Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-RJ

Métodos Numéricos Para a Resolução de EDO's

Professores da Disciplina

Wagner Pimentel e Pedro Villela

Equções Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valor Inicial

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação matemática que envolve uma função de uma variável, $y = y(x)$, e suas derivadas.

EDO's podem ser classificadas quanto à ordem e à linearidade. A ordem da EDO é dada pela derivada de maior grau da mesma. Por exemplo, uma EDO é de segunda ordem se envolve apenas y'', y' e y. Já em relação à linearidade, uma EDO é dita linear se não envolve o produto entre a variável dependente, y, e suas derivadas. Caso contrário, ela é não-linear. Uma EDO do tipo $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = s(x)$ é dita linear de segunda ordem. Já uma equação diferencial na forma $p(x)y'' + q(x)y'y = s(x)$ é não-linear de segunda ordem.

Um problema de valor inicial (PVI) é um problema que associa uma EDO a um conjunto de condições iniciais, todas sobre um mesmo ponto, $y(x_0)$. A quantidade dessas condições depende da ordem da equação diferencial. A solução de um PVI, $y(x)$, é uma solução particular da EDO associada.

Nesse curso, em uma primeira abordagem, vamos trabalhar apenas com as Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Não-Lineares, ou seja, EDO's do tipo $y' = f(x, y)$, onde $f(x, y)$ é uma função de duas variáveis que depende tanto da variável dependente, y, quanto da independente ou livre, x. Seguindo essa ideia, o foco inicial será explorar PVI's da forma:

$$PVI \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Aplicação: Resolvendo analiticamente um PVI

Considere o $PVI \begin{cases} y' = 0.2xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$. Determine a solução do mesmo, $y(x)$, assim como o valor de $y(1.3)$.

Solução: Como $y'(x) = 0.2xy \to \dfrac{d_y}{d_x} = 0.2xy \to \dfrac{1}{y} d_y = 0.2x d_x$.

Assim, $\displaystyle\int \frac{1}{y} d_y = \int 0.2x d_x \to ln|y| = 0.1x^2 + C \to |y(x)| = e^{0.1x^2+C} \to y(x) = (^+_- e^c).(e^{0.1x^2})$
$\to y(x) = K.e^{0.1x^2}$, onde $K =^+_- e^c$

Dessa forma, como $x_0 = 1$ e $y_0(x_0) = 1$, então $y(x_0) = K.e^{0.1x_0^2} \to 1 = K.e^{0.1(1)^2} \to 1 = K.e^{0.1} \to K = \dfrac{1}{e^{0.1}} = 0.9048$

Portanto, a solução do PVI é: $y(x) = 0.9048e^{0.1x^2}$, de modo que $y(1.3) = 0.9048.e^{0.1(1.3)^2} = 1.0714$

Métodos Numéricos Para a Resolução de EDO's

Em muitos casos, é praticamente impossível encontrar, de forma analítica, a solução exata de PVI's que envolvem equações diferenciais. Entretanto, existem situações em que o Teorema de Existência e Unicidade para EDOS's, um importante teorema da área de equações diferenciais, garante a existência e a unicidade da solução de um PVI, mesmo que seja impossível de encontrar uma expressão "fechada"para $y(x)$. Nesse contexto, é possível formular métodos numéricos que conseguem, em geral, com o auxílio de um computador, encontrar uma solução discreta (em apenas alguns pontos pré-selecionados) e aproximada para o problema.

Para isso, partindo de x_0, primeiramente construiremos uma sequência de pontos do domínio de $y(x)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, igualmente espaçados, da forma $x_{n+1} = x_n + h$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, onde $h > 0$ é o tamanho da distância entre x_{n+1} e x_n, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$. A condição dos pontos serem igualmente espaçados, nesse curso, será sempre considerada. De posse dessa sequência, calculamos, por meio de métodos numéricos, aproximações para a imagem de cada um desses valores, y_n, de modo que $y_n \approx y(x_n)$. Note que nessa abordagem não encontramos uma função que se aproxima, dentro de algum critério, de $y(x)$ e sim uma estimativa para alguns de seus pontos.

