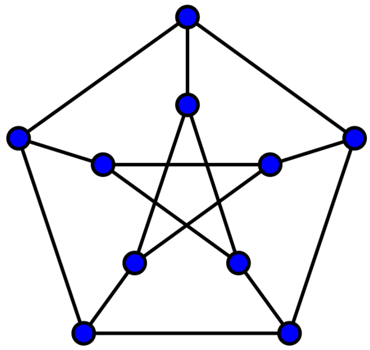
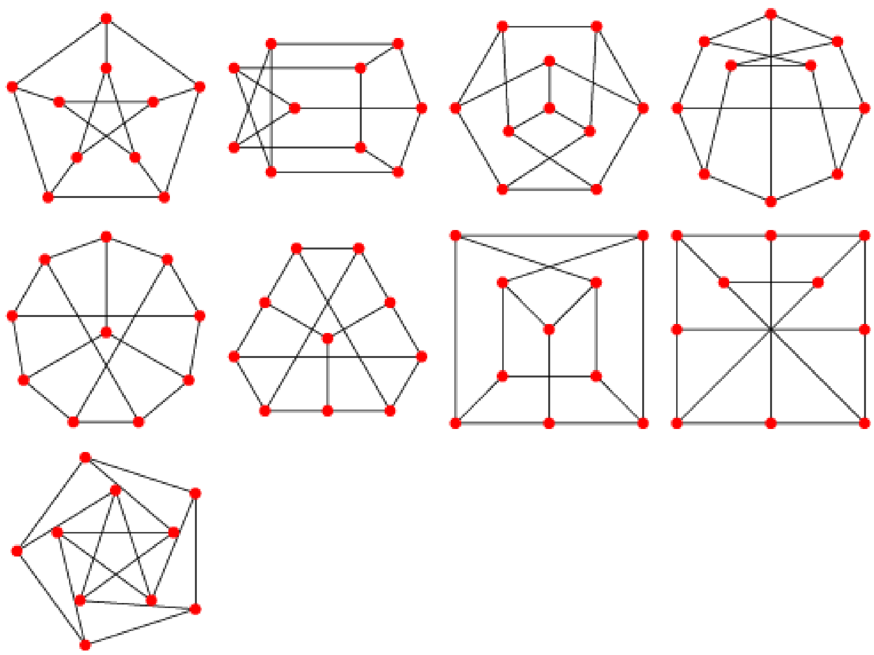
O Grafo de Petersen

Artur Magalhães R. Santos, 10297734
Introdução à Teoria dos Grafos - MAC0320



Grafo de Petersen[1]



Configurações do Grafo de Petersen [2]

[1]Petersen Graph, Wikimedia
[2]Petersen Graph, Wolfram MathWorld

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho, serão apresentando diversos fatos e características relacionadas ao Grafo de Petersen . Os estudos se baseiam nas notas de aula de MAC0320 (Introdução à Teoria dos Grafos), carinhosamente chamada de Grafinhos. O intuito é agregar em um trabalho pontos interessantes estudados ao longo do semestre da disciplina, também mostrando aspectos do Grafo de Petersen e como se relacionam.

O trabalho se inicia com propriedades básicas, se pautando nos primeiros capítulos estudados, trazendo terminologias necessárias e como se aplicam ao Grafo de Petersen . Depois, seguindo a sequência dos capítulos, tratamos de grafos eulerianos, circuitos e caminhos hamiltonianos, emparelhamentos, coloração (de arestas e vértices), conexidade e planaridade. Ou seja, abordando os temas de Introdução à Teoria dos Grafos como um todo.

2 Propriedades básicas

2.1 O Grafo de Petersen

O Grafo de Petersen, nomeado em homenagem a Julius Petersen, um matemático dinamarquês, é um grafo muito estudado em Teoria dos Grafos. Por suas diversas características, que servem de exemplo ou contraexemplo para diferentes problemas, ele se tornou famoso.

Um grafo G é um par ordenado (V, A), onde os elementos de V são os vértices e A são as arestas. O nosso estudo tratará de um grafo G específico, sendo G o Grafo de Petersen.

2.2 Características básicas

O Grafo de Petersen G é um grafo simples e conexo. Possui **ordem 10** (ou seja, 10 vértices) e **15 arestas**. Além disso, seu tamanho, definido pela soma do número de vértices com o número de arestas, é 25.

Denotamos o **grau de um vértice** por $g(v)$. No Grafo de Petersen , todo vértice v tem $g(v) = 3$. Portanto, o Grafo de Petersen é **3-regular** (todos os seus vértices têm o mesmo grau). Na figura 1, podemos observar o Grafo de Petersen e seu complementar $\bar{G}$, um grafo 6-regular.

Denotamos **o diâmetro** por $diam(G)$, a maior distância entre dois vértices u e v, e **a cintura** por $cint(G)$, o comprimento de um menor circuito de G. Para o Grafo de Petersen, temos $diam(G) = 2$ e $cint(G) = 5$. Veja a figura 2.

Outras propriedades e características do Grafo de Petersen serão vistas adiante.

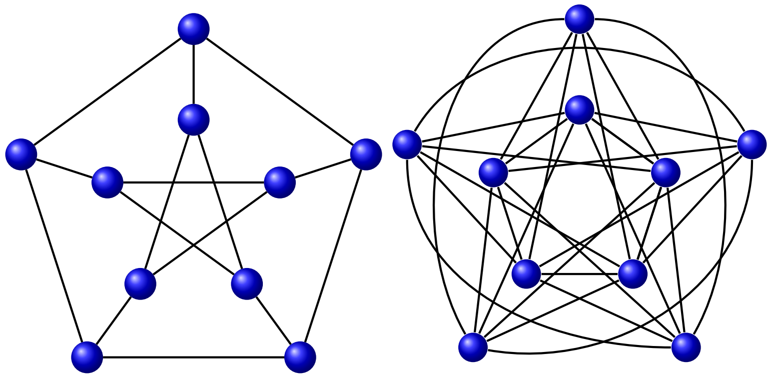


Figure 1: Grafo de Petersen e seu complementar

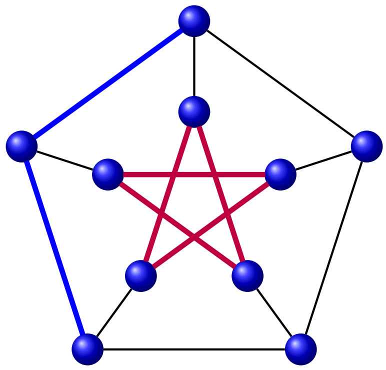


Figure 2: Representação da cintura e o diâmetro do Grafo de Petersen , em azul e roxo, respectivamente

Dois fatos básicos extremamente importantes sobre grafos em geral, seguem:

Proposição 2.1: Soma dos graus dos vértices de um grafo G

Para todo grafo G, temos que $\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2|A(G)|$.

Prova No somatório, cada aresta $a = \{u, v\}$ é contada duas vezes, quando consideramos $g(u)$ e quando consideramos $g(v)$. Se a aresta a é um laço, por definição contribui com 2 unidades. Logo, o somatório é $2|A(G)|$ □

Corolário 2.1: Vértices de grau ímpar

Todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.

Prova Seja G um grafo. Considere $V_1 = \{v \in V(G) : g(v) \text{ é ímpar}\}$ e $V_2 = \{v \in V(G) : g(v) \text{ é par}\}$. Pela Proposição 2.1, temos que $\sum_{v \in V_1} g(v) + \sum_{u \in V_2} g(u) = 2|A(G)|$. Sabendo que $\sum_{u \in V_2} g(u)$ é par, segue que $\sum_{v \in V_1} g(v)$ é par. Portanto, é necessário que $|V_1|$ seja par. □

3 Petersen e Euler

3.1 Conceitos básicos

Leonard Euler, o famoso matemático suiço, também foi um grande contribuidor para a Teoria dos Grafos, mesmo que indiretamente, já que em sua época o termo "grafo" ainda não era utilizado.

