라이트쎈

앞서가는 방법의 비밀은 시작하는 것이다.
시작하는 방법의 비밀은 복잡하고 과중한 작업을
할 수 있는 작은 업무로 나누어 그 첫 번째 업무부터 시작하는 것이다.

마크 트웨인

천 리 길도 한 걸음부터라는 속담이 있듯이

무슨 일이든 시작이 중요합니다.

쉬워 보이는 일도 시작하지 않는다면 완수할 수 없습니다.

시작하는 것이 힘들 때, 할 수 있는 일부터 실천해 보세요.

이를 통해 여러분은 용기 있는 한 걸음을 내디딜 수 있을 것입니다.

수학을 공부하는 것도 마찬가지입니다.

할 수 있는 것부터 시작하여 자신감을 가지고 열심히 달려가다 보면

어느새 어렵다고 느꼈던 수학을 정복해나갈 수 있을 것입니다.

수학을 향한 여러분의 도전에 〈 라이트쎈 〉이 함께 하겠습니다.

ⓒ좋은책신사고

구성과 특징

수학이 쉬워지는 문제기본서

꼭 필요한 내용을 딱 알맞게 구성하여 학습 부담을 줄이면서도 자신감은 업그레이드할 수 있습니다.

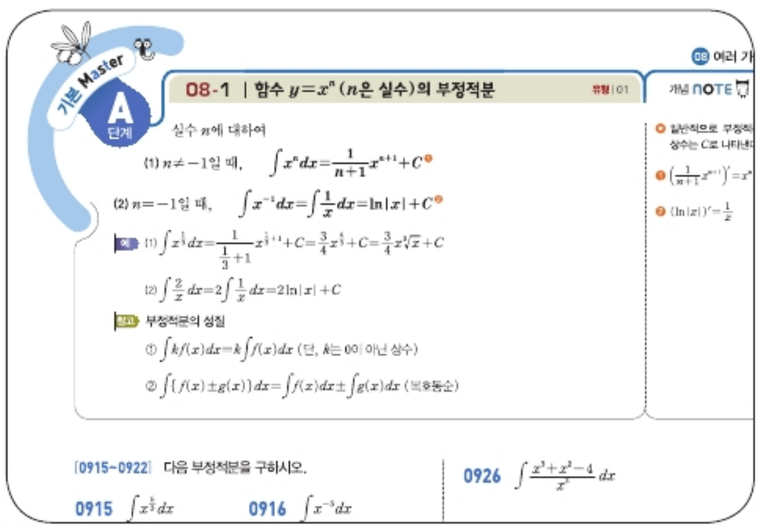
기본 + 유형, 집중 공략

A, B 2단계로 나누어, A단계 기본 문제를 강화하고, B단계 유형을 더욱 세분화하여 입체적인 유형 학습이 가능합니다.

유형 실전 마무리

B단계의 유형에 대한 마무리 학습 문제를 구성하여 유형별 문제 해결력을 키우고 완벽하게 실전에 대비할 수 있습니다.

A 단계 기본 Master



개념을 익힌 후 빠짐없이 확인해 볼 수 있는 맞춤 문제를 유기적으로 구성하였습니다.

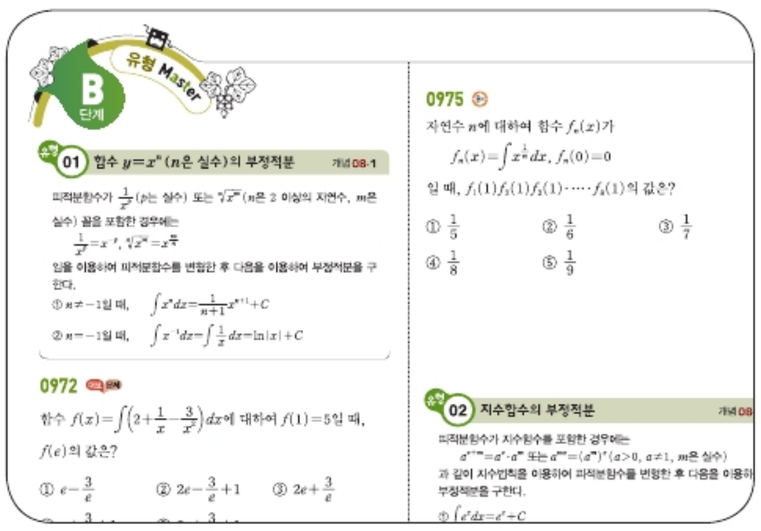
개념 정리

주제별로 꼭 알아야 할 개념을 꼼꼼하고 알차게 정리하고 예, 참고, 개념 NOTE 등 다양한 자료를 제공하여 이해를 도왔습니다.

기본 문제

개념을 익히기 위해 풀어야 하는 문제를 충분히 제공하여 기본 실력을 탄탄히 다질 수 있도록 하였습니다.

B 단계 유형 Master



학교 시험 , 수능 및 평가원 , 교육청 모의고사 문제를 총망라한 후 문제 해결에 필요한 개념 , 발문 형태 , 해결 방법 등에 따라 유형을 더욱 세분화하였습니다.

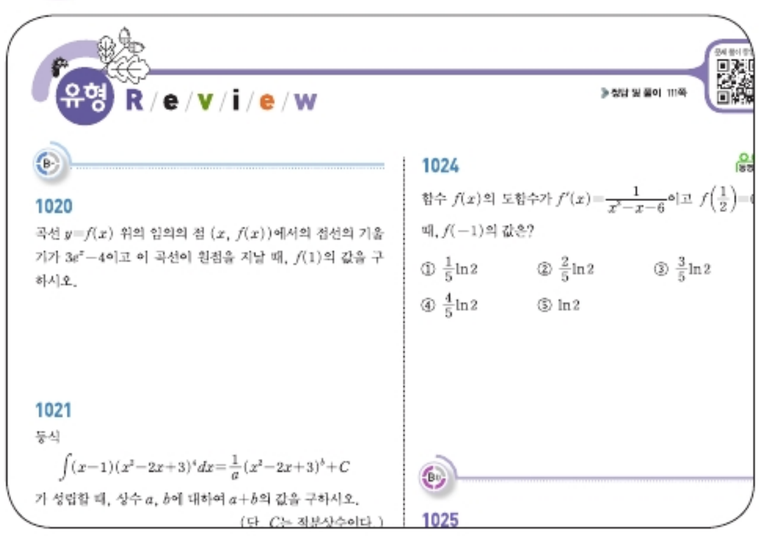
대표 문제 + 유제

세분화된 하나의 유형은 대표 문제 와 B-, B0, B+ 3단계 난이도의 유제로 구성하여 어떤 문제도 빠져나갈 수 없는 그물망식 구조를 구축하였습니다.

유형연구 BOX

유형별 해결 전략을 제시하여 문제 적용력 및 해결 능력을 스스로 향상시킬 수 있도록 하였습니다.

유형 Review



B단계에서 공부한 유형 문제를 B-, B0, B+ 3단계 난이도로 재구성하여 다시 한 번 유형을 점검하고 알차게 실전을 대비할 수 있도록 하였습니다.

동영상 유형 Review 100문항의 문제 풀이 동영상을 제공합니다. 표지 또는 각 단원 유형 Review에 있는 QR코드를 인식하면 동영상을 볼 수 있습니다.

ⓒ좋은책신사고

타입별 라이트쎈

사용설명서

TYPE 1 유비무환형

"수학은 미리미리 쌓아두는 마일리지 같은 거야."라고 생각한다면?

수학을 좋아하며 즐기는 타입으로, 라이트쎈이 선행학습 또는 예습용으로 적당하다.
이 타입의 친구들에게는 다음과 같은 간헐적 반복학습 프로세스를 추천한다.

① A단계 개념+기본 문제 Master
② B단계 대표문제 학습
③ B단계 대표문제+유제 Master
④ 유형 Review로 학습 마무리

TYPE 2 대기만성형

"수학은 힘들지만 꾸준히 하면 그만큼 성과가 있어."라는 확신을 갖고 있다면?

수학을 즐기지는 않지만 꾸준히 노력하는 타입으로, 라이트쎈이 예습용 또는 복습용으로 적당하다.
이 타입의 친구들에게는 다음의 기본학습 프로세스를 추천한다.

① A단계 개념+기본 문제 Master
② B단계 대표문제+유제 Master
③ 유형 Review로 학습 마무리

TYPE 3 오답남발형

"분명히 맞게 푼 것 같은데, 왜 점수가 이렇지?"와 같은 상황이 반복된다면?

성격이 급하고 세상을 띄엄띄엄 보는 타입. 수학적인 꼼꼼함을 키우기 위해 라이트쎈 오답 집중 훈련 프로세스를 추천한다.

① A단계 개념+기본 문제 Master
② 틀린 문제 다시 풀기
③ 또 틀리면 또 풀기
④ B단계 대표문제+유제 Master
⑤ 틀린 문제 다시 풀기
⑥ 또 틀리면 오답 정리하고 또 풀기
⑦ 유형 Review로 학습 마무리

TYPE 4 벼락치기형

"이번 시험, 수학 공부할 시간이 없네."와 같은 상황이 반복된다면?

수학을 기피하는 타입. 이 타입의 친구들이 라이트쎈으로 빠르게 시험대비를 하는 방법은 다음과 같다.

① B단계 대표문제만 1회 학습
② 틀린 문제 다시 복습

TYPE 5 수학포기형

"난 수학이 싫어. 수학 없는 세상에서 살고 싶다고."라고 허공에 대고 외치고 싶다면?

큰일 날 타입. 조금씩 지치지 않으면서 수학에 발붙이는 다음 프로세스를 추천한다.

① A단계 개념 학습
② A단계 기본 문제 홀수 번 풀기
③ A단계 기본 문제 짝수 번 풀기
④ B단계 대표문제 학습
⑤ B단계 홀수 번 풀기
⑥ B단계 짝수 번 풀기
⑦ 유형 Review로 학습 마무리

ⓒ좋은책신사고

차례

미적분

I 수열의 극한

01 수열의 극한 6
02 급수 24

II 미분법

03 지수함수와 로그함수의 미분 42
04 삼각함수의 미분 56
05 여러 가지 미분법 74
06 도함수의 활용 (1) 90
07 도함수의 활용 (2) 106

III 적분법

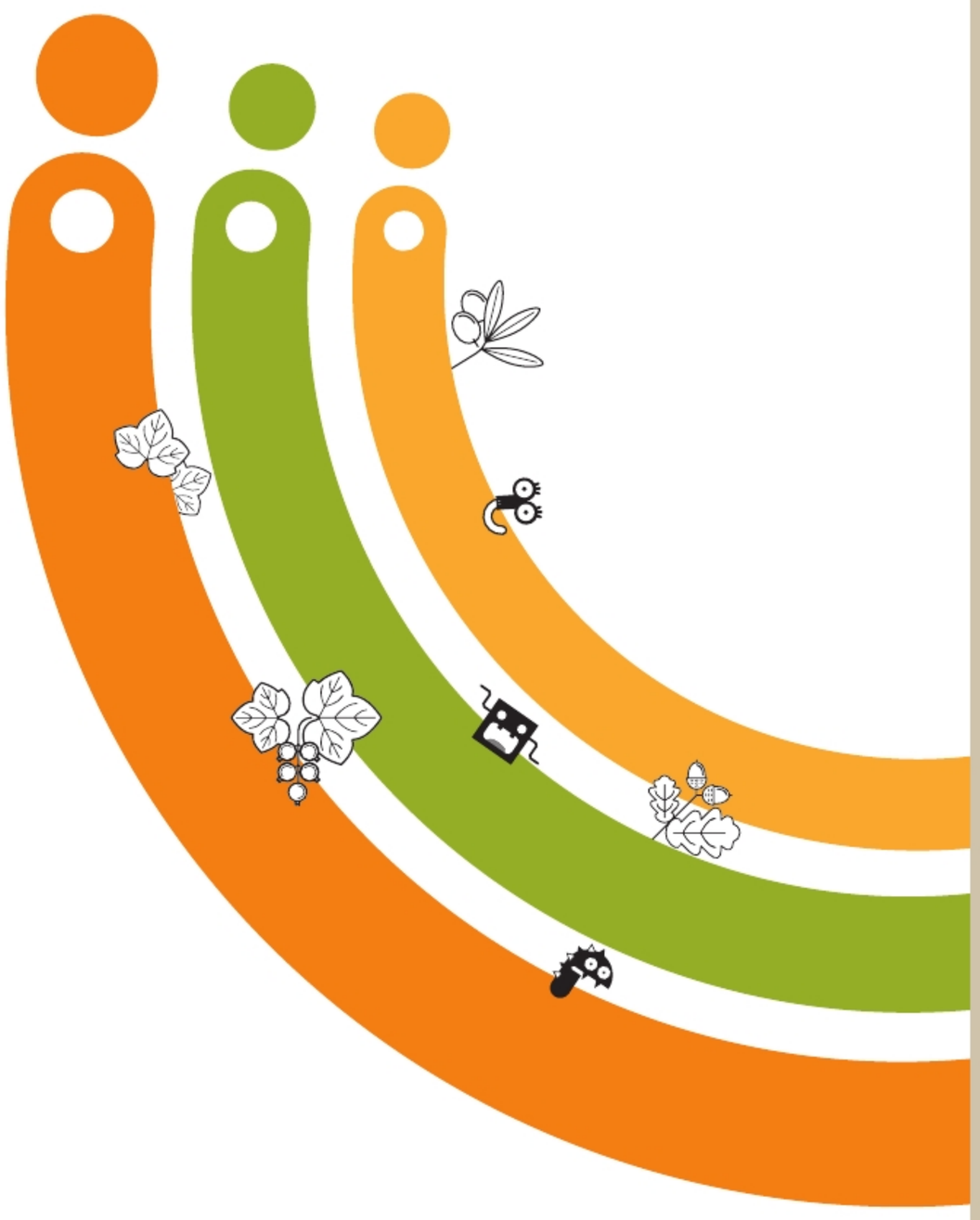
08 여러 가지 적분법 124
09 정적분 138
10 정적분의 활용 154

ⓒ좋은책신사고

I 수열의 극한

01 수열의 극한 6

02 급수 24



ⓒ좋은책신사고

기본 Master A 단계

01-1 | 수열의 수렴과 발산

유형 | 01

개념 NOTE

(1) 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 또는 $n \longrightarrow \infty$[1]일 때 $a_n \longrightarrow \alpha$

참고 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=c$ (c는 상수)이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c=c$

(2) 수열의 발산

수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 **발산**한다고 한다.[2]

① 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값도 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

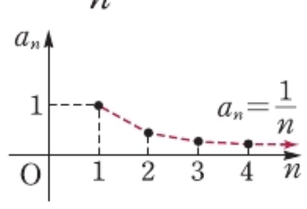
$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$[3] 또는 $n \longrightarrow \infty$일 때 $a_n \longrightarrow \infty$

② 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ 또는 $n \longrightarrow \infty$일 때 $a_n \longrightarrow -\infty$

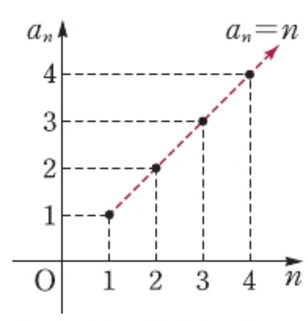
③ 수열이 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 그 수열은 진동한다고 한다.

예 ① $a_n=\frac{1}{n}$



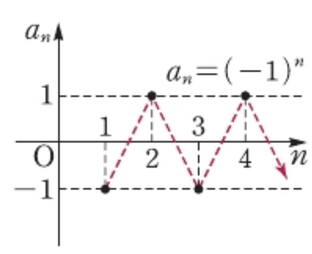
0으로 수렴

② $a_n=n$



양의 무한대로 발산

③ $a_n=(-1)^n$



진동(발산)

1 $n \longrightarrow \infty$는 n의 값이 한없이 커진다는 뜻이다.

2 수열이 발산하면 극한값은 없다.

3 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$는 수열 $\{a_n\}$의 극한값이 ∞라는 뜻이 아니라 a_n의 값이 한없이 커지는 상태임을 의미한다.

[0001~0002] 다음 수열의 극한값을 구하시오.

0001 $5-1,\ 5-\frac{1}{2},\ 5-\frac{1}{3},\ \cdots,\ 5-\frac{1}{n},\ \cdots$

0002 $2,\ 2,\ 2,\ \cdots,\ 2,\ \cdots$

[0003~0004] 다음 수열이 발산함을 확인하시오.

0003 $3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n+1,\ \cdots$

0004 $-2,\ 4,\ -8,\ \cdots,\ (-2)^n,\ \cdots$

[0005~0008] 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

0005 $1-1^2,\ 1-2^2,\ 1-3^2,\ \cdots,\ 1-n^2,\ \cdots$

0006 $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots$

0007 $\left\{\frac{2}{2n-1}\right\}$

0008 $\{3+(-1)^n\}$

01-2 | 수열의 극한에 대한 기본 성질

유형 | 02·03·09·11

수렴하는[1] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

① $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$ (단, c는 상수)

② $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

③ $\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$

④ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$

⑤ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (단, $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$)

예 ① $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2\cdot 0 = 0$[2]

② $\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2+0=2$

③ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} 1 = 0-1=-1$

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0$

⑤ $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2}{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1} = 2$

개념 NOTE

1 수열의 극한에 대한 기본 성질은 두 수열이 모두 수렴하는 경우에만 성립한다.

2 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

[0009~0015] $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -1$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

0009 $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n)$

0010 $\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n)$

0011 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$

0012 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

0013 $\lim_{n\to\infty} (5a_n-b_n)$

0014 $\lim_{n\to\infty} (-2a_nb_n)$

0015 $\lim_{n\to\infty} \frac{4a_n+3}{3b_n}$

[0016~0019] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때, 다음 수열의 극한값을 α, β로 나타내시오. (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

0016 $\{a_n+3\}$

0017 $\{2a_n-b_n\}$

0018 $\{a_n^2b_n\}$

0019 $\left\{\frac{2a_n}{5b_n}\right\}$

[0020~0023] 다음 극한값을 구하시오.

0020 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)$

0021 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

0022 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)\left(3-\frac{4}{n}\right)$

0023 $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{3-\frac{5}{n}}$

ⓒ좋은책신사고

01-3 | 수열의 극한값의 계산

유형 | 04~09·17

개념 NOTE

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

① (분자의 차수)=(분모의 차수) ➡ 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

② (분자의 차수)<(분모의 차수) ➡ 극한값은 0이다.

③ (분자의 차수)>(분모의 차수) ➡ 극한값은 없다.[1]

예 ① $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0$

(2) $\infty-\infty$ 꼴

① 다항식은 최고차항으로 묶는다.

② 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

예 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

주의 $\frac{\infty}{\infty}\neq1$, $\infty-\infty\neq0$임에 주의한다.

[1] 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산한다.

* $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수), $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$일 때
① $\alpha>0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$
② $\alpha<0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\infty$

[0024~0029] 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하시오.

0024 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}$

0025 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n-1)}{-2n^2+3n}$

0026 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7n+1}$

0027 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+3n+1}$

0028 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n+3}$

0029 $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+4n}{n^2+n+1}$

[0030~0035] 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하시오.

0030 $\lim_{n\to\infty}(n^2-7n)$

0031 $\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{1}{2}n^3\right)$

0032 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

0033 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+3n})$

0034 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

0035 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$

01-4 | 수열의 극한의 대소 관계

유형 | 10·11

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면

$\alpha \le \beta$ ❶

② 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면

$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

예 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $5-\frac{1}{n} \le a_n \le 5+\frac{1}{n}$을 만족시키면

$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)=5$, $\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=5$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=5$

참고 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$인 경우가 있다.

예 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$

개념 NOTE

❶ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

0036 다음은 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$3n-1<na_n<3n+1$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> $3n-1<na_n<3n+1$에서 각 변을 n으로 나누면
>
> $\frac{3n-1}{n}<a_n<\frac{3n+1}{n}$
>
> 이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=$ (가) 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여
>
> $\lim_{n\to\infty} a_n=$ (나)

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 써넣으시오.

0037 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$4n^2-1<(n^2+1)a_n<4n^2+3$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

0038 다음은 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ (θ는 상수)의 값을 구하는 과정이다.

> $-1\le\sin n\theta\le 1$이므로 각 변을 n으로 나누면
>
> $-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n\theta}{n}\le\frac{1}{n}$
>
> 이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$ (가) 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여
>
> $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=$ (나)

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 써넣으시오.

0039 $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$의 값을 구하시오. (단, θ는 상수이다.)

ⓒ좋은책신사고

정답 및 풀이 4쪽

01-5 | 등비수열의 수렴과 발산

유형 | 12~17

등비수열 $\{r^n\}$에서

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

③ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

④ $r\le -1$일 때, 진동한다.(발산)

예 ① 등비수열 $\{2^n\}$은 공비가 2이고 $2>1$이므로 $\lim_{n\to\infty} 2^n=\infty$

② 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$이고 $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

참고 ① 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1<r\le 1$

② 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

개념 NOTE

* r^n을 포함한 수열의 극한은 r의 값의 범위를
$|r|<1$, $r=1$,
$|r|>1$, $r=-1$
인 경우로 나누어 조사한다.

[0040~0043] 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.

0040 $\{0.3^n\}$

0041 $\{(\sqrt{2})^n\}$

0042 $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$

0043 $\left\{\frac{(-1)^n}{5^n}\right\}$

[0044~0045] 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.

0044 $-2,\ (-2)^2,\ (-2)^3,\ (-2)^4,\ \cdots$

0045 $\frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^3,\ \left(\frac{2}{3}\right)^4,\ \cdots$

[0046~0047] 다음 극한값을 구하시오.

0046 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{5^{2n}}$

0047 $\lim_{n\to\infty}(1+0.8^n)$

[0048~0051] 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

0048 $\left\{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right\}$

0049 $\left\{\frac{9^n-1}{3^{2n+1}}\right\}$

0050 $\left\{\frac{2^n-7^n}{3^n+7^n}\right\}$

0051 $\left\{\frac{5^n+7^n}{2^n+5^n}\right\}$

[0052~0054] 다음 등비수열이 수렴하기 위한 실수 r의 값의 범위를 구하시오.

0052 $\{(2r)^n\}$

0053 $\left\{\left(-\frac{r}{3}\right)^n\right\}$

0054 $\left\{3\cdot\left(\frac{r}{4}\right)^n\right\}$

B 단계 유형 Master

유형 01 수열의 수렴과 발산

개념 01-1

수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산을 판정할 때에는 먼저 일반항 a_n을 구한 다음 일반항에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 그 값이 어떤 일정한 값에 가까워지는지 아닌지 조사한다. 이때 일정한 값에 가까워지면 수렴, 그렇지 않으면 발산이다.

0055 대표 문제

다음 수열 중 수렴하는 것은?

① $6, 4, 2, 0, \cdots, 8-2n, \cdots$

② $0, -3, -8, -15, \cdots, 1-n^2, \cdots$

③ $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \cdots, \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \cdots$

④ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^n}{n}, \cdots$

⑤ $2, 0, 2, 0, \cdots, 1-(-1)^n, \cdots$

0056 B-

발산하는 수열인 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $\{6-5n\}$　　ㄴ. $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$

ㄷ. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$　　ㄹ. $\left\{\frac{n}{\sqrt{n}+1}\right\}$

0057 B0

수렴하는 수열인 것만을 보기에서 있는 대로 고르고, 그 극한값을 구하시오.

보기

ㄱ. $\left\{\frac{2}{n^2+1}\right\}$　　ㄴ. $\{\cos n\pi\}$

ㄷ. $\left\{5+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$　　ㄹ. $\{n-n^2\}$

유형 02 수열의 극한에 대한 기본 성질

집중공략 개념 01-2

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)이면 상수 p, q, r에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ra_nb_n}{pa_n+qb_n}=\frac{r\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n}{p\lim_{n\to\infty}a_n+q\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{r\alpha\beta}{p\alpha+q\beta}$$

(단, $pa_n+qb_n\neq0$, $p\alpha+q\beta\neq0$)

0058 대표 문제

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+b_n}{a_nb_n-1}$의 값을 구하시오.

0059 B-

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=4$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n(a_n+3)$의 값은?

① 18　② 20　③ 22　④ 24　⑤ 26

0060 B0

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=5,\ \lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)$의 값을 구하시오.

0061 B0 서술형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_n=\frac{1}{n}-3,\ b_n=4-\frac{1}{n(n+1)}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+2)(b_n-5)$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

유형 03 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$의 이용

개념 01-2

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)이면

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_{n+2}=\cdots=\alpha$

0062 대표 문제

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+1}+1}{a_n-1}=5$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

0063 B0

수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하고

$$\frac{4}{a_{n+1}}=4-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(4-a_n)$의 값은?

① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

0064 B+

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\alpha$ (α는 실수)일 때, 다음 중 반드시 α로 수렴하는 것은?

① $\lim_{n\to\infty} a_n$ ② $\lim_{n\to\infty} a_{n+2}$ ③ $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$
④ $\lim_{n\to\infty} a_{4n-1}$ ⑤ $\lim_{n\to\infty} a_{4n}$

유형 04 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

집중공략

개념 01-3

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈 다음 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$임을 이용하여 극한값을 구한다.

0065 대표 문제

다음 중 옳은 것은?

① $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{n^2+2n-1}=2$ ② $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{(n-1)^3}=-1$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{2n+1}=2$ ④ $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{9n^2+4}+n}=1$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}}=\frac{1}{2}$

0066 B0

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{na_n}$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

0067 B+ 서술형

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-3n^2x+n^2-1=0$의 두 근을 a_n, b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)$의 값을 구하시오.

유형 05 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한; 합 또는 곱

개념 01-3

a_n이 합 또는 곱의 꼴로 주어진 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 합 또는 곱으로 된 부분을 간단히 정리하여 n에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구하는 방법을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구한다.

0068 대표 문제

$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

0069 B0

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\{2^2+3^2+4^2+\cdots+(n+1)^2\}=\frac{a}{b}$일 때, 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

0070 B0

$\lim_{n\to\infty} \{\log_2(4n+1)+\log_2(2n-1)-2\log_2(n+2)\}$의 값을 구하시오.

0071 B+ 서술형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 각각

$$a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$b_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{(na_n)^2}$의 값을 구하시오.

유형 06 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한; 미정계수의 결정

집중공략

개념 01-3

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\alpha$ (α는 실수)일 때

① $\alpha=0$

➡ (a_n의 차수)<(b_n의 차수)

② $\alpha\neq0$

➡ (a_n의 차수)=(b_n의 차수)이고, 최고차항의 계수의 비가 α이다.

0072 대표 문제

$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2+bn+1}{n-2}=4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

0073 B-

$\lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)(3n+1)}{an^2-1}=6$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0074 B0

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n-1}{bn^3+2n^2+1}=\frac{1}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+1}{(an+b)^2}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

0075 B+ 서술형

상수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-2n+1}}{an^2+4n+3}=b$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-5n+1}{\sqrt{bn^2+n}}$의 값을 구하시오. (단, $b\neq0$)

유형 07 ∞−∞ 꼴의 극한

집중공략 개념 01-3

① 다항식으로 주어진 경우
➡ 최고차항으로 묶어서 ∞×(상수) 꼴로 변형한다.
② 무리식으로 주어진 경우
➡ 근호를 포함한 쪽을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

0076 대표 문제

$\lim_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2+2n})$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

0077 B0

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-2}}$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

0078 B0

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_n-2})$의 값을 구하시오.

0079 B+ 서술형

$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{1+2+3+\cdots+(n+1)}-\sqrt{1+2+3+\cdots+n}\}$의 값을 구하시오.

유형 08 ∞−∞ 꼴의 극한; 미정계수의 결정

개념 01-3

$\lim_{n\to\infty}a_n$에서 a_n에 포함된 미정계수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 무리식을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.
(ii) (i)의 식이 0이 아닌 실수 α로 수렴하면 분자와 분모의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 α임을 이용한다.

0080 대표 문제

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)=6$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

0081 B0

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=10$일 때, 상수 a의 값은?

① 4 ② 9 ③ 16
④ 25 ⑤ 36

0082 B+

$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+2n+2}-(an+b)\}=3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

0083 B+

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=\sqrt{(n+1)(n+3)}+kn$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

유형 09 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값 집중공략 개념 01-2, 3

$\lim_{n\to\infty}\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=\alpha$ (α는 실수)일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은 다음과 같은 순서로 구한다. (단, p, q, r, s는 상수이다.)

(i) $\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=b_n$으로 놓고 a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$임을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구한다.

0084 대표문제

수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-5}{5a_n+1}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① $-\frac{8}{7}$ ② $-\frac{7}{8}$ ③ $-\frac{5}{7}$
④ $-\frac{5}{8}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

0085 B0

수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(n+2)a_n=5$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(3n+4)a_n$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

0086 B0

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=5,\ \lim_{n\to\infty}(a_n+4b_n)=8$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n(b_n-2)$의 값을 구하시오.

0087 B+ 서술형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}(n^3-1)b_n=3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2b_n}{a_n}$의 값을 구하시오.

mini 나바힘

행동의 가치는 그 행동을 끝까지 이루는 데 있다.

– 칭기즈칸

ⓒ좋은책신사고

유형 10 수열의 극한의 대소 관계

집중공략 개념 01-4

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ (α는 실수)일 때, 모든 자연수 n에 대하여
$a_n\le c_n\le b_n$이면
$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

0088 대표 문제

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sqrt{25n^2-n}<(n+3)a_n<\sqrt{25n^2+4n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

0089 B-

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3n-50<a_n<3n+70$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+2}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

0090 B0 서술형

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sin n\theta}{n^3+2}$의 값을 구하시오.

(단, θ는 상수이고 n은 자연수이다.)

0091 B+

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

(단, n은 자연수이다.)

보기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{8}=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\pi=0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

유형 11 수열의 극한에 대한 합답형 문제

개념 01-2, 4

수열의 극한에 대한 합답형 문제는 일반적으로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 바탕으로 주어진 극한값이 옳은지 판단하여 해결한다.

➡ 극한값을 구하려는 수열을 수렴하는 수열에 대한 식으로 나타내고, 거짓인 명제는 반례를 찾는다.

0092 대표 문제

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

0093 B0

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=-3$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 또는 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

0094 B0

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=10$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=20$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=15$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

유형 12 등비수열의 수렴과 발산

개념 01-5

등비수열 $\{r^n\}$에서
① $-1<r\le1$ ➡ 수렴
② $r\le-1$ 또는 $r>1$ ➡ 발산

0095 대표 문제

수렴하는 수열인 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $\{(-3)^n\}$ ㄴ. $\{(\sqrt{2}-1)^n\}$

ㄷ. $\left\{\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right\}$ ㄹ. $\left\{\frac{3^{n-1}}{2^n}\right\}$

0096 B-

발산하는 수열인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\{1+0.3^n\}$ ㄴ. $\{4-(-1)^n\}$

ㄷ. $\{2^{-n}+5^{-n}\}$ ㄹ. $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n-3\right\}$

① ㄱ, ㄷ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

0097 B0

다음 중 보기에서 수렴하는 수열과 그 극한값을 바르게 짝 지은 것은?

보기

ㄱ. $\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ ㄴ. $\{5+1.5^n\}$

ㄷ. $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ ㄹ. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n-2\right\}$

① ㄱ -0 ② ㄴ -1 ③ ㄷ -0
④ ㄷ $-\frac{1}{2}$ ⑤ ㄹ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

유형 13 등비수열의 극한

집중공략 개념 01-5

수열 $\left\{\frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}\right\}$ (a, b, c, d는 실수) 꼴의 극한값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.
즉 $|a|>|b|$이면 a^n으로, $|a|<|b|$이면 b^n으로 분자, 분모를 각각 나눈다.
(ii) $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구한다.

0098 대표 문제

$\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+3^{n+2}}{(3^n+1)(2^n+1)}$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0099 B0 서술형

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{2n}}{4^n+3^n}=a$, $\lim_{n\to\infty}(a^{2n+1}-a^{2n})=b$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

0100 B0

자연수 n에 대하여 다항식 $2x^{n+1}+x^n-1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}+1}$의 값을 구하시오.