Em geral, para calcular y_n, utiliza-se as informações referentes aos pontos anteriores já calculados, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. Se um método utilizar apenas as informações do ponto anterior, (x_{n-1}, y_{n-1}), para calcular o valor de y_n, ele é dito de passo simples. Caso utilize mais pontos, ele será um método de passo múltiplo. Na prática, os métodos de passo múltiplo são mais precisos, pois utilizam mais informações sobre a função. Porém, eles têm dificuldades de inicialização já que precisam de pelo menos duas condições iniciais que nem sempre podem estar disponíveis.

Nesse texto, vamos trabalhar apenas com os métodos de passo simples que têm a vantagem de serem auto-inicializantes, pois precisam de apenas uma condição inicial para começar, algo que sempre ocorre. Exploraremos uma classe de métodos conhecida como métodos de Runge-Kutta, partindo dos métodos de Euler que são o casos particulares mais simples dessa categoria.

Método de Euler

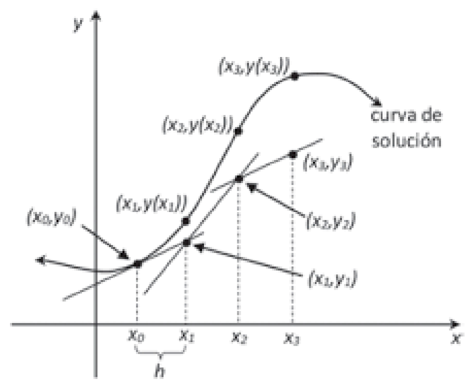
Considere o PVI $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \\ h > 0 \end{cases}$

Embora não conheçamos $y(x)$, a solução do PVI, temos informações sobre a sua derivada em x_0,

$y' = f(x_0, y_0)$. Mais ainda, dada a estrutura do PVI, de posse de uma estimativa, y_n, para $y(x_n)$, é sempre possível conjecturar a derivada de y em $(x_n, y(xn))$, $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \approx f(x_n, y_n)$. Por conta disso, partindo de qualquer ponto (x_n, y_n) é sempre possível aproximar localmente $y(x)$ por sua reta tangente utilizando a teoria de Série de Taylor.

Como $y(x_0) = y_0$, podemos aproximar, em um pequeno intervalo centrado em x_0, $y(x)$ pela reta tangente ou pelo polinômio de Taylor de grau 1, $P_0(x)$, que passa pelo ponto (x_0, y_0). Chamaremos de $P_0(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$ a estimativa (nesse primeiro passo, exata, pois $y(x_0) = y_0$) para a reta tangente à $y(x)$ em $(x_0, y(x_0))$.

Seja $x_1 = x_0 + h$ de modo que $y_1 = P_0(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Para uma valor de h muito pequeno, temos que, y_1, a reta tangente aplicada em x_1, aproxima bem $y(x_1)$, ou seja, $y_1 \approx y(x_1)$.



Essa mesma ideia pode ser estendida para o ponto (x_1, y_1). Sejam $P_1(x) = y_1 + y'(x_1)(x - x_1) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$ uma aproximação, no sentido de função, para a reta tangente à $y(x)$ no ponto $(x_1, y(x_1))$ e $x_2 = x_1 + h$. De forma análoga, se $y_2 = P_1(x_2) = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) = y_1 + hf(x_1, y_1)$, temos, para h pequeno, $y_2 \approx y(x_2)$.

Generalizando para um x_{n+1} qualquer, sejam $P_n(x) = y_n + y'(x_n)(x - x_n) = y_n + f(x_n, y_n)(x - x_n)$ uma aproximação para a reta tangente à $y(x)$ no ponto $(x_n, y(x_n))$ e $x_{n+1} = x_n + h$. Assim, se $y_{n+1} = P_n(x_{n+1}) = y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) = y_n + hf(x_n, y_n)$, para h pequeno, temos $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$.

De forma geral, uma iteração qualquer do método de Euler pode ser escrita como $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, ou seja, usamos (x_n, y_n) para calcular y_{n+1}. Por conta disso ele pode ser caracterizado como um método de passo simples. Caso decidíssimos "ligar", via segmentos de reta, os pontos (x_n, y_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ encontrados via método de Euler, estaríamos aproximando $y(x)$ por uma função linear definida por partes.

Aplicação do Método de Euler:

Considere o $PVI \begin{cases} y' = 0.2xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$. Determine uma aproximação para $y(1.3)$ utilizando o método de Euler com $h = 0.1$. Qual foi o erro relativo cometido pelo método em relação ao valor exato de $y(1.3)$?

