# Über die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen

Robert Hartmann

24. September 2010

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen. Diese Operation wird in der Arbeit [St87] eingeführt.

Wir bezeichnen die Menge $X^*$ als Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet $X$.
Wir bezeichnen weiterhin die Menge $X^\omega$ als Menge aller unendlichen Wörter über dem Alphabet $X$.
Sei ferner die Präfixrelation $\sqsubseteq$ wie üblich definiert:

**Definition 1.**

$$w \sqsubseteq b \Leftrightarrow w \cdot b' = b, \textit{ für ein } b' \in X^*$$

$$pref(L) = \{v : v \sqsubseteq w \wedge w \in L\}$$

Es wird nun der $\delta$-Limes einer Wortmenge $W^\delta$ definiert (s. [St87, Seite X])

**Definition 2.**

$$W^\delta = \{\beta : \beta \in X^\omega \textit{ und } pref(\beta) \cap W \textit{ ist unendlich}\}$$

Die folgende Eigenschaft ((13) aus [St87] ist leich einzusehen:

$$(U \cup W)^\delta = U^\delta \cup W^\delta$$

**Definition 3.** *Eine Sprache nennen wir eine $(\sigma, \delta)$-Teilmenge von $X^*$ genau dann, wenn für alle $\beta \in X^\omega$ entweder $pref(\beta) \cap W$ oder $pref(\beta) \backslash W$ endlich ist.*

Beispiele für $(\sigma, \delta)$-Teilmengen sind alle endlichen Sprachen und deren Komplemente. Weitere Beispiele sind Sprachen der Form $pref(U)$ oder $W \cdot X^*$.
Eine Eigenschaft für diese Teilmengen ergibt sich wiefolgt :

**Satz 1** ([St87)**.** *Sei $U$ eine $(\sigma, \delta) -$ Teilmenge von $X^*$, dann gilt:*

$$(U \cap W)^\delta = U^\delta \cap W^\delta, \qquad \textit{für alle } W \subseteq X^*$$

Nun wird die Operation "Fortsetzung" wie in [St87] eingeführt, im nachfolgenden als $\triangleright$ bezeichnet. Die Fortsetzung eines Wortes $w$ in eine Sprache $V \subseteq X^*$ sei definiert als:

**Definition 4.**

$$w \triangleright V := Min_{\sqsubseteq}\{v : v \in V \wedge w \sqsubseteq v\} = Min\ (w \cdot X^* \cap V)$$

Diese Operation wird wie folgt auf Sprachen ausgedehnt, dabei bezeichnen wir die Fortsetzung einer Sprache W in eien Sprache $V \subseteq X^*$ mit:

**Definition 5.**

$$W \triangleright V := \bigcup_{w \in W} w \triangleright V$$

Diese Operation hat nun folgende Eigenschaft bezüglich des $\delta$-Limes: Während

$$(W \cap U)^{\delta} = W^{\delta} \cap U^{\delta}$$

nur für $(\sigma, \delta)$-Teilemgen gilt, so gilt

$$(W \triangleright U)^{\delta} = W^{\delta} \cap U^{\delta}$$

für sämtliche Sprachen
Daher wird nun im Verlauf der Arbeit die Operation Fortsetzung untersucht.

# 2 allgemeine Eigenschaften

## 2.1 Gilt für alle Sprachen

Folgende Eigenschaft ist direkt aus der Definition einsehbar:

**Gleichung 1.**

$$u \in L \rightarrow (u \triangleright L = \{u\})$$

Aus 2.1.1 folgt direkt

**Gleichung 2.**

$$L \triangleright L = L$$

**Gleichung 3.**

$$U \triangleright L \subseteq L$$

Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition 1.5 ergibt sich:

**Gleichung 4.**

$$(L \cup U) \triangleright V = (L \triangleright V) \cup (U \triangleright V)$$

*Beweis.*

$$(L \cup U) \triangleright V = \bigcup_{l \in L \cup U} Min\ (l \cdot X^* \cap V)$$

$$= \bigcup_{l \in L} Min\ (l \cdot X^* \cap V) \cup \bigcup_{l \in U} Min\ (l \cdot X^* \cap V)$$

$$= (L \triangleright V) \cup (U \triangleright V)$$

□

Aus dieser Gleichung 2.1.4 folgt wiederum direkt:

**Gleichung 5.**

$$L_2 \subseteq L_1 \rightarrow L_2 \triangleright W \subseteq L_1 \triangleright W$$

