Über die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen

Robert Hartmann

24. September 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit wird die Operation Fortsetzung bei formalen Sprachen untersucht. Im Folgenden wird erläutert warum die Operation in [St87] eingeführt wurde und welchen Nutzen sie birgt.

Wir bezeichnen die Menge X^* als Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet X.
Wir bezeichnen weiterhin die Menge X^ω als Menge aller unendlichen Wörter über dem Alphabet X.
Sei ferner die Relation $\sqsubseteq$ wie üblicherweise definiert:

Definition 1.

$$w \sqsubseteq b \Leftrightarrow w \cdot b' = b, \text{ \textit{für ein} } b' \in X^*$$

$$\mathit{pref}(L) = \{v : v \sqsubseteq w \wedge w \in L\}$$

Sei nun W^δ definiert [1]

Definition 2.

$$W^\delta = \{\beta : \beta \in X^\omega \text{ \textit{und} } \mathit{pref}(\beta) \cap W \text{ \textit{ist unendlich}}\}$$

Folgende Eigenschaft wurde nun bereits in [2] bewiesen:

$$(U \cup W)^\delta = U^\delta \cup W^\delta$$

Definition 3. *Eine Sprache nennen wir eine (σ, δ)-Teilmenge von X^* genau dann, wenn für alle $\beta \in X^\omega$ entweder $\mathit{pref}(\beta) \cap W$ oder $\mathit{pref}(\beta) \backslash W$ endlich ist.*

Beispiele für (σ, δ)-Teilmengen sind alle endlichen Sprachen und deren Komplemente. Weitere Beispiele sind Sprachen der Form $\mathit{pref}(U)$ oder $W \cdot X^*$.
Eine Eigenschaft für diese Teilmengen lautet wiefolgt:

Satz 1. *Sei U eine $(\sigma, \delta) -$ Teilmenge von X^*, dann gilt:*

$$(U \cap W)^\delta = U^\delta \cap W^\delta, \qquad \text{\textit{für alle} } W \subseteq X^*$$

Nun wird die Operation "Fortsetzung" eingeführt [3], im nachfolgenden als $\triangleright$ bezeichnet. Die Fortsetzung eines Wortes w in V sei definiert als:

Definition 4.

$$w \triangleright V := \min_{\sqsubseteq}\{v : v \in V \wedge w \sqsubseteq v\} = \min(w \cdot X^* \cap V)$$

[1] St87]
[2] [St87, Gleichung 13]
[3] [St87, S.170]

Man kann diese Definition nun ausdehnen auf Sprachen. Die Fortsetzung zweier Sprachen W und V ergibt sich somit zu:

Definition 5.

$$W \triangleright V := \bigcup_{w \in W} w \triangleright V$$

Diese Operation hat nun folgende interessante Eigenschaft bezüglich der oben genannten Definitionen: Während

$$(W \cap U)^{\delta} = W^{\delta} \cap U^{\delta}$$

nur für (σ, δ)-Teilemgen gilt, so gilt aber

$$(W \triangleright U)^{\delta} = W^{\delta} \cap U^{\delta}$$

für sämtliche Sprachen [4]

Daher wird nun im Verlauf der Arbeit die Operation Fortsetzung gründlich analysiert und all ihre Eigenschaften dokumentiert.

[4] [St87, Gleichung 20]

2 allgemeine Eigenschaften

2.1 Gilt für alle Sprachen

Gleichung 1.

$$u \in L \rightarrow (u \triangleright L = \{u\})$$

Beweis. □

Gleichung 2.

$$L \triangleright L = L$$

Beweis. □

Gleichung 3.

$$U \triangleright L \subseteq L$$

Beweis. □

Gleichung 4.

$$L \triangleright (U \cup V) \subseteq (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

Lemma 1.

$$\min(A \cup B) \subseteq \min A \cup \min B$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
L \triangleright (W \cup V) &= \bigcup_{l \in L} l \triangleright (W \cup V) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap (W \cup V)) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min((l \cdot X^* \cap W) \cup (l \cdot X^* \cap V)) \\
&\subseteq \bigcup_{l \in L} (\min(l \cdot X^* \cap W) \cup \min(l \cdot X^* \cap V)) \\
&= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap W) \cup \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap V) \\
&= (L \triangleright W) \cup (L \triangleright V)
\end{aligned}$$

□

Gleichung 5.

$$L \triangleright (U \cap V) \supseteq (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

Lemma 2.

$$\min(A \cap B) \supseteq \min A \cap \min B$$

Lemma 3.

$$L \triangleright U \cap L \triangleright V \overset{!}{=} \bigcup_{l \in L} (l \triangleright U \cap l \triangleright V)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} L \triangleright (U \cap V) &= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap (U \cap V)) \\ &= \bigcup_{l \in L} \min((l \cdot X^* \cap U) \cap (l \cdot X^* \cap V)) \\ &\supseteq \bigcup_{l \in L} (\min(l \cdot X^* \cap U) \cap \min(l \cdot X^* \cap V)) \\ &= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap U) \cap \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap V) \\ &= (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V) \end{aligned}$$

□

Gleichung 6.

