Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-RJ
Décima Segunda Aula de Cálculo Numérico
Métodos de Integração Numérica

Professores da Disciplina

Wagner Pimentel e Pedro Villela

Métodos de Integração Numérica

Métodos de integração numérica são métodos que permitem encontrar o valor aproximado, em geral por meio do computador, para a integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Esses métodos determinam uma aproximação para a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$, utilizando os conceitos de integração numérica e interpolação polinomial.

Utilidade da Integração Numérica

A principal vantagem da integração numérica está relacionada à situação em que temos problemas ao calcular a antiderivada da função $f(x)$. Algumas das situações em que o uso dessa técnica é recomendada são elencados a seguir:

- Uma utilidade imediata aparece quando a função $f(x)$ não possui antiderivada, ou seja, a integral definida não pode ser calculada de forma analítica. Um exemplo clássico desse tipo de situação que aparece quando trabalhamos com a distribuição normal de probabilidade que contém a função $f(x) = e^{-x^2}$ e que não é integrável. Nesse contexto, para calcular a probabilidade acumulada é necessário integrar essa função. Por isso, utiliza-se uma tabela com valores prévios, calculados numericamente, dessa integral.
- Outra utilidade aparece quando a antiderivada de $f(x)$ existe, mas é praticamente difícil de ser calculada, exigindo técnicas avançadas de integração tal como o método dos resíduos.
- A integração numérica também se mostra extremamente promissora quando queremos integrar uma função da qual conhecemos apenas alguns pontos, provavelmente provenientes de algum experimento.

Como Construir a Integral Numérica

A ideia básica da integração numérica consiste em substituir a função $f(x)$ por um polinômio, ou até outra função mais fácil de ser integrada, que a aproxime razoavelmente bem no intervalo de integração $[a, b]$. Nessa situação, transformamos o problema original em um outro mais fácil, cuja integral pode ser facilmente calculada de forma analítica. Uma maneira de realizar essa troca de funções, que será a abordada nesse curso, consiste em substituir a função $f(x)$ por um polinômio interpolador adequado, sabendo que, quanto maior o grau do mesmo, melhor será a aproximação tanto para a função quanto para o valor da integral desejado.

Fórmulas de Newton-Cotes

São expressões do tipo $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$, com $x_i \in [a,b]$, $i = 0,1,2,\ldots,n$ e A_i são constantes.

Nessas fórmulas, o polinômio que aproxima f deve interpolá-la em pontos igualmente espaçados do intervalo $[a,b]$. Considerando a partição do intervalo $[a,b]$ em subintervalos do tipo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, todos de comprimento h. Note que, nessa situação, temos $n+1$ pontos igualmente espaçados e o tamanho da partição será: $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$. Dessa forma, $x_{i+1} = x_i + h$

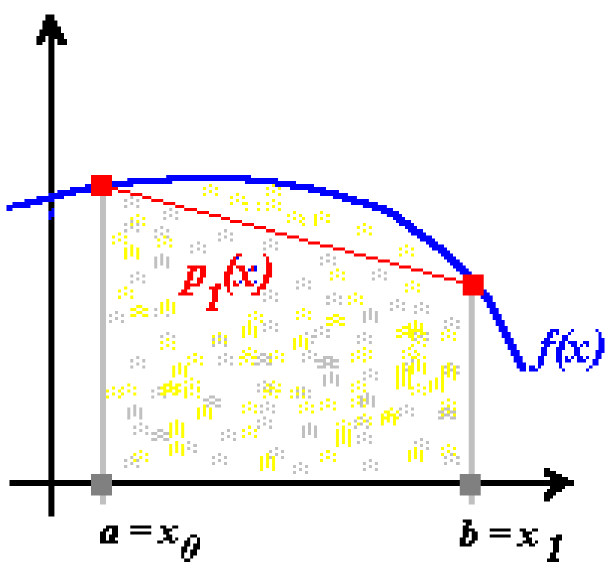
Com isso, considerando $x_0 = a$ e $x_n = b$, as fórmulas de Newton-Cotes assumirão a forma $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$, em que os coeficientes A_i são determinados de acordo com o grau do polinômio interpolador.

