ $(x,y) \in P^d$ или $(y,x) \in P^d$, т.е. отношение P^d — связно.

б) P — транзитивно. Поэтому $\forall x, y, z \in A$ $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$ $\Rightarrow (x, z) \in P$. Возьмем произвольные $x, y, z \in A$ такие, что $(x, y) \in P^d$ и $(y, z) \in P^d$. Значит, $(y, x) \in P$ и $(z, y) \in P$. В силу транзитивности бинарного отношения P имеем $(z, x) \in P$, т.е. $(x, z) \in P^d$. Это означает, что отношение P^d транзитивно.

в) P — ациклично, тогда $\forall t \geq 1$ $(x_1, x_2) \in P$, $(x_2, x_3) \in P$, ..., $(x_{t-1}, x_t) \in P \Rightarrow (x_t, x_1) \notin P$.

Возьмем произвольное $t \geq 1$ и $(x_1, x_2) \in P^d$, $(x_2, x_3) \in P^d$, ..., $(x_{t-1}, x_t) \in P^d$. Отсюда следует, что $(x_2, x_1) \in P$, $(x_3, x_2) \in P$, ..., $(x_t, x_{t-1}) \in P$, т.е. $x_t P x_{t-1} P x_{t-2} P \ldots P x_2 P x_1$. В силу ацикличности P имеем $(x_1, x_t) \notin P$, но тогда и $(x_t, x_1) \notin P^d$. Это означает, что бинарное отношение P^d — ациклично.

г) P — антирефлексивно и транзитивно. *Указание:* проведите доказательство методом от противного.

9. 1) Отношение P_1:

— рефлексивно, т.к. $\forall\, i$ $a_{ii} = 1$ (т.е. $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 1$);

— не антирефлексивно, т.к. бинарное отношение не может быть одновременно рефлексивным и антирефлексивным;

— не связно, т.к., например, $a_{12} = 0$ и $a_{21} = 0$;

— не полно, т.к., например, $a_{13} = 0$ и $a_{31} = 0$;

— не симметрично, т.к. $a_{23} = 1$, но $a_{32} \neq 1$;

— не асимметрично, т.к., например, $a_{11} = 1$;

— транзитивно. Необходимо проверить, что $\forall\, i, j, k$ если $a_{ij} = 1$ и $a_{jk} = 1$, то $a_{ik} = 1$. Условие посылки выполняется в случаях: $i = j = k$; $i = 2$, $j = k = 3$; $i = j = 2$, $k = 3$. Но в каждом из них $a_{ik} = 1$;

— не отрицательно транзитивно, т.к., например, $a_{21} = 0$ и $a_{13} = 0$, но $a_{23} \neq 0$.

Граф, представляющий бинарное отношение P_1, изображен на рис. Р.21а (с. 244).

2) Отношение P_2:

— не рефлексивно, т.к. $a_{33} \neq 1$;

— не антирефлексивно, т.к., например, $a_{11} \neq 0$;

— не связно, т.к., например, $a_{12} = 0$ и $a_{21} = 0$;

— не полно, т.к. не является связным;

— не симметрично, т.к. $a_{13} = 1$, но $a_{31} \neq 1$;

— не асимметрично, т.к., например, $a_{24} = 1$, но $a_{42} \neq 0$;

— транзитивно. Это проверяется непосредственно.

— не отрицательно транзитивно, т.к., например, $a_{21} = 0$ и $a_{14} = 0$, но $a_{24} \neq 0$.

Граф, представляющий бинарное отношение P_2, изображен на рис. Р.21б.

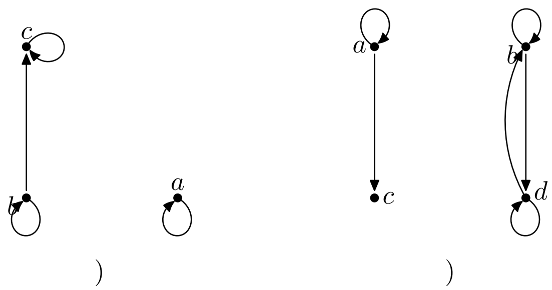


Рис. Р.21

10. $P = \{(2,2), (3,3), (5,5), (10,10), (12,12), (15,15), (10,2), (15,3)\}$. Нетрудно видеть, что P рефлексивно, не симметрично и не асимметрично, транзитивно, не отрицательно транзитивно (поскольку, например, $(10,15) \notin P$, $(15,2) \notin P$, но $(10,2) \in P$), не связно и не полно.

11. Отношение P:

— антирефлексивно, т.к. $u(x) - u(x) = 0 < \varepsilon$. Поэтому $\forall x \in A\ (x,x) \notin P$;

— асимметрично, т.к. если xPy, то $u(x) - u(y) > \varepsilon$. Следовательно, $u(y) - u(x) < -\varepsilon < \varepsilon$ и $(y,x) \notin P$;

— P в общем случае не рефлексивно и не симметрично. Также оно не полно, поскольку антирефлексивно;

— транзитивно, т.к. если xPy и yPz, то $u(x) - u(y) > \varepsilon$, $u(y) - u(z) > \varepsilon$, следовательно, $u(x) - u(z) > 2\varepsilon > \varepsilon$ и xPz;

— не отрицательно транзитивно, т.к. если $u(x) - u(y) \leq \varepsilon$, $u(y) - u(z) \leq \varepsilon$, то, $u(x) - u(z) \leq 2\varepsilon$, но $u(x) - u(z)$ может быть больше, чем ε;

— не связно, т.к. могут существовать такие x и y $(x \neq y)$, что $0 < u(x) - u(y) < \varepsilon$, а $u(y) - u(x) < 0 < \varepsilon$, и обе пары (x,y) и (y,x) не принадлежат P.

12. г) $(\Rightarrow)$ P — симметрично. Следовательно, $\forall x,y \in A\ (x,y) \in P \Rightarrow (y,x) \in P \Rightarrow (x,y) \in P^d$. Следовательно, $P \subseteq P^d$.

Докажем, что $P^d \subseteq P$. $\forall x, y \in A$ $(x,y) \in P^d \Rightarrow (y,x) \in P$. Следовательно, в силу симметричности P, $(x,y) \in P$. Таким образом, $P^d \subseteq P$. Значит, $P = P^d$.

$(\Leftarrow)$ $P = P^d \Rightarrow P \subseteq P^d$ и $P^d \subseteq P$.

Докажем, что если $\forall x, y \in A$ $(x,y) \in P$, то $(y,x) \in P$.

Пусть $(x,y) \in P$, следовательно, $(x,y) \in P^d$ и $(y,x) \in P$. Это значит, что P — симметрично.

е) $(\Rightarrow)$ P — связно $\Rightarrow \forall x, y \in A$ $x \neq y$ $(x,y) \in P$ или $(y,x) \in P$.

Докажем, что $P^c \cap P^{cd} \subseteq E$.

Рассмотрим произвольные $x, y \in A$ такие, что $(x,y) \in (P^c \cap P^{cd})$ $\Rightarrow (x,y) \in P^c$ и $(x,y) \in P^{cd}$. Отсюда следует, что $(y,x) \in P^c$. Тогда имеем, что $(y,x) \notin P$ и $(x,y) \notin P$. Но P — связно, следовательно, это возможно только если $x = y$. Значит, $\forall x, y : (x,y) \in (P^c \cap P^{cd})$ $\Rightarrow (x,y) \in E$, т.е. $P^c \cap P^{cd} \subseteq E$.

$(\Leftarrow)$ $P^c \cap P^{cd} \subseteq E$.

$\forall x, y \in A$ $(x,y) \in (P^c \cap P^{cd}) \Rightarrow x = y$.

Пусть $x \neq y$. Докажем, что $(x,y) \in P$ или $(y,x) \in P$.

Предположим, что $(x,y) \notin P$ и $(y,x) \notin P$. Тогда $(x,y) \in P^c$ и $(y,x) \in P^c$. Отсюда следует, что $(x,y) \in P^{cd}$. Поэтому $(x,y) \in (P^c \cap P^{cd})$, т.е. $(x,y) \in E$. Следовательно, $x = y$ (по определению множества E), что противоречит выбору элементов x, y. Значит, $\forall x, y \in A$, $x \neq y$ $(x,y) \in P$ или $(y,x) \in P$, т.е. P — связно.

ж) $(\Rightarrow)$ P — транзитивно $\Rightarrow \forall x, y, z \in A$ $(x,y) \in P$ и $(y,z) \in P$ $\Rightarrow (x,z) \in P$.

Докажем, что $P^2 \subseteq P$.

Возьмем произвольные $x, y \in A$ такие, что $(x,y) \in P^2$. Отсюда следует, что $\exists z \in A : (x,z) \in P$ и $(z,y) \in P$. Так как P — транзитивно, то $(x,y) \in P$. Таким образом, $P^2 \subseteq P$.

$(\Leftarrow)$ $P^2 \subseteq P$. Докажем, что P — транзитивно.

Возьмем произвольные $x, y, z \in A$ такие, что $(x,y) \in P$ и $(y,z) \in P$. Отсюда следует, что $(x,z) \in P^2$ (по определению P^2), а $P^2 \subseteq P$. Значит, $(x,z) \in P$. Таким образом, P — транзитивно.

з) $(\Rightarrow)$ Докажем, что $(P^c)^2 \subseteq P^c$.

Возьмем произвольные $x, y \in A$ такие, что $(x,y) \in (P^c)^2$. Отсюда следует, что $\exists z \in A : (x,z) \in P^c$ и $(z,y) \in P^c$, т.е. $(x,z) \notin P$ и $(z,y) \notin P$. Следовательно, в силу отрицательной транзитивности P, имеем $(x,y) \notin P$ и $(x,y) \in P^c$. Таким образом, $(P^c)^2 \subseteq P^c$.

($\Leftarrow$) $(P^c)^2 \subseteq P^c$.

Докажем, что P — отрицательно транзитивно.

Рассмотрим произвольные $x, y, z \in A$ такие, что $(x, y) \notin P$ и $(y, z) \notin P$. Так как $(x, y) \notin P$ и $(y, z) \notin P$, то $(x, y) \in P^c$ и $(y, z) \in P^c$, т.е. $(x, z) \in (P^c)^2$. По условию $(P^c)^2 \subseteq P^c$, поэтому $(x, z) \in P^c \Rightarrow (x, z) \notin P$. Таким образом, P — отрицательно транзитивно.

13. Пусть x, y, z — произвольные элементы такие, что $(x, y) \in P^{cd}$ и $(y, z) \in P^{cd}$. Тогда $(y, x) \in P^c$ и $(z, y) \in P^c$, откуда, в силу отрицательной транзитивности P получаем, что $(z, x) \in P^c$. Значит, $(x, z) \in P^{cd}$. Таким образом, из $(x, y) \in P^{cd}$ и $(y, z) \in P^{cd}$ следует $(z, x) \in P^{cd}$, т.е отношение P^{cd} транзитивно.

14. Пусть x, y — произвольные элементы. Возможны два случая:

1) xPy. Тогда в силу асимметричности P имеем yP^cx и, следовательно, $xP^{cd}y$;

2) xP^cy. Тогда $yP^{cd}x$.

В обоих случаях $xP^{cd}y$ или $yP^{cd}x$, т.е. P^{cd} связно. Заметим, что приведенное доказательство корректно и в случае $x = y$, т.е. P^{cd} полно.

15. Заметим, что P и P^d содержат одинаковое число элементов. Поэтому условия $P \subseteq P^d$ и $P^d \subseteq P$ означают, что $P = P^d$ и $P^d = P$, а эквивалентность условий $P^d = P$ и $P = P^d$ очевидна.

16. Докажем, что $P \cap P^d$ симметрично. Пусть $(x, y) \in (P \cap P^d)$. Отсюда следует, что $(x, y) \in P$ и $(x, y) \in P^d$. По определению обратного бинарного отношения имеем $(y, x) \in P^d$ и $(y, x) \in P$, т.е. $(y, x) \in (P \cap P^d)$. Значит, $P \cap P^d$ симметрично.

Симметричность $P \cup P^d$ доказывается аналогично.

18. Первое равенство следует из определения дополнительного отношения — $P^c = A \setminus P$. Докажем второе.

$(x, y) \in (P \cup P^d)^c \Leftrightarrow (x, y) \notin (P \cup P^d) \Leftrightarrow (x, y) \notin P$ и $(x, y) \notin P^d$ $\Leftrightarrow (x, y) \in P^c$ и $(x, y) \in P^{cd} \Leftrightarrow (x, y) \in (P^c \cap P^{cd})$.

19. а) Пусть $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$. Подставим в определение полутранзитивного бинарного отношения $w = x$. Получим: $\forall x, y, z \in A$ $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$, поэтому $(x, z) \in P$ или $(x, x) \in P$. Однако P антирефлексивно, т.е. $(x, x) \notin P$. Значит, $(x, z) \in P$. Таким образом, P транзитивно.

б) *Указание:* воспользуйтесь результатом п. а).

20. Рассмотрим следующий пример. Пусть $A = \{x, y\}$, $P = \{(x, y)\}$. Бинарное отношение P будет антирефлексивно, полутранзитивно и связно, но его отношение несравнимости $I_P = \{(x,x),(y,y)\}$ несвязно. Также примерами могут быть произвольные линейные порядки и многие другие бинарные отношения.

21. а) Рис. Р.22.

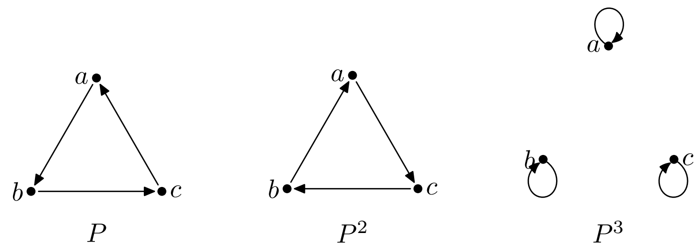


Рис. Р.22

Заметим, что $P \cup P^2 \cup P^3$ содержит все девять возможных пар. Поэтому $P^T = P \cup P^2 \cup P^3 \cup P^4 \cup \ldots = P \cup P^2 \cup P^3 = A \times A$. Рис. Р.23.

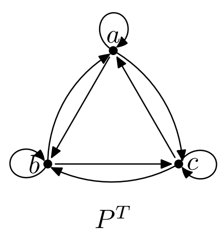


Рис. Р.23

б) $P^T = P$.

в) Рис. Р.24.