Chamamos de **trilha euleriana** uma trilha que passa por todos os vértices de um grafo. E um grafo é dito **euleriano** quando possui uma trilha euleriana fechada. Lembrando: **uma trilha** é um passeio sem arestas repetidas.

3.2 Caracterização

Uma caracterização importante de grafos eulerianos é dada pelo Teorema:

Teorema 3.1: Caracterização de grafos eulerianos

Um grafo é euleriano se e somente se cada um de seus vértices tem grau par.

Podemos, portanto, perceber que Petersen não é um grafo euleriano, já que seus vértices possuem grau ímpar. Entretanto, ele possui trilhas eulerianas. Veja a figura 3.

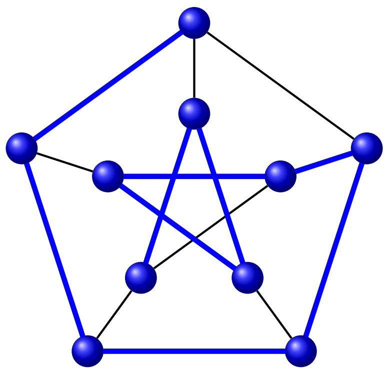


Figure 3: Representação de uma trilha euleriana no Grafo de Petersen

Vale notar que apesar do Grafo de Petersen não ser euleriano, ao adicionarmos um vértice e o ligarmos a todos os demais vértices, temos um grafo euleriano. Veja a figura 4.

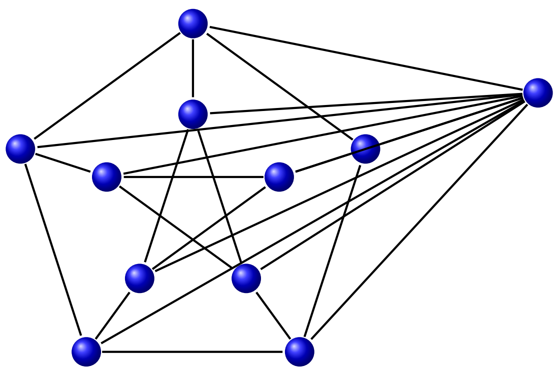


Figure 4: Grafo de Petersen modificado: adição de um novo vértice ligado a todos os demais.

Pelo fato de Petersen ser 3-regular, a adição do novo vértice, ligado a todos os demais, "gera" um novo grafo 4-regular, que pela caracterização 3.1, faz com que esse novo grafo seja euleriano.

4 Circuito e caminhos hamiltonianos

4.1 Conceitos básicos

Os grafos, circuitos e caminhos denominados hamiltonianos levam esse nome em homenagem ao matemático, físico e astrônomo irlândes William Rowan Hamilton.

Um **circuito hamiltoniano** é um circuito que contém **todos os vértices** de um grafo. Um grafo que contém um circuito hamiltoniano é chamado **grafo hamiltoniano**. Um outro conceito relacionado é o de **grafo hipo-hamiltoniano**. Sua definição:

Definição 4.1: Grafo hipo-hamiltoniano

Um grafo G é denominado hipo-hamiltoniano se G não é hamiltoniano, mas $G - v$ é hamiltoniano.

4.2 Caracterização

O problema de decidir se existe e encontrar um circuito hamiltoniano em um grafo G são ambos problemas difíceis. Decidir se um tal circuito existe é NP-completo. Mesmo assim, ainda conseguímos determinar, em certas situações, se um grafo contém ou não um circuito hamiltoniano.

Existem condições necessárias e suficientes para grafos hamiltonianos. Uma condição necessária seria:

Definição 4.2: Condição necessária

Se G é hamiltoniano, então para todo conjunto não-vazio $S \subset V(G)$,

$$c(G - S) \leq |S|$$

Vale ressaltar que a **condição é necessária, mas não suficiente**. Um contraexemplo é o Grafo de Petersen. Para qualquer conjunto $S \subset V(G)$ que tomarmos, teremos a condição $c(G - S) \leq |S|$ satisfeita. Entretanto, o Grafo de Petersen não é hamiltoniano. Curiosamente, o Grafo de Petersen é o menor hipo-hamiltoniano que existe. Veja a figura 5.

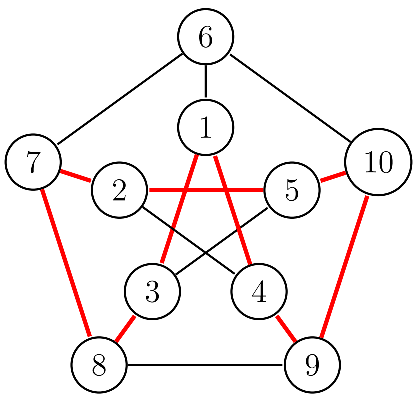


Figure 5: Removendo o vértice 6, por exemplo, temos o circuito hamiltoniano, em vermelho

Os teoremas relacionados a grafos hamiltonianos, em geral, tratam sobre o grau dos vértices de um grafo G, como nos teoremas de Dirac, Ore e Bondy & Chvátal enunciados a seguir:

Teorema 4.1: Dirac, 1952

Se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ e $g(v) \geq n/2$ para todo $v \in V(G)$, então G é hamiltoniano.

Teorema 4.2: Ore, 1960

Se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ tal que $g(u) + g(v) \geq n$ para todo par u, v de vértices não-adjacentes, então G é hamiltoniano.

Teorema 4.3: Bondy & Chvátal, 1976

Se G é um grafo simples de ordem n e sejam u, v vértices não-adjacentes em G tais que $g(u) + g(v) \geq n$. Então G é hamiltoniano se e só se $G + uv$ é hamiltoniano.

Um conceito que vale mencionar, especialmente no estudo de grafos hamiltonianos, é o de um **fecho** de um grafo. O **fecho**, denotado por $\mathcal{F}(G)$, é o grafo que se obtém de G acrescentando-se arestas ligando pares de vértices não-adjacentes cuja soma dos graus é pelo menos $|V(G)|$, até que não exista mais nenhum tal par.

Dessa definição de fecho, com o Teorema 4.3, seguem dois resultados:

Corolário 4.1

Um grafo hamiltoniano G é hamiltoniano se e só se o fecho $\mathcal{F}(G)$ é hamiltoniano.

Corolário 4.2

Se $\mathcal{F}(G)$ é completo, então G é hamiltoniano.

5 Emparelhamentos em Petersen

5.1 Emparelhamento

5.1.1 Conceitos básicos

Um emparelhamento nada mais é do que um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes. Mais formalmente, **um emparelhamento** E é definido como um conjunto de arestas tal que todo vértice do grafo é extremo de no máximo uma aresta de E.

Dentro do estudo de emparelhamentos, existem nomenclaturas necessárias para seu estudo:

- **Cobertura/cobre**: dizemos que um emparelhamento cobre $X \subseteq V(G)$ se em cada vértice $v \in X$ incide uma aresta de E. De maneira análoga, dizemos que X é coberto por E.
- **Emparelhamento perfeito**: dizemos que um emparelhamento E é perfeito se cobre $V(G)$
- **Vértice livre**: um vértice $v \in V(G)$ é dito livre em relação a um emparelhamento E se v não é coberto por E.

Além dessas terminologias, é importante ressaltar outros conceitos: a diferença entre emparelhamento máximo e maximal, caminho E-alternante e caminho aumentador.

Definição 5.1: Emparelhamento máximo e maximal

Um emparelhamento E em um grafo é dito **maximal** se não é possível aumentá-lo, ou seja, não existe um emparelhamento E' que contém E.
Um emparelhamento E em um grafo é dito **máximo** quando possui a maior cardinalidade dentre todos os outros emparelhamentos de G ($|E|$ é máximo).

Definição 5.2: Caminho E-alternante

Seja E um emparelhamento em um grafo G. Um caminho E-alternante em G é um caminho cujas arestas estão, alternadamente, em E e $A(G) \setminus E$.

