

Über die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen

Robert Hartmann

24. September 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Notation	4
3	Eigenschaften	5
3.1	Allgemeines	5
3.2	Eigenschaften der algebraischen Struktur $(2^{X^*}, \triangleright)$	5
3.2.1	Kommutativität	5
3.2.2	Assoziativität	5
3.2.3	Einselement	5
3.2.4	Nullelement	5
3.3	BOOLEsche Operationen	6
3.3.1	Monotonie im Hinterglied	7
3.3.2	Monotonie im Vorderglied	7
3.4	Konkatenation	9
4	Eigenschaften bei Sprachen spezieller Gestalt	10
5	Abgeschlossenheitseigenschaften	11
5.1	Regularität	11
5.2	Kontextfreiheit	12
5.3	Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit	12
5.3.1	L und W entscheidbar	12
5.3.2	L aufzählbar, W entscheidbar	14
5.3.3	L entscheidbar, W aufzählbar	15
6	Quellenverzeichnis	16

1 Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen. Diese Operation wird in der Arbeit [St87] eingeführt. Dabei bezeichnen wir die Fortsetzung eines Wortes w in eine Sprache L , als das Minimum aller Wörter aus L , in denen w ein Präfix ist.

Man stelle sich einen Ableitungsbaum vor beginnend bei w . Man folgt nun allen Pfaden von w nach X^* . Trifft man auf einem Pfad auf ein Wort aus L , so wird dieses Wort dem Ergebnis hinzugefügt und diesem Pfad wird nicht mehr gefolgt.

Wir bezeichnen die Fortsetzung einer Sprache L in eine Sprache W als Vereinigung der Fortsetzungen aller Wörter aus L in W .

Wie in der Arbeit [St87] behandelt, erleichtert die Operation Fortsetzung den Schnitt beim δ -Limes zweier Sprachen, mehr dazu im zweiten Abschnitt dieser Arbeit.

In dieser Arbeit wird deshalb die Operation Fortsetzung untersucht. Zunächst legen wir die verwendete Notation fest. Dann betrachten wir die algebraische Struktur $(2^{X^*}, \triangleright)$ und untersuchen diese auf typische Eigenschaften. Da diese Struktur nicht kommutativ ist, untersuchen wir dann die Monotonie der Operation Fortsetzung in Bezug auf die mengentheoretischen Operationen \cap, \cup und der Konkatenation im Vorder- sowie Hinterglied.

Im dann folgenden Abschnitt untersuchen wir die Operation Fortsetzung, wenn eine der beiden Operanden die spezielle Form $\text{pref}(L)$ oder $W \cdot X^*$ hat. Abschließend betrachten wir die Abgeschlossenheitseigenschaften der Operation Fortsetzung in der CHOMSKY-Hierarchie.

2 Notation

Mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen. Sei X ein Alphabet. Mit X^* bezeichnen wir die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet X , einschließlich des leeren Wortes e . Wir bezeichnen weiterhin die Menge X^ω als Menge aller unendlichen Wörter über dem Alphabet X .

Für $w \in X^*$ und $v \in X^\omega$ bezeichnen wir $w \cdot v$ als deren Konkatenation. Für eine Sprache W ist $W^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W^i$. Weiterhin bezeichnet $|w|$ die Länge des Wortes $w \in X^*$. Wir definieren die Präfixrelation \sqsubseteq wie üblich mit $w \sqsubseteq b \Leftrightarrow w \cdot b' = b$, für ein $b' \in X^*$. Somit bildet $\text{pref}(L) = \{v : v \sqsubseteq w \wedge w \in L\}$ alle Präfixe aller Wörter aus L .

Weiterhin bezeichnen wir mit $\text{Min}(L) = \{w : w \in L \wedge \forall v(v \sqsubset w \rightarrow v \notin L)\}$ alle Wörter der Sprache L , in denen kein Wort Präfix eines anderen Wortes ist. Abschließend bezeichnen wir die Operation Fortsetzung einer Sprache L in die Sprache W als $L \triangleright W = \bigcup_{u \in L} \text{Min}(u \cdot X^* \cap W)$

Wir definieren den δ -Limes einer Wortmenge W^δ wie in [St87] mit $W^\delta = \{\beta : \beta \in X^\omega \text{ und } \text{pref}(\beta) \cap W \text{ ist unendlich}\}$. Die Eigenschaft (13) aus [St87] ist leicht einzusehen: $(U \cup W)^\delta = U^\delta \cup W^\delta$. Eine Sprache nennen wir eine (σ, δ) -Teilmenge von X^* genau dann, wenn für alle $\beta \in X^\omega$ entweder $\text{pref}(\beta) \cap W$ oder $\text{pref}(\beta) \setminus W$ endlich ist. Beispiele für (σ, δ) -Teilmengen sind alle endlichen Sprachen und deren Komplemente. Weitere Beispiele sind Sprachen der Form $\text{pref}(L)$ oder $W \cdot X^*$.