0101 B0

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n\cdot a_n}{2^{n+1}-3^n\cdot a_n}=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

0102 B+

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_n+b_n=5^{n+1},\ a_n-b_n=2^{2n}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 5

유형 14 등비수열의 수렴 조건

집중공략 개념 01-5

등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면
① $a_n=r^n$일 때, $-1<r\le1$
② $a_n=ar^{n-1}$일 때, $a=0$ 또는 $-1<r\le1$

0103 대표 문제

등비수열 $\left\{\left(\frac{x+1}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

0104 B- 서술형

수열

$$(x-4)(2-x),\ (x-4)(2-x)^2,\ (x-4)(2-x)^3,\ \cdots$$

이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 곱을 구하시오.

0105 B0

등비수열 $\{(\sqrt{2}\cos x)^n\}$이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위는? (단, $0<x<\pi$)

① $0<x\le\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{3}{4}\pi$
③ $\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3}{4}\pi$ ④ $\frac{3}{4}\pi\le x<\pi$
⑤ $\frac{\pi}{2}\le x<\pi$

0106 B0

두 등비수열 $\{(-2x+5)^n\}$, $\{(\log_2 x-2)^n\}$이 모두 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

0107 B0

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 때, 항상 수렴하는 수열인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $\left\{\left(-\frac{r}{2}\right)^n\right\}$ ㄴ. $\left\{\left(\frac{r-1}{3}\right)^n\right\}$ ㄷ. $\{r^{2n}\}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 15 r^n을 포함한 수열의 극한 개념 01-5

r^n을 포함한 수열의 극한은 r의 값의 범위를
$|r|<1$, $r=1$, $|r|>1$, $r=-1$
인 경우로 나누어 극한을 조사한다.

0108 대표 문제

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}$의 값은 $|r|<1$이면 a이고, $|r|>1$이면 b이다. 이때 $a+b$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

0109 B0

$r\neq-1$일 때, 수열 $\left\{\frac{r^{2n}}{r^n+1}\right\}$의 극한에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $|r|>1$이면 발산한다.
ㄴ. $r=\frac{1}{2}$이면 0에 수렴한다.
ㄷ. 수렴하도록 하는 r의 값의 범위는 $-1<r<1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

0110 B+ 서술형

수열 $\left\{\frac{5^n-r^n}{5^n+r^n}\right\}$의 극한값이 1이 되도록 하는 정수 r의 개수를 구하시오. (단, $r\neq-5$)

유형 16 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수 개념 01-5

x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수는 x의 값의 범위를
$|x|<1$, $x=1$, $|x|>1$, $x=-1$
인 경우로 나누고 다음을 이용하여 함수의 식을 구한다.
① $|x|<1$ ➡ $\lim_{n\to\infty}x^n=0$
② $|x|>1$ ➡ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$

0111 대표 문제

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x-1}{x^{2n}+1}$에 대하여

$f(-1)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f(4)$

의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

ⓒ좋은책신사고

0112 B+ 서술형

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-2}{x^n+1}$에 대하여 $x>0$일 때, $f(x)$를 다항함수로 나타내시오.

유형 17 함수의 그래프와 수열의 극한

집중공략 개념 01-3, 5

함수의 그래프 위의 점의 좌표에 대한 극한값을 구할 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

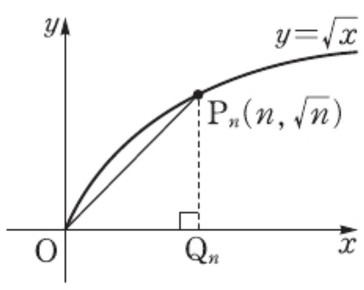
(i) 그래프 위의 점의 좌표를 n에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) 극한을 구하는 수열의 일반항을 구한다.

(iii) (ii)의 식의 극한값을 구한다.

0113 대표 문제

오른쪽 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $P_n(n, \sqrt{n})$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\overline{OP_n}-\overline{OQ_n})$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

0114 B0 서술형

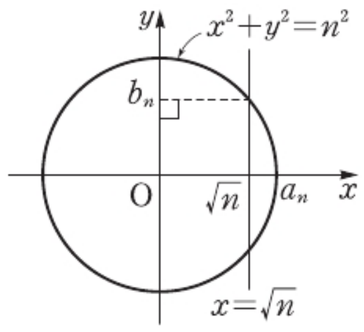
이차함수 $f(x)=2x^2$의 그래프 위의 점 $P_n(n, f(n))$에 대하여 P_n과 P_{n+1} 사이의 거리를 a_n이라 할 때, 다음을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

(1) a_n

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}$의 값

0115 B0

오른쪽 그림과 같이 2 이상의 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$이 x축과 만나는 점의 x좌표 중 양수인 값을 a_n이라 하자. 또 원 $x^2+y^2=n^2$이 직선 $x=\sqrt{n}$과 제1사분면에서 만나는 점의 y좌표를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n-b_n}$의 값을 구하시오.



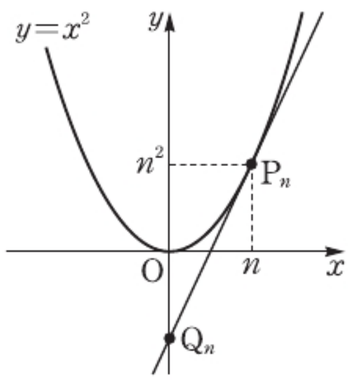
0116 B+

두 직선 $y=2x+4^n$, $y=-\frac{1}{2}x+3^n$의 교점의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

0117 B+

오른쪽 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P_n(n, n^2)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q_n이라 하자. $l_n=\overline{P_nQ_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{3n^2}$의 값을 구하시오.



B-

0118

수렴하는 수열인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\{5-4n\}$　　ㄴ. $\left\{\frac{2n^2-1}{n^2+3}\right\}$　　ㄷ. $\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

0119

다음 중 극한값이 가장 작은 것은?

① $\lim_{n\to\infty}\frac{n-4}{3n-5}$　② $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{4n^2-5n+1}$
③ $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n}{n^3+4n+1}$　④ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n+3}}$
⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n}$

0120 서술형

동영상

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-bn+3}{\frac{1}{2}n+2}=3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

0121

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2019n}-n)$의 값은?

① $-\frac{2019}{2}$　② $-\frac{2}{2019}$　③ 0
④ $\frac{2}{2019}$　⑤ $\frac{2019}{2}$

0122

$a>2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5a^{n+1}-3\cdot 2^n}{a^n-2^{n-1}}=15$를 만족시키는 a의 값을 구하시오.

0123

$r\geq 1$일 때, 수열 $\left\{\frac{r^n-2}{r^{n+1}+3}\right\}$의 극한값을 구하시오.

B0

0124

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=5,\ \lim_{n\to\infty}a_nb_n=3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은?

① 5　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{17}{3}$
④ 6　⑤ $\frac{19}{3}$

ⓒ좋은책신사고

0125 평가원 기출 동영상

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2+2nx-4n=0$$

의 양의 실근을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

0126 동영상

첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$의 값을 구하시오.

0127

수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(5n-3)a_n=4$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1
④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

0128 서술형

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n<a_n<n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5}$의 값을 구하시오.

0129

수열 $\sqrt{3}$, $\sqrt{3\sqrt{3}}$, $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$, $\cdots$의 제n항을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 6

0130 동영상

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=3^n+5^n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}$의 값을 구하시오.

0131 서술형

자연수 a, b에 대하여 연산 ◎를

$$a◎b=\lim_{n\to\infty}\frac{ba^n+ab^n}{a^n+b^n}$$

으로 정의할 때, $(5◎2)◎3$의 값을 구하시오.

0132

등비수열 $\left\{\left(\frac{x^2-3x-2}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

0133 수능 기출 동영상

자연수 k에 대하여

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}ka_k$의 값을 구하시오.

B+

0134

수열 $\{a_n\}$이

$$a_n+a_{n+1}=n^2+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{n+1}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0135 서술형 동영상

자연수 n에 대하여 $\sqrt{4n^2+5n+1}$의 소수 부분을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

0136

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=5$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+2b_n}$의 값을 구하시오.

0137 수능 기출 동영상

수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

0138 도전 동영상

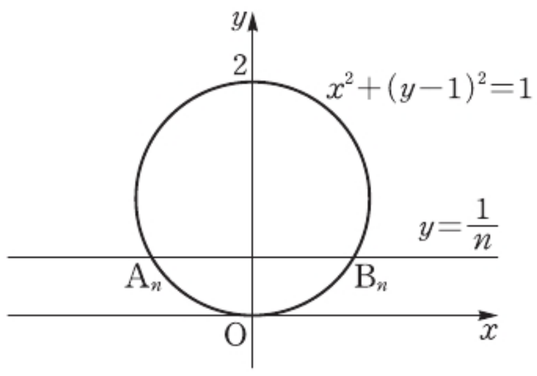
함수 $f(x)=\frac{x}{2}+1$에 대하여

$$f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}f^n(1)$의 값을 구하시오.

0139 교육청 기출 도전 동영상

그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{n}$과 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 두 교점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}n(l_n)^2$의 값은?



① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

ⓒ좋은책신사고

기본 Master A 단계

02-1 | 급수

유형 | 01·02·03·04·12

개념 NOTE

(1) **급수**: 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식을 **급수**라 하고, 기호로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다. 이때 a_n을 이 급수의 제n항이라 한다.

➡ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(2) **부분합**: 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 이 급수의 제n항까지의 **부분합**이라 한다.

➡ $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

(3) **급수의 합**: 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S$일 때, 이 급수는 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 이 **급수의 합**이라 한다.

➡ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$ ❶

참고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 하고, 발산하는 급수에 대해서는 그 합을 생각하지 않는다.

✱ ① 수열의 수렴, 발산
➡ $\lim_{n\to\infty} a_n$을 조사
② 급수의 수렴, 발산
➡ $\lim_{n\to\infty} S_n$을 조사

❶ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\lim_{n\to\infty} S_n$

[0140~0141] 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음과 같을 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합을 구하시오.

0140 $S_n=\dfrac{n}{2n-3}$

0141 $S_n=5-\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$

0142 급수 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 제n항까지의 부분합 S_n을 구하시오.
(2) 수열 $\{S_n\}$의 수렴, 발산을 조사하시오.
(3) 급수 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

0143 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 제n항까지의 부분합 S_n을 구하시오.
(2) 수열 $\{S_n\}$의 수렴, 발산을 조사하시오.
(3) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

[0144~0147] 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

0144 $1+4+9+\cdots+n^2+\cdots$

0145 $\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^3+\cdots+\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+\cdots$

0146 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

0147 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

0148 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 제n항까지의 부분합 S_n을 구하시오.
(2) $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오.
(3) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$의 합을 구하시오.

02-2 | 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

유형 | 05·06

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

❶

주의 일반적으로 (1)의 역은 성립하지 않는다. 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이라고 해서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 반드시 수렴하는 것은 아니다.

예 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$은 양의 무한대로 발산한다.

개념 NOTE

❶ (1), (2)는 서로 대우인 명제이다.

02-3 | 급수의 성질

유형 | 07

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때❷

① $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

② $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)

예 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=1$일 때

① $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=2+1=3$

② $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=2-1=1$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n=2\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2\cdot 2=4$

❷ 급수의 성질은 수렴하는 급수에 대해서만 성립한다.

✱ ① $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$

0149 다음은 급수 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots$가 발산함을 보이는 과정이다.

> 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면
>
> $a_n=$ (가)
>
> 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}$ (가) $=$ (나)
>
> 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 써넣으시오.

[0150~0153] 다음 급수가 발산함을 보이시오.

0150 $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\cdots+\frac{2n-1}{2n+1}+\cdots$

0151 $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{6}-2)+(2\sqrt{3}-3)+\cdots+(\sqrt{n^2+n}-n)+\cdots$

0152 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

0153 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$

[0154~0157] $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=-1$일 때, 다음 급수의 합을 구하시오.

0154 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$

0155 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)$

0156 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+2b_n)$

0157 $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n-5b_n)$

ⓒ좋은책신사고

02-4 | 등비급수

유형 | 08~12

개념 NOTE

(1) 등비급수

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 $+$로 연결한 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

을 첫째항이 a이고 공비가 r인 **등비급수**라 한다.

(2) 등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ ($a\neq0$[1])은

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r|\geq1$일 때, 발산한다.

참고 $a\neq0$일 때

① 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1<r\leq1$

② 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1<r<1$

[1] 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$에서 $a=0$이면 각 항이 0이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=0$이다.

[0158~0165] 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

0158 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots$

0159 $1-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}+\cdots$

0160 $1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+\cdots$

0161 $1+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}+\cdots$

0162 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$

0163 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{7^{n-1}}$

0164 $\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

0165 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

[0166~0169] 다음 급수의 합을 구하시오.

0166 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

0167 $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{1}{5}\right)^n$

0168 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

0169 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}$

[0170~0172] 다음 등비급수가 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하시오.

0170 $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots$

0171 $1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}+\cdots$

0172 $1+(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\cdots$

02-5 | 등비급수의 활용

유형 | 13~17

개념 NOTE

(1) 도형과 등비급수

같은 과정이 한없이 반복되는 도형에 대한 문제는 등비급수를 이용하여 다음과 같은 순서로 해결할 수 있다.

(i) a_n을 정한다.

(ii) a_1, a_2, a_3, $\cdots$을 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.[1]

(iii) 한없이 반복되는 성질을 이용하여 첫째항 a와 공비 r를 구한다.

(iv) 등비급수의 합이 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

참고 도형의 길이와 넓이에 대한 문제를 해결할 때에는 다음 성질이 자주 이용된다.

① 닮은 두 도형에서 대응변의 길이의 비는 일정하다.

② 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 둘레의 길이의 비는 $m:n$, 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

(2) 순환소수와 등비급수

등비급수를 이용하여 순환소수[2]를 분수로 나타낼 수 있다.

예 $0.\dot{2}=0.2+0.02+0.002+\cdots=\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\cdots$

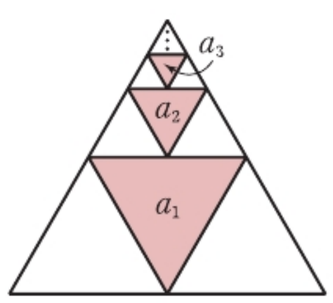
이 급수는 첫째항이 $\frac{2}{10}$, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비급수이므로

$$0.\dot{2}=\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{9}$$

1 처음 주어진 도형에서 일정한 규칙에 따라 새로운 도형을 만들어 나갈 때, 만들어지는 도형의 둘레의 길이 또는 넓이는 차례대로 등비수열을 이룬다.

2 **순환소수**: 무한소수 중에서 소수점 아래의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 끝없이 되풀이되는 소수

0173 다음 그림과 같이 넓이가 1인 정삼각형을 4등분 하여 가운데 정삼각형을 색칠하고, 나머지 색칠하지 않은 정삼각형 중 한 정삼각형을 4등분 하여 가운데 정삼각형을 색칠한다.



이와 같은 방법으로 색칠한 정삼각형의 넓이를 차례대로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 하고 색칠하는 과정을 한없이 반복할 때, 다음에 답하시오.

(1) a_1, a_2, a_3의 값을 구하시오.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 공비를 구하시오.

(3) 색칠한 모든 정삼각형의 넓이의 합을 구하시오.

0174 다음은 등비급수를 이용하여 순환소수 $0.\dot{2}\dot{3}$을 분수로 나타내는 과정이다.

$$0.\dot{2}\dot{3}=0.23+0.0023+0.000023+\cdots$$
$$=\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\cdots$$

이 급수는 첫째항이 [(가)]이고 공비가 [(나)]인 등비급수이므로

$$0.\dot{2}\dot{3}=\frac{[(다)]}{1-[(라)]}=[(마)]$$

위의 과정에서 (가)~(마)에 알맞은 것을 써넣으시오.

[0175~0176] 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

0175 $0.\dot{1}5\dot{2}$

0176 $0.1\dot{4}$

ⓒ좋은책신사고

B 단계 유형 Master

유형 01 급수의 합

개념 02-1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합 S_n에 대하여 수열 $\{S_n\}$이 수렴할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합은 수열 $\{S_n\}$의 극한값이다.

➡ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

0177 대표 문제

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n = \dfrac{-n^3+2n+3}{n(n+1)(2n+1)}$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합은?

① -2 ② -1 ③ $-\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 2

0178 B-

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$이다. $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(S_n - 3)$의 값을 구하시오.

0179 B0

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n = \frac{n^2+1}{1+2+3+\cdots+n}$$

일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합을 구하시오.

유형 02 부분분수를 이용하는 급수

집중공략 개념 02-1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 a_n이 $\dfrac{1}{AB}$ $(A \neq B)$ 꼴로 주어진 경우 급수의 합은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 급수의 제n항을 구한다.

(ii) $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)$임을 이용하여 부분합 S_n을 구한다.

(iii) $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구한다.

0180 대표 문제

급수 $\dfrac{1}{3\cdot5} + \dfrac{1}{5\cdot7} + \dfrac{1}{7\cdot9} + \dfrac{1}{9\cdot11} + \cdots$의 합을 구하시오.

0181 B0 서술형

급수 $\dfrac{1}{3^2-1} + \dfrac{1}{5^2-1} + \dfrac{1}{7^2-1} + \dfrac{1}{9^2-1} + \cdots$의 합을 구하시오.

0182 B0

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$의 합은?

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

0183 B0

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{S_n}$의 합을 구하시오.

0184 B+ 서술형

자연수 n에 대하여 직선 $(3n-1)x+(3n+2)y=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_n이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합을 구하시오.

유형 03 로그를 포함한 급수 개념 02-1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$의 합은 $\log A+\log B=\log AB$임을 이용하여 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \log a_k$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log(a_1a_2a_3\cdots a_n)$$

0185 대표 문제

급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \log_2 \frac{n^2}{n^2-1}$의 합은?

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

0186 B0

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1a_2a_3\cdots a_n=\frac{9n-1}{n+3}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \log_3 a_n$의 합을 구하시오.

0187 B0

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \log_4\left\{1+\frac{1}{n(n+2)}\right\}$의 합을 구하시오.

유형 04 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수 개념 02-1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여 홀수 번째 항까지의 부분합을 S_{2n-1}, 짝수 번째 항까지의 부분합을 S_{2n}이라 하면

① $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\alpha$ (α는 실수) ➡ $\lim_{n\to\infty} S_n=\alpha$ ➡ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$

② $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ ➡ $\lim_{n\to\infty} S_n$은 발산 ➡ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산

0188 대표 문제

수렴하는 급수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$
ㄴ. $1-2+3-4+5-6+\cdots$
ㄷ. $2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\cdots$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

0189 B0 서술형

급수 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\cdots$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

0190 B0

다음 급수 중 발산하는 것은?

① $(2-2)+(2-2)+(2-2)+\cdots$
② $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\cdots$
③ $1+(2-2)+(3-3)+(4-4)+\cdots$
④ $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}+\cdots$
⑤ $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$

ⓒ좋은책신사고

유형 05 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

집중공략 개념 02-2

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 ➡ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

0191 대표 문제

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n+2n^2}{a_n^2+n^2-n}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0192 B-

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$이다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n+2}{2S_n+5a_n}$의 값을 구하시오.

0193 B0

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2}\right)$$

이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

0194 B+ 서술형

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a_n+1}{a_n-5}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

유형 06 급수의 수렴과 발산

개념 02-2

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서

① $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ ➡ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산

② $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

➡ 부분합 S_n을 구한 다음 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 수렴, 발산을 조사한다.

0195 대표 문제

다음 급수 중 수렴하는 것은?

① $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$

② $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots$

③ $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{9}{10}+\frac{16}{17}+\cdots$

④ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}+\cdots$

0196 B-

수렴하는 급수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n-1}$ ㄴ. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

유형 07 급수의 성질

개념 02-3

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)이면 상수 p, q에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n+qb_n)=p\sum_{n=1}^{\infty}a_n+q\sum_{n=1}^{\infty}b_n=p\alpha+q\beta$$

0197 대표 문제

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=17,\ \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=19$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0198 B-

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=8,\ \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=18$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구하시오.

0199 B0

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$이다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 발산한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 08 등비급수의 합

집중공략

개념 02-4

$-1<r<1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$

0200 대표 문제

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}-5^n}{10^{n+1}}$의 합은?

① $-\frac{1}{10}$ ② $-\frac{1}{30}$ ③ $\frac{1}{30}$
④ $\frac{1}{10}$ ⑤ 1

0201 B0

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\cos n\pi\right\}$의 합을 구하시오.

0202 B0 서술형

자연수 n에 대하여 x^n을 $3x-1$로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오.

0203 B0

급수 $\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\cdots$의 합을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

유형 09 합이 주어진 등비급수 개념 02-4

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 합이 α (α는 실수)이면 $\frac{a}{1-r}=\alpha$임을 이용하여 a 또는 r의 값을 구한다.

0204 대표 문제

첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$의 값은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

0205 B-

등비급수 $1+\sin x+\sin^2 x+\cdots$의 합이 2일 때, x의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

0206 B0 서술형

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=-6,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=72$$

일 때, a_5의 값을 구하시오.

0207 B0

공비가 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1+b_1=5$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=8$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ 4
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

유형 10 등비급수의 수렴 조건 집중공략 개념 02-4

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴 ➡ $-1<r<1$

0208 대표 문제

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-2x)^n$이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위는?

① $-1<x<1$ ② $-1<x<0$ ③ $-1\le x<0$
④ $0<x<1$ ⑤ $0\le x<1$

0209 B0

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}\cos\theta)^{n-1}$이 수렴하도록 하는 θ의 값의 범위를 구하시오. (단, $0<\theta<\pi$)

0210 B0

급수

$$\frac{x}{2}+\frac{x(x-5)}{4}+\frac{x(x-5)^2}{8}+\frac{x(x-5)^3}{16}+\cdots$$

이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수를 구하시오.

0211 B0 서술형

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_2 x-3)^n$이 모두 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하시오.

유형 11 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 수렴하는 급수 개념 02-4

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하면 $-1<r<1$임을 이용하여 주어진 등비급수의 공비의 범위를 구한다. 이때 $-1<(\text{공비})<1$이면 주어진 등비급수는 수렴한다.

0212 대표 문제

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 항상 수렴하는 급수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$　　ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r+1}{2}\right)^n$　　ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{3}+1\right)^n$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

0213 B0

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 다음 중 항상 수렴하는 급수가 아닌 것은?

① $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}$　② $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1}$　③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$
④ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-3r}{2}\right)^n$　⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} (r^n-2r^{2n})$

0214 B+

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$이 모두 수렴할 때, 항상 수렴하는 급수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n$　　ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (단, $b\neq0$)
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a+b)^n$　　ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} (|a|-|b|)^n$

① ㄱ, ㄷ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

유형 12 S_n과 a_n 사이의 관계를 이용하는 급수 개념 02-1, 4

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 주어진 경우

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq2)$

임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

0215 대표 문제

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2n$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_na_{n+1}}$의 합은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}$

0216 B0

수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_k=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$을 만족시킬 때, 급수 $a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots$의 합은?

① $\frac{3}{5}$　② $\frac{6}{5}$　③ $\frac{9}{5}$
④ $\frac{12}{5}$　⑤ 3

0217 B0

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $\log_2(S_n+2)=n+1$을 만족시킬 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 합을 구하시오.

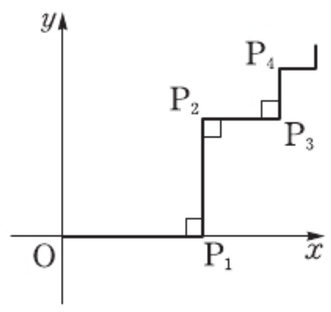
ⓒ좋은책신사고

유형 13 등비급수의 도형에의 활용; 좌표 개념 02-5

한없이 움직이는 점이 가까워지는 점의 좌표를 구할 때에는 점의 x좌표와 y좌표에 대한 규칙을 찾아서 각각 등비급수의 합을 이용하여 나타낸다.

0218 대표 문제

오른쪽 그림에서 자연수 n에 대하여 점 P_n은



$\overline{OP_1}=1$, $\overline{P_1P_2}=\frac{2}{3}\overline{OP_1}$,

$\overline{P_2P_3}=\frac{2}{3}\overline{P_1P_2}$, $\cdots$,

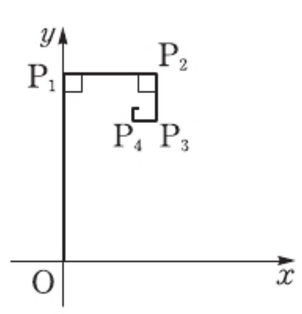
$\angle OP_1P_2=\angle P_1P_2P_3=\cdots=90^\circ$

를 만족시킨다. 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $x+y$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0219 B0

오른쪽 그림에서 자연수 n에 대하여 점 P_n은



$\overline{OP_1}=1$, $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{2}\overline{OP_1}$,

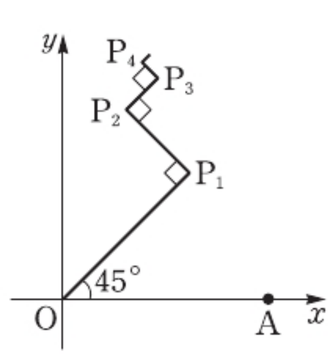
$\overline{P_2P_3}=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}$, $\cdots$,

$\angle OP_1P_2=\angle P_1P_2P_3=\cdots=90^\circ$

를 만족시킨다. 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

0220 B+ 서술형

오른쪽 그림에서 자연수 n과 x축 위의 점 A에 대하여 점 P_n은



$\overline{OP_1}=1$, $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{2}\overline{OP_1}$,

$\overline{P_2P_3}=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}$, $\cdots$,

$\angle AOP_1=45^\circ$, $\angle OP_1P_2=\angle P_1P_2P_3=\cdots=90^\circ$

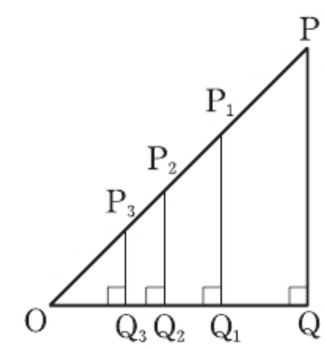
를 만족시킨다. 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, xy의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

유형 14 등비급수의 도형에의 활용; 길이 집중공략 개념 02-5

도형이 한없이 그려질 때, 도형의 길이 또는 둘레의 길이가 따르는 일정한 규칙을 찾고 첫째항이 a, 공비가 $r\,(-1<r<1)$인 등비급수의 합이 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

0221 대표 문제

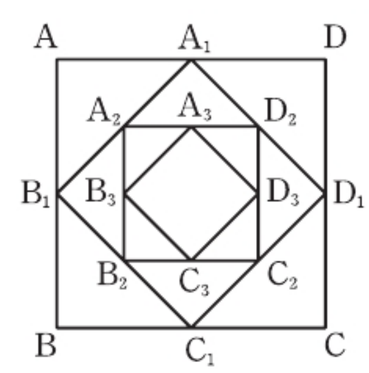
오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}=1$인 직각이등변삼각형 POQ에서 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, $\overline{OP_1}$, $\overline{OQ_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P_2, Q_2라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때,



$\overline{PQ}+\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\cdots$의 값을 구하시오.

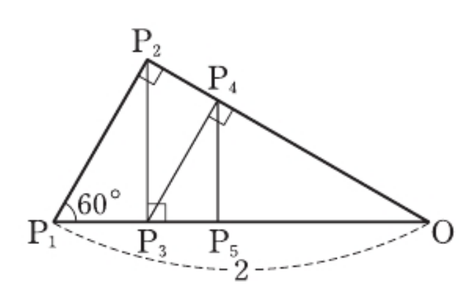
0222 B0

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 각 변의 중점을 연결하여 만든 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 둘레의 길이를 l_1, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 각 변의 중점을 연결하여 만든 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 둘레의 길이를 l_2라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 둘레의 길이 l_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값을 구하시오.



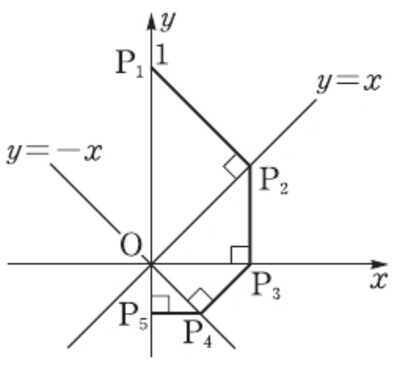
0223 B+

오른쪽 그림과 같이 $\overline{P_1O}=2$이고 $\angle P_1P_2O=90^\circ$, $\angle P_1=60^\circ$인 직각삼각형 P_1OP_2가 있다. 점 P_2에서 $\overline{OP_1}$에 내린 수선의 발을 P_3, 점 P_3에서 $\overline{OP_2}$에 내린 수선의 발을 P_4, 점 P_4에서 $\overline{OP_1}$에 내린 수선의 발을 P_5라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, $\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$의 값을 구하시오.



0224 B+

오른쪽 그림과 같이 점 $P_1(0, 1)$에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 P_2, 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 P_3, 점 P_3에서 직선 $y=-x$에 내린 수선의 발을 P_4라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, $\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$의 값은?



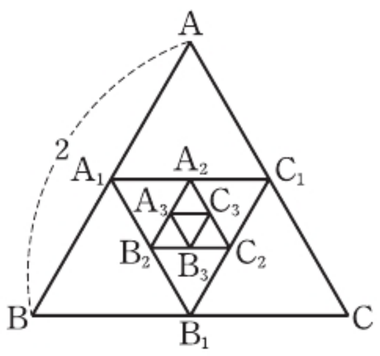
① $\sqrt{2}-1$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ $1+\sqrt{2}$ ⑤ $2+\sqrt{2}$

유형 15 등비급수의 도형에의 활용; 넓이 개념 02-5

도형의 넓이가 따르는 일정한 규칙을 찾은 다음 등비급수의 합을 이용한다.

0225 대표 문제

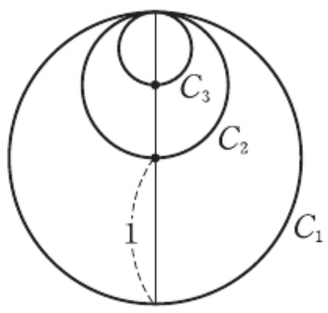
오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 각 변의 중점을 연결하여 만든 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이를 S_1, 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 각 변의 중점을 연결하여 만든 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\sqrt{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

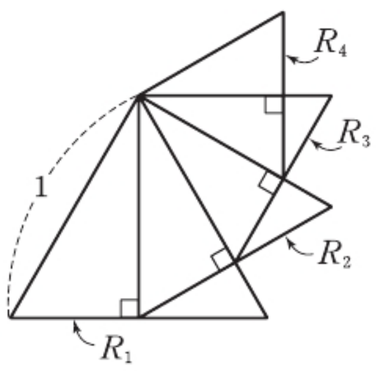
0226 B0

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 C_1의 중심을 지나고 C_1에 내접하는 원을 C_2, 원 C_2의 중심을 지나고 C_2에 내접하는 원을 C_3이라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 원 C_n의 넓이 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오.



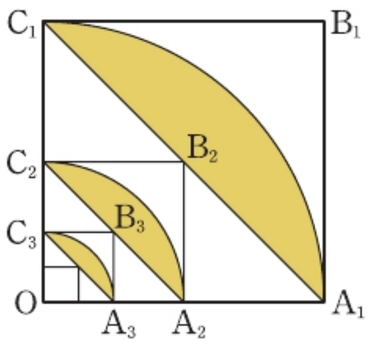
0227 B0 서술형

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 R_1의 높이를 한 변으로 하는 정삼각형을 R_2, 정삼각형 R_2의 높이를 한 변으로 하는 정삼각형을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 정삼각형 R_n의 넓이 S_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$의 값을 구하시오.