Definição 5.3: Caminho aumentador

Seja E um emparelhamento em um grafo G. Um **caminho aumentador** em G é um caminho E-alternante com os extremos livres (em E).

5.1.2 Caracterizações e teoremas

Após essas definições, ficam questões relativas ao nosso grafo de interesse, o Grafo de Petersen . Ele possui um emparelhamento perfeito? A resposta é **sim**, e ela pode ser obtida de diferentes maneiras.

A primeira delas, e a mais simples, é observar o Grafo de Petersen, e perceber que podemos obter um emparelhamento perfeito.

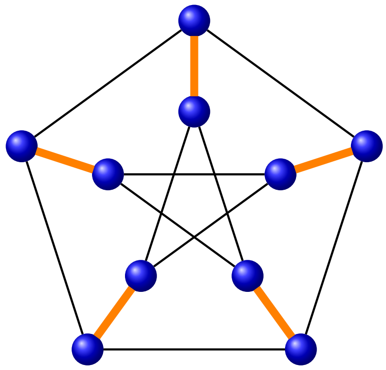


Figure 6: Grafo de Petersen e um emparelhamento perfeito

Outra possível forma, mais formal, é obter esse resultado através do Teorema de Petersen. Mas antes, é necessário enunciar o Teorema de Tutte, que nós dá uma condição necessária e suficiente para que um grafo G tenha um emparelhamento perfeito.

Teorema 5.1: Teorema de Tutte

Seja G um grafo conexo. G tem um emparelhamento perfeito se e só se $c_i(G - S) \leq |S|$, para todo $S \subseteq V(G)$, sendo $c_i(G - S)$ o número de componentes ímpares de $G - S$.

Agora, segue o enunciado do Teorema de Petersen:

Teorema 5.2: Teorema de Petersen

Seja G um grafo 3-regular, sem pontes. Então, G tem um emparelhamento perfeito.

Prova Iremos mostrar que G satisfaz o Teorema de Tutte (5.1), e portanto, tem um emparelhamento perfeito.
Seja $S \subseteq V(G)$ e sejam $C_1, ..., C_k$ os componentes ímpares de $G - S$. Para cada C_i, os possíveis graus dos vértices são 1, 2 e 3, já que G é 3-regular. Seja W um dos componentes ímpares. Seja $W_i = \{v \in W : g_W(v) = i\}, i = 1, 2, 3$. Seja $\delta(W)$ o conjunto de arestas com extremo em W e $\bar{W}$.
Como W é um componente ímpar, temos que $|W_1| + |W_2| + |W_3|$ é ímpar. Além disso, sabemos que todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar, logo, $|W_1| + |W_3|$ é par. Portanto, temos que $|W_2|$ é ímpar. Agora, iremos tratar dois casos: $W_1 = \emptyset$ e $W_1 \neq \emptyset$.

1. **Caso $W_1 = \emptyset$:** Então, $|W_2| \geq 3$, já que se $|W_2| = 1$, teríamos uma ponte entre W e $\bar{W}$, contrariando a hipótese. Dado que $|W_2|$ é ímpar, então $|W_2| \geq 3$ e $\delta(W) \geq 3$.

2. **Caso $W_1 \neq \emptyset$:** Então, como $|W_2| \geq 1$, $\delta(W) \geq 3$.

Da análise acima, podemos concluir que cada componente ímpar C_i contribui com pelo menos 3 arestas saindo de C_i, arestas estas que chegam em S, logo, $|\delta(S)| \geq 3k$, sendo k o número de componentes ímpares. Também, por $g_G(v) = 3 \; \forall v \in G$, temos que $|\delta(S)| \leq 3|S|$. Segue que:

$$k \leq |S|$$

Por fim, está satisfeita a condição de Tutte e G tem um emparelhamento perfeito. □

Portanto, podemos obter que o Grafo de Petersen possui um emparelhamento perfeito, pelo Teorema 5.2. Outro Teorema importante que trata de emparelhamentos é o **Teorema de Hall**, que aqui será apenas enunciado. Sua importância vem do fato de que fornece uma base para o estudo de emparelhamentos, em especial de grafos bipartidos, além, de certa forma, caracterizar um emparelhamento por meio de um conjunto de vértices e o conjunto de seus adjacentes.

Teorema 5.3: Teorema de Hall

Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Então G tem um emparelhamento que cobre X se e só se $|Adj(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.

5.2 Cobertura

Um conceito relacionado a emparelhamento, é a cobertura. A **cobertura** de um grafo G é um conjunto $K \subseteq V(G)$ tal que toda aresta de G tem pelo menos um dos extremos em K. Assim, K é uma cobertura das arestas de G por vértices.

Exemplificando com o Grafo de Petersen , veja a figura 7.

Pelo figura 7, podemos observar que para cobrirmos todas as arestas do Grafo de Petersen , foi necessário um conjunto de 6 vértices. Uma pergunta natural é justamente saber o tamanho

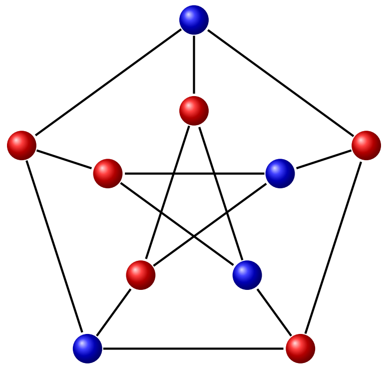


Figure 7: Grafo de Petersen e uma cobertura, de tamanho 6, em vermelho

do menor conjunto de vértices tal que seja possível cobrir um grafo G . Ou seja, saber sua **cobertura mínima**.

O problema de encontrar uma cobertura mínima em um grafo G qualquer é NP-Difícil, mas quando G é bipartido, podemos encontrá-la em tempo polinomial, devido a resultados que serão mencionados a seguir.

Um resultado imediato da relação entre um emparelhamento E em G e uma cobertura K em G é que:

Definição 5.4: Desigualdade entre emparelhamentos e coberturas

Seja E um emparelhamento e K uma cobertura em um grafo G. Temos que $|E| \leq |K|$.

Prova Pelo menos um dos extremos das arestas de E deve pertencer a K.

Mas afinal, qual a relação entre emparelhamentos e coberturas? Além da desigualdade mostrada acima, na Definição 5.4, existe uma relação mais forte entre esses dois conceitos, especialmente em grafos bipartidos. Dois termos relevantes dentro desse estudo são:

- $cob(G)$: a **cardinalidade de uma cobertura mínima** em um grafo G.
- $emp(G)$: a **cardinalidade de um emparelhamento máximo** em um grafo G.

Um Teorema importante que trata da relação entre emparelhamentos e coberturas, em grafos bipartidos, é o Teorema de Konig (1931):

Teorema 5.4: Konig, 1931

Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Então a cardinalidade de um emparelhamento máximo em G é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima em G.

O Teorema é bastante forte, e é interessante que por meio dele, conseguimos provar o 5.3. Além disso, foi o primeiro Teorema *min-max* que vimos em Introduçao à Teoria dos Grafos.

Em relação ao Grafo de Petersen , vimos que a cardinalidade de uma cobertura mínima é 6, ao passo que a cardinalidade de um emparelhamento máximo é 5, e portanto, temos que para o Grafo de Petersen $cob(G) > emp(G)$.

6 Coloração

Como veremos adiante, a coloração de grafos pode ser relativa tanto a arestas (6.1) quanto a vértices (6.2). Diferentes propriedades são obtidas dentre esses dois modos de coloração, e iremos analisar e verificar como o Grafo de Petersen se comporta com cada uma delas.