Regra dos Trapézios

O método dos trapézios consiste em, primeiramente, aproximar a função a ser integrada no intervalo $[a,b]$ pela interpolação polinomial linear, de for repetida ou não, sobre um conjunto de pontos do intervalo, agrupados dois a dois, para depois calcular a integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ com tal aproximação para f.

Método dos Trapézios Elementar (2 pontos)

Considere dois pontos de integração $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, extremos do intervalo $[a,b]$.



Seja $P_1(x) = f(a)\frac{(x-b)}{(a-b)} + f(b)\frac{(x-a)}{(b-a)}$ o polinômio de Lagrange que interpola $f(x)$ nesses dois pontos. Usando essa aproximação, temos que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = I_T$. É fácil mostrar, ao integramos $P_1(x)$

diretamente, que $I_T = \dfrac{h}{2}(f(a)+f(b))$, onde $h = b-a$, pois temos apenas 2 pontos de integração (x_0 e x_1).

O nome dessa regra se remete ao fato de que o cálculo dessa integral é equivalente a encontrarmos área de um trapézio, conforme podemos verificar na figura acima.

Método dos Trapézios Repetido ($(n+1)$ pontos)

É fácil ver que a aproximação de uma função pelo seu polinômio interpolador linear tende a se tornar cada vez mais grosseira conforme aumentamos o comprimento do intervalo $[a,b]$. Dessa forma, os resultados provenientes da aplicação direta do método dos trapézios são nada animadores. Uma maneira de "contornar"essa falha seria particionar o intervalo $[a,b]$ e construir vários polinômios interpoladores de grau 1, um sobre cada partição obtida, e integrá-los um a um.

Considere $(n+1)$ pontos de integração $(x_i, f(x_i))$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, igualmente espaçados em $[a,b]$, de forma que: $x_0 = a$ e $x_n = b$, e mais, $x_1 = x_0+h$, $x_2 = x_1+h = x_0+2h$, $\ldots$, $x_n = x_{n-1}+h = x_0+nh$. Logo: $h = \frac{(x_n-x_0)}{n}$.

Sejam $f_i = f(x_i)$, $h = x_{i+1}-x_i$, $i = 0,1,2,\ldots,n$ e $A_i = \frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})$ a integral calculada via o método dos trapézios no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Assim,

$$I_T = \sum_{j=1}^{n} A_j = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

$$I_T = \frac{h}{2}(f_0+f_1) + \frac{h}{2}(f_1+f_2) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{n-2}+f_{n-1}) + \frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)$$

$$I_T = \frac{h}{2}(f_0+f_1+f_1+f_2+\cdots+f_{n-2}+f_{n-1}+f_{n-1}+f_n)$$

$$I_T = \frac{h}{2}(f_0+2f_1+2f_2+\cdots+2f_{n-2}+2f_{n-1}+f_n),$$

onde $h = \frac{(x_n-x_0)}{n} = \frac{(b-a)}{n}$.

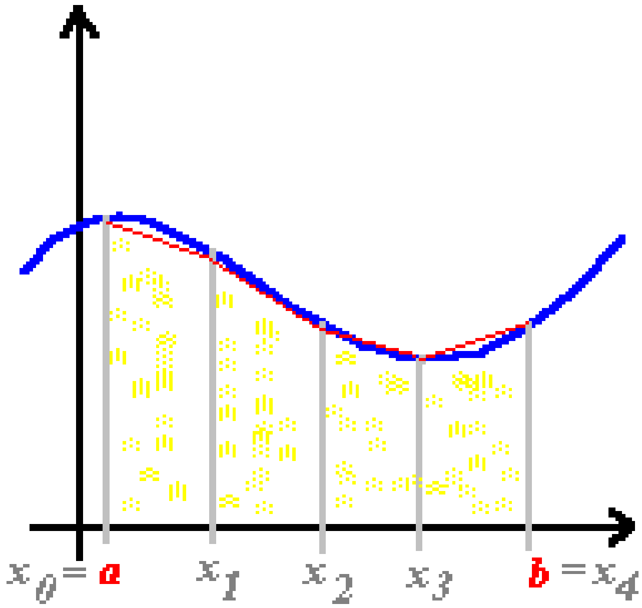
A figura abaixo representa o método dos trapézios com 5 pontos de integração. Observe que $x_0 = a$ e $x_4 = b$.