0228 B+

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $OA_1B_1C_1$에 점 O를 중심, $\overline{OA_1}$을 반지름으로 하는 사분원을 그리고 삼각형 OA_1C_1에 내접하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리자. 또 정사각형 $OA_2B_2C_2$에 점 O를 중심, $\overline{OA_2}$를 반지름으로 하는 사분원을 그리고 삼각형 OA_2C_2에 내접하는 정사각형 $OA_3B_3C_3$을 그리자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, $\overset{\frown}{A_nC_n}$과 $\overline{A_nC_n}$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오.



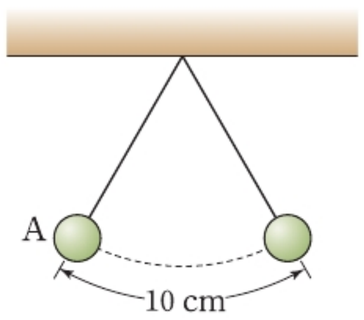
ⓒ좋은책신사고

유형 16 등비급수의 실생활에의 활용 개념 02-5

어떤 과정이 한없이 반복될 때, 값이 변하는 일정한 규칙을 찾은 다음 등비급수의 합을 이용한다.

0229 대표 문제

오른쪽 그림과 같이 끈에 매달려 있는 추를 A 위치에서 놓으면 처음에 10 cm만큼 움직였다가 다시 방향을 바꾸어 8 cm만큼 움직인다. 이와 같이 추가 앞에서 움직인 거리의 $\frac{4}{5}$만큼 방향을 바꾸어 움직이는 과정을 한없이 반복할 때, 이 추가 멈출 때까지 움직인 거리는 몇 cm인지 구하시오.



0230 B+

어떤 공을 땅에 떨어뜨리면 그 공은 직전에 낙하한 높이의 $\frac{2}{3}$만큼 수직으로 튀어 오른다고 한다. 15 m 높이에서 이 공을 땅에 떨어뜨렸을 때, 공이 정지할 때까지 움직인 거리는?

① 60 m ② 65 m ③ 70 m
④ 75 m ⑤ 80 m

0231 B+ 서술형

어느 동문회에서 모교 재학생들을 위한 장학 기금 30억 원을 조성하였다. 매년 초에 기금을 운용하여 연말까지 20 %의 이익을 내고 기금과 이익을 합한 금액의 30 %를 매년 말에 장학금으로 지급하려고 한다. 장학금을 지급하고 남은 금액을 기금으로 하여 기금의 운용과 장학금의 지급을 매년 이와 같은 방법으로 실시할 때, 기금을 조성한 후 n 번째 해에 지급하는 장학금을 a_n억 원이라 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오.

유형 17 순환소수와 등비급수 개념 02-5

순환소수를 등비급수의 합을 이용하여 분수로 나타낸다.

0232 대표 문제

각 항이 양수이고 첫째항이 $0.\dot{2}$, 제3항이 $0.0\dot{5}$인 등비급수의 합은?

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{99}$ ⑤ $\frac{5}{99}$

0233 B0

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 $0.\dot{3}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.\dot{2}\dot{1}$일 때, a_1의 값은?

① $\frac{4}{33}$ ② $\frac{13}{99}$ ③ $\frac{14}{99}$
④ $\frac{5}{33}$ ⑤ $\frac{16}{99}$

0234 B0 서술형

어떤 수에 $1.1\dot{2}$를 곱할 것을 잘못하여 1.12를 곱하였더니 바르게 계산한 값보다 6만큼 작았다. 이때 어떤 수를 구하시오.

0235 B+

$\frac{1}{33}$을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 n 번째 자리의 숫자를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\cdots$$

의 합을 구하시오.

B-

0236

급수 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}$의 합을 구하시오.

0237

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4}{1-2a_n}$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ 3

0238

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=8$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

0239 동영상

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{2}=4$일 때, 양수 x의 값을 구하시오.

0240 서술형

수열 $\{(5x-2)^n\}$과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3x-2)^n$이 모두 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하시오.

B0

0241 평가원 기출

자연수 n에 대하여 $3^n\cdot5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

0242 동영상

이차방정식 $x^2+2x-(n^2+2n)=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구하시오.

0243 서술형 동영상

급수

$$\log_2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\log_2\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\log_2\left(1-\frac{1}{4^2}\right)+\cdots$$

의 합을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0244

동영상

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오. (단, α, β는 실수이다.)

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\alpha\beta$이다.

0245

순환소수 $0.\dot{2}\dot{7}$의 소수점 아래 n 번째 자리의 숫자를 a_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$의 값을 구하시오.

0246

동영상

자연수 n에 대하여 4^n+3을 5로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$의 값은?

① $\frac{7}{33}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{23}{99}$
④ $\frac{8}{33}$ ⑤ $\frac{25}{99}$

0247

$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=2$가 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

(단, r는 상수이다.)

0248 교육청 기출

동영상

모든 항이 양의 실수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=k,\ a_na_{n+1}+a_{n+1}=ka_n^2+ka_n\ (n\geq1)$$

을 만족시키고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$일 때, 실수 k의 값은? (단, $0<k<1$)

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

0249

다음 중 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}\tan\pi x-1}{2}\right)^{n-1}$이 수렴하도록 하는 실수 x의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은? $\left(단,\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{16}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

0250 서술형

동영상

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=25\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$을 만족시킬 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}$의 합을 구하시오.

0251

어떤 공장에서 생산된 종이 상자의 $\frac{1}{2}$이 재활용 종이로 수거되고 그중 $\frac{3}{4}$이 종이 상자로 재생산된다고 한다. 처음 생산된 종이 상자가 10 kg이고 이러한 수거와 재생산 과정을 무한히 반복할 때, 재생산된 종이 상자는 총 몇 kg인지 구하시오.

B+

0252

동영상

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의될 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$의 값을 구하시오.

0253 도전

동영상

좌표평면에서 직선 $x-3y+3=0$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 좌표를 각각

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ (a_3,\ b_3),\ \cdots,\ (a_n,\ b_n),\ \cdots$$

이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

0254 교육청 기출

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

(가) $\frac{2n^3+3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}<a_n<2b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

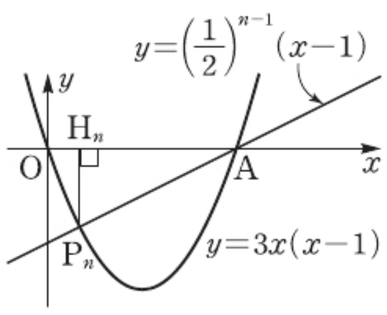
(나) $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-3)=2$

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

0255 평가원 기출 도전

동영상

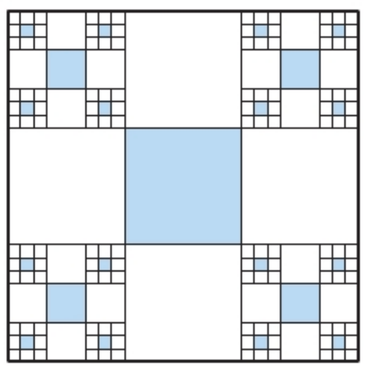
자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 이차함수 $y=3x(x-1)$의 그래프가 만나는 두 점을 A(1, 0)과 P_n이라 하자. 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nH_n}$의 값은?



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{14}{9}$ ③ $\frac{29}{18}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{31}{18}$

0256

오른쪽 그림과 같이 넓이가 1인 정사각형이 있다. 첫 번째 시행에서 정사각형을 9등분 하여 중앙의 정사각형을 색칠하고, 두 번째 시행에서 네 귀퉁이의 정사각형을 각각 9등분 하여 중앙의 정사각형을 색칠한다.



이와 같이 네 귀퉁이의 정사각형을 각각 9등분 하여 중앙의 정사각형을 색칠하는 과정을 한없이 반복할 때, 색칠한 모든 정사각형의 넓이의 합을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

나를 바꾸는 힘

한 줄 비타민

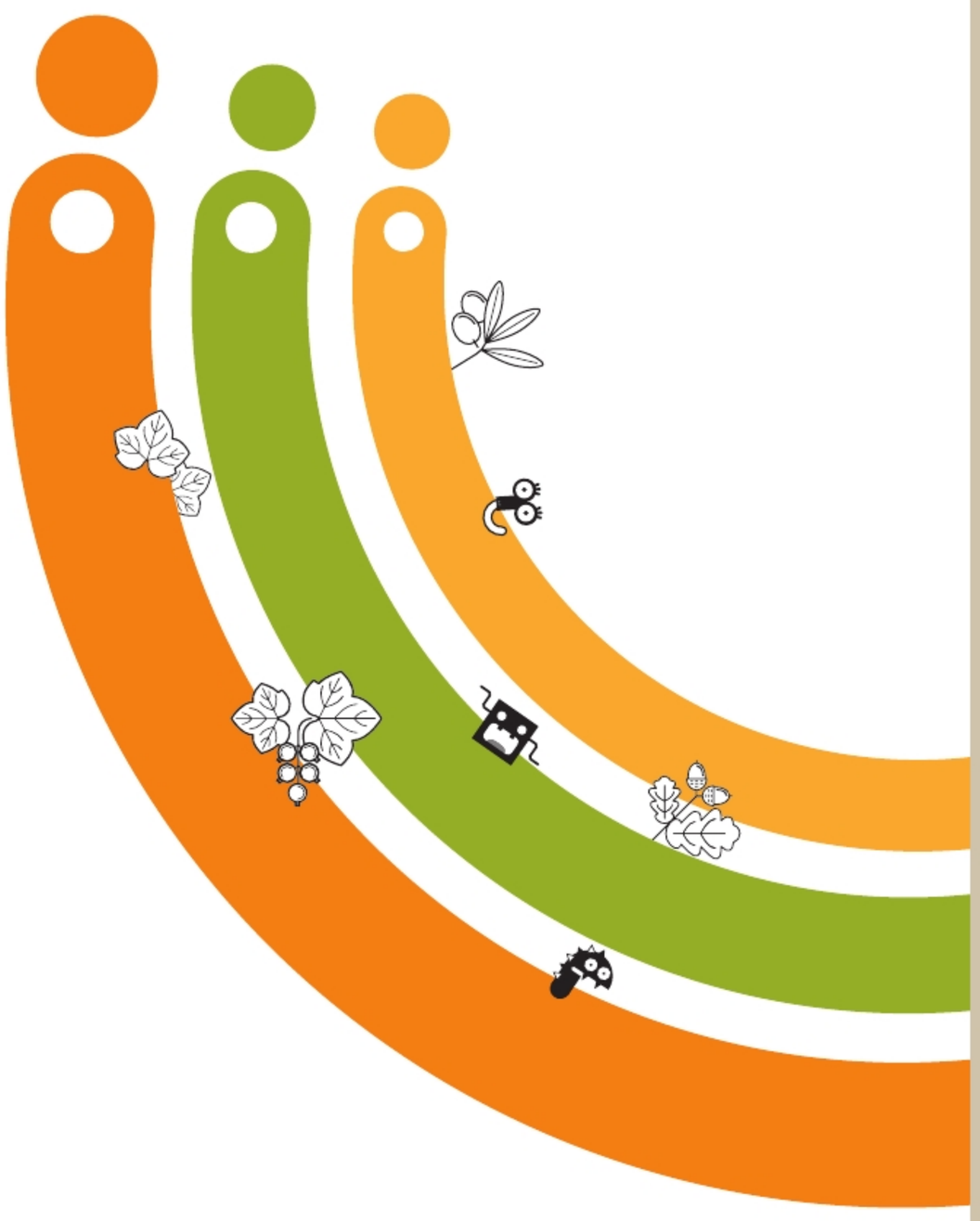
- 윈스턴 처칠 -

이루고 싶은 꿈이 있나요?
꿈을 이루기 위해서는 내가 열심히 노력해야 합니다.
주어진 상황이 힘들더라도 포기하지 말고
더욱 힘을 내서 나아가 보세요.
어느새 꿈을 마주한 내 모습을 만나게 될 것입니다.

ⓒ좋은책신사고

Ⅱ 미분법

03	지수함수와 로그함수의 미분	42
04	삼각함수의 미분	56
05	여러 가지 미분법	74
06	도함수의 활용 (1)	90
07	도함수의 활용 (2)	106



ⓒ좋은책신사고

기본 Master A 단계

03-1 | 지수함수의 극한

유형 | 01

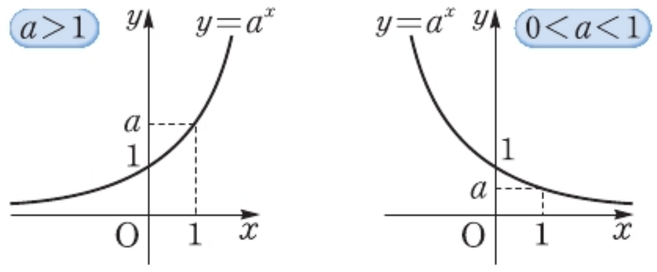
지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$[1]에서

① $a>1$일 때,

$\lim_{x\to\infty} a^x=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} a^x=0$

② $0<a<1$일 때,

$\lim_{x\to\infty} a^x=0,\ \lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$



예 ① $\lim_{x\to\infty} 3^x=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} 3^x=0$ ② $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0,\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\infty$

참고 지수함수를 포함한 극한은 다음과 같이 식을 변형하여 $0<a<1$일 때 $\lim_{x\to\infty} a^x=0$임을 이용한다.

① $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이면 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 나눈다.

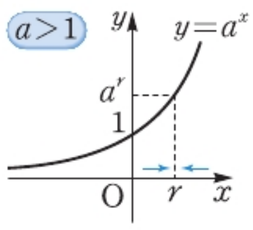
② $\infty-\infty$ 꼴이면 밑이 가장 큰 항으로 묶는다.

개념 NOTE

1 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프에서 실수 r에 대하여

$\lim_{x\to r} a^x=a^r$

임을 알 수 있다. 즉 지수함수 $y=a^x$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.



03-2 | 로그함수의 극한

유형 | 02

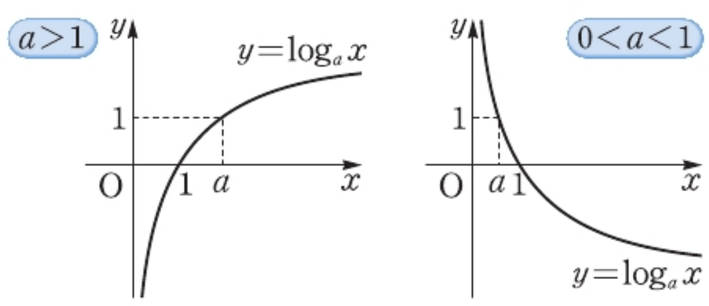
로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$[2]에서

① $a>1$일 때,

$\lim_{x\to0+}\log_a x=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$

② $0<a<1$일 때,

$\lim_{x\to0+}\log_a x=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$



예 ① $\lim_{x\to0+}\log_3 x=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}\log_3 x=\infty$ ② $\lim_{x\to0+}\log_{\frac{1}{2}} x=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}} x=-\infty$

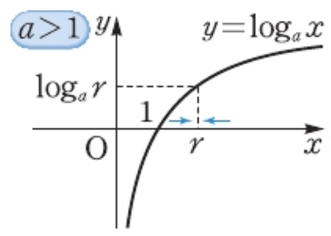
참고 로그함수를 포함한 극한은 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to r} f(x)$가 존재하고 $f(x)>0,\ \lim_{x\to r} f(x)>0$이면

$\lim_{x\to r}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to r} f(x)\right\}$ $(a>0,\ a\neq1)$임을 이용하여 구할 수 있다.

2 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프에서 양의 실수 r에 대하여

$\lim_{x\to r}\log_a x=\log_a r$

임을 알 수 있다. 즉 로그함수 $y=\log_a x$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



[0257~0262] 다음 극한을 조사하시오.

0257 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{2}\right)^x$

0258 $\lim_{x\to-\infty} 4^x$

0259 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^x$

0260 $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^{2x}}$

0261 $\lim_{x\to0} 2^x$

0262 $\lim_{x\to-1}\left(\frac{2}{5}\right)^x$

[0263~0264] 다음 극한을 조사하시오.

0263 $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{1+2^x}$

0264 $\lim_{x\to\infty}(2^x-3^x)$

[0265~0270] 다음 극한을 조사하시오.

0265 $\lim_{x\to0+}\log_5 x$

0266 $\lim_{x\to\infty}\log 2x$

0267 $\lim_{x\to0+}\log_{\frac{2}{3}} 3x$

0268 $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{3}{4}} x$

0269 $\lim_{x\to1}\log_3 x$

0270 $\lim_{x\to2}\log_{\frac{1}{2}} x$

[0271~0272] 다음 극한을 조사하시오.

0271 $\lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{x}$

0272 $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x}$

03-3 | 무리수 e와 자연로그

유형 | 03·04

개념 NOTE

(1) 무리수 e

x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 일정한 값에 수렴함이 알려져 있는데, 그 값을 e와 같이 나타낸다. 즉

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$ ❶

이다. 이때 e는 무리수이고, 그 값은 $e=2.71828182845904\cdots$이다.

참고 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e,\ 즉\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$ ❷

(2) 자연로그

밑이 e인 로그 $\log_e x$를 x의 **자연로그**라 하고, 간단히 $\ln x$와 같이 나타낸다.

참고 ① 무리수 e를 밑으로 하는 지수함수를 $y=e^x$으로 나타낸다.
② 지수함수 $y=e^x$과 로그함수 $y=\ln x$는 서로 역함수 관계에 있다.
➡ $y=e^x \Longleftrightarrow x=\ln y$

❶ 0이 아닌 상수 a에 대하여
$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{ax}}=e$

❷ 0이 아닌 상수 a에 대하여
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}=e$

✱ 자연로그에 대해서도 다음 로그의 성질이 모두 성립한다.
(단, $x>0$, $y>0$)
① $\ln 1=0$, $\ln e=1$
② $\ln xy=\ln x+\ln y$
③ $\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$
④ $\ln x^n=n\ln x$ (단, n은 실수)

03-4 | e의 정의를 이용한 지수·로그함수의 극한

유형 | 05~11

$a>0$, $a\neq 1$일 때

① $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ❸❹

② $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ❺

③ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

④ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

참고 ① $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$
② $e^x-1=t$로 놓으면 $e^x=1+t$, 즉 $x=\ln(1+t)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln e}=1$$

❸ 0이 아닌 상수 a에 대하여
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$

❹ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$이므로
$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

❺ 0이 아닌 상수 a에 대하여
$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$

[0273~0276] 다음 극한값을 구하시오.

0273 $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}$

0274 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

0275 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}$

0276 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

[0277~0280] 다음 값을 구하시오.

0277 $\ln e^2$

0278 $\ln\sqrt{e}$

0279 $\ln\frac{1}{e}$

0280 $\frac{1}{\log_3 e}+\frac{1}{\log_2 e}$

[0281~0284] 다음 극한값을 구하시오.

0281 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$

0282 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

0283 $\lim_{x\to 0}\frac{\log_5(1+x)}{x}$

0284 $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$

ⓒ좋은책신사고

정답 및 풀이 30쪽

03-5 | 지수함수의 도함수

유형 | 12·14

(1) $y=e^x$이면 $\quad y'=e^x$

(2) $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$이면 $\quad y'=a^x\ln a$

참고 (1) $y'=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot1=e^x$

(2) $y'=\lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$

개념 NOTE

* 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수는
$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

03-6 | 로그함수의 도함수

유형 | 13·14

(1) $y=\ln x$이면 $\quad y'=\frac{1}{x}$

(2) $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$이면 $\quad y'=\frac{1}{x\ln a}$

참고 (1) $y'=\lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

이때 $\frac{h}{x}=t$로 놓으면 $h=tx$이고, $h\to0$일 때 $t\to0$이므로

$y'=\lim_{t\to0}\frac{1}{tx}\ln(1+t)=\frac{1}{x}\lim_{t\to0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

(2) $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$ ❶ 이므로 $\quad y'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$

❶ $a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ b\neq1,\ N>0$일 때,
$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$

[0285~0288] 다음 함수를 미분하시오.

0285 $y=5e^x$

0286 $y=e^{x+2}$

0287 $y=e^{x-1}$

0288 $y=x^2e^x$

[0289~0292] 다음 함수를 미분하시오.

0289 $y=6^x$

0290 $y=2\cdot4^x$

0291 $y=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

0292 $y=3^x(3x+1)$

[0293~0296] 다음 함수를 미분하시오.

0293 $y=\frac{3\ln x}{5}$

0294 $y=\ln 3x$

0295 $y=\ln x^2$

0296 $y=x\ln x$

[0297~0300] 다음 함수를 미분하시오.

0297 $y=\log 2x$

0298 $y=\log_2 3x$

0299 $y=x\log_5 x$

0300 $y=e^x\log_3 x$

B 단계 유형 Master

유형 01 지수함수의 극한

개념 03-1

지수함수를 포함한 함수의 극한값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 식을 다음과 같이 변형한다.

① $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이면 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 나눈다.

② $\infty-\infty$ 꼴이면 밑이 가장 큰 항으로 묶는다.

(ii) $0<a<1$일 때 $\lim_{x\to\infty} a^x=0$임을 이용하여 극한값을 구한다.

0301 대표 문제

$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}-3^x}{2^x+3^x}$의 값을 구하시오.

0302 B-

$\lim_{x\to\infty}(4^x-3^x)^{\frac{1}{x}}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

0303 B0 서술형

$\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 4^{x+1}+1}{4^x-2^x}=12$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

0304 B0

$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

0305 B+

$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x+7^{-x}}{7^x-7^{-x}}$의 값을 구하시오.

유형 02 로그함수의 극한

개념 03-2

로그함수를 포함한 함수의 극한값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 식을 로그의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}$ 꼴로 변형한다.

(ii) $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}$임을 이용하여 극한값을 구한다.

(단, $a>0$, $a\neq1$, $f(x)>0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)>0$)

0306 대표 문제

$\lim_{x\to\infty}(\log_3 x-\log_3\sqrt{3x^2+x})$의 값은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

0307 B-

$\lim_{x\to\infty}\{\log_4 8^x-\log_4(8^x+4^x)\}$의 값을 구하시오.

0308 B0

$\lim_{x\to2}(\log_2|x^2-4|-\log_2|x-2|)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

ⓒ좋은책신사고

0309 B0

$\lim_{x\to\infty}\{\log_4(2x+1)-\log_4(3x^2-1)+\log_4(3x+2)\}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

0310 B0 서술형

$\lim_{x\to\infty}\{\log(ax-1)-\log(x+1)\}=3$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

0311 B+

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_2(4^x+5^x)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\log_2 3$
④ 2 ⑤ $\log_2 5$

유형 03 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 꼴의 극한 집중공략 개념 03-3

① $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

② $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{ab}=e^{ab}$

(단, a, b는 0이 아닌 상수)

0312 대표 문제

$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}+\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$의 값을 구하시오.

0313 B0

$\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$의 값은?

① $e^{\frac{1}{6}}$ ② $e^{\frac{5}{6}}$ ③ e^2
④ e^5 ⑤ e^6

0314 B+

$\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{2-x}}$의 값을 구하시오.

유형 04 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 꼴의 극한 집중공략 개념 03-3

① $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

② $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}\right\}^{\frac{b}{a}}=e^{\frac{b}{a}}$

(단, a, b는 0이 아닌 상수)

0315 대표 문제

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{5x}$의 값을 구하시오.

0316 B-

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{6x}=e^{12}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ 3 ⑤ 6

0317 B0

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$의 값을 구하시오.

0318 B+

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$과 값이 같은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 0이 아닌 상수이고 $a\neq 1$, $b\neq 1$이다.)

보기

ㄱ. $\lim_{x\to 0}(1+bx)^{\frac{a}{x}}$　　ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{b}}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 05 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

개념 03-4

① $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$　② $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

0319 대표 문제

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+7x}{2x}$의 값을 구하시오.

0320 B-

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{\ln(1+3x)}$의 값을 구하시오.

0321 B-

$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sqrt{2x})+\ln(1-\sqrt{2x})}{x}$의 값은?

① -4　② -2　③ 1　④ 2　⑤ 4

0322 B0

$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(2x+1)-\ln 2x\}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

0323 B+ 서술형

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(ax+1)}{x^3+2x}=5$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x+1)}{ax}$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.)

유형 06 $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

개념 03-4

$a>0$, $a\neq 1$일 때

① $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

② $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+bx)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+bx)}{bx}\cdot b=\frac{b}{\ln a}$

(단, b는 0이 아닌 상수)

0324 대표 문제

$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(3+x)-\log_2 3}{x}$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0325 B-

$\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1-3x)}{x}$의 값을 구하시오.

0326 B0

$\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1+2x)}{\log_2(1-x)}$의 값은?

① $-\frac{2\ln2}{\ln5}$ ② $-\frac{\ln2}{\ln5}$ ③ $-\frac{1}{2\ln2}$
④ $\frac{\ln5}{2\ln2}$ ⑤ $\frac{\ln5}{\ln2}$

0327 B0

$\lim_{x\to2}\frac{\log(x-1)}{x-2}$의 값을 구하시오.

유형 07 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$ 꼴의 극한 개념 03-4

① $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

② $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a=a$ (단, a는 0이 아닌 상수)

0328 대표 문제

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2-x}$의 값은?

① -2 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

0329 B0

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{5x}-1}$의 값을 구하시오.

0330 B0

$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{-4x}}{x}$의 값은?

① 12 ② 7 ③ 5
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

0331 B0

$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}$의 값을 구하시오.

0332 B+ 서술형

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)}{e^{ax}-1}=\frac{1}{2}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

유형 08 $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$ 꼴의 극한 개념 03-4

$a>0$, $a\neq1$일 때

① $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

② $\lim_{x\to0}\frac{a^{bx}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a^{bx}-1}{bx}\cdot b=b\ln a$ (단, b는 0이 아닌 상수)

0333 대표 문제

$\lim_{x\to0}\frac{3^x-2^x}{x}$의 값은?

① $\ln\frac{2}{3}$ ② 0 ③ $\ln\frac{3}{2}$
④ $\frac{3}{\ln 2}$ ⑤ $3\ln 2$

0334 B0

$\lim_{x\to0}\frac{\{\log_3(1+x)\}(3^x-1)}{x^2}$의 값을 구하시오.

0335 B0

$\lim_{x\to0}\frac{2^x+4^x+8^x-3}{x}=\ln a$일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

0336 B0

$\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x^2-1}$의 값을 구하시오.

유형 09 지수·로그함수의 극한; 미정계수의 결정 집중공략 개념 03-4

$x\to a$일 때

① (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to0$

② (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\to0$

0337 대표 문제

$\lim_{x\to0}\frac{ax+b}{e^{2x}-1}=\frac{1}{3}$을 만족시키는 상수 a, b의 값을 구하시오.

0338 B0

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+2x}{\log_3(1+x)+a}=b$를 만족시키는 상수 a, b의 값을 구하시오. (단, $b\neq0$)

0339 B0 서술형

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+bx)}{2^{x+1}-a}=\frac{2}{\ln 2}$를 만족시키는 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

0340 B0

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{e^x-1}=\frac{1}{3}$을 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

ⓒ좋은책신사고

0341 B+

$\lim_{x\to-1}\frac{a\ln(x+2)+b}{x^2-1}=4$를 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

유형 10 지수·로그함수의 극한의 도형에의 활용 개념 03-4

집중공략

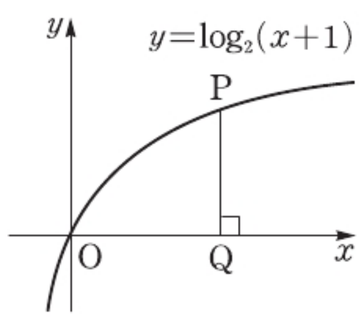
지수·로그함수의 극한의 도형에의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

(i) 구하는 선분의 길이 또는 도형의 넓이를 식으로 나타낸다.

(ii) 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

0342 대표 문제

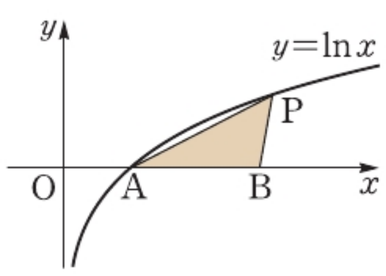
오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 P가 이 곡선을 따라 원점 O에 한없이 가까워질 때, $\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$의 극한값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



0343 B0

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$ 위를 움직이는 점 P와 두 점 A(1, 0), B(3, 0)이 있다. 점 P의 x좌표를 t라 하고 삼각형 PAB의 넓이를 $S(t)$라 할 때,

$\lim_{t\to1+}\frac{S(t)}{t-1}$의 값은?

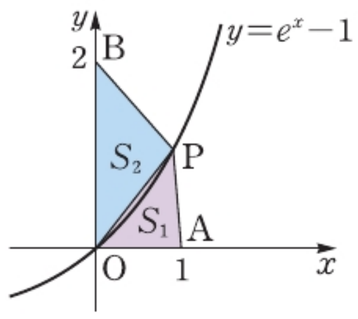


① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ $\ln 2$ ④ 1 ⑤ e

0344 B+

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^x-1$ 위의 점 P와 세 점 O(0, 0), A(1, 0), B(0, 2)에 대하여 두 삼각형 OAP, OBP의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. 점 P가 이 곡선을 따라 점 O에 한없이 가까워질 때, $\frac{S_1}{S_2}$의 극한값을 구하시오.

(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



유형 11 지수·로그함수의 연속; 미정계수의 결정 개념 03-4

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이면

$\lim_{x\to a}g(x)=k$

(단, 함수 $g(x)$는 $x\neq a$인 모든 실수 x에서 연속이고 k는 상수이다.)

0345 대표 문제

함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x+x-1}{4x} & (x\neq0) \\ a & (x=0) \end{cases}$가 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

0346 B0

함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{x\cdot2^x}{4^x-1} & (x>0) \\ k & (x\leq0) \end{cases}$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

0347 B0

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이고 $xf(x)=e^{2x}-1$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

0348 B+ 서술형

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(a+5x)}{x} & (x>0) \\ b & (x\le 0) \end{cases}$가 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

유형 12 지수함수의 도함수 집중공략 개념 03-5

① $y=e^x$이면 $y'=e^x$
② $y=a^x\,(a>0,\ a\ne 1)$이면 $y'=a^x\ln a$

0349 대표 문제

함수 $f(x)=(x+2)e^{x+1}$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

0350 B0 서술형

곡선 $y=2^{x+3}$ 위의 점 $(-1,\ 4)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

0351 B0

함수 $f(x)=ax^2e^x$이 $f'(1)=\frac{1}{2}e$를 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

0352 B+

함수 $f(x)=3^x(x^2-1)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}$의 값을 구하시오.

유형 13 로그함수의 도함수 집중공략 개념 03-6

① $y=\ln x$이면 $y'=\frac{1}{x}$
② $y=\log_a x\ (a>0,\ a\ne 1)$이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$

0353 대표 문제

함수 $f(x)=x^2\ln x$에 대하여 $f'(e)$의 값을 구하시오.

0354 B0

함수 $f(x)=(\log_2 x)^2+\frac{1}{2}\ln x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0355 B0

함수 $f(x)=x\log_3 2x$의 도함수가 $f'(x)=\log_3 ax$일 때, 상수 a의 값은?

① e ② $2e$ ③ $3e$
④ $4e$ ⑤ $5e$

0356 B0

함수 $f(x)=e^x(\ln x+kx)$에 대하여 $f'(1)=5e$일 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

0357 B0

함수 $f(x)=x\ln x+x^3$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}$의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ e

0358 B+ 서술형

함수 $f(x)=a\ln x+b$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$일 때, $f(e)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

유형 14 지수·로그함수의 도함수; 미분가능성 집중공략 개념 03-5, 6

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge a) \\ g(x) & (x<a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

① 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다.
➡ $\lim_{x\to a-}g(x)=f(a)$

② 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.
➡ $\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a-}g'(x)$

0359 대표 문제

함수 $f(x)=\begin{cases} \ln ax & (x>1) \\ bx+2 & (x\le1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

0360 B0 서술형

함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x>1) \\ e^{x-1}+b & (x\le1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

B-

0361

$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+1)+\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-1)\}$의 값은?