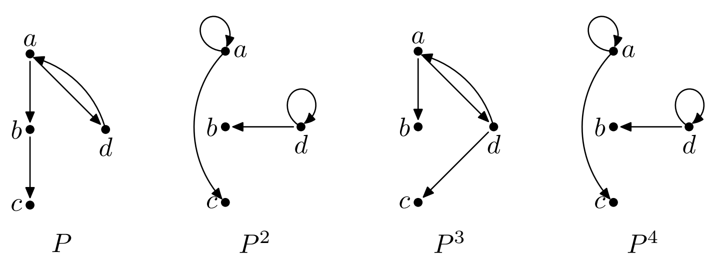


Рис. Р.24

$P^4 = P^2$, поэтому $P^5 = P^4 \cdot P = P^2 \cdot P = P^3$, $P^6 = P^4 \cdot P^2 = P^2 \cdot P^2 = P^4 = P^2$ и при $n > 1$ P^n совпадает либо с P^2, либо с P^3 в зависимости от четности n. Поэтому $P^T = P \cup P^2 \cup P^3$ (рис. Р.25).

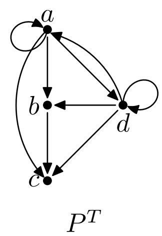


Рис. Р.25

22. Заметим, что $(x, y) \in P^n$ тогда и только тогда, когда существуют такие $z_1, \ldots, z_{n-1}$, что xPz_1, $z_1Pz_2, \ldots$, $z_{n-2}Pz_{n-1}$, $z_{n-1}Py$, т.е. когда существует цепь длины n, соединяющая x и y. Так как $P^T = P \cup P^2 \cup P^3 \cup \ldots$, то xP^Ty тогда и только тогда, когда существует цепь произвольной длины, соединяющая элементы x и y.

В случае цикла любые два элемента A соединены между собой путем. Путями наибольшей длины (n) элементы соединены сами с собой. Поэтому транзитивное замыкание содержит все возможные пары, т.е. $P^T = A \times A$.

23. Воспользуемся решением предыдущей задачи. В цепи путями соединены только те пары, в которых номер первого элемента меньше номера второго, т.е. $P^T = \{(x_i, x_j) | i < j\}$.

P^T связно, поскольку $\forall\, i, j\, (i \neq j)$ либо $i < j$, либо $j < i$.

P^T ациклично, поскольку номера элементов любой цепи в P^T убывают и цепь не сможет замкнуться.

Наконец, P^T транзитивно, поскольку если x_iPx_j и x_jPx_k, то $i > j > k$, а это означает, что x_iPx_k.

24. Транзитивное замыкание это минимальное по включению транзитивное бинарное отношение, содержащее P. Поэтому, т.к. P транзитивно, то $P^T = P$. Но $P^n \subseteq P^T$, т.е. $P^n \subseteq P$.

25. *Указание:* воспользуйтесь результатом задачи 24.

27. 1) *Указание:* рассмотрите пример. Пусть $A = \{x, y, z\}$, $P_1 = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y), (z, z)\}$, $P_2 = \{(x, x), (y, y), (y, z), (z, y), (z, z)\}$.

2) $P_1 \cap P_2$ — отношение эквивалентности.

28. а) Пусть P — слабый порядок. Это означает, что P ациклично, транзитивно и отрицательно транзитивно. Значит, P^d также ациклично и транзитивно (см. задачу 8б и в). Докажем, что P^d отрицательно транзитивно. Пусть x, y, z — произвольные элементы такие, что $(x,y) \notin P^d$ и $(y,z) \notin P^d$. Тогда $(y,x) \notin P$ и $(z,y) \notin P$. Так как P отрицательно транзитивно, то $(z,x) \notin P$. Значит, $(x,z) \notin P^d$, т.е. P^d отрицательно транзитивно.

Итак, P^d — слабый порядок, поскольку оно ациклично, транзитивно и отрицательно транзитивно.

б) Пусть P — линейный порядок. Это означает, что P — связный слабый порядок. Тогда из п. а) этой задачи следует, что P^d — слабый порядок, а из задачи 8а — что P^d связно, т.е. P^d — линейный порядок.

29. 1) *Указание:* воспользуйтесь результатом задачи 5д.

2) Пусть P_1 и P_2 — частичные порядки. Это означает, что P_1 и P_2 ацикличны и транзитивны. По задаче 6д) отношение $P_1 \cap P_2$ также транзитивно.

Докажем, что $P_1 \cap P_2$ ациклично. Предположим противное, т.е. $(P_1 \cap P_2)$ содержит цикл: $(x_1, x_2) \in (P_1 \cap P_2)$, $(x_2, x_3) \in (P_1 \cap P_2), \ldots,$ $(x_{s-1}, x_s) \in (P_1 \cap P_2)$, $(x_s, x_1) \in (P_1 \cap P_2)$. Тогда $(x_1, x_2) \in P_1$, $(x_2, x_3) \in P_1, \ldots, (x_{s-1}, x_s) \in P_1$ и $(x_1, x_2) \in P_2$, $(x_2, x_3) \in P_2, \ldots, (x_{s-1}, x_s) \in P_2$. Так как P_1 и P_2 ацикличны, то $(x_s, x_1) \notin P_1$ и $(x_s, x_1) \notin P_2$. Поэтому $(x_s, x_1) \notin (P_1 \cap P_2)$. Получено противоречие, следовательно, $P_1 \cap P_2$ ациклично.

Итак, отношение $P_1 \cap P_2$ ациклично и транзитивно, поэтому оно является частичным порядком.

30. Пусть $A = \{x, y, z\}$, $P = \{(x, y)\}$. Это частичный порядок (ацикличность очевидна, транзитивность не может нарушаться, поскольку в отношении всего один элемент), но условие Чипмана не выполнено: $(x,y) \in P$, но $(x,z) \notin P$ и $(z,y) \notin P$.

Можно рассмотреть и другой пример: $x, y \in \mathbb{N}$ и $xPy \Leftrightarrow x > y$ и $xy \neq x$.

31. Пусть $A = \{x, y, z\}$, $P = \{(x,y), (x,z)\}$. Это частичный порядок (асимметричность очевидна, транзитивности не на чем нарушаться). Более того, выполнено условие Чипмана, поэтому P — слабый порядок. Но P не является линейным порядком, поскольку не связно: $(y,z) \notin P$ и $(z,y) \notin P$.

Можно рассмотреть и другой пример: $x, y \in \mathbb{N}$ и $xPy \Leftrightarrow xy = y$ и $y \neq 1$.

32. Пусть существует такое предъявление X, что $C(X)$ содержит по крайней мере два элемента x и y. Поскольку P связно, то xPy или yPx. Но тогда в первом случае $y \notin C(X)$, а во втором — $x \notin C(X)$. Получено противоречие. Поэтому для любого $X \subseteq A$ $|C(X)| \leq 1$.

Пусть существует такое предъявление X, что $C(X) = \varnothing$. Рассмотрим произвольный элемент $x_1 \in X$. Поскольку $x_1 \notin C(X)$, то существует элемент x_2 такой, что x_2Px_1. Но x_2 также не лежит в $C(x)$, поэтому существует x_3 такой, что x_3Px_2 и т.д. Поскольку X конечно, то получится цикл, что противоречит ацикличности P. Заметим, что это вполне могло произойти и на первом шаге, тогда получившееся условие xPx противоречило бы не только ацикличности, но и антирефлексивности линейного порядка.

Итак, доказано, что $|C(x)| \leq 1$ и $C(x)$ — функция непустого выбора, т.е. $|C(x)| \geq 1$. Поэтому $|C(x)| = 1$ для всех $X \neq \varnothing$, что и означает, что $C(x)$ — функция однозначного выбора.

33. $R = P^{cd}$. Рис. Р.26.

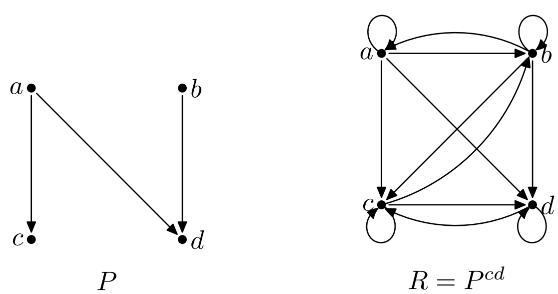


Рис. Р.26

Равенство $C_P = C_R$ проще всего проверить прямым вычислением. Результаты приведены в табл. Р.1а на с. 251.

34. $P = R^{cd}$. Рис. Р.27 (с. 251).

Равенство $C_P = C_R$ проще всего проверить прямым вычислением. Результаты приведены в табл. Р.1б на с. 251.

35. Докажем, что $\forall X, X' : \; X' \subseteq X$ и $C(X) \cap X' \neq \varnothing, \Rightarrow C(X') = C(X) \cap X'$.

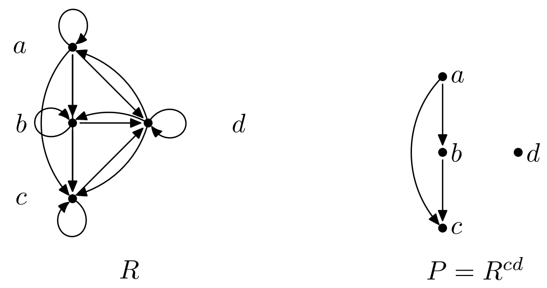


Рис. P.27

Таблица P.1. Вычисление $C_P(X)$ и $C_R(X)$

X	$C_P(X) = C_R(X)$
A	$\{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b, d\}$	$\{a, b\}$
$\{a, c, d\}$	$\{a\}$
$\{b, c, d\}$	$\{b, c\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$\{a, c\}$	$\{a\}$
$\{a, d\}$	$\{a\}$
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{b, d\}$	$\{b\}$
$\{c, d\}$	$\{c, d\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\{c\}$
$\{d\}$	$\{d\}$

а)

X	$C_R(X) = C_P(X)$
A	$\{a, d\}$
$\{a, b, c\}$	$\{a\}$
$\{a, b, d\}$	$\{a, d\}$
$\{a, c, d\}$	$\{a, d\}$
$\{b, c, d\}$	$\{b, d\}$
$\{a, b\}$	$\{a\}$
$\{a, c\}$	$\{a\}$
$\{a, d\}$	$\{a, d\}$
$\{b, c\}$	$\{b\}$
$\{b, d\}$	$\{b, d\}$
$\{c, d\}$	$\{c, d\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\{c\}$
$\{d\}$	$\{d\}$

б)

1) Докажем, что $C(X') \subseteq (C(X) \cap X')$. Возьмем произвольный $x \in C(X')$. Очевидно, что $x \in X'$. Так как $C(X) \cap X' \neq \varnothing$, то $\exists\, t \in C(X)$ такое, что $t \in X'$. $\forall\, a \in X$ $aP^c t$.

$x \in C(X') \Rightarrow \forall\, b \in X'$ $bP^c x$, в частности, при $b = t$ имеем $tP^c x$.

В силу отрицательной транзитивности P получаем $\forall\, a \in X\ aP^c x \Rightarrow x \in C(X)$, т.е. $x \in C(X) \cap X'$ и $C(X') \subseteq (C(x) \cap X')$.

2) Покажем, что $(C(X) \cap X') \subseteq C(X')$. Возьмем произвольный элемент $x \in (C(X) \cap X')$. Отсюда следует, что $x \in C(x)$ и $\forall\, y \in X\ yP^c x$. Значит, и $\forall t \in X'$ $(X' \subseteq X)$ $tP^c x \Rightarrow x \in C(X')$, т.е. $(C(X) \cap X') \subseteq C(X')$.

Из 1) и 2) следует, что $C(X) \cap X' = C(X')$.

Глава 4

1. Мажоритарный граф, соответствующий предпочтениям участников, показан на рис. Р.28. Отсюда видно, что имеется единственный недоминирумый исход x_1, т.е. x_1 является победителем Кондорсе.

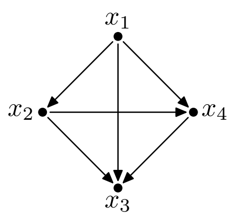


Рис. Р.28

2. Мажоритарный граф показан на рис. Р.29.

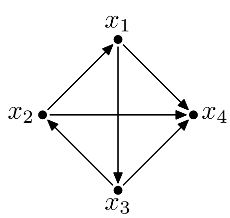


Рис. Р.29

Недоминируемых исходов в данном случае нет, т.е. нет победителя Кондорсе.

3. Мажоритарный граф показан на рис. Р.30 (с. 253).

Победитель Кондорсе — x_1.

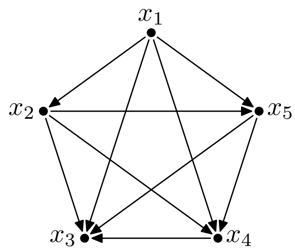


Рис. Р.30

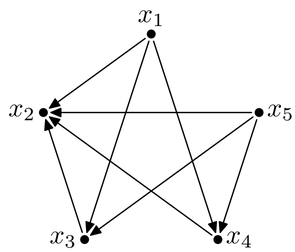


Рис. Р.31

4. Мажоритарный граф показан на рис. Р.31.

Имеем два победителя Кондорсе — x_1 и x_5.

5. а) Требуется доказать, что для любых вершин мажоритарного графа x_i и x_j $(x_i, x_j) \in \Gamma$ или $(x_j, x_i) \in \Gamma$, т.е. любые две вершины графа соединены дугой, направленной в одну или другую сторону.

Пусть число участников — $2n+1$ (нечетное), и вершины мажоритарного графа x_i и x_j дугой не соединены. Это означает, что не более n участников считают, что $x_i \succ x_j$, и не более n — что $x_j \succ x_i$. Тогда всего участников не более $n+n = 2n$, что противоречит тому, что их $2n+1$. Значит, $(x_i, x_j) \in \Gamma$ или $(x_j, x_i) \in \Gamma$.

б) *Указание:* удобно провести доказательство методом от противного.

в) Так как n — нечетное, то соответствующее мажоритарному графу бинарное отношение связно. Это означает, что $\forall x_i, x_j \in A$ $(i \neq j)$ $x_i \Gamma x_j$ или $x_j \Gamma x_i$. Тогда и для $a \in A$ имеет место:

$$\forall x \in A \ a \Gamma x \text{ или } x \Gamma a.$$

Так как a – победитель Кондорсе, то $\forall x \in A$ $a\Gamma x$ (иначе, если $x\Gamma a$, то исход a доминируемый, т.е. a не является победителем Кондорсе).

