

# Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-RJ

## Quinta Aula de Cálculo Numérico

### Métodos Iterativos

#### Professor da Disciplina

Wagner Pimentel & Pedro Villela

---

### Métodos Iterativos

Existem duas classes de métodos de resolução de sistemas lineares: a dos métodos diretos, já estudados, e a dos métodos iterativos. Os métodos iterativos produzem uma solução aproximada do sistema linear, após um certo número finito, mas não previamente conhecido, de passos, desde que algum critério de convergência seja satisfeito. Esses métodos não mais encontram a solução exata do sistema linear, mas sim, a partir de uma solução inicial constroem uma sequência de aproximações que converge para a solução do sistema.

A principal vantagem dos métodos diretos está no fato de que, a partir de um número conhecido de passos, teremos a solução exata, a menos de erros de arredondamento, do sistema linear. Entretanto, esses métodos não lidam muito com sistemas esparsos, que são aqueles em que a matriz de coeficientes possui um elevado número de entradas nulas. Esta dificuldade se deve ao fato de que a cada passo do processo de eliminação de Gauss, as operações elementares transformam linhas com poucos zeros em linhas com muitas entradas nulas. Já os métodos iterativos, conforme veremos nesse texto, são eficientes para esse tipo de sistema, pois eles aproveitam e mantêm em sua resolução todos os elementos de valor zero da matriz de coeficientes original.

Existem inúmeras aplicações de problemas da matemática, da física e da engenharia que recaem em sistemas lineares esparsos. Podemos citar, por exemplo, os sistemas lineares provenientes da discretização de problemas de contorno envolvendo equações diferenciais. Sendo assim, no contexto de sistemas lineares, tanto os métodos diretos quanto os iterativos têm as suas vantagens, tudo depende das características do problema a ser investigado.

Nesse curso, estudaremos dois tipos de métodos iterativos: o método de Gauss-Jacobi e o método de Gauss-Seidel.

### Método de Gauss-Jacobi (GJ)

Considere o sistema linear  $Ax = b$ , ou ainda,  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Considere, ainda, que  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , então podemos reescrever o sistema linear na forma:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right], i = 1, 2, \dots, n; \text{ ou ainda,}$$

$$\begin{cases} x_1 &= (1/a_{11}) & [ & b_1 & - & a_{12}x_2 & - & a_{13}x_3 & - & \dots & - & a_{1n}x_n & ] \\ x_2 &= (1/a_{22}) & [ & b_2 & - & a_{21}x_1 & - & a_{23}x_3 & - & \dots & - & a_{2n}x_n & ] \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ x_{(n-1)} &= (1/a_{(n-1)(n-1)}) & [ & b_{(n-1)} & - & a_{(n-1)1}x_1 & - & a_{(n-1)2}x_2 & - & \dots & - & a_{(n-1)n}x_n & ] \\ x_n &= (1/a_{nn}) & [ & b_n & - & a_{n1}x_1 & - & a_{n2}x_2 & - & \dots & - & a_{n(n-1)}x_{(n-1)} & ] \end{cases} \quad (1)$$

O método de  $GJ$  utiliza essa forma de representação sistêmica para propor um processo iterativo em que dada uma solução inicial,  $x^{(0)} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ , e considerando  $k = 1, 2, \dots$ , podemos gerar uma sequência de aproximações na qual, a cada passo  $k$  do processo iterativo, atualizamos as componentes  $x_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , da solução aproximada do sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} &= (1/a_{11}) & [ & b_1 & - & a_{12}x_2^{(k-1)} & - & a_{13}x_3^{(k-1)} & - & \dots & - & a_{1n}x_n^{(k-1)} & ] \\ x_2^{(k)} &= (1/a_{22}) & [ & b_2 & - & a_{21}x_1^{(k-1)} & - & a_{23}x_3^{(k-1)} & - & \dots & - & a_{2n}x_n^{(k-1)} & ] \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ x_{(n-1)}^{(k)} &= (1/a_{(n-1)(n-1)}) & [ & b_{(n-1)} & - & a_{(n-1)1}x_1^{(k-1)} & - & a_{(n-1)2}x_2^{(k-1)} & - & \dots & - & a_{(n-1)n}x_n^{(k-1)} & ] \\ x_n^{(k)} &= (1/a_{nn}) & [ & b_n & - & a_{n1}x_1^{(k-1)} & - & a_{n2}x_2^{(k-1)} & - & \dots & - & a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k-1)} & ] \end{cases} \quad (2)$$

assim,

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right], i = 1, 2, \dots, n \text{ e } k = 1, 2, \dots$$

Note que, se após um número finito de passos tenhamos  $x^{(k)} \approx x^{(k-1)}$ , então a forma iterativa 2 do sistema se tornará a forma 1. Como qualquer vetor que satisfaz o conjunto de equações 1 também satisfaz o sistema original  $Ax = b$ , temos que  $x^{(k)}$  será a solução procurada.

