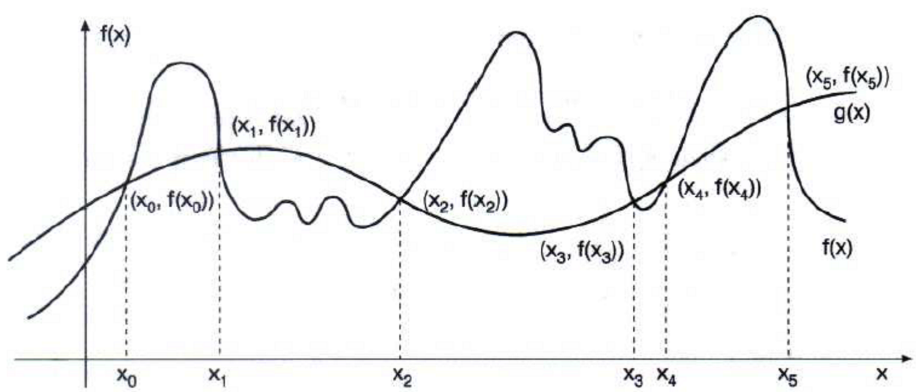
Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-RJ
Nona Aula de Cálculo Numérico
Interpolação
Professor da Disciplina
Wagner Pimentel & Pedro Villela

Interpolação

Nesta seção, estudaremos métodos que permitem encontrar uma aproximação para uma função $f = f(x)$ a partir de alguns pontos já conhecidos, pelos quais ela passa, medidos em geral, de forma experimental. Dessa forma, considere que em um intervalo I, o conjunto de pontos $(x_i, f(x_i))$, $x_{i+1} > x_i$, $i = 0, 1, 2, ...n$ e seja $g = g(x)$ a função que aproxima f nesse mesmo intervalo I. Se para um conjunto de pontos x_i com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $g(x_i) = f(x_i)$, então dizemos que g interpola a função f nos valores $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.



O principal uso de interpolação está na:

- possibilidade de modelar através de uma função, $g(x)$, um conjunto de dados tabelados obtidos de um experimento científico, no sentido de reproduzir tal experimento com $g(x)$;
- prever o valor de f em pontos do domínio, x, que estão no intervalo I, mas não fazem parte dos dados experimentais pré-tabelados.;
- na possibilidade de desenvolver uma função, $g(x)$, que substitua outra, $f(x)$, desde que a última seja de difícil manipulação com respeito a diferenciação e integração numérica.

Se $g(x)$ pertencer a classe das funções polinomiais, a interpolação é dita interpolação polinomial.

Interpolação Polinomial

Considere $(n+1)$ pontos suportes $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, associados à uma função $f(x)$ e considere um polinômio $P(x)$, de grau menor ou igual a n, que interpole $f(x)$ nesses pontos. Então $P(x_i) = f(x_i)$, para todo x_i ponto suporte, e mais:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Note que para interpolar $n+1$ pontos, precisamos encontrar os $n+1$ coeficientes de um polinômio de grau n, ou seja, o grau do polinômio interpolador será sempre menor, em pelo menos uma unidade, que o número de pontos disponível.

Como $P(x_i) = f(x_i)$, para todo ponto suporte, surge uma pergunta: como determinar $P(x)$, ou melhor, como determinar os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $P(x)$? Caso seja sempre possível encontrar esse polinômio, podemos garantir que o mesmo seja único?

