Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-RJ
Aula de Cálculo Numérico
Noções de Erros
Professor da Disciplina: **Wagner Pimentel & Pedro Villela**

Erros são sempre inerentes à aplicação de métodos numéricos na solução de problemas do mundo real, e principalmente, na solução de problemas de natureza numérica. Por exemplo, os erros estão presentes na aproximação de funções pela aplicação de série de Taylor, na solução de sistemas lineares pela aplicação do método de Gauss, na aproximação da integral definida de uma função pela aplicação do método de Simpson, etc.

Um problema real, ou de natureza numérica, será sempre solucionado pela aplicação de um processo metódico que compreende das seguintes fases:

Os resultados obtidos da aplicação de um método numérico e os erros associados dependem de vários fatores, tais como:

- Da precisão dos dados de entrada;
- Da forma com que esses dados estão representados na máquina ou no computador; e
- Da maneira como são efetuadas as operações numéricas.

Considerando os dois últimos itens associados à representação de uma grandeza em um computador. Por limitação dos sistemas de representação numérica, por vezes ocorrerão dois tipos de aproximações numéricas: aproximação por arrendondamento e aproximação por truncamento. Trataremos desses conceitos mais adiante.

Um sistema de representação numérica está sempre associado a sua base, β, de representação. São exemplos de sistemas de reprentação numérica: o sistema binário, o sistema decimal, o sistema hexadecimal, com suas respectivas bases 2, 10 e 16.

Uma grandeza real estará na forma ponto flutuante ou normalizada neste sistema se ela estiver representada da seguinte maneira:

- $(0.d_1d_2\dots d_t)\text{x}\beta^e$, onde:
- β é a base em que a máquina opera;
- t é o número de dígitos significativos ou o número de dígitos da mantissa;
- $0 \leq d_k \leq (\beta - 1)$, $k = 1, \dots, t$, e $d_1 \neq 0$;
- e é o expoente.

OBS: Chamamos de mantissa a parte do ponto flutuante que contém os dígitos significantes.

Por exemplo, considere o seguinte sistema de representação numérica: $(10, 5, -3, 3)$. Podemos constatar que, nesse caso, ele é decimal, com 5 dígitos na mantissa e expoente variando entre -3 e 3. Assim, o menor valor representado neste sistema seria $0.10000\text{x}10^{-3} = 10^{-4}$ e o maior valor seria $0.99999\text{x}10^{3} = 999.99$.

Uma grandeza representada em ponto flutuante estará aproximada por truncamento com t digitos significativos se desprezar d_i para $i > t$, por exemplo $(0.d_1d_2 \ldots d_t)\text{x}\beta^e$. Por outro lado, uma grandeza estará aproximada por arredondamento com t dígitos significativos se desprezar d_i para $i > t$, tendo $d_{t+1} < \beta/2$ e se desprezar d_i para $i > t$, fazendo $d_t = d_t + 1$, tendo $d_{t+1} \geq \beta/2$.

Poderímos representar $\sqrt{3}$ no sistema de representação numérica $(10, 5, -3, 3)$. Sendo assim, por arredondamento teríamos o valor $1.7320508076 = 0.17320508076\text{x}10^1 \approx 0.17321\text{x}10^1 = 1.7321$ e teríamos 1.7320 por truncamento. Por curiosidade fazendo a operação (1.7321)x(1.7321) teríamos como resultado o valor 3.0002 que difere de 3, $(\sqrt{3})^2 = 3$.

No sentido de estimar o erro cometido na aplicação de um método numérico podemos considerar duas métricas comuns: erro absoluto ($E_{Abs.}$) e o erro relativo ($E_{Rel.}$).

Sejam, x o valor exato da aplicação de um método numérico e $\bar{x}$ o valor aproximado da aplicação do referido método, assim:

O erro absoluto é dado por: $E_{Abs.} = |x - \bar{x}|$ e;

O erro relativo é dado por: $E_{Rel.} = \dfrac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \dfrac{E_{Abs.}}{|x|}$.

Considere a tabela abaixo, nela podemos verificar que o erro relativo pode ser utilizado como uma métrica para comparar à aplicação de três métodos numéricos diferentes, representados pelas linhas da tabela, associados a instâncias distintas. A conclusão é que os três métodos apresentam diferentes erros absolutos, porém o mesmo erro relativo. Desta forma é possível perceber que o erro percentual relativo independe da magnitude das grandezas associadas e nos dá um valor em percentual do erro.

Método	x	$\bar{x}$	$E_{Abs.}$	$E_{Rel.}$
1	0,0003	0,00031	0,00001	0,033333
2	3	3,1	0,1	0,033333
3	3000	3100	100	0,033333

Resultado: seja $\bar{x}$ uma aproximação de x. Se $E_{Rel.} = \dfrac{|x - \bar{x}|}{|x|} < 5 \text{ x } 10^{-k}$. Então $\bar{x}$ possui k algarismos significativos em relação a x.

Assim, o erro relativo entre 3 e 3.1, na tabela acima, é 0.03333 ¡ $0.05 = 5\text{x}10^{-2}$, logo 3.1 possui 2 dígitos significativos de 3. De fato, $3 = 0.3\text{x}10^1$ e $3.1 = 0.31\text{x}10^1$.

Aplicação 1:

Considerando tanto o critério de arredondamento quanto o de truncamento, calcule o erro relativo e o erro absoluto referente ao cálculo da área de um quadrado de lado $l = 29.59\,cm$ utilizando o sistema $(10, 3, -3, 3)$. O que podemos concluir nesse caso?

Resposta:

- A área real do quadrado será $A = l^2 = (29.59)^2 = 875.5681\,cm^2$
- Para o arredondamento, temos $l = 29.6\,cm$, donde $A = l^2 = (29.6)^2 = 876.16\,cm^2 \approx 876\,cm^2$. Nesse caso, temos $E_{Abs.} = |875.5681 - 876| = 0.4319\,cm^2$ e $E_{Rel.} = \dfrac{|875.5681 - 876|}{|875.5681|} \approx 0,05\%$.
- Já no caso do truncamento, $l = 29.5\,cm$ e $A = l^2 = (29.5)^2 = 870.25\,cm^2 \approx 870\,cm^2$. Assim, $E_{Abs.} = |875.5681 - 870| = 5.5681\,cm^2$ e $E_{Rel.} = \dfrac{5.5681}{|875.5681|} \approx 0.64\%$.

Podemos ver que a diferença entre o erro relativo calculado através dos dois critérios aumenta significativamente quando a grandeza a ser calculada envolve a multiplicação de duas incertezas.