### Aplicação de $GJ$

Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método de  $GJ$ , com  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ , realizando 3 iterações do método.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 7 & - & 2x_2^{(k-1)} & - & 1x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} \\ x_2^{(k)} &= (1/5) \begin{bmatrix} (-8) & - & 1x_1^{(k-1)} & - & 1x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} \\ x_3^{(k)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 6 & - & 2x_1^{(k-1)} & - & 3x_2^{(k-1)} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Primeiro passo ( $k = 1$ ), objetivo: determinar  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^t$  com  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 7 & - & 2(0) & - & 1(0) \end{bmatrix} = 0.7000 \\ x_2^{(1)} &= (1/5) \begin{bmatrix} (-8) & - & 1(0) & - & 1(0) \end{bmatrix} = -1.6000 \\ x_3^{(1)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 6 & - & 2(0) & - & 3(0) \end{bmatrix} = 0.6000 \end{cases}$$

Segundo passo ( $k = 2$ ), objetivo: determinar  $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^t$  com  $x^{(1)} = (0.7000, -1.6000, 0.6000)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 7 & - & 2(-1.6000) & - & 1(0.6000) \end{bmatrix} = 0.9600 \\ x_2^{(2)} &= (1/5) \begin{bmatrix} (-8) & - & 1(0.7000) & - & 1(0.6000) \end{bmatrix} = -1.8600 \\ x_3^{(2)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 6 & - & 2(0.7000) & - & 3(-1.6000) \end{bmatrix} = 0.9400 \end{cases}$$

Terceiro passo ( $k = 3$ ), objetivo: determinar  $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})^t$  com  $x^{(2)} = (0.9600, -1.8600, 0.9400)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 7 & - & 2(-1.8600) & - & 1(0.9400) \end{bmatrix} = 0.9780 \\ x_2^{(3)} &= (1/5) \begin{bmatrix} (-8) & - & 1(0.9600) & - & 1(0.9400) \end{bmatrix} = -1.9800 \\ x_3^{(3)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 6 & - & 2(0.9600) & - & 3(-1.8600) \end{bmatrix} = 0.9660 \end{cases}$$

Portanto, a solução aproximada do sistema após 3 iteração do método de  $GJ$  é  $x^{(3)} = (0.9780, -1.9800, 0.9660)^t$ .  $x^{(3)}$  aproxima a solução do sistema linear,  $x = (1, -2, 1)^t$

### Método de Gauss-Seidel ( $GS$ )

O método de GS é um **melhoramento do método de GJ** no sentido de **convergir em menos passos** do processo iterativo para a solução de um sistema linear. No processo iterativo de GS, ao calcular a componente  $x_i^{(k)}$ , utilizamos todas as componentes  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ , já calculadas e as componentes  $x_{i+1}^{(k-1)}, x_{i+2}^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}$ , do passo anterior, ou seja, utilizamos componentes já atualizadas para calcular parte das componentes ainda não atualizadas e ainda desconhecidas.

Considere o sistema linear  $Ax = b$ , ou ainda,  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Considere, ainda, que  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , então o método de GS é representado por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1^{(k)} & = & (1/a_{11}) \quad [ \quad b_1 \quad - \quad a_{12}x_2^{(k-1)} \quad - \quad a_{13}x_3^{(k-1)} \quad - \quad \dots \quad - \quad a_{1n}x_n^{(k-1)} \quad ] \\ x_2^{(k)} & = & (1/a_{22}) \quad [ \quad b_2 \quad - \quad a_{21}x_1^{(k)} \quad - \quad a_{23}x_3^{(k-1)} \quad - \quad \dots \quad - \quad a_{2n}x_n^{(k-1)} \quad ] \\ \vdots & & \\ x_{(n-1)}^{(k)} & = & (1/a_{(n-1)(n-1)}) \quad [ \quad b_{(n-1)} \quad - \quad a_{(n-1)1}x_1^{(k)} \quad - \quad a_{(n-1)2}x_2^{(k)} \quad - \quad \dots \quad - \quad a_{(n-1)n}x_n^{(k-1)} \quad ] \\ x_n^{(k)} & = & (1/a_{nn}) \quad [ \quad b_n \quad - \quad a_{n1}x_1^{(k)} \quad - \quad a_{n2}x_2^{(k)} \quad - \quad \dots \quad - \quad a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k)} \quad ] \end{array} \right.$$

assim,

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$k = 1, 2, \dots$$

OBS: Temos que, para  $x_1^{(k)}$ , o termo  $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)}$  inexistente e para  $x_n^{(k)}$ , o termo  $\sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)}$  inexistente.

