

# **Über die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen**

Robert Hartmann

24. September 2010

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Eigenschaften</b>	<b>5</b>
2.1	Allgemeines . . . . .	5
2.2	grundlegende Beziehungen . . . . .	5
2.3	Konkatenation . . . . .	7
2.4	Gilt nicht... . . . .	7
<b>3</b>	<b>Eigenschaften bei Sprachen spezieller Gestalt</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Abgeschlossenheit in der CHOMSKY-Hierarchie</b>	<b>10</b>
4.1	Regularität . . . . .	10
4.2	Kontextfreiheit . . . . .	11
4.2.1	deterministisch kontextfrei . . . . .	11
4.3	Entscheidbarkeit . . . . .	12
4.3.1	L und W entscheidbar . . . . .	12
4.3.2	L akzeptierbar, W entscheidbar . . . . .	13
4.3.3	L entscheidbar, W akzeptierbar . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Quellen und Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen. Diese Operation wird in der Arbeit [St87] eingeführt.

Wir bezeichnen die Menge  $X^*$  als Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet  $X$ .

Wir bezeichnen weiterhin die Menge  $X^\omega$  als Menge aller unendlichen Wörter über dem Alphabet  $X$ .

Sei ferner die Präfixrelation  $\sqsubseteq$  wie üblich definiert:

**Definition 1.**

$$w \sqsubseteq b \Leftrightarrow w \cdot b' = b, \text{ für ein } b' \in X^*$$

$$\text{pref}(L) = \{v : v \sqsubseteq w \wedge w \in L\}$$

Es wird nun der  $\delta$ -Limes einer Wortmenge  $W^\delta$  definiert (s. [St87, Seite X])

**Definition 2.**

$$W^\delta = \{\beta : \beta \in X^\omega \text{ und } \text{pref}(\beta) \cap W \text{ ist unendlich}\}$$

Die folgende Eigenschaft (13) aus [St87] ist leicht einzusehen:

$$(U \cup W)^\delta = U^\delta \cup W^\delta$$

**Definition 3.** Eine Sprache nennen wir eine  $(\sigma, \delta)$ -Teilmenge von  $X^*$  genau dann, wenn für alle  $\beta \in X^\omega$  entweder  $\text{pref}(\beta) \cap W$  oder  $\text{pref}(\beta) \setminus W$  endlich ist.

Beispiele für  $(\sigma, \delta)$ -Teilmengen sind alle endlichen Sprachen und deren Komplemente. Weitere Beispiele sind Sprachen der Form  $\text{pref}(U)$  oder  $W \cdot X^*$ .

Eine Eigenschaft für diese Teilmengen ergibt sich wie folgt :

**Satz 1** (St87). Sei  $U$  eine  $(\sigma, \delta)$ -Teilmenge von  $X^*$ , dann gilt:

$$(U \cap W)^\delta = U^\delta \cap W^\delta, \quad \text{für alle } W \subseteq X^*$$

Nun wird die Operation “Fortsetzung“ wie in [St87] eingeführt, im nachfolgenden als  $\triangleright$  bezeichnet. Die Fortsetzung eines Wortes  $w$  in eine Sprache  $V \subseteq X^*$  sei definiert als:

**Definition 4.**

$$w \triangleright V := \text{Min } \sqsubseteq \{v : v \in V \wedge w \sqsubseteq v\} = \text{Min } (w \cdot X^* \cap V)$$

Diese Operation wird wie folgt auf Sprachen ausgedehnt, dabei bezeichnen wir die Fortsetzung einer Sprache  $W$  in eine Sprache  $V \subseteq X^*$  mit:

**Definition 5.**

$$W \triangleright V := \bigcup_{w \in W} w \triangleright V$$

Diese Operation hat nun folgende Eigenschaft bezüglich des  $\delta$ -Limes: Während

$$(W \cap U)^\delta = W^\delta \cap U^\delta$$

nur für  $(\sigma, \delta)$ -Teilemgen gilt, so gilt

$$(W \triangleright U)^\delta = W^\delta \cap U^\delta$$

für sämtliche Sprachen

Daher wird nun im Verlauf der Arbeit die Operation Fortsetzung untersucht.

## 2 Eigenschaften

### 2.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt betrachten wir Eigenschaften der Operation der Fortsetzung von Sprachen. Hierbei werden insbesondere die Stabilität bzw. Monotonie bezüglich mengentheoretischen Operationen betrachtet.