*Beweis.*

$$L_1 \triangleright W = \bigcup_{l \in L_1} l \triangleright W$$

$$= \bigcup_{l \in L_2} l \triangleright W \cup \bigcup_{l \in L_1 \setminus L_2} l \triangleright W$$

$$\supseteq \bigcup_{l \in L_2} l \triangleright W = L_2 \triangleright W$$

□

Auf Gleichung 2.1.5 folgt direkt:

**Gleichung 6.**

$$(L \cap U) \triangleright V \subseteq (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$

*Beweis.*

$$w \in (L \cap U) \triangleright V \to w \in V \wedge \exists p : p \sqsubseteq w \wedge p \in L \wedge p \in U \wedge p \textit{ ist minimal}$$

$$\to \underbrace{w \in V \wedge \exists p : p \sqsubseteq w \wedge p \in L \wedge p \textit{ ist minimal}}_{w \in L \triangleright V} \wedge \underbrace{w \in V \wedge \exists p : p \sqsubseteq w \wedge p \in U \wedge p \textit{ ist minimal}}_{w \in U \triangleright V}$$

□

**Gleichung 7.**

$$L \triangleright (U \cup V) \subseteq (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

**Lemma 1.**

$$Min\ (A \cup B) \subseteq Min\ A \cup Min\ B$$

Es genügt, die Eigenschaft für $L = \{w\}$ zu zeigen.

*Beweis.*

$$L \triangleright (W \cup V) = w \triangleright (W \cup V)$$

$$= Min\ (w \cdot X^* \cap (W \cup V))$$

Nach Anwenden der Distributivgesetze ergibt sicht:

$$= Min\ ((w \cdot X^* \cap W) \cup (w \cdot X^* \cap V))$$

Anwendung von Lemma 1:

$$\subseteq Min\ (w \cdot X^* \cap W) \cup Min\ (w \cdot X^* \cap V)$$

$$= (L \triangleright W) \cup (L \triangleright V)$$

□

**Gleichung 8.**

$$L \triangleright (U \cap V) \supseteq (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

**Lemma 2.**

$$Min\ (A \cap B) \supseteq Min\ A \cap Min\ B$$

Es genügt die Eigenschaft für $L = \{w\}$ zu zeigen.

*Beweis.*

$$L \triangleright (U \cap V) = Min\ (w \cdot X^* \cap (U \cap V))$$

Nach Anwenden der Distributivgesetze ergibt sicht:

$$= Min\ ((w \cdot X^* \cap U) \cap (w \cdot X^* \cap V))$$

Anwendung von Lemma 2:

$$\supseteq Min\ (w \cdot X^* \cap U) \cap Min\ (w \cdot X^* \cap V)$$

$$= (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

□

**Gleichung 9.**

$$L_1 \subseteq L_2 \rightarrow L_1 \triangleright L_2 = L_1$$

**Eigenschaft 1.**

$$l \in L \rightarrow l \triangleright L = \{l\}$$

*Beweis.*

$$L_1 \triangleright L_2 = \bigcup_{l \in L_1} l \triangleright L_2$$

$$wegen\ L_1 \subseteq L_2 : l \triangleright L_2 = \{l\}$$

$$= \bigcup_{l \in L_1} \{l\} = L_1$$

□

**Gleichung 10.**

$$L_2 \subseteq L_1 \rightarrow L_1 \triangleright L_2 = L_2$$

*Beweis.*

$$Da\ L_2 \subseteq L_1\ gilt\ für\ alle\ l \in L_2 \wedge l \in L_1 : l \triangleright L_2 = \{l\}$$

$$\bigcup_{l \in L_1} l \triangleright L_2 = \bigcup_{l \in L_1} \{l\} = L_2$$

□

## 2.2 Gilt für einige Sprachen $\exists L, U, V \subseteq X^*$ :

$$L \triangleright (U \cdot V) = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \supset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

## 2.3 Gilt nicht...

Folgt direkt aus den Gleichungen in 2.1

$$L \triangleright (U \cup V) \supset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cap V) \subset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \subset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$(L \cap U) \triangleright V \supset (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cup V) \subset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$
$$L = \{a, b\} U = \{aaa\} V = \{bb, aa\}$$

$$L \triangleright (U \cup V) = (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$
$$L = \{a, b\} U = \{aaa\} V = \{aaa\}$$

$$L \triangleright (U \cap V) \supset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$
$$L = \{a, b\} U = \{aaa, b, bb\} V = \{bb, aaa\}$$

$$L \triangleright (U \cap V) = (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$
$$L = \{a\} U = \{aaa\} V = \{aaa\}$$

$$(L \cap U) \triangleright V \subset (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$
$$L = \{aa, bb\} U = \{aa, b\} V = \{aa, bb\}$$

$$(L \cap U) \triangleright V = (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$
$$L = \{aaa\} U = \{aaa\} V = \{aaa\}$$

$$L \triangleright (U \cup V) \not\supset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V),$$
Gegenbeispiel: $L = \{a\} \quad U = \{abb, aaba\} \quad V = \{aab, aba\}$

