Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-RJ
Segunda Aula de Cálculo Numérico
Aproximação de Função por Série de Taylor
Professor da Disciplina
Wagner Pimentel & Pedro Villela

Dado o valor de uma função e de suas derivadas em uma coordenada específica, $x_0 = a$, é possível aproximá-la, de forma local, em um conjunto de pontos dentro de uma vizinhança de x_0, ou seja, no intervalo $|x - a| < \epsilon$, onde epsilon é um valor positivo, possivelmente pequeno, mas não nulo. Situações como essa aparecem no cálculo do valor de seno e cosseno de ângulos não notáveis. Por exemplo, podemos calcular o seno de 48^o, partindo das informações do valor e das derivadas da função seno em $a = \pi/4$ (45^o). Essa é uma maneira muito comum de calcular o valor de seno e cosseno sem o auxílio de uma tabela trigonométrica ou de uma calculadora.

Nesta aula trataremos de aproximação local de função por uma técnica conhecida como série de Taylor que pode ser escrita como a soma de infinitos termos. Como é impossível trabalhar com infinitos termos dessa série, o truncamento desta gera o que conhecemos como o polinômio de Taylor. Esse polinômio aproxima uma determinada função na vizinhança ou nas proximidades de um ponto do seu domínio, denominado centro da série de Taylor.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e infinitamente diferenciável, então $f = f(x)$ pode ser representada por uma série de potência na vizinhança de um ponto $x_0 = a$, $a \in D(f)$, pela seguinte representação: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$, e mais,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

Esta série é denominada série de Taylor da função f em torno do ponto $x = a$, onde $a \in D(f)$ é o centro da série.

São exemplos de funções contínuas e infinitamente diferenciáveis: as famílias das funções exponenciais, das funções trigonométricas, das funções logarítmicas, dentre outras.

Se $a = 0$, a série será denominada de Maclaurin.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)x^n}{n!} = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(0)x^n}{n!} + \ldots$$

Obs: Como o computador só trabalha com um número finito de termos, na prática, a aproximação de função por série de Taylor ocorre quando somente $(k+1)$ termos da série de potência são considerados, $k \in N$. Neste caso, a função f será aproximada por um polinômio de grau k denominado polinômio aproximador de Taylor, como a seguir:

$$f(x) \approx P_k(x) = f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{f^{''}(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!}$$

Quanto maior for o valor de k, maior será o grau do polinômio de Taylor e mais precisa será a aproximação da função para pontos na vizinhança de $a \in D(f)$, onde se tem garantia de convergência da série de Taylor.

Exemplo 1:

a) Desenvolva a série de Taylor da função $f(x) = e^{2x}$ em torno do ponto x=0.

Solução:
Temos que $a = 0$ então a série é uma Maclaurin, e mais:
$f(x) = e^{2x} \Rightarrow f(a) = f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f'(a) = f'(0) = 2e^0 = 2$
$f''(x) = 4e^{2x} \Rightarrow f''(a) = f''(0) = 4e^0 = 4$
$f'''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow f'''(a) = f'''(0) = 8e^0 = 8$
$f''''(x) = 16e^{2x} \Rightarrow f''''(a) = f''''(0) = 16e^0 = 16$
....
$f^n(x) = 2^n e^{2x} \Rightarrow f^n(a) = f^n(0) = 2^n e^0 = 2^n$
Assim,

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)x^2}{2!} + \frac{f^{'''}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{''''}(0)x^4}{4!} + \cdots + \frac{f^n(0)x^n}{n!} + \ldots$$

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots + \frac{2^n x^n}{n!} + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

b) Aproxime $f(-\frac{1}{2})$ utilizando um polinômio de grau 1, grau 2, grau 3 e grau 4, da série acima.

Solução:
Sabemos que $f(-\frac{1}{2}) = e^{2(-\frac{1}{2})} = e^{-1} = 1/e = 0.3679$

Polinômio de grau 1:
$P_1(x) = 1 + 2x \Rightarrow P_1(-\frac{1}{2}) = 1 + 2(-\frac{1}{2}) = 0$

Polinômio de grau 2:

$$P_2(x) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} \Rightarrow P_2(-\tfrac{1}{2}) = 1 + 2(-\tfrac{1}{2}) + \frac{4(-\frac{1}{2})^2}{2!} = 0.5$$

Polinômio de grau 3:

$P_3(x) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} \Rightarrow P_3(-\frac{1}{2}) = 1 + 2(-\frac{1}{2}) + \frac{4(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{8(-\frac{1}{2})^3}{3!} = 0.3333$

Polinômio de grau 4:
$P_4(x) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} \Rightarrow P_4(-\frac{1}{2}) = 1 + 2(-\frac{1}{2}) + \frac{4(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{8(-\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{16(-\frac{1}{2})^4}{4!} = 0.3750$

c) Determine o erro relativo associado ao polinômio de grau 4.