### 2.2 grundlegende Beziehungen

Aus der Definition folgen direkt die Eigenschaften:

**Eigenschaft 1.**  $\{w\} \triangleright L = \{w\}$ , wenn  $w \in L$   
 $W \cap L \subseteq W \triangleright L \subseteq L$

**Eigenschaft 2.**  $(W \cup V) \triangleright L = W \triangleright L \cup V \triangleright L$

Aus Eigenschaft 1 wissen wir, dass  $W \cap L \subseteq W \triangleright L$ . Man kann nun die Fortsetzung von  $W$  in  $L$  aufsplitten, sodass sich folgende Beziehung ergibt:

**Eigenschaft 3.**  $W \triangleright L = W \cap L \cup (W \setminus L) \triangleright L$

Aus der Eigenschaft 3 folgt durch Einschränkung der Mengen  $W$  bzw.  $L$ :

**Folgerung 1.**  $W \subseteq L \rightarrow W \triangleright L = W \cap L = W$

**Folgerung 2.**  $W \supseteq L \rightarrow W \triangleright L = W \cap L = L$

Aus Eigenschaft 2 folgt:

**Eigenschaft 4.**  $W \triangleright L \rightarrow W \triangleright V \subseteq L \triangleright V$

Damit haben wir eine

**Gleichung 2.1.**  $(L \cap U) \triangleright V \subseteq (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$

Dabei muss nicht notwendig die Gleichheit gelten, wie das folgende Beispiel zeigt

**Beispiel 1.** Es seien  $L = \{aa, bb\}$ ,  $U = \{aa, b\}$ ,  $V = \{aa, bb\}$ .  
Dann haben wir  $(L \cap U) \triangleright V = \{aa\} \subset \{aa, bb\} = (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$

**Gleichung 2.2.**  $L \triangleright (U \cup V) \subseteq (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$

Zum Beweis bemühen wir die Beziehung aus

**Lemma 1.**  $\text{Min}(A \cup B) \subseteq \text{Min } A \cup \text{Min } B$

*Beweis.* Es genügt, die Eigenschaft für  $L = \{w\}$  zu zeigen.

Es gilt  $w \triangleright (W \cup V) = \text{Min}(w \cdot X^* \cap (W \cup V)) = \text{Min}((w \cdot X^* \cap W) \cup (w \cdot X^* \cap V))$

und mit Lemma 1 erhalten wir:

$w \triangleright (W \cup V) \subseteq \text{Min}(w \cdot X^* \cap W) \cup \text{Min}(w \cdot X^* \cap V) = (L \triangleright W) \cup (L \triangleright V)$  □

Dabei muss nicht notwendig die Gleichheit gelten, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 2.** Es seien  $L = \{a, b\}$ ,  $U = \{aaa\}$ ,  $V = \{bb, aa\}$ .

Dann haben wir  $L \triangleright (U \cup V) = \{aa, bb\} \subset \{aa, bb, aaa\} = (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$

Eine ähnliche Beziehung ergibt sich für die Operation  $\cup$

**Gleichung 2.3.**  $L \triangleright (U \cap V) \supseteq (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$

Zum Beweis bemühen wir die Beziehung aus

**Lemma 2.**  $\text{Min}(A \cap B) \supseteq \text{Min} A \cap \text{Min} B$

*Beweis.* Es genügt die Eigenschaft für  $L = \{w\}$  zu zeigen.

Es gilt  $w \triangleright (U \cap V) = \text{Min}(w \cdot X^* \cap (U \cap V)) = \text{Min}((w \cdot X^* \cap U) \cap (w \cdot X^* \cap V))$

und mit Lemma 2 erhalten wir

$w \triangleright (U \cap V) \supseteq \text{Min}(w \cdot X^* \cap U) \cap \text{Min}(w \cdot X^* \cap V)$

$= (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$

□

Dabei muss nicht notwendig die Gleichheit gelten, wie das folgende Beispiel zeigt

**Beispiel 3.** Es seien  $L = \{a, b\}$ ,  $U = \{aaa, b, bb\}$ ,  $V = \{bb, aaa\}$

Dann haben wir  $L \triangleright (U \cap V) = \{bb, aaa\} \supset \{aaa\} = (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$

## 2.3 Konkatenation

Bisher wurden hauptsächlich die Operationen  $\cap$  sowie  $\cup$  in Verbindung mit  $\triangleright$  betrachtet. Für die Konkatenation ergeben sich keine Eigenschaften allgemeingültiger Natur.