6.1 Coloração de arestas

6.1.1 Conceitos básicos

Uma coloração de arestas de um grafo é atribuir cores diferentes para arestas adjacentes:

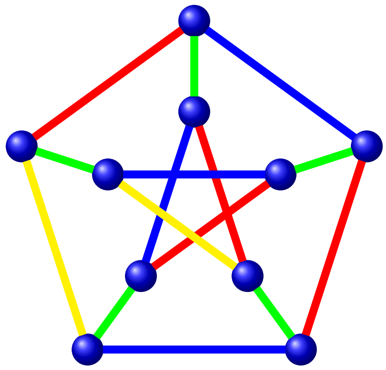


Figure 8: Grafo de Petersen e uma coloração de arestas

Podemos notar que **uma coloração de arestas de um grafo G é uma partição de $A(G)$ em emparelhamentos**. E se $E_1, ..., E_k$ são emparelhamentos que definem uma partição de $A(G)$, dizemos que **cada E_i é uma cor** e que k **é o número de cores**. Assim, dizemos que G é k**-aresta-colorível** ou tem uma k**-aresta-coloração**.

O que é interessante dentro de coloração de arestas (também em coloração de vértices) é saber o menor número possível de cores para uma coloração válida, uma coloração de arestas mínima. Para um grafo qualquer, o problema é NP-difícil (para grafos bipartidos é possível de encontrá-las em tempo polinomial).

Na terminologia de coloração, o **índice cromático** de um grafo G, denotado $\chi'(G)$, é o menor k tal que G é k-aresta-colorível. Assim, se $\chi'(G) = k$, dizemos que G é k-aresta-cromático.

6.1.2 Delimitação inferior

Um delimitação imediata para o índice cromático é:

Teorema 6.1: Delimitação inferior para coloração de arestas

Em todo grafo G, temos que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, sendo $\Delta(G)$ o maior grau de um vértice em G.

Para o Grafo de Petersen , o que podemos dizer sobre seu $\chi'(G)$? Será que $\chi'(G) = 3$, já que é 3-regular? A resposta é não, na verdade, $\chi'(G) = 4$, como veremos adiante. Veja também a figura 8.

Em um primeiro momento, podemos tentar colorir o Grafo de Petersen , e chegar a essa conclusão. Mas para além dessa forma, existem diferentes argumentos que evidenciam esse fato. Antes de enunciá-los, é necessário introduzir o conceito de **k-fator**:

Definição 6.1: k-fator

Seja k um inteiro positivo. Um subgrafo gerador k-regular de um grafo G é denominado um k-fator de G.

Agora, podemos enunciá-los:

Teorema 6.2: $\chi'(G)$ no Grafo de Petersen

O Grafo de Petersen têm $\chi'(G) = 4$.

Prova 1 O Grafo de Petersen pode ser definido da seguinte maneira: um circuito interno, um circuito externo e seus raios. Veja a figura 9. Suponha que para o Grafo de Petersen , $\chi'(G) = 3$. Como G é 3-regular, as 3 cores tocam todos os vértices.

Tome uma aresta a do circuito externo, e sejam seus extremos os vértices u e v. Suponha que a esteja colorida com a cor C_1. Os vértices u e v são adjacentes aos vértices x e y no circuito interno, respectivamente. Portanto, as arestas ux e vy não podem ser coloridas com C_1, e então, alguma das duas arestas de x deve estar colorida com C_1 (o mesmo para y).

Já que x não é adjacente a y, a cor C_1 aparece pelo menos 2 arestas do circuito interno. Como o circuito interno - de comprimento 5 - não é 2-aresta-colorível, as 3 cores devem aparecer nele. Entretanto, como cada uma das 3 cores deve aparecer 2 vezes no circuito interno, temos uma contradição.[a] □

Prova 2 Temos que $|A(G)| = 15$. Caso $\chi'(G) = 3$, então G têm 3 emparelhamentos perfeitos disjuntos. Se E é um emparelhamento perfeito de G, ele possui duas arestas do circuito externo, e portanto, duas do circuito interno e uma do raio. Veja a figura 9.

Nesse caso, $G - E$ é um 2-fator (dois circuitos de comprimento 5), que portanto, não contém 2 emparelhamentos perfeitos. Por fim, está concluída a prova.[b] □

[a] Prova em *The Petersen graph is not 3-edge-colorable - a new proof*, Naserasr e Skrekovski, 2003

[b] Prova em *The Petersen graph is not 1-factorable: postscript to 'The Petersen graph is not 3-edge-colorable—a new proof'*, Volkmann, 2004

Vimos que é possível obter esse resultado de diferentes maneiras, mais uma vez evidenciando a beleza do Grafo de Petersen , e como pode ser utilizado como contraexemplo ou base de diversas provas.

Agora, iremos prosseguir com uma afirmação interessante sobre o Grafo de Petersen , em que: $\chi'(G) = 4$ se e só se G não é hamiltoniano. A ida da prova poderia ser estendida para: se G é um grafo 3-regular, $\chi'(G) = 4$, então G não é hamiltoniano.

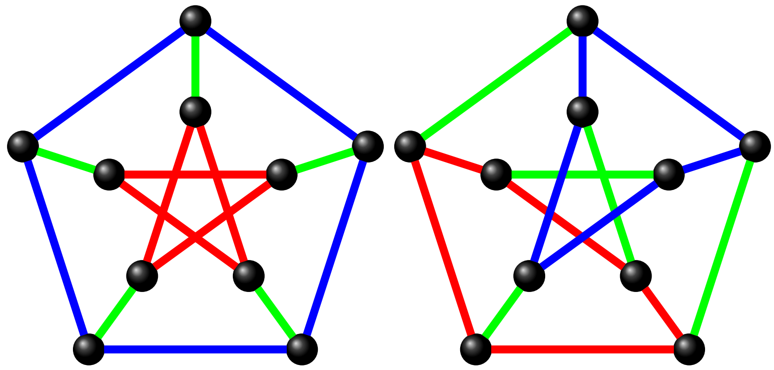


Figure 9: Grafo de Petersen: **a esquerda**: circuito externo, circuito interno, raios. **a direita**: emparelhamento E (verde) e $G - E$ (vermelho e azul)

Teorema 6.3

Seja G um grafo 3-regular. Se $\chi'(G) = 4$, então G não é hamiltoniano.

Prova Suponha que G possua um circuito hamiltoniano C. Sabemos que G é 3-regular, e como o número de vértices ímpares de um grafo é sempre par, $|V(G)|$ é par. Portanto, o circuito hamiltoniano C tem comprimento par e podemos bicolorir C, com digamos, as cores E_1 e E_2.

Nesse caso, $G - A(C)$ é um emparelhamento perfeito, digamos E_3. Mas então $\chi'(G) = 3$, uma contradição. $\square$

Podemos fazer ainda outra afirmação, talvez até mais interessante, e também aplicável ao Grafo de Petersen , de forma quase idêntica ao Teorema 6.3:

Teorema 6.4

Seja G um grafo 3-regular. Se G é hamiltoniano, então $\chi'(G) = 3$.

Prova G é hamiltoniano, portanto, possui um circuito hamiltoniano C. Sabemos que G é 3-regular, e como o número de vértices ímpares de um grafo é sempre par, $|V(G)|$ é par. Portanto, o circuito hamiltoniano C tem comprimento par e podemos bicolorir C, com digamos, as cores E_1 e E_2.

Nesse caso, $G - A(C)$ é um emparelhamento perfeito, digamos E_3, e podemos colorí-lo com uma cor, portanto, $\chi'(G) = 3$. $\square$

A título de conhecimento, vale comentar que dentro do contexto de coloração de arestas, os teoremas que ganham maior destaque geralmente envolvem limites (*bounds*) sobre $\chi'(G)$. Dentre eles, temos o Teorema 6.5 e o Teorema 6.6.

Teorema 6.5: Vizing, 1964

Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Teorema 6.6: Konig, 1916

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

6.2 Coloração de vértices

Partimos então para coloração de vértices. De forma semelhante a coloração de arestas, iremos definir conceitos e termos necessários para esse tema. Além disso, observar como o Grafo de Petersen se relaciona com eles. Veja a figura 10.