Eine Eigenschaft für diese Teilmengen ist:

Satz 1 (St87). *Sei U eine (σ, δ) -Teilmenge von X^* , dann gilt:*
 $(U \cap W)^\delta = U^\delta \cap W^\delta$, für alle $W \subseteq X^*$

Die Operation Fortsetzung hat nun folgende Eigenschaft bezüglich des δ -Limes. Während $(W \cap U)^\delta = W^\delta \cap U^\delta$ nur für (σ, δ) -Teilmengen gilt, so gilt $(W \triangleright U)^\delta = W^\delta \cap U^\delta$ für sämtliche Sprachen.

3 Eigenschaften

3.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt betrachten wir Eigenschaften der Operation der Fortsetzung von Sprachen. Hierbei wird zunächst die algebraische Struktur $(2^{X^*}, \triangleright)$ untersucht. Anschließend werden insbesondere die Stabilität bzw. Monotonie bezüglich mengentheoretischen Operationen betrachtet.

3.2 Eigenschaften der algebraischen Struktur $(2^{X^*}, \triangleright)$

3.2.1 Kommutativität

Die algebraische Struktur $A = (2^{X^*}, \triangleright)$ ist nicht kommutativ. Um dies zu zeigen, wird ein Gegenbeispiel angegeben.

Beispiel 1. Es seien $L = \{b\}$ und $W = \{bb\}$. Dann haben wir $L \triangleright W = \{bb\}$, aber $W \triangleright L = \emptyset$.

3.2.2 Assoziativität

Die algebraische Struktur $A = (2^{X^*}, \triangleright)$ ist nicht assoziativ. Um dies zu zeigen wird wieder ein Gegenbeispiel angegeben.

Beispiel 2. Es seien $L = \{aa, bb\}$, $V = \{aa, b\}$ und $W = \{aa, bb\}$. Dann haben wir $(L \triangleright V) \triangleright W = \{aa\} \triangleright W = \{aa\}$, aber $L \triangleright (V \triangleright W) = L \triangleright \{aa, bb\} = \{aa, bb\}$.

3.2.3 Einselement

Da die algebraische Struktur A nicht kommutativ ist, werden bei der Untersuchung auf Einselemente sowohl linksneutrale, als auch rechtsneutrale Einselemente betrachtet. Wir betrachten zuerst ein linksneutrales Element E_l , so dass $E_l \triangleright L = L$ für alle $L \subseteq X^*$, gilt. Man erkennt leicht, dass X^* ein solches Element ist, denn es gilt $X^* \triangleright L = L$.

Analog betrachten wir nun ein rechtsneutrales Element E_r , so dass $L \triangleright E_r = L$ für alle $L \subseteq X^*$, gilt. Auch hier erkennt man leicht, dass X^* ein solches Element ist, denn es gilt $L \triangleright X^* = L$. Es gilt $E_l = E_l \triangleright E_r = E_r$, es existiert nur ein Einselement.

3.2.4 Nullelement

Die Suche nach dem Nullelement stellt sich als trivial dar. Wir suchen ein linksneutrales bzw. rechtsneutrales Nullelement N_l bzw. N_r , so dass $L \triangleright N_r = N$ sowie $N_l \triangleright L = N$ für alle $L \subseteq X^*$ gilt. Man erkennt leicht, dass die leere Menge \emptyset ein solches Nullelement auf beiden Seiten ist, da $N_l = N_l \triangleright N_r = N_r$ gilt.

Damit kann die algebraische Struktur $A = (2^{X^*}, \triangleright)$ aufgrund fehlender Assoziativität weder eine Gruppe noch eine Halbgruppe sein, besitzt aber Null- und Einselement.

3.3 BOOLEsche Operationen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit den Zusammenhängen der mengentheoretischen Operationen \cap, \cup bezüglich der Monotonie und der Stabilität der Operation Fortsetzung \triangleright .