So gibt es Sprachen, bei denen die Gleichheit in folgender Weise gegeben ist:

**Beispiel 4.** *Es seien  $L = \{e\}$ ,  $U = \{a\}$ ,  $V = \{b\}$ , so erhalten wir  $L \triangleright (U \cdot V) = \{ab\} = \{ab\} = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$ , also  $L \triangleright (U \cdot V) = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$*

weiterhin können wir Sprachen angeben, sodass Teilmengenbeziehung in folgender Weise existieren:

**Beispiel 5.** *Es seien  $L = \{a\}$ ,  $U = \{aa\}$ ,  $V = \{b, a\}$ . Dann erhalten wir  $L \triangleright (U \cdot V) = \{aab, aaa\} \supset \{aaa\} = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$ , also  $L \triangleright (U \cdot V) \supset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$ .*

Das letzte Beispiel in diesem Abschnitt zeigt deutlich, dass keine allgemeingültigen Eigenschaften für die Operation  $\cdot$  bezüglich  $\triangleright$  existieren:

**Beispiel 6.** *Es seien  $L = \{aab, a\}$ ,  $U = \{aa\}$ ,  $V = \{b\}$ . Dann erhalten wir  $L \triangleright (U \cdot V) = \{aab\} \neq \{aa\} = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$ , das bedeutet also, dass beide Seiten mengentheoretisch unvergleichbar sind, also  $L \triangleright (U \cdot V) \not\supset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$ , sowie  $L \triangleright (U \cdot V) \not\subset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$*

Betrachtet man nun die Konkatenation ‘vorn’, also die Beziehung  $(L \cdot U) \triangleright V$  zu  $(L \triangleright V) \cdot (U \triangleright V)$ , so sieht man leicht, dass es sich auf der linken Seite der Gleichung um Wörter aus  $V$  handelt die man vergleicht mit Wörtern aus  $V^2$ .

Demnach treten hier Eigenschaften nur auf wenn  $V$  eine ganz spezielle Gestalt hat.

## 2.4 Gilt nicht...

Folgt direkt aus den Gleichungen in 2.1

$$L \triangleright (U \cup V) \supset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cap V) \subset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \subset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$(L \cap U) \triangleright V \supset (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$

### 3 Eigenschaften bei Sprachen spezieller Gestalt

Im nun vorliegenden Abschnitt wird die Operation Fortsetzung im Hinblick auf Sprachen mit spezieller Gestalt untersucht. Dabei geht es hauptsächlich um Sprachen der Form  $\text{pref}(L)$  oder  $W \cdot X^*$ .

**Lemma 3.** Sei  $V \subseteq X^* \setminus W \cdot X^*$ , so gilt  $V \triangleright W \cdot X^* = V \triangleright \text{Min}(W)$

zu zeigen:

1.  $V \triangleright W \cdot X^* \subseteq V \triangleright \text{Min}(W)$
2.  $V \triangleright W \cdot X^* \supseteq V \triangleright \text{Min}(W)$

*Beweis.* :

zu 1. Die Inklusion  $\supseteq$  folg aus  $W \cdot X^* \supseteq \text{Min}(W)$ .

zu 2. Zum Beweis der anderen Inklusion genügt es, diese für den Fall  $V = \{v\}$  zu zeigen.

Es sei nun  $w \in v \triangleright W \cdot X^*$ , wobei nach Voraussetzung  $v \notin W \cdot X^*$  gelte. Dann gilt für kein  $u$ ,  $v \sqsubseteq u \sqsubset w$  oder  $u \sqsubseteq v$  die Beziehung  $u \in W \cdot X^*$ .

Also haben wir  $w \in \text{Min}(W \cdot X^*) = \text{Min}(W)$  □

**Eigenschaft 5.**  $W \triangleright \text{pref}(V) = W \cap \text{pref}(V)$

*Beweis.* Es genügt die Eigenschaft für  $W = \{w\}$  zu zeigen:

Aus der Definition wissen wir, dass  $w \triangleright \text{pref}(V) = \text{Min}(\{w\} \cdot X^* \cap \text{pref}(V))$  gilt. Ist  $w' \in (\{w\} \cdot X^* \cap \text{pref}(V))$ , so sieht man, dass  $w \sqsubseteq w'$  gilt. Also haben wir wegen  $w' \in \text{pref}(V)$  auch  $w \in \text{pref}(V)$ . Daraus folgt  $\text{Min}(\{w\} \cdot X^* \cap \text{pref}(V)) = \{w\} \cap \text{pref}(V)$  □