Primeiro, é fundamental explicar o que de fato é coloração de vértices. Uma **coloração de vértices** de um grafo é uma **atribuição de cores a todos os seus vértices de modo que vértices adjacentes não recebam a mesma cor**. Mais formalmente, uma coloração de vértices de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em conjuntos independentes (ou estáveis).

Se $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$ é uma partição de $V(G)$ em conjuntos independentes, então dizemos que cada X_i **é uma cor** e k **é o número de cores**. Também, dizemos G tem uma k**-coloração** e similarmente, que G é k**-colorível**.

Uma pergunta natural que surge é: dado um grafo G, qual o número mínimo de cores para conseguirmos colorir G? Ou seja, obter uma coloração mínima de um grafo. É interessante notar que apesar do problema surgir de uma pergunta simples (aparentemente fácil de se encontrar), obter uma coloração mínima de um grafo G é um problema NP-difícil. Assim como em coloração de arestas (6.1), para um grafo G arbitrário, procuramos encontrar delimitadores, superiores e inferiores, para sua coloração mínima.

O **número cromático** de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor k tal que G é k-colorível. Se $\chi(G) = k$, então dizemos que G é k-cromático.

6.2.1 Delimitações superiores

Uma intuição razoável seria pensar se existe uma relação entre o grau máximo de um vértice de G e $\chi(G)$. Pela delimitações, iremos mostrar que de fato isso ocorre. Além disso, iremos verificar suas aplicações relacionadas ao Grafo de Petersen . Um primeiro teorema, que apesar de simples, é bastante forte, pois já oferece uma boa delimitação para a coloração mínima.

Teorema 6.7

Para todo grafo simples G, temos que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

É interessante notar que o Teorema 6.7 já é o melhor delimitante superior. Duas famílias especiais de grafos que tem $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ são a dos circuitos ímpares C_n e dos grafos completos K_n. Excluindo essas duas famílias, conseguimos um delimitador ainda melhor, pelo Teorema de Brooks.

Teorema 6.8: Brooks, 1941

Se G é um grafo conexo que não é um circuito ímpar e nem um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Vale notar que uma possível prova para o Teorema 6.8 utiliza do conceito de árvore de busca em profundidade. Ou seja, ele se baseia na construção de uma árvore de busca em profundidade para realizar a prova, algo curioso e que demonstra a beleza do teorema.

Agora, iremos verificar a aplicação deste conceito no Grafo de Petersen . Para o Grafo de Petersen , temos que seu $\chi(G) = 3$, ou seja, no seu caso, $\chi(G) = \Delta(G)$. Veja a figura 10. Percebemos que o Grafo de Petersen é formado por dois circuito ímpares, o externo e o interno, e os raios (como vimos anteriormente), e portanto, o mínimo de cores para colorir o circuito externo são 3 cores. Feita a coloração do circuito externo, basta colorir o circuito interno com essas mesmas 3 cores, de forma que respeitem a coloração - vértices adjacentes recebem cores diferentes.

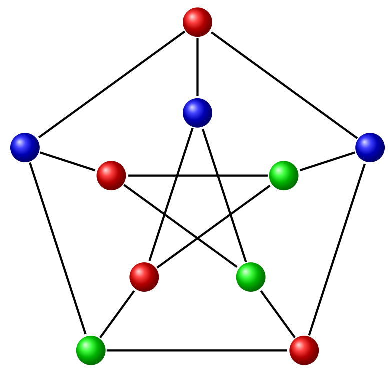


Figure 10: Grafo de Petersen e uma coloração mínima

7 Petersen e Conexidade

Neste capítulo trataremos sobre conexidade, relacionando esse conceito ao Grafo de Petersen . Assim como anteriormente, primeiramente iremos definir o que é conexidade, os parâmetros de interesse e teoremas importantes em seu estudo.

7.1 Conceitos básicos

Conexidade pode ser vista, informalmente, com o número de vértices (ou arestas) que é preciso remover para que um grafo G seja desconexo. O conceito é aplicado tanto a arestas quanto a vértices de um grafo.

Formalmente, seja G um grafo conexo **sem laços**, e $S \subset V$ ou $S \subset A$. Se $G - S$ é desconexo, dizemos que S separa G. Similarmente, se em $G - S$ dois vértices distintos x e y pertencem a componentes distintos, dizemos que S separa x de y.

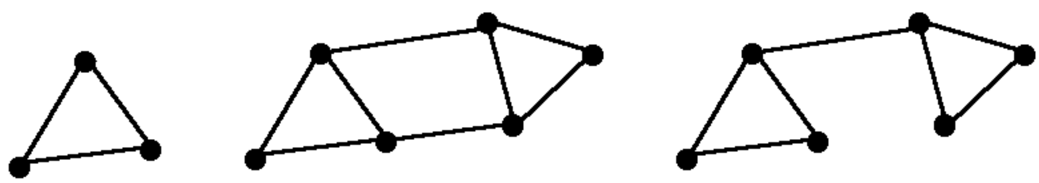


Figure 11: Exemplos de conexidade. Por exemplo, ao removermos duas arestas do grafo a esquerda, ele se torna desconexo. O grafo do meio também, já que removendo as duas arestas centrais (na figura) ele se torna desconexo. Já na imagem a direita, remover uma aresta ou um vértice, torna o grafo desconexo.

Tendo observado os exemplos e entendendo a intuição sobre conexidade, podemos agora definir a conexidade em relação a vértices e arestas, assim como os parâmetros para ambas.

Conexidade para vértices Para $k \geq 2$, dizemos que G é **k-conexo** se G é isomorfo a K_{k+1} ou G tem pelo menos $k+2$ vértices e não existe $S \subset V$, $|S| = k-1$, tal que S separa G. Ressaltando que um grafo G é **1-conexo** se e só se é conexo e não trivial.

Conexidade para arestas Para $k \geq 2$, dizemos que G é **k-aresta-conexo** se G tem pelo menos 2 vértices e não existe $F \subset A$, $|F| \leq k-1$ tal que F separa G. Grafos que possuem aresta de corte são **1-aresta-conexo**.

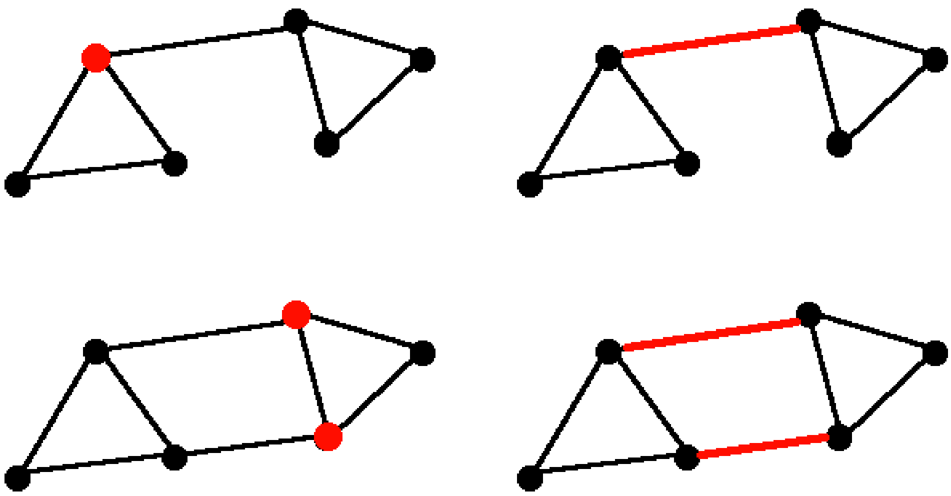


Figure 12: Exemplos de grafos **k-conexos** e **k-aresta-conexos**. Nos primeiros dois grafos, removendo o vértice ou aresta em vermelho, ele se torna desconexo, portanto, o grafo é **1-conexo** e também **1-aresta-conexo** (possui uma ponte). Os outros dois são **2-conexo** e **2-aresta-conexo**, pois removendo os dois vértices ou duas arestas em vermelho, ele se torna desconexo.