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ $\log_2 3$

0362

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{2x}}=e^5$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

0363

동영상

$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)\left(1+\frac{1}{4x}\right)\right\}^{12x}$의 값을 구하시오.

0364

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2^x}{x}$의 값은?

① $1-\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $2-\ln 2$
④ $1+\ln 2$ ⑤ $2+\ln 2$

0365

곡선 $y=(x-3)e^x$에 대하여 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기를 구하시오.

B0

0366

극한값이 존재하는 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x}{2^x+2^{-x}}$ ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3x^2-2}{x^2+3}$ ㄹ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

0367 서술형

동영상

함수 $f(x)=\frac{a\cdot 5^x+b\cdot 3^{x-1}}{5^x-3^{x+1}}$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=4,\ \lim_{x\to 0}f(x)=-2$$

일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0368

동영상

$\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

0369

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{2x}-1}=4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

0370

함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}xf(x)=3$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}(e^{3x}-1)f(x)$의 값을 구하시오.

0371 교육청 기출

동영상

함수 $f(x)=\log_2(x+3)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x-2)}{g(x)+2}$의 값은?

① $(\ln 2)^2$ ② $\ln 2$ ③ 1
④ $\frac{1}{\ln 2}$ ⑤ $\frac{1}{(\ln 2)^2}$

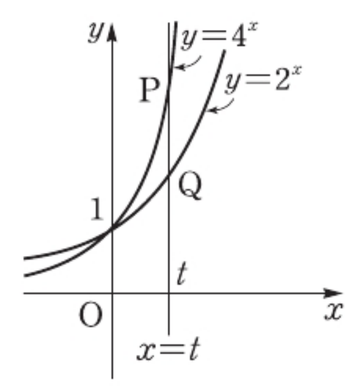
0372 서술형

$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{ax+9}{\ln 3x}=b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.

0373

동영상

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=4^x$, $y=2^x$의 그래프와 직선 $x=t\,(t>0)$의 교점을 각각 P, Q라 할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}}{t}$의 값은?



① $\ln\frac{2}{3}$ ② 0
③ $\ln\frac{4}{3}$ ④ $\ln\frac{5}{3}$
⑤ $\ln 2$

0374 교육청 기출

동영상

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{ax}-1}{3x} & (x<0)\\ x^2+3x+2 & (x\ge0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? (단, $a\neq0$)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

0375 서술형

함수 $f(x)=(x^3-5x^2+9x-7)e^x$에 대하여 $f'(a)=0$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

0376 평가원 기출

함수 $f(x)=\log_3 x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$의 값은?

① $\frac{1}{2\ln 3}$ ② $\frac{2}{3\ln 3}$ ③ $\frac{5}{6\ln 3}$
④ $\frac{1}{\ln 3}$ ⑤ $\frac{7}{6\ln 3}$

B+

0377 동영상

$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$과 값이 같은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}$ ㄴ. $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

ㄷ. $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

0378

$\lim_{x\to -2}\frac{5^{x+2}-1}{\ln(x+3)}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_3(1+2x)}$의 값은?

① $\ln 2\sqrt{3}$ ② $\ln 3\sqrt{3}$ ③ $\ln 4\sqrt{3}$
④ $\ln 5\sqrt{3}$ ⑤ $\ln 6\sqrt{3}$

0379 평가원 기출 동영상

함수 $f(x)$가 $x>-1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\ln(1+x)\le f(x)\le \frac{1}{2}(e^{2x}-1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}$의 값은?

① 1 ② e ③ 3
④ 4 ⑤ $2e$

0380 동영상

함수 $f(n)=\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(1+kx)}{x}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{f(n)}$의 값을 구하시오.

0381 도전 동영상

$x>0$인 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.)

(가) $\lim_{x\to 1} f(x)=5$

(나) $(x-1)f(x)=a\ln x+b-2$

ⓒ좋은책신사고

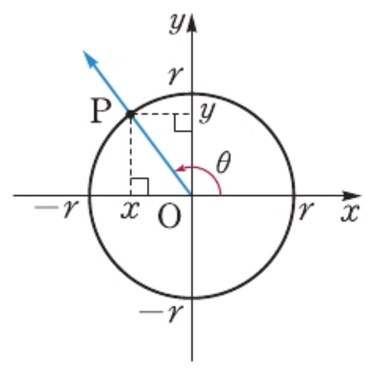
기본 Master A 단계

04-1 | 삼각함수

유형 | 01

개념 NOTE

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 교점을 $P(x, y)$라 하면

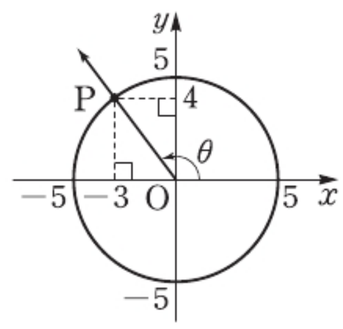


$$\csc\theta=\frac{r}{y}\,(y\neq0),\ \sec\theta=\frac{r}{x}\,(x\neq0),\ \cot\theta=\frac{x}{y}\,(y\neq0)$$ ❶

이 함수를 차례대로 θ에 대한 **코시컨트함수**, **시컨트함수**, **코탄젠트함수**라 하고, 이와 같은 함수들도 θ에 대한 삼각함수라 한다.

❶ csc, sec, cot는 각각 cosecant, secant, cotangent의 약자이다.

예 오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 원의 교점이 $P(-3, 4)$일 때, $\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$이므로



$$\csc\theta=\frac{5}{4},\ \sec\theta=-\frac{5}{3},\ \cot\theta=-\frac{3}{4}$$

참고 $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ ❷

❷ $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 부호는 각각 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 부호와 같다.

04-2 | 삼각함수 사이의 관계

유형 | 02·03

① $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$　　② $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

참고 ① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta\,(\cos\theta\neq0)$로 나누면

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\qquad\therefore\ \tan^2\theta+1=\sec^2\theta$$

② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\sin^2\theta\,(\sin\theta\neq0)$로 나누면

$$1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}\qquad\therefore\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

0382 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 원의 교점이 $P(12, -5)$일 때, 다음 값을 구하시오.

(1) $\csc\theta$　　(2) $\sec\theta$　　(3) $\cot\theta$

[0383~0386] 다음 각 θ에 대하여 $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값을 구하시오.

0383 $\frac{3}{4}\pi$

0384 $\frac{7}{6}\pi$

0385 150°

0386 300°

0387 θ가 제3사분면의 각이고 $\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

0388 θ가 제2사분면의 각이고 $\tan\theta=-3$일 때, $\csc\theta$의 값을 구하시오.

0389 다음 식을 간단히 하시오.

$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)$

04-3 | 삼각함수의 덧셈정리

유형 | 04·05·06·07

개념 NOTE

두 각 α, β의 삼각함수를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$의 삼각함수를 다음과 같이 나타낼 수 있고, 이것을 삼각함수의 **덧셈정리**[1]라 한다.

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

예 $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

[1] 주어진 각이 두 특수각의 합 또는 차로 나타내어지면 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 특수각이 아닌 각의 삼각함수의 값을 구할 수 있다.

04-4 | 삼각함수의 덧셈정리의 활용

유형 | 08·09·10

(1) 배각의 공식[2]

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(2) 삼각함수의 합성

① $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

② $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$ $\left(\text{단, } \cos\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\beta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

[2] 삼각함수의 덧셈정리 중 $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$에 β 대신 α를 대입하면 배각의 공식을 얻을 수 있다.

* 함수 $y=a\sin\theta+b\cos\theta$의 주기는 2π, 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$, 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}$이다. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

[0390~0392] 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

0390 $\sin 15^\circ$

0391 $\cos 105^\circ$

0392 $\tan 75^\circ$

[0393~0395] 다음 식의 값을 구하시오.

0393 $\sin 10^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\sin 35^\circ$

0394 $\cos 40^\circ\cos 20^\circ-\sin 40^\circ\sin 20^\circ$

0395 $\dfrac{\tan 80^\circ-\tan 20^\circ}{1+\tan 80^\circ\tan 20^\circ}$

0396 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$일 때, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

[0397~0399] 다음 식을 $r\sin(\theta+\alpha)$ 꼴로 변형하시오. (단, $r>0$, $0\le\alpha<2\pi$)

0397 $\sin\theta+\cos\theta$

0398 $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

0399 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

ⓒ좋은책신사고

04-5 | 삼각함수의 극한

유형 | 11~19

(1) 삼각함수의 극한

실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a,\ \lim_{x\to a}\cos x=\cos a,\ \lim_{x\to a}\tan x=\tan a\ \left(\text{단, } a\neq n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\text{은 정수}\right)$$ ❶

예 $\lim_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0,\ \lim_{x\to \pi}\cos x=\cos\pi=-1,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=\tan\frac{\pi}{4}=1$

(2) 함수 $\frac{\sin x}{x}$의 극한

x의 단위가 라디안일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

참고 ① $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1$

② $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ (단, a, b는 0이 아닌 상수)

③ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ (단, a, b는 0이 아닌 상수) ❷

04-6 | 삼각함수의 도함수

유형 | 20·21·22

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$ ❸

개념 NOTE

❶ $y=\sin x$, $y=\cos x$는 모든 실수에서 연속이고, $y=\tan x$는 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 모든 실수에서 연속이다.

✱ $\lim_{x\to\infty}\sin x$, $\lim_{x\to\infty}\cos x$, $\lim_{x\to\infty}\tan x$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

❷ $\frac{0}{0}$ 꼴의 삼각함수의 극한

➡ $\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$ 또는 $\lim_{\triangle\to 0}\frac{\tan\triangle}{\triangle}=1$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

❸ $y=\sin x$, $y=\cos x$는 모든 실수에서 미분가능하다.

[0400~0402] 다음 극한값을 구하시오.

0400 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$

0401 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos 2x$

0402 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\tan x}$

[0403~0405] 다음 극한값을 구하시오.

0403 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

0404 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$

0405 $\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\sin x}$

[0406~0409] 다음 극한값을 구하시오.

0406 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$

0407 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

0408 $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x}{x}$

0409 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}$

[0410~0413] 다음 함수를 미분하시오.

0410 $y=\sin x-2$

0411 $y=x+3\cos x$

0412 $y=-\sin x-2\cos x$

0413 $y=\frac{1}{2}\sin x-\ln x$

[0414~0417] 다음 함수를 미분하시오.

0414 $y=\sin^2 x$

0415 $y=x\cos x$

0416 $y=e^x\sin x$

0417 $y=\sin x\cos x$

B 단계 유형 Master

유형 01 삼각함수 개념 04-1

중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 점 $P(x, y)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하면

① $\csc\theta=\frac{r}{y}(y\neq0)$, $\sec\theta=\frac{r}{x}(x\neq0)$, $\cot\theta=\frac{x}{y}(y\neq0)$

② $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$

0418 대표 문제

원점 O와 점 $P(3, -4)$를 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\csc\theta+\sec\theta$의 값은?

① $-\frac{5}{12}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

0419 B0

$\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$일 때, $\csc^2\theta+\cot^2\theta$의 값을 구하시오.

0420 B0 서술형

직선 $y=-\sqrt{3}x$ 위의 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\csc\theta\sec\theta+\cot\theta$의 값을 구하시오.
(단, 점 P는 제2사분면 위의 점이고, O는 원점이다.)

0421 B0

$\csc\theta\tan\theta<0$, $\sec\theta\cot\theta<0$을 동시에 만족시키는 각 θ는 제몇 사분면의 각인가?

① 제1사분면 ② 제2사분면
③ 제3사분면 ④ 제4사분면
⑤ 제2사분면 또는 제3사분면

유형 02 삼각함수 사이의 관계; 식 간단히 하기 집중공략 개념 04-2

삼각함수를 포함한 식을 간단히 할 때에는

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

임을 이용한다. 이때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 등을 한 문자로 생각하여 유리식의 계산과 같이 통분, 약분, 인수분해 등을 한다.

0422 대표 문제

$\frac{1+\sin\theta}{\csc\theta-\cot\theta}-\frac{1-\sin\theta}{\csc\theta+\cot\theta}$를 간단히 하시오.

0423 B0

다음 중 옳지 않은 것은?

① $\cos\theta\sec\theta+\tan\theta\cot\theta=2$
② $\frac{1}{1-\tan\theta}+\frac{1}{1-\cot\theta}=1$
③ $\tan^2\theta\cos^2\theta+\cot^2\theta\sin^2\theta=1$
④ $(\csc\theta+1)(\sec\theta+1)(\csc\theta-1)(\sec\theta-1)=1$
⑤ $\csc\theta(\tan\theta-\sin\theta)=1-\sec\theta$

0424 B+

$\csc\theta\sec\theta<0$, $\cos\theta\cot\theta>0$일 때, $\sqrt{1+\tan^2\theta}\sqrt{\csc^2\theta-1}$을 간단히 하면?

① 1 ② $\sin\theta$ ③ $\cos\theta$
④ $\csc\theta$ ⑤ $\sec\theta$

ⓒ좋은책신사고

유형 03 삼각함수 사이의 관계; 식의 값 구하기 개념 04-2

① 삼각함수 중 하나의 값을 알면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

임을 이용하여 다른 삼각함수의 값을 구할 수 있다.

② $\sin\theta\pm\cos\theta$의 값 또는 $\sin\theta\cos\theta$의 값이 주어질 때에는

$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta$(복호동순)

임을 이용한다.

0425 대표 문제

θ가 제2사분면의 각이고 $\cot\theta=-\frac{3}{4}$일 때, $\sin\theta$의 값은?

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{16}{25}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{24}{25}$

0426 B-

$\tan\theta=\frac{2}{3}$일 때, $\csc^2\theta+\sec^2\theta$의 값을 구하시오.

0427 B0

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$일 때, $\csc\theta\sec\theta$의 값을 구하시오.

0428 B0

$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$일 때, $\sec\theta-\csc\theta$의 값은?

① $-2\sqrt{3}$ ② $-2\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{3}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

유형 04 삼각함수의 덧셈정리 집중공략 개념 04-3

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

② $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

③ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

0429 대표 문제

$\sin70^\circ\sin100^\circ-\sin20^\circ\sin10^\circ$의 값을 구하시오.

0430 B-

$\frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}$를 간단히 하면?

① $\sin\alpha$ ② $\cos\alpha$ ③ $\tan\alpha$
④ $\sec\alpha$ ⑤ $\cot\alpha$

0431 B0

$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2$일 때, $\tan\alpha$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

0432 B0 서술형

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이고 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하시오.

0433 B0

$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha+\cos\beta=1$일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?

① $-\frac{5}{8}$ ② $-\frac{3}{8}$ ③ $-\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

유형 05 삼각함수의 덧셈정리의 활용; 방정식

개념 04-3

이차방정식의 두 근이 삼각함수로 주어지면 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼각함수에 대한 식을 세운다.

0434 대표 문제

이차방정식 $3x^2-x-2=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$일 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

0435 B0

이차방정식 $2x^2+3x+a=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$일 때, $\tan(\alpha+\beta)=-3$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

유형 06 삼각함수의 덧셈정리의 활용 ; 두 직선이 이루는 각의 크기

집중공략 개념 04-3

① 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\tan\theta=m$

② 두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 α, β일 때, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

0436 대표 문제

두 직선 $y=x+1$, $y=3x$가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

0437 B0

두 직선 $x-y-1=0$, $(2-\sqrt{3})x-y+3=0$이 이루는 예각의 크기를 구하시오.

0438 B+ 서술형

두 직선 $ax-y-3=0$, $x-2y+2=0$이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$가 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

유형 07 삼각함수의 덧셈정리의 활용; 도형 개념 04-3

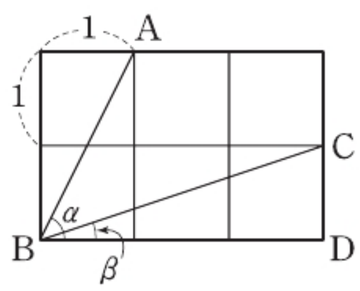
삼각함수의 덧셈정리의 도형에의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

(i) 주어진 도형에서 삼각함수의 값을 구할 수 있는 적당한 각을 문자로 놓는다.

(ii) 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

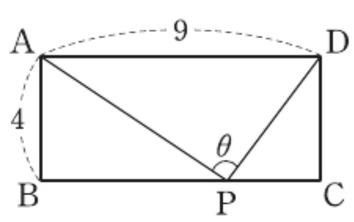
0439 대표 문제

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 6개의 변을 붙여 만든 도형이 있다. $\angle ABD=\alpha$, $\angle CBD=\beta$라 할 때, $\angle ABC$의 크기를 구하시오.



0440 B0

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=9$인 직사각형 ABCD에서 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하자. $\angle APD=\theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하시오.



0441 B0

좌표평면 위의 두 점 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q(\cos\beta, \sin\beta)$에 대하여 $\overline{PQ}=\sqrt{3}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

유형 08 배각의 공식 개념 04-4

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

0442 대표 문제

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\sin 2\theta$의 값은?

① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

0443 B-

$\sin\theta=\frac{1}{3}$일 때, $\sin 2\theta-\cos 2\theta$의 값을 구하시오.

$\left(단, \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

0444 B0

함수 $y=\cos 2x+4\sin x-1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

0445 B0 서술형

$\tan\theta+\cot\theta=\frac{5}{2}$일 때, $\cos 2\theta$의 값을 구하시오.

$\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

유형 09 삼각함수의 합성 개념 04-4

① $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

② $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$

$\left(\text{단, } \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

0446 대표 문제

함수 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x$의 그래프는 $y=a\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? (단, $a>0$, $-\pi<b<0$)

① $-\frac{4}{3}\pi$ ② $-\frac{5}{6}\pi$ ③ $-\frac{2}{3}\pi$
④ $-\frac{\pi}{3}$ ⑤ $-\frac{\pi}{6}$

0447 B0

$12\sin\theta+5\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$를 만족시키는 양수 r와 각 α에 대하여 $r\tan\alpha$의 값을 구하시오.

유형 10 합성을 이용한 삼각함수의 최대·최소 개념 04-4

함수 $y=a\sin x+b\cos x+c$ $(a\neq0,\ b\neq0)$ 꼴의 최대·최소는 삼각함수의 합성을 이용하여 $y=r\sin(x+\alpha)+c$ $(r>0)$ 꼴로 변형한 후 최댓값은 $r+c$, 최솟값은 $-r+c$임을 이용한다.

0448 대표 문제

함수 $y=-\sin x+\cos x+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

0449 B-

함수 $y=4\sin x+3\cos x-1$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. 주기는 2π이다. ㄴ. 최댓값은 7이다.
ㄷ. 최솟값은 -6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

0450 B0

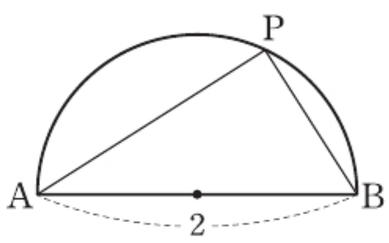
함수 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos x+1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

0451 B0

함수 $y=a\sin x+\sqrt{3}a\cos x+2$의 최댓값이 8일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

0452 B+ 서술형

오른쪽 그림과 같이 지름 AB의 길이가 2인 반원 위에 두 점 A, B가 아닌 점 P를 잡을 때, $3\overline{AP}+4\overline{PB}$의 최댓값을 구하시오.



ⓒ좋은책신사고

유형 11 삼각함수의 극한

개념 04-5

삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 극한값을 구한다.

0453 대표 문제

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 x}{1-\sin x}$의 값을 구하시오.

0454

$\lim_{x \to \pi} \frac{2\sin x + \sin 2x}{\sin^2 x}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0455

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin 2x}$의 값을 구하시오.

0456

함수 $f(x)=\cos x$에 대하여 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\{f(x)\}^2}$의 값을 구하시오.

유형 12 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 꼴의 극한

개념 04-5

x의 단위가 라디안일 때

① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

② $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ (단, a, b는 0이 아닌 상수)

0457 대표 문제

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x + \sin(-x)}{3x}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

0458

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^\circ}{x}$의 값을 구하시오.

0459

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin 5x)}{\sin 2x}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

0460 서술형

두 함수 $f(x)=3x$, $g(x)=\sin x$에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{g(f(x))}{f(g(x))}$의 값을 구하시오.

유형 13 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ 꼴의 극한

개념 04-5

x의 단위가 라디안일 때

① $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

② $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ (단, a, b는 0이 아닌 상수)

0461 대표 문제

$\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x-\tan 3x}{2x}$의 값을 구하시오.

0462 B0

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{4x}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

0463 B0

$\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x+\tan 3x}$의 값을 구하시오.

유형 14 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$ 꼴의 극한

개념 04-5

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$ 꼴로 주어진 극한값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 분자, 분모에 $1+\cos x$를 각각 곱한다.

(ii) $1-\cos^2 x=\sin^2 x$임을 이용한다.

(iii) 삼각함수의 극한을 이용한다.

0464 대표 문제

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}$의 값을 구하시오.

0465 B0

$\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2 x-2\cos x-1}{x^2}$의 값을 구하시오.

0466 B+

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{3x^2}=\frac{4}{3}$를 만족시키는 양수 k의 값은?

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

유형 15 $\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}$, $\lim_{x\to a}\frac{\tan(x-a)}{x-a}$ 꼴의 극한

개념 04-5

상수 a에 대하여 $x-a=t$로 놓으면

① $\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

② $\lim_{x\to a}\frac{\tan(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1$

0467 대표 문제

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0468 B0

$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)\sin x}$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0469 B0

$\lim_{x\to2}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{4}x\right)}{x-2}$의 값을 구하시오.

0470 B+ 서술형

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{3x+\pi}$의 값을 구하시오.

유형 16 $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}$ 꼴의 극한 개념 04-5

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면

① $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

② $\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1$

0471 대표 문제

$\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{1}{x}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

0472 B0

$\lim_{x\to\infty}x^\circ\tan\frac{1}{x}$의 값은?

① 0 ② $\frac{\pi}{180}$ ③ $\frac{1}{\pi}$
④ 1 ⑤ $\frac{180}{\pi}$

0473 B0

$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}\cot\frac{4}{x}$의 값을 구하시오.

유형 17 삼각함수의 극한을 이용한 미정계수의 결정 개념 04-5

$x\to a$일 때
① (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to$ 0
② (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\to$ 0

0474 대표 문제

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\sin x}=5$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0475 B0

$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\ln(x+b)}=2$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

0476 B0 서술형

$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+b}-2}=2$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

유형 18 삼각함수의 극한의 도형에의 활용

집중공략 개념 04-5

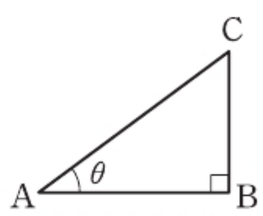
오른쪽 그림에서

① $\overline{AB}=\overline{AC}\cos\theta$

② $\overline{BC}=\overline{AC}\sin\theta$

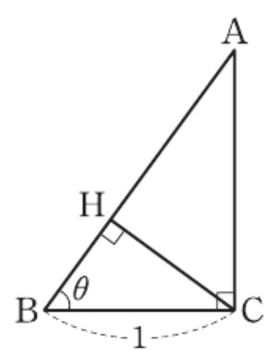
③ $\overline{BC}=\overline{AB}\tan\theta$

임을 이용하여 선분의 길이를 θ에 대한 식으로 나타낸 후 극한값을 구한다.



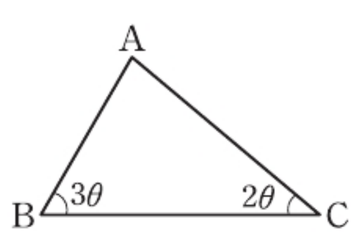
0477 대표 문제

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}=1$이고 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 꼭짓점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle B=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AH}}{\theta^2}$의 값을 구하시오.



0478 B0

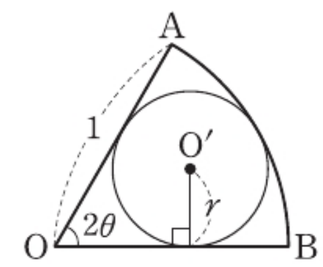
오른쪽 그림과 같이 $\angle B=3\theta$, $\angle C=2\theta$인 삼각형 ABC에 대하여 $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$의 값을 구하시오.



∴

0479 B0

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 2θ인 부채꼴에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{r}{\theta}$의 값은?

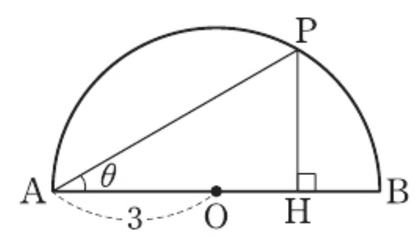


① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

0480 B+ 서술형

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 반원 위의 점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\angle PAH=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}$의 값을 구하시오.



유형 19 삼각함수의 연속을 이용한 미정계수의 결정

개념 04-5

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이면

$\lim_{x\to a}g(x)=k$

(단, 함수 $g(x)$는 $x\neq a$인 모든 실수 x에서 연속이고 k는 상수이다.)

0481 대표 문제

함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 2(x+1)}{x+1} & (x\neq-1) \\ k & (x=-1) \end{cases}$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

ⓒ좋은책신사고

0482 B0 서술형

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x-a}{x} & (x\neq 0) \\ b & (x=0) \end{cases}$가 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

0483 B+

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}+b}{\sin x} & (x\neq 0) \\ 2 & (x=0) \end{cases}$가 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 연속일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

유형 20 삼각함수의 도함수

집중공략 개념 04-6

① $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$
② $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

0484 대표 문제

함수 $f(x)=x^2\sin x$에 대하여 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① 1 ② $\dfrac{\pi}{3}$ ③ $\dfrac{\pi}{2}$
④ π ⑤ 2π

0485 B0

함수 $f(x)=e^x\cos x$에 대하여 $f'(x)=0$을 만족시키는 모든 x의 값의 합을 구하시오. (단, $0<x<2\pi$)

0486 B+

함수 $f(x)=\cos^2 x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f'(x)}{\pi-x}$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

유형 21 삼각함수의 도함수 ; 미분계수를 이용한 극한값의 계산

개념 04-6

미분계수를 이용하여 함수 $f(x)$에 대한 극한값을 구할 때에는 다음과 같은 순서로 한다.
(i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$가 포함된 식으로 변형한다.
(ii) 도함수 $f'(x)$를 구하여 $f'(a)$의 값을 구한다.
(iii) (i)의 식에 $f'(a)$의 값을 대입한다.

0487 대표 문제

함수 $f(x)=\sin x-\cos x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$의 값을 구하시오.

0488 B0

함수 $f(x)=\sin x\cos x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{h}$의 값을 구하시오.

0489 B0 서술형

함수 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x-1)$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구하시오.

0490 B0

함수 $f(x)=\cos x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=-1$

ㄷ. $f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-f(x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

0491 B0

함수 $f(x)=x\cos x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

유형 22 삼각함수의 도함수; 미분가능성

개념 04-6

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge a) \\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

① 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다.
➡ $\lim_{x\to a-}g(x)=f(a)$

② 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.
➡ $\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a-}g'(x)$

0492 대표 문제

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (0\le x<1) \\ \sin x & (-1<x<0)\end{cases}$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0493 B0

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & (x\ge 0) \\ \cos x-x & (x<0)\end{cases}$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

문제 풀이 동영상

B-

0494

$\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}$을 간단히 하면?

① 2 ② $\sin\theta$ ③ $\cos\theta$
④ $2\sec\theta$ ⑤ $2\sin\theta\cos\theta$

0495

$\sin 15^\circ \sin 30^\circ - \cos 15^\circ \cos 30^\circ$의 값은?

① $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0496

두 직선 $y=2x$, $y=\dfrac{1}{3}x$가 이루는 예각의 크기를 구하시오.

0497

동영상

제1사분면의 각 θ에 대하여 $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$일 때, $\tan 2\theta$의 값을 구하시오.

0498

동영상

함수 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\tan \pi x}$에 대하여 $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값을 구하시오.

0499 서술형

함수 $f(x)=\cos x+1$에 대하여 $\lim_{x\to \pi} \dfrac{f(x)}{x-\pi}$의 값을 구하시오.

B0

0500 교육청 기출

동영상

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $\tan\theta+\cot\theta$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

0501

$\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{3}{2}$, $\cos\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

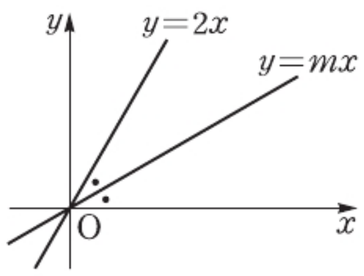
0502

x에 대한 이차방정식 $x^2-3ax+a^2+1=0$이 두 실근 $\tan\alpha$, $\tan\beta$를 갖고 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(단, $a\neq0$)

0503

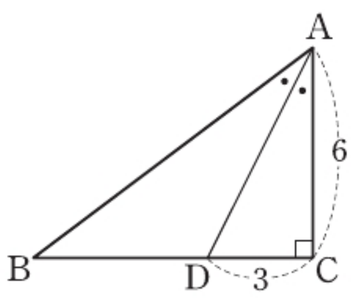
오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 직선 $y=mx$가 이등분할 때, 양수 m의 값을 구하시오.



0504

동영상

오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다.
$\angle BAD=\angle CAD$이고, $\overline{AC}=6$, $\overline{CD}=3$일 때, $\overline{BD}$의 길이는?



① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$
④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

0505

동영상

함수 $y=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+4\cos x+5$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① -20 ② -15 ③ -10
④ -5 ⑤ 0

0506

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos 2x-1}{1-2\sin x}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0507

$\lim_{x\to0}\frac{\sec x-\cos x}{3x^2}$의 값을 구하시오.

0508

동영상

함수 $f(x)=2x^3+3x$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{k\sin f(x)}=\frac{1}{3}$을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0509 교육청 기출

동영상

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=1$일 때, $\lim_{x\to0}x^2f(x)$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0510 서술형

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3\sin x+a-1}{x\cos x} & (x\neq 0) \\ b & (x=0) \end{cases}$가 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

0511 교육청 기출 동영상

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2\sin 2x}{1-\cos x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

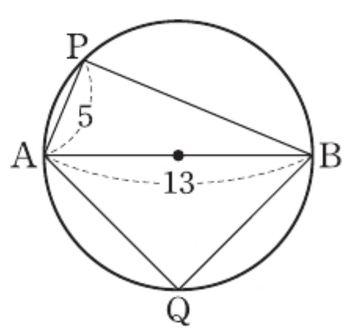
일 때, $f'(0)$의 값은? (단, $-\pi<x<\pi$)

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

B+

0512 동영상

오른쪽 그림과 같이 지름 AB의 길이가 13인 원 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{AP}=5$이고, $\angle QBA=2\angle PBA$이다. 이때 $\overline{BQ}$의 길이를 구하시오.



0513 동영상

함수 $f(n)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x+\tan 2x+\tan 3x+\cdots+\tan nx}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$의 값을 구하시오.

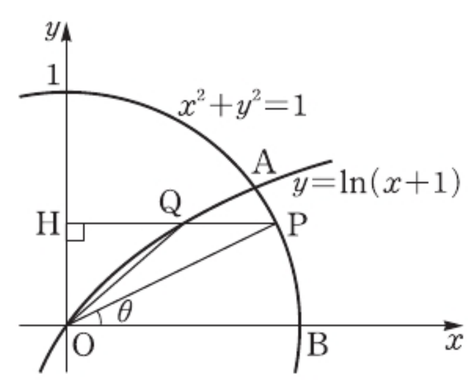
0514

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+\cos x}{x\sin x}=b$를 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $2ab$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0515 수능 기출 도전 동영상

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 B(1, 0)에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자.
$\angle POB=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\text{이고, O는 원점이다.}\right)$



0516

함수 $f(x)=2\sin x+\cos x-1$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\tan x)}{x}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

특별한 심판법

아프리카에 바벰바족이라는 부족이 있습니다.
바벰바족 사회에는 신기할 정도로 범죄가 거의 일어나지 않는다고 합니다.
그 이유는 바로 바벰바족의 특별한 심판법 때문입니다.