6. *Указание:* используйте результат задачи 5б.

7. 1) Заметим, что $V(\text{Т,В};\vec{P}) = V(\text{Т,В};\vec{P}') = \{1,2,3\}$. Поэтому, раз правило принятия решения локально и (Т,В)$\in P$, то (Т,В)$\in P'$.

2) И в том и в другом случае в коллективном решении должны содержаться те пары (a,b), для которых $V(a,b;\vec{P}) = V(a,b;\vec{P}') = \{1,2,3\}$. Это (С,В), (С,П), (Т,В), (Т,П) для профиля $\vec{P} = (P_1,P_2,P_3)$ и (С,В), (С,П), (Т,В), (Т,П), (В,П) для профиля $\vec{P}' = (P_1',P_2',P_3')$.

3) Нет, поскольку участник является диктатором в смысле Эрроу, если он может навязать свое мнение коллективу по любой паре альтернатив, а здесь он навязывает свое решение только по паре (С,Т).

8. Во всех случаях правило будет локально, поскольку решение о том, что предпочтительнее, x или y, по определению зависит только от набора мнений участников об x и y, точнее — от количества участников, более предпочитающих x, чем y.

Аксиоме единогласия удовлетворяют только те из правил, для которых пара (x,y) принадлежит коллективному решению, если она принадлежит каждому из индивидуальных предпочтений. В данном случае это пп. в), г), д) и е).

Аксиоме ненавязанности удовлетворяют все приведенные правила. Правила в), г), д) и е) удовлетворяют и аксиоме монотонности. Примеры, в которых появляются циклы, можно построить для всех правил, кроме п. е). Приведем пример для п. д).

Пусть имеется n альтернатив, т.е. $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$, индивидуальные предпочтения имеют вид:

$$P_i : a_i \succ a_{i+1} \succ \ldots \succ a_n \succ a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_{i-1}.$$

Тогда $V(a_i,a_{i+1};\vec{P}) = N \setminus \{i+1\}$, поэтому $a_1Pa_2P\ldots a_{n-1}Pa_n$, но тогда $V(a_n,a_1;\vec{P}) = N \setminus \{1\}$, поэтому a_nPa_1. Таким образом, получился цикл.

11. Это правило является локальным, поскольку для всех x и y принадлежность пары (x,y) коллективному решению зависит только от предпочтений участников 1, 3 и 5 относительно этой пары. Но никто из этих участников не является диктатором, поскольку не может навязать своего мнения обществу. Представим себе, что один из этих участников (например 5), считает, что x предпочтительнее y, а два других — что y предпочтительнее x. В коллективное решение не попадет ни одна из пар (x, y) и (y, x), и, таким образом, не будет учтено мнение ни одного из участников. Данное правило удовлетворяет аксиоме ненавязанности, но не удовлетворяет аксиоме единогласия, т.к. $\Omega(x, y) = (\{1, 3, 5\})$, и если $V(x, y; \vec{P}) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \notin \Omega(x, y)$, то $(x, y) \notin P$. Рассуждая аналогично, получим, что правило не удовлетворяет аксиоме монотонности. Нейтральность данного правила следует из его списочного представления: $\Omega(x, y)$ не зависит от x и y.

12. Данное правило будет локальным, поскольку решение о том, какая из альтернатив, a_i или a_j, предпочтительнее, зависит только от предпочтений между a_i и a_j участников i и j. Нетрудно проверить, что данное правило удовлетворяет всем аксиомам 1—4.

Можно доказать, что коллективное предпочтение антирефлексивно. Поскольку антирефлексивно P_1, и по определению $a_1 P a_1 \Leftrightarrow a_1 P_1 a_1$, то $(a_1, a_1) \notin P$. Аналогично $(a_2, a_2) \notin P$ и $(a_3, a_3) \notin P$. Следовательно, P антирефлексивно.

Но больше никаким разумным свойствам P удовлетворять не будет. Заметим, что вопрос о принадлежности P пар (a_1, a_2) и (a_1, a_3) зависит только от участника 1, (a_2, a_1) и (a_2, a_3) — только от участника 2 и (a_3, a_1) и (a_3, a_2) — только от участника 3, т.е. все эти шесть пар могут принадлежать или не принадлежать P в любых сочетаниях.

13. Так как правило принятия решения локально, то отношение участников голосования к альтернативам R и P не зависит от их отношения к W и, в частности, от наличия или отсутствия W. Поэтому при отсутсвии W решение о том, что предпочтительнее, P или R, будет принято то же, что и при наличии W, т.е. $R \succ P$.

14. Заметим, что олигархическое правило можно записать следующим образом: пусть $P_1, \ldots P_k$ — предпочтения «олигархов», тогда $P = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_k$. Поскольку P_i — линейные порядки, т.е., в частности, они транзитивны и асимметричны, то и их пересечение будет транзитивно и асимметрично (глава 3, задача 6г и д). Поэтому коллективное решение будет частичным порядком.

Олигархическое правило локально, поскольку решение вопроса о том, какая из двух альтернатив, x и y, предпочтительнее, зависит только от предпочтений олигархов относительно x и y. Остальные аксиомы проверяются непосредственно.

Покажем, что полученное в результате применения олигархического правила коллективное решение может не быть слабым порядком. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, и предпочтения олигархов таковы:

P_1	P_2	P_3
a	a	c
b	c	a
c	b	b.

В коллективное решение войдет только пара (a, b), и условие Чипмана не выполняется.

15. Пусть $\omega \in (\Omega(x, y) \cap \Omega(y, z))$. Это означает, что из условия $V(x, y, \vec{P}) = V(y, z, \vec{P}) = \omega$, следует, что xPy и yPz. Но, поскольку коллективное решение транзитивно, имеем xPz, т.е. $\omega \in \Omega(x, z)$. Итак, первая часть утверждения задачи доказана. Докажем вторую.

Пусть условие не выполняется, т.е. существует ω такое, что $\omega \in \Omega(x, z)$, но $\omega \notin \Omega(x, y)$ и $\omega \notin \Omega(y, z)$. Это означает, что для любого профиля $\vec{P}$ такого, что $V(x, y, \vec{P}) = V(y, z, \vec{P}) = V(x, z, \vec{P}) = \omega$, xPz, но xP^cy и yP^cz, что противоречит условию Чипмана, которому должно удовлетворять коллективное решение.

Глава 5

1. Для удобства обозначим вершины графа буквами (рис. Р.32, с. 257). Из каждой из пяти троек — (a, b, c), (d, h, i), (e, j, k), (f, l, m), (g, n, o) — во внутренне устойчивое множество может входить не более двух элементов. Поэтому всего во внутренне устойчивом множестве может быть не более $2 \cdot 5 = 10$ элементов. С другой стороны, внутренне устойчивое множество из 10 элементов существует — это $\{b, c, h, i, j, k, l, m, n, o\}$. Получаем $\alpha(G) = 10$.

2. $\alpha(G) = 0$.

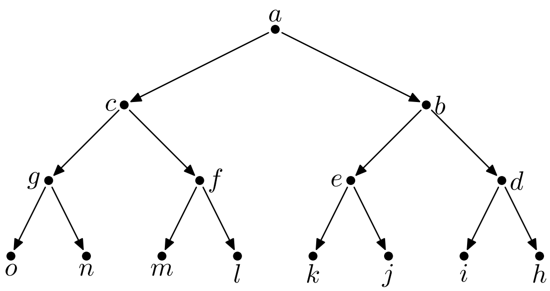


Рис. Р.32

3. $\alpha(G) = |A|$.

4. Поскольку отношение P является линейным порядком и, в частности, антирефлексивно, т.е. $\forall x \in A \ (x,x) \notin P$, то одноэлементные подмножества A будут внутренне устойчивыми.

Покажем, что подмножества с большим числом элементов устойчивыми не будут. Действительно, пусть $X \subseteq A$ и X содержит как минимум два элемента, например a и b. Но поскольку P связное бинарное отношение, то aPb или bPa. Значит, X — не внутренне устойчиво.

Таким образом, внутренне устойчивыми будут только одноэлементные подмножества A и $\varnothing$. Следовательно, они же (исключая $\varnothing$) будут и максимальными внутренне устойчивыми множествами, и число внутренней устойчивости $\alpha(G) = 1$.

5. Отношение несравнимости I_P является отношением эквивалентности, и, если вершины x и y принадлежат разным классам эквивалентности I_P (обозначим их $A_1, \ldots, A_k$), то xPy или yPx. Если же x и y принадлежат одному классу эквивалентности, то $(x,y) \notin P$ и $(y,x) \notin P$.

Следовательно, внутренне устойчивое множество не может содержать вершины, принадлежащие разным классам эквивалентности, но любое множество, содержащееся в каком-то одном классе эквивалентности, будет внутренне устойчивым. Поэтому максимальными внутренне устойчивыми множествами будут A_i и

$$\alpha(G) = \max_{1 \le i \le k} |A_i|.$$

6. а) Внутренне устойчивые множества: $\varnothing$, все одноэлементные множества, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{b,f\}$, $\{b,g\}$, $\{c,e\}$, $\{c,d\}$, $\{d,e\}$, $\{d,f\}$, $\{e,f\}$, $\{e,g\}$, $\{f,g\}$, $\{b,c,d\}$, $\{b,d,f\}$, $\{b,f,g\}$, $\{c,d,e\}$, $\{d,e,f\}$, $\{e,f,g\}$.

Максимальные внутренне устойчивые множества: $\{a\}$, $\{b,c,d\}$, $\{b,d,f\}$, $\{b,f,g\}$, $\{c,d,e\}$, $\{d,e,f\}$, $\{e,f,g\}$.

Число внутренней устойчивости $\alpha(G) = 3$.

б) Максимальные внутренне устойчивые множества: $\{c,d\}$, $\{a,e,f,g\}$, $\{b,e,f,g\}$, $\{b,c,f,g\}$. Соответственно $\alpha(G) = 4$.

в) Максимальные внутренне устойчивые множества: $\{a,b,c\}$, $\{d,e,f\}$, $\{a,d\}$, $\{b,e\}$, $\{c,f\}$. Соответственно $\alpha(G) = 3$.

7. Из каждого из пяти «треугольников» — (a,b,c), (d,h,i), (e,j,k), (f,l,m), (g,n,o) (рис. Р.32) во внешне устойчивое множество должна входить либо вершина верхнего уровня, либо обе нижнего, т.е. как минимум одна вершина. Поэтому всего во внешне устойчивом множестве может быть не менее пяти элементов. С другой стороны, внешне устойчивое множество из пяти элементов существует — это $\{a,d,e,f,g\}$. Получаем $\beta(G) = 5$.

8. а) Поскольку в вершину a не входит ни одна дуга, то любое внешне устойчивое множество должно содержать a. Но $\{a\}$ уже является внешне устойчивым. Поэтому $\{a\}$ будет единственным минимальным внешне устойчивым множеством, и число внешней устойчивости $\beta(G) = 1$.

б) $\beta(G) = 2$. Минимальные внешне устойчивые множества: $\{a,c,f,g\}$, $\{a,e,f,g\}$, $\{b,c,f,g\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,d\}$.

в) $\{a,b,c\}$ — единственное минимальное внешне устойчивое множество. $\beta(G) = 3$.

9. Пусть S не является максимальным внутренне устойчивым множеством, т.е. существует внутренне устойчивое множество S' такое, что $S \subset S'$. Рассмотрим произвольный элемент $a \in S' \setminus S$. Так как S — ядро графа, то S по определению внешне устойчиво, т.е. $\forall x \in A \setminus S\ \exists y \in S : y\Gamma x$. В частности, поскольку $a \notin S$, существует $y \in S$ такое, что $y\Gamma a$. Но и y, и a принадлежат S', и наличие дуги между ними противоречит внутренней устойчивости S'. Значит, S — максимальное внутренне устойчивое множество.

10. Так как каждый из вариантов получил не более 50% первых мест, то удаляется из рассмотрения вариант B: как и остальные участники, он занял первое место только один раз, но отбрасывается именно он по правилу доопределения до однозначного выбора. Получим новый профиль:

P_1	P_2	P_3	P_4
C	G	C	S
S	C	S	G
G	S	G	C.

Здесь также ни один из вариантов не получил не более 50% первых мест, поэтому удаляется из рассмотрения наихудший вариант, т.е. G. Получим следующий профиль:

P_1	P_2	P_3	P_4
C	C	C	S
S	S	S	C.

Большинство голосов набирает вариант C, процедура останавливается и коллективным решением объявляется C, т.е. Кипр.

Аналогично, рассматривая профиль $\vec{P}' = (P_1, P_2', P_3, P_4)$ с помощью системы передачи голосов, получим, что коллективным решением станет вновь вариант C, и манипулирование со стороны второго участника не результативно.

11. Мажоритарное отношение μ для профиля $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ изображается графом, показанным на рис. P.33.

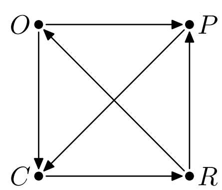


Рис. P.33

Тогда $PO = \{R\}$, $PP = \{O, R\}$, $PR = \{C\}$, $PC = \{O, P\}$. Имеем $PO \subset PP$.

Определим новое отношение γ. Оно содержит только пару (O, P). Поэтому по правилу Фишберна коллективное решение — вариант O, или R, или C. По правилу доопределения до однозначного выбора выбирается вариант C.

Применим к профилю $\vec{P}$ процедуру Нансона. Имеем $r(C) = 1 + 2 + 4 = 7$, $r(O) = 3 + 3 + 2 = 8$, $r(P) = 2 + 4 + 1 = 7$, $r(R) = 4 + 1 + 3 = 8$. Тогда $\bar{r} = \frac{7+8+7+8}{4} = 7,5$ и удаляются варианты P и C, т.к. для них соответствующие r меньше, чем $\bar{r}$. Рассмотрим сужение профиля $\vec{P}$:

P_1	P_2	P_3
R	O	R
O	R	O.

Здесь $r(O) = 1+2+1 = 4$, $r(R) = 2+1+2 = 5$ и $\bar{r} = \frac{4+5}{2} = 4,5$. Удаляется из рассмотрения вариант O, т.к. $R(O) < \bar{r}$. Коллективное решение — R.

Отметим, что вариант R мог бы быть получен и с помощью правила Фишберна. Однако этого не произошло в силу принятого соглашения о доопределении до однозначного выбора.

12. Мажоритарное отношение μ для профиля $\vec{P}$ изображается графом, показанным на рис. Р.34.