7.2 Caracterização

Assim como nos demais conceitos vistos, em conexidade temos dois principais parâmetros de interesse:

- $\kappa(G)$: o maior valor de k para o qual G é k-conexo, a **conexidade** de G.
- $\kappa'(G)$: o maior valor de k para o qual G é k-aresta-conexo, a **aresta-conexidade** de G.

É importante notar que apesar de terem ideias semelhantes, os dois parâmetros podem ser bem diferentes. Na imagem 13, podemos observar esse fato.

Uma desigualdade importante na análise de $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$ é:

Proposição 7.1: Desigualdade entre $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$

Se G é um grafo não trivial, então $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$

Nela, vemos que de fato a aresta-conexidade é sempre maior ou igual a conexidade de um grafo, o que é intrigante.

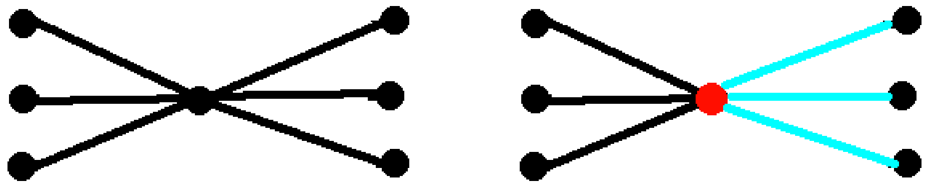


Figure 13: No grafo acima, basta remover 1 vértice para que seja desconexo ($\kappa(G) = 1$), mas é preciso remover 3 arestas para que seja desconexo ($\kappa'(G) = 3$).

Agora, iremos enunciar um teorema central no estudo de conexidade e um de seus corolários, e em seguida, mostrar como os conceitos apresentados se aplicam no Grafo de Petersen . O **Teorema de Menger** (1927), um resultado *min-max*, relaciona o número mínimo de vértices entre dois vértices de um grafo ao número máximo de caminhos independentes entre esses dois vértices.

Para facilitarmos, podemos dizer que um caminho P de x a y é um xy-**caminho**. E se P e Q são xy-caminhos, dizemos que P e Q são caminhos independentes se os únicos vértices em comum entre P e Q são x e y.

Segue, portanto, o Teorema de Menger:

Teorema 7.1: Menger, 1927

Seja G um grafo conexo, e s, t vértices distintos de G.

(a) Se s e t não são adjacentes, então o número **mínimo** de vértices que separam s e t é igual ao número **máximo** de caminhos st-caminhos independentes.

(b) O número **mínimo** de arestas que separam s e t é igual ao número **máximo** de caminhos st-caminhos arestas-disjuntos.

Devido ao Teorema 7.1, obtemos um resultado importante dentro de conexidade, que vincula os st-caminhos independentes a conexidade (ou aresta-conexidade) de um grafo, dando uma caracterização para grafos k-conexos (k-aresta-conexos).

Teorema 7.2: Caracterização de grafos k-conexos e k-aresta-conexos

(a) Para $k \geq 2$, um grafo G é k-**conexo** se e só se G tem pelo menos 3 vértices e para quaisquer dois vértices s e t de G, existem k st-**caminhos independentes**.

(b) Para $k \geq 2$, um grafo G é k-**aresta-conexo** se e só se G tem pelo menos 3 vértices e para quaisquer dois vértices s e t de G, existem k st-**caminhos arestas-disjuntos**.

Dentro de conexidade, **o Grafo de Petersen é um grafo 3-conexo e 3-aresta-conexo**. Para verificar, veja a figura 14.

Na figura 14, temos $S \subset V(G)$ (em verde) que separa G e $|S| = 3$, portanto, seguindo nossa definição, o Grafo de Petersen é 3-conexo, já que é necessário remover ao menos 3 vértices para que o Grafo de Petersen fique desconexo.

De forma similar, temos que $\delta(G) = 3$, pois o Grafo de Petersen é 3-regular, então, pela Desigualdade 7.1 temos que é também 3-aresta-conexo, ou seja, é necessário remover ao menos

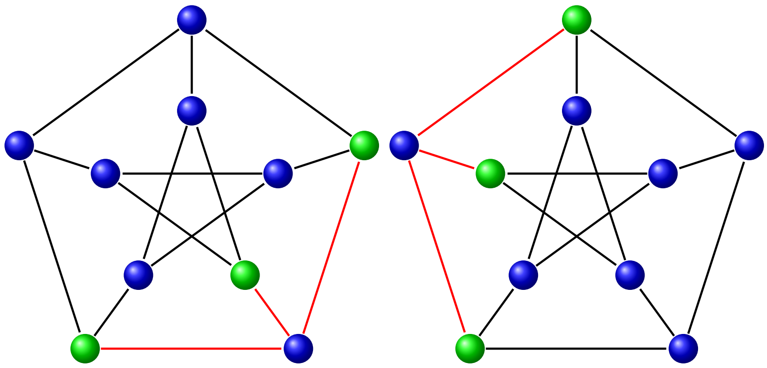


Figure 14: Grafo de Petersen e conexidade

3 arestas para que G fique desconexo. Na figura 14, temos $F \subset A(G)$ (em vermelho), para exemplificar o fato.

8 Petersen e grafos planares

Neste último capítulo, iremos tratar sobre planaridade. Dentro de Teoria dos Grafos, essa área de estudo é bastante ampla, com resultados marcantes e notáveis, dado suas construções. Como nos capítulos anteriores, serão apresentados conceitos e termos necessários.

8.1 Conceitos básicos

Um grafo é **planar** se pode ser desenhado no plano, de modo que nenhuma de suas arestas se cruze ou tenha uma intersecção além das dos vértices em que incidem. Um desenho de um grafo G no plano é denominado **imersão plana**, **representação plana** ou **mapa** de G. Quando G é um grafo planar, dizemos que é **imersível no plano**. Também, dizemos que um **grafo plano** é um grafo planar que está imerso no plano.

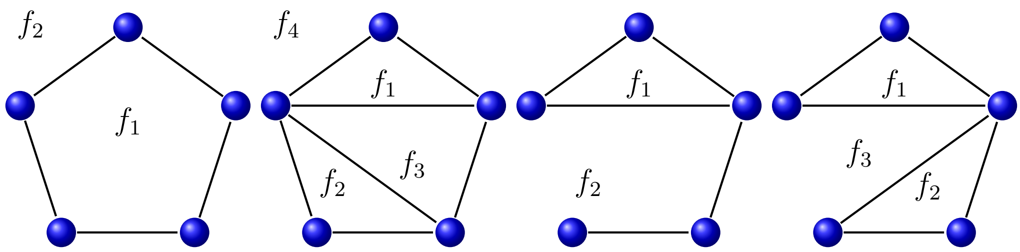


Figure 15: Grafos planos e suas faces f

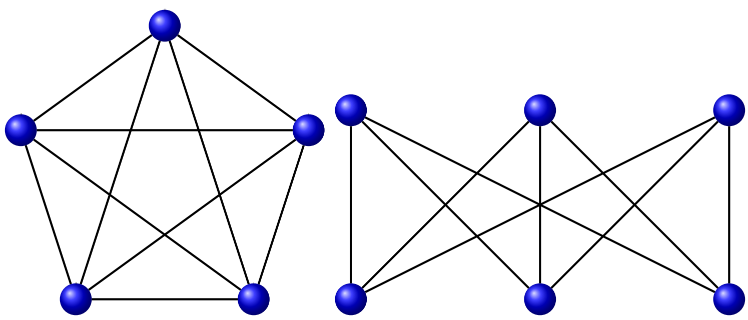


Figure 16: Grafos não planares

Outro conceito dentro do estudo de planaridade é de **faces** de um grafo. Uma **face** pode ser entendida como o contorno delimitado por arestas. Um outra analogia seria a seguinte: imagine um desenho de um grafo sobre a areia. As arestas e vértices seriam sulcos, e as faces as regiões (conexas) que não possuem sulcos. E além das faces internas, existe a **face externa**. Veja a imagem 15. O **conjunto das faces de um grafo** G é denotado por $F(G)$

Ainda sobre faces, a **fronteira** de uma face é o **passeio fechado** formado pelas arestas e vértices no fecho da face. Um circuito de um grafo plano é denominado **circuito facial** se é fronteira de alguma face.