이 부족 사람들은 누군가 잘못을 저지르면 그 사람을 마을 광장 한복판에 세웁니다.
그리고 모두 그를 향해 한마디씩 건네는데, 그 한마디는 비난이나 원망의 말이 아닙니다.
그동안 그가 행했던 선행, 그에게 감사했던 일들, 그의 장점들을 칭찬하는 말입니다.
"비가 많이 온 날에 우리 집 지붕을 고쳐 줘서 고마워."
"너는 아이들을 잘 돌보는 다정한 사람이야."와 같은 따뜻한 말들을 하는 것이죠.

따뜻한 말이 계속 이어지면 잘못을 저지른 사람은 참회의 눈물을 흘리면서 진심으로 반성하게 된다고 합니다.
자신을 아끼는 사람들의 따뜻한 마음에 감동하고 자신이 얼마나 잘못된 행동을 했는지 깨닫게 되는 것이죠.
그리고 두 번 다시는 잘못을 저지르지 않겠다고 다짐하게 됩니다.
그러면 마을 사람들은 새 사람으로 다시 태어나는 그를 위해 기쁨의 축제를 벌입니다.

정말 멋진 심판법 아닌가요?
누군가 잘못을 저질렀을 때, 마냥 화내거나 비난하기보다는
그 사람이 진정으로 반성할 수 있는 기회를 줄 수 있어야 합니다.

이 심판법은 타인이 아닌 나에게 적용할 수도 있습니다.
어떤 잘못이나 실수를 저질렀을 때, 스스로를 지나치게 비난하거나 자책하기보다는
내가 얼마나 좋은 사람인지, 사랑스럽고 멋진 사람인지 생각해 보세요.
그리고 잘못은 반성하고, 실수를 훌훌 털고 힘차게 웃어 보세요.
분명 전보다 한 걸음 성장한 내가 될 것입니다.

ⓒ좋은책신사고

기본 Master A 단계

05-1 | 함수의 몫의 미분법

유형 | 01·02·03·04

개념 NOTE

(1) 함수의 몫의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때

① $y=\dfrac{1}{g(x)}$이면 $\quad y'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

② $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$이면 $\quad y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ ❶

예 ① $y=\dfrac{1}{x+1}$이면 $\quad y'=\left(\dfrac{1}{x+1}\right)'=-\dfrac{(x+1)'}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

② $y=\dfrac{x}{x^2-1}$이면 $\quad y'=\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)'=\dfrac{x'(x^2-1)-x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

(2) 함수 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수

n이 정수일 때, $y=x^n$이면 $\quad y'=nx^{n-1}$

(3) 삼각함수의 도함수❷

① $y=\sin x$이면 $\quad y'=\cos x$ ② $y=\cos x$이면 $\quad y'=-\sin x$

③ $y=\tan x$이면 $\quad y'=\sec^2 x$ ④ $y=\sec x$이면 $\quad y'=\sec x\tan x$

⑤ $y=\csc x$이면 $\quad y'=-\csc x\cot x$ ⑥ $y=\cot x$이면 $\quad y'=-\csc^2 x$

참고 ③ $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

④ $(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sec x\tan x$

⑤ $(\csc x)'=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'=-\dfrac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=-\csc x\cot x$

⑥ $(\cot x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

❶ $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$이므로 곱의 미분법을 이용하여 도함수를 구할 수 있다.

❷ $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$의 도함수는 $\sin x$, $\cos x$의 도함수와 함수의 몫의 미분법을 이용하여 구할 수 있다.

[0517~0520] 다음 함수를 미분하시오.

0517 $y=\dfrac{1}{3x+2}$

0518 $y=\dfrac{1}{x^3+x}$

0519 $y=\dfrac{1}{e^x+1}$

0520 $y=\dfrac{1}{\ln x}$

[0521~0524] 다음 함수를 미분하시오.

0521 $y=\dfrac{x-2}{4x+3}$

0522 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

0523 $y=\dfrac{2^x}{x+3}$

0524 $y=\dfrac{\log_3 x}{x}$

[0525~0528] 다음 함수를 미분하시오.

0525 $y=\dfrac{1}{x}$

0526 $y=x^{-3}$

0527 $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

0528 $y=\dfrac{x^2-x}{x^5}$

[0529~0532] 다음 함수를 미분하시오.

0529 $y=2\sin x+\tan x$

0530 $y=\sec x+\csc x$

0531 $y=x^2\cot x$

0532 $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

05-2 | 합성함수의 미분법

유형 | 05~11

(1) 합성함수의 미분법[1]

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y'=f'(g(x))g'(x)$$

예 $y=(2x+1)^5$이면 $\quad y'=5(2x+1)^4(2x+1)'=5(2x+1)^4\cdot 2=10(2x+1)^4$

(2) 로그함수의 도함수

$a>0$, $a\neq 1$이고, 함수 $f(x)$가 미분가능하며 $f(x)\neq 0$일 때

① $y=\ln|x|$이면 $\quad y'=\frac{1}{x}$

② $y=\log_a|x|$이면 $\quad y'=\frac{1}{x\ln a}$

③ $y=\ln|f(x)|$[2]이면 $\quad y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

예 ③ $y=\ln|x^2+1|$이면 $\quad y'=\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}$

(3) 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 도함수

n이 실수일 때, $y=x^n\ (x>0)$이면 $\quad y'=nx^{n-1}$[3]

개념 NOTE

[1] 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하다.

* 함수 $f(x)$가 미분가능할 때
① $y=f(ax+b)$ (a, b는 상수)이면
$y'=af'(ax+b)$
② $y=\{f(x)\}^n$ (n은 정수)이면
$y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

[2] 함수 $y=\ln|f(x)|$는 두 함수 $y=\ln|u|$, $u=f(x)$의 합성함수이다.

[3] n이 실수일 때, 함수 $y=x^n\ (x\le 0)$의 도함수가 존재하면 $y'=nx^{n-1}$이 성립함이 알려져 있다.

[0533~0537] 다음 함수를 미분하시오.

0533 $y=(5x-2)^4$

0534 $y=e^{4x}$

0535 $y=3^{3x+1}$

0536 $y=\sin 5x$

0537 $y=\cos(3x+2)$

[0538~0539] 다음 함수를 미분하시오.

0538 $y=\frac{1}{(2x+3)^4}$

0539 $y=\left(x+\frac{2}{x}\right)^3$

[0540~0543] 다음 함수를 미분하시오.

0540 $y=\ln|x^3+2x+1|$

0541 $y=\log_2|5x+2|$

0542 $y=\ln|\cos x|$

0543 $y=\ln|e^x+2|$

[0544~0547] 다음 함수를 미분하시오.

0544 $y=\sqrt{x}$

0545 $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}$

0546 $y=x^{\sqrt{3}}\ (x>0)$

0547 $y=-x^{-e}\ (x>0)$

[0548~0549] 다음 함수를 미분하시오.

0548 $y=\sqrt{x^2+x+1}$

0549 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

ⓒ좋은책신사고

05-3 | 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

유형 | 12

개념 NOTE

(1) x와 y 사이의 함수 관계가 변수 t를 매개로 하여

$$x=f(t),\ y=g(t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

꼴로 나타날 때 변수 t를 **매개변수**라 하고, ㉠을 매개변수로 나타낸 함수라 한다.

(2) 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$ ❶

예 매개변수로 나타낸 함수 $x=2t+1$, $y=3t^2$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t}{2}=3t$

❶ 매개변수로 나타낸 함수의 미분은 함수를 $y=f(x)$ 꼴로 만들어 양변을 미분한 결과와 같다.

05-4 | 음함수의 미분법

유형 | 13

(1) x의 함수 y가 방정식 $f(x, y)=0$ 꼴로 주어졌을 때, x의 함수 y가 **음함수** 꼴로 주어졌다고 한다.❷

(2) 음함수의 미분법

x의 함수 y가 $f(x, y)=0$ 꼴로 주어졌을 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

예 $x^2-y^2+4=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면 $\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(y^2)+\frac{d}{dx}(4)=\frac{d}{dx}(0)$

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

❷ 방정식 $f(x, y)=0$이 주어졌을 때, x와 y의 값의 범위를 적당히 정하면 x의 함수 y를 얻을 수 있다.

[0550~0554] 다음 매개변수로 나타낸 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

0550 $x=t+5,\ y=2t^3-1$

0551 $x=t^2+1,\ y=t+\frac{1}{t}\ (t>0)$

0552 $x=\frac{1}{t},\ y=\frac{1}{t+2}\ (t>0)$

0553 $x=e^t-e^{-t},\ y=e^t+e^{-t}$

0554 $x=\sin t+1,\ y=\cos t\ \left(0\leq t<\frac{\pi}{2}\right)$

[0555~0560] 다음 방정식으로 주어진 x의 함수 y에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

0555 $x^2+2y^2=3$

0556 $y^2-5x=0$

0557 $xy=10$

0558 $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1$

0559 $\sqrt{y^2+1}=x^2$

0560 $\ln|y|=x^2$

05-5 | 역함수의 미분법

유형 | 14·15

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고[1] 미분가능할 때

① $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ (단, $f'(g(x))\neq 0$)[2]

② $f(a)=b$, 즉 $g(b)=a$이면 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$ (단, $f'(a)\neq 0$)

예 함수 $f(x)=x^3+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(2)$의 값을 구해 보자.

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$a^3+1=2,\quad a^3-1=0,\quad (a-1)(a^2+a+1)=0$

그런데 $a^2+a+1>0$이므로 $a=1$

따라서 $g(2)=1$이고, $f'(x)=3x^2$에서 $f'(1)=3$이므로

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3}$

개념 NOTE

1 함수가 일대일대응일 때, 역함수가 존재한다.

2 $y=g(x)$에서 $x=f(y)$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=g'(x)$,

$\dfrac{dx}{dy}=f'(y)=f'(g(x))$

이다. 따라서

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}\left(\dfrac{dx}{dy}\neq 0\right)$

과 같이 쓸 수도 있다.

05-6 | 이계도함수

유형 | 16

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, 함수 $f'(x)$의 도함수

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $f(x)$의 **이계도함수**라 한다. 기호 $f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$

예 $y=x^3+x^2$이면 $y'=3x^2+2x$이므로 $y''=(3x^2+2x)'=6x+2$

0561 함수 $f(x)=x^3+2x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 값을 구하시오.

(1) $g'(-3)$ (2) $g'(12)$

0562 함수 $f(x)=\tan x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 값을 구하시오.

(1) $g'(-1)$ (2) $g'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

[0563~0569] 다음 함수의 이계도함수를 구하시오.

0563 $y=x^4+3x^2$

0564 $y=(5x-1)^3$

0565 $y=\dfrac{1}{x^2+3}$

0566 $y=\sqrt{x-2}$

0567 $y=e^{2x}$

0568 $y=\ln|x+1|$

0569 $y=\cos 2x$

[0570~0571] 다음 함수의 이계도함수를 구하시오.

0570 $y=x\cos x$

0571 $y=e^x\sin x$

ⓒ좋은책신사고

B 단계 유형 Master

유형 01 함수의 몫의 미분법; $\frac{1}{g(x)}$ 꼴

개념 05-1

함수 $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때,

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

0572 대표 문제

함수 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값을 구하시오.

0573 B-

함수 $f(x)=\frac{1}{\sin x+1}$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하시오.

0574 B0

함수 $f(x)=\frac{1}{ke^x+2x}$에 대하여 $f'(0)=-1$일 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

0575 B+ 서술형

함수 $f(x)=-\frac{4}{x^2+3}$에 대하여 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+1}{x+1}$의 값을 구하시오.

유형 02 함수의 몫의 미분법; $\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

집중공략

개념 05-1

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때,

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

0576 대표 문제

함수 $f(x)=\frac{ax}{x^2-2x+b}$에 대하여 $f'(0)=1$, $f'(1)=2$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $b\neq 0$, $b\neq 1$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

0577 B-

함수 $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

0578 B0

함수 $f(x)=\frac{x^2+4}{x+1}$에 대하여 $f'(x)=a-\frac{b}{(x+1)^2}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

0579 B0

미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=1$, $f'(0)=2$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=\frac{x-1}{f(x)}$에 대하여 $g'(0)$의 값을 구하시오.

0580 B+

함수 $f(x)=\frac{e^x-1}{x+1}$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$의 값을 구하시오.

유형 03 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수

개념 05-1

$y=\frac{1}{x^k}$ (k는 자연수)의 도함수를 구할 때에는 $y=x^n$ (n은 정수) 꼴로 변형한 후 $(x^n)'=nx^{n-1}$임을 이용한다.

0581 대표 문제

함수 $f(x)=\frac{x^3+4x^2-6}{x^2}$에 대하여 $f'(1)+f'(2)$의 값을 구하시오.

0582 B0

일정한 온도에서 어떤 기체에 가해지는 압력이 x Pa(파스칼)일 때 기체의 부피를 y L라 하면 $y=\frac{2}{3x}$의 관계가 성립한다고 한다. 이 기체에 가해지는 압력이 2 Pa일 때, 기체의 부피의 순간변화율은?

① $-\frac{5}{6}$ L/Pa ② $-\frac{2}{3}$ L/Pa ③ $-\frac{1}{2}$ L/Pa
④ $-\frac{1}{3}$ L/Pa ⑤ $-\frac{1}{6}$ L/Pa

0583 B+

함수 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

유형 04 삼각함수의 도함수

개념 05-1

① $(\sin x)'=\cos x$ ② $(\cos x)'=-\sin x$
③ $(\tan x)'=\sec^2 x$ ④ $(\sec x)'=\sec x\tan x$
⑤ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$ ⑥ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

0584 대표 문제

함수 $f(x)=\frac{x^2}{1+\sec x}$에 대하여 $f'(2\pi)$의 값은?

① -2π ② $-\pi$ ③ 0
④ π ⑤ 2π

0585 B-

함수 $f(x)=\sec x-\csc x$의 $x=\frac{\pi}{4}$에서의 미분계수를 구하시오.

0586 B0 서술형

함수 $f(x)=\frac{\sin x}{1+\tan x}$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$의 값을 구하시오.

유형 05 합성함수의 미분법

집중공략 개념 05-2

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ 또는 } y'=f'(g(x))g'(x)$$

0587 대표 문제

함수 $f(x)=(3x^2+ax-1)^4$에 대하여 $f'(0)=-16$일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

ⓒ좋은책신사고

0588 B-

함수 $f(x)=e^{2x}+e^{x^2}$에 대하여 $f'(0)+f'(1)$의 값을 구하시오.

0589 B0

두 함수 $f(x)=e^x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 함수 $h(x)$가 $h(x)=(f\circ g)(x)$일 때, $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

0590 B0

함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 함수 $y=\{xf(x)\}^3$의 $x=e$에서의 미분계수는?

① $3e$ ② $6e$ ③ e^2
④ $3e^2$ ⑤ $6e^2$

0591 B0 서술형

한 모서리의 길이가 2 cm인 정육면체가 있다. 이 정육면체의 각 모서리의 길이가 매초 3 cm씩 길어질 때, 다음에 답하시오.

(1) 모서리의 길이가 길어지기 시작한 지 t초 후의 정육면체의 부피를 구하시오.

(2) 모서리의 길이가 길어지기 시작한 지 2초 후의 정육면체의 부피의 변화율을 구하시오. (단, 단위는 cm^3/s이다.)

유형 06 합성함수의 미분법 ; 함숫값 또는 미분계수가 주어질 때

개념 05-2

합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$에 대하여 $x=a$에서의 함숫값 또는 미분계수가 주어질 때에는

$$h'(a)=f'(g(a))g'(a)$$

임을 이용한다.

0592 대표 문제

함수 $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$과 미분가능한 함수 $g(x)$의 합성함수 $h(x)=g(f(x))$에 대하여 $h'(-1)=28$일 때, $g'(-4)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0593 B-

미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(2)=-1$, $f'(2)=4$를 만족시킬 때, 함수 $y=2^{f(x)}$의 $x=2$에서의 미분계수를 구하시오.

0594 B0

미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f'(-1)=2$, $g(-1)=-1$, $g'(-1)=3$을 만족시킬 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는?

① 2 ② 3 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

0595 B+ 서술형

미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f'(0)=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x}$의 값을 구하시오.

유형 07 합성함수의 미분법; $y=f(ax+b)$ 꼴 개념 05-2

함수 $y=f(ax+b)$의 도함수는

$$y'=f'(ax+b)(ax+b)'=af'(ax+b)$$

0596 대표 문제

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(2x+1)=x^3-2x^2+1$$

을 만족시킬 때, $f'(3)$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

0597 B0

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(2)=8,\ f(x)=f(4x-1)$$

을 만족시킬 때, $f'(7)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

0598 B+

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(3x-2)=\sin\pi x+\cos\pi x$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}$의 값을 구하시오.

유형 08 로그함수의 도함수 집중공략 개념 05-2

$a>0$, $a\neq1$이고 함수 $f(x)$가 미분가능하며 $f(x)\neq0$일 때

① $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$ ② $(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a}$

③ $\{\ln|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

0599 대표 문제

함수 $f(x)=\ln(x^4-3x^3+10)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

0600 B-

$x>1$일 때, $y=\ln|\ln x|$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하면?

① $\frac{1}{x\ln x}$ ② $\frac{1}{\ln x}$ ③ $\frac{x}{\ln x}$
④ $\frac{\ln x}{x}$ ⑤ $\ln x$

0601 B0

함수 $y=\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$의 $x=\frac{\pi}{3}$에서의 미분계수는?

① $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ⓒ좋은책신사고

0602 B+ 서술형

함수 $f(x)=\log_2\sqrt{x^2+2}$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$의 값을 구하시오.

유형 09 로그함수의 미분법의 활용; $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴 개념 05-2

$y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴인 함수의 도함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한다.

➡ $\ln|y|=\ln|f(x)|-\ln|g(x)|$

(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

➡ $\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}$

(iii) $y'=$ ▢ 꼴로 정리하여 도함수를 구한다.

➡ $y'=y\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$

0603 대표 문제

함수 $f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x-3)^3}$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

0604 B0

함수 $f(x)=\frac{(x+1)(x+3)^3}{(x+2)^2(x+4)^4}$에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

유형 10 로그함수의 미분법의 활용 ; $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ 꼴 개념 05-2

$y=\{f(x)\}^{g(x)}$ $(f(x)>0)$ 꼴인 함수의 도함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취한다.

➡ $\ln y=g(x)\ln f(x)$

(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

➡ $\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$

(iii) $y'=$ ▢ 꼴로 정리하여 도함수를 구한다.

➡ $y'=y\left\{g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$

0605 대표 문제

함수 $y=x^{\sin x}$에 대하여 $x=\frac{\pi}{2}$에서의 미분계수는?

(단, $x>0$)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ 1
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

0606 B0

함수 $f(x)=x^{\ln x}$에 대하여 $f'(e)$의 값을 구하시오.

유형 11 $y=x^n$ (n은 실수)의 도함수 개념 05-2

n이 실수일 때, $y=x^n$ $(x>0)$이면 $y'=nx^{n-1}$

0607 대표 문제

함수 $f(x)=3x^{\sqrt{3}}$ $(x>0)$에 대하여 $f'(3)=3^k$일 때, $k=a+b\sqrt{3}$이다. 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

홍문각

0608 B-

함수 $f(x)=\sqrt{x^3+1}$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

0609 B0

함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^3+1}}$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$f'(x)=f(x)g(x)$$

를 만족시킬 때, $g(1)$의 값을 구하시오.

유형 12 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

집중공략 개념 05-3

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

0610 대표 문제

매개변수 t로 나타낸 함수 $x=\dfrac{2}{t}$, $y=\dfrac{1+t^2}{t}$에서 $t=2$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구하시오. (단, $t>0$)

0611 B0

매개변수 θ로 나타낸 함수 $x=\theta-\sin\theta$, $y=1-\cos\theta$에 대하여 $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{dy}{dx}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

0612 B0 서술형

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=1+t$, $y=t^2+2$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 -1일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

0613 B0

어느 야구 경기에서 투수가 던진 공을 타자가 친 지 t초 후의 공의 수평 방향의 위치를 x m, 수직 방향의 위치를 y m라 하면

$$x=10t,\ y=-5t^2+10t+1$$

의 관계가 성립한다고 한다. 이때 타자가 공을 친 지 $\dfrac{3}{2}$초 후의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구하시오.

유형 13 음함수의 미분법

집중공략 개념 05-4

x의 함수 y가 $f(x, y)=0$ 꼴로 주어졌을 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

➡ $\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$, $\dfrac{d}{dx}(y^n)=ny^{n-1}\dfrac{dy}{dx}$ (단, n은 실수)

0614 대표 문제

곡선 $x^3+ax-by^3=0$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 $\dfrac{2}{3}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0615 B-

방정식 $(x+1)^2-(y-1)^2=2$로 주어진 x의 함수 y에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

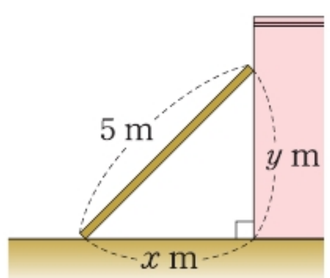
ⓒ좋은책신사고

0616 B0

곡선 $x+\sin x-xy=0$ 위의 점 $(\pi,\ 1)$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구하시오.

0617 B0 서술형

오른쪽 그림과 같이 길이가 5 m인 사다리를 건물에 기대어 놓았다. 이 사다리의 양 끝이 건물로부터 x m 떨어진 지점과 건물의 높이 y m인 지점에 있을 때, 다음에 답하시오.



(1) x, y 사이의 관계식을 구하시오.

(2) $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

(3) $x=3$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구하시오.

유형 14 역함수의 미분법

개념 05-5

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\quad (\text{단, } f'(g(x))\neq 0)$$

0618 대표 문제

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(2)$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

0619 B0

함수 $f(x)=x^3+2x+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(1)+g'(4)$의 값을 구하시오.

0620 B0 서술형

함수 $f(x)=x+\ln x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(e+1)$의 값을 구하시오.

0621 B0

함수 $f(x)=\tan x\left(0\le x<\dfrac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-2h)}{h}$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ 1
④ $\dfrac{5}{4}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

0622 B+

미분가능한 함수 $f(x)$가 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\frac{1}{2}$을 만족시키고 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은?

① -2 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 2

유형 15 역함수의 미분법; $x=f(y)$ 꼴

개념 05-5

$x=f(y)$ 꼴로 주어진 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구할 때에는 x를 y에 대하여 미분한 후 역함수의 미분법을 이용한다.

➡ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ $\left(\text{단, } \frac{dx}{dy}\neq 0\right)$

0623 대표 문제

함수 $x=\sqrt{y^2+2}$ $(y>0)$에 대하여 $y=4$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하시오.

0624 B0

곡선 $x=e^y+2y$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

0625 B0

함수 $x=\tan y+\sec y$ $\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $y=\frac{\pi}{4}$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하시오.

유형 16 이계도함수

개념 05-6

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때,

함수		도함수		이계도함수
$y=f(x)$	$\xrightarrow{\text{미분}}$	$y'=f'(x)$	$\xrightarrow{\text{미분}}$	$y''=f''(x)$

0626 대표 문제

함수 $f(x)=\ln(x^2+2)$에 대하여 $f'(1)+f''(1)$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{8}{9}$
④ 1 ⑤ $\frac{10}{9}$

0627 B-

함수 $f(x)=e^x\cos x$에 대하여 $\frac{f''(x)}{f(x)}$를 구하면?

① $-\tan x$ ② $-2\tan x$ ③ $-2\cos x$
④ $-\cot x$ ⑤ $-2\cot x$

0628 B0

함수 $f(x)=\ln x^{\ln x}$에 대하여 $f''(\sqrt{e})$의 값을 구하시오.

0629 B0 서술형

함수 $f(x)=xe^{ax+b}$에 대하여 $f'(0)=e$, $f''(0)=4e$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

0630 B+

함수 $y=e^{ax}\sin x$에 대하여 등식 $y''-4y'+5y=0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

ⓒ좋은책신사고

문제 풀이 동영상

B-

0631

곡선 $y=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$ 위의 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기를 구하시오.

0632

동영상

함수 $f(x)=\left(\dfrac{2x+a}{x+1}\right)^2$에 대하여 $f'(0)=2$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0633

함수 $f(x)=(1-\sin x)^3$에 대하여 $f'(\pi)$의 값을 구하시오.

0634

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(3x-1)=x^3-3x+1$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0635

매개변수 t로 나타낸 곡선

$$x=2t^2-1,\ y=8t-3$$

위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 2일 때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -3 ③ 1
④ 3 ⑤ 6

0636

곡선 $x+\dfrac{2x}{y}=4$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는?

① -4 ② -2 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

0637

함수 $f(x)=\sin x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값은?

① 0 ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1
④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ 2

0638 서술형

함수 $f(x)=(\cos x+1)\sin x$에 대하여 $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하시오.

B0

0639

함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+2}$에 대하여 $f'(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위가 $a<x<b$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

0640 수능 기출

동영상

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^{x-2}}$$

라 하자. $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때, $g'(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0641

동영상

함수 $f(x)=(2x^2+a)^4$에 대하여 $f'(1)=16$일 때, $\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$의 값은? (단, a는 실수이다.)

① -20 ② -16 ③ -12
④ -8 ⑤ -4

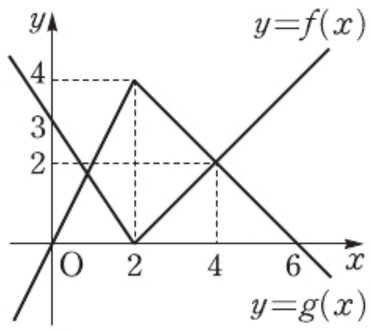
0642 서술형

두 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$, $g(x)=2x^2-3x+2$의 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값을 구하시오.

0643

동영상

오른쪽 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. $h(x)=f(g(x))$라 할 때, $h'(3)$의 값을 구하시오.



0644

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(3x-2)=x+\sqrt{x^2+5}$$

를 만족시킬 때, $f'(4)$의 값을 구하시오.

0645 교육청 기출

동영상

함수 $f(x)$가

$$f(\cos x)=\sin 2x+\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

를 만족시킬 때, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값은?

① $-2\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ 0
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

0646

$\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x+1}{2}$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

ⓒ좋은책신사고

0647

동영상

함수 $f(x)=\log_2|3x^2+x|$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(n-1)f'(n)$의 값을 구하시오.

0648

함수 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(2x+1)}{(x-1)^2}$에 대하여 $\dfrac{f'(2)}{f(2)}$의 값은?

① $-\dfrac{14}{15}$ ② $-\dfrac{3}{5}$ ③ $-\dfrac{4}{15}$
④ $\dfrac{1}{15}$ ⑤ $\dfrac{2}{5}$

0649

동영상

매개변수 t로 나타낸 곡선

$$x=2t^3+at^2,\ y=t^2-1$$

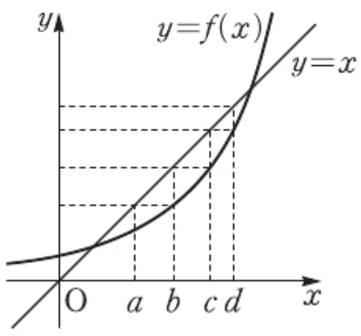
에서 $t=-2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

0650

곡선 $x\sin y+y\sin x=\dfrac{\pi}{6}$ 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

0651

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 중 $g'(c)$와 같은 것은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① $\dfrac{1}{f'(b)}$ ② $f'(c)$ ③ $\dfrac{1}{f'(c)}$
④ $f'(d)$ ⑤ $\dfrac{1}{f'(d)}$

0652 서술형

동영상

함수 $f(x)=axe^{bx}$이 $f'(0)=2$, $f''(0)=4$를 만족시킬 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

0653 평가원 기출

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$에 대하여 $\lim_{h\to0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=2$를 만족시키는 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

ⓒ좋은책신사고

B+

0654

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=0$, $f'(1)=2$이고

$g(x)=\dfrac{1}{f(x)+2x}$일 때, $g'(1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0655 서술형 동영상

함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{10}(3x+4)^n$에 대하여 $f'(-1)$의 값을 구하시오.

0656

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이고

$$(x-2)f(x)=e^{x-2}-1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0657 서술형 동영상

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$에 대하여 $h'(-1)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=4$ (나) $\lim_{x\to -1}\dfrac{g(x)-2}{x+1}=3$

0658 평가원 기출 도전 동영상

두 함수 $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=e^x$에 대하여

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ③ 1
④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

0659

매개변수 t로 나타낸 함수

$$x=\frac{t-1}{t},\ y=\frac{t}{t+1}\ (-1<t<0)$$

에 대하여 $y=f(x)$라 할 때, $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3+5h)-f(3)}{h}$의 값을 구하시오.

0660 도전 동영상

$-2<x<\dfrac{1}{2}$에서 함수 $f(x)=\ln\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right|$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $f'(0)g'(0)$의 값은?

① $\dfrac{25}{18}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{5}{3}$
④ $\dfrac{16}{9}$ ⑤ $\dfrac{17}{9}$

0661 동영상

함수 $f(x)=e^x\sin x$에 대하여 $f'(\theta)-f''(\theta)=0$일 때, θ의 값을 구하시오. $\left(단,\ -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

ⓒ좋은책신사고

기본 Master A 단계

06-1 | 접선의 방정식

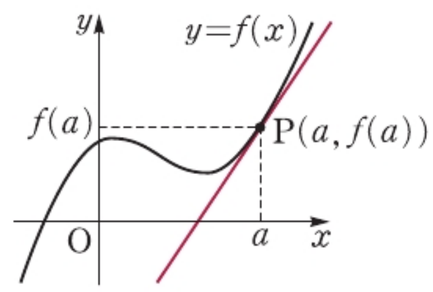
유형 | 01~09

개념 NOTE

(1) 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$ ❶❷



(2) 접선의 방정식을 구하는 방법

① 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식❸

(i) 접선의 기울기 $f'(t)$를 구한다.

(ii) $f'(t)$의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

② 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 $f'(t)=m$임을 이용하여 t의 값을 구한다.

(ii) t의 값을 $y-f(t)=m(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

③ 곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$에서 곡선에 그은 접선의 방정식

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.

(ii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 점 $(a,\ b)$의 좌표를 대입하여 t의 값을 구한다.

(iii) t의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

❶ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

❷ 점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y-b=m(x-a)$

❸ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은
$y-f(t)=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)$

✱ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면
$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$

[0662~0666] 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

0662 $y=\dfrac{1}{x-4}$ $\quad(5,\ 1)$

0663 $y=\sqrt{x^2+1}$ $\quad(1,\ \sqrt{2})$

0664 $y=e^{x+1}$ $\quad(1,\ e^2)$

0665 $y=\ln 3x$ $\quad(1,\ \ln 3)$

0666 $y=\cos 2x$ $\quad\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$

0667 곡선 $y=\ln x+2$ 위의 점 $(1,\ 2)$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

[0668~0671] 다음 직선의 방정식을 구하시오.

0668 곡선 $y=\sqrt{2x+1}$에 접하고 기울기가 1인 직선

0669 곡선 $y=e^{-x}$에 접하고 기울기가 -1인 직선

0670 곡선 $y=\ln x$에 접하고 기울기가 e인 직선

0671 곡선 $y=\sin x\ (-\pi<x<\pi)$에 접하고 기울기가 1인 직선

[0672~0674] 다음 주어진 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

0672 $y=e^{2x}$ $\quad(0,\ 0)$

0673 $y=\sqrt{x+3}$ $\quad(-7,\ 0)$

0674 $y=x\ln x$ $\quad(0,\ -1)$

06-2 | 함수의 증가와 감소

유형 | 10·11·12

개념 NOTE

(1) 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **증가**한다고 한다.