Aplicação:

Considere a integral definida $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 dx$. Faça o que se pede:

a) Aproxime a integral acima utilizando o método dos trapézios com 2 pontos de integração, usando quatro casas decimais.

b) Aproxime a integral acima utilizando o método dos trapézios com 4 pontos de integração, usando quatro casas decimais.



c) Sabendo que $I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = 0.3333$, calcule o erro relativo cometido nas aproximações realizadas no dois primeiros itens. O que podemos verificar?

Solução:

a) Temos que $n = 1 \rightarrow h = b - a$, então $h = 1 - 0 = 1$;
Sabemos que $a = 0 \rightarrow f(a) = 0$ e $b = 1 \rightarrow f(b) = 1$;
Assim, $I_T = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2} = 0.5$

b) Temos que $n = 3 \rightarrow h = \frac{(b-a)}{3} = \frac{1}{3}$;
Sabemos que $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$;
Assim, $I_T = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3) = \frac{1/3}{2}(0 + 2(\frac{1}{9}) + 2(\frac{4}{9}) + 1) = \frac{1}{6}(0 + \frac{2}{9} + \frac{8}{9} + 1) = 0.3519 \approx \frac{1}{3}$

c) Na aproximação por 2 pontos: $E_{rel} = \frac{|I - I_T|}{|I|} = \frac{|0.3333 - 0.5|}{|0.3333|} = 50.02\%$
Na aproximação por 4 pontos: $E_{rel} = \frac{|I - I_T|}{|I|} = \frac{|0.3333 - 0.3519|}{|0.3333|} = 5,58\%$
É fácil verificar que quanto maior o número de pontos de integração, menor será o erro relativo.

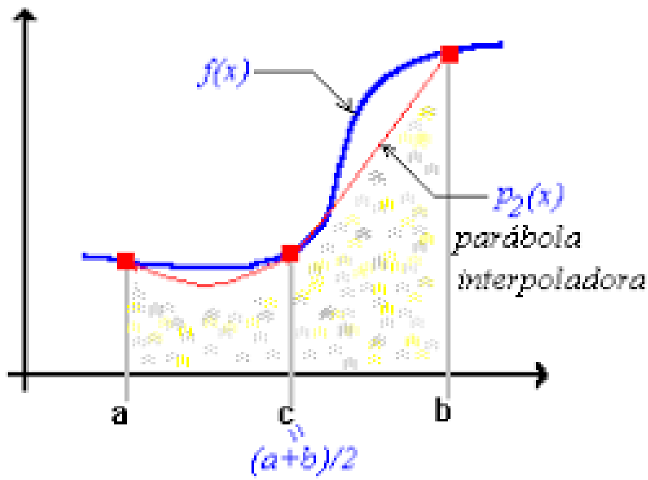
Regra 1/3 de Simpson

No contexto de integração numérica, é fácil perceber que quanto maior o grau do polinômio interpolador, melhor será a aproximação da função e mais preciso será o valor obtido para a integral. Por isso, é interessante utilizar polinômios interpoladores de graus maiores para assim se obter melhores resultados.

Utilizando essa ideia, o método de Simpson aproxima a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ no intervalo $[a, b]$, pela aplicação de interpolação polinomial de grau 2 (quadrática) sobre um conjunto de pontos do intervalo agrupados três a três.

Método de Simpson Elementar (3 pontos)

Considere três pontos de integração $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ e $(m, f(m))$, onde a e b são os extremos do intervalo de integração e $m = \frac{a+b}{2}$, ou seja, o ponto médio de $[a, b]$.



Seja $P_2(x) = f(a)\frac{(x-m)}{(a-m)}\frac{(x-b)}{(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)}{(m-a)}\frac{(x-b)}{(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)}{(b-a)}\frac{(x-m)}{(b-m)}$ o polinômio de Lagrange de grau 2 que interpola $f(x)$ nesses 3 pontos. Nesse contexto, o valor $I_S = \displaystyle\int_a^b P_2(x)dx$ pode ser visto como uma aproximação para o valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ na qual substituímos $f(x)$ pelo seu polinômio interpoldor de grau 2. É possível mostrar, por integração direta, que $I_S = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(m) + f(b))$, onde $h = \frac{(b-a)}{2}$.