**Eigenschaft 6.**  $V \cdot X^* \triangleright W = V \cdot X^* \cap W$

*Beweis.* Die Inklusion  $\supseteq$  folgt aus Eigenschaft 1. Zum Beweis der anderen Inklusion betrachten wir  $w \in V \cdot X^* \triangleright W$ . Es muss nun ein  $v \in V \cdot X^*$  existieren, sodass  $w \in \{v\} \triangleright W$  gilt. Daraus folgt, dass  $v$  ein Präfix von  $w$  sein muss, was wiederum bedeutet, dass  $w \in V \cdot X^*$ . Somit gilt die Inklusion  $V \cdot X^* \triangleright W \subseteq W \cap V \cdot X^*$ . □

**Eigenschaft 7.**  $W \triangleright V \cdot X^* = (W \triangleright \text{Min}(V)) \cup (W \cap V \cdot X^*)$

*Beweis.*  $W$  lässt sich in 2 Teile aufsplitten:  $W = (W \cap V \cdot X^*) \cup (W \setminus V \cdot X^*)$ . Nun betrachten wir folgende 2 Fälle:

Fall a)  $w \in W \cap V \cdot X^*$

Fall b)  $w \in W \setminus V \cdot X^*$

zu a):  $w \triangleright V \cdot X^* \rightarrow w \in (W \cap V \cdot X^*)$



zu b): Es gilt nach Voraussetzung  $\{w\} \subseteq X^* \setminus V \cdot X^*$  und mit Hilfe von Lemma 3 erhalten wir  $\{w\} \triangleright V \cdot X^* = \{w\} \triangleright \text{Min}(V)$

Daraus folgt:

$$W \triangleright V \cdot X^* = (W \triangleright \text{Min}(V)) \cup (W \cap V \cdot X^*)$$

□

## 4 Abgeschlossenheit in der CHOMSKY-Hierarchie

### 4.1 Regularität

**Satz 2.** Sind  $L$  und  $W$  regulär, so ist auch  $L \triangleright W$  regulär.

Der nicht-deterministische Automat  $A_L = (X, Z, z_0, \delta_L, Z_f)$  akzeptiere  $L$ , der deterministische Automat  $A_W = (X, S, s_0, f, S_f)$  akzeptiere  $W$ . Wir konstruieren einen nicht-deterministischen Automaten  $A$ , der  $L \triangleright W$  akzeptiert

Arbeitsweise:

$A_L$  und  $A_W$  lesen das Wort  $w$  parallel. Falls  $A_L$  ein Präfix  $v$  von  $w$  akzeptiert, wählt  $A$  nicht-deterministisch aus ob Schritt 2 aktiviert wird oder nicht.

Wird Schritt zwei aktiviert, so liest  $A_W$  das Wort  $w$  weiter, während  $A_L$  in einem Ruhezustand  $z'_f$  verweilt. Akzeptiert  $A_W$  nun ein Präfix  $v'$ ,  $v \sqsubseteq v' \sqsubseteq w$ , so lehnt  $A$  das Eingabewort  $w$  ab. Sollte der Automat  $A_W$  kein solches Präfix  $v'$  akzeptieren, aber das Eingabewort  $w$ , so akzeptiert auch  $A$ .

$$A = (X, Z \cup \{z'_f\} \times S \cup \{s_x\}, (z_0, s_0), \delta, \{(z'_f, s') : s' \in S_f\}, s_x \notin S \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} \delta = & \{((z_i, s_i), x, (z_j, s_j)) : (z_i, x, z_j) \in \delta_L \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup \\ & \{((z_i, s_i), x, (z'_f, s_j)) : (z_i, x, z'_f) \in \delta_L \wedge z'_f \in Z_f \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup \\ & \{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_j)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \notin S_f\} \cup \\ & \{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_x)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \in S_f\} \end{aligned}$$

*Beweis.* Nach Konstruktion ist klar, dass der Automat  $A$  nur Wörter aus  $L \triangleright W$  akzeptiert. Er akzeptiert auch alle Wörter aus  $L \triangleright W$ , weil der Automat  $A_L$ , welcher die Präfixe akzeptiert, nicht-deterministisch entscheidet, ob das gefundene Präfix zum Wort  $w$  gehört. Damit akzeptiert der Automat  $A$  ein Eingabewort  $w$  genau dann, wenn  $w \in L \triangleright W$   $\square$

## 4.2 Kontextfreiheit

### 4.2.1 deterministisch kontextfrei

Es existieren deterministisch kontextfreie Sprachen  $L, W$ , sodass  $L \triangleright W$  nicht deterministisch kontextfrei ist.

