

Лабораторная работа # 1

Диэральная группа

Цель лабораторной работы: познакомиться с библиотекой символьных вычислений SymPy и решить с ее помощью некоторые задачи из теории групп на примере группы диэдра.

Постановка задачи

1. Для группы диэдра D_n из вашего варианта создать объекты R_i и S_i типа `Symbol` библиотеки SymPy.
2. Реализовать функцию, которая выполняет композицию преобразований элементов из группы диэдра по правилу:

$$R_i R_j = R_{(i+j) \bmod n}$$

$$S_i R_j = S_{(i-j) \bmod n}$$

$$R_i S_j = S_{(i+j) \bmod n}$$

$$S_i S_j = R_{(i-j) \bmod n}$$

3. Построить таблицу Кэли для данной группы.
4. Для каждого элемента найти обратный к нему.
5. Найти порядок каждого элемента группы.
6. Найти все подгруппы и построить для них таблицы Кэли.

Рекомендации к выполнению

- Решение должно быть представлено на Python в Google Colab.
- При реализации алгоритмов можно использовать элементы функционального или объектно-ориентированного программирования, но не является обязательным при выполнении.
- Для хранения SymPy-символов можно использовать как объекты типа `Symbol`, так и `IndexedBase`-объекты. Последние могут оказаться удобными для извлечения индексов символа.
- Для хранения и отображения таблиц Кэли групп и подгрупп можно использовать матрицы (`sympy.Matrix`) или любые другие контейнеры данных.
- При поиске подгрупп можно учесть, что любая подгруппа содержит как минимум нейтральный элемент группы, что позволяет сократить пространство поиска. Также, согласно следствию из теоремы Лагранжа, порядок любой подгруппы делит порядок самой группы.

Варианты

1. D_5, D_{12}
2. D_7, D_{10}
3. D_4, D_{11}
4. D_5, D_8
5. D_7, D_{15}
6. D_6, D_{11}
7. D_5, D_{14}
8. D_7, D_{16}
9. D_9, D_{11}
10. D_5, D_{18}