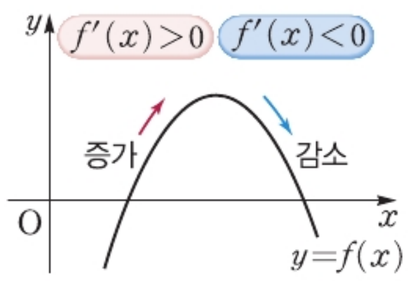
② $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **감소**한다고 한다.

(2) 함수의 증가와 감소의 판정[1]

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.



예 함수 $f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$

$x>0$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가하고

$x<0$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소한다.

참고 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간에서

① $f(x)$가 증가하면 $f'(x)\geq 0$

② $f(x)$가 감소하면 $f'(x)\leq 0$

1 역은 성립하지 않는다.
예 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하지만 $f'(0)=0$이다.

0675 함수 $f(x)=e^x-x$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) $f'(x)$를 구하시오.

(2) $f'(x)=0$인 x의 값을 구하시오.

(3) 다음 증감표를 완성하시오.

x	$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	↘		

(4) 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하시오.

[0676~0679] 다음 함수의 증가와 감소를 조사하시오.

0676 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$

0677 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$

0678 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$

0679 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

[0680~0683] 다음 함수의 증가와 감소를 조사하시오.

0680 $f(x)=2x+e^{-x}$

0681 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$

0682 $f(x)=\ln x-x$

0683 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

[0684~0686] 다음 함수의 증가와 감소를 조사하시오.

0684 $f(x)=x-2\sin x$ $(0<x<\pi)$

0685 $f(x)=\sin x-\cos x$ $(0<x<\pi)$

0686 $f(x)=\tan x-4x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

ⓒ좋은책신사고

정답 및 풀이 68쪽

06-3 | 함수의 극대와 극소

유형 | 13~20

(1) 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하고, $f(a)$를 **극댓값**이라 한다.

② $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**라 하고, $f(a)$를 **극솟값**이라 한다.

극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라 한다.

(2) 도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$[1]이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.[2]

② 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.[3]

(3) 이계도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정[4]

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때

① $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

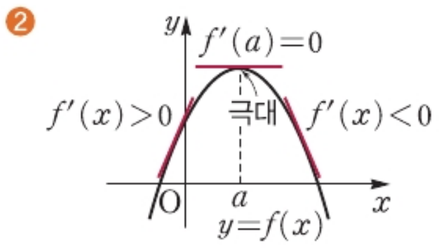
예 함수 $f(x)=x^3-3x$에서 $f'(x)=3x^2-3$, $f''(x)=6x$

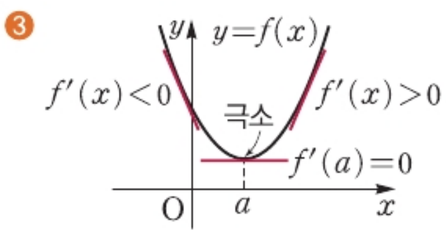
$x=-1$일 때, $f'(-1)=0$, $f''(-1)=-6<0$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이다.

$x=1$일 때, $f'(1)=0$, $f''(1)=6>0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

개념 NOTE

1 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖고 a를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능하면 $f'(a)=0$이다.

2


3


4 역은 성립하지 않는다.
예 $f(x)=x^4$은 $x=0$에서 극소이지만 $f''(0)=0$이다.

0687 함수 $f(x)=x^2e^x$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) $f'(x)$를 구하시오.

(2) $f'(x)=0$인 x의 값을 구하시오.

(3) 다음 증감표를 완성하시오.

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

(4) 함수 $f(x)$의 극값을 구하시오.

[0688~0692] 증감표를 이용하여 다음 함수의 극값을 구하시오.

0688 $f(x)=\sqrt{x^2+2}$

0689 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

0690 $f(x)=e^{-x^2}$

0691 $f(x)=x-2\ln x$

0692 $f(x)=x+2\cos x$ $(0<x<\pi)$

0693 함수 $f(x)=x^3+3x^2-2$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$를 구하시오.

(2) $f'(x)=0$인 x의 값에서의 $f''(x)$의 부호를 구하시오.

(3) 함수 $f(x)$의 극값을 구하시오.

[0694~0698] 이계도함수를 이용하여 다음 함수의 극값을 구하시오.

0694 $f(x)=-x^4+2x^2+1$

0695 $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$

0696 $f(x)=xe^{-2x}$

0697 $f(x)=\ln(x^2+3)$

0698 $f(x)=\sin x+\cos x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

B 단계 유형 Master

유형 01 접선의 방정식; 접점의 좌표가 주어질 때 (집중공략) 개념 06-1

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.
(ii) $y-b=f'(a)(x-a)$에 대입한다.

0699 (대표 문제)

곡선 $y=x\sqrt{x}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

0700 (B0)

다음 중 곡선 $y=(2x-3)^5$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선 위의 점의 좌표인 것은?

① $(1,\ -9)$ ② $(1,\ -5)$ ③ $(3,\ 10)$
④ $(3,\ 12)$ ⑤ $(4,\ 19)$

0701 (B0)

곡선 $y=x-2x\ln x$ 위의 x좌표가 1인 점에서의 접선이 점 $(5,\ k)$를 지날 때, k의 값을 구하시오.

0702 (B0) (서술형)

곡선 $y=e^{\sin x}$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 x절편을 구하시오.

0703 (B+)

곡선 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 위의 점 $(t,\ \sin t)$에서의 접선과 x축의 교점의 좌표를 $(f(t),\ 0)$이라 할 때, $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{2t}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

유형 02 접선과 수직인 직선의 방정식 개념 06-1

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)\ (\text{단, } f'(a)\neq 0)$$

0704 (대표 문제)

곡선 $y=\frac{6}{x^2+2}$ 위의 점 $(2,\ 1)$을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

0705 (B-)

곡선 $y=\frac{\sin x}{x}$ 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기를 구하시오.

0706 (B0)

곡선 $y=xe^x$ 위의 점 $(1,\ e)$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 y절편은?

① $e-\frac{1}{e}$ ② $e-\frac{1}{2e}$ ③ $e+\frac{1}{2e}$
④ $e+\frac{1}{e}$ ⑤ $2e+\frac{1}{e}$

ⓒ좋은책신사고

0707 B0 서술형

곡선 $y=\ln 4x$ 위의 점 $(1,\ a)$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선이 점 $(3,\ b)$를 지날 때, $a-b$의 값을 구하시오.

유형 03 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용한 접선의 방정식

개념 06-1

매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$를 구한다.

(ii) $f(t_1)=a$, $g(t_1)=b$를 만족시키는 t_1의 값을 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 t_1의 값을 $y-b=\dfrac{g'(t_1)}{f'(t_1)}(x-a)$에 대입한다.

0708 대표 문제

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$에서 $t=\ln 3$에 대응하는 점에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

0709 B0 서술형

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=t^2+2t$, $y=t^3+1$에서 $t=2$에 대응하는 점에서의 접선이 점 $(a,\ 5)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.

0710 B0

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=t^3$, $y=at^2+1$에서 $t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$일 때, 이 점에서의 접선의 방정식을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

0711 B0

매개변수 θ로 나타낸 곡선 $x=2\sin 2\theta$, $y=2\cos 2\theta$ 위의 점 $(\sqrt{3},\ 1)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 y절편은? $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

유형 04 음함수의 미분법을 이용한 접선의 방정식

개념 06-1

곡선 $f(x,\ y)=0$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

(ii) $\dfrac{dy}{dx}$에 $x=a$, $y=b$를 대입하여 접선의 기울기 m을 구한다.

(iii) 접선의 방정식 $y-b=m(x-a)$를 구한다.

0712 대표 문제

곡선 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ 위의 점 $(1,\ 16)$에서의 접선이 점 $(3,\ a)$를 지날 때, a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

0713 B0

곡선 $x^3+y^2-4xy=0$ 위의 점 $(3,\ 9)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표가 $(a,\ 0)$일 때, a의 값을 구하시오.

0714 B0

곡선 $xy^2=8$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선과 원점 사이의 거리를 구하시오.

0715 B0

곡선 $y^2=\ln(2-x^2)+xy+20$ 위의 점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

유형 05 접선의 방정식; 기울기가 주어질 때 집중공략 개념 06-1

곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.
(ii) $f'(t)=m$임을 이용하여 t의 값을 구한다.
(iii) t의 값을 $y-f(t)=m(x-t)$에 대입한다.

0716 대표 문제

곡선 $y=e^{3x}$에 접하고 직선 $y=3x$에 평행한 직선의 x절편을 구하시오.

0717 B-

곡선 $y=\ln(x+2)$에 접하고 직선 $y=-x+3$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

0718 B0 서술형

직선 $y=-2x$를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 곡선 $y=\cos 2x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$에 접할 때, a의 값을 구하시오.

0719 B+

두 직선 $y=-x+a$, $y=-x+b$가 곡선 $y=\frac{4}{x-2}$에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a\neq b$)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

유형 06 접선의 방정식 ; 곡선 밖의 한 점이 주어질 때 집중공략 개념 06-1

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$에서 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.
(ii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 $x=a$, $y=b$를 대입하여 t의 값을 구한다.
(iii) t의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입한다.

0720 대표 문제

점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$에서 곡선 $y=e^{2x-1}$에 그은 접선이 점 $(-1,\ a)$를 지날 때, a의 값은?

① $-3e$ ② $-2e$ ③ $-e$
④ $2e$ ⑤ $3e$

ⓒ좋은책신사고

0721 B-

점 $(-4,\ 4)$에서 곡선 $y=\sqrt{x}+4$에 그은 접선의 기울기는?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

0722 B0

점 $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$에서 곡선 $y=\frac{x+1}{x^2+1}$에 그은 접선과 원점 사이의 거리를 구하시오.

0723 B+ 서술형

점 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=\ln x^2+1$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 구하시오.

유형 07 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 개수 개념 06-1

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 개수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.
(ii) 곡선 밖의 점의 좌표를 접선의 방정식에 대입하여 t에 대한 방정식을 만든다.
(iii) 실근 t의 개수를 이용하여 접선의 개수를 구한다.

0724 대표 문제

점 $(2,\ -1)$에서 곡선 $y=x+\frac{2}{x}$에 그을 수 있는 접선의 개수를 구하시오.

0725 B0

원점에서 곡선 $y=(x+k)e^x$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있을 때, 실수 k의 값은? (단, $k\neq0$)

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

0726 B0

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=\frac{1}{x^2+2}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

유형 08 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이 개념 06-1

접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접선의 방정식을 구한다.
(ii) 접선의 x절편, y절편을 찾아 도형의 넓이를 구한다.

0727 대표 문제

곡선 $y=\sqrt{2x^2+1}$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{48}$ ② $\frac{1}{24}$ ③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

0728 B0

곡선 $y=x\ln x$에 접하고 기울기가 2인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

0729 B0

곡선 $x^2+xy=4$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

0730 B0

점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=e^{-x}$에 그은 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

유형 09 공통인 접선

집중공략 개념 06-1

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지면
① $x=a$인 점에서 두 곡선이 만난다. ➡ $f(a)=g(a)$
② $x=a$인 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같다. ➡ $f'(a)=g'(a)$

0731 대표 문제

두 곡선 $y=ax^2+e^{x-1}$, $y=\frac{b}{x}$가 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

0732 B0

두 곡선 $y=ax^2$, $y=\ln x$가 $x=b$인 점에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?

① $\frac{\sqrt{e}}{e}$ ② $\sqrt{e}$ ③ $2\sqrt{e}$
④ $2e$ ⑤ $2e\sqrt{e}$

0733 B0

두 곡선 $y=-\sin x$, $y=\cos^2 x+a$가 한 점에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

유형 10 함수의 증가와 감소

집중공략 개념 06-2

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 증가와 감소는 $f'(x)$의 부호를 조사하여 알 수 있다.
① $f'(x)>0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
② $f'(x)<0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

0734 대표 문제

함수 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$가 증가하는 구간이 $[\alpha,\ \beta]$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0735 B0

함수 $f(x)=x-2\ln x$가 구간 $[a,\ \infty)$에서 증가할 때, 실수 a의 최솟값을 구하시오.

0736 B0 서술형

함수 $f(x)=(x^2-4)e^x$이 감소하는 구간에 속하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0737 B+

함수 $f(x)=x-2\sin x$ $(-\pi<x<\pi)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $-\pi<x_1<x_2<-\frac{\pi}{3}$이면 $f(x_1)<f(x_2)$

ㄴ. $-\frac{\pi}{3}<x_1<x_2<\frac{\pi}{3}$이면 $f(x_1)<f(x_2)$

ㄷ. $\frac{\pi}{3}<x_1<x_2<\pi$이면 $f(x_1)>f(x_2)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

유형 11 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건 (1) 개념 06-2

미분가능한 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서
① 증가 ➡ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$
② 감소 ➡ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$
이때 등호가 포함됨에 유의한다.

0738 대표 문제

함수 $f(x)=(-x^2+ax-5)e^{-x}$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a\leq -4$ ② $a\leq 0$ ③ $-4\leq a\leq 4$
④ $2\leq a\leq 6$ ⑤ $a\geq 4$

0739 B- 서술형

함수 $f(x)=ax-\cos x$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

0740 B0

다음 중 함수 $f(x)=\ln(x^2+1)-ax$가 실수 전체의 집합에서 감소하도록 하는 실수 a의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

유형 12 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건 (2) 개념 06-2 집중공략

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하기 위한 조건은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한다.
(ii) $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 그린다.
(iii) 어떤 구간에서 $f(x)$가 증가하려면 $f'(x)\geq 0$, $f(x)$가 감소하려면 $f'(x)\leq 0$이어야 함을 이용한다.

0741 대표 문제

함수 $f(x)=ax+\ln x$가 구간 $(1,\ \infty)$에서 감소하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

0742 B0

함수 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ $(x>0)$가 구간 $(3,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오.

0743 B0

함수 $f(x)=(x^2+a)e^x$이 구간 $(-3,\ 1)$에서 감소하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

유형 13 유리함수의 극대·극소

집중공략 개념 06-3

미분가능한 함수 $f(x)$의 극값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한다.
(ii) $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 a를 구한다.
(iii) $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.
- 양 → 음 ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극대 ➡ 극댓값은 $f(a)$이다.
- 음 → 양 ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극소 ➡ 극솟값은 $f(a)$이다.

0744 대표 문제

함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0745 B-

함수 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ $(x>0)$의 극솟값을 구하시오.

0746 B0

함수 $f(x)=\dfrac{x^2+7x+8}{x-1}$은 $x=a$에서 극대이고 $x=b$에서 극소이다. 이때 $2a+b$의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

유형 14 무리함수의 극대·극소

개념 06-3

0747 대표 문제

함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}$의 극솟값을 구하시오.

0748 B0 서술형

함수 $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{9-x}$가 $x=a$에서 극댓값 b를 가질 때, $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하시오.

0749 B0

함수 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. 정의역은 실수 전체의 집합이다.
ㄴ. 극솟값은 $2\sqrt{2}$이다.
ㄷ. 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

유형 15 지수함수의 극대·극소

개념 06-3

0750 대표 문제

함수 $f(x)=(x^2+3x+3)e^x$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $\dfrac{m}{M}$의 값을 구하시오.

0751 B0

함수 $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x^2}$이 극값을 갖는 x의 값의 개수를 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0752 B0

함수 $f(x)=e^x+e^{-x}$의 극솟값은?

① $\frac{1}{e}$ ② 1 ③ e
④ 2 ⑤ $2e$

유형 16 로그함수의 극대·극소

개념 06-3

0753 대표 문제

함수 $f(x)=-\frac{\ln x}{x}$가 $x=a$에서 극솟값 b를 가질 때, ab의 값을 구하시오.

0754 B0 서술형

함수 $f(x)=3x-x\ln x$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프에서 극대가 되는 점을 A라 할 때, 직선 OA의 방정식을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

0755 B0

다음 중 함수 $f(x)=x^2-3x+\ln x$의 극값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값을 갖는다.
② $x=1$에서 극댓값을 갖는다.
③ 극솟값 -2를 갖는다.
④ 극솟값 $-\frac{5}{4}-\ln 2$를 갖는다.
⑤ 극댓값 $-\frac{1}{4}-\ln 2$를 갖는다.

유형 17 삼각함수의 극대·극소

개념 06-3

0756 대표 문제

함수 $f(x)=x-\sin 2x$ $(0<x<\pi)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π
④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

0757 B0

함수 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$ $(0<x<2\pi)$의 극댓값과 극솟값의 곱을 구하시오.

0758 B0

$x=\theta-\sin\theta$, $y=\cos\theta$와 같이 매개변수 θ로 나타낸 함수의 극솟값을 구하시오. (단, $0<\theta<2\pi$)

유형 18 함수의 극대·극소를 이용한 미정계수의 결정

개념 06-3

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 갖는다.
➡ $f(a)=p$, $f'(a)=0$

0759 대표 문제

함수 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+4}$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① -5 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

0760 B-

함수 $f(x)=ax+b\ln x$가 $x=3$에서 극솟값을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은? (단, $a>0$)

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

0761 B0 서술형

함수 $f(x)=(x+a)e^x$이 $x=1$에서 극솟값 m을 가질 때, 상수 a, m에 대하여 am의 값을 구하시오.

유형 19 함수가 극값을 가질 조건 개념 06-3

미분가능한 함수 $f(x)$가
① 극값을 갖는다.
➡ $f'(x)=0$이 실근을 갖고 $f'(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.
② 극값을 갖지 않는다.
➡ 정의역의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$이다.

0762 대표 문제

함수 $f(x)=x-k\cos x$가 극값을 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

0763 B-

함수 $f(x)=ax+\ln x$가 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

0764 B0

함수 $f(x)=(x^3-9x+k)e^x$이 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 정수 k의 개수는?

① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

유형 20 함수가 극값을 가질 조건 ; 판별식을 이용하는 경우 집중공략 개념 06-3

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ $(g(x)>0)$이고 $h(x)$가 이차식일 때 $h(x)=0$의 판별식을 D라 하면 함수 $f(x)$가
① 극값을 갖는다.
➡ $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다. ➡ $D>0$
② 극값을 갖지 않는다.
➡ $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다. ➡ $D\leq 0$

0765 대표 문제

함수 $f(x)=\frac{2x+k}{x^2-1}$가 극값을 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $\alpha\leq k\leq\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

0766 B0

함수 $f(x)=(x^2+3x+a)e^{-x}$이 극값을 갖도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하시오.

0767 B0

함수 $f(x)=2\ln x-x+\frac{a}{x}$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

문제 풀이 동영상

B-

0768

곡선 $y=\sqrt{3x^2-2}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서 그은 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

0769

직선 $y=2x+a$가 곡선 $y=e^{2x+1}$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

0770 수능 기출

곡선 $y=3e^{x-1}$ 위의 점 A에서의 접선이 원점 O를 지날 때, 선분 OA의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

0771 교육청 기출

동영상

함수 $f(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)$이 구간 $(a,\ b)$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0772 서술형

함수 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4}$의 극댓값과 극솟값의 합을 구하시오.

B0

0773

곡선 $y=2\sin x+1$ 위의 $x=\dfrac{\pi}{6}$인 점에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 구하시오.

0774 서술형

곡선 $y=e^x+1$ 위의 점 $(1,\ e+1)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 x절편을 구하시오.

0775

동영상

매개변수 θ로 나타낸 곡선 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선과 원점 사이의 거리는? (단, $0<\theta<\pi$)

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

0776

곡선 $y=\sqrt{x}+1$ 위의 두 점 $(0,\ 1)$, $(4,\ 3)$을 잇는 선분과 평행한 직선이 이 곡선과 $x=a$인 점에서 접할 때, a의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

0777 서술형

점 $(2,\ 3)$을 지나고 곡선 $y=\frac{x-1}{x+1}$에 접하는 두 직선의 기울기의 합을 구하시오.

0778 동영상

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-1)e^x$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있을 때, 음수 a의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

0779

곡선 $y=(x+1)e^x$ 위의 점 $(1,\ 2e)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{e}{12}$ ② $\frac{e}{6}$ ③ $\frac{e}{3}$
④ e ⑤ $2e$

0780

두 곡선 $y=2x^2+a$와 $y=\ln 2x$가 $x=b$인 점에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $4ab$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0781 동영상

함수 $f(x)=\ln(x+1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

0782 서술형 동영상

함수 $f(x)=(x^2+ax+1)e^{-2x}$이 실수 전체의 집합에서 감소할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

0783 평가원 기출

함수

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x\ (a>0)$$

의 극솟값이 0일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ $\sqrt{e}$
④ e ⑤ $2e$

ⓒ좋은책신사고

0784

동영상

함수 $f(x)=(ax^2-9)e^x$이 $x=-3$에서 극댓값을 가질 때, $f(x)$의 극솟값은? (단, a는 상수이다.)

① $-9e$ ② $-8e$ ③ $-7e$
④ $-6e$ ⑤ $-5e$

0785

함수 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+3}{x+2}$이 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

B+

0786 서술형

곡선 $y=\sqrt{x+1}$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ \sqrt{a+1})$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{a}$의 값을 구하시오.

0787

동영상

곡선 $y=\ln x+1$ 위의 점과 직선 $y=\dfrac{1}{e}x+2$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^2}}$ ② $\dfrac{e-1}{\sqrt{1+e^2}}$ ③ $\dfrac{e}{\sqrt{1+e^2}}$
④ $\dfrac{e+1}{\sqrt{1+e^2}}$ ⑤ $\dfrac{2e}{\sqrt{1+e^2}}$

0788

동영상

곡선 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 위의 점 $\left(k,\ \dfrac{2}{k-1}\right)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(k)$라 하자. 이때 $\lim\limits_{k\to\infty}S(k)$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

0789 도전

함수 $f(x)=e^{x+a}$의 그래프와 그 역함수 $g(x)$의 그래프가 접할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0790 교육청 기출

동영상

함수 $f(x)=e^{-x}(\ln x-2)$가 $x=a$에서 극값을 가질 때, 다음 중 a가 속하는 구간은?

① $(1,\ e)$ ② $(e,\ e^2)$ ③ $(e^2,\ e^3)$
④ $(e^3,\ e^4)$ ⑤ $(e^4,\ e^5)$

0791 도전

동영상

$x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos 2x$가 극댓값을 가질 때의 x의 값을 작은 것부터 차례대로 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots$이라 하고 극솟값을 가질 때의 x의 값을 작은 것부터 차례대로 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \cdots$이라 하자. 이때 $\cos\alpha_5+\sin\beta_6$의 값을 구하시오.

실패

실패는 성공을 위한 필수 과목이다.
실패한 어제를 생각하되 오래도록 집착하지는 마라.
실패가 떠난 자리에는 다시 도전이 채워진다.

현재 있는 그대로 나를 바라보라.
그리고 기꺼이 받아들이며 사랑하라. 자신을.
그리고 다시 도전하라. 첫 마음으로.

최선을 다했음에도 실패를 했을 때에는
'나 어쩌지, 나 어떻게 해야 돼.'라며 주저앉아 울지 말고
크게 심호흡 한번 하고 이렇게 외쳐 보라.
'내 인생의 주인공은 나야. 다시 해 보자. 나는 할 수 있어.'라고
스스로에게 주문을 걸어 보라.

*이 글은 김정한 님의 저서 <괜찮은 위로>에서 발췌하였습니다.

ⓒ좋은책신사고

기본 Master A 단계

07-1 | 곡선의 오목과 볼록

유형 | 01

개념 NOTE

(1) 곡선의 오목과 볼록[1]

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여

① 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.

② 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록(또는 아래로 오목)하다고 한다.

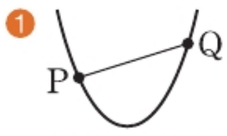
(2) 곡선의 오목과 볼록의 판정

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서

① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

1



아래로 볼록
(위로 오목)

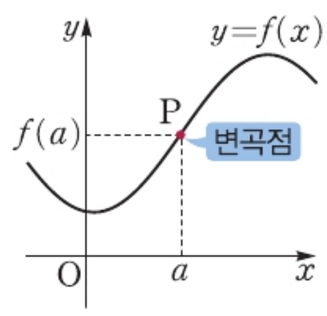
위로 볼록
(아래로 오목)

07-2 | 변곡점

유형 | 02·03·14

(1) 변곡점

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 **변곡점**이라 한다.



(2) 변곡점의 판정

함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$[2]이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.[3]

2 변곡점 $(a,\ f(a))$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $f''(a)$가 존재하면 $f''(a)=0$이다.

3 $f''(a)=0$이라고 해서 점 $(a,\ f(a))$가 항상 변곡점인 것은 아니다.
예 $f(x)=x^4$에서 $f''(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 점 $(0,\ 0)$은 변곡점이 아니다.

[0792~0796] 다음 곡선의 오목과 볼록을 조사하시오.

0792 $y=x^3-6x^2-2$

0793 $y=x^4+2x^3$

0794 $y=x^2-e^x$

0795 $y=x\ln x$

0796 $y=\sin x\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

[0797~0801] 다음 곡선의 변곡점의 좌표를 구하시오.

0797 $y=x^3-8x+1$

0798 $y=-x^4+6x^3$

0799 $y=xe^{-x}$

0800 $y=\ln(x^2+2)$

0801 $y=x+\cos x\ (0<x<\pi)$

07-3 | 함수의 그래프

유형 | 04·05

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음을 조사하여 그린다.

① 함수의 정의역과 치역 ② 좌표축과의 교점

③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 ④ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

⑤ $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 점근선

개념 NOTE

* $y=f(x)$의 그래프에서
  ① $f(-x)=f(x)$이면
  ➡ y축에 대하여 대칭
  ② $f(-x)=-f(x)$이면
  ➡ 원점에 대하여 대칭

07-4 | 함수의 최대와 최소

유형 | 06~11

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 구간 (a, b)에서의 $f(x)$의 극값을 구한다.

(ii) 구간 $[a, b]$의 양 끝 점의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.

(iii) (i), (ii)에서 구한 극값, $f(a)$, $f(b)$의 값 중에서 가장 큰 값이 $f(x)$의 최댓값이고, 가장 작은 값이 $f(x)$의 최솟값이다.

참고 주어진 닫힌구간에서 함수 $f(x)$가 연속이면 극댓값과 극솟값은 여러 개 존재할 수 있지만 최댓값과 최솟값은 오직 한 개씩만 존재한다.

* 최대·최소 정리
  함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

0802 다음은 함수 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$의 그래프를 그리는 과정이다.

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$로 놓으면 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이고 $f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

$f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=$ (가)

$f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$이므로 $f''(x)=0$에서

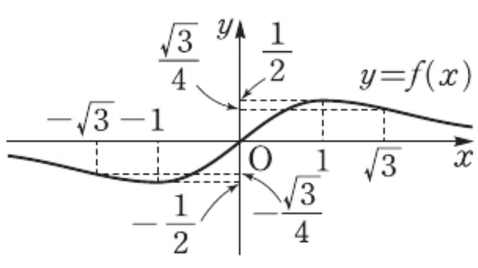
$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=$ (나)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	(가)	$\cdots$	(나)	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤵	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	⤷	$-\frac{1}{2}$	⤴	0	↱	(다)	⤵	(라)	⤷

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 직선 (마)이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



위의 과정에서 (가)~(마)에 알맞은 것을 써넣으시오.

[0803~0807] 다음 함수의 그래프를 그리시오.

0803 $y=x^4-2x^3$

0804 $y=\sqrt{x}-2x$

0805 $y=xe^{2x}$

0806 $y=\dfrac{\ln x}{x}$

0807 $y=x-\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

[0808~0812] 주어진 구간에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

0808 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ $[-2, 2]$

0809 $f(x)=x\sqrt{x+6}$ $[-6, 2]$

0810 $f(x)=x^2e^x$ $[-4, 3]$

0811 $f(x)=x-\ln x$ $\left[\dfrac{1}{e^2}, e\right]$

0812 $f(x)=x+2\cos x$ $[0, \pi]$

ⓒ좋은책신사고

07-5 | 방정식과 부등식에의 활용

유형 | 12~16

개념 NOTE

(1) 방정식에의 활용

① 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근[1]의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

(2) 부등식에의 활용

① 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$[2]이 성립함을 보일 때,

➡ 그 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 보일 때,

➡ $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 그 구간에서 $F(x)\geq 0$임을 보인다.

[1] 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다.

[2] 어떤 구간에서 $f(x)$의 최솟값이 a이면 그 구간에서 $f(x)\geq a$ 이다.

0813 방정식 $x-3\ln x=0$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) $f(x)=x-3\ln x$로 놓고 $f'(x)=0$인 x의 값을 구하시오.

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리시오.

(3) 방정식 $x-3\ln x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

[0814~0816] 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

0814 $e^x-x=0$

0815 $\dfrac{\ln x}{x}=0$

0816 $\sin x-x=0$

[0817~0818] 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

0817 $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$

0818 $e^x+e^{-x}=3$

0819 다음은 $x>-1$일 때, 부등식 $x\geq\ln(x+1)$이 성립함을 증명하는 과정이다.

증명

$f(x)=x-\ln(x+1)$로 놓으면

$f'(x)=$ (가)

$f'(x)=0$에서 $x=$ (나)

x	-1	$\cdots$	(나)	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	(다)	↗

이때 $\lim_{x\to -1+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 $f(x)$의 최솟값은 (다)이다. 즉

$f(x)\geq 0$ $\quad\therefore x-\ln(x+1)\geq 0$

따라서 $x>-1$일 때 부등식 $x\geq\ln(x+1)$이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

[0820~0821] 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

0820 $x>0$일 때, $\quad x>\cos x-1$

0821 모든 실수 x에 대하여 $\quad e^x\geq x+1$

07-6 | 속도와 가속도

유형 | 17·18·19

개념 NOTE

위치
↓ 미분
속도
↓ 미분
가속도

(1) 직선 운동에서의 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는

① $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$ ② $a=\frac{dv}{dt}=f''(t)$

(2) 평면 운동에서의 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도는

① 속도 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, 즉 $(f'(t), g'(t))$

② 가속도 $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$, 즉 $(f''(t), g''(t))$

예 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=2t+1$, $y=t^2-t$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도는

속도: $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, 즉 $(2, 2t-1)$, 가속도: $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$, 즉 $(0, 2)$

참고 ① 속도의 크기는 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$ ❶
② 가속도의 크기는 $\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

❶ 속도의 크기를 속력이라 한다.

[0822~0823] 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$가 다음과 같을 때, [ ] 안의 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 구하시오.

0822 $f(t)=1+e^{-t}$ [1]

0823 $f(t)=t+2\sin t$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

[0824~0826] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 다음과 같을 때, $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도를 구하시오.

0824 $x=4t$, $y=t^2+t-2$

0825 $x=3t^2+2$, $y=2t^2+t$

0826 $x=t^3-3t^2+2$, $y=t^4-8t$

[0827~0828] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 다음과 같을 때, $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 속도와 가속도를 구하시오.

0827 $x=\sin t$, $y=\cos t$

0828 $x=t+\sin t$, $y=t^2-\cos t$

0829 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=t+2$, $y=2\sqrt{t}$일 때, $t=1$에서의 점 P의 속력과 가속도의 크기를 구하시오.

0830 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=t+e^t$, $y=t-e^t$일 때, $t=2$에서의 점 P의 속력과 가속도의 크기를 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

B 단계 유형 Master

유형 01 곡선의 오목과 볼록

개념 07-1

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
① $f''(x)>0$ ➡ 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
② $f''(x)<0$ ➡ 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

0831 대표 문제

곡선 $y=2x^2+\ln x$가 위로 볼록한 구간은?

① $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ ② $(0,\ 1)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$
④ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

0832 B-

다음 중 곡선 $y=x^3+3x^2-9x$가 아래로 볼록한 구간에 속한 정수 x가 아닌 것은?