Aus der Definition folgt direkt die Eigenschaft:

Eigenschaft 1. *Es gilt genau dann $\{w\} \triangleright W = \{w\}$, wenn $w \in W$.*

Es folgt ebenfalls eine generelle Inklusionsbeziehung:

Eigenschaft 2. $L \cap W \subseteq L \triangleright W \subseteq W$

Aus Eigenschaft 2 wissen wir, dass $L \cap W \subseteq L \triangleright W$. Man kann nun die Fortsetzung von L in W aufsplitten, sodass sich folgende Beziehung ergibt:

Eigenschaft 3. $L \triangleright W = (L \cap W) \cup ((L \setminus W) \triangleright W)$

Beweis. Wir splitten zunächst die Fortsetzung von L in W in Wörter die nur in L und nicht in W liegen und dem Schnitt beider Sprachen (1,2). Wie wir leicht sehen gilt (3). Damit haben wir die Beziehung $L \triangleright W = L \cap W \cup (L \setminus W) \triangleright W$

$$L \triangleright W = \bigcup_{v \in L} v \triangleright W \quad (1)$$

$$L \triangleright W = \bigcup_{v \in L \setminus W} v \triangleright W \cup \bigcup_{v' \in L \cap W} v' \triangleright W \quad (2)$$

$$\bigcup_{v' \in L \cap W} v' \triangleright W = (L \cap W) \triangleright W = L \cap W \quad (3)$$

□

Wir bilden nun Inklusionsbeziehungen zwischen L und W und erhalten mit Eigenschaft 3, zwei Folgerungen. Zu beachten ist, dass in Folgerung 1 eine „genau dann wenn“ Beziehung gilt.

Folgerung 1. $L \subseteq W \leftrightarrow L \triangleright W = L \cap W = L$

Folgerung 2. $L \supseteq W \rightarrow L \triangleright W = W$

Für Folgerung 2 gilt nicht die Richtung \leftarrow , wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3. Es seien $L = \{b\}$, $W = \{bb\}$. Dann haben wir $L \triangleright W = W$, aber $L \not\subseteq W$.

Da die Operation Fortsetzung nicht kommutativ ist, betrachten wir nun die Monotonie der Operation bezüglich Vorder- und Hinterglied getrennt.

3.3.1 Monotonie im Hinterglied

Wir betrachten zunächst die Stabilität und Monotonie der Operation Fortsetzung in Verbindung der BOOLEsche Operationen \cap und \cup im Hinterglied.

Da die Operation Fortsetzung einer Sprache L in eine Sprache W über die Vereinigung \cup aller Wörter aus L definiert wurde, folgt aus der Definition:

Eigenschaft 4. $(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i) \triangleright W = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L_i \triangleright W)$

Beweis. Nach Definition gilt $(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i) \triangleright W = \bigcup_{w \in L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n} w \triangleright W$
Wir betrachten nun die Vereinigung für jede Sprache, so dass $\bigcup_{w \in L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n} w \triangleright W = (\bigcup_{w \in L_0} w \triangleright W) \cup (\bigcup_{w \in L_1} w \triangleright W) \cup \dots \cup (\bigcup_{w \in L_n} w \triangleright W) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L_i \triangleright W)$ \square

Aus Eigenschaft 4 folgt:

Eigenschaft 5. $L \subseteq W \rightarrow L \triangleright V \subseteq W \triangleright V$

Dabei muss diese Eigenschaft nicht notwendigerweise für die echte Inklusion gelten, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 4. Es sei $L = \{a\}$, $W = \{a, ab\}$ und $V = \{b\}$. Dann haben wir $L \subset W$, aber $L \triangleright V \not\subseteq W \triangleright V$ wegen $\emptyset \not\subseteq \emptyset$.

Aus Eigenschaft 5 folgt die Inklusion:

Eigenschaft 6. $(L \cap V) \triangleright W \subseteq (L \triangleright W) \cap (V \triangleright W)$

Dabei muss nicht notwendig die Gleichheit gelten, wie das folgende Beispiel zeigt

Beispiel 5. Es seien $L = \{aa, bb\}$, $V = \{aa, b\}$, $W = \{aa, bb\}$.
Dann haben wir $(L \cap V) \triangleright W = \{aa\} \subset \{aa, bb\} = (L \triangleright W) \cap (V \triangleright W)$

3.3.2 Monotonie im Vorderglied

Anders als bei der vorherigen Betrachtung, leiten sich in diesem Abschnitt kaum Folgerungen direkt aus der Definition ab. So haben wir, im Gegensatz zu Eigenschaft 4:

Eigenschaft 7. $L \triangleright (V \cup W) \subseteq (L \triangleright V) \cup (L \triangleright W)$

Zum Beweis nutzen wir die folgende Beziehung.