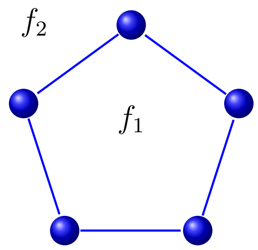


Figure 17: Grafo plano e a fronteira da face f_1 (também a de f_2), em azul.

O **grau de uma face** f, denotado por $gr(f)$, é o número de arestas incidentes a f (similarmente, o número de arestas na fronteira de f), e arestas de corte são contadas 2 vezes.

Vale notar que se uma aresta α é aresta de corte, então incide em apenas uma face f. Caso contrário, então incide em exatamente duas faces, e dizemos que α separa essas faces.

Duas imersões são ditas **equivalentes** se a fronteira de uma face em uma imersão sempre corresponde à fronteira de uma face em outra imersão. Também, um grafo tem uma **única imersão plana** quando todas as imersões são equivalentes. Note que ser equivalente não significa que o desenho da imersão é o mesmo. Veja a figura 18.

Um conceito também utilizado em grafos planares são as **curvas de Jordan**. Um **curva de Jordan** é uma curva contínua que não se auto-intersecta e cujo início coincide com o fim. Uma curva de Jordan J divide o plano em duas regiões: **interior de** J, denotado $int(J)$, e **exterior de** J, denotado $ext(J)$. Um resultado imediato da própria definição:

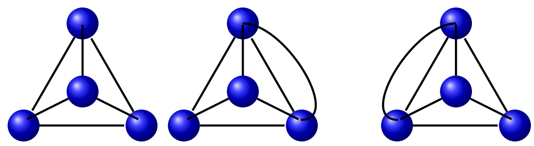


Figure 18: Imersões planas equivalentes do K_4

Definição 8.1: Jordan

Se J é uma curva de Jordan, então dado um ponto u do interior de J e um ponto v do exterior de J, qualquer curva ligando u a v intersecta J em algum ponto.

Outro conceito fundamental é o de grafo dual. Esse conceito só faz sentido quando temos um grafo plano G. O **grafo dual** de um grafo plano G, denotado por G^* é o grafo definido da seguinte maneira:

(a) cada face f de G é um vértice de G^*

(b) para cada aresta a de G fazemos com que uma aresta a^* em G^* tal que a^* liga dois vértices f^* e h^* se e só se a face f e face h em G são separadas por a.

Dessa maneira, temos que: $|V(G^*)| = |F(G)|$ e $|A(G)| = |A(G^*)|$. Também, é importante ressaltar que na construção do dual, se uma aresta a é uma aresta de corte em G, será um laço em G^* e se a é um laço em G, será uma aresta de corte em G^*. Logo, temos que $g(f^*) = gr(f)$ para toda face $f \in F(G)$.

Ainda relacionado ao grafo dual, temos dois fatos que valem ser pontuados: se G é um grafo plano, então G^* é planar; se G é um grafo plano, então G é isomorfo a $(G^*)^*$, o dual do dual, se e só se G é conexo.

Levando em conta o que foi dito sobre faces, temos um primeiro teorema, que relaciona a soma do grau das faces ao número de arestas em um grafo G.

Teorema 8.1

Se G é um grafo plano, então $\sum_{f\in F(G)} gr(f) = 2|A(G)|$

Prova

$$\sum_{f\in F(G)} gr(f) = \sum_{f^*\in F(G^*)} g(f^*) =_{2.1} 2|A(G^*)| = 2|A(G)|$$

8.2 Fórmula de Euler e seus resultados

Uma fórmula muito conhecida no contexto de grafos planares é a Fórmula de Euler (o nome Euler realmente aparece em muitos lugares!).

Teorema 8.2: Euler, 1750

Se G é um grafo plano conexo, então $|V(G)| - |A(G)| + |F(G)| = 2$

Em um primeiro momento, a fórmula pode parecer não dizer muito, mas na verdade, uma série de corolários relevantes seguem dela:

Corolário 8.1

Todas as representações planas de um grafo planar conexo tem o mesmo número de faces.

Prova Pela Fórmula de Euler, o número de faces de uma representação plana de um grafo G depende somente de $|V(G)|$ e $|A(G)|$.

Evidenciando a relação entre o número de arestas e vértices, temos mais 2 corolários:

Corolário 8.2

Se G é um grafo planar simples com ordem $n \geq 3$ e m arestas, então $m \leq 3n - 6$.

Corolário 8.3

Se G é um grafo bipartido planar simples com ordem $n \geq 3$ e m arestas, então $m \leq 2n-4$.

Também, um resultado interessante, a ser usado posteriormente, em relação a planaridade no Grafo de Petersen , segue:

Corolário 8.4

Se G é um grafo simples conexo planar, com cintura $k \geq 3$, então $|A(G)| \leq k(|V(G)| - 2)/(k-2)$.

Mostrados esses diversos resultados, já podemos provar que K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

Teorema 8.3: Planaridade em K_5

O grafo K_5 não é planar.

Prova 1 Suponha que K_5 seja planar. Seja $V(K_5) = \{v_1, ..., v_5\}$. O circuito $C = (v_1, ..., v_4)$ define uma curva de Jordan e como tal, divide o plano em duas regiões: interna e externa.
Então, temos que $v_5 \in int(C)$ ou $v_5 \in ext(C)$. Suponha que $v_5 \in int(C)$ (outro caso é análogo). Neste caso, as arestas v_1v_5, v_2v_5, v_3v_5 e v_4v_5 devem ser desenhadas em $int(C)$, e a aresta v_1v_3 deve ser desenhada em $ext(C)$. Agora, considere o circuito $C_1 = (v_1, v_5, v_3)$ como uma curva de Jordan. Nesse caso, se v_4 (v_2) está em $int(C_1)$, então v_2 (v_4) está no $ext(C_1)$, e a aresta v_2v_4 viola a planaridade. Logo, K_5 não é planar. $\square$

Prova 2 O grafo K_5 tem $n = |V(K_5)| = 5$ e $m = |A(K_5)| = 10$. Logo, pelo Corolário 8.2, $10 \nleq 9$, e K_5 não é planar. $\square$

Teorema 8.4: Planaridade em $K_{3,3}$

O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Prova 1 Suponha que $K_{3,3}$ seja planar. Seja $V(K_{3,3}) = \{v_1, ..., v_6\}$, vértices 1 a 3 pertencendo a uma partição, 4 a 6 a outra. O circuito $C = (v_1, v_4, v_2, v_5)$ define uma curva de Jordan e como tal, divide o plano em duas regiões: interna e externa.
Então, temos que $v_3 \in int(C)$ ou $v_3 \in ext(C)$ (caso com v_6 é análogo). Suponha que $v_3 \in int(C)$ (outro caso é análogo). Neste caso, as arestas v_3v_4 e v_3v_5 devem ser desenhadas em $int(C)$. E se v_6 está no $ext(C)$, a planaridade será violada.
Considere o circuito $C_1 = (v_1, v_4, v_3, v_5)$ como uma curva de Jordan. Nesse caso, se v_6 está em $int(C_1)$, então v_2 está no $ext(C_1)$, e a aresta v_2v_6 viola a planaridade.
Considere o circuito $C_2 = (v_2, v_4, v_3, v_5)$ como uma curva de Jordan. Nesse caso, se v_6 está em $int(C_2)$, então v_1 está no $ext(C_2)$, e a aresta v_1v_6 viola a planaridade.
Logo, $K_{3,3}$ não é planar. $\square$

Prova 2 O grafo $K_{3,3}$ tem $n = |V(K_{3,3})| = 6$ e $m = |A(K_{3,3})| = 9$. Logo, pelo Corolário 8.3, $9 \nleq 8$, e $K_{3,3}$ não é planar. $\square$

8.3 Caracterizações de grafos planares

Nessa subseção, veremos uma caracterização de grafos planares. Para tal, é necessário introduzir o conceito de duas operações: **subdivisão de um grafo**, **subdivisão de uma aresta** e **contração de uma aresta**. Após as definições, iremos mostrar um resultado muito conhecido em planaridade, o Teorema de Kuratowski, que caracteriza grafos planares. Por fim, iremos mostrar esse resultado aplicado ao Grafo de Petersen , e veremos se ele é (ou não) planar.

