Über die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen

Robert Hartmann

24. September 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

2 allgemeine Eigenschaften

2.1 Gilt für alle Sprachen

$$u \in L \to (u \triangleright L = \{u\})$$

$$L \triangleright L = L$$

$$U \triangleright L \subseteq L$$

$$L \triangleright (U \cup V) \subseteq (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cap V) \supseteq (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

$$(L \cup U) \triangleright V = (L \triangleright V) \cup (U \triangleright V)$$

$$(L \cap U) \triangleright V \subseteq (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$

2.2 Gilt für einige Sprachen $\exists L, U, V \subseteq X^* :$

$$L_2 \subseteq L_1 \to L_2 \triangleright W \subseteq L_1 \triangleright W$$

$$W_2 \subseteq W_1 \to L \triangleright W_2 \subseteq L \triangleright W_1$$

$$L_1 \subseteq L_2 \to L_1 \triangleright L_2 = L_1$$

$$L_2 \subseteq L_1 \to L_1 \triangleright L_2 = L_2$$

$$L \triangleright (U \cdot V) = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \supset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 \not\supseteq L_1 \triangleright (L_2 \triangleright L_3)$$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 \subseteq^? L_1 \triangleright (L_2 \triangleright L_3)$$

$$L \triangleright L \cdot X^* = L$$

$$L \cdot X^* \triangleright X^* = L \cdot X^*$$

$$L \cdot X^* \triangleright L = L$$

2.3 Gilt nicht...

$$L \triangleright (U \cup V) \supset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cap V) \subset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \subset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cup V) \not\supset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V),$$

$$\text{Gegenbeispiel: } L = \{a\} \quad U = \{abb, aaba\} \quad V = \{aab, aba\}$$

$$L \triangleright (U \cup V) = \{abb, aba, aab\} \text{ ,aber } L \triangleright U \cup L \triangleright V = \{abb, aaba\} \cup \{aab, aba\} = \{abb, aaba, aab, aba\}$$

$$L \triangleright (U \cap V) \not\subset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V),$$

$$\text{Gegenbeispiel: } L = \{a, b\} \quad U = \{a, aa\} \quad V = \{aa, b\}$$

$$L \triangleright (U \cap V) = \{aa\} \text{ ,aber } L \triangleright U \cap L \triangleright V = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$$

$$L \triangleright (U \cdot V) = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V),$$

$$\text{Beispiel: } L = \{e\} \quad U = \{a\} \quad V = \{b\}$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \supset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V),$$

$$\text{Beispiel: } L = \{a\} \quad U = \{aa\} \quad V = \{b, a\}$$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 \not\supseteq L_1 \triangleright (L_2 \triangleright L_3)$$

$$\text{Gegenbeispiel: } L_1 = \{ab, aa\} \quad L_2 = \{a, ab\} \quad L_3 = \{aa\}$$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 = \{ab\} \triangleright \{aa\} = \emptyset \text{ ,aber } \{ab, aa\} \triangleright \{aa\} = \{aa\}$$

$$L \cdot X^* \triangleright X^* = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} u \triangleright X^* = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min_{\sqsubseteq} \{l : l \in X^* \wedge u \sqsubseteq L\}$$

$$= \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min(X^* \cap u \cdot X^*) = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min(u) = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} u = L \cdot X^*$$

$$L \cdot X^* \triangleright L = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} u \triangleright L = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min_{\sqsubseteq} \{l : l \in L \wedge u \sqsubseteq L\} = \bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min(l \cap u \cdot X^*)$$

1. Fall: $u \in L \Rightarrow l \cap u \cdot X^* = u$
2. Fall: $u \in L \cdot X^+ \Rightarrow l \cap u \cdot X^* = \emptyset$ oder $l \cap u \cdot X^* = u$ wenn $u \in L$

$$\bigcup_{u \in L \cdot X^*} \min(u) = L$$

Lemma: $\min(A \cup B) \subseteq \min A \cup \min B$

$$
\begin{aligned}
L \triangleright (W \cup V) &= \bigcup_{l \in L} l \triangleright (W \cup V) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap (W \cup V)) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min((l \cdot X^* \cap W) \cup (l \cdot X^* \cap V)) \\
&\subseteq \bigcup_{l \in L} (\min(l \cdot X^* \cap W) \cup \min(l \cdot X^* \cap V)) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap W) \cup \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap V) \\
&= (L \triangleright W) \cup (L \triangleright V)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(L \cup U) \triangleright V &= \bigcup_{l \in L \cup U} \min(l \cdot X^* \cap V) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap V) \cup \bigcup_{l \in U} \min(l \cdot X^* \cap V) \\
&= (L \triangleright V) \cup (U \triangleright V)
\end{aligned}
$$