Solução:
$E_{Rel.} = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \frac{|0.3679 - 0.3750|}{|0.3679|} = 0.0193 = 1.93\%$

Exemplo 2:

a) Desenvolva a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em torno do ponto x=1.

Solução:
Como $a = 1$ temos que:
$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(a) = f(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(a) = f'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$

$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(a) = f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$

$f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f'''(a) = f'''(1) = \frac{-6}{1^4} = -6$

$f''''(x) = \frac{24}{x^5} \Rightarrow f''''(a) = f''''(1) = \frac{24}{1^5} = 24$
....

$f^n(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^n} \Rightarrow f^n(a) = f^n(1) = \frac{(-1)^n n!}{1^n} = (-1)^n n!$
Assim,
$f(x) = f(1) + f^{'}(1)(x-1) + \frac{f^{''}(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f^{'''}(1)(x-1)^3}{3!} + \frac{f^{''''}(1)(x-1)^4}{4!} + \cdots + \frac{f^n(1)(x-1)^n}{n!} + \ldots$

$f(x) = 1 - (x-1) + \frac{2(x-1)^2}{2!} - \frac{6(x-1)^3}{3!} + \frac{24(x-1)^4}{4!} - \cdots - \frac{(-1)^n n!(x-1)^n}{n!} + \ldots$

$f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots - (x-1)^n + \ldots$, n ímpar

$f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots + (x-1)^n + \ldots$, n par

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$

b) Aproxime $f(\frac{1}{2})$ utilizando um polinômio de grau 4.

Solução:
Sabemos que $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{(\frac{1}{2})} = 2$
Polinômio de grau 4:
$f(x) \approx P_4(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 \Rightarrow$
$f(\frac{1}{2}) \approx P_4(\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2}-1) + (\frac{1}{2}-1)^2 - (\frac{1}{2}-1)^3 + (\frac{1}{2}-1)^4 \Rightarrow$
$f(\frac{1}{2}) \approx P_4(\frac{1}{2}) = 1 - (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{2})^4 \Rightarrow$
$f(\frac{1}{2}) \approx P_4(\frac{1}{2}) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = 1.9375$

c) Determine o erro relativo associado à aproximação acima.

Solução:
$E_{Rel.} = \dfrac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \dfrac{|2 - 1.9375|}{|2|} = 0.0313 = 3.13\%$

Exemplo 3

Encontre o polinômio de Taylor de grau 3, centrado em $a = \dfrac{\pi}{4}$, da função $f(x) = sen(x)$ e aproxime o valor de $sen(48^o)$

Solução: primeiramente, vamos calcular os coeficientes do polinômio de Taylor:

$$f(x) = sen(x) \Rightarrow f(a) = f(\tfrac{\pi}{4}) = sen(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = cos(x) \Rightarrow f'(a) = f'(\tfrac{\pi}{4}) = cos(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = -sen(x) \Rightarrow f''(a) = f''(\tfrac{\pi}{4}) = -sen(\tfrac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'''(x) = -cos(x) \Rightarrow f'''(a) = f'''(\tfrac{\pi}{4}) = -cos(\tfrac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim,

$$P_3(x) = f(\tfrac{\pi}{4}) + f^{'}(\tfrac{\pi}{4})(x - \tfrac{\pi}{4}) + \frac{f^{''}(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{f^{'''}(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}$$

$$P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \tfrac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + (x - \tfrac{\pi}{4}) - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2} - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{6})$$

Como $48^o \equiv \dfrac{48\pi}{180}$ e $(48^o - 45^o) \equiv \dfrac{3\pi}{180} = \dfrac{\pi}{60}$, temos que:

$P_3(48^o) = P_3(\frac{4\pi}{15}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + (\frac{48\pi}{180} - \frac{\pi}{4}) - \dfrac{(\frac{48\pi}{180} - \frac{\pi}{4})^2}{2} - \dfrac{(\frac{48\pi}{180} - \frac{\pi}{4})^3}{6}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \dfrac{\pi}{60} - \dfrac{(\frac{\pi}{60})^2}{2} - \dfrac{(\frac{\pi}{60})^3}{6}) \approx 0.74314$

OBS: Note que, com o auxílio da tabela trigonométrica, é possível verificar, com a precisão de 5 casas decimais, que $sen(48^o) \approx 0.74314$. Dessa forma, a aproximação pela série de Taylor não está longe do valor real.

