

# **Über die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen**

Robert Hartmann

24. September 2010

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>allgemeine Eigenschaften</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Eigenschaften bei speziellen Sprachen</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>spezielle Sprachen</b>	<b>7</b>
4.1	Regularität . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Quellen und Literatur</b>	<b>8</b>

## 1 Einleitung

## 2 allgemeine Eigenschaften

$$u \in L \rightarrow u \in (u \triangleright L)$$

$$u \in L \rightarrow (u \triangleright L = \{u\})$$

$$L \triangleright L = L$$

$$U \triangleright L \subseteq L$$

$$L \triangleright (U \cup V) \not\subseteq (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cup V) \subseteq (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cap V) \not\subseteq (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cap V) \supseteq (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \not\subseteq (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \not\subseteq (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 \not\subseteq L_1 \triangleright (L_2 \triangleright L_3)$$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 \subseteq^? L_1 \triangleright (L_2 \triangleright L_3)$$

$$L_1 \subseteq L_2 \rightarrow L_1 \triangleright L_2 = L_1$$

$$L_2 \subseteq L_1 \rightarrow L_1 \triangleright L_2 = L_2$$

$$L \triangleright L \cdot X^* = L$$

$$L \cdot X^* \triangleright X^* = L \cdot X^*$$

$$L \cdot X^* \triangleright L = L$$

$$L \triangleright (U \cup V) \not\supseteq (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V),$$

$$\text{Gegenbeispiel: } L = \{a\} \quad A = \{abb, aaba\} \quad B = \{aab, aba\}$$

$$L \triangleright (A \cup B) = \{abb, aba, aab\}, \text{ aber } L \triangleright A \cup L \triangleright B = \{abb, aaba\} \cup \{aab, aba\} = \{abb, aaba, aab, aba\}$$

$$L \triangleright (U \cap V) \not\supseteq (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V),$$

$$\text{Gegenbeispiel: } L = \{a, b\} \quad A = \{a, aa\} \quad B = \{aa, b\}$$

$$L \triangleright (A \cap B) = \{aa\}, \text{ aber } L \triangleright A \cap L \triangleright B = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \not\supseteq (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V),$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \not\supseteq (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V),$$

$$\text{Gegenbeispiel: } A = \{aa\} \quad B = \{b, bb\}$$

$$L \triangleright (A \cdot B) = \{aab\}, \text{ aber } L \triangleright A \cdot L \triangleright B = \{aa\} \cdot \emptyset = \{aa\}$$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 \not\supseteq L_1 \triangleright (L_2 \triangleright L_3)$$

$$\text{Gegenbeispiel: } L_1 = \{ab, aa\} \quad L_2 = \{a, ab\} \quad L_3 = \{aa\}$$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 = \{ab\} \triangleright \{aa\} = \emptyset, \text{ aber } \{ab, aa\} \triangleright \{aa\} = \{aa\}$$

$$\begin{aligned} L \cdot X^* \triangleright X^* &= \bigcup_{u \in L \cdot X^*} u \triangleright X^* = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min_{\sqsubseteq} \{L : L \in X^* \wedge u \sqsubseteq L\} \\ &= \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min(X^* \cap u \cdot X^*) = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min(u) = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} u = L \cdot X^* \end{aligned}$$

$$L \cdot X^* \triangleright L = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} u \triangleright L = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min_{\sqsubseteq} \{L : L \in L \wedge u \sqsubseteq L\} = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min(L \cap u \cdot X^*)$$

$$1. \text{ Fall: } u \in L \Rightarrow L \cap u \cdot X^* = u$$

$$2. \text{ Fall: } u \in L \cdot X^+ \Rightarrow L \cap u \cdot X^* = \emptyset \text{ oder } L \cap u \cdot X^* = u \text{ Lenn } u \in L$$

$$\bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min(u) = L$$

Lemma:  $\min(A \cup B) \subseteq \min A \cup \min B$

$$\begin{aligned}
L \triangleright (W \cup V) &= \bigcup_{l \in L} l \triangleright (W \cup V) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap (W \cup V)) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min((l \cdot X^* \cap W) \cup (l \cdot X^* \cap V)) \\
&\subseteq \bigcup_{l \in L} (\min(l \cdot X^* \cap W) \cup \min(l \cdot X^* \cap V)) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap W) \cup \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap V) \\
&= (L \triangleright W) \cup (L \triangleright V)
\end{aligned}$$

