Über die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen

Robert Hartmann

24. September 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen. Diese Operation wird in der Arbeit [St87] eingeführt.

Wir bezeichnen die Menge X^* als Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet X.
Wir bezeichnen weiterhin die Menge X^ω als Menge aller unendlichen Wörter über dem Alphabet X.
Sei ferner die Präfixrelation $\sqsubseteq$ wie üblich definiert:

Definition 1.

$$w \sqsubseteq b \Leftrightarrow w \cdot b' = b, \text{ für ein } b' \in X^*$$

$$pref(L) = \{v : v \sqsubseteq w \wedge w \in L\}$$

Es wird nun der δ-Limes einer Wortmenge W^δ definiert (s. [St87, Seite X])

Definition 2.

$$W^\delta = \{\beta : \beta \in X^\omega \text{ und } pref(\beta) \cap W \text{ ist unendlich}\}$$

Die folgende Eigenschaft (13) aus [St87] ist leich einzusehen:

$$(U \cup W)^\delta = U^\delta \cup W^\delta$$

Definition 3. *Eine Sprache nennen wir eine (σ, δ)-Teilmenge von X^* genau dann, wenn für alle $\beta \in X^\omega$ entweder $pref(\beta) \cap W$ oder $pref(\beta) \backslash W$ endlich ist.*

Beispiele für (σ, δ)-Teilmengen sind alle endlichen Sprachen und deren Komplemente. Weitere Beispiele sind Sprachen der Form $pref(U)$ oder $W \cdot X^*$.
Eine Eigenschaft für diese Teilmengen ergibt sich wiefolgt :

Satz 1 (St87)**.** *Sei U eine $(\sigma, \delta) -$ Teilmenge von X^*, dann gilt:*

$$(U \cap W)^\delta = U^\delta \cap W^\delta, \qquad \text{für alle } W \subseteq X^*$$

Nun wird die Operation "Fortsetzung" wie in [St87] eingeführt, im nachfolgenden als $\triangleright$ bezeichnet. Die Fortsetzung eines Wortes w in eine Sprache $V \subseteq X^*$ sei definiert als:

Definition 4.

$$w \triangleright V := Min_{\sqsubseteq}\{v : v \in V \wedge w \sqsubseteq v\} = Min\,(w \cdot X^* \cap V)$$

Diese Operation wird wie folgt auf Sprachen ausgedehnt, dabei bezeichnen wir die Fortsetzung einer Sprache W in eine Sprache $V \subseteq X^*$ mit:

Definition 5.

$$W \triangleright V := \bigcup_{w \in W} w \triangleright V$$

Diese Operation hat nun folgende Eigenschaft bezüglich des δ-Limes: Während

$$(W \cap U)^\delta = W^\delta \cap U^\delta$$

nur für (σ, δ)-Teilemgen gilt, so gilt

$$(W \triangleright U)^\delta = W^\delta \cap U^\delta$$

für sämtliche Sprachen
Daher wird nun im Verlauf der Arbeit die Operation Fortsetzung untersucht.

2 allgemeine Eigenschaften

2.1 Gilt für alle Sprachen

Folgende Eigenschaft folgt direkt aus der Definition:

Gleichung 2.1.1.

$$u \in L \to (u \triangleright L = \{u\})$$

Aus 2.1.1 folgt direkt

Gleichung 2.1.2.

$$U \triangleright L \subseteq L$$

Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition 5 ergibt sich:

Gleichung 2.1.3.

$$(L \cup U) \triangleright V = (L \triangleright V) \cup (U \triangleright V)$$

Aus dieser Gleichung 2.1.3 folgt wiederum direkt:

Gleichung 2.1.4.

$$L_2 \subseteq L_1 \to L_2 \triangleright W \subseteq L_1 \triangleright W$$

Auf Gleichung 2.1.4 folgt direkt:

Gleichung 2.1.5.

$$(L \cap U) \triangleright V \subseteq (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$