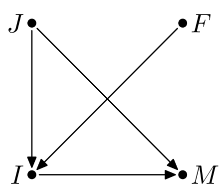


Рис. Р.34

Отсюда получаем, что $PI = \{J, F\}$, $PJ = PF = \varnothing$, $PM = \{I, J\}$, $IP = \{M\}$, $JP = \{I, M\}$, $FP = \{I\}$, $MP = \varnothing$.

Функция $u(x) = |xP| - |Px|$ имеет следующие значения:

x	I	J	F	M
$u(x)$	-1	2	1	-2

$u_{\max} = u(J) = 2$. Значит, согласно первому правилу Коупленда, коллективным решением является вариант J, т.е. семья выберет японский ресторан.

13. а) Применим процедуру Симпсона. $V(D, C; \vec{P}) = \{1\}$, $V(C, D; \vec{P}) = \{2, 3\}$, $V(D, T; \vec{P}) = \{1, 2\}$, $V(T, D; \vec{P}) = \{3\}$, $V(D, F; \vec{P}) =$

$\{1,2\}$, $V(F,D;\vec{P}) = \{3\}$, $V(C,T;\vec{P}) = \{1,2\}$, $V(T,C;\vec{P}) = \{3\}$, $V(C,F;\vec{P}) = \{1,2\}$, $V(F,C;\vec{P}) = \{3\}$, $V(T,F;\vec{P}) = \{3\}$, $V(F,T;$ $\vec{P}) = \{1,2\}$.

$$S^+ = \begin{array}{c} \\ D \\ C \\ T \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D & C & T & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} +\infty & 1 & 2 & 2 \\ 2 & +\infty & 2 & 2 \\ 1 & 1 & +\infty & 1 \\ 1 & 1 & 2 & +\infty \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \min\limits_{y\in A} |V(x,y;\vec{P}) \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1. \end{array}$$

$$\max_{x\in A} \min_{y\in A} |V(x,y;\vec{P})| = 2.$$

Значит, коллективным решением является вариант C (поход в кино).

Сравним полученное решение с результатом применения минимаксной процедуры:

$$S^- = \begin{array}{c} \\ D \\ C \\ T \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D & C & T & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\infty & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -\infty & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -\infty & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -\infty \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\max_{x_i\in A} |V(x_i,x_j;\vec{P})| \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2$$

$$\min_{y\in A} \max_{x\in A} |V(x,y;\vec{P})| = 1.$$

Значит, коллективным решением также является вариант C (поход в кино).

14. а) Пусть $A = \{a,b,c,d\}$, $N = \{1,2,3\}$, и предпочтения участников таковы:

P_1	P_2	P_3
a	a	b
b	b	a
c	c	c
d	d	d.

Здесь $r(a) = 11$, $r(b) = 10$, $r(c) = 6$, $r(d) = 3$ и выбирается альтернатива a. Но если третий участник поставит a на последнее место, то $r(a) = 9$, $r(b) = 10$, $r(c) = 7$, $r(d) = 4$ и будет выбрана более предпочтительная для него альтернатива b.

в) Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, и предпочтения участников таковы:

P_1	P_2	P_3
c	d	b
a	a	a
b	b	c
d	c	d.

$r(a) = 9$, $r(b) = 8$, $r(c) = 7$, $r(d) = 6$, $\bar{r} = 7,5$. При принятии решения по правилу Нансона на первом шаге отбрасываются альтернативы c и d, а из a и b выбирается a. Но третий участник голосования может изменить свои предпочтения на $P_3' : b \succ c \succ d \succ a$, тогда $r(a) = 7$, $r(b) = 8$, $r(c) = 8$, $r(d) = 7$, $\bar{r} = 7,5$. На первом шаге будут отброшены a и d, а из оставшихся альтернатив b и c будет выбрана b, более предпочтительная для участника 3, чем выбранная первоначально альтернатива a.

15. Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и предпочтения участников таковы:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
a	a	b	b	c
d	d	c	c	d
e	e	d	d	a
c	c	a	a	b
b	b	e	e	e

Победителем Кондорсе в этом профиле является альтернатива c, поэтому она и станет лучшей по правилу простого большинства.

При выборе по правилу Хара сначала будет отброшена альтернатива c, затем d, а из a и b будет выбрана a.

Наконец, при выборе по Борда наибольший ранг имеет альтернатива d ($r(d) = 18$, $r(c) = 17$, $r(a) = 17$, $r(b) = 14$, $r(e) = 9$).

16. Ответ отрицательный. В качестве примера можно привести старый шахматный анекдот. Когда в конце 1930-х гг. нескольких представителей шахматной элиты спросили, кого они считают лучшим шахматистом мира, каждый назвал себя. Но на вопрос, кого они считают шахматистом номер два, все единодушно ответили: Ботвинника. Формализуем пример.

Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3\}$ и предпочтения участников таковы:

P_1	P_2	P_3
a	c	b
d	d	d
c	b	a
b	a	c.

Альтернатива d доминируема одной из других альтернатив для каждого участника, но ее ранг по Борда равен 9, в то время как ранг остальных альтернатив — 7. Поэтому при выборе по Борда победит альтернатива d.

Применение правила Хара к этому профилю дает тот же результат. На первом шаге отбрасывается альтернатива a, и профиль принимает следующий вид:

P_1	P_2	P_3
d	c	b
c	d	d
b	b	c.

Опять три альтернативы имеют по одному первому месту, поэтому на втором шаге будет отброшена первая среди них по алфавиту, т.е. b, после чего не имевшая первоначально ни одного первого места альтернатива d получит два первых места из трех и станет победителем.

17. Процедура Кумбса нелокальна. Приведем пример. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и предпочтения участников таковы:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
b	b	d	a	d
a	c	a	b	a
c	d	c	c	b
d	a	b	d	c.

На первом шаге будет отброшена альтернатива d, на втором — c и на третьем — b, и победителем станет a. Пусть теперь в

P_1 поменялись местами d и a. $V(b, a; \vec{P})$ при этом не изменится. Но на первом шаге процедуры Кумбса будет отброшена альтернатива a, затем c и d, и победителем станет b.

18. а) Просуммировав очки для каждой команды, получим, что

$$q^{(1)} = (6, 7, 4, 4, 4)^T \text{ и } b \succ a \succ c = d = e.$$

Вычислим $q^{(2)}$.

		Участник					
Участник	*очки* $q^{(1)}$	a	b	c	d	e	*очки* $q^{(2)}$
a	6	—	14	4	4	4	32
b	7	0	—	8	8	8	31
c	4	6	0	—	4	4	18
d	4	6	0	4	—	4	18
e	4	6	0	4	4	—	18

$$q^{(2)} = (32, 31, 18, 18, 18)^T \text{ и } a \succ b \succ c = d = e.$$

$$q_a^{(3)} = 32 + 2 \cdot 31 + 3 \cdot 18 = 148,$$
$$q_b^{(3)} = 31 + 2 \cdot 3 \cdot 18 = 139,$$
$$q_c^{(3)} = 18 + 32 + 2 \cdot 18 = 86,$$
$$q_d^{(3)} = 18 + 32 + 2 \cdot 18 = 86,$$
$$q_e^{(3)} = 18 + 32 + 2 \cdot 18 = 86.$$
$$q^{(3)} = (148, 139, 86, 86, 86)^T \text{ и } a \succ b \succ c = d = e.$$

Таким образом, распределение мест команд стабилизировалось.

Посчитаем относительную силу команд:

$$\overline{q}^{(3)} = \left(\frac{q_a^{(3)}}{\sum\limits_i q_i^{(3)}}, \frac{q_b^{(3)}}{\sum\limits_i q_i^{(3)}}, \frac{q_c^{(3)}}{\sum\limits_i q_i^{(3)}}, \frac{q_d^{(3)}}{\sum\limits_i q_i^{(3)}}, \frac{q_e^{(3)}}{\sum\limits_i q_i^{(3)}} \right)^T.$$

$$\sum_i q_i^{(3)} = 148 + 139 + 3 \cdot 86 = 545,$$

$$\overline{q}^{(3)} = (0,272,\ 0,255,\ 0,158,\ 0,158,\ 0,158)^T.$$

б)

$$q^{(1)} = (5, 5, 5, 5, 5)^T;$$
$$a = b = c = d = e.$$
$$q^{(2)} = (25, 25, 25, 25, 25)^T;$$
$$a = b = c = d = e.$$
$$\overline{q}^{(2)} = (0,2,\ 0,2,\ 0,2,\ 0,2,\ 0,2)^T.$$

в)

$$q^{(1)} = (6, 6, 5, 4, 4)^T;$$
$$a = b \succ c \succ d = e.$$
$$q^{(2)} = (31, 28, 23, 18, 21)^T;$$
$$a \succ b \succ c \succ e \succ d.$$
$$q^{(3)} = (146, 134, 111, 88, 106)^T;$$
$$a \succ b \succ c \succ e \succ d.$$
$$\overline{q}^{(3)} = (0,250,\ 0,229,\ 0,190,\ 0,150,\ 0,181)^T.$$

г)

$$q^{(1)} = (9, 5, 3, 7, 1)^T;$$
$$a \succ d \succ b \succ c \succ e.$$
$$q^{(2)} = (41, 13, 5, 25, 1)^T;$$
$$a \succ d \succ b \succ c \succ e.$$
$$\overline{q}^{(2)} = (0,482,\ 0,153,\ 0,059,\ 0,294,\ 0,012)^T.$$

д)

$$q^{(1)} = (7, 3, 6, 5, 4)^T;$$
$$a \succ c \succ d \succ e \succ b.$$
$$q^{(2)} = (33, 13, 29, 21, 19)^T;$$
$$a \succ c \succ d \succ e \succ b.$$
$$\overline{q}^{(2)} = (0,287,\ 0,113,\ 0,252,\ 0,183,\ 0,165)^T.$$

е)

$$
\begin{aligned}
&q^{(1)} = (7,4,5,2,7)^T;\\
&\quad a = e \succ c \succ b \succ d.\\
&q^{(2)} = (32,18,20,6,31)^T;\\
&\quad a \succ e \succ c \succ b \succ d.\\
&q^{(3)} = (133,76,81,24,131)^T;\\
&\quad a \succ e \succ c \succ b \succ d.\\
&\overline{q}^{(2)} = (0,299,\ 0,171,\ 0,182,\ 0,054,\ 0,294)^T.
\end{aligned}
$$

Глава 6

1. а) Выигрывающими будут коалиции $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ и $\{1,2,3\}$. Остальные коалиции — проигрывающие. Следовательно, характеристическая функция для данного голосования с квотой имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&v(\varnothing) = 0,\\
&v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,\\
&v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1,\ v(\{2,3\}) = 0,\\
&v(\{1,2,3\}) = 1.
\end{aligned}
$$

б) Выигрывающие коалиции: $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ и $\{1,2,3\}$.

$$
\begin{aligned}
&v(\varnothing) = 0,\\
&v(\{1\}) = 1,\ v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,\\
&v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1,\ v(\{2,3\}) = 0,\\
&v(\{1,2,3\}) = 1.
\end{aligned}
$$

в) Выигрывающие коалиции: $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$.

$$
\begin{aligned}
&v(\varnothing) = 0,\\
&v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = 0,\\
&v(\{2,4\}) = v(\{3,4\}) = 1,\\
&v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,4\}) = v(\{2,3\}) = 0,
\end{aligned}
$$

$$v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2,4\}) = v(\{1,3,4\}) = v(\{2,3,4\}) = 1,$$
$$v(\{1,2,3,4\} = 1.$$

2. а) Выигрывающие коалиции: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.

$$b(1) = b(2) = b(3) = 2;$$
$$\beta(1) = \beta(2) = \beta(3) = \tfrac{2}{2+2+2} = \tfrac{1}{3}.$$

Заметим, что несмотря на разницу в имеющихся у игроков голосах, влиятельность всех игроков одинакова.

б) Выигрывающие коалиции: $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$.

$$b(1) = b(2) = 2,\ b(3) = 0;$$
$$\beta(1) = \beta(2) = \tfrac{2}{2+2} = \tfrac{1}{2}, \beta(3) = 0.$$

Таким образом, участник 3 не имеет никакого влияния на принятие решений.

в) Выигрывающие коалиции: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.

$$b(1) = b(2) = b(3) = 2;$$
$$\beta(1) = \beta(2) = \beta(3) = \tfrac{1}{3},$$

т.е. обладая всего лишь четырьмя голосами, участник 3 имеет такое же влияние, что и участники 1 и 2, обладающие 49 и 47 голосами соответственно.

г) $\beta(1) = \beta(2) = \beta(3) = \tfrac{1}{6}, \beta(4) = \tfrac{1}{2}$.

д) Выигрывающие коалиции: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$.

$$b(1) = b(2) = b(3) = 4,\ b(4) = 0;$$
$$\beta(1) = \beta(2) = \beta(3) = \tfrac{4}{4+4+4+0} = \tfrac{1}{3}, \beta(4) = 0.$$

е) *Указание:* выигрывающие коалиции те же, что и в предыдущем пункте, поэтому и участники являются ключевыми в тех же коалициях. Следовательно, совпадут и индексы Банцафа:

$$\beta(1) = \beta(2) = \beta(3) = \frac{1}{3},\ \beta(4) = 0.$$

Заметим, что несмотря на небольшую разницу в числе голосов, имевшихся в распоряжении участника 4 и у любого другого участника, влияние участника 4 нулевое.

ж, з) *Указание:* выигрывающие коалиции (и, соответственно, индексы влияния Банцафа) те же, что и в пп. д) и е). $\beta(1) = \beta(2) = \beta(3) = \frac{1}{3}$, $\beta(4) = 0$.

и) $\beta(1) = \beta(2) = \frac{3}{8}$, $\beta(3) = \beta(4) = \frac{1}{8}$, $\beta(5) = 0$.

к) Для того, чтобы набрать 201 голос, любых двух участников недостаточно, т.к. сумма их голосов будет или 101, или 200, а любых трех уже достаточно, т.к. сумма их голосов — или 201, или 300. Поэтому выигрывающими будут все коалиции из трех, четырех или пяти участников, всего таких коалиций $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 10 + 5 + 1 = 16$.

Ключевыми для каждого из участников будут только 3-элементные коалиции, в которые он входит. Их число есть число способов выбрать для данного участника двух партнеров по коалиции из четырех претендентов, т.е. $C_4^2 = 6$. Тогда

$$\beta(1) = \beta(2) = \beta(3) = \beta(4) = \beta(5) = \frac{6}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

Впрочем, этот результат можно получить проще: число коалиций, в которых данный участник — ключевой, не зависит от номера участника, поэтому индексы влияния участников равны, а поскольку сумма индексов влияния равна 1, то каждый из них равен $\frac{1}{5}$. Заметим, что индексы влияния у всех участников равны, при этом участник 5 имел всего один голос.