Lemma 1. $\text{Min}(A \cup B) \subseteq \text{Min } A \cup \text{Min } B$

Beweis von Lemma 1. Sei $w \in \text{Min}(A \cup B)$. Dann ist w in A oder in B enthalten. O.B.d.A. sei $w \in A$. Es gilt außerdem für alle $v \sqsubset w$, dass $v \notin (A \cup B)$, also insbesondere $v \notin A$. Nach Definition von Min gilt also $w \in \text{Min}(A)$. Gleiches gilt analog, wenn man annimmt $w \in B$. \square

Beweis von Eigenschaft 7. Es genügt, die Eigenschaft für $L = \{w\}$ zu zeigen.
 Es gilt $w \triangleright (W \cup V) = \text{Min } (w \cdot X^* \cap (W \cup V)) = \text{Min } ((w \cdot X^* \cap W) \cup (w \cdot X^* \cap V))$
 und mit Lemma 1 erhalten wir:
 $w \triangleright (V \cup W) \subseteq \text{Min } (w \cdot X^* \cap V) \cup \text{Min } (w \cdot X^* \cap W) = (L \triangleright V) \cup (L \triangleright W)$ \square

Dabei muss nicht notwendig die Gleichheit gelten, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 6. Es seien $L = \{a, b\}$, $V = \{aaa\}$, $W = \{bb, aa\}$.
 Dann haben wir $L \triangleright (V \cup W) = \{aa, bb\} \subset \{aa, bb, aaa\} = (L \triangleright V) \cup (L \triangleright W)$
 Eine ähnliche Beziehung ergibt sich für die Operation \cap

Gleichung 3.1. $L \triangleright (V \cap W) \supseteq (L \triangleright V) \cap (L \triangleright W)$

Zum Beweis nutzen wir die Beziehung.

Lemma 2. $\text{Min } (A \cap B) \supseteq \text{Min } A \cap \text{Min } B$

Beweis von Lemma 2. Sei $w \in (\text{Min } (A) \cap \text{Min } (B))$. Dann ist w sowohl in A , als auch in B enthalten. Außerdem gilt für alle v mit $v \sqsubset w$, dass $v \notin A$ und dass $v \notin B$. Nach Definition von Min gilt also $w \in \text{Min } (A \cap B)$. \square

Beweis von Eigenschaft 3.1. Es genügt die Eigenschaft für $L = \{w\}$ zu zeigen.
 Es gilt $w \triangleright (V \cap W) = \text{Min } (w \cdot X^* \cap (V \cap W)) = \text{Min } ((w \cdot X^* \cap V) \cap (w \cdot X^* \cap W))$
 und mit Lemma 2 erhalten wir
 $w \triangleright (V \cap W) \supseteq \text{Min } (w \cdot X^* \cap V) \cap \text{Min } (w \cdot X^* \cap W) = (L \triangleright V) \cap (L \triangleright W)$ \square

Dabei muss nicht notwendig die Gleichheit gelten, wie das folgende Beispiel zeigt

Beispiel 7. Es seien $L = \{a, b\}$, $V = \{aaa, b, bb\}$, $W = \{bb, aaa\}$
 Dann haben wir $L \triangleright (V \cap W) = \{bb, aaa\} \supset \{aaa\} = (L \triangleright V) \cap (L \triangleright W)$

Es gilt keine Monotonie im Vorderglied, $L \subseteq W \not\Rightarrow V \triangleright L \subseteq V \triangleright W$, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 8. Sei $L = \{aaba\}$, $W = \{aab, aaba\}$ und $V = \{a\}$, also $L \subseteq W$.
 Dann haben wir $V \triangleright L = \{aaba\} \not\subseteq V \triangleright W = \{aab\}$

3.4 Konkatenation

Bisher wurden hauptsächlich die boolschen Operationen \cap sowie \cup in Verbindung mit der Operation Fortsetzung \triangleright betrachtet. Nun betrachten wir ob spezielle Eigenschaften der Operation Fortsetzung mit der Konkatenation existieren.

Es existieren Sprachen L, V und W derart, dass $L \triangleright (V \cdot W) = (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$ gilt.

Beispiel 9. Es seien $L = \{e\}$, $V = \{a\}$, $W = \{b\}$, so erhalten wir
 $L \triangleright (V \cdot W) = \{ab\} = \{ab\} = (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$, also $L \triangleright (V \cdot W) = (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$

Weiterhin existieren Sprachen derart, dass $L \triangleright (V \cdot W) \supset (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$ gilt.