Dabei muss nicht notwendigerweise die Gleichheit, wie das folgende Beispiel zeigt

$$Sei\ L = \{aa, bb\}\ U = \{aa, b\}\ V = \{aa, bb\}$$

$$(L \cap U) \triangleright V = \{aa\} \subset \{aa, bb\} = (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$

Gleichung 2.1.6.

$$L \triangleright (U \cup V) \subseteq (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

Lemma 1.

$$Min\ (A \cup B) \subseteq Min\ A \cup Min\ B$$

Beweis. Es genügt, die Eigenschaft für $L = \{w\}$ zu zeigen.

$$w \triangleright (W \cup V) = Min\ (w \cdot X^* \cap (W \cup V))$$

Nach Anwenden der Distributivgesetze ergibt sich:

$$= Min\ ((w \cdot X^* \cap W) \cup (w \cdot X^* \cap V))$$

und mit Lemma 1 erhalten wir:

$$\subseteq Min\ (w \cdot X^* \cap W) \cup Min\ (w \cdot X^* \cap V)$$

$$= (L \triangleright W) \cup (L \triangleright V)$$

□

Dabei muss nicht notwendigerweise die Gleichheit gelten, wie das folgende Beispiel zeigt.

$$\textit{Sei } L = \{a, b\}\, U = \{aaa\}\, V = \{bb, aa\}$$

$$L \triangleright (U \cup V) = \{aa, bb\} \subset \{aa, bb, aaa\} = (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

Gleichung 2.1.7.

$$L \triangleright (U \cap V) \supseteq (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

Lemma 2.

$$\mathit{Min}\ (A \cap B) \supseteq \mathit{Min}\ A \cap \mathit{Min}\ B$$

Beweis. Es genügt die Eigenschaft für $L = \{w\}$ zu zeigen.

$$w \triangleright (U \cap V) = \mathit{Min}\ (w \cdot X^* \cap (U \cap V))$$

Nach Anwenden der Distributivgesetze ergibt sich

$$= \mathit{Min}\ ((w \cdot X^* \cap U) \cap (w \cdot X^* \cap V))$$

und mit Lemma 2 erhalten wir

$$\supseteq \mathit{Min}\ (w \cdot X^* \cap U) \cap \mathit{Min}\ (w \cdot X^* \cap V)$$

$$= (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

□

Dabei muss nicht notwendigerweise die Gleichheit gelten, wie das folgende Beispiel zeigt

$$\textit{Sei } L = \{a, b\}\, U = \{aaa, b, bb\}\, V = \{bb, aaa\}$$

$$L \triangleright (U \cap V) = \{bb, aaa\} \supset \{aaa\} = (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

Gleichung 2.1.8.

$$L_1 \subseteq L_2 \to L_1 \triangleright L_2 = L_1$$

Eigenschaft 1.

$$l \in L \to l \triangleright L = \{l\}$$

Beweis. Nach Definition ist $L_1 \triangleright L_2 = \bigcup_{l \in L_1} l \triangleright L_2$. Laut Vorbedinung gilt für jedes $l \in L_1$, dass $l \triangleright L_2 = \{l\}$ ist. Damit ergibt sich $\bigcup_{l \in L_1} \{l\} = L_1$ □

Gleichung 2.1.9.

$$L_2 \subseteq L_1 \to L_1 \triangleright L_2 = L_2$$

Beweis. Da $L_2 \subseteq L_1$ gilt für alle $l \in L_2 \cap L_1 : l \triangleright L_2 = \{l\}$
Demnach ergibt sich dann für $\bigcup_{l \in L_1} l \triangleright L_2 = \bigcup_{l \in L_1} \{l\} = L_2$ □

2.2 Konkatenation

Für die Konkatenation ergeben sich keine allgemeinen Eigenschaften.
So gibt es Sprachen derart, dass gilt

$$L \triangleright (U \cdot V) = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