### Aplicação de GS

Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método de GS, com  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$  e 3 iterações do método.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6 \end{array} \right.$$

Solução:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1^{(k)} & = & (1/10) \quad [ \quad 7 \quad - \quad 2x_2^{(k-1)} \quad - \quad 1x_3^{(k-1)} \quad ] \\ x_2^{(k)} & = & (1/5) \quad [ \quad (-8) \quad - \quad 1x_1^{(k)} \quad - \quad 1x_3^{(k-1)} \quad ] \\ x_3^{(k)} & = & (1/10) \quad [ \quad 6 \quad - \quad 2x_1^{(k)} \quad - \quad 3x_2^{(k)} \quad ] \end{array} \right.$$

Primeiro passo ( $k = 1$ ), objetivo: determinar  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^t$  com  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1^{(1)} & = & (1/10) \quad [ \quad 7 \quad - \quad 2(0) \quad - \quad 1(0) \quad ] \quad = \quad 0.7000 \\ x_2^{(1)} & = & (1/5) \quad [ \quad (-8) \quad - \quad 1(0.7000) \quad - \quad 1(0) \quad ] \quad = \quad -1.7400 \\ x_3^{(1)} & = & (1/10) \quad [ \quad 6 \quad - \quad 2(0.7000) \quad - \quad 3(-1.7400) \quad ] \quad = \quad 0.9820 \end{array} \right.$$

Segundo passo ( $k = 2$ ), objetivo: determinar  $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^t$  com  $x^{(1)} = (0.7000, -1.7400, 0.9820)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 7 & - & 2(-1.7400) & - & 1(0.9820) \end{bmatrix} = 0.9498 \\ x_2^{(2)} &= (1/5) \begin{bmatrix} (-8) & - & 1(0.9498) & - & 1(0.9820) \end{bmatrix} = -1.9864 \\ x_3^{(2)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 6 & - & 2(0.9498) & - & 3(-1.9864) \end{bmatrix} = 1.0060 \end{cases}$$

Terceiro passo ( $k = 3$ ), objetivo: determinar  $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})^t$  com  $x^{(2)} = (0.9498, -1.9864, 1.0060)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 7 & - & 2(-1.9864) & - & 1(1.0060) \end{bmatrix} = 0.9967 \\ x_2^{(3)} &= (1/5) \begin{bmatrix} (-8) & - & 1(0.9967) & - & 1(1.0060) \end{bmatrix} = -2.0005 \\ x_3^{(3)} &= (1/10) \begin{bmatrix} 6 & - & 2(0.9967) & - & 3(-2.0005) \end{bmatrix} = 1.0008 \end{cases}$$

Portanto, a solução aproximada do sistema após 3 iteração do método de  $GS$  é  $x^{(3)} = (0.9967, -2.0005, 1.0008)^t$ .  $x^{(3)}$  aproxima a solução do sistema linear,  $x = (1, -2, 1)^t$

OBS: Verifique que  $x^{(5)} = (1.0000, -2.0000, 1.0000)^t$

## Critérios de Parada

Existem duas formas de **determinar o fim dos métodos iterativos**:

- **Pelo número máximo de iterações**: neste critério, após um certo número de iterações **pré-definido** o processo iterativo é finalizado;
- **Por precisão**: o processo iterativo é repetido até que a solução  $x^{(k)}$  esteja suficientemente próxima da solução  $x^{(k-1)}$ . Para tal, defina

$$d^{(k)} = \max\{|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Assim, dada uma precisão  $\epsilon > 0$ , a solução  $x^{(k)}$  será escolhida como a solução aproximada,  $\bar{x}$ , da solução do sistema,  $x$ , se  $d^{(k)} \leq \epsilon$ . Esse critério, na prática, utiliza a função máximo para verificar se a distância entre cada componente atualizada e cada componente da iteração passada é tão pequena quanto se queira.

No exemplo anterior, considerando que  $x^{(2)} = (0.9498, -1.9864, 1.0060)^t$  e  $x^{(3)} = (0.9967, -2.0005, 1.0008)^t$  e  $\epsilon = 0.1$ , temos:  $d^{(3)} = \max\{|0.9967 - 0.9498|, |-2.0005 - (-1.9864)|, |1.0008 - 1.0060|\} = 0.0469 < \epsilon$ .