Sei  $L = \{a^n b^n c^i : i, n > 0\}$  und  $W = \{a^i b^n c^n : i, n > 0\}$ . Sowohl  $L$  als auch  $W$  sind deterministische, kontextfreie und auch lineare Sprachen, da es je einen deterministischen Kellerautomaten gibt, der  $L$  sowie  $W$  akzeptiert und eine es lineare Grammatiken  $G_L$  und  $G_W$  gibt, sodass  $L(G_L) = L$  und  $L(G_W) = W$  gilt.

Betrachtet man sich nun ein Wort  $u \in L \triangleright W$  so muss  $u$  laut Definition folgende Struktur besitzen  $u \in \text{Min}(v \cdot X^* \cap W)$  für ein  $v \in L$ . Damit sieht man leicht, dass  $L \triangleright W = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$  und diese Sprache ist bekanntlich nicht kontextfrei, also auch nicht deterministisch kontextfrei

## 4.3 Entscheidbarkeit

### 4.3.1 L und W entscheidbar

Seien  $L$  und  $W$  (Turing)entscheidbar, so ist auch  $L \triangleright W$  entscheidbar.

Seien die Turing Maschinen  $T_L$  und  $T_W$ .

Die Turing Maschine  $T$  entscheidet  $L \triangleright W$  nach folgendem Algorithmus:

---

**Algorithm 1** entscheide  $L \triangleright W$ , Input  $w$

---

```
if ( $w \notin W$ ) then
   $T$  rejects
else
  if ( $w \in L$ ) then
     $T$  accepts
  end if
end if
 $w' = w$ 
repeat
   $w' \leftarrow cut(w')$ 
  if ( $w' \in W$ ) then
     $T$  rejects
  end if
  if ( $w' \in L$ ) then
     $T$  accepts
  end if
until ( $w' == e$ )
 $T$  rejects
```

---

### 4.3.2 L akzeptierbar, W entscheidbar

Sei  $w$  die Eingabe. Es soll  $w$  akzeptiert werden, wenn  $w \in L \triangleright W$ , wobei  $L$  akzeptierbar und nicht entscheidbar und  $W$  entscheidbar.

Dazu zählt man  $l \in L$  auf und prüft für alle  $u$  mit  $l \sqsubseteq u \sqsubset w$ , ob ein  $u \in W$  liegt. Sollte dies der Fall sein, darf man nicht akzeptieren. Dann wird ein weiteres  $l$  aufgezählt und der Algorithmus beginnt von vorn.

---

**Algorithm 2** akzeptiere  $L \triangleright W$ , Input  $w$

---

```

if ( $w \notin W$ ) then
   $T$  rejects
end if
while true do
  zähle ein  $u \in L$  auf
  if  $u \in \text{pref}(\{w\})$  then
     $v := w$ 
    while  $v \neq u$  do
       $v := w'$  mit  $w' \cdot x = v$ ,  $x \in X$ 
      exit WHEN  $v \in W$ 
    end while
    if  $v = u$  then
       $T$  accepts
    end if
  end if
end while

```

---

### 4.3.3 L entscheidbar, W akzeptierbar

Sei  $L$  entscheidbar und  $W$  aufzählbar, so ist  $L \triangleright W$  nicht notwendig aufzählbar.

*Beweis.* Wir wählen ein  $A \subseteq \mathbb{N}$  welches aufzählbar, aber nicht entscheidbar ist und setzen  $W = \{0^{n+1} 1^{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^{n+1} 1 : n \in A\}$ . Also ist  $W$  aufzählbar. Betrachten wir nun  $L \triangleright W = 0 \triangleright W = \{0^{n+1} 1^{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge n \notin A\} \cup \{0^{n+1} 1 : n \in \mathbb{N} \wedge n \in A\}$ . Angenommen  $0 \triangleright W$  wäre aufzählbar, so müsste  $0 \triangleright W \cap V = \{0^{n+1} 1^{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge n \notin A\}$  wiederum aufzählbar sein. Weil aber laut Voraussetzung  $A$  nicht entscheidbar ist, kann  $X^* \setminus A$  nicht aufzählbar sein. Widerspruch zur Annahme.  $\square$

## **5 Schlusswort**

## **6 Quellen und Literatur**

### **Literatur**

[St87] L. Staiger, Sequential Mappings of  $\omega$ -Languages, ORT, 1987, pp. 148–170.