① -2 ② 0 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

0833 B0 서술형

곡선 $y=(x^2+a)e^x$이 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 아래로 볼록할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

0834 B0

실수 전체의 집합에서 아래로 볼록한 곡선인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $y=x^4+x^2$ ㄴ. $y=1+e^x$
ㄷ. $y=\ln(x^2+1)$ ㄹ. $y=x^2+\cos x$

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

유형 02 변곡점

집중공략 개념 07-2

함수 $f(x)$에서
(i) $f''(a)=0$
(ii) $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.
➡ 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

0835 대표 문제

곡선 $y=(x^2+x)e^x$의 모든 변곡점의 x좌표의 합은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 3 ⑤ 5

0836 B-

곡선 $y=x^4-2x^3-3x$의 두 변곡점 사이의 거리는?

① $\sqrt{14}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 4
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

0837 B0

곡선 $y=\ln(x^2+4)$의 두 변곡점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

0838 B0 서술형

곡선 $y=2\sin x-x$의 변곡점에서의 접선의 기울기를 구하시오. (단, $0<x<2\pi$)

유형 03 변곡점을 이용한 미정계수의 결정 개념 07-2

함수 $f(x)$에 대하여
① $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.
➡ $f(a)=b$, $f'(a)=0$
② 점 (a, b)가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
➡ $f(a)=b$, $f''(a)=0$

0839 대표 문제

곡선 $y=x^3+ax^2+bx-5$의 변곡점의 좌표가 $(-1, 6)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+2b$의 값은?

① -18 ② -15 ③ -12
④ -9 ⑤ -6

0840 B0

곡선 $y=(\ln ax)^2$의 변곡점이 직선 $2x+y=2$ 위에 있을 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ e ⑤ $2e$

0841 B0

함수 $f(x)=ax^2-5x+b\ln x$는 $x=1$에서 극소이고 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

0842 B+

곡선 $y=(x^2+4x+a)e^x$의 변곡점이 2개일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

유형 04 함수의 그래프의 성질 개념 07-3

함수 $f(x)$에 대하여
① 정의역과 치역 ② 좌표축과의 교점
③ 증가와 감소, 극대와 극소 ④ 오목과 볼록, 변곡점
⑤ $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 점근선
등을 조사하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 성질을 파악할 수 있다.

0843 대표 문제

함수 $f(x)=(x-1)e^x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. 극솟값 -1을 갖는다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 아래로 볼록하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

0844 B0

곡선 $y=x-\sin x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오. (단, $-\pi<x<\pi$)

보기
ㄱ. 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록하다.
ㄷ. 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$이다.

0845 B+

함수 $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $x=0$에서 극대이다.
ㄴ. 구간 $(2, 4)$에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=x+2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

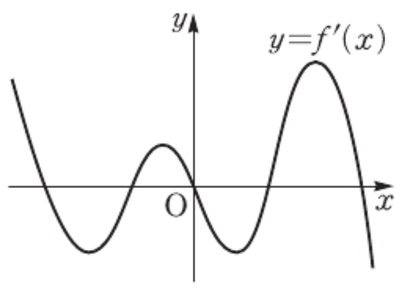
ⓒ좋은책신사고

유형 05 도함수의 그래프를 이용한 함수의 해석 개념 07-3

① 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 부호
➡ $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계를 조사한다.
② 함수 $f'(x)$의 도함수 $f''(x)$의 부호
➡ $y=f'(x)$의 그래프 위의 점에서 그은 접선의 기울기를 조사한다.

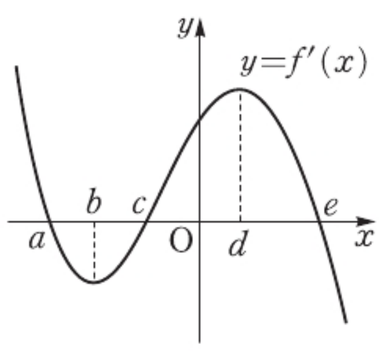
0846 대표 문제

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수를 구하시오.



0847 B-

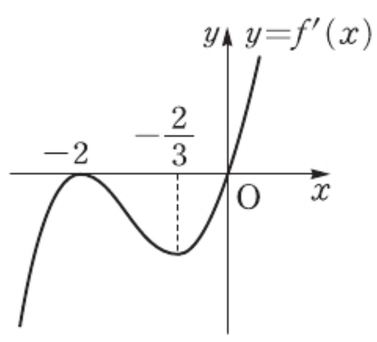
함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은?



① $(a,\ b)$ ② $(b,\ c)$
③ $(c,\ 0)$ ④ $(c,\ d)$
⑤ $(0,\ e)$

0848 B0

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



보기
ㄱ. $x=-2$에서 극대이다.
ㄴ. $x=0$에서 극소이다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

유형 06 유리·무리함수의 최대·최소 개념 07-4

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)$의 극값을 구한다.
(ii) $f(a)$, $f(b)$의 값을 구한다.
(iii) (i), (ii)에서 구한 극값, $f(a)$, $f(b)$의 값 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

0849 대표 문제

함수 $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-x+2}$가 $x=a$에서 최댓값 b를 가질 때, $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하시오.

0850 B0 서술형

함수 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$의 최댓값을 구하시오.

0851 B0

구간 $[-5,\ 0]$에서 함수 $f(x)=x-5+\dfrac{4}{x+6}$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -12 ② $-\dfrac{34}{3}$ ③ $-\dfrac{31}{3}$
④ $-\dfrac{29}{3}$ ⑤ -9

0852 B0

함수 $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

유형 07 지수·로그함수의 최대·최소 개념 07-4

0853 대표 문제

$-3\le x\le 0$에서 함수 $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① $\ln\frac{3}{2}$ ② $\ln 2$ ③ $\ln 3$
④ $\ln 6$ ⑤ $2\ln 3$

0854 B-

함수 $f(x)=xe^{-x}$의 최댓값을 구하시오.

0855 B0 서술형

구간 $[-4,\ 2]$에서 함수 $f(x)=(x^2-3)e^x$은 $x=a$일 때 최댓값을 갖고, $x=b$일 때 최솟값을 갖는다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

0856 B0

함수 $f(x)=x^2\ln x$의 최솟값은?

① $-2e$ ② $-e$ ③ -1
④ $-\frac{1}{e}$ ⑤ $-\frac{1}{2e}$

유형 08 삼각함수의 최대·최소 개념 07-4

0857 대표 문제

구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)=x\cos x-\sin x$의 최솟값을 구하시오.

0858 B0

구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)=(1+\cos x)\sin x$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -2 ② $-\frac{27}{16}$ ③ $-\frac{3}{2}$
④ $-\frac{9}{8}$ ⑤ -1

유형 09 치환을 이용한 함수의 최대·최소 개념 07-4

함수 $f(x)$의 식에 공통부분이 있을 때에는 다음과 같은 순서로 최대·최소를 구한다.
(i) 공통부분을 t로 치환하여 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타낸다.
(ii) t의 값의 범위를 구한다.
(iii) $g(t)$의 최댓값, 최솟값을 구한다.

0859 대표 문제

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)=\cos^3 x-6\sin^2 x+1$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0860 B0

함수 $f(x)=27^x-9^x-3^x$의 최솟값은?

① -9 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

0861 B0 서술형

$\frac{1}{2}\le x\le 16$에서 함수

$$f(x)=(\log_2 x)^4-4(\log_2 x)^3$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

유형 10 함수의 최대·최소를 이용한 미정계수의 결정

집중공략 개념 07-4

미정계수를 포함한 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 주어지면 최댓값 또는 최솟값을 미정계수를 이용한 식으로 나타낸 후 주어진 값과 비교한다.

0862 대표 문제

함수 $f(x)=x\ln x-x+a$의 최솟값이 2일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0863 B0

함수 $f(x)=xe^{kx}$의 최댓값이 1일 때, 음수 k의 값을 구하시오.

0864 B0

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)=a(x+2\cos x)$의 최솟값이 π일 때, $f(x)$의 최댓값은? (단, $a>0$)

① $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ ③ $\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}$
④ $\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}$

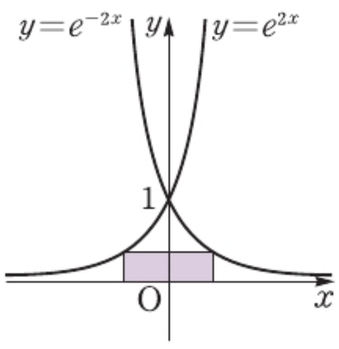
유형 11 최대·최소의 활용

개념 07-4

도형의 길이, 넓이, 부피를 구할 때
① 평면도형의 길이, 넓이 구하는 공식
② 입체도형의 부피 구하는 공식
③ 피타고라스 정리
등을 이용하여 도형의 길이, 넓이, 부피를 한 문자에 대한 함수로 나타낸 다음 도함수를 이용하여 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

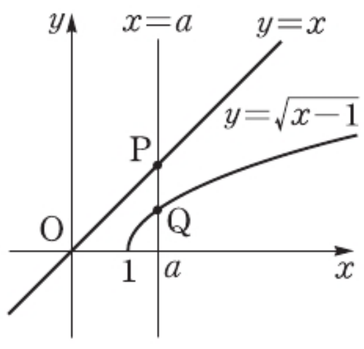
0865 대표 문제

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=e^{2x}$, $y=e^{-2x}$ 위의 두 점을 꼭짓점으로 하고 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.



0866 B0 서술형

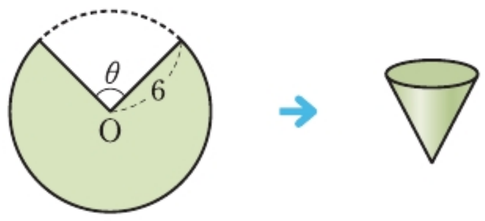
오른쪽 그림과 같이 직선 $x=a$와 직선 $y=x$, 곡선 $y=\sqrt{x-1}$의 교점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오. (단, $a>1$)



0867 B+

다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원 모양의 종이에서 중심각의 크기가 θ인 부채꼴을 잘라 내고 남은 부분으로 원뿔 모양의 종이컵을 만들려고 한다. 종이컵의 부피가 최대가 되도록 하는 θ의 값을 구하시오.

(단, 종이컵의 두께와 붙이는 부분의 넓이는 무시한다.)



유형 12 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수

집중공략 개념 07-5

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

0868 대표 문제

방정식 $(x+1)e^{-x}=k$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $a<k<b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

0869 B0

방정식 $\dfrac{10}{x^2-4x+5}=k$가 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

0870 B0

x에 대한 방정식 $\ln x-x+k=0$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $k=0$일 때, 오직 한 개의 실근을 갖는다.
ㄴ. $k=1$일 때, 오직 한 개의 실근을 갖는다.
ㄷ. $k=2$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

0871 B+

방정식 $x^3=k(x-1)^2$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

유형 13 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수

집중공략 개념 07-5

방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

0872 대표 문제

다음 중 방정식 $e^{2x}=kx$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값이 될 수 있는 것은?

① $\frac{1}{4}e$ ② $\frac{1}{2}e$ ③ e
④ $2e$ ⑤ $4e$

ⓒ좋은책신사고

0873 B0 서술형

구간 $[-\pi, \pi]$에서 방정식 $\sin x - kx = 0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

0874 B0

방정식 $a\ln x - x^2 = 0$이 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}e$ ② e ③ $\frac{3}{2}e$
④ $2e$ ⑤ $\frac{5}{2}e$

유형 14 변곡점을 가질 조건 개념 07-2, 5

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖는다.
➡ 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

0875 대표 문제

곡선 $y=ax^2+4\sin x$가 변곡점을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0876 B-

곡선 $y=x^4-4x^3+kx^2$이 변곡점을 갖지 않도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

0877 B0

곡선 $y=e^x+e^{-x}+ax^2$이 변곡점을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

유형 15 부등식 $f(x) \geq a$ 꼴 집중공략 개념 07-5

① 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq a$가 성립하려면 그 구간에서
$(f(x)$의 최솟값$) \geq a$
② 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \leq a$가 성립하려면 그 구간에서
$(f(x)$의 최댓값$) \leq a$

0878 대표 문제

모든 실수 x에 대하여 부등식 $xe^x \geq k$가 성립할 때, 실수 k의 최댓값은?

① $-2e$ ② $-e$ ③ $-\frac{1}{e}$
④ $\frac{1}{e}$ ⑤ e

0879 B0

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x+\frac{1}{2x^2}+k \geq 0$이 성립할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

0880 B0

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(\ln x)^2-4\ln x \geq k$가 성립할 때, 실수 k의 최댓값을 구하시오.

유형 16 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 꼴

집중공략 개념 07-5

어떤 구간에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립하려면 그 구간에서 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

0881 대표 문제

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\sqrt{x} \geq k \ln x$가 성립할 때, 양수 k의 최댓값은?

① $\frac{e}{4}$ ② $\frac{e}{3}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ e ⑤ $2e$

0882 B0 서술형

두 함수 $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=mx$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

0883 B0

$1 \leq x \leq 4$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax \leq \ln x \leq bx$가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 최솟값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ 1
④ $\frac{3}{e}$ ⑤ $\frac{4}{e}$

유형 17 직선 운동에서의 속도와 가속도

개념 07-6

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는

① $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$ ② $a=\frac{dv}{dt}=f''(t)$

0884 대표 문제

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$가 $f(t)=a\sin\frac{t}{2}+1$이다. $t=2\pi$에서의 속도가 2일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

0885 B-

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$가 $f(t)=t-2\sqrt{t}$일 때, $t=4$에서의 속도와 가속도를 구하시오.

0886 B0

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$가 $f(t)=t+\cos 2t$일 때, 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은?

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

0887 B0

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$가 $f(t)=p\sin t+q\cos t$이다. $t=\pi$에서의 속도가 -6, 가속도가 4일 때, $t=\frac{\pi}{4}$에서의 점 P의 위치는? (단, p, q는 상수이다.)

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $5\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $10\sqrt{2}$

ⓒ좋은책신사고

유형 18 평면 운동에서의 속도

집중공략 개념 07-6

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도와 속력은
① 속도 ➡ $(f'(t), g'(t))$ ② 속력 ➡ $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

0888 대표 문제

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=4t$, $y=4t-2t^2$이다. 점 P의 속력이 $4\sqrt{17}$일 때의 시각을 구하시오.

0889 B0

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=t^2+1$, $y=t^2-8t$일 때, 점 P의 속력의 최솟값은?

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{2}$

0890 B0 서술형

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 (x, y)가 $x=t-\frac{2}{t}$, $y=2t+\frac{1}{t}$일 때, $t=1$에서의 점 P의 속력을 구하시오.

0891 B+

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 (x, y)가 $x=\frac{1}{2}t^2-\ln t$, $y=2t$이다. 점 P의 속력이 최소가 될 때, 점 P의 속도를 구하시오.

0892 B+

지면으로부터 45°의 각을 이루는 방향으로 10 m/s의 속력으로 차 올린 축구공의 t초 후의 위치를 좌표평면에 점 (x, y)로 나타내면 $x=5\sqrt{2}t$, $y=-5t^2+5\sqrt{2}t$이다. 축구공이 지면에 떨어질 때의 속력은?

① 7 m/s ② 8 m/s ③ 9 m/s
④ 10 m/s ⑤ 11 m/s

유형 19 평면 운동에서의 가속도

개념 07-6

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 가속도와 가속도의 크기는
① 가속도 ➡ $(f''(t), g''(t))$
② 가속도의 크기 ➡ $\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

0893 대표 문제

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=6t$, $y=t^3-4t$이다. 점 P의 속력이 10일 때, 가속도의 크기는?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

0894 B0 서술형

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=2\sin t$, $y=4\cos^2 t\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$이다. 점 P의 위치가 $(1, 3)$일 때, 가속도의 크기를 구하시오.

B-

0895

곡선 $y=3x-2\cos x$가 위로 볼록한 구간은?

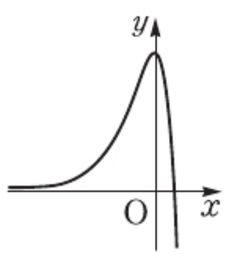
(단, $0<x<2\pi$)

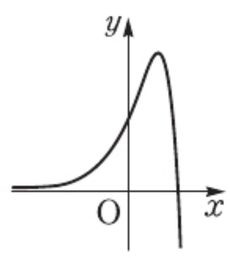
① $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ ② $(0,\ \pi)$ ③ $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$

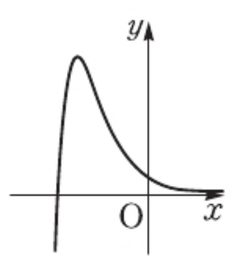
④ $(\pi,\ 2\pi)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$

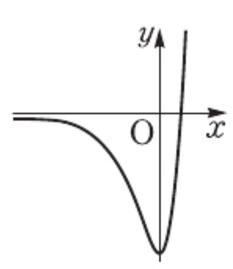
0896

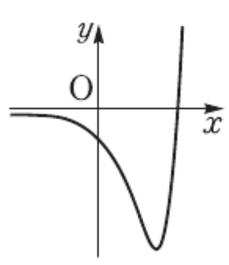
다음 중 함수 $f(x)=(3-x)e^x$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

①


②


③


④


⑤


0897

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)=2x\sqrt{x+1}$의 최솟값을 구하시오.

0898 서술형

방정식 $\frac{1}{x^2+4}=k$가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

0899 동영상

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

$x=1+e^t,\ y=1-e^{-t}$

일 때, $t=\ln 2$에서의 점 P의 속력을 구하시오.

B0

0900 동영상

곡선 $y=-x^4+ax^3+3ax^2+5$가 실수 전체의 집합에서 위로 볼록할 때, 실수 a의 최솟값을 구하시오.

0901

주어진 구간에서 위로 볼록한 곡선인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $y=\ln(x^2+4)$ $(2,\ \infty)$

ㄴ. $y=e^x\cos x$ $(0,\ \pi)$

ㄷ. $y=\frac{x}{x^2+1}$ $(-1,\ 0)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

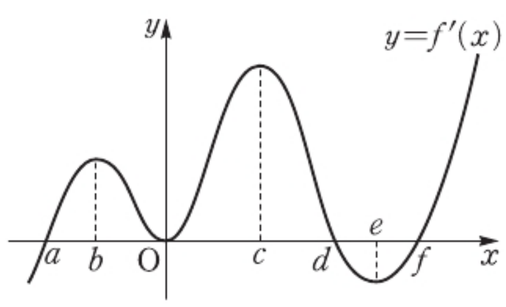
ⓒ좋은책신사고

0902 서술형

곡선 $y=2xe^x$의 변곡점에서의 접선의 y절편을 구하시오.

0903 교육청 기출 동영상

다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



보기
ㄱ. 구간 $[a, f]$에서 $f(x)$의 변곡점은 4개이다.
ㄴ. 구간 $[a, e]$에서 $f(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 1개이다.
ㄷ. 구간 $[a, e]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(c)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

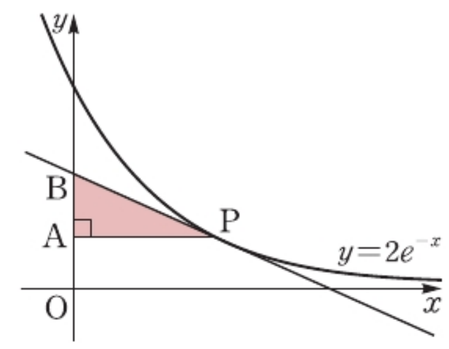
0904

$0\le x\le \pi$에서 함수 $f(x)=2\cos^3 x-3\sin^2 x+2$는 $x=a$일 때 최댓값을 갖고, $x=b$일 때 최솟값을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ π ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

0905 수능 기출

곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})\ (t>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값은?



① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ e

0906 교육청 기출 동영상

함수 $f(x)=2\ln(5-x)+\frac{1}{4}x^2$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}$의 실근의 개수는 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

0907 동영상

방정식 $x^2\ln x-2x^2+\frac{k}{2}x=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. (단, $e=2.7$로 계산한다.)

0908

두 함수 $f(x)=2\cos x$, $g(x)=k-2x^2$에 대하여 $x>0$에서 $f(x)>g(x)$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오.

0909 교육청 기출

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=t+\frac{20}{\pi^2}\cos(2\pi t)$$

이다. 점 P의 시각 $t=\frac{1}{3}$에서의 가속도의 크기를 구하시오.

B+

0910

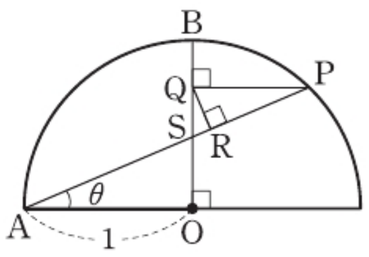
$x+y=3$일 때, $\log_2(x+9)+\log_4 y$의 최댓값은?

① -2 ② 0 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

0911 서술형

함수 $f(x)=\frac{x^3+kx}{x^2+2}$가 $x=1$에서 극값을 갖는다. 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

0912 도전 동영상



오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원 위의 점 P에서 지름에 수직인 반지름 OB에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 $\overline{AP}$에 내린 수선의 발을 R라 하고, $\overline{AP}$와 $\overline{OQ}$의 교점을 S라 하자. 반원의 중심 O에 대하여 $\angle PAO=\theta$라 할 때, $\overline{QR}$의 길이의 최댓값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

0913 동영상

방정식 $\frac{kx}{x^2+2}=2$가 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k의 값의 범위는?

① $\sqrt{2}<k<4$ ② $2\sqrt{2}<k<4$
③ $4\sqrt{2}<k<6$ ④ $4\sqrt{2}<k<8$
⑤ $6<k<8$

0914 도전 동영상

$0\le x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$ax+2\le e^x+1\le bx+2$$

가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정하려고 한다. a의 최댓값을 M, b의 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① $-e$ ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ e

ⓒ좋은책신사고

내 인생을 멋지게 연주해 보자!

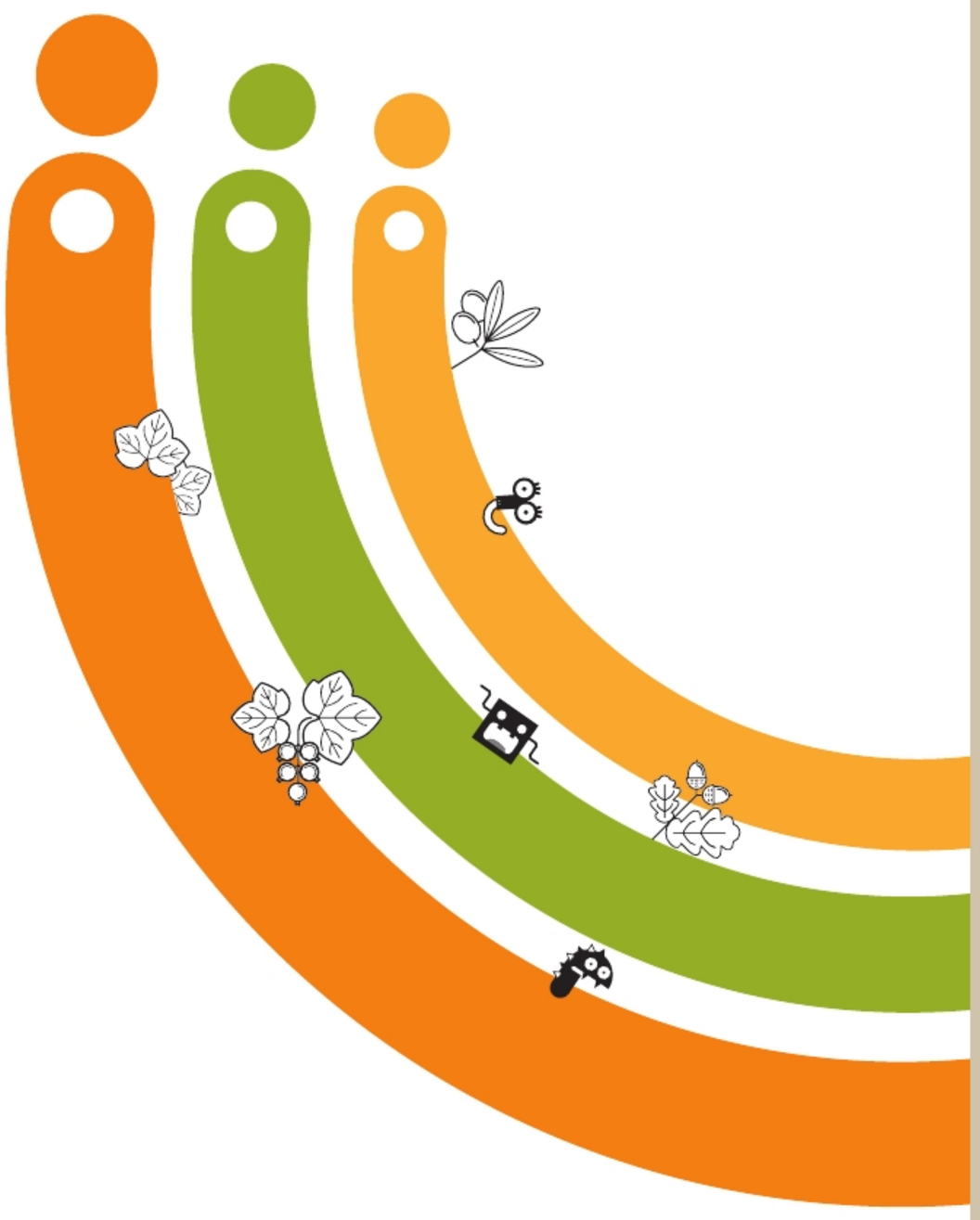
ⓒ좋은책신사고

III 적분법

08 여러 가지 적분법 124

09 정적분 138

10 정적분의 활용 154



ⓒ좋은책신사고

기본 Master A 단계

08-1 | 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

유형 | 01

실수 n에 대하여

(1) $n\neq-1$일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ ❶

(2) $n=-1$일 때, $\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ ❷

예 (1) $\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

(2) $\int\frac{2}{x}dx=2\int\frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C$

참고 부정적분의 성질

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

② $\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ (복호동순)

개념 NOTE

* 일반적으로 부정적분에서 적분상수는 C로 나타낸다.

❶ $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$

❷ $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

[0915~0922] 다음 부정적분을 구하시오.

0915 $\int x^{\frac{5}{3}}dx$

0916 $\int x^{-5}dx$

0917 $\int\sqrt{x}\,dx$

0918 $\int\sqrt[4]{x}\,dx$

0919 $\int\sqrt[5]{x^2}\,dx$

0920 $\int\frac{1}{x^2}dx$

0921 $\int\frac{4}{x}dx$

0922 $\int x\sqrt{x}\,dx$

[0923~0930] 다음 부정적분을 구하시오.

0923 $\int\left(x+\frac{1}{x^3}\right)dx$

0924 $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx$

0925 $\int\frac{5x-2}{x^2}dx$

0926 $\int\frac{x^3+x^2-4}{x^3}dx$

0927 $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

0928 $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$

0929 $\int\frac{2x^2-1}{\sqrt{x}}dx$

0930 $\int\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$

[0931~0933] 다음 부정적분을 구하시오.

0931 $\int\sqrt{x}(x+1)^2dx$

0932 $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

0933 $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$

08-2 | 지수함수의 부정적분

유형 | 02

(1) $\int e^x dx = e^x + C$ ❶

(2) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ ❷ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

예 (1) $\int 5e^x dx = 5e^x + C$ (2) $\int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$

개념 NOTE

❶ $(e^x)' = e^x$

❷ $(a^x)' = a^x \ln a$

08-3 | 삼각함수의 부정적분

유형 | 03

(1) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

(2) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

(3) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

(4) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

(5) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

(6) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

참고 삼각함수의 부정적분을 구할 때에는 삼각함수 사이의 관계, 배각의 공식 등을 이용하여 삼각함수를 적분하기 쉬운 형태로 변형한 다음 적분한다.

✱ $(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$

[0934~0939] 다음 부정적분을 구하시오.

0934 $\int 2e^x dx$

0935 $\int e^{x+3} dx$

0936 $\int 4^{x+2} dx$

0937 $\int 5^{2x} dx$

0938 $\int (2^x - 1)^2 dx$

0939 $\int \dfrac{e^{3x}+1}{e^{2x}-e^x+1} dx$

[0940~0945] 다음 부정적분을 구하시오.

0940 $\int (1 - 2\cos x) dx$

0941 $\int 5\sec^2 x\, dx$

0942 $\int (2\sin x - \cos x) dx$

0943 $\int (\csc^2 x + 3x) dx$

0944 $\int \sec x(\sec x + \tan x) dx$

0945 $\int \dfrac{\sin^3 x + 4}{\sin^2 x} dx$

0946 다음은 부정적분 $\int \tan^2 x\, dx$를 구하는 과정이다.

$$\int \tan^2 x\, dx = \int (\boxed{(가)} - 1)\, dx = \boxed{(나)} - x + C$$

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 써넣으시오.

[0947~0949] 다음 부정적분을 구하시오.

0947 $\int \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx$

0948 $\int \cos x \tan x\, dx$

0949 $\int \cot^2 x\, dx$

ⓒ좋은책신사고

08-4 | 치환적분법

유형 | 04~09

(1) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$$

이와 같이 변수를 다른 변수로 바꾸어 적분하는 방법을 **치환적분법**[1]이라 한다.

참고 부정적분이 $\int f(g(x))g'(x)dx$ 꼴인 경우에는 $g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

(2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ **꼴의 부정적분**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$ [2]

예 $(x^2-3)'=2x$이므로 $\int \frac{2x}{x^2-3}dx=\int \frac{(x^2-3)'}{x^2-3}dx=\ln|x^2-3|+C$

개념 NOTE

1 치환적분법으로 구한 부정적분은 그 결과를 처음의 변수로 바꾸어 나타낸다.

* $\int f(x)dx=F(x)+C$이면
$\int f(ax+b)dx$
$=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$
(단, $a\neq0$)

2 $\frac{d}{dx}\ln|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)}$

0950 다음은 치환적분법을 이용하여 부정적분 $\int(3x+1)^5dx$를 구하는 과정이다.

$3x+1=t$로 놓으면 $x=$ (가), $\frac{dx}{dt}=$ (나)이므로

$\int(3x+1)^5dx=\int t^5\cdot$ (나) dt

$=$ (나) $\int t^5dt=$ (다) t^6+C

$=$ (다) $(3x+1)^6+C$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

[0951~0955] 다음 부정적분을 구하시오.

0951 $\int(x+5)^4dx$

0952 $\int\frac{1}{(3x+4)^2}dx$

0953 $\int\cos(2-4x)dx$

0954 $\int e^{5x-1}dx$

0955 $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

0956 다음은 치환적분법을 이용하여 부정적분 $\int\sin^2x\cos x\,dx$를 구하는 과정이다.

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=$ (가)이므로

$\int\sin^2x\cos x\,dx=\int$ (나) $dt=$ (다) t^3+C

$=$ (다) $\sin^3x+C$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

[0957~0959] 다음 부정적분을 구하시오.

0957 $\int 2x(x^2-1)^3dx$

0958 $\int xe^{x^2}dx$

0959 $\int\frac{\ln x}{x}dx$

[0960~0961] 다음 부정적분을 구하시오.

0960 $\int\frac{2x+5}{x^2+5x-1}dx$

0961 $\int\tan x\,dx$

08-5 | 유리함수의 부정적분

유형 | 10·11

(1) (분자의 차수)≥(분모의 차수)인 경우

분자를 분모로 나누어 몫과 나머지의 꼴로 나타내어 부정적분을 구한다.

(2) 분모가 인수분해되고, (분자의 차수)<(분모의 차수)인 경우

부분분수[1]로 변형하여 부정적분을 구한다.

참고 유리함수의 형태에 따라 다음과 같이 변형한다.

① $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

② $\dfrac{px+q}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$ [2]

개념 NOTE

* $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴이 아닌 유리함수를 적분할 때에는 그 함수를 간단한 유리함수의 합 또는 차로 나타내어 적분한다.

1 $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

2 x에 대한 항등식임을 이용하여 A, B의 값을 구한다.

08-6 | 부분적분법

유형 | 12·13

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int \overbrace{f(x)g'(x)dx}^{\text{그대로}}=\overbrace{f(x)g(x)}^{\text{미분}}-\int \underbrace{f'(x)g(x)dx}_{\text{그대로}}$$

적분

이와 같이 적분하는 방법을 **부분적분법**[3]이라 한다.