Método de Simpson Repetido ($(n+1)$ pontos)

Seguindo a mesma ideia empregada no método dos trapézios repetidos, considere $(n+1)$ pontos de integração $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, igualmente espaçados em $[a, b]$, de tal forma que: $x_0 = a$ e $x_n = b$, e mais, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, $\ldots$, $x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh$. Portanto concluímos que: $h = \frac{(x_n - x_0)}{n}$.

Sejam $f_i = f(x_i)$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ e $A_i = \frac{h}{3}(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$ a integral calculada via o método de Simpson no intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Assim,

$$I_S = \sum_{j=1}^{(n-1)/2} A_j = A_1 + A_2 + \cdots + A_{(n-1)/2}$$

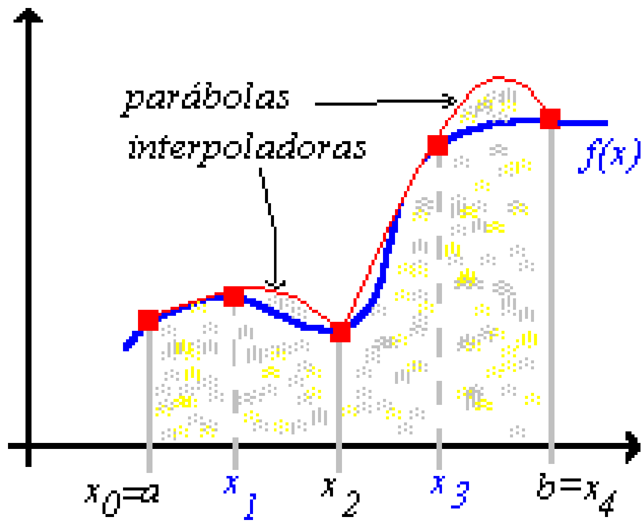
$$I_S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots + \frac{h}{3}(f_{n-4} + 4f_{n-3} + f_{n-2}) + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$I_S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + \cdots + f_{n-2} + f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$I_S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n),$

onde $h = \frac{(x_n - x_0)}{n} = \frac{(b-a)}{n}$.

A figura abaixo representa o método de Simpson com 5 pontos de integração. Observe que $x_0 = a$ e $x_4 = b$.



OBS: Note que o método de Simpson repetido é apenas aplicável quando temos um número ímpar de pontos (como assumimos um universo de $n+1$ pontos, n deve ser par). Quando o número de pontos é par, recomenda-se utilizar o método dos trapézio repetidos.

Aplicação:

Considere a integral definida $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 dx$. Faça o que se pede:

a) Aproxime a integral acima utilizando o método de Simpson com 3 pontos de integração, usando quatro casas decimais.

b) Aproxime a integral acima utilizando o método de Simpson com 5 pontos de integração, usando quatro casas decimais.

c) Sabendo que $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, calcule o erro relativo cometido nas aproximações realizadas no dois primeiros itens. O que podemos verificar em relação à regra dos trapézios?

Solução:

a) Temos que $n = 2 \to h = \frac{b-a}{2}$ então $h = 1/2$;
Sabemos que $a = 0, f(a) = 0$; $m = 1/2, f(m) = 1/4$; $b = 1, f(b) = 1$;

Assim, $I_S = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(m) + f(b)) = \frac{1}{6}(0 + 4(1/4) + 1) = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx$

b) Temos que $n = 4 \rightarrow h = \frac{(b-a)}{4} = \frac{1}{4}$;
Sabemos que $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{2}{4}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$;
Assim, $I_S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) = \frac{1/4}{3}(0 + 4(\frac{1}{16}) + 2(\frac{4}{16}) + 4(\frac{9}{16}) + 1) = \frac{1}{12}(0 + \frac{4}{16} + \frac{8}{16} + \frac{36}{16} + \frac{16}{16}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

c) Em ambos os casos, o valor da integral numérica calculada via o método de Simpson coincidiu com o valor real, logo o erro relativo será de 0% nos dois casos. É fácil perceber que, como esperado, o método de Simpson foi mais preciso que o dos trapézios já que na aplicação anterior, em condições similares, houve erro relativo.