$L \triangleright (U \cup V) = \{abb, aba, aab\}$ ,aber $L \triangleright U \cup L \triangleright V = \{abb, aaba\} \cup \{aab, aba\} = \{abb, aaba, aab, aba\}$

$$L \triangleright (U \cap V) \not\subset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V),$$
Gegenbeispiel: $L = \{a, b\} \quad U = \{a, aa\} \quad V = \{aa, b\}$

$L \triangleright (U \cap V) = \{aa\}$ ,aber $L \triangleright U \cap L \triangleright V = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

$$L \triangleright (U \cdot V) = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V),$$

Beispiel: $L = \{e\} \quad U = \{a\} \quad V = \{b\}$

$$L \triangleright (U \cdot V) \supset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V),$$

Beispiel: $L = \{a\} \quad U = \{aa\} \quad V = \{b, a\}$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 \not\supseteq L_1 \triangleright (L_2 \triangleright L_3)$$

Gegenbeispiel: $L_1 = \{ab, aa\} \quad L_2 = \{a, ab\} \quad L_3 = \{aa\}$

$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 = \{ab\} \triangleright \{aa\} = \emptyset$ ,aber $\{ab, aa\} \triangleright \{aa\} = \{aa\}$

# 3 Eigenschaften bei Sprachen spezieller Gestalt

Bedingung:

$$V \subseteq X^* \backslash W \cdot X^*$$

**Eigenschaft 2.**

$$V \triangleright W \cdot X^* = V \triangleright W$$

Es genügt die Eigenschaft zu zeigen für $L = \{v\}$:

*Beweis.*

$$V \triangleright W \cdot X^* = \{v\} \triangleright W \cdot X^*$$

Nach Definition der Operation Fortsetzung ergibt sich:

$$= min_{\sqsubseteq}\{w : w \in W \cdot X^* \wedge v \sqsubseteq w\}$$

Wir wissen aus der Vorrausetzung, dass $v \notin W \cdot X^*$, daraus folgt unmittelbar, dass $v \in pref(W) \backslash W$.
Angenommen es existiert ein $w \in W \cdot X^+$ in $min_{\sqsubseteq}\{w : w \in W \cdot X^* \wedge v \sqsubseteq w\}$, so ist $w'$ mit $w = w' \cdot r \wedge w' \in W$ ein kürzeres Wort, daher gilt:

$$min_{\sqsubseteq}\{w : w \in W \cdot X^* \wedge v \sqsubseteq w\} = min_{\sqsubseteq}\{w : w \in W \wedge v \sqsubseteq w\}$$

□

**Eigenschaft 3.**

$$V \triangleright W = V \triangleright Min\,(W)$$

**Eigenschaft 4.** $pref(V) \triangleright W$

*Beweis.* 1. Fall: $w \in W \cap pref(V) \rightarrow w \in pref(V) \triangleright W$
2. Fall: $w \in W \backslash pref(V) \rightarrow w \in V \triangleright Min(W)$
$\rightarrow pref(V) \triangleright W = (pref(V) \cap W) \cup (pref(V) \triangleright Min\ (W))$

□

**Eigenschaft 5.** $W \triangleright pref(V) = W \cap pref(V)$

Es genügt die Eigenschaft für $W = \{w\}$ zu zeigen:

*Beweis.*

$$W \triangleright pref(V) = \{w\} \triangleright pref(V)$$
$$= min_{\sqsubseteq}\{v : v \in pref(V) \wedge w \sqsubseteq v\}$$

Aus $v \in pref(V) \wedge w \sqsubseteq v$ folgt direkt, dass $w \in pref(V)$. Damit ergibt sich :

$$min_{\sqsubseteq}\{v : v \in pref(V) \wedge w \sqsubseteq v\} = \{v : v \in pref(V) \wedge w = v\} = \{w\} \cap pref(V)$$

□

**Eigenschaft 6.** $V \cdot X^* \triangleright W$

*Beweis.* $\bigcup_{v \in VX^*} Min_{\sqsubseteq}\{w : w \in W \wedge v \sqsubseteq w\}$
$v \in VX^* \wedge v \sqsubseteq w \rightarrow w \in VX^*$
$= \{w : w \in W \wedge w \in VX^*\} = W \cap VX^*$