л) В выигрывающую коалицию должны входить как минимум двое из участников 1, 2 и 3, поскольку иначе коалиция может собрать не больше $9 + 3 + 1 + 1 = 14$ голосов. И наоборот, коалиция, включающая в себя двух из трех первых участников, содержит не менее 16 голосов и, следовательно, выигрывающая.

Итак, выигрывающими будут коалиции, в которые входит не менее двух из трех первых участников.

Легко видеть, что участники 4, 5 и 6 не являются ключевыми ни в одной коалиции, и, следовательно, их индекс влияния Банцафа равен нулю.

Для первых трех участников множество выигрывающих коалиций симметрично — если поменять кого-то из них местами, выигрывающими будут те же коалиции. Поэтому и число коалиций, где каждый из них ключевой, одинаково.

Итак, $\beta(4) = \beta(5) = \beta(6) = 0$; $\beta(1) = \beta(2) = \beta(3)$; $\beta(1)+\beta(2)+\beta(3) + \beta(4) + \beta(5) + \beta(6) = 1$.

Следовательно,

$$\beta(1) = \beta(2) = \beta(3) = \frac{1}{3}.$$

м) Выигрывающие коалиции: $\{5,6\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,4,6\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,4,5\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,5,6\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{3,5,6\}$, $\{4,5,6\}$ и все коалиции из не менее чем четырех участников, кроме $\{1,2,3,4\}$. Всего выигрывающих коалиций

$$11 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 - 1 = 11 + 15 + 6 + 1 - 1 = 32.$$
$$b(1) = b(2) = b(3) = 4;\ b(4) = 12,\ b(5) = b(6) = 16;$$
$$\beta(1) = \beta(2) = \beta(3) = \frac{4}{4 \cdot 3 + 12 + 16 \cdot 2} = \frac{1}{14};$$
$$\beta(4) = \frac{3}{14};\ \beta(5) = \beta(6) = \frac{2}{7}.$$

н) Разделим все выигрывающие коалиции на два класса:

— содержащие участника 1.

— не содержащие участника 1.

Выигрывающие коалиции, содержащие участника 1:

а) участник 1 и три других участника ($2 + 3 = 5$ голосов), их $C_7^3 = 35$ штук;

б) участник 1 и четыре других участника ($2 + 4 = 6$ голосов), их $C_7^4 = 35$ штук;

в) участник 1 и пять других участников ($2 + 5 = 7$ голосов), их $C_7^5 = 21$ штука;

г) участник 1 и шесть других участников ($2 + 6 = 8$ голосов), их $C_7^6 = 7$ штук;

д) участник 1 и семь других участников ($2 + 7 = 9$ голосов), их $C_7^7 = 1$ штука.

Выигрывающие коалиции, не содержащие участника 1:

е) пять участников, их $C_7^5 = 21$ штука;

ж) шесть участников, их $C_7^6 = 7$ штук;

з) семь участников, их $C_7^7 = 1$ штука.

Участник 1 является ключевым в коалициях вида а) и б), поэтому $b(1) = 35 + 35 = 70$.

Любой из участников 2—8 является ключевым в коалициях типа а) и е). Но каждый из них входит не во все эти коалиции, а только в C_6^2 штук типа а) и C_6^4 штук типа е). Поэтому $b(2) = b(3) = b(4) = b(5) = b(6) = b(7) = b(8) = C_6^2 + C_6^4 = 15 + 15 = 30$. Итак,

$$\beta(1) = \tfrac{70}{70+7\cdot 30} = \tfrac{1}{4};$$
$$\beta(2) = \beta(3) = \beta(4) = \beta(5) = \beta(6) = \beta(7) = \beta(8) = \tfrac{3}{28}.$$

о) $\beta(1) = 0,235; \beta(2) = \beta(3) = \beta(4) = \beta(5) = \beta(6) = \beta(7) = \beta(8) = 0,109$.

п) $\beta(1) = 0,2; \beta(2) = \beta(3) = \beta(4) = \beta(5) = \beta(6) = \beta(7) = \beta(8) = 0,114$.

3. Выпишем все выигрывающие коалиции: $\{P, B, C\}$, $\{P, B, D\}$, $\{P, C, D\}$, $\{A, B, C, D\}$, $\{P, B, C, D\}$. Заметим, что коалиции, в которых участвуют P и A одновременно, невозможны.

Имеем $b(P) = 4$, $b(A) = 1$, $b(B) = b(C) = b(D) = 3$.

Тогда

$$\beta(P) = \frac{3}{4+1+3+3+3} = \frac{2}{7} = 0,286;$$
$$\beta(B) = \beta(C) = \beta(D) = \frac{3}{4+1+3+3+3} = \frac{3}{14} = 0,214;$$
$$\beta(A) = \frac{1}{14} = 0,071.$$

Итак, президент банка P, имеющий больше голосов, чем каждый из остальных членов совета директоров, обладает и большей степенью влиятельности. Влиятельность A втрое меньше, чем у его коллег B, C и D. Таким образом, конфликт P и A вредит A.

4. Выпишем все выигрывающие коалиции: $\{P, A, C\}$, $\{P, A, D\}$, $\{P, B, C\}$, $\{P, B, D\}$, $\{P, C, D\}$, $\{P, A, C, D\}$, $\{P, B, C, D\}$.

Отметим следующее обстоятельство: по условию задачи члены директората P, A и B не могут голосовать за одно решение. Однако попарные их коалиции вместе с членами C и D возможны, т.к. вариантов голосования всего два («за» и «против»), а воздержаться нельзя. Тогда $b(P) = 7$, $b(A) = b(B) = 2$, $b(C) = b(D) = 3$ и

$$\beta(P) = \frac{7}{7+2+2+3+3} = \frac{7}{17} = 0,412;$$
$$\beta(A) = \beta(B) = \frac{2}{17} = 0,118; \ \beta(C) = \beta(D) = \frac{3}{17} = 0,176.$$

5. Для принятия решения федеральному правительству требуется поддержка не менее двух штатов — тогда в худшем случае будет равенство голосов и правительство примет нужное решение.

Для принятия решения, не совпадающего с мнением правительства, должно объединиться как минимум пять штатов.

При голосовании с квотой типа $(5; 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ситуация в точности такая же — для принятия решения нужно не менее пяти голосов, т.е. либо $2+1+1+1$, либо $1+1+1+1+1$.

Выигрывающие коалиции, в которые входит участник «федеральное правительство»:

а) правительство и два штата, их $C_6^2 = 15$ штук;

б) правительство и три штата, их $C_6^3 = 20$ штук;

в) правительство и четыре штата, их $C_6^4 = 15$ штук;

г) правительство и пять штатов, их $C_6^5 = 6$ штук;

д) правительство и шесть штатов, их $C_6^6 = 1$ штука.

Выигрывающие коалиции, в которые не входит правительство:

г) пять штатов, их $C_6^5 = 6$ штук;

д) шесть штатов, их $C_6^6 = 1$ штука.

Имеем (в обозначениях голосования с квотой) $b(1) = 15 + 20 + 15 = 50$, $b(2) = b(3) = b(4) = b(5) = b(6) = b(7) = C_5^1 + C_5^4 = 5 + 5 = 10$.

$$\beta(1) = \frac{50}{50 + 6 \cdot 10} = 0.455;$$
$$\beta(2) = \beta(3) = \beta(4) = \beta(5) = \beta(6) = \beta(7) = \frac{10}{50 + 6 \cdot 10} = 0,091.$$

6. а) Рассмотрим, например, такое голосование с квотой, как $(3; 3, 1, 1)$. Здесь все выигрывающие коалиции содержат участника 1, а проигрывающие не содержат, поскольку иначе у коалиции будет не более $1 + 1 = 2$ голосов. Значит, правило принятия решения является голосованием с квотой.

б) В голосовании с квотой коалиция, состоящая из всех участников N (в данном случае $N = \{1, 2, 3\}$), имеет не меньше голосов, чем любая другая коалиция. Поэтому, если выигрывающие коалиции вообще есть, то среди них будет и N. Здесь это условие нарушается: $\{2, 3\}$ — выигрывающая коалиция, $\{1, 2, 3\}$ — нет. Следовательно, это правило не является голосованием с квотой.

7. а) Рассмотрим, например, такое голосование с квотой, как $(6; 3, 3, 1, 1)$. Здесь выигрывающими являются коалиции, содержащие участников 1 и 2, а проигрывающими — не содержащие хотя бы одного из них, поскольку иначе у коалиции будет не более $3 + 1 + 1 = 5$ голосов. Значит, вышеописанное правило является голосованием с квотой.

б) Правило не является голосованием с квотой. *Указание:* рассмотрите коалиции $\{3, 4\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$.

8. а) Пусть участники имеют в своем распоряжении k_a, k_b, k_c, k_d голосов соответственно, а q — квота, необходимая для принятия решения. По условию задачи коалиции $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ — выигрывающие, а $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ — проигрывающие, т.е.

$$\begin{cases} k_a + k_b \geq q, \\ k_c + k_d \geq q, \\ k_a + k_c < q, \\ k_b + k_d < q. \end{cases}$$

Из первых двух неравенств следует, что $k_a + k_b + k_c + k_d \geq 2q$, а из третьего и четвертого — что $k_a + k_b + k_c + k_d < 2q$. Полученное противоречие говорит о том, что данное правило принятия решения не может быть голосованием с квотой.

б) *Указание:* рассмотрите голосование с квотой $(7; 3, 4, 3, 1)$.

9. Для подсчета индекса Банцафа записывать правило как голосование с квотой не обязательно.

Ключевыми для постоянного члена (P) будут коалиции, в которые входят все P и не менее четырех временных членов (T), т.е.

$$b(P) = C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 848.$$

T будет ключевым только в коалициях, куда входят все постоянные члены СБ, он сам и три других временных члена. Поэтому $b(T) = C_9^3 = 84$.

Итак:

$$\beta(P) = \frac{848}{848 \cdot 6 + 84 \cdot 10} = 0,143;$$
$$\beta(T) = \frac{84}{848 \cdot 6 + 84 \cdot 10} = 0,0142.$$

Первую часть задачи решим в общей форме:

Множество участников состоит из двух непересекающихся множеств X и Y, $|X| = n$, $|Y| = m$. Выигрывающей считается коалиция, состоящая из всех участников из X и как минимум k участников из Y.

Докажем, что данное правило принятия решения является голосованием с квотой и найдем «минимальные» веса участников.

Для решения построим голосование с квотой, выигрывающие коалиции которой совпадают с данными со следующими допущениями:

— веса участников из Y равны 1;

— веса участников из X — одинаковые натуральные числа;

— веса участников из X минимальны среди всех голосований с квотой, удовлетворяющих первым двум допущениям.

Построение. Пусть вес любого участника из X равен r, квота — q.

Тогда для того, чтобы выигрывающие коалиции были те же, что и в условии задачи, необходимо выполнение трех условий:

— коалиция, в которую входят все участники из X и k участников из Y, — выигрывающая, т.е. $rn + k \geq q$;

— коалиция, в которую входят все участники из X и $k-1$ участников из Y, — проигрывающая, т.е. $rn + k - 1 < q$;

— коалиция, в которую входят все участники из X, кроме одного, и все участники из Y, — проигрывающая, т.е. $r(n-1) + m < q$.

Из первых двух условий следует, что $rn + k = q$, вычитая из него третье, получим $rn+k-(r(n-1)+m) > q-q$, т.е. $r-m+k > 0$, или $r > m-k$. Таким образом, минимальное значение r, при котором выполняются все три условия, будет $m-k+1$. Квота же будет равна $q = rn+k = (m-k+1)n+k$. То, что построенное голосование с квотой будет эквивалентно исходной игре, можно проверить непосредственно.

В рассматриваемом случае $n = 6$, $m = 10$, $k = 4$, т.е. P имеет $10-4+1 = 7$ голосов, T — 1 голос, квота равна $6 \cdot (10-4+1) + 4 = 46$ голосов.

11. а) Выигрывающие коалиции: $A + C$, $B + C$, $A + B + C$. Минимальные выигрывающие коалиции: $A + C$, $B + C$.

1. Индекс Шепли — Шубика.

$$\sigma(A) = \sum_S \frac{(3-s)! \cdot (s-1)!}{3!} \big(\nu(S) - \nu(S \backslash \{A\})\big) = \frac{1! \cdot 1!}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Аналогично

$$\sigma(B) = \frac{(3-2)! \cdot (2-1)!}{3!} = \frac{1}{6};$$

$$\sigma(C) = 2 \cdot \frac{(3-2)! \cdot (2-1)!}{3!} + \frac{(3-3)! \cdot (3-1)!}{3!} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2. Индекс Джонсона.

$$TJI(A) = \frac{1}{2}; \qquad TJI(B) = \frac{1}{2}; \qquad TJI(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2.$$

$$JI(A) = JI(B) = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}; \qquad JI(C) = \frac{2}{3}.$$

3. Индекс Дигена — Пакела.

$$TDPI(A) = \frac{1}{2}; \qquad TDPI(B) = \frac{1}{2}; \qquad TDPI(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$DPI(A) = DPI(B) = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{4}; \qquad DPI(C) = \frac{1}{2}.$$

4. Индекс Холера — Пакела.

$$HPI(A) = \frac{1}{1+1+2} = \frac{1}{4}; \qquad HPI(B) = \frac{1}{1+1+2} = \frac{1}{4};$$
$$HPI(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

б) Выигрывающие коалиции: A, $A + B$, $A + C$, $A + B + C$. Минимальные выигрывающие коалиции: A.

1. Индекс Шепли — Шубика.

$$\sigma(A) = 1,\ \sigma(B) = \sigma(C) = 0.$$

2. Индекс Джонсона.

$$JI(A) = 1, \qquad JI(B) = JI(C) = 0.$$

3. Индекс Дигена — Пакела.

$$DPI(A) = 1; \qquad DPI(B) = DPI(C) = 0.$$

4. Индекс Холера — Пакела.

$$HPI(A) = 1; \qquad HPI(B) = HPI(C) = 0.$$

в) Выигрывающие коалиции: $A + B$, $A + C$, $A + D$, $B + C$, $A + B + C$, $A + B + D$, $A + C + D$, $B + C + D$, $A + B + C + D$. Минимальные выигрывающие коалиции: $A+B$, $A+C$, $A+D$, $B+C$.