Dado que $P(x_i) = f(x_i)$, então podemos representar as $(n+1)$ equações que associam $P(x)$ à $f(x)$ da seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{c} P(x_0) = f(x_0) \\ P(x_1) = f(x_1) \\ P(x_2) = f(x_2) \\ \vdots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & + & a_1 x_0 & + & a_2 x_0^2 & + & \ldots & + & a_n x_0^n & = & f(x_0) \\ a_0 & + & a_1 x_1 & + & a_2 x_1^2 & + & \ldots & + & a_n x_1^n & = & f(x_1) \\ a_0 & + & a_1 x_2 & + & a_2 x_2^2 & + & \ldots & + & a_n x_2^n & = & f(x_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ a_0 & + & a_1 x_n & + & a_2 x_n^2 & + & \ldots & + & a_n x_n^n & = & f(x_n) \end{array}\right. ,$$

podemos, também, representar este sistema de equações na forma matricial, $(Ax = b)$, como:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

A matriz de coeficientes desse sistema é conhecida como a matriz de Vandermonde. Pode-se mostrar que o determinante dessa matriz é sempre diferente de zero, logo qualquer sistema linear que tenha essa matriz como a matriz de coeficientes sempre terá solução única.

Dessa forma, a solução desse sistema, $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$, existirá e sempre será única, correspondendo aos coeficientes do polinômio interpolador $P(x)$ de grau menor ou igual a n.

Portanto, voltando ao questionamento inicial, podemos afirmar que o polinômio interpolador sempre existirá e será único.

Aplicação 1:

Determine o polinômio interpolador que interpola a função $f(x)$ nos pontos: $(-1,4)$, $(0,1)$ e $(2,-1)$. Sabendo que $f(1) = -\frac{1}{2}$, calcule o erro relativo ao aproximar o valor de $f(1)$ pelo polinômio interpolador.

Solução: Temos que determinar a_0, a_1 e a_2 coeficientes do polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Assim, devemos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Considere a matriz aumentada do sistema:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & 4 & | & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 3 & 3 & | & -5 \end{bmatrix} \equiv$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & 3 & | & -5 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & 3 & | & -5 \\ 0 & 0 & -2 & | & \frac{-4}{3} \end{bmatrix},$$

$a_2 = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{-7}{3}$ e $a_0 = 1$

$x = (1, \frac{-7}{3}, \frac{2}{3})^T$

Logo $P(-1) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$

Em $x = 1$, temos $P(1) = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$. Logo, o erro relativo cometido será de:

$$E_{rel} = \frac{|f(1) - P(1)|}{|f(1)|} = \frac{|\frac{-1}{2} - (-\frac{2}{3})|}{|\frac{-1}{2}|} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = 0.3333 = 33.33\%$$

Aplicação 2:

Mostre que o polinômio interpolador que passa pelos pontos: $(1,5)$, $(2,16)$, $(5,157)$ e $(7,401)$ é $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$.

OBS:

- No caso de um experimento científico, geralmente, uma maior quantidade de número de pontos experimentais medidos proporciona a criação de um melhor modelo de predição. Equivalentemente, no caso da interpolação polinomial, uma maior quantidade de pontos tabelados irá gerar, possivelmente, um polinômio de maior grau. É fácil ver, graficamente, que o polinômio interpolador $P(x)$ melhor se ajusta à curva $f(x)$ conforme o seu grau aumenta;

- Note que, caso o valor de um ou mais pontos do domínio seja fracionário e o número de pontos tabelados seja grande, o que é esperado na prática, o sistema linear correspondente à interpolção terá como coeficientes diversos números fracionários elevados à grandes potências. Essa situação pode levar a uma solução desastrosa, cheia de erros de arredondamento. Para evitar esse problema, costuma-se determinar o polinômio interpolador por meio de formas alternativas. Nesse texto, vamos estudar duas delas: a forma de Lagrange e a forma de Newton para polinômio interpolador.

Forma de Lagrange para Interpolação Polinomial

Considere $(n+1)$ pontos suportes $(x_i, y_i = f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, associados à uma função $f(x)$ e considere um polinômio $P(x)$, de grau $\leq n$, que interpole $f(x)$ nesses pontos. Assim, a forma de Lagrange para polinômio interpolador é dada por:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots + y_n L_n(x),$$

onde $L_j(x)$, são polinômios de grau n. Note que, nesse caso, estamos escrevendo um polinômio de grau n como uma combinação linear de outros polinômios de grau n, cujos coeficientes da combinação são os valores de f nos pontos suportes.