Podemos, também, definir o erro relativo associado como:  $E_{Rel.} = \frac{d^{(k)}}{\max\{|x_i^{(k)}|\}}, i = 1, 2, \dots, n.$

Considerando  $x^{(2)} = (0.9498, -1.9864, 1.0060)^t$  e  $x^{(3)} = (0.9967, -2.0005, 1.0008)^t$ , temos que:

$$E_{Rel.} = \frac{d^{(3)}}{\max\{|0.9967|, |-2.0005|, |1.0008|\}} = \frac{0.0469}{2.0005} = 2.34\%$$

## Critérios de Convergência

Dependendo da escolha da escolha inicial,  $x^0$ , os métodos iterativos **podem não convergir** para a solução de um sistema linear. Por exemplo, dado um sistema linear  $Ax = b$ , cuja solução seja  $x = (1, 1, 1)^t$ , para a mesma matriz  $A$ , um método iterativo partindo de  $x^0 = (0.9, 0.9, 0.9)^t$  poderia chegar à solução aproximada do sistema, porém, caso a aproximação inicial fosse  $x^0 = (1000, 1000, 1000)^t$ , o método poderia não encontrar a solução do sistema, provavelmente devido ao fato dela estar muito longe da solução real.

Quando o **número de incógnitas de um sistema é muito grande**, é praticamente impossível conhecermos de antemão uma boa aproximação inicial,  $x^0$ , para assim aplicarmos um método iterativo. Sendo assim, **é interessante a existência de um teste** que garanta a convergência para a solução do sistema independentemente da escolha do valor de  $x^0$ . Em geral, esses critérios estão diretamente relacionados com os **autovalores da matriz de coeficientes  $A$** . Nesse texto, vamos apresentar **dois testes distintos** que sempre garantem a convergência dos métodos iterativos apresentados nesse texto: o **critério das linhas** e o critério de **Sassenfeld**.

### Critérios das linhas

Considere o sistema linear  $Ax = b$  e seja  $\alpha_i = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se  $\alpha = \max\{\alpha_i\} < 1$ , então os métodos iterativos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel geram uma sequência  $\{x^{(k)}\}$  convergente para a solução do sistema linear, independente da escolha da estimativa inicial,  $x^{(0)}$ .

Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases},$$

temos:

$$\alpha_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|2| + |1|}{|10|} = \frac{2 + 1}{10} = 0.3,$$

$$\alpha_2 = \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{|1| + |1|}{|5|} = \frac{1 + 1}{5} = 0.4,$$

$$\alpha_3 = \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{|2| + |3|}{|10|} = \frac{2 + 3}{10} = 0.5,$$

então  $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 0.5 < 1$  e, pelo Critério das Linhas ( $CL$ ), ambos os métodos iterativos estudados iram convergir independentemente da escolha de  $x^0$ .

OBS: O critério das linhas é equivalente a **testar se a matriz  $A$  é diagonal dominante**, ou seja, verificar se, **para cada linha**, a entrada correspondente ao **elemento da diagonal, em módulo, é maior que a soma do módulo de cada um dos demais termos**.

### Critérios de Sassenfeld (CS)

Considere o sistema linear  $Ax = b$  e sejam  $\beta_1 = \frac{\sum_{j=2}^n |a_{1j}|}{|a_{11}|}$  e  $\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

Se  $\beta = \max\{\beta_i\} < 1$ , então o método iterativo de Gauss-Seidel gera uma sequência  $\{x^{(k)}\}$  convergente para a solução do sistema linear, independente da escolha da estimativa inicial,  $x^{(0)}$ .

OBS: Temos que  $\sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|$  inexistente para  $i = n$ .

Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases},$$

temos,:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|2| + |1|}{|10|} = \frac{2 + 1}{10} = 0.3,$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 |a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{0.3|1| + |1|}{|5|} = \frac{0.3 + 1}{5} = 0.26,$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 |a_{31}| + \beta_2 |a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{0.3|2| + 0.26|3|}{|10|} = \frac{0.6 + 0.78}{10} = 0.14,$$

então  $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 0.3 < 1$  e, pelo Critério de Sassenfeld (CS), o método iterativo de Gauss-Seidel converge independente da escolha de  $x^{(0)}$ .

OBS: O critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não o seja.

### Aplicação

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases},$$

temos que:

$$\alpha_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|0| + |1|}{|3|} = \frac{0 + 1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_2 = \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{|1| + |0|}{|-1|} = \frac{1+0}{1} = 1, \text{ então o } CL \text{ não é satisfeito.}$$

Por outro lado, utilizando o  $CS$ :

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|0| + |1|}{|3|} = \frac{0+1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{\frac{1}{3}|1| + |0|}{|-1|} = \frac{\frac{1}{3}+0}{1} = \frac{1}{3},$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1|a_{31}| + \beta_2|a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{\frac{1}{3}|3| + \frac{1}{3}|1|}{|2|} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

então  $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \frac{2}{3} < 1$  e o método iterativo de Gauss-Seidel converge independentemente da escolha de  $x^{(0)}$ .