Solução: Sabemos que $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Além disso, como $y'(x) = f(x, y) = 0.2xy$, temos que

::

$x_1 = x_0 + h = 1.1 \to y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(0.2x_0y_0) = 1 + 0.1(0.2 * 1 * 1) = 1.0200$

::

$x_2 = x_1 + h = 1.2 \to y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(0.2x_1y_1) = 1.02 + 0.1(0.2 * 1.1 * 1.02) = 1.0424$

::

$x_3 = x_2 + h = 1.3 \to y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(0.2x_2y_2) = 1.0424 + 0.1(0.2 * 1.2 * 1.0424) = 1.0674$

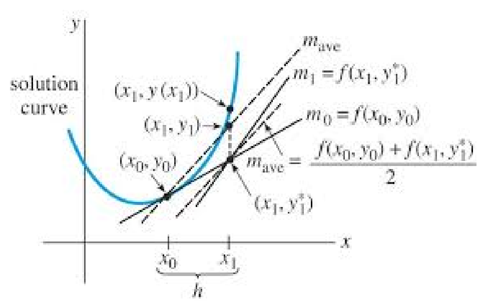
Vimos anteiromente que $y(1.3) = 1.0714$ é o valor exato para a solução da EDO em $x = 1.3$. Dessa forma, o erro relativo na aproximação $y_3 \approx y(x_3)$ pelo Método de Euler foi de:

$$E_{rel} = \frac{|y(x_3) - y_3|}{|y(x_3)|} = \frac{|1.0714 - 1.0674|}{|1.0714|} \approx 0.40\%$$

Método de Euler Melhorado

O método de Euler Melhorado, assim como o método de Euler, é um método numérico que estima a solução, $y(x)$, de um PVI. Ele utiliza o método de Euler com uma pequena alteração que aprimora a qualidade da aproximação de $y(x)$.

Considere o $PVI \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \\ h > 0 \end{cases}$ com $y(x)$ como a sua solução e a figura abaixo:



Partindo de (x_0, y_0), primeiramente, vamos aplicar o método de Euler convencional, de modo que a reta tangente a esse ponto, $r_0(x)$, de coeficiente angular $m_0 = f(x_0, y_0)$, será dada por $r_0(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$. Assim, por meio de um passo do método de Euler, teremos uma aproximação inicial para $y(x_1)$, $y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0)$.

Partindo do ponto aproximado obtido, $P = (x_1, y_1^*)$, podemos traçar uma aproximação para a reta tangente à $y(x)$ em $(x_1, y(x_1))$, $r_1(x) = y_1^* + y'(x_1)(x - x_1) = y_1^* + f(x_1, y_1^*)(x - x_1)$, cujo coeficiente angular é dado por $m_1 = f(x_1, y_1^*)$, de modo que a reta r_{ave} é aquela que passa por P e tem como inclinação a média dos coeficientes angulares m_0 e m_1, ou seja, $m_{ave} = \frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^*)}{2}$.

Com isso, temos que $r(x)$, a reta que passa por (x_0, y_0), é paralela a r_{ave} e tem como coeficiente angular m_{ave}, é uma melhor aproximação, em relação àquela obtida pelo método de Euler simples, para $y(x)$ no intervalo $[x_0, x_1]$. Isso se deve ao fato que de que a nova reta utiliza informações da inclinação dessa função tanto no início quanto no final do intervalo.

Dessa forma, $r(x) = y_0 + m_{ave}(x - x_0) = y_0 + \left(\frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^*)}{2}\right)(x - x_0)$, de modo que
$y_1 = r(x_1) = y_0 + \left(\frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^*)}{2}\right)(x_1 - x_0) = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)\right)$, para uma valor de h pequeno, é uma boa aproximação para $y(x_1)$.

Esse mesmo raciocínio pode ser estendido para os próximos passos do método, de forma que um passo qualquer do método pode ser escrito como $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1}))$, onde
$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ é encontrado pelo método de Euler.

Repare que se $k_1 = f(x_n, y_n)$ e $k_2 = f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$, onde $y^*_{n+1} = y_n + hk_1$, o método de Euler Melhorado pode ser reescrito como $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Aplicação do Método de Euler Melhorado:

Considere o $PVI \begin{cases} y' = 0.2xy \\ y(1) = 1 \\ h = 0.1 \end{cases}$. Determine uma aproximação para $y(1.3)$ utilizando o método de Euler Melhorado. Qual foi o erro relativo cometido pelo método em relação ao valor exato de $y(1.3)$?