Tabelando a série de Taylor de algumas funções

Algumas funções, além de serem infinitamente diferenciáveis, possuem uma fórmula fechada para qualquer uma de suas derivadas. Tal fato gera a possibilidade de calcular, a priori, todos os coeficientes de sua série de Taylor, centrada em $x_0 = a$. Sendo assim, é possível expressar a série de Taylor completa delas na forma de um somatório infinito cujos todos os coeficientes são conhecidos. Por consequência, o polinômio de Taylor dessas funções também o será.

Além disso, algumas dessas funções, descritas acima, possuem a propriedade de terem a sua série de Taylor definida em toda a reta real, independentemente da escolha de seu centro. Isso significa que o somatório infinito da série de Taylor irá convergir para qualquer valor de x, independentemente da escolha de $x_0 = a$. Exemplos de função desse tipo são: $f(x) = e^x$, $f(x) = cos(x)$, $f(x) = sen(x)$.

Exemplo 1

Calcule a série de Maclaurin ($a = 0$) completa de $f(x) = e^x$

Solução: Como $a = 0$ temos que:

$f(x) = e^x \Rightarrow f(a) = f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(a) = f'(0) = e^0 = 1$
$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(a) = f''(0) = e^0 = 1$
$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(a) = f'''(0) = e^0 = 1$
....
$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(a) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$
....
Logo, $f(x) = e^x = f(0) + f^{'}(0)x + \dfrac{f^{''}(0)x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{f^n(0)x^n}{n!} + \cdots = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

Exemplo 2

Calcule a série de Maclaurin ($a = 0$) completa de $f(x) = cos(x)$

$f(x) = cos(x) \Rightarrow f(a) = f(0) = cos(0) = 1$
$f'(x) = -sen(x) \Rightarrow f'(a) = f'(0) = -sen(0) = 0$
$f''(x) = -cos(x) \Rightarrow f''(a) = f''(0) = -cos(0) = -1$
$f'''(x) = sen(x) \Rightarrow f'''(a) = f'''(0) = sen(0) = 0$
$f''''(x) = cos(x) \Rightarrow f''''(a) = f''''(0) = cos(0) = 1$
....

Note que a derivada segue o mesmo padrão em um ciclo de 4 fases: 1, 0, -1, 0. Logo,

$f(x) = cos(x) = f(0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{''}(0)x^2}{2!}+\cdots+\frac{f^n(0)x^n}{n!}+\cdots = 1+0x+\frac{(-1)x^2}{2!}+\frac{(0)x^3}{3!}+\frac{(1)x^4}{4!}+\ldots$, assim,

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

Pode-se mostrar por argumentos similares que:

$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

A seguir, exibimos uma tabela com as principais séries de Maclaurin já conhecidas.

Função	Série da Taylor	Domínio
e^x	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$	$\mathbb{R}$
$sen(x)$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$	$\mathbb{R}$
$tg^{-1}(x)$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)},$	$[-1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$	$(-1, 1)$

Encontrando a série de Taylor de algumas funções compostas

Em alguns casos, é possível encontrar a série de taylor da composta de algumas funções da última tabela, trocando apenas o argumento x pela função desejada que irá realizar a composição. A seguir, seguem alguns exemplos.

Exemplo 1

Encontre o polinômio de Taylor de grau 4, centrado em $a = 0$, da função $f(x) = e^{2x}$

Solução: Sabemos que o polinômio de Taylor de grau 4 da função exponencial, e^t, é:
$P_4(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}$

Fazendo $t = 2x$, temos que $P_4(2x) = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8x^3}{3!} + \frac{4x^4}{3}$

OBS: Note que a série obtida para e^{2x} é a mesma que já foi obtida anteriormente.

Deixamos como tarefa, para exercício, obter o polinômio de Taylor que reune os 4 primeiros termos das funções: $f(x) = sen(5x)$ e $g(x) = cos(-x^3)$, centrado em $a = 0$.

Uma da principais utilidades desse tipo de abordagem aparece no cálculo de integrais definidas que não podem ser calculadas analiticamente, devido ao fato das funções a serem integradas não possuírem antiderivadas. Um caso clássico dessa ocorrência aparece no cálculo da integral definida da função $f(x) = e^{-x^2}$, recorrentemente no estudo de probabilidades e que não possui antiderivada.

Exemplo 2

Encontre uma aproximação para

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

utilizando os 5 primeiros termos do polinômio de Taylor, centrado em $a = 0$.

Solução: Sabemos, da composta da função exponencial que, $e^{-x^2} \approx P_5(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$, então:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{6} dx + \int_0^1 \frac{x^8}{24} dx =$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0.74749$$