Beispiel 10. Es seien $L = \{a\}$, $V = \{aa\}$, $W = \{b, a\}$
Dann erhalten wir $L \triangleright (V \cdot W) = \{aab, aaa\} \supset \{aaa\} = (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$, also $L \triangleright (V \cdot W) \supset (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$.

Es existieren Sprachen derart, dass $L \triangleright (V \cdot W) \subset (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$ gilt.

Beispiel 11. Es seien $L = \{ab, e\}$, $V = \{aba, bab\}$, $W = \{e, aba, bab\}$, so erhalten wir
 $L \triangleright (V \cdot W) = L \triangleright \{aba, abaaba, ababab, bab, bababa, babbab\} = \{aba, bab\}$ und $(L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W) = \{aba, bab\} \cdot \{e, aba\} = \{aba, abaaba, bab, bababa\}$. Also haben wir $L \triangleright (V \cdot W) \subset (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$

Zuletzt existieren Sprachen derart, dass sowohl $L \triangleright (V \cdot W) \not\subset (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$ als auch $L \triangleright (V \cdot W) \not\supset (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$ gelten. Es gilt also eine mengentheoretische Unvergleichbarkeit.

Beispiel 12. Es seien $L = \{aab, a\}$, $V = \{aa\}$, $W = \{b\}$
Dann erhalten wir $L \triangleright (V \cdot W) = \{aab\} \neq \{aa\} = (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$, das bedeutet also, dass beide Seiten mengentheoretisch unvergleichbar sind, also $L \triangleright (V \cdot W) \not\supset (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$, sowie $L \triangleright (V \cdot W) \not\subset (L \triangleright V) \cdot (L \triangleright W)$

Da wir für alle Inklusionsbeziehungen Sprachen gefunden haben, die diese erfüllen, so kann es keine Eigenschaft bezüglich der Inklusion geben, welche für alle Sprachen L, V, W gelten würde.

Betrachtet man nun die Konkatenation ‘vorn’, also die Beziehung $(L \cdot V) \triangleright W$ zu $(L \triangleright W) \cdot (V \triangleright W)$, so sieht man leicht, dass es sich auf der linken Seite der Gleichung um Wörter aus W handelt die man mit Wörtern aus W^2 vergleicht.

Demnach treten hier spezielle Inklusionsbeziehungen nur auf, wenn W die Gestalt $W \subseteq W^2$ oder $W \supseteq W^2$ hat.

4 Eigenschaften bei Sprachen spezieller Gestalt

In diesem Abschnitt wird die Operation Fortsetzung untersucht, wenn eine der beiden Operanden die spezielle Gestalt $\text{pref}(L)$ oder $W \cdot X^*$ hat.

Eigenschaft 8. $W \triangleright \text{pref}(V) = W \cap \text{pref}(V)$

Beweis. Es genügt die Eigenschaft für $W = \{w\}$ zu zeigen:

Aus der Definition wissen wir, dass $w \triangleright \text{pref}(V) = \text{Min}(\{w\} \cdot X^* \cap \text{pref}(V))$ gilt. Ist $w' \in (\{w\} \cdot X^* \cap \text{pref}(V))$, so sieht man, dass $w \sqsubseteq w'$ gilt. Also haben wir wegen $w' \in \text{pref}(V)$ auch $w \in \text{pref}(V)$. Daraus folgt $\text{Min}(\{w\} \cdot X^* \cap \text{pref}(V)) = \{w\} \cap \text{pref}(V)$ \square

Für die Umkehrung von Eigenschaft 8 $\text{pref}(V) \triangleright W$ gibt es keine Vereinfachung, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 13. Es seien $V = \{aab, ab\}$ und $W = \{a, abb, aaab\}$, so dass $\text{pref}(V) = \{e, a, aa, ab, aab\}$. Dann haben wir $\text{pref}(V) \triangleright W = \{a, aab, aaab\}$, aber $\text{pref}(V) \cap W = \{a\}$ und $\text{Min}(\text{pref}(V) \setminus \{e\}) \triangleright W = \{a, abb\}$. Damit fehlt das Element $aaab$. Ein Betrachten von $\text{Min}(\text{pref}(V))$ hat keinen Sinn, da trivialerweise $\text{Min}(\text{pref}(V)) = \{e\}$, wenn $V \neq \emptyset$.