Solução: Sabemos que $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Além disso, como $y'(x) = f(x, y) = 0.2xy$, temos que
::
$n = 0$
$x_1 = x_0 + h = 1.1$
$k_1 = f(x_0, y_0) = f(1, 1) = 0.2 * x_0 * y_0 = 0.2 * 1 * 1 = 0.2$
$y_1^* = y_0 + hk_1 = 1 + 0.1 * 0.2 = 1.02$
$k_2 = f(x_1, y_1^*) = f(1.1, 1.02) = 0.2 * 1.1 * 1.02 = 0.2244$
$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{0.1}{2}(0.2 + 0.2244) = 1.0212$
::
$n = 1$
$x_2 = x_1 + h = 1.2$
$k_1 = f(x_1, y_1) = f(1.1, 1.0212) = 0.2 * x_1 * y_1 = 0.2 * 1.1 * 1.0212 = 0.2247$
$y_2^* = y_1 + hk_1 = 1.0212 + 0.1 * 0.2247 = 1.0437$
$k_2 = f(x_2, y_2^*) = f(1.2, 1.0437) = 0.2 * 1.2 * 1.0437 = 0.2505$
$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1.0212 + \frac{0.1}{2}(0.2247 + 0.2505) = 1.0450$
::
$n = 2$

$x_2 = x_2 + h = 1.3$
$k_1 = f(x_2, y_2) = 0.2 * x_2 * y_2 = 0.2 * 1.2 * 1.0450 = 0.2508$
$y_2^* = y_2 + hk_1 = 1.0450 + 0.1 * 0.2508 = 1.0701$
$k_2 = f(x_3, y_2^*) = f(1.3, 1.0701) = 0.2 * 1.3 * 1.0701 = 0.2782$
$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1.0450 + \frac{0.1}{2}(0.2505 + 0.2782) = 1.0715 \approx y(1.3)$

Vimos anteiromente que $y(1.3) = 1.0714$ é o valor exato para a solução da EDO em $x = 1.3$. Dessa forma, o erro relativo na aproximação $y_3 \approx y(x_3)$ pelo Método de Euler foi de:

$$E_{rel} = \frac{|y(x_3) - y_3|}{|y(x_3)|} = \frac{|1.0714 - 1.0715|}{|1.0714|} \approx 0.01\%$$

Nesse exemplo, conseguimos comprovar o esperado, pois com o mesmo tamanho de passo h, o Método de Euler Melhorado foi mais eficiente que o Metodo de Euler, encontrando uma solução com menor erro em relação à exata.

Métodos de Runge-Kutta:

São métodos de passo simples para a resolução de EDO's de primeira ordem que têm como objetivo que aproveitar a maior precisão dos métodos de Série de Taylor, sem calcular as derivadas de $f(x, y)$.

Em geral, métodos dessa tipo assumem a forma: $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\phi(x_n, y_n, h)$, $n \geq 0$, onde $\phi(x_n, y_n, h)$ é uma função de x e y que depende indiretamente de $f(x, y)$.

Essa classe de métodos pode ser reescrita como $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\sum_{i=1}^{s} b_i.k_i$, onde b_i são constantes tais que $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$ e k_i pode ser entendido como o valor da função $f(x, y)$ calculado em um ponto específico. Dizemos que um método de Runge-Kutta é de ordem $'s'$ se ele envolver exatamente $'s'$ termos k_i's.

Note que para $b_1 = 1$ e $k_1 = f(x_n, y_n)$, o Método de Runge-Kutta de ordem 1 se torna $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h(b_1.k_1) = y(x_n) + hf(x_n, y_n)$, que é exatamente o Método de Euler.

Já para $b_1 = \frac{1}{2}$, $k_1 = f(x_n, y_n)$, $b_2 = \frac{1}{2}$ e $k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1)$, o Método de Runge-Kutta de ordem 2 se torna $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h(b_1k_1 + b_2k_2) = y(x_n) + h(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2) = y(x_n) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$, que é exatamente o Método de Euler Melhorado.

Por outro lado, para $b_1 = \frac{2}{9}$, $k_1 = f(x_n, y_n)$, $b_2 = \frac{3}{9}$, $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2})$, $b_3 = \frac{4}{9}$ e $k_3 = f(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + h\frac{3k_2}{4})$, o Método de Runge-Kutta de ordem 3 será dado por $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)$.