□

**Eigenschaft 7.**

$$W \triangleright V \cdot X^*$$

*Beweis.* Die Aussage lässt sich in 2 Fälle aufteilen:

Fall a) $W \subseteq X^* \backslash V \cdot X^*$
Fall b) $W \subseteq V \cdot X^*$

Es genügt die Eigenschaft zu zeigen für $W = \{w\}$.
zu a): Wie in Eigenschaft 3.2 und 3.3 bereits gezeigt folgt aus der der Bedingung in Fall a): $W \subseteq X^* \backslash V \cdot X^* \rightarrow W \triangleright V \cdot X^* = W \triangleright Min\ (V)$
zu b): zu betrachten $\{w\} \triangleright V \cdot X^*$

$$\{w\} \triangleright V \cdot X^* = min_{\sqsubseteq}\{v : v \in V \cdot X^* \wedge w \sqsubseteq\}$$

Da wir aus der Bedingung von Fall b) wissen, dass $w \in V \cdot X^*$, so folgt aus:
$min_{\sqsubseteq}\{v : v \in V \cdot X^* \wedge w \sqsubseteq v\}$ unmittelbar, dass es sich um die Menge

$\{v : v \in V \cdot X^* \wedge w = v\} = \{w\} \cap V \cdot X^*$ handelt.

Daraus folgt direkt:

$$W \triangleright V \cdot X^* = (W \triangleright Min\ (V)) \cup (W \cap V \cdot X^*)$$

$\square$

# 4 Abgeschlossenheit in der CHOMSKY-Hierachie

## 4.1 Regularität

Seien $L$ und $W$ regulär, so ist auch $L \triangleright W$ regulär.

Automat $A_L = (X, Z, z_0, \delta_L, Z_f)$ akzeptiere $L$, Automat $A_W = (X, S, s_0, f, S_f)$ akzeptiere $W$. Automat $A$ akzeptiert $L \triangleright W$,

Vorgehensweise:
$A_L$ und $A_W$ lesen das Wort $w$ parallel. Falls $A_L$ akzeptiert und wählt $A$ nicht-deterministisch aus ob Schritt 2 aktiviert wird oder nicht.
Schritt 2: $A_W$ liest das Wort $w$ zu Ende, während $A_L$ im Zustand $z'_f$ verweilt. Sollte $A_W$ auf diesem mehr als einmal akzeptieren, so akzeptiert $A$ nicht indem $A_W$ im Stoppzustand $s_x$ stehen bleibt, ansonsten akzeptiert $A$.

$A = (X, Z \cup \{z'_f\} \times S \cup \{s_x\}, (z_0, s_0), \delta, \{(z'_f, s') : s' \in S_f\}), s_x \notin S$ mit

$\delta = \{((z_i, s_i), x, (z_j, s_j)) : (z_i, x, z_j) \in \delta_L \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup$
$\{((z_i, s_i), x, (z'_f, s_j)) : (z_i, x, z') \in \delta_L \wedge z' \in Z_f \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup$
$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_j)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \notin S_f\} \cup$
$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_x)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \in S_f\}$

## 4.2 Kontextfreiheit

### 4.2.1 deterministisch kontextfrei

Es existieren deterministisch kontextfreie Sprachen $L, W$, sodass $L \triangleright W$ nicht deterministisch kontextfrei ist!

$$L = \{a^n b^n c^i : i, n > 0\} \qquad W = \{a^i b^n c^n : i, n > 0\}$$

So ist

$$L \triangleright W = \bigcup_{l \in L} Min_{\sqsubseteq}\{w : w \in W \wedge l \sqsubseteq w\} = \{a^n b^n c^n : n > 0\} = U$$

Und von $U$ wissen wir, dass es nicht kontextfrei, also auch nicht deterministisch kontextfrei ist.

## 4.3 Entscheidbarkeit

Seien $L$ und $W$ (Turing)entscheidbar, so ist auch $L \triangleright W$ entscheidbar.

Seien die Turing Maschinen $T_L$ und $T_W$.

Die Turing Maschine $T$ entscheidet $L \triangleright W$ nach folgendem Algorithmus:

**Algorithm 1** entscheide $L \triangleright W$, Input $w$

```
if (w ∈ W ∧ w ∈ L) then
  T accepts
end if
w' = w
if (w ∈ W) then
  return false
end if
repeat
  w' ← cut(w')
  if (w' ∈ W) then
    T rejects
  end if
  if (w' ∈ L) then
    T accepts
  end if
until (w' == e)
T rejects
```

# 5 Schlusswort

# 6 Quellen und Literatur