Eigenschaft 9. $V \cdot X^* \triangleright W = V \cdot X^* \cap W$

Beweis. Die Inklusion \supseteq folgt aus Eigenschaft 1. Zum Beweis der anderen Inklusion betrachten wir $w \in V \cdot X^* \triangleright W$. Es muss nun ein $v \in V \cdot X^*$ existieren, sodass $w \in \{v\} \triangleright W$ gilt. Daraus folgt, dass v ein Präfix von w sein muss, was wiederum bedeutet, dass $w \in V \cdot X^*$. Somit gilt die Inklusion $V \cdot X^* \triangleright W \subseteq W \cap V \cdot X^*$. \square

Eigenschaft 10. $W \triangleright V \cdot X^* = (W \triangleright \text{Min}(V)) \cup (W \cap V \cdot X^*)$

Zum Beweis von Eigenschaft 10 benutzen wir

Lemma 3. Sei $L \subseteq X^* \setminus W \cdot X^*$, so gilt $L \triangleright W \cdot X^* = L \triangleright \text{Min}(W)$

Beweis Lemma 3. :

Die Inklusion $L \triangleright \text{Min}(W) \subseteq L \triangleright W \cdot X^*$ ist, wie man leicht sieht, trivial.

Zum Beweis der anderen Inklusion genügt es, diese für den Fall $L = \{v\}$ zu zeigen. Es sei nun $w \in v \triangleright W \cdot X^*$, wobei nach Voraussetzung $v \notin W \cdot X^*$ gelte. Dann gilt für kein u , $v \sqsubseteq u \sqsubset w$ oder $u \sqsubseteq v$ die Beziehung $u \in W \cdot X^*$.

Also haben wir $w \in \text{Min}(W \cdot X^*) = \text{Min}(W)$ \square

Beweis von Eigenschaft 10. Die Fortsetzung von W in $V \cdot X^*$ lässt sich, mit Hilfe von Eigenschaft 3, in zwei Teile aufspalten (4). Da $W \setminus V \cdot X^* \subseteq X^* \setminus V \cdot X^*$, wenden wir Lemma 3 an und erhalten (5), was sich zu (6) vereinfachen lässt.

$$W \triangleright V \cdot X^* = (W \setminus V \cdot X^*) \triangleright V \cdot X^* \cup (W \cap V \cdot X^*) \quad (4)$$

$$W \triangleright V \cdot X^* = W \setminus V \cdot X^* \triangleright \text{Min}(V \cdot X^*) \cup (W \cap V \cdot X^*) \quad (5)$$

$$W \triangleright V \cdot X^* = W \triangleright \text{Min}(V) \cup (W \cap V \cdot X^*) \quad (6)$$

\square

5 Abgeschlossenheitseigenschaften

In diesem Abschnitt betrachten wir die Klassen der CHOMSKY-Hierarchie bezüglich der Abgeschlossenheitseigenschaften der Operation Fortsetzung. Dabei betrachten wir nacheinander Regularität, Kontextfreiheit und abschließend Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit.

5.1 Regularität

Satz 2. *Sind L und W reguläre Sprachen, so ist auch $L \triangleright W$ regulär.*

Beweis. Der nicht-deterministische Automat $A_L = (X, Z, z_0, \delta_L, Z_f)$ akzeptiere L , der deterministische Automat $A_W = (X, S, s_0, f, S_f)$ akzeptiere W . Wir konstruieren einen nicht-deterministischen Automaten A , der $L \triangleright W$ akzeptiert

Arbeitsweise:

In Phase eins lesen A_L und A_W das Wort w parallel (1). Falls A_L ein Präfix v von w akzeptiert, wählt A nicht-deterministisch aus ob Schritt zwei aktiviert wird oder nicht (Nicht-Determinismus von A_L).

Wird Phase zwei aktiviert, so liest A_W das Wort w weiter, während A_L in einem Ruhezustand z'_f verweilt (2). Akzeptiert A_W nun ein Präfix v' mit $v \sqsubseteq v' \sqsubset w$ $v' \in W$, so lehnt A das Eingabewort w ab. Dazu begibt sich A in den Zustand (z'_f, s_x) aus dem keine Transition herausführt (3). Findet der Automat A_W kein solches Präfix v' und akzeptiert das Eingabewort w (und kein Präfix von w), so akzeptiert auch A und endet im Zustand (z'_f, s_x) (4).