Como $P(x_i) = y_i$, para todo x_i ponto suporte, temos que:

$$P(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + y_2 L_2(x_i) + \cdots + y_i L_i(x_i) + \cdots + y_n L_n(x_i) = y_i, \text{ para } i = 0, 1, 2, ..., n.$$

Portanto, para garantir essas condições, temos que ter:

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0, & se \quad i \neq j \\ 1, & se \quad i = j \end{cases}$$

Defina $L_j(x)$ como o j_ésimo polinômio de Lagrange de grau n, da forma:

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_j - x_1)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_j - x_n)},$$

assim, é fácil mostrar que $L_j(x_j) = 1$ e que $L_j(x_i) = 0$, se $i \neq j$.

Portanto, $P(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots + y_n L_n(x)$

Aplicação 1:

Determine o polinômio interpolador de Lagrange que passe pelos pontos: $(-1, 4)$, $(0, 1)$ e $(2, -1)$.

Solução: Temos que,

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)}{(-1 - 0)} \frac{(x - 2)}{(-1 - 2)} = \frac{x(x - 2)}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))}{(0-(-1)}\frac{(x-2)}{(0-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{-2}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)}\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-1))}{(2-(-1)}\frac{(x-0)}{(2-0)} = \frac{x(x+1)}{6}$$

Assim, na forma de Lagrange,

$$P(x) = 4\frac{x(x-2)}{3} + 1\frac{(x+1)(x-2)}{-2} + (-1)\frac{x(x+1)}{6}, \text{ ou}$$

$$P(x) = \frac{4}{3}(x(x-2)) - \frac{1}{2}((x+1)(x-2)) - \frac{1}{6}(x(x+1)) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

Aplicação 2:

Determine o polinômio interpolador de Lagrange que passa pelos pontos: $(1,5)$, $(2,16)$, $(5,157)$ e $(7,401)$.

Forma de Newton para Interpolação Polinomial

Considere $(n+1)$ pontos suportes $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, associados à uma função $f(x)$ e considere um polinômio $P(x)$, de grau $\leq n$, que interpole $f(x)$ nesses pontos. Assim, a forma de Newton para polinômio interpolador é dada por:

$P(x) = \Delta^0 f_0 + \sum_{j=1}^{n} \Delta^j f_0 \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$, onde $\Delta^n f_0$ é o operador diferença dividida de ordem n em $f(x_0)$. Esse conceito será explicado de forma detalhada mais adiante. Assim,

$$P(x) = \Delta^0 f_0 + \Delta^1 f_0(x - x_0) + \Delta^2 f_0(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \Delta^n f_0(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Operador Diferença Dividida

Sejam $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$. Então $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), \ldots, f_n = f(x_n)$.

Os operadores diferença dividida em x_0 serão da forma:

$$\Delta^0 f_0 = \Delta^0 f(x_0) = f[x_0] = f(x_0)$$
$$\Delta^1 f_0 = \Delta^1 f(x_0) = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$
$$\Delta^2 f_0 = \Delta^2 f(x_0) = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$
$$\vdots$$
$$\Delta^n f_0 = \Delta^n f(x_0) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

sendo que, de uma maneira geral:

$$\Delta^j f_i = \Delta^j f(x_i) = f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{(i+j)-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

Portanto, podemos construir a tabela de diferença dividida associada aos operadores:

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\ldots$	$\Delta^n f(x_i)$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	$\ldots$	
		$f[x_1, x_2]$	$\ldots$		$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
x_2	$f[x_2]$	$\ldots$			
$\ldots$	$\ldots$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Aplicação 1:

Determine o polinômio interpolador que passe pelos pontos: $(-1,4)$, $(0,1)$ e $(2,-1)$.