### 3 Eigenschaften bei speziellen Sprachen

$$V = \{v : \forall w (w \in W \rightarrow w \not\sqsubseteq v)\} \quad \text{pref}(V) = \{u : \exists v (u \sqsubseteq v \wedge v \in V)\}$$

$$W \triangleright V = \emptyset$$

$$W \triangleright \text{pref}(V) = \emptyset$$

$$W \cdot X^* \triangleright V = \emptyset$$

$$W \cdot X^* \triangleright \text{pref}(V) = \emptyset$$

$$\text{pref}(V) \triangleright W \cdot X^* =$$

$$W \triangleright V = \bigcup_{x \in W} x \triangleright V = \bigcup_{\sqsubseteq} \min\{v : v \in V \wedge x \sqsubseteq v\}$$

Wegen  $x \in W$  und  $x \sqsubseteq v$  gilt  $\{v : v \in V \wedge x \sqsubseteq v\} = \emptyset \Rightarrow \bigcup \min_{\sqsubseteq} \{v : v \in V \wedge x \sqsubseteq v\} = \emptyset$

$$W \cdot X^* \triangleright V = \bigcup_{x \in W \cdot X^*} x \triangleright V = \bigcup_{x \in W \cdot X^*} \min_{\sqsubseteq} \{v : v \in V \wedge x \sqsubseteq v\} = \emptyset$$

Begründung analog Fall  $W \triangleright V$

$$W \triangleright \text{pref}(V) = \bigcup_{w \in W} w \triangleright \text{pref}(V) = \bigcup_{w \in W} \{v : v \in \text{pref}(V) \wedge w \sqsubseteq v\} = \emptyset$$

$w \sqsubseteq v$  ist nie erfüllt. Angenommen  $v \in \text{pref}(V) \wedge w \sqsubseteq v$ , dann kann man  $v$  wie folgt verlängern  $v' = v \cdot v''$  mit  $v' \in V$ , dann wäre  $v' = w \cdot w' \cdot v''$  mit  $w \cdot w' = v$ . Dadurch gilt aber  $v' \in V \wedge w \sqsubseteq v' \wedge w \in W \Rightarrow$  Widerspruch zur Definition.

$$\text{pref}(V) \triangleright W \cdot X^* = \bigcup_{u \in \text{pref}(V)} u \triangleright W \cdot X^* = \bigcup_{u \in \text{pref}(V)} \min_{\sqsubseteq} \{w : w \in W \cdot X^* \wedge u \sqsubseteq w\}$$

$$= \bigcup_{u \in \text{pref}(V)} \min(W \cdot X^* \cap u \cdot X^*) = \bigcup_{u \in \text{pref}(V)} \min(\{w : w \in W \wedge u \sqsubseteq w\})$$

$$W \cdot X^* \triangleright \text{pref}(V) = \bigcup_{u \in W \cdot X^*} u \triangleright \text{pref}(V) = \bigcup_{u \in W \cdot X^*} \min_{\sqsubseteq} \{w : w \in \text{pref}(V) \wedge u \sqsubseteq w\}$$

$$= \bigcup_{u \in W \cdot X^*} \min(\text{pref}(V) \cap u \cdot X^*)$$

$\text{pref}(V) \cap u \cdot X^* = \emptyset$ , Begründung siehe oben  $\Rightarrow \bigcup_{u \in W \cdot X^*} \min(\emptyset) = \emptyset$

## 4 spezielle Sprachen

### 4.1 Regularität

Sei  $L$  und  $W$  regulär, so ist auch  $L \triangleright W$  regulär.

Automat  $A_L = (X, Z, z_0, \delta_L, Z_f)$  akzeptiere  $L$ , Automat  $A_W = (X, S, s_0, f, S_f)$  akzeptiere  $W$ . Automat  $A$  akzeptiert  $L \triangleright W$ ,

Vorgehensweise:

$A_L$  und  $A_W$  lesen das Wort  $w$  parallel.  $A_L$  akzeptiert und  $A$  wählt nicht-deterministisch aus ob Schritt 2 aktiviert wird oder nicht. Schritt 2:  $A_W$  liest das Wort  $w$  zu Ende, sollte  $A_W$  auf diesem Weg kein Mal oder mehr als einmal akzeptieren, so akzeptiert  $A$  nicht, ansonsten akzeptiert  $A$ .

$A = (X, Z \cup \{z'_f\} \times S \cup \{s_x\}, (z_0, s_0), \delta, \{(z'_f, s') : s' \in S_f\})$  mit

$$\begin{aligned} \delta = & \{((z_i, s_i), x, (z_j, s_j)) : (z_i, x, z_j) \in \delta_L \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup \\ & \{((z_i, s_i), x, (z'_f, s_j)) : (z_i, x, z') \in \delta_L \wedge z' \in Z_f \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup \\ & \{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_j)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \notin S_f\} \cup \\ & \{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_x)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \in S_f\} \end{aligned}$$

## **5 Schlusswort**

## **6 Quellen und Literatur**