$$(L \cup U) \triangleright V = (L \triangleright V) \cup (U \triangleright V)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (L \cup U) \triangleright V &= \bigcup_{l \in L \cup U} \min(l \cdot X^* \cap V) \\ &= \bigcup_{l \in L} \min(l \cdot X^* \cap V) \cup \bigcup_{l \in U} \min(l \cdot X^* \cap V) \\ &= (L \triangleright V) \cup (U \triangleright V) \end{aligned}$$

□

Gleichung 7.

$$(L \cap U) \triangleright V \subseteq (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$

Beweis.

$$w \in (L \cap U) \triangleright V \rightarrow w \in V \wedge \exists p : p \sqsubseteq w \wedge p \in L \wedge p \in U \wedge p \textit{ ist minimal}$$

$$\rightarrow \underbrace{w \in V \wedge \exists p : p \sqsubseteq w \wedge p \in L \wedge p \textit{ ist minimal}}_{w \in L \triangleright V} \wedge \underbrace{w \in V \wedge \exists p : p \sqsubseteq w \wedge p \in U \wedge p \textit{ ist minimal}}_{w \in U \triangleright V}$$

□

Gleichung 8.

$$L_1 \subseteq L_2 \rightarrow L_1 \triangleright L_2 = L_1$$

Eigenschaft 1.

$$l \in L \rightarrow l \triangleright L = \{l\}$$

Beweis.

$$L_1 \triangleright L_2 = \bigcup_{l \in L_1} l \triangleright L_2$$

$$\textit{wegen } L_1 \subseteq L_2 : l \triangleright L_2 = \{l\}$$

$$= \bigcup_{l \in L_1} \{l\} = L_1$$

□

Gleichung 9.

$$L_2 \subseteq L_1 \rightarrow L_1 \triangleright L_2 = L_2$$

Beweis.

$$\textit{Da } L_2 \subseteq L_1 \textit{ gilt für alle } l \in L_2 \wedge l \in L_1 : l \triangleright L_2 = \{l\}$$

$$\bigcup_{l \in L_1} l \triangleright L_2 = \bigcup_{l \in L_1} \{l\} = L_2$$

□

Gleichung 10.

$$L_2 \subseteq L_1 \rightarrow L_2 \triangleright W \subseteq L_1 \triangleright W$$

Beweis.

$$L_1 \triangleright W = \bigcup_{l \in L_1} l \triangleright W$$

$$= \bigcup_{l \in L_2} l \triangleright W \cup \bigcup_{l \in L_1 \setminus L_2} l \triangleright W$$

$$\supseteq \bigcup_{l \in L_2} l \triangleright W = L_2 \triangleright W$$

□

2.2 Gilt für einige Sprachen $\exists L, U, V \subseteq X^* :$

$$L \triangleright (U \cdot V) = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \supset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

2.3 Gilt nicht...

$$L \triangleright (U \cup V) \supset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cap V) \subset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cdot V) \subset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V)$$

$$(L \cap U) \triangleright V \supset (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$

$$L \triangleright (U \cup V) \subset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$
$$L = \{a, b\}U = \{aaa\}V = \{bb, aa\}$$

$$L \triangleright (U \cup V) = (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V)$$
$$L = \{a, b\}U = \{aaa\}V = \{aaa\}$$

$$L \triangleright (U \cap V) \supset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$
$$L = \{a, b\}U = \{aaa, b, bb\}V = \{bb, aaa\}$$

$$L \triangleright (U \cap V) = (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V)$$
$$L = \{a\}U = \{aaa\}V = \{aaa\}$$

$$(L \cap U) \triangleright V \subset (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$
$$L = \{aa, bb\}U = \{aa, b\}V = \{aa, bb\}$$

$$(L \cap U) \triangleright V = (L \triangleright V) \cap (U \triangleright V)$$
$$L = \{aaa\}U = \{aaa\}V = \{aaa\}$$

$$L \triangleright (U \cup V) \not\supset (L \triangleright U) \cup (L \triangleright V),$$
Gegenbeispiel: $L = \{a\} \quad U = \{abb, aaba\} \quad V = \{aab, aba\}$

$L \triangleright (U \cup V) = \{abb, aba, aab\}$,aber $L \triangleright U \cup L \triangleright V = \{abb, aaba\} \cup \{aab, aba\} = \{abb, aaba, aab, aba\}$

$$L \triangleright (U \cap V) \not\subset (L \triangleright U) \cap (L \triangleright V),$$
Gegenbeispiel: $L = \{a, b\} \quad U = \{a, aa\} \quad V = \{aa, b\}$

$L \triangleright (U \cap V) = \{aa\}$,aber $L \triangleright U \cap L \triangleright V = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

$$L \triangleright (U \cdot V) = (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V),$$

Beispiel: $L = \{e\} \quad U = \{a\} \quad V = \{b\}$

$$L \triangleright (U \cdot V) \supset (L \triangleright U) \cdot (L \triangleright V),$$

Beispiel: $L = \{a\} \quad U = \{aa\} \quad V = \{b, a\}$

$$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 \not\supseteq L_1 \triangleright (L_2 \triangleright L_3)$$