Finalmente, para $b_1 = \frac{1}{6}$, $k_1 = f(x_n, y_n)$, $b_2 = \frac{2}{6}$, $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2})$,$b_3 = \frac{2}{6}$, $k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2})$, $b_4 = \frac{1}{6}$ e $k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3)$, o Método de Runge-Kutta de ordem 4 será dado por $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$.

Embora seus calculos sejam difíceis de serem realizados “a mão”, o Método de Runge-Kutta de ordem 4 é extremamente eficiente do ponto de vista computacional, tanto em termos da implementação quanto em termos da qualidade da aproximação.

Resolvendo numericamente um PVI que envolve uma EDO de ordem 2:

Toda vez que tivermos um PVI que envolve uma Equação Diferencial de Segunda Ordem, devemos transformá-la em um sistema de Equações de Primeira Ordem, fazendo a substituição de y' por outra variável arbitrária.

Considere um $PVI\begin{cases} y^{''} = f(x, y, y^{'}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y^{'}(x_0) = y_0^{'} \\ h > 0 \end{cases}$ com solução $y(x)$.

Seja $z = y'$ então $z' = y''$, assim podemos reescrever o PVI acima como:

$$PVI\begin{cases} y' = g(x, y, z) = z, \\ z' = f(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \\ h > 0 \end{cases} \qquad \text{com } y(x) \text{ e } z(x) \text{ como solução.}$$

Assim, caso fossemos resolver esse novo PVI pelo Método de Euler, teríamos que aplicar as seguintes relações de recorrência para cada passo do algoritmo:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n, z_n) = y_n + hz_n \\ z_{n+1} = z_n + hf(x_n, y_n, z_n) \end{cases}.$$

Exemplo de resolução numérica de um PVI que envolve uma EDO de ordem 2:

Considere o $PVI\begin{cases} y^{''} + 30y^{'} + 200y = 1000 \rightarrow f(x, y, y') = -30y^{'} - 200y + 1000 \\ y(0) = 0 \\ y^{'}(0) = 0 \\ h = 0.01 \end{cases}$

Determine uma aproximação para $y(0.02)$ utilizando o Método de Euler.

Solução: Seja $z = y'$ de modo que $z' = y''$. Com isso, podemos reescrever o problema acima como:

$$PVI \begin{cases} y' = g(x,y,z) = z, \\ z' = f(x,y,z) = -30z - 200y + 1000 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \\ h = 0.01 \end{cases}$$

Assim, ao aplicarmos o Método de Euler a esse novo PVI, teremos que trabalhar com as seguintes relações de recorrência:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n \\ z_{n+1} = z_n + h(-30z_n - 200y_n + 1000) \end{cases} .$$

Como $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $z_0 = 0$, a primeira iteração será:

::

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.01 = 0.01$

$y_1 = y_0 + hg(x_0, y_0, z_0) = y_0 + hz_0 = 0 + 0.01 * 0 = 0$

$z_1 = z_0 + hf(x_0, y_0, z_0) = z_0 + h(-30z_0 - 200y_0 + 1000) = 0 + 0.01(-30 * 0 - 200 * 0 + 1000) = 10$

::

Como $x_1 = 0.01$, $y_1 = 0 \approx y(0.01)$ e $z_0 = 10$, a segunda iteração será:

::

$x_2 = x_1 + h = 0.01 + 0.01 = 0.02$

$y_2 = y_1 + hg(x_1, y_1, z_1) = y_1 + hz_1 = 0 + 0.01 * 10 = 0.1$

$z_2 = z_1 + hf(x_1, y_1, z_1) = z_1 + h(-30z_1 - 200y_1 + 1000) = 10 + 0.01(-30 * 10 - 200 * 0 + 1000) = 17$

Assim, $y(0.02) = y(x_2) \approx y_2 = 0.1$ é a aproximação procurada para a solução do PVI.

De qualquer forma, é possível seguir este raciocínio no sentido de determinar $y_n \approx y(x_n)$ e $z_n \approx= y^{'}(x_n)$, para $n = 3, 4, \ldots$. Além disso, pode-se mostrar que a solução analítica deste PVI é
$y(x) = 5 - 10e^{-10x} + 5e^{-20x}$, com $y'(x) = 100e^{-10x} - 100e^{-20x}$