Subdivisão A operação de **subdivisão de uma aresta** $\alpha = \{u, v\}$ de um grafo G consiste em remover α e substituí-la por um caminho $P = (u, x, v)$, onde x é um novo vértice. Dado um grafo G, ao realizarmos operações de subdivisão, obtemos um novo grafo que é uma **subdivisão de** G.

Um fato importante que deriva do conceito de subdivisão é que **Se** G **é não planar, então toda subdivisão de** G **é não planar**. Pelo o que já vimos, então qualquer subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ é não planar. E portanto, se G é um grafo planar, ele não contém uma subdivisão do K_5 e nem do $K_{3,3}$. Essa é uma condição **necessária** para um grafo planar, e Kuratowski mostrou que é suficiente, no Teorema a ser exibido.

Contração A operação de **contração de uma aresta** $\alpha = \{u, v\}, u \neq v$, de um grafo G consiste em remover α de G, e identificar os vértices u e v em um único vértice z, e fazer com que as arestas incidentes em u e v sejam incidentes a z. Dentro do nosso contexto, arestas múltiplas são removidas.

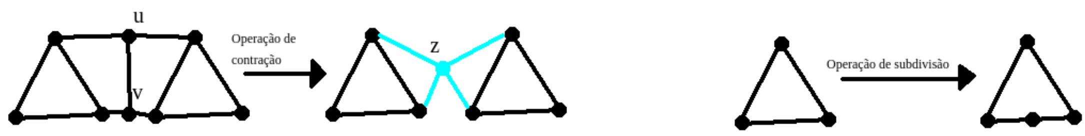


Figure 19: Exemplos das operações de contração, à esquerda, e subdivisão, à direita.

8.3.1 Kuratowski

Definidas as operações necessárias, iremos enunciar o Teorema de Kuratowski. Esse Teorema é extremamente valioso, pois oferece uma caracterização de grafos planares, baseado em apenas dois grafos não planares: K_5 e $K_{3,3}$. Por ser simples, é um resultado belo, e até mesmo inusitado. Além disso, esse critério implica outros critérios de planaridade existentes, como o de MacLane (1937) e de Whitney (1932), entre outros.

Outro ponto importante, é que oferece uma caracterização útil para grafos não planares, funcionando como um **certificado de não planaridade**.

Segue seu enunciado:

Teorema 8.5: Kuratowski, 1930

Um grafo G é planar se e só se G não contém subdivisões nem do K_5 e nem do $K_{3,3}$.

Agora, temos todos os recursos necessários para verificar se o Grafo de Petersen é planar.

Teorema 8.6: Planaridade no Grafo de Petersen

O Grafo de Petersen não é planar.

Prova 1 Pelo Corolário 8.4, temos que se $|A(G)| \not\leq k(|V(G)|-2)/(k-2)$, então G não é planar. Sendo G o Grafo de Petersen , temos $n = |V(G)| = 10$ e $m = |A(G)| = 15$, e sua cintura $cint(G) = 5$. Então:

$$15 \not\leq \lceil 5 \cdot (8/3) \rceil = 14$$

E portanto, o Grafo de Petersen não é planar. □

Prova 2 Considere a seguinte numeração do Grafo de Petersen , na figura 20. Observe que ao contrairmos as arestas pontilhadas, encontramos uma subdivisão do K_5, e pelo Teorema 8.5, o Grafo de Petersen não é planar.
Também, considere a figura 21. Desconsiderando as arestas pontilhadas, encontramos uma subdivisão do $K_{3,3}$, e pelo Teorema th:kura, o Grafo de Petersen não é planar. □

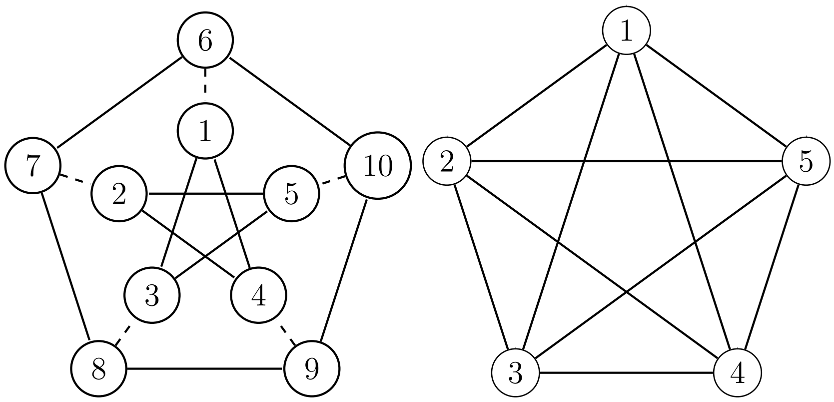


Figure 20: Contraindo as arestas pontilhadas no Grafo de Petersen , temos uma subdivisão do K_5.

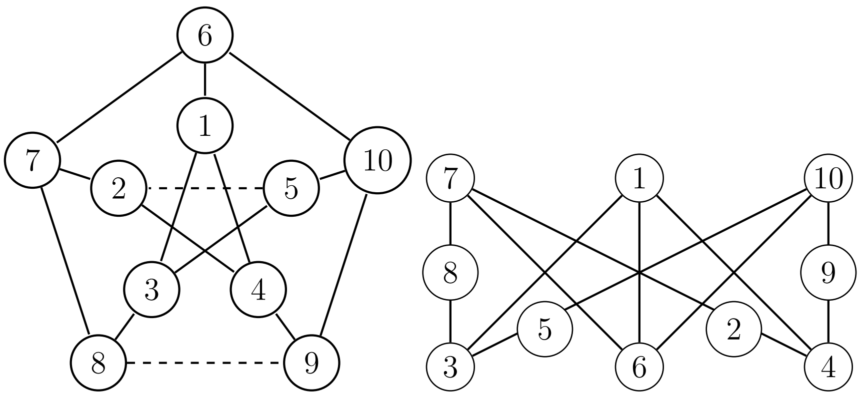


Figure 21: Grafo de Petersen é uma subdivisão do $K_{3,3}$, quando desconsideramos as arestas $2, 5$ e $8, 9$.

9 Conclusão

Ao longo deste trabalho, revisamos os conceitos vistos em Introdução à Teoria dos Grafos, partindo desde definições básicas a grafos planares. A ideia desse texto era justamente revisar esses conceitos, usando o Grafo de Petersen como uma "aplicação", mostrando como cada um dos conceitos se aplica a ele.

Os desenhos foram majoritariamente feitos em LaTeX, utilizando a biblioteca *tikz*, usando *tikzpicture* e *tkz-berge*. Parte delas foi feita no *Paint Online*. Procurei ilustrar a maior parte do que foi exposto, já que acredito que o aspecto visual é bem importante para o aprendizado.

Outra ferramenta muito útil foi o *tcolorbox*, que permite definir caixas, e as usei nos teoremas, corolários etc.

O conteúdo é baseado nas notas de aula da Professora Yoshiko Wakabayashi, e segue a sequência do seu material. As provas que foram essencialmente ou feitas em sala ou como exercício, e foram explicitadas as mais pertinentes dentro do escopo desse texto.