Лабораторная работа # 3

Численные методы решения СЛАУ.

Цель лабораторной работы: реализовать методы LU-разложения и итерационные методы для решения СЛАУ численно, а также сравнить их эффективность.

Постановка задачи

1. Реализовать алгоритм LU-разложения матрицы, а также метод решения СЛАУ с использованием LU-разложения.

2. Реализовать итерационный метод решения СЛАУ (метод Зейделя, Якоби или верхней релаксации на выбор).

3. Провести исследование реализованных методов на системах с матрицами A, число обусловленности которых регулируется за счет изменения диагонального преобладания. Внедиагональные элементы матрицы A выбираются случайным образом из множества
$$a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3, -4\},$$
а диагональные элементы определяются из условия
$$a_{ii} = \begin{cases} -\sum_{i \neq j} a_{ij} & if \quad i > 1 \\ -\sum_{i \neq j} a_{ij} + 10^{-k} & if \quad i = 1, \end{cases}$$
где сумма вычисляется *только по строке.*

   Для исследования работы методов рекомендуется решать СЛАУ вида:
$$Ax = F$$
где для определения правой части F рассматривается вектор $x = (1, 2, \ldots, n)^T$, что позволяет в дальнейшем сравнивать точное и приближенное решение.

4. Оценить зависимость числа обусловленности и точности полученного решения в зависимости от параметра k.

5. Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта, которые строятся согласно формуле
$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \qquad i, j = 1, .., n$$
где n - размерность матрицы.

6. Сравнить между собой прямые и итерационные методы по эффективности методов в зависимости от размеров n матрицы:
$$n = 2^m, \qquad m = 1, .., 9$$