Beispiel:

$$Sei\ L = \{e\} \quad U = \{a\} \quad V = \{b\}$$
$$L \triangleright (U \cdot V)\{ab\} = \{ab\} = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

außerdem gibt es andere Sprachen, sodass gilt

$$L \triangleright (U \cdot V) \supset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

Beispiel:

$$Sei\ L = \{a\} \quad U = \{aa\} \quad V = \{b, a\}$$
$$L \triangleright (U \cdot V) = \{aab, aaa\} \supset \{aaa\} = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

desweiteren gibt es Sprachen, sodass gilt

$$L \triangleright (U \cdot V) \neq (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

Beispiel:

$$Sei\ L = \{aab, a\} \quad U = \{aa\} \quad V = \{b\}$$
$$L \triangleright (U \cdot V) = \{aab\} \neq \{aa\} = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

Betrachtet man nun die Konkatenation 'vorn', also $(L \cdot U) \triangleright V ?(L \triangleright V) \cdot (U \triangleright V)$ so sieht man leicht, dass es sich auf der linken Seite der Gleichung um Wörter aus V handelt die man vergleicht mit Wörtern aus V^2. Demnach treten hier Eigenschaften nur auf wenn V eine ganz spezielle Gestalt hat.

2.3 Gilt nicht...

Folgt direkt aus den Gleichungen in 2.1

$$L \triangleright (U \cup V) \supset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cap V) \subset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$
$$L \triangleright (U \cdot V) \subset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$
$$(L \cap U) \triangleright V \supset (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$

3 Eigenschaften bei Sprachen spezieller Gestalt

Lemma 3. *Sei* $V \subseteq X^*\backslash W \cdot X^*$*, so gilt* $V \triangleright W \cdot X^* = V \triangleright Min\ (W)$

zu zeigen:

1. $V \triangleright W \cdot X^* \subseteq V \triangleright Min\ (W)$
2. $V \triangleright W \cdot X^* \supseteq V \triangleright Min\ (W)$

Beweis. :
zu 1. Die Inklusion $\supseteq$ folg aus $W \cdot X^* \supseteq Min\ (W)$.
zu 2. Zum Beweis der der anderen Inklusion genügt es, diese für den Fall $V = \{v\}$ zu zeigen.
Es sei nun $w \in v \triangleright W \cdot X^*$, wobei nach Vorraussetzung $v \notin W \cdot X^*$ gelte. Dann gilt für kein u, $v \sqsubseteq u \sqsubset w$ oder $u \sqsubseteq v$ die Beziehung $u \in W \cdot X^*$.
Also haben wir $w \in Min\ (W \cdot X^*) = Min\ (W)$ □

Eigenschaft 2. $pref(V) \triangleright W$

Beweis. 1. Fall: $w \in W \cap pref(V) \to w \in pref(V) \triangleright W$
2. Fall: $w \in W \backslash pref(V) \to w \in V \triangleright Min(W)$
$\to pref(V) \triangleright W = (pref(V) \cap W) \cup (pref(V) \triangleright Min\ (W))$

□

Eigenschaft 3. $W \triangleright pref(V) = W \cap pref(V)$

Beweis. Es genügt die Eigenschaft für $W = \{w\}$ zu zeigen:
Aus der Definition wissen wir, dass $w \triangleright pref(V) = Min\ (\{w\} \cdot X^* \cap pref(V))$ entspricht. Sei $w' \in (\{w\} \cdot X^* \cap pref(V))$, so sieht man leicht, dass $w \sqsubseteq w'$ und demnach $w \in pref(V)$ gelten muss. Daraus folgt sofort $Min\ (\{w\} \cdot X^* \cap pref(V)) = \{w\} \cap pref(V)$

□

Eigenschaft 4. $V \cdot X^* \triangleright W = V \cdot X^* \cap W$

Beweis. Es genügt die Eigenschaft für ein $v \in V \cdot X^*$ zu zeigen:
Aus der Definition wissen wir, dass $v \triangleright W = Min\ (\{v\} \cdot X^* \cap W)$ entspricht. Da laut Voraussetzung $v \in V \cdot X^*$, so gilt $= Min\ (\{v\} \cdot X^* \cap W) = Min\ (\{v\} \cap W)$. Da $\{v\} \cap W$ in jedem Fall einelementig ist, wissen wir, dass $Min\ (\{v\} \cap W) = \{v\} \cap W$ gilt.