Solução: Temos que a tabela de diferença dividida é dada por:

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
$x_0=-1$	$f(x_0)=4$		
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{1-4}{0-(-1)}=\dfrac{-3}{1}=-3$	
$x_1=0$	$f(x_1)=1$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{-1-(-3)}{2-(-1)}=\dfrac{2}{3}$
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{-1-1}{2-0}=\dfrac{-2}{2}=-1$	
$x_2=2$	$f(x_2)=-1$		

Assim, na forma de Newton,

$P(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$, ou

$P(x)=4+(-3)(x-(-1))+\dfrac{2}{3}(x-(-1))(x-0)$, ou

$P(x)=4-3(x+1)+\dfrac{2}{3}x(x+1)$, ou

$P(x)=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{7}{3}x+1$

É fácil mostrar que:

$P(-1)=4$, $P(0)=1$ e $P(2)=-1$

Uma vantagem da forma de Newton:

A principal vantagem da forma de Newton para o cálculo do polinômio interpolador, em relação às demais apresentadas nesse texto, aparece quando queremos adicionar um ou mais dados novos a um conjunto de dados já interpolados, para assim realizar uma nova interpolção polinomial. Nessa situação, a forma de newton consegue aproveitar o polinômio interpolador já calculado, com menos dados, para gerar o novo polinômio interpolador, que incorpora os novos dados.

Sem perda de generalidade, suponha que, inicialmente, encontramos o polinômio interpolador, $P_n(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos $(x_i, f(x_i))$, $x_{i+1}>x_i$, $i=0,1,2,...n$. Assim,

$$P_n(x)=\Delta^0 f_0+\Delta^1 f_0(x-x_0)+\Delta^2 f_0(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+\Delta^n f_0(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Ainda, suponha que queremos adicionar um novo ponto $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ ao conjunto de dados tabelados de modo que, agora, temos como objetivo determinar o polinômio interpolador, $P_{n+1}(x)$, que interpola $f(x)$ em $(x_i, f(x_i))$, $x_{i+1} > x_i$, $i = 0, 1, 2, ...n+1$, ou seja, em $n+2$ pontos. É fácil ver que:

$P_{n+1}(x) = \Delta^0 f_0 + \Delta^1 f_0(x-x_0) + \Delta^2 f_0(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \Delta^n f_0(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) + \Delta^{n+1} f_0(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)$.

$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \Delta^{n+1} f_0(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)$.

Dessa forma, para calcular $P_{n+1}(x)$ precisaríamos apenas do operados de diferençãs divididas $\Delta^{n+1} f_0$, pois todos os outros já foram cálculados e estão incorporados em $P_n(x)$.

Aplicação 2:

Determine o polinômio interpolador que passe pelos pontos: $(-1, 4)$, $(0, 1)$ e $(2, -1)$ e $(3, -3)$.

Solução: Nesse caso, como temos 4 pontos, o polinômio interpolador será de grau 3, e, como os 3 primeiros pontos são iguais, podemos aproveitar o polinômio interpolador já calculado nas seções anteriors. Sendo assim, vamos calcular $\Delta^3 f_0$ aproveitando a tabela do exemplo anterior:

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
$x_0 = -1$	$f(x_0) = \mathbf{4}$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{1-4}{0-(-1)} = \frac{-3}{1} = \mathbf{-3}$		
$x_1 = 0$	$f(x_1) = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \mathbf{\frac{2}{3}}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{-1-1}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \mathbf{\frac{-1}{4}}$
$x_2 = 2$	$f(x_2) = -1$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-1}{3}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{-3-(-1)}{3-2} = -2$		
$x_3 = 3$	$f(x_3) = -3$			

Assim, na forma de Newton,

$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$P_3(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$P_3(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1 + \frac{-1}{4}(x+1)(x)(x-2)$

$P_3(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1 + \frac{-1}{4}(x^3 - x^2 - 2x) = \frac{-3}{12}x^3 + \frac{11}{12}x^2 - \frac{22}{12}x + \frac{12}{12}$

É simples mostrar que $P(x)$ passa por todos os pontos considerados.

Aplicação 3:

Mostre que o polinômio interpolador que passa pelos pontos: $(1, 5)$, $(2, 16)$, $(5, 157)$ e $(7, 401)$ é $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, utilizando a forma de Newton.