Gegenbeispiel: $L_1 = \{ab, aa\} \quad L_2 = \{a, ab\} \quad L_3 = \{aa\}$

$(L_1 \triangleright L_2) \triangleright L_3 = \{ab\} \triangleright \{aa\} = \emptyset$,aber $\{ab, aa\} \triangleright \{aa\} = \{aa\}$

3 Eigenschaften bei Sprachen spezieller Gestalt

$\underline{pref(V) \triangleright W}$
1. Fall: $w \in W \cap pref(V) \to w \in pref(V) \triangleright W$
2. Fall: $w \in W \backslash pref(V)$ $\to$muss im Einzelfall geprüft werden.
$\to pref(V) \triangleright W = \underbrace{W \cap pref(V)}_{A} \cup \mathit{pref(V)} \backslash A \triangleright W$

$\underline{W \triangleright pref(V) = W \cap pref(V)}$
"$\to$"
$\bigcup_{w \in W} \min_{\sqsubseteq}\{v : v \in pref(V) \wedge w \sqsubseteq v\}$
$v \in pref(V) \wedge w \sqsubseteq v \to w \in pref(V)$
$\bigcup_{w \in W}\{w \in pref(V)\} = W \cap pref(V)$

$\underline{V \cdot X^* \triangleright W}$
$\bigcup_{v \in VX^*} \min_{\sqsubseteq}\{w : w \in W \wedge v \sqsubseteq w\}$
$v \in VX^* \wedge v \sqsubseteq w \to w \in VX^*$
$= \{w : w \in W \wedge w \in VX^*\} = W \cap VX^*$

$\underline{W \triangleright V \cdot X^*}$
1.Fall: $w \in W \wedge w \in VX^* \to \{w\} \triangleright VX^* = \{w\} \cap VX^*$
1.Fall: $w \in W \wedge w \notin VX^* \to \{w\} \triangleright VX^* = \emptyset$

$$V \subseteq X^*\backslash W \cdot X^*$$

$$W \triangleright V = \emptyset$$

$$W \triangleright pref(V) = \emptyset$$

$$W \cdot X^* \triangleright V = \emptyset$$

$$V \triangleright W \cdot X^* = V \triangleright W = \max(V) \triangleright \min(W)$$

4 Abgeschlossenheit in der CHOMSKY-Hierachie

4.1 Regularität

Seien L und W regulär, so ist auch $L \triangleright W$ regulär.

Automat $A_L = (X, Z, z_0, \delta_L, Z_f)$ akzeptiere L, Automat $A_W = (X, S, s_0, f, S_f)$ akzeptiere W. Automat A akzeptiert $L \triangleright W$,

Vorgehensweise:
A_L und A_W lesen das Wort w parallel. A_L akzeptiert und A wählt nicht-deterministisch aus ob Schritt 2 aktiviert wird oder nicht. Schritt 2: A_W liest das Wort w zu Ende, sollte A_W auf diesem Weg kein Mal oder mehr als einmal akzeptieren, so akzeptiert A nicht, ansonsten akzeptiert A.
$A = (X, Z \cup \{z'_f\} \times S \cup \{s_x\}, (z_0, s_0), \delta, \{(z'_f, s') : s' \in S_f\})$ mit

$\delta = \{((z_i, s_i), x, (z_j, s_j)) : (z_i, x, z_j) \in \delta_L \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup$
$\{((z_i, s_i), x, (z'_f, s_j)) : (z_i, x, z') \in \delta_L \wedge z' \in Z_f \wedge f(s_i, x) = s_j\} \cup$
$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_j)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \notin S_f\} \cup$
$\{((z'_f, s_i), x, (z'_f, s_x)) : f(s_i, x) = s_j \wedge s_i \in S_f\}$

4.2 Kontextfreiheit

4.2.1 deterministisch kontextfrei

Es existieren deterministisch kontextfreie Sprachen L, W, sodass $L \triangleright W$ nicht deterministisch kontextfrei ist!

$$L = \{a^n b^n c^i : i, n > 0\} \qquad W = \{a^i b^n c^n : i, n > 0\}$$

So ist

$$L \triangleright W = \bigcup_{l \in L} \min_{\sqsubseteq}\{w : w \in W \wedge l \sqsubseteq w\} = \{a^n b^n c^n : n > 0\} = U$$

Und von U wissen wir, dass es nicht kontextfrei, also auch nicht deterministisch kontextfrei ist.

4.3 Entscheidbarkeit

Seien L und W (Turing)entscheidbar, so ist auch $L \triangleright W$ entscheidbar.

Seien die Turing Maschinen T_L und T_W.
Die Turing Maschine T entscheidet $L \triangleright W$ nach folgendem Algorithmus:

Algorithm 1 entscheide $L \triangleright W$, Input w

```
if (w ∈ W ∧ w ∈ L) then
  T accepts
end if
w' = w
if (w ∈ W) then
  return false
end if
repeat
  w' ← cut(w')
  if (w' ∈ W) then
    T rejects
  end if
  if (w' ∈ L) then
    T accepts
  end if
until (w' == e)
T rejects
```

5 Schlusswort

6 Quellen und Literatur