□

Eigenschaft 5. $W \triangleright V \cdot X^* = (W \triangleright Min\ (V)) \cup (W \cap V \cdot X^*)$

Beweis. W lässt sich in 2 Teile aufspliten: $W = (W \cap V \cdot X^*) \cup (W \backslash V \cdot X^*)$ Nun betrachten wir folgende 2 Fälle:

Fall a) $w \in W \cap V \cdot X^*$
Fall b) $w \in W \backslash V \cdot X^*$

zu a): $w \triangleright V \cdot X^* \to w \in (W \cap V \cdot X^*)$
zu b): Es gilt nach Vorraussetzung $\{w\} \subseteq X^* \backslash V \cdot X^*$ und mit Hilfe von Lemma 3 erhalten wir $\{w\} \triangleright V \cdot X^* = \{w\} \triangleright Min\ (V)$
Daraus folgt:

$$W \triangleright V \cdot X^* = (W \triangleright Min\ (V)) \cup (W \cap V \cdot X^*)$$

$\square$

4 Abgeschlossenheit in der CHOMSKY-Hierachie

4.1 Regularität

Seien L und W regulär, so ist auch $L \triangleright W$ regulär.

Automat $A_L = (X, Z, z_0, \delta_L, Z_f)$ akzeptiere L, Automat $A_W = (X, S, s_0, f, S_f)$ akzeptiere W. Automat A akzeptiert $L \triangleright W$,

Vorgehensweise:
A_L und A_W lesen das Wort w parallel. Falls A_L akzeptiert und wählt A nicht-deterministisch aus ob Schritt 2 aktiviert wird oder nicht.
Schritt 2: A_W liest das Wort w zu Ende, während A_L im Zustand z'_f verweilt. Sollte A_W auf diesem mehr als einmal akzeptieren, so akzeptiert A nicht indem A_W im Stoppzustand s_x stehen bleibt, ansonsten akzeptiert A.

$A = (X, Z \cup \{z'_f\} \times S \cup \{s_x\}, (z_0, s_0), \delta, \{(z'_f, s') : s' \in S_f\}), s_x \notin S$ mit

$$\delta = \{((z_i, s_i), x, (z_j, s_j)) : (z_i, x, z_j) \in \delta_L \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup$$
$$\{((z_i, s_i), x, (z'_f, s_j)) : (z_i, x, z') \in \delta_L \wedge z' \in Z_f \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup$$
$$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_j)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \notin S_f\} \cup$$
$$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_x)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \in S_f\}$$

Beweis. Der konstruierte Automat A akzeptiert nur in einem Zustand $(z'_f, s'), s' \in S_f$ Nach Konstruktion gelangt A bei Eingabe w genau dann in (z'_f, s), wenn ein Wort $l \in L$ mit $l \sqsubseteq w$ existiert. In solch einem Fall kann der Automat umschalten. Wenn dies der Fall ist, so arbeitet A weiter auf der Eingabe w wie A_W es tut. Sollte A_W nun akzeptieren und w ist noch nicht zu Ende gelesen, so wird A nach Konstruktion in einen Stoppzustand (z'_f, s_x) geleitet, in dem er nie wieder akzeptiert. A akzeptiert also nur wenn A_L akzeptiert hat (es existiert ein $l \in L \wedge l \sqsubseteq w$) und wenn für alle v' mit $l \sqsubseteq v' \sqsubset w$ gilt $v' \notin W$.