$A = (X, Z \cup \{z'_f\} \times S \cup \{s_x\}, (z_0, s_0), \delta, \{(z'_f, s') : s' \in S_f\}), s_x \notin S$ mit

$\delta =$

$$\{((z_i, s_i), x, (z_j, s_j)) : (z_i, x, z_j) \in \delta_L \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup \quad (1)$$

$$\{((z_i, s_i), x, (z'_f, s_j)) : (z_i, x, z'_f) \in \delta_L \wedge z'_f \in Z_f \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup \quad (2)$$

$$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_j)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \notin S_f\} \cup \quad (3)$$

$$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_x)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \in S_f\} \quad (4)$$

Nach Konstruktion ist klar, dass der Automat A nur Wörter aus $L \triangleright W$ akzeptiert. Er akzeptiert auch alle Wörter aus $L \triangleright W$, weil der Automat A_L , welcher die Präfixe akzeptiert, nicht-deterministisch entscheidet, wann Phase zwei beginnt. In Phase zwei läuft dann nur A_W deterministisch auf der Eingabe w weiter und akzeptiert, wenn das nicht-deterministisch ausgewählte Präfix in w fortgesetzt werden kann. Damit akzeptiert der Automat A ein Eingabewort w genau dann, wenn $w \in L \triangleright W$ \square

5.2 Kontextfreiheit

Es existieren deterministisch kontextfreie, lineare Sprachen L, W , sodass $L \triangleright W$ nicht deterministisch kontextfrei ist.

Beispiel 14. Es seien $L = \{a^n b^n c^i : i, n > 0\}$ und $W = \{a^i b^n c^n : i, n > 0\}$. Sowohl L als auch W sind deterministische, kontextfreie und auch lineare Sprachen, da es je einen deterministischen Kellerautomaten gibt, der L sowie W akzeptiert und es lineare Grammatiken

$G_L = (\{S, A, C\}, \{a, b, c\}, S, \{(S, Cc), (C, Cc), (C, aAb), (A, aAb), (A, e)\})$ und $G_W = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, S, \{(S, aA), (A, aA), (A, bBc), (B, bBc), (B, e)\})$ gibt, sodass $L(G_L) = L$ und $L(G_W) = W$ gilt.

Betrachten wir nun ein Wort $u \in L \triangleright W$ so muss u laut Definition folgende Struktur besitzen $u \in \text{Min}(v \cdot X^* \cap W)$ für ein $v \in L$. Damit sieht man leicht, dass $L \triangleright W = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$ gilt. Diese Sprache ist bekanntlich nicht einmal kontextfrei.

5.3 Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

In diesem Abschnitt betrachten wir die Erhaltung der Entscheidbarkeit beziehungsweise der Aufzählbarkeit von Sprachen L, W in Bezug auf deren Fortsetzung $L \triangleright W$. Dabei betrachten wir drei verschiedenen Fälle.

Wir betrachten zunächst $L \triangleright W$, wenn L und W entscheidbar sind. Dabei werden wir feststellen, dass auch die Fortsetzung $L \triangleright W$ entscheidbar ist. Ein Algorithmus wird dazu angegeben.

Anschließend werden wir die Fortsetzung betrachten, wenn L nur aufzählbar und W entscheidbar ist. In diesem Fall ist die Fortsetzung von L in W ebenso aufzählbar. Dazu geben wir einen Algorithmus an.

Im letzten Fall betrachten wir $L \triangleright W$, wenn L und W nur aufzählbar sind. In dem Fall ist die Fortsetzung beider Sprachen nicht einmal aufzählbar, wie ein Beweis zeigen wird.

5.3.1 L und W entscheidbar

Satz 3. *Sind L und W entscheidbare Sprachen, so ist auch $L \triangleright W$ entscheidbar.*

Beweis. Wir wissen, dass zu jeder entscheidbaren Sprache L ein Algorithmus angegeben werden kann, welcher L entscheidet. Daher geben wir zum Beweis von Satz 3 einen Algorithmus an, welcher $L \triangleright W$ entscheidet.

Arbeitsweise des Algorithmus:

Zunächst wird geprüft ob $w \in W$, da dies eine zwingende Voraussetzung laut Definition der Operation Fortsetzung ist (# 1). Jetzt wissen wir, dass $w \in W$. Gilt zusätzlich $w \in L$, so ist klar, dass $w \in L \triangleright W$ nach Eigenschaft 2 (# 2).

Jetzt setzen wir w' mit $w' := w$ als Arbeitskopie. Im folgenden Schleifendurchlauf schneiden wir mit $cut()$ den letzten Buchstaben von w' ab (# 3). Gilt jetzt $w' \in W$ so müssen wir mit NEIN entscheiden, weil die Eingabe jetzt nicht mehr dem *Min* Kriterium genügt. Anschließend wird geprüft ob $w' \in L \setminus W$ (# 5) gilt. Wenn ja, dann haben wir ein das erste Präfix von w gefunden und können für die Eingabe w mit JA entscheiden.