1. Индекс Шепли — Шубика.

$$\sigma(A) = 3 \cdot \frac{(4-2)! \cdot (2-1)!}{4!} + 2 \cdot \frac{(4-3)! \cdot (3-1)!}{4!} = \frac{5}{12};$$

$$\sigma(B) = 2 \cdot \frac{2! \cdot 1!}{4!} + \frac{(4-3)! \cdot (3-1)!}{4!} = \frac{1}{4};$$

$$\sigma(C) = 2 \cdot \frac{2! \cdot 1!}{4!} + \frac{1! \cdot 2!}{4!} = \frac{1}{4};$$

$$\sigma(D) = \frac{2! \cdot 1!}{4!} = \frac{1}{12}.$$

2. Индекс Джонсона.

$$TJI(A) = \frac{1}{2}\cdot 3 + 1\cdot 2 = \frac{7}{2}; \qquad TJI(B) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$TJI(C) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \qquad TJI(D) = \frac{1}{2}.$$

$$JI(A) = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

$$JI(B) = JI(C) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{3}{14};$$

$$JI(D) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{14}.$$

3. Индекс Дигена — Пакела.

$$TDPI(A) = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \qquad TDPI(B) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1;$$

$$TDPI(C) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1; \qquad TDPI(D) = \frac{1}{2};$$

$$DPI(A) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 2\cdot 1 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{8};$$

$$DPI(B) = DPI(C) = \frac{1}{4}; \qquad DPI(D) = \frac{1}{8}.$$

4. Индекс Холера — Пакела.

$$HPI(A) = \frac{3}{8}; \qquad HPI(B) = HPI(C) = \frac{1}{4}; \qquad HPI(D) = \frac{1}{8}.$$

г) $A+B$, $A+C$, $A+D$ (минимальные выигрывающие коалиции), $A+B+C$, $A+B+D$, $A+C+D$, $B+C+D$ (минимальная выигрывающая коалиция), $A+B+C+D$.

1. Индекс Шепли — Шубика. $\sigma(A) = \frac{1}{2}$; $\sigma(B) = \sigma(C) = \sigma(D) = \frac{1}{6}$.

2. Индекс Джонсона. $JI(A) = \frac{9}{14}$; $JI(B) = JI(C) = JI(D) = \frac{5}{42}$.

3. Индекс Дигена — Пакела. $DPI(A) = \frac{3}{8}$; $DPI(B) = DPI(C) = DPI(D) = \frac{5}{24}$.

4. Индекс Холера — Пакела. $HPI(A) = \frac{1}{3}$; $HPI(B) = HPI(C) = HPI(D) = \frac{2}{9}$.

д) Имеются 32 выигрывающие коалиции: $A+B$, $A+D$, $B+D$, $A+B+C$, $A+B+D$, $A+B+E$, $A+B+F$, $A+C+D$, $A+D+E$, $A+D+F$, $B+C+D$, $B+D+E$, $B+D+F$, $A+B+C+D$, $A+B+C+E$, $A+B+C+F$, $A+B+D+E$, $A+B+D+F$, $A+B+E+F$, $A+C+D+E$, $A+C+D+F$, $A+D+E+F$, $B+C+D+E$, $B+C+D+F$, $B+D+E+F$, $A+B+C+D+E$, $A+B+C+D+F$, $A+B+C+E+F$, $A+B+D+E+F$, $A+C+D+E+F$, $B+C+D+E+F$, $A+B+C+D+E+F$.

1. Индекс Шепли — Шубика.

$$\begin{aligned}
\sigma(A) = \sigma(B) &= \sum_S \frac{(n-s)! \cdot (s-1)!}{n!} \cdot \big(\nu(S) - \nu(S \backslash \{A\}\big) = \\
&= \sum_S \frac{(6-s)! \cdot (s-1)!}{6!} \cdot \big(\nu(S) - \nu(S \backslash \{A\}\big) = \\
&= 2 \cdot \frac{4! \cdot 1!}{6!} + 6 \cdot \frac{3! \cdot 2!}{6!} + 6 \cdot \frac{2! \cdot 3!}{6!} + 2 \cdot \frac{1! \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{3};
\end{aligned}$$

$\sigma(C) = 0$ (нет коалиций, где C — ключевой);

$$\sigma(D) = 2 \cdot \frac{4! \cdot 1!}{6!} + 6 \cdot \frac{3! \cdot 2!}{6!} + 6 \cdot \frac{3! \cdot 2!}{6!} + 2 \cdot \frac{1! \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{3};$$

$\sigma(E) = \sigma(F) = 0$ (нет коалиций, где E или F — ключевой).

2. Индекс Джонсона.

$$TJI(A) = TJI(B) = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8; \qquad TJI(C) = 0;$$

$$TJI(D) = 8; \qquad TJI(E) = TJI(F) = 0;$$

$$JI(A) = JI(B) = \frac{8}{3 \cdot 8} = \frac{1}{3};$$

$$JI(C) = JI(E) = JI(F) = 0; \qquad JI(D) = \frac{8}{3 \cdot 8} = \frac{1}{3}.$$

3. Индекс Дигена — Пакела.

$$TDPI(A) = TDPI(B) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

$$TDPI(C) = 0; \qquad TDPI(D) = \frac{1}{2}; \qquad TDPI(E) = TDPI(F) = 0;$$

$$DPI(A) = DPI(B) = \frac{1}{2 \cdot 1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5};$$

$$DPI(C) = DPI(E) = DPI(F) = 0;$$

$$DPI(D) = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot 1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{5}.$$

4. Индекс Холера — Пакела.

$$HPI(A) = HPI(B) = \frac{2}{2 \cdot 2 + 0 + 2 + 0 + 0} = \frac{1}{3};$$

$$HPI(C) = 0; \qquad HPI(D) = \frac{1}{3};$$

$$HPI(E) = HPI(F) = 0.$$

е) 1. Индекс Шепли — Шубика.

$$\begin{aligned}
\sigma(P) &= \sum_{S} \frac{(15-s)! \cdot (s-1)!}{15!} \cdot \big(\nu(S) - \nu(S \backslash \{A\})\big) = \\
&= C_{10}^{4} \cdot \frac{(15-9)! \cdot (9-1)!}{15!} + C_{10}^{5} \cdot \frac{(15-10)! \cdot (10-1)!}{15!} + \\
&+ C_{10}^{6} \cdot \frac{(15-11)! \cdot (11-1)!}{15!} + C_{10}^{7} \cdot \frac{(15-12)! \cdot (12-1)!}{15!} + \\
&+ C_{10}^{8} \cdot \frac{(15-13)! \cdot (13-1)!}{15!} + C_{10}^{9} \cdot \frac{(15-14)! \cdot (14-1)!}{15!} + \\
&+ C_{10}^{10} \cdot \frac{(15-15)! \cdot (15-1)!}{15!} = 0,196;
\end{aligned}$$

$$\sigma(T) = C_9^3 \cdot \frac{(15-9)! \cdot (9-1)!}{15!} = 84 \cdot \frac{6! \cdot 8!}{15!} = 0,002.$$

2. Индекс Джонсона.

$$TJI(P) = C_{10}^4 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5}\left(C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}\right) = \frac{2264}{15};$$

$$TJI(T) = C_9^3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3}.$$

$$JI(P) = \frac{\frac{2264}{15}}{\frac{2264}{3} + \frac{280}{3}} = 0,178;$$

$$JI(T) = \frac{(\frac{28}{3})}{(\frac{2544}{3})} = 0,011.$$

3. Индекс Дигена — Пакела.

Минимальными выигрывающими коалициями являются только коалиции вида $5 \cdot P + 4 \cdot T = 39$ голосов. Их $C_{10}^4 = 210$ штук.

$$TDPI(P) = 210 \cdot \frac{1}{9} = \frac{70}{3};$$

$$TDPI(T) = C_9^3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3}.$$

$$DPI(P) = \frac{\frac{70}{3}}{\frac{350}{3} + \frac{280}{3}} = 0,111;$$

$$DPI(T) = \frac{\frac{28}{3}}{\frac{630}{3}} = 0,044.$$

4. Индекс Холера — Пакела.

$$HPI(P) = \frac{210}{5 \cdot 210 + 10 \cdot 84} = 0,111;$$

$$HPI(T) = \frac{84}{5 \cdot 210 + 10 \cdot 84} = 0,044.$$

Глава 7

1.

а)

Цикл	*Знак цикла*
$abdca$	$-$

;

б)

Цикл	*Знак цикла*
$abca$	$+$
$cdec$	$-$

;

в)

Цикл	*Знак цикла*
$cdec$	$+$
$abcefa$	$+$
$abcdefa$	$-$

;

г)

Цикл	*Знак цикла*
$abga$	$-$
$bcgb$	$+$
$cdfc$	$-$
$defd$	$-$
$abcga$	$-$
$cdefc$	$+$

;

д)

Цикл	*Знак цикла*
$abcga$	$-$
$cdefc$	$+$

.

2. **а)** $b(G) = 0$; **б)** $b(G) = \frac{1}{2}$; **в)** $b(G) = \frac{2}{3}$; **г)** $b(G) = \frac{1}{3}$; **д)** $b(G) = \frac{1}{2}$.

3. **а)**

$$b_1(G) = \frac{\sum\limits_{k=3}^{4} \frac{1}{k} p_k}{\sum\limits_{k=3}^{4} \frac{1}{k} t_k};$$

$p_3 = 0$, $p_4 = 0$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$.

Значит,

$$b_1(G) = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0}{\frac{1}{4} \cdot 1} = 0.$$

б)

$$b_1(G) = \frac{\frac{1}{3} p_3}{\frac{1}{3} t_3} = \frac{1}{2}.$$

в) $b_1(G) = \frac{16}{21}$.

г) $b_1(G) = \frac{7}{22}$.

д) $b_1(G) = \frac{1}{2}$.

4. Знаковый граф, характеризующий взаимоотношения членов Совета директоров, показан на рис. Р.35 (с. 281). В скобках рядом с участником проставлено, каким числом голосов он располагает.

В данном случае рассматриваем знаки не всех простых циклов, а только тех, которые соответствуют выигрывающим коалициям.

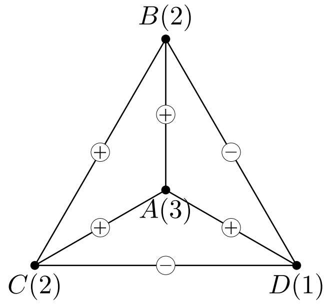


Рис. Р.35

Цикл	*Знак цикла*
ABCA	$+$
ABDA	$-$
ADCA	$-$
ABCDA	$-$
ABDCA	$+$
ADBCA	$-$

Значит, $b(G) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Таким образом, Совет директоров данной фирмы является мало сбалансированным, и поэтому в его работе могут возникать определенные сложности и напряженность.

5. Знаковый граф, отражающий взаимоотношения между A, B, C и D, с учетом количества голосов, имеющихся у каждого из них, показан на рис. Р.36.

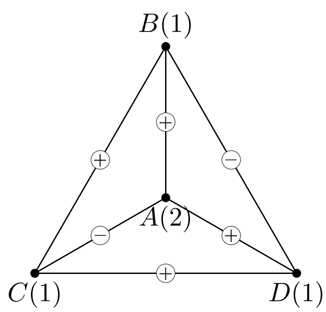


Рис. Р.36

Значит, $b(G) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, т.е. правление довольно не сбалансировано, поэтому в его работе возможны осложнения.

Глава 8

1. Предположим, что переговоры авиадиспетчеров и министерства ведутся по пяти пунктам, указанным ниже. Здесь же представлены возможные оценки участников переговоров по каждому из пунктов.

№ *п/п*	*Проблема*	*Оценка* авиадиспетчеров	*Оценка* работодателей
1	Повышение заработанной платы	40*	35
2	Часовая нагрузка	30	40*
3	Доля медицинской страховки, оплачиваемая работодателем	10*	5
4	Надбавки за «особые условия» труда	10	15*
5	Продолжительность отпуска	10*	5

Первоначальное распределение очков:

— выигрыш авиадиспетчеров: $40 + 10 + 10 = 60$ очков;

— выигрыш работодателей: $40 + 15 = 55$ очков.

«Делимые» решения: пп. 1—5. Найдем по каждому пункту отношение максимальной оценки к минимальной:

п. 1 $40 : 35 = 1,14$; п. 4 $15 : 10 = 1,5$;

п. 2 $40 : 30 = 1,33$; п. 5 $10 : 5 = 2$.

п. 3 $10 : 5 = 2$;

Наименьшее отношение получилось в п. 1, разделим очки по этому пункту. Пусть по этому пункту авиадиспетчеры получат часть x от возможных очков, а работодатели — часть $(1 - x)$.

Тогда выигрыш авиадиспетчеров равен $20 + 40x$, а выигрыш работодателей — $55 + 35(1 - x)$. Имеем $20 + 40x = 55 + 35(1 - x)$ и $x = \frac{14}{15}$.

Итак, по п. 1 принимается компромиссное решение: авиадиспетчеры получат $93,3\%$ возможных очков, а работодатели — $6,7\%$. При этом каждая из сторон получит выигрыш в 57,3 очка.

2. Пусть оценки (для примера) делящегося имущества имеют следующий вид:

№ п/п	Пункт переговоров	Оценка мужа	Оценка жены
1	Квартира в Париже	30*	15
2	Дача в Подмосковье	10	15*
3	Автомобиль Мерседес-500	5	10*
4	Джип Lexus	15*	5
5	Квартира в Москве	15	25*
6	Квартира в Туле	5	10*
7	Акции общей стоимостью 15 млн. руб.	20	20

Первый «проход»:

— выигрыш мужа: $30 + 15 + 20 = 65$ очков (пусть по акциям выигрыш остался за мужем);

— выигрыш жены: $15 + 10 + 25 + 10 = 60$ очков.

Делимыми здесь являются все пункты, т.к. могут быть разделены не сами предметы, а их стоимость.

Найдем по каждому пункту отношение максимальной оценки к минимальной:

п. 1 $30 : 15 = 2$; п. 5 $25 : 15 = \frac{5}{3}$;

п. 2 $15 : 10 = 1,5$; п. 6 $10 : 5 = 2$;

п. 3 $10 : 5 = 2$; п. 7 $20 : 20 = 1$.