3 Eigenschaften bei speziellen Sprachen

$$V = \{v : \forall w(w \in W \to w \not\sqsubseteq v)\} \qquad \mathit{pref}(V) = \{u : \exists v(u \sqsubseteq v \land v \in V)\}$$

$$W \rhd V = \emptyset$$
$$W \rhd \mathit{pref}(V) = \emptyset$$
$$W \cdot X^* \rhd V = \emptyset$$
$$W \cdot X^* \rhd \mathit{pref}(V) = \emptyset$$
$$\mathit{pref}(V) \rhd W \cdot X^* =$$

$$W \rhd V = \bigcup_{x \in W} x \rhd V = \bigcup \min_{\sqsubseteq}\{v : v \in V \land x \sqsubseteq v\}$$

Wegen $x \in W$ und $x \sqsubseteq v$ gilt $\{v : v \in V \land x \sqsubseteq v\} = \emptyset \Rightarrow \bigcup \min_{\sqsubseteq}\{v : v \in V \land x \sqsubseteq v\} = \emptyset$

$$W \cdot X^* \rhd V = \bigcup_{x \in W \cdot X^*} x \rhd V = \bigcup_{x \in W \cdot X^*} \min_{\sqsubseteq}\{v : v \in V \land x \sqsubseteq v\} = \emptyset$$

Begründung analog Fall $W \rhd V$

$$W \rhd \mathit{pref}(V) = \bigcup_{w \in W} w \rhd \mathit{pref}(V) = \bigcup_{w \in W} \{v : v \in \mathit{pref}(V) \land w \sqsubseteq v\} = \emptyset$$

$w \sqsubseteq v$ ist nie erfuellt. Angenommen $v \in \mathit{pref}(V) \land w \sqsubseteq v$, dann kann man v wie folgt verlaengern $v' = v \cdot v''$ mit $v' \in V$, dann waere $v' = w \cdot w' \cdot v''$ mit $w \cdot w' = v$. Dadurch gilt aber $v' \in V \land w \sqsubseteq v' \land w \in W \Rightarrow$ Widerspruch zur Definition.

$$\mathit{pref}(V) \rhd W \cdot X^* = \bigcup_{u \in \mathit{pref}(V)} u \rhd W \cdot X^* = \bigcup_{u \in \mathit{pref}(V)} \min_{\sqsubseteq}\{w : w \in W \cdot X^* \land u \sqsubseteq w\}$$
$$= \bigcup_{u \in \mathit{pref}(V)} \min(W \cdot X^* \cap u \cdot X^*) = \bigcup_{u \in \mathit{pref}(V)} \min(\{w : w \in W \land u \sqsubseteq w\})$$

$$W \cdot X^* \rhd \mathit{pref}(V) = \bigcup_{u \in W \cdot X^*} u \rhd \mathit{pref}(V) = \bigcup_{u \in W \cdot X^*} \min_{\sqsubseteq}\{w : w \in \mathit{pref}(V) \land u \sqsubseteq w\}$$
$$= \bigcup_{u \in W \cdot X^*} \min(\mathit{pref}(V) \cap u \cdot X^*)$$

$\mathit{pref}(V) \cap u \cdot X^* = \emptyset$, Begründung siehe oben $\Rightarrow \bigcup_{u \in W \cdot X^*} \min(\emptyset) = \emptyset$

4 spezielle Sprachen

4.1 Regularität

Sei L und W regulär, so ist auch $L \triangleright W$ regulär.

Automat $A_L = (X, Z, z_0, \delta_L, Z_f)$ akzeptiere L, Automat $A_W = (X, S, s_0, f, S_f)$ akzeptiere W. Automat A akzeptiert $L \triangleright W$,

Vorgehensweise:
A_L und A_W lesen das Wort w parallel. A_L akzeptiert und A wählt nicht-deterministisch aus ob Schritt 2 aktiviert wird oder nicht. Schritt 2: A_W liest das Wort w zu Ende, sollte A_W auf diesem Weg kein Mal oder mehr als einmal akzeptieren, so akzeptiert A nicht, ansonsten akzeptiert A.
$A = (X, Z \cup \{z'_f\} \times S \cup \{s_x\}, (z_0, s_0), \delta, \{(z'_f, s') : s' \in S_f\})$ mit

$\delta = \{((z_i, s_i), x, (z_j, s_j)) : (z_i, x, z_j) \in \delta_L \land f(s_i, x) = s_j\} \cup$
$\{((z_i, s_i), x, (z'_f, s_j)) : (z_i, x, z') \in \delta_L \land z' \in Z_f \land f(s_i, x) = s_j\} \cup$
$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_j)) : f(s_i, x) = s_j \land s_i \notin S_f\} \cup$
$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_x)) : f(s_i, x) = s_j \land s_i \in S_f\}$

5 Schlusswort

6 Quellen und Literatur