Ansonsten wird die Schleife solange weiter durchlaufen, bis w' nur noch aus dem leeren Wort besteht, anschliessend wird abgelehnt, da kein Präfix von v von w gefunden wurde, welches in $L \setminus W$ liegt.

Algorithm 1 entscheide $L \triangleright W$

```

Input  $w$ 
if ( $w \notin W$ ) then
     $T$  rejects {# 1}
else
    if ( $w \in L$ ) then
         $T$  accepts {# 2}
    end if
end if
 $w' = w$  {# 3}
repeat
     $w' \leftarrow cut(w')$  {# 4}
    if ( $w' \in W$ ) then
         $T$  rejects
    end if {# 5}
    if ( $w' \in L$ ) then
         $T$  accepts
    end if
until ( $w' == e$ )
 $T$  rejects

```

□

5.3.2 L aufzählbar, W entscheidbar

Satz 4. Ist L eine aufzählbare Sprache und W eine entscheidbare Sprache, so ist $L \triangleright W$ aufzählbar.

Beweis. Es sei $U = \{u_i : 0 \leq i \leq n \wedge u_i \in L\}$ eine Aufzählung von L .

Wir konstruieren einen Algorithmus welcher die Eingabe w akzeptiert genau dann, wenn $w \in L \triangleright W$. Ist $w \notin W$ so kann nach Definition auch nicht $w \in L \triangleright W$ gelten.

Wir zählen nun ein Wort $u \in L$ auf (# 1). Gilt nun $u \sqsubseteq w$, so wird eine Arbeitskopie v mit $v := w$ erstellt (# 2). Im nächsten Schritt wird für alle Präfixe v mit $u \sqsubseteq v \sqsubset w$ sukzessive geprüft ob $v \in W$ (# 3).

Sollte dies der Fall sein, dann erfüllt das aufgezählte $u \in L$ nicht das Kriterium $u \in L \setminus W$. Die innere Schleife wird daher verlassen und die FOR Schleife zählt das nächste u_i auf (# 4). Ein neues $u \in L$ wird aufgezählt und der Algorithmus läuft mit diesem u weiter.

Gilt aber für alle Präfixe $v \notin W$, so erreicht die innere Schleife ihre Abbruchbedingung und wir akzeptieren die Eingabe w (# 5).

Algorithm 2 akzeptiere $L \triangleright W$

```

Input  $w$ 
Sei
if ( $w \notin W$ ) then
     $T$  rejects
end if
{# 1}
for  $i = 0$  to  $\infty$  do
    if  $u_i \in \text{pref}(\{w\})$  then
         $v := w$  {# 2}
        while  $v \neq u_i$  do
             $v \leftarrow \text{cut}(v)$  {# 3}
            EXIT IF  $v \in W$  {# 4}
        end while
        if  $v = u_i$  then
             $T$  accepts {# 5}
        end if
    end if
end for

```

□

5.3.3 L entscheidbar, W aufzählbar

Satz 5. *Sei L eine entscheidbare Sprache und W eine aufzählbare Sprache, so ist $L \triangleright W$ nicht notwendig aufzählbar.*

Beweis. Wir wählen ein $A \subseteq \mathbb{N}$ welches aufzählbar, aber nicht entscheidbar ist und setzen W wie in (1) und L wie in (2). W ist also aufzählbar und L sogar regulär und endlich. Angenommen (3) wäre aufzählbar, so wäre (4) auch aufzählbar. Das würde bedeuten, dass $\mathbb{N} \setminus A$ aufzählbar und damit A entscheidbar wäre. Dies ergibt aber einen Widerspruch zur Voraussetzung, da A nicht entscheidbar ist.

$$W = \{0^{n+1} 1^{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^{n+1} 1 : n \in A\} \quad (1)$$

$$L = \{0\} \quad (2)$$

$$L \triangleright W = \{0^{n+1} 1^{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge n \notin A\} \cup \{0^{n+1} 1 : n \in \mathbb{N} \wedge n \in A\} \quad (3)$$

$$(L \triangleright W) \cap \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\} = \{0^{n+1} 1^{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge n \notin A\} \quad (4)$$

□

6 Quellenverzeichnis

Literatur

- [St87] L. Staiger, Sequential Mappings of ω -Languages, 1987, pp. 148–170.
- [St75] L. Staiger, Reguläre Nullmengen, 1975.
- [Wagner94] K. Wagner, Einführung in die theoretische Informatik, 1994.