п. 4 $15 : 5 = 3$;

Наименьшее отношение получилось в п. 7. Поэтому делим очки по этому пункту. Пусть по п. 7 муж получает x часть от возможных очков, тогда жена получит $(1 - x)$ часть.

Выигрыш мужа равен $30 + 15 + 20x = 45 + 20x$, а выигрыш жены — $15 + 10 + 25 + 10 + 20(1 - x) = 80 - 20x$.

Имеем уравнение $45 + 20x = 80 - 20x$. Отсюда $x = \frac{7}{8}$.

Это означает, что по п. 7 стороны принимают компромиссное решение: муж получает $\frac{7}{8}$ от возможных очков, а жена — $\frac{1}{8}$. Следовательно, выигрыш мужа составит $45 + 20 \cdot \frac{7}{8} = 62,5$ очка, выигрыш жены равен $80 - 20 \cdot \frac{7}{8} = 62,5$ очка, т.е. выигрыши супругов выравнялись.

4.

№ п/п	Проблема	A	B
1	Название фирмы	10	20*
2	Местонахождение штаб-квартиры	30	30
3	Назначение президента	10	20*
4	Назначение исполнительного директора	20*	10
5	Увольнение персонала	30*	20

Первоначальное распределение очков:

— выигрыш A: $20 + 30 = 50$ очков,

— выигрыш B: $20 + 20 + 30 = 70$ очков.

Выигрыш по п. 2 переводим вначале фирме B.

Очевидно, делимым является только п. 5 переговоров. Пусть фирме A достается часть x от возможных очков по этому пункту, а фирме B — $(1 - x)$ часть соответственно. Тогда выигрыш A составит $50 + 30x$ (перераспределим очки по п. 2 в пользу фирмы A, иначе у нее будет менее 50 очков), а выигрыш B — $20 + 20 + 20(1 - x)$. Имеем $50 + 30x = 40 + 20(1 - x)$. Отсюда $x = \frac{1}{5}$. Выигрыш каждой фирмы составит 56 очков. При этом фирма A назначает исполнительного директора новой компании, а также получает право определить местонахождение штаб-квартиры и 20% выигрыша по увольнению персонала. Фирма B выбирает название новой компании, назначает ее президента, а также получает право на 80% выигрыша по увольнению персонала.

5.

№ *п/п*	*Пункт переговоров*	*Страна* A	*Страна* B
1	Право на использование базы в случае военных действий в третьих странах	22*	9
2	Использование прибрежных вод	22*	15
3	Продолжительность аренды	15	15
4	Компенсации	11	15*
5	Использование прилегающей территории	14*	3
6	Количество персонала	6*	5
7	Право страны B на получение соответствующей информации от страны A	4	11*
8	Юрисдикция	2	7*
9	Права на продление аренды	2	7*
10	Гарантии безопасности стране B	2	13*

Первоначальное распределение очков:

— выигрыш A: $22 + 22 + 14 + 6 = 64$ очка;

— выигрыш B: $15 + 11 + 7 + 7 + 13 + 15 = 68$ очков.

Делимыми являются пп. 3, 4 и 6 переговоров.

Найдем по каждому из этих пунктов отношение максимальной оценки к минимальной:

п. 3: $15:15=1$; п. 4: $15:11\approx 1,4$; п. 6: $6:5=1,2$.

Разделу подлежат очки по п. 3, т.к. именно здесь получено наименьшее отношение. Пусть A получит их часть x, а B — $(1-x)$ часть. Тогда выигрыш A составляет $22+22+14+6+15x=64+15x$ очков, а выигрыш B — $15+11+7+7+13+15(1-x)=53+15(1-x)$ очков.

Имеем $64+15x=53+15(1-x)$. Значит, $x=\frac{2}{15}$. Поэтому выигрыш каждой из стран равен 66 очков. При этом страна A получает целиком выигрыш по пп. 1, 2, 5, 6 и 13,3% выигрыша по п. 3, а страна B — выигрыш по пп. 4, 7, 8—10 и 86,7% выигрыша по п. 3.

Пусть страна A знает предпочтения страны B и точное распределение ею очков. Тогда A может исказить свои истинные предпочтения с целью получения максимальной выгоды для себя. Для этого A уменьшает оценки по тем пунктам, по которым выигрывает и так, до минимально возможных, и увеличивает по тем пунктам, где она получает либо не весь выигрыш, либо вообще проигрывает, но которые стоят в ее предпочтениях сразу после выигранных ею позиций. Очки при этом для страны A могут перераспределиться по-разному, например, так.

№ *п/п*	*Пункт переговоров*	*Страна* A	*Страна* B
1	Право на использование базы в случае военных действий в третьих странах	10*	9
2	Использование прибрежных вод	16*	15
3	Продолжительность аренды	16*	15
4	Компенсации	15	15
5	Использование прилегающей территории	5*	3
6	Количество персонала	6*	5
7	Право страны B на получение соответствующей информации от страны A	10	11*
8	Юрисдикция	6	7*
9	Права на продление аренды	6	7*
10	Гарантии безопасности стране B	10	13*

Первоначальное распределение очков:

— выигрыш A: $10+16+16+6+5=53$ очка;

— выигрыш B: $11+7+7+13=38$ очков.

Нераспределенными остались очки по п. 4, где имеется равенство оценок. Передадим их той стороне, которая имеет меньше очков, т.е. стране B. Тем самым выигрыш уравняется и составит по 53 очка с каждой стороны. При этом страна A выиграла по тем же самым позициям, что и ранее (пп. 1, 2, 5, 6), а также по позиции 3, по которой имела в первоначальном варианте 13,3% возможных очков. Таким образом, искажение своих предпочтений было выгодно стране A.

Аналогично может поступить, перераспределив очки, страна B, если знает точные оценки пунктов переговоров страной A. Пусть страна B исказила свои истинные оценки таким образом.

№ п/п	Пункт переговоров	Страна	
		A	B
1	Право на использование базы в случае военных действий в третьих странах	22*	20
2	Использование прибрежных вод	22	25*
3	Продолжительность аренды	15	16*
4	Компенсации	11	12*
5	Использование прилегающей территории	14*	6
6	Количество персонала	6*	5
7	Право страны B на получение соответствующей информации от страны A	4	5*
8	Юрисдикция	2	3*
9	Права на продление аренды	2	3*
10	Гарантии безопасности стране B	2	5*

Первоначальное распределение очков:

— выигрыш A: $22 + 14 + 6 = 42$ очка;

— выигрыш B: $25 + 16 + 12 + 5 + 3 + 3 + 5 = 69$ очков.

Необходимо выравнять выигрыш. Нетрудно видеть, что наименьшее отношение максимальной оценки к минимальной достигается в п. 3, поэтому будем делить очки по этой позиции между A и B. Пусть A имеет часть x очков, а B — $(1 - x)$ часть. Тогда выигрыш A составит $(42 + 15x)$ очков, а выигрыш B — $53 + 16(1 - x)$. Имеем $42 + 15x = 53 + 16(1 - x)$ и $x = \frac{27}{31}$.

Значит, выигрыш B по п. 3 переговоров составит $12,9\%$ (ранее — $86,7\%$), но при этом B сохранит выигрыш по всем тем же пунктам, что и ранее (пп. 4, 7—10), а также получит весь выигрыш по п. 2, который оценивает для себя также, как и п. 3. Таким образом, манипулирование принесло B очевидную выгоду.

Заметим, однако, что манипулирование практически возможно, если известны *точные оценки* противостоящей стороны, иначе искажение истинных оценок может привести к проигрышу.

6. 1) Рассмотрим первую комбинацию сценариев, т.е. $а_1$)—$а_2$) (блок 1 оценивает политическую кооперацию, а блок 2 — экономическую выгоду и политическую кооперацию).

№ *п/п*	*Участок*	*Блок 1*	*Блок 2*
1	A	40*	0
2	B	30*	0
3	C	10	20*
4	D	10	40*
5	E	10	40*

Первый «проход»:

— выигрыш блока 1: $40 + 30 = 70$ очков;

— выигрыш блока 2: $20 + 40 + 40 = 100$ очков.

Делимыми являются все территории A, B, C, D, E.

Найдем отношение максимальных и минимальных оценок по каждому пункту: пп. 1, 2 —; п. 3 — $20 : 10 = 2$; пп. 4, 5 — $40 : 10 = 4$.

Так как по п. 3 имеем наименьшее отношение, то разделим выигрыш между блоками именно по этому пункту.

Нетрудно видеть, что выигрыш сторон уравняется, если очки по п. 3 целиком передать блоку 1. Тогда каждая из сторон получит выигрыш в 80 очков. Блок 1 получит целиком участки A, B, C, а блок 2 — участки D и E.

2) Рассмотрим комбинацию сценариев $а_1$)—$б_2$), т.е. блок 1 оценивает политическую кооперацию, а блок 2 — сохранение контроля над участками.

№ *п/п*	*Участок*	*Блок 1*	*Блок 2*
1	A	40*	0
2	B	30	30
3	C	10	30*
4	D	10	40*
5	E	10*	0

Первоначальное распределение очков дает следующие выигрыши:

— блок 1: $40 + 30 + 10 = 80$ очков;

— блок 2: $30 + 40 = 70$ очков.

Очки по пп. 1 и 5 безусловно отходят блоку 1, т.к. блок 2 вовсе не претендует на эти территории. Поэтому раздел очков для уравнивания выигрыша может быть осуществлен по пп. 2, 3 или 4. Так как по п. 2 отношение максимальной оценки к минимальной наименьшее и равно 1, то раздел очков производится по этому пункту: блок 1 — x часть очков, блок 2 — $(1 - x)$ часть очков. Имеем $40 + 10 + 30x = 30 + 40 + 30(1 - x)$. Отсюда следует, что $x = \frac{5}{6}$. Выигрыш каждого блока составит по 75 очков. При этом блок 1 получает участки A и E и $83,3\%$ участка B, а блок 2 — участки C и D, а также $16,7\%$ участка B.

3) Комбинация сценариев б$_1$)—а$_2$), т.е. блок 1 оценивает военное значение территорий, а блок 2 — политическую кооперацию и экономическую выгоду.

№ *п/п*	*Участок*	*Блок 1*	*Блок 2*
1	A	30*	0
2	B	0	0
3	C	0	20*
4	D	30	40*
5	E	40	40

Первоначальное распределение очков дает следующие выигрыши:

— блок 1: $30 + 40 = 70$ очков;

— блок 2: $20 + 40 = 60$ очков.

Разделим выигрыш по п. 5, т.к. здесь блоки имеют одинаковые оценки. Блок 1 получит часть x, а блок 2 — часть $(1 - x)$. Тогда выигрыш блока 1 равен $30 + 40x$ очков, а блока 2 — $20 + 40 + 40(1 - x) = 100 - 40x$. Следовательно, $x = \frac{7}{8}$. Значит, выигрыш блока 1 равен $30 + 40 \cdot \frac{7}{8} = 65$ очков, блок 2 получит выигрыш в $100 - 40 \cdot \frac{7}{8} = 65$ очков. Блок 1 получает целиком участок A и $87,5\%$ участка E, блок 2 — C и D, а также $12,5\%$ участка E. При этом участок B может быть отдан любому блоку, например первому — как получившему всего один целый участок.

4) Комбинация сценариев б$_1$)—б$_2$), т.е. блок 1 оценивает территории с позиций их военного значения, а блок 2 — с точки зрения сохранения контроля над территориями.

№ п/п	Участок	Блок 1	Блок 2
1	A	30*	0
2	B	0	30*
3	C	0	30*
4	D	30	40*
5	E	40*	0

Первоначальное распределение очков дает следующие выигрыши:

— блок 1: $30 + 40 = 70$ очков;

— блок 2: $30 + 30 + 40 = 100$ очков.

Так как пп. 2 и 3 не представляют интереса для блока 1, то все очки по этим пунктам целиком передаются блоку 2. По тем же самым причинам очки по пп. 1 и 5 передаются блоку 1.

Итак, чтобы выравнять выигрыши, разделим очки по п. 4: блок 1 — x часть очков, блок 2 — $(1 - x)$ часть очков. Тогда выигрыш блока 1 составит $30 + 40 + 30x = 70 + 30x$ очков, а блока 2 — $30 + 30 + 40(1 - x) = 100 - 40x$ очков.

$$70 + 30x = 100 - 40x; \qquad x = \frac{3}{7}.$$

Следовательно, выигрыш блока 1 составит $70 + 30 \cdot \frac{3}{7} = 82,9$ очка, а блока 2 — $100 - 40 \cdot \frac{3}{7} = 82,9$ очка. При этом блок 1 получит участки A и E и $42,9\%$ участка D, а блок 2 — участки B и C, а также $57,1\%$ участка D.

5) Комбинация сценариев $в_1$)—$а_2$): блок 1 оценивает территории с позиции экономической выгоды, а блок 2 — с позиций политической кооперации и экономической выгоды.

№ п/п	Участок	Блок 1	Блок 2
1	A	20*	0
2	B	0	0
3	C	0	20*
4	D	30	40*
5	E	50*	40

Первоначальное распределение очков дает следующие выигрыши:

— блок 1: $20 + 50 = 70$ очков;

— блок 2: $20 + 40 = 60$ очков.

Разделим выигрыш по пп. 4 или 5. Найдем отношение максимальной оценки к минимальной по этим пунктам.

п. 4: $40 : 30 = \frac{4}{3}$;

п. 5: $50 : 40 = \frac{5}{4}$.

Наименьшее отношение в п. 5, разделим выигрыш по этому пункту: блок 1 — x часть очков, блок 2 — $(1-x)$ часть очков. Тогда блок 1 получит $20 + 30 + 50x = 50 + 50x$ очков, а блок 2 — $20 + 40 + 40(1-x) = 100 - 40x$ очков. Имеем $50 + 50x = 100 - 40x$. Значит, $x = \frac{5}{9}$.

Поэтому выигрыши блоков составят по 77,8 очка. Блок 1 получает целиком участок A и 55,6% участка E, блок 2 — целиком участки C и D и 44,7% участка E. Участок B может быть отнесен к любому блоку (например к блоку 1, чтобы каждый из блоков получил по два целых участка и части участка E).

6) Комбинация сценариев $в_1$)—$б_2$), т.е. блок 1 оценивает участки с позиций экономической выгоды, а блок 2 — с позиций сохранения контроля над ними.