Demnach akzeptiert A die Eingabe w genau dann, wenn $w \in L \triangleright W$ □

4.2 Kontextfreiheit

4.2.1 deterministisch kontextfrei

Es existieren deterministisch kontextfreie Sprachen L, W, sodass $L \triangleright W$ nicht deterministisch kontextfrei ist!

Sei $L = \{a^n b^n c^i : i, n > 0\}$ und $W = \{a^i b^n c^n : i, n > 0\}$. Sowohl L als auch W sind deterministische, kontextfreie und auch lineare Sprachen, da es je einen deterministischen Kellerautomaten gibt, der L sowie W akzeptiert und eine es lineare Grammatiken G_L

und G_W gibt, sodass $L(G_L) = L$ und $L(G_W) = W$ gilt.
Betrachtet man sich nun ein Wort $u \in L \triangleright W$ so muss u laut Definition folgende Struktur besitzen $u \in Min\ (l \cdot X^* \cap W)$ *für ein* $l \in L$. Damit sieht man leicht, dass $L \triangleright W = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$ und $\{a^n b^n c^n : n > 0\}$ ist bekanntlich nicht kontextfrei, also auch nicht deterministisch kontextfrei

4.3 Entscheidbarkeit

4.3.1 L und W entscheidbar

Seien L und W (Turing)entscheidbar, so ist auch $L \triangleright W$ entscheidbar.

Seien die Turing Maschinen T_L und T_W.
Die Turing Maschine T entscheidet $L \triangleright W$ nach folgendem Algorithmus:

Algorithm 1 entscheide $L \triangleright W$, Input w

```
if (w ∉ W) then
  T rejects
else
  if (w ∈ L) then
    T accepts
  end if
end if
w' = w
repeat
  w' ← cut(w')
  if (w' ∈ W) then
    T rejects
  end if
  if (w' ∈ L) then
    T accepts
  end if
until (w' == e)
T rejects
```

4.3.2 L akzeptierbar, W entscheidbar

Sei w die Eingabe. Es soll w akzeptiert werden, wenn $w \in L \triangleright W$ ist, wobei L akzeptierbar und W entscheidbar ist.

Vorgehensweise:
Zunächst wird geprüft ob $w \notin W$ liegt, falls das der Fall ist, so kann nach Definiton

nicht akzeptiert werden.
Nun werden alle Präfixe von w auf jeweils ein Band geschrieben, sodass man bei $|w| = n$, n-Bänder benötigt. Dann wird in einer Endlosschleife jeweils auf jedem Band die Maschine die L-akzeptiert ausgeführt.

Notiz: $|w| = n$
1. wenn $w \notin W$, laufe in Endlosschleife
2. Kopiere alle u mit $u \sqsubset w$ auf jeweils ein Band.
3.

```
while(true) do
  for(i=1 to n) do
    if(T_W accepts on tape i) T rejects
    do 1 takt with $T_L$ on tape i, if T_W accepts then T accept
  endfor
endwhile
```

4.3.3 L entscheidbar, W akzeptierbar

Sei L entscheidbar und W aufzählbar, so ist $L \triangleright W$ nicht notwendigerweise aufzählbar.

Beweis. Bemerkung: A ist aufzählbar, aber nicht entscheidbar

Sei $W = \{0^{n+1}\ 1^{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^{n+1}\ 1 : n \in A\}$, also W ist aufzählbar und sei $L = \{0\}$.
So ist $L \triangleright W = 0 \triangleright W = \{0^{n+1}\ 1^{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge n \notin A\} \cup \{0^{n+1}\ 1 : n \in \mathbb{N} \wedge n \in A\}$. Angenommen $0 \triangleright W$ wäre aufzählbar, so müsste der Schnitt mit einer aufzählbaren Sprache wieder aufzählbar sein. Sei $L_A = \{0^n\ 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ offensichtlich aufzählbar. Dann ergibt sich aber für $0 \triangleright W \cap L_A = \{0^{n+1}\ 1^{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge n \notin A\}$, was nicht aufzählbar ist. $\square$

5 Schlusswort

6 Quellen und Literatur