№ п/п	*Участок*	*Блок 1*	*Блок 2*
1	A	20*	0
2	B	0	30*
3	C	0	30*
4	D	30	40*
5	E	50*	0

Очевидно, что блок 1 получает сразу очки по пп. 1 и 5 (блок 2 не интересуется участками A и E), а блок 2 — по пп. 2 и 3 (по тем же самым причинам), т.е. выигрыш блока 1 составит 70 очков, а блока 2 — 60 очков. Чтобы дележ был равноценным, разделим между ними очки по п. 4:

блок 1 — x часть очков;

блок 2 — $(1-x)$ часть очков.

Тогда $70 + 30x = 60 + 40(1-x)$ и $x = \frac{3}{7}$. Теперь выигрыш каждого блока составит 82,9 очка. Таким образом, блок 1 получает целиком участки A и E и 42,9% участка D, а блок 2 — целиком участки B и C и 57,1% участка D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов (основы теории). М.: Наука, 1990.
2. *Алескеров Ф.Т.* Слияние фирм: анализ трех ключевых проблем. // Финансовый бизнес. 2002. № 6. С. 3—7.
3. *Алескеров Ф.Т.* Справедливый дележ? // Власть. 2002. № 8. С. 75—76.
4. *Алескеров Ф.Т., Благовещенский Н.Ю., Сатаров Г.А., Соколова А.В., Якуба В.И.* Оценка влияния групп и фракций в российском парламенте (1994—2003 гг.) // Экон. журн. ВШЭ. 2003. № 4. С. 496—512.
5. *Алескеров Ф.Т., Ортешук П.* Выборы. Голосования. Партии. М.: Академия, 1995.
6. *Алескеров Ф.Т., Яновская Ю.М.* Применение теории справедливых решений к трудовым спорам // Управление персоналом. 2003. № 1. С. 59—61.
7. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974.
8. *Берж К.* Теория графов и ее приложения. М.: ИЛ, 1962.
9. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
10. *Брамс С., Тейлор А.* Делим по справедливости. М.: СИНТЕГ, 2003.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Гостехиздат, 1953.
12. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975.
13. *Кузнецов О.П.* Дискретная математика для инженера. СПб.: Лань, 2004.
14. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.
15. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 1975.

16. *Мендельсон Э.В.* Ведение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
17. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
18. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
19. *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
20. О сбалансированности Государственной Думы Российской Федерации (1994—2003 гг.): препринт WP7/2003/02. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2003.
21. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1968.
22. Письма Плиния Младшего. Книги I—X / АН СССР. М.: Наука, 1983. (Лит. памятники).
23. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука, 1986.
24. *Сатаров Г.А., Станкевич С.Б.* Расчет рейтингов законодателей: Консерватизм и радикализм на Втором съезде народных депутатов СССР. Демократические институты в СССР: Проблемы и методы исследования. М., 1991.
25. *Столл Р.* Множество, логика, аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968.
26. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.
27. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.
28. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1975.
29. *Якуба В.И.* Институциональный баланс власти в Совете Министров расширенного Евросоюза // Экон. журн. ВШЭ. Т. 7. 2003. № 4. С. 513—523.
30. *Aizerman M., Aleskerov F.* Theory of Choice. North-Holland, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1995.
31. *Aleskerov F.* Arrovian Aggregation Models. Dordercht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

32. *Aleskerov F.* Categories of Arrovian Voting Schemes // Handbook of Economics 19, Handbook of Social Choice and Welfare. Vol. 1 / K. Arrow, A. Sen, K. Suzumura (eds.). Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2002. P. 95—129.

33. *Aleskerov F., Avci G., Iacouba I., Turem Z.U.* European Union enlargement: power distribution implications of the new institutional arrangements // European Journal of Political Research. 2002. Vol. 41. P. 379—394.

34. *Aleskerov F., Ersel H., Sabuncu Y.* Power and caolitional stability in the Turkish Parliament (1991—1999) // Turkish Studies. Vol. 1. 2000. № 2. P. 21—38.

35. *Aleskerov F., Monjardet B.* Utility Maximization, Choice and Preference. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

36. *Alkan A.* Nonexistence of stable threesome matchings // Mathematical Social Sciences. 1986. Vol. 16. P. 207—209.

37. *Armstrong W.* The determinateness of the utility function // Economic Journal. 1939. Vol. 49. P. 453—467.

38. *Arrow K.* Social Choice and Individual Values. 2nd ed. New Haven: Yale University Press, 1963; 1st ed. N. Y.: John Wiley and Sons, 1951.

39. *Aumann R.* Rationality and bounded rationality. Nancy L. Schwartz Memorial Lecture, J.L. Kellogg School of Management, Northwestern University, 1986.

40. *Banzhaf J.F.* Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis // Rutgers Law Review. 1965. Vol. 19. P. 317—343.

41. *Biggs N.L.* Discrete Mathematics. Oxford University Press, 2003.

42. *Brams S.J., Taylor A.D.* Fair division. From cake-cutting to despute resolution. Cambridge University Press, 1996.

43. *Condorcet Marquis de.* Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. P., 1785.

44. *Deegan J., Packel E.W.* A New Index of Power for Simple *n*-Person Games // International Journal of Game Theory. 1978. Vol. 7 (2). P. 113—123.

45. *Felsenthal D.S., Machover M.* The Measurement of Voting Power. Cheltenham, UK: Edward Elgar, 1998.

46. *Fishburn P.C.* The Theory of Social Choice. Princeton University Press, 1973.

47. *Fishburn P.C.* Utility Theory for Decision Making. N. Y.: John Wiley and Sons, 1970.

48. *Gale D., Shapley L.* College admissions and the stability of marriage // American Mathematical Monthly. 1962. Vol. 69. P. 9—15.

49. *Harary F., Norman R.Z., Cartwright D.* Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs. N. Y.: John Wiley and Sons, 1965.

50. *Heider F.* Attitude and Cognitive Organization // Journal of Psychology. 1946. Vol. 21. № 1.

51. *Heme K., Nurmi H.* A Priori Distribution of Power in the EU Council of Ministers and the European Parliament // Scandinavian Journal of Political Studies. 1993. Vol. 16. P. 269—284.

52. *Holler M.J., Packel E.W.* Power, Luck and the Right Index // Journal of Economics. 1983. Vol. 43. P. 21—29.

53. *Huntington E.V.* The continuum as a type of order // Annals of Mathematics. 1905. № 6. P. 151—184.

54. *Kahneman D., Tversky A.* Choice, Values and Frames. Cambridge University Press, 2000.

55. *Kreps D.* Notes on the Theory of Choice. Boulder; L.: Vestview Press, 1988.

56. *Leech D.* Voting power in the governance of the International Monetary Fund // Annals of Operations Research. 2002. Vol. 109. P. 375—397.

57. *Moulin H.* Axioms of Cooperative Decision Making. Cambridge University Press, 1988.

58. *Moulin H.* Choice functions over a finite set: a summary // Social Choice and Welfare. 1985. Vol. 2. P. 147—160.

59. *Pareto V.* Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1889.

60. *Riguet J.* Les relations de Ferrers. C.R. Académie des Sciences. 1951. Vol. 232. P. 1729—1730.

61. *Riker W.H.* The Art of Political Manipulation. New Haven, CT: Yale University Press, 1986.

62. *Roth A., Sotomayor M.O.* Two-sided matching. Cambridge University Press, 1990.

63. *Roubens M., Vincke P.* Preference Modelling, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer, 1985.

64. *Roy B.* Algèbre moderne et théorie des graphes. Vol. I, II. P.: Dunod, 1969.

65. *Samuelson P.* A note on the pure theory of consumers behavior // Economica. 1938. Vol. 5. P. 61—71, 353—354.

66. *Schröder E.* Vorlesungen über die Algebra der Logik. Vol. 3. Leipzig, 1890—1895.

67. *Sen A.* Choice functions and revealed preference // Review of Economic Studies. 1971. Vol. 38 (3). P. 307—317.

68. *Sen A.* Collective Choice and Social Welfare. San Francisco: Holden-Day, 1970.

69. *Sen A.* Maximization and the act of choice // Econometrica. 1997. Vol. 65 (4). P. 745—779.

70. *Sen A.* Rational behavior // The New Palgrave: A Dictionary of Economics, J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman (eds.). L.: Macmillan, 1987. Vol. 4. P. 68—76.

71. *Shapley L.S., Shubik M.* A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System // American Political Science Review. 1954. Vol. 48. P. 787—792.

72. *Simon H.* Models of Bounded Rationality: collected papers. Cambridge, MA: The MIT Press, 1982.

73. *Suzumura K.* Rational Choice, Collective Decisions and Social Welfare. Cambridge University Press, 1983.

74. *Tversky A.* Intransitivity of preferences // Psychological Review. 1969. Vol. 76. P. 31—48.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

3-сочетание, 54

аксиома
- единогласия, 100
- локальности, 99
- монотонности, 101
- независимости от посторонних альтернатив, 99
- нейтральности, 101
- ненавязанности, 100

антицепь, 126

бинарное отношение, 17, 63
- антирефлексивное, 68
- асимметричное, 68
- ациклическое, 44, 75
- дополнительное, 66
- обратное, 66
- объединение, 64
- отрицательно транзитивное, 68
- пересечение, 64
- полное, 68
- полутранзитивное, 87
- произведение, 65
- рефлексивное, 68
- связное, 43, 68
- симметричное, 68
- транзитивное, 43, 68
- транзитивное замыкание, 71

блокирующая пара, 49

вершина
- графа, 15
  - изолированная, 20
- инцидентная дуге, 21

вершинное покрытие графа, 40

граф, 15, 16
- ациклический, 75
- двудольный, 19
  - полный, 39
- знаковый, 179
- корона, 149
- мажоритарный, 94
- ориентированный
  - полный, 149
- полный, 70
- пустой, 73
- регулярный, 22
- связный, 31

декартово произведение, 16

дележ
- Парето-оптимальный, 205
- пропорциональный, 203
- равноценный, 205
- с отсутствием зависти, 204
- эффективный, 205

дефицит двудольного графа, 28

диктатор, 106

длина
- цепи, 17
- цикла, 17, 75

дуга, 15
- инцидентная вершине, 21
- неориентированная, 15
- ориентированная, 15

задача
голосования, 92
дележа, 199
о свадьбах, 19
знак цикла, 182
индекс
Банцафа, 159
Джонсона, 172
Дигена — Пакела, 174
Холера — Пакела, 175
Шепли — Шубика, 171
институциональный баланс власти, 167
квота, 155
коалиция, 155
выигрывающая, 155
минимальная, 173
проигрывающая, 155
компонента графа, 31
контур, 17
максиминная процедура, 141
манипулирование
со стороны избирателя, 113
матрица смежности, 73
мера сбалансированности, 186
минимаксная процедура, 141
множество
внешне устойчивое, 126
минимальное, 127
внутренне устойчивое, 125
максимальное, 126
доминирующее, 135
минимальное, 135
конечное, 17
недоминируемое, 136
минимальное, 136
мощность множества, 17
мультиграф, 16
наилучшая альтернатива выторгованному соглашению, 206
нуль-граф, 73, 149
олигархия, 106
отношение
мажоритарное, 129
несравнимости, 67
предпочтения
нестрогое, 80
строгое, 80
толерантности, 77
эквивалентности, 77
парадокс
Кондорсе (голосования), 94
парламент
сбалансированный, 182
паросочетание, 23
индивидуально иррациональное, 48
индивидуально рациональное, 48
максимальное, 23
неустойчивое, 49
обобщенное, 47
совершенное, 23
устойчивое, 49
партия
ключевая, 159
победитель Кондорсе, 94
подграф, 31
полная система представителей, 37
порядок
линейный, 44, 75

слабый, 75
частичный, 75
правила
позиционные, 132
правило
Борда, 95
диктаторское, 106
единогласия, 107
Коупленда
второе, 139
первое, 138
третье, 140
относительного большинства, 97
простого большинства, 93
Фишберна, 137
Хара, 132
правило голосования
защищенное от манипулирования, 113
манипулируемое, 113
предпочтение, 43
предъявление, 81
пространство размещений, 156
пространство сочетаний, 157
профиль, 92
процедура
«дели и выбирай», 201
Кумбса, 134
Нансона, 133
«подстраивающийся победитель», 207
справедливая, 203
прямое произведение, 16
путь, 17

ранг, 95
решающий индивидуум, 109

сбалансированная группа, 181
семейство выигрывающих коалиций, 102
симметрическая разность, 31
списочное представление процедуры голосования, 102
срез
верхний, 130
нижний, 131
степень
вершины, 21
сужение профиля, 130

трансверсаль, 37

условие
Холла, 24
Чипмана, 70
условия классической рациональности, 43

функция выбора, 82
непустого, 82
однозначного, 82
рационализируемая отношением P, 82
рационализируемая отношением R, 83

характеристическая функция, 155

цепь, 17
простая, 17
чередующаяся, 26
цикл, 17
простой, 17

число
внешней устойчивости, 127
внутренней устойчивости, 126

Алескеров Ф. Т. и др.

А48 Бинарные отношения, графы и коллективные решения [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ф. Т. Алескеров, Э. Л. Хабина, Д. А. Шварц; Гос. ун-т — Высшая школа экономики. — М. : Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006. — 298, [2] с. — (Учебники Высшей школы экономики). — Литерат.: с. 291—295. — Предм. указ.: с. 296—298. — 1500 экз. — ISBN 5-7598-0345-X (в пер.).

В учебном пособии излагаются современные математические подходы к описанию дискретных математических объектов, к построению и изучению прикладных дискретных математических моделей, адекватных реалиям и потребностям социально-экономической и общественно-политической жизни современного общества.

Материал иллюстрируется примерами из современной российской и зарубежной практики. Учебное пособие снабжено большим количеством задач и упражнений с решениями и ответами, а также задачами для самостоятельного решения.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Экономика», а также по специальностям «Бизнес-информатика», «Политология», «Государственное и муниципальное управление».

УДК 519.1(075)
ББК 22.176

Учебное издание

Серия «Учебники Высшей школы экономики»

Алескеров Фуад Тагиевич
Хабина Элла Львовна
Шварц Дмитрий Александрович

Бинарные отношения, графы и коллективные решения

Редактор *О.А. Шестопалова*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Корректор *О.А. Шестопалова*
Компьютерная верстка и графика: *Д.А. Шварц*

ЛР №020832 от 15 октября 1993 г. продлена до 14 октября 2003 г.
Подписано в печать 12.12.2005. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,75.
Уч.-изд. л. 17,07. Тираж 1500 экз. Заказ № . Изд. № 535

ГУ ВШЭ, 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел./факс: (495) 772-95-71