참고 부분적분법을 이용할 때에는 미분하기 쉬운 것을 $f(x)$, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 놓으면 계산하기 편리하다.[4]

3 피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴로 되어 있지만 치환적분법을 이용할 수 없을 때 부분적분법을 이용한다.

4 로그함수, 다항함수, 삼각함수, 지수함수의 순서로 $f(x)$를 택하면 편리하다.

[0962~0965] 다음 부정적분을 구하시오.

0962 $\displaystyle\int \frac{x+4}{x+3}dx$

0963 $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x+2}dx$

0964 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}dx$

0965 $\displaystyle\int \frac{6}{(x-3)(x+3)}dx$

0966 부정적분 $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-1}dx$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) $\dfrac{3x+1}{x^2-1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$를 만족시키는 상수 a, b의 값을 구하시오.

(2) (1)을 이용하여 부정적분 $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-1}dx$를 구하시오.

0967 다음은 부분적분법을 이용하여 부정적분 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$를 구하는 과정이다.

> $f(x)=x$, $g'(x)=$ (가) 로 놓으면
> $f'(x)=1$, $g(x)=$ (나)
> 이므로
> $\displaystyle\int x\cos x\,dx=x\,\boxed{(나)}-\int \boxed{(다)}\,dx=\boxed{(라)}+C$

위의 과정에서 (가)~(라)에 알맞은 것을 써넣으시오.

[0968~0971] 다음 부정적분을 구하시오.

0968 $\displaystyle\int xe^x dx$

0969 $\displaystyle\int \ln x\,dx$

0970 $\displaystyle\int (x+2)\sin x\,dx$

0971 $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

ⓒ좋은책신사고

B 단계 유형 Master

유형 01 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분 개념 08-1

피적분함수가 $\frac{1}{x^p}$ (p는 실수) 또는 $\sqrt[n]{x^m}$ (n은 2 이상의 자연수, m은 실수) 꼴을 포함한 경우에는

$\frac{1}{x^p}=x^{-p}$, $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$

임을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 다음을 이용하여 부정적분을 구한다.

① $n\neq-1$일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

② $n=-1$일 때, $\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

0972 대표 문제

함수 $f(x)=\int\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx$에 대하여 $f(1)=5$일 때, $f(e)$의 값은?

① $e-\frac{3}{e}$ ② $2e-\frac{3}{e}+1$ ③ $2e+\frac{3}{e}$

④ $e+\frac{3}{e}+1$ ⑤ $2e+\frac{3}{e}+1$

0973 B-

부정적분 $\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}dx$를 구하시오.

0974 B0 서술형

어떤 함수 $f(x)$의 부정적분을 구해야 하는데 잘못하여 미분하였더니 $x\sqrt{x}-1$이 되었다. $f(0)=2$일 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

0975 B+

자연수 n에 대하여 함수 $f_n(x)$가

$f_n(x)=\int x^{\frac{1}{n}}dx$, $f_n(0)=0$

일 때, $f_1(1)f_2(1)f_3(1)\cdot\cdots\cdot f_8(1)$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{7}$

④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

유형 02 지수함수의 부정적분 개념 08-2

피적분함수가 지수함수를 포함한 경우에는

$a^{x+m}=a^x\cdot a^m$ 또는 $a^{mx}=(a^m)^x$ ($a>0$, $a\neq1$, m은 실수)

과 같이 지수법칙을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 다음을 이용하여 부정적분을 구한다.

① $\int e^x dx=e^x+C$

② $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

0976 대표 문제

함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x)=\frac{x^2-e^{2x}}{x+e^x}$, $f(0)=3$

일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

0977 B-

부정적분 $\int(2^x+3^x)^2dx$를 구하면? (단, C는 적분상수이다.)

① $\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$ ② $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$

③ $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{9^x}{\ln 9}+2x+C$ ④ $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2\cdot6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$

⑤ $\frac{8^x}{\ln 4}+\frac{2\cdot6^x}{\ln 6}+\frac{27^x}{\ln 9}+C$

0978 B0

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3^{2x}\ln 9$, $f(0)=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

0979 B0

다음 조건을 모두 만족시키는 미분가능한 함수 $f(x)$는?

(가) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=(e^x+e^{-x})^2$
(나) $f(0)=0$

① $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}+2x$
② $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}+2x-2$
③ $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x$
④ $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+2x-1$
⑤ $f(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+2x$

0980 B0 서술형

등식 $\int\frac{8^x-1}{2^x-1}dx=a\cdot 4^x+b\cdot 2^x+cx+C$가 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $\frac{bc}{a}$의 값을 구하시오.

(단, C는 적분상수이다.)

유형 03 삼각함수의 부정적분

집중공략 개념 08-3

피적분함수가 삼각함수를 포함한 경우에는 삼각함수 사이의 관계, 배각의 공식 등을 이용하여 적분하기 쉬운 형태로 변형한 후 다음을 이용하여 부정적분을 구한다.

① $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$ ② $\int\cos x\,dx=\sin x+C$
③ $\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$ ④ $\int\csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
⑤ $\int\sec x\tan x\,dx=\sec x+C$ ⑥ $\int\csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

0981 대표 문제

함수 $f(x)=\int(3-2\tan^2 x)dx$에 대하여 $f(0)=-\frac{5}{4}\pi$일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

0982 B-

함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=\sin^2 x+\cos^2 x+\cot^2 x,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

일 때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)-3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하시오.

0983 B0

함수 $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. $F(0)=3$일 때, 함수 $F(x)$는?

① $F(x)=x-\sin x+3$ ② $F(x)=x+\sin x+3$
③ $F(x)=x-\cos x+4$ ④ $F(x)=x+\cos x+2$
⑤ $F(x)=x+2\cos x+1$

ⓒ좋은책신사고

0984 B0

부정적분 $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$를 구하시오.

0985 B+ 서술형

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\cos x,$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2-\sin x$$

이고 $f(0)=1$, $g(0)=0$일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(\pi)$의 값을 구하시오.

유형 04 치환적분법; 다항함수

개념 08-4

피적분함수가 $f'(x)\{f(x)\}^n$ 꼴인 경우에는 다음과 같이 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

➡ $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int f'(x)\{f(x)\}^n dx=\int t^n dt$$

0986 대표 문제

등식 $\int (2x+1)(x^2+x+4)^3 dx=a(x^2+x+4)^b+C$가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? (단, C는 적분상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

0987 B0

함수 $f(x)=\int (6x-3)(x^2-x+1)^4 dx$에 대하여 $f(1)=1$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

0988 B0

함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=(2x-7)^4,\ f(3)=0$$

일 때, $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

0989 B+ 서술형

함수 $f(x)=(ax+5)^7$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. $F(x)$의 최고차항의 계수가 16일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

유형 05 치환적분법; 무리함수

개념 08-4

피적분함수가 $\sqrt{f(x)}f'(x)$ 또는 $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ 꼴인 경우에는 다음과 같이 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

➡ $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int \sqrt{f(x)}f'(x)dx=\int \sqrt{t}\,dt$$

0990 대표 문제

함수 $f(x)=\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

0991 B0

등식 $\int (x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx=a(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}+C$가 성립할 때, 상수 a의 값은? (단, C는 적분상수이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

0992 B0

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, $f(\sqrt{5})=-1$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

0993 B+

부정적분 $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$를 구하시오.

유형 06 치환적분법; 지수함수 개념 08-4

피적분함수가 $f(e^x)\cdot e^x$ 꼴인 경우에는 다음과 같이 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

➡ $e^x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$\int f(e^x)\cdot e^x dx=\int f(t)dt$$

0994 대표 문제

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $e^x(e^x+1)^3$이고, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 4)$를 지날 때, $f(\ln 3)$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

0995 B0 서술형

함수 $f(x)=\int e^{\cos x}\sin x\,dx$에 대하여 $f(0)=-e$일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하시오.

0996 B0

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

(단, C는 적분상수이다.)

보기

ㄱ. $\int e^{2x-2}dx=\frac{1}{2}e^{2x-2}+C$

ㄴ. $\int e^x\sqrt{e^x+3}\,dx=\frac{2}{3}(e^x+3)\sqrt{e^x+3}+C$

ㄷ. $\int x\cdot 5^{x^2+3}dx=\frac{5^{x^2+3}}{2\ln 5}+C$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

0997 B+

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

(가) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}=3^{x+1}\sqrt{3^x+8}$

(나) $f(0)=\frac{18}{\ln 3}$

유형 07 치환적분법; 로그함수 집중공략 개념 08-4

피적분함수가 $f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$ 꼴인 경우에는 다음과 같이 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

➡ $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\int f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx=\int f(t)dt$$

0998 대표 문제

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=5$가 성립할 때, $f(e)$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

0999 B-

등식 $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}dx=a\sqrt{\ln x+5}+C$가 성립할 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, C는 적분상수이다.)

1000 B0

함수 $f(x)$가 $xf'(x)=\ln 3x$를 만족시키고 $f\left(\frac{1}{3}\right)=0$일 때, 함수 $f(x)$는?

① $f(x)=\frac{1}{3}(\ln 3x)^2$ ② $f(x)=\frac{1}{2}(\ln 3x)^2$
③ $f(x)=(\ln 3x)^2$ ④ $f(x)=2(\ln 3x)^2$
⑤ $f(x)=3(\ln 3x)^2$

유형 08 치환적분법; 삼각함수

집중공략 개념 08-4

피적분함수가 $f(\sin x)\cos x$ 꼴인 경우에는 다음과 같이 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

➡ $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(t)\,dt$$

한편 치환해야 할 식이 보이지 않을 때에는 삼각함수 사이의 관계, 배각의 공식 등을 이용하여 주어진 피적분함수를 변형한다.

1001 대표 문제

등식 $\int \sin^3 x\,dx=a\cos^3 x+b\cos x+C$가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, C는 적분상수이다.)

① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

1002 B0

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(1+\cos x)^2\sin x$이고 $f(0)=0$일 때, $f(\pi)$의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

1003 B0

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\tan x\sec^2 x$이고 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, a\right)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.

1004 B0 서술형

함수 $f(x)=\int 4x\cos(x^2-2)dx$에 대하여 $f(\sqrt{2})=1$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오.

유형 09 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 꼴의 부정적분

집중공략 개념 08-4

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

1005 대표 문제

함수 $f(x)=\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값은?

① $\ln 6+1$ ② $\ln 6+2$ ③ $\ln 7+1$
④ $\ln 7+2$ ⑤ $\ln 7+3$

1006 B0

함수 $f(x)=\int \frac{-\sin x}{1+\cos x}dx$에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$일 때, $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)$의 값은?

① $1-\ln 2$ ② $1-2\ln 2$ ③ $2-\ln 2$
④ $2-2\ln 2$ ⑤ $3-\ln 2$

1007 B+ 서술형

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$, $\frac{f'(x)}{f(x)}=5$를 만족시키고, $f(0)=e^2$일 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

유형 10 유리함수의 부정적분 ; (분자의 차수)≥(분모의 차수) 개념 08-5

피적분함수가 (분자의 차수)≥(분모의 차수)인 유리함수인 경우에는 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지의 꼴로 변형한 후 부정적분을 구한다.

1008 대표 문제

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{x+2}{x+1}$이고 $f(0)=3$일 때, 함수 $f(x)$는?

① $f(x)=\ln|x+1|+3$
② $f(x)=x-\ln|x+1|+3$
③ $f(x)=x+\ln|x+1|+3$
④ $f(x)=2x-\ln|x+1|+3$
⑤ $f(x)=2x+\ln|x+1|+3$

1009 B0

부정적분 $\int \frac{2x^2-x+5}{x-1}dx$를 구하시오.

1010 B+

함수 $f(x)=\frac{3-x}{1+x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 부정적분 $\int g(x)dx$를 구하시오.

유형 11 유리함수의 부정적분 ; (분자의 차수)<(분모의 차수) 개념 08-5

피적분함수가 (분자의 차수)<(분모의 차수)인 유리함수이고 분모가 인수분해되는 경우에는 다음과 같이 피적분함수를 간단한 유리함수의 합 또는 차로 나타낸 후 부정적분을 구한다.

➡ $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

1011 대표 문제

함수 $f(x)=\int \frac{4}{x^2-4}dx$에 대하여 $f(0)=0$일 때, $f(4)$의 값은?

① $-\ln 3$ ② $-\ln 2$ ③ 0
④ $\ln 2$ ⑤ $\ln 3$

1012 B0

함수 $f(x)=\int \frac{3-x}{x^2+x-2}dx+\int \frac{x}{x^2+x-2}dx$에 대하여 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$일 때, $f(2)$의 값은?

① $1-2\ln 2$ ② $1-\ln 2$ ③ 0
④ $\ln 2$ ⑤ $2\ln 2$

ⓒ좋은책신사고

1013 B+ 서술형

등식

$$\int \frac{4x}{x^2-3x+2}dx=a\ln|x-1|+b\ln|x-2|+C$$

가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

(단, C는 적분상수이다.)

유형 12 부분적분법

집중공략 개념 08-6

피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴로 되어 있고 치환적분법을 이용할 수 없을 때, 미분하기 쉬운 것을 $f(x)$, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 이용한다.

➡ $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

1014 대표 문제

함수 $f(x)=\int xe^{-x}dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f(-1)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

1015 B0

등식

$$\int x\sin 2x\,dx=ax\cos 2x+b\sin 2x+C$$

가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

(단, C는 적분상수이다.)

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

1016 B+

$x>0$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여

$$F(x)=xf(x)-x^2\ln x,\ f(1)=e-1$$

이 성립할 때, $f(e)$의 값을 구하시오.

유형 13 부분적분법 ; 부분적분법을 2번 적용하는 경우

개념 08-6

부분적분법을 한 번 적용하여 부정적분을 구할 수 없을 때에는 부분적분법을 한 번 더 적용한다.

1017 대표 문제

부정적분 $\int e^x\cos x\,dx$를 구하시오.

1018 B0

부정적분 $\int x^2\sin x\,dx$를 구하시오.

1019 B+

함수 $f(x)$가 $f'(x)=(\ln x)^2$을 만족시키고 $f(1)=2$일 때, $f(e)$의 값은?

① 2 ② e ③ 3
④ 4 ⑤ $2e$

B-

1020

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3e^x-4$이고 이 곡선이 원점을 지날 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

1021

등식

$$\int(x-1)(x^2-2x+3)^4dx=\frac{1}{a}(x^2-2x+3)^b+C$$

가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

(단, C는 적분상수이다.)

1022 서술형

함수 $f(x)=\int\sqrt[3]{11-3x}\,dx$에 대하여 $f\left(\frac{11}{3}\right)=7$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

1023

부정적분 $\int\frac{3x^2}{x^3+1}\ln(x^3+1)dx$를 구하면?

(단, C는 적분상수이다.)

① $\frac{1}{4}\{\ln(x^3+1)\}^2+C$ ② $\frac{1}{2}\{\ln(x^3+1)\}^2+C$
③ $\{\ln(x^3+1)\}^2+C$ ④ $2\{\ln(x^3+1)\}^2+C$
⑤ $3\{\ln(x^3+1)\}^2+C$

1024 동영상

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$이고 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$일 때, $f(-1)$의 값은?

① $\frac{1}{5}\ln 2$ ② $\frac{2}{5}\ln 2$ ③ $\frac{3}{5}\ln 2$
④ $\frac{4}{5}\ln 2$ ⑤ $\ln 2$

B0

1025

함수 $f(x)=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$에 대하여 $f(1)=\frac{2}{3}$일 때, $f(3)$의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

1026 교육청 기출 동영상

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속일 때, 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & (x\le 1) \\ \frac{1}{x} & (x>1) \end{cases}$$

이다. $f(-1)=e+\frac{1}{e^2}$일 때, $f(e)$의 값은?

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
④ $e+1$ ⑤ $e+2$

ⓒ좋은책신사고

1027

동영상

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\frac{x-4}{(x+2)^3}$이고 $f(0)=\frac{3}{4}$일 때, 다음 중 곡선 $y=f(x)$ 위의 점의 좌표인 것은?

① $(1,\ -1)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$
④ $\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$ ⑤ $\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$

1028

함수 $f(x)=\int \frac{5^{\ln x+2}}{x}dx$에 대하여 $f(1)=\frac{25}{\ln 5}$일 때, 방정식 $f(x)=\frac{1}{\ln 5}$의 해는?

① $x=\frac{1}{e^2}$ ② $x=\frac{1}{e}$ ③ $x=\frac{1}{e-1}$
④ $x=e$ ⑤ $x=e^2-1$

1029

함수 $f(x)=\int(4x+2)\sin(x^2+x)dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오.

1030 서술형

함수 $f(x)=\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$일 때, $f(\pi)$의 값을 구하시오.

1031

동영상

등식

$$\int \sec^4 x\,dx=\frac{1}{a}\tan^3 x+b\tan x+C$$

가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

(단, C는 적분상수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

1032

함수 $f(x)=\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^x}dx+\int \frac{2^x\ln 2}{2^x+1}dx$에 대하여 $f(0)=2\ln 2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

1033 교육청 기출

동영상

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\neq 0$인 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$
(나) $f(0)=0$

$\{f(1)\}^3$의 값은?

① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $1+2\ln 2$
④ $4\ln 2$ ⑤ $1+3\ln 2$

1034 교육청 기출 동영상

양의 실수를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x$, $h(x)=\ln x$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $g(x)$가 있다. 이때 $g(e)$의 값은?

(가) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=h(x)$
(나) $g(1)=-1$

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

B+

1035 동영상

함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

(가) $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$인 점에서 직선 $y=1$에 접한다.
(나) $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\frac{x+1}{x^3}$

1036 서술형 동영상

$0\le x\le \pi$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\cos 2x-3\sin x+1$이고 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{\pi}{6}$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오.

1037

다음 조건을 모두 만족시키는 미분가능한 함수 $f(x)$를 구하시오.

(가) $f(0)=2$
(나) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}=\frac{4(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}$

1038 교육청 기출

구간 $(0, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양수 x에 대하여 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$
(나) $F(1)=2e$

$F(3)$의 값은?

① $\frac{1}{4}e^3$ ② $\frac{1}{2}e^3$ ③ e^3
④ $2e^3$ ⑤ $4e^3$

1039 도전 동영상

함수 $f(x)=\int e^x\sin x\,dx$에 대하여 $f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, 부등식 $f(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는? (단, $0\le x<2\pi$)

① $0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$
② $0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<x<2\pi$
③ $\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<x<2\pi$
④ $\frac{\pi}{2}<x<\pi$
⑤ $\frac{\pi}{2}<x<2\pi$

ⓒ좋은책신사고

기본 Master A 단계

09-1 | 정적분의 계산

유형 | 01~07

개념 NOTE

(1) 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

* $\int_a^a f(x)dx=0$,
$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

(2) 정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$ (복호동순)

③ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ [1]

[1] ③은 a, b, c의 대소에 상관없이 성립한다.

(3) 우함수와 기함수의 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속일 때, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f(x)$가 우함수[2], 즉 $f(-x)=f(x)$이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

② $f(x)$가 기함수[3], 즉 $f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

[2] 우함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

[3] 기함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(4) 주기함수의 정적분

주기가 p인 연속함수 $f(x)$[4]에 대하여

① $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$ ② $\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_b^{b+p} f(x)dx$

[4] 함수 $f(x)$의 주기가 p이면
$f(x+p)=f(x)$

[1040~1045] 다음 정적분의 값을 구하시오.

1040 $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx$

1041 $\int_1^7 \frac{1}{x}dx$

1042 $\int_{-1}^3 e^x dx$

1043 $\int_4^5 2^x dx$

1044 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

1045 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx$

[1046~1049] 다음 정적분의 값을 구하시오.

1046 $\int_1^8 4\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

1047 $\int_1^2 (3^x-2^x)dx$

1048 $\int_{-2}^4 (e^x+1)dx+\int_{-2}^4 (e^x-1)dx$

1049 $\int_0^{\pi} (\cos x+x)dx+\int_{\pi}^{2\pi} (\cos x+x)dx$

[1050~1051] 다음 정적분의 값을 구하시오.

1050 $\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin x\,dx$

1051 $\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx$

1052 연속함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고 $\int_1^3 f(x)dx=5$일 때, $\int_1^{11} f(x)dx$의 값을 구하시오.

09-2 | 치환적분법을 이용한 정적분

유형 | 08~12

개념 NOTE

(1) 치환적분법을 이용한 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

참고 $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx$ 꼴의 정적분은 $g(x)=t$로 놓으면

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)dt$$

예 $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$에서 $x+1=t$로 놓으면[1] $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx=\int_1^2 \sqrt{t}\,dt$

[1] $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고,
$x=0$일 때 $t=1$,
$x=1$일 때 $t=2$

(2) 삼각함수를 이용한 치환적분법

① 피적분함수가 $\sqrt{a^2-x^2}$ (a는 상수) 꼴 ➡ $x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 치환

② 피적분함수가 $\frac{1}{x^2+a^2}$ (a는 상수) 꼴 ➡ $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 치환

[1053~1059] 다음 정적분의 값을 구하시오.

1053 $\int_0^1 (3x-1)^5 dx$

1054 $\int_2^4 \sqrt{5-x}\,dx$

1055 $\int_{-1}^3 x(x^2+1)^3 dx$

1056 $\int_1^2 e^{2x+1}\,dx$

1057 $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

1058 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$

1059 $\int_{-2}^0 \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx$

1060 다음은 정적분 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$의 값을 구하는 과정이다.

$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=$ (가)

또한 $x=0$일 때 $\theta=$ (나), $x=1$일 때 $\theta=$ (다)이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{(나)}^{(다)} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot(가)\,d\theta$$
$$=\int_{(나)}^{(다)} \cos^2\theta\,d\theta$$

이때 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{(나)}^{(다)} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{(나)}^{(다)} (\cos 2\theta+1)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\Big[(라)\Big]_{(나)}^{(다)}=(마)$$

위의 과정에서 (가)~(마)에 알맞은 것을 써넣으시오.

1061 정적분 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

정답 및 풀이 117쪽

09-3 | 부분적분법을 이용한 정적분

유형 | 13

닫힌구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

개념 NOTE

* 미분하기 쉬운 것을 $f(x)$, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 놓는다.

09-4 | 정적분으로 정의된 함수

유형 | 14~20

(1) 정적분으로 정의된 함수의 미분

① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, a는 실수)

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$ (단, a는 실수)

(2) 정적분으로 정의된 함수의 극한

① $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=f(a)$

② $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

* 정적분의 위끝과 아래끝이 모두 상수이면 정적분의 결과도 상수이지만, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있으면 정적분의 결과는 그 변수에 대한 함수이다.

[1062~1065] 다음 정적분의 값을 구하시오.

1062 $\displaystyle\int_0^2 (x-1)e^x dx$

1063 $\displaystyle\int_1^{e^2} \ln x\, dx$

1064 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx$

1065 $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} (x+2)\cos x\, dx$

[1066~1069] 다음을 구하시오.

1066 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x t\sin t\, dt$

1067 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^x \frac{2t+5}{t^2+2t-3}dt$

1068 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+1} \ln t\, dt$

1069 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x-2}^x e^t dt$

[1070~1072] 임의의 실수 x에 대하여 다음 등식이 성립할 때, $f(x)$를 구하시오.

1070 $\displaystyle\int_\pi^x f(t)dt=2\cos x+2$

1071 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=e^x-3^x$

1072 $\displaystyle\int_1^x f(t)dt=\ln x+\frac{1}{x}-1\ (x>0)$

[1073~1076] 다음 극한값을 구하시오.

1073 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_\pi^{x+\pi}\cos t\, dt$

1074 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_e^{x+e} t\ln t\, dt$

1075 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x e^t dt$

1076 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^x t^2\sin t\, dt$

B 단계 유형 Master

유형 01 유리·무리함수의 정적분 개념 09-1

$F'(x)=f(x)$일 때, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $f(x)$를 적분하여 $F(x)$를 구한다.
(ii) $F(b)$, $F(a)$의 값을 구한다.
(iii) $F(b)-F(a)$를 계산한다.

1077 대표 문제

정적분 $\int_1^e \frac{3x^3-4x^2+1}{x}dx$의 값은?

① e^3-2e^2+1 ② e^3-2e^2+2
③ e^3-e^2+1 ④ e^3-e^2+2
⑤ e^3+e^2+2

1078 B0 서술형

$\int_2^4 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx=a+b\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

1079 B0

$\int_3^5 \frac{2}{x^2-1}dx=\ln k$일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

1080 B+

함수 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$에 대하여

$$\int_0^2 f(x)dx-\int_4^2 f(y)dy-\int_1^4 f(z)dz$$

의 값을 구하시오.

유형 02 지수함수의 정적분 개념 09-1

피적분함수가 지수함수를 포함한 경우에는 지수법칙을 이용하여 피적분함수를 간단하게 변형한 후 정적분의 값을 구한다.

1081 대표 문제

정적분 $\int_0^3 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^3 \frac{1}{e^x+1}dx$의 값은?

① e^3-5 ② e^3-4 ③ e^3-3
④ e^3+3 ⑤ e^3+4

1082 B0

정적분 $\int_{-1}^0 \sqrt{e^{2x}+6e^x+9}\,dx$의 값을 구하시오.

1083 B+ 서술형

$\int_0^1 (2^x-1)(4^x+2^x+1)dx=\frac{a}{3\ln 2}-b$일 때, 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

유형 03 삼각함수의 정적분

개념 09-1

피적분함수가 삼각함수를 포함한 경우에는 삼각함수 사이의 관계, 배각의 공식 등을 이용하여 피적분함수를 간단하게 변형한 후 정적분의 값을 구한다.

1084 대표 문제

정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,dx$의 값은?

① $\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ ② $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ π

1085 B0 서술형

$\int_0^k \left(\frac{1}{1+\tan^2 x}+\frac{1}{1+\cot^2 x}\right)dx=5$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

1086 B+

정적분 $\int_0^a \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx-\int_0^a \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$의 값이 1일 때, 상수 a의 값은? $\left(단,\ 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{10}$ ③ $\frac{\pi}{6}$
④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$

유형 04 정적분의 계산 ; 구간에 따라 다르게 정의된 함수

개념 09-1

구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분의 값을 구할 때에는 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

➡ 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\ge c) \\ h(x) & (x\le c)\end{cases}$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $a<c<b$일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c h(x)dx+\int_c^b g(x)dx$$

1087 대표 문제

함수 $f(x)=\begin{cases} \sin x & (x\ge 0) \\ e^x-1 & (x\le 0)\end{cases}$에 대하여 정적분 $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$의 값을 구하시오.

1088 B0

모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \sin x+a & \left(x\ge\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \left(x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

일 때, 정적분 $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.)

유형 05 정적분의 계산 ; 절댓값 기호를 포함한 함수

집중공략 개념 09-1

절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 함수를 절댓값 기호 없이 나타낸다.

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$임을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

1089 대표 문제

정적분 $\int_{-1}^{1} |e^x-1|\,dx$의 값을 구하시오.

1090 B0

$\int_0^{2\pi}(|\sin x|+k)dx=10$일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$
④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

1091 B+

두 함수 $f(x)=|x|$, $g(x)=\sin x-\cos x$에 대하여 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f\circ g)(x)dx$의 값은?

① $\sqrt{2}-1$ ② $2\sqrt{2}-1$ ③ $2(\sqrt{2}-1)$
④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $2(\sqrt{3}-1)$

유형 06 우함수와 기함수의 정적분

개념 09-1

$\int_{-a}^{a}f(x)dx$와 같이 $-a$에서 a까지의 정적분은 $f(x)$가 우함수인지 기함수인지 파악한 후, 다음을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

① $f(x)$가 우함수 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^{a}f(x)dx$

② $f(x)$가 기함수 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

1092 대표 문제

정적분 $\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\sin 3x)dx$의 값은?

① $\frac{1}{3}\pi^3$ ② $\frac{2}{3}\pi^3$ ③ π^3
④ $\frac{4}{3}\pi^3$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi^3$

1093 B0

정적분 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x\cos 2x+\sin x)dx$의 값을 구하시오.

1094 B0 서술형

함수 $f(x)=e^x+e^{-x}$에 대하여 정적분

$$\int_{-\ln 2}^{5}f(x)dx+\int_5^{\ln 2}f(x)dx$$

의 값을 구하시오.

유형 07 주기함수의 정적분

집중공략

개념 09-1

주기가 p인 함수 $f(x)$, 즉 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$인 연속함수 $f(x)$의 정적분의 값은 다음을 이용하여 구한다.

① $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p}f(x)dx$

② $\int_a^{a+p}f(x)dx=\int_b^{b+p}f(x)dx$

1095 대표 문제

정적분 $\int_0^{4\pi}|\cos x|dx$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

ⓒ좋은책신사고

1096 B0

임의의 실수 a에 대하여 정적분 $\int_{a}^{a+4\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

1097 B+ 서술형

함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 정적분 $\int_{-1}^{7} f(x)dx$의 값을 구하시오.

(가) $-1\le x\le 1$에서 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$

유형 08 치환적분법을 이용한 정적분 ; 유리·무리함수

집중공략 개념 09-2

피적분함수가 $f(g(x))g'(x)$ 또는 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴인 정적분은 치환적분법을 이용하여 구한다. 이때 적분 구간이 변함에 주의한다.

➲ $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx$에서 $g(x)=t$로 놓으면

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)dt$$

1098 대표 문제

정적분 $\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

1099 B0

$\int_{1}^{3} \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx=\ln k$일 때, 상수 k의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

1100 B0

$\int_{1}^{k} \sqrt{2x-1}\,dx=\frac{26}{3}$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

유형 09 치환적분법을 이용한 정적분 ; 지수·로그함수

개념 09-2

1101 대표 문제

정적분 $\int_{1}^{e^2} \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$의 값을 구하시오.

1102 B0

$\int_{-a}^{a} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx=7$일 때, 상수 a의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

1103 B+ 서술형

함수 $f(n)=\int_1^n \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} f(n)$의 값을 구하시오.

유형 10 치환적분법을 이용한 정적분; 삼각함수 개념 09-2

1104 대표 문제

정적분 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cot^2 x)\cos x\,dx$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 0
④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}+1$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2$

1105 B0

함수 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$에 대하여 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f'(\cos x)\sin x\,dx$의 값을 구하시오.

1106 B+

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=k\ln 2$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

유형 11 삼각함수를 이용한 치환적분법 ; $\sqrt{a^2-x^2}$ 꼴 개념 09-2

피적분함수가 $\sqrt{a^2-x^2}$ (a는 상수) 꼴이면

$x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

로 치환한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

1107 대표 문제

정적분 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$의 값은?

① $\frac{\pi}{5}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

1108 B0 서술형

정적분 $\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$의 값을 구하시오.

1109 B0

$\int_0^{\frac{5}{2}}\frac{x+1}{\sqrt{25-x^2}}dx=a\pi+b\sqrt{3}+c$일 때, 유리수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

ⓒ좋은책신사고

유형 12 삼각함수를 이용한 치환적분법 ; $\frac{1}{x^2+a^2}$ 꼴

개념 09-2

피적분함수가 $\frac{1}{x^2+a^2}$ (a는 상수) 꼴이면

$$x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

로 치환한 후 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$임을 이용한다.

1110 대표 문제

정적분 $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}dx$의 값은?

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{9}$ ③ $\frac{\pi}{12}$
④ $\frac{\pi}{15}$ ⑤ $\frac{\pi}{18}$

1111 B0

$\int_{-3}^{3}\frac{1}{3+x^2}dx=k\pi$일 때, 실수 k에 대하여 $27k^2$의 값을 구하시오.

1112 B+ 서술형

$\int_0^a\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

유형 13 부분적분법을 이용한 정적분

집중공략 개념 09-3

피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴로 되어 있고 치환적분법을 이용할 수 없을 때, 미분하기 쉬운 것을 $f(x)$, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 놓고 다음과 같이 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

1113 대표 문제

정적분 $\int_0^{\pi}(x+1)\sin\frac{x}{2}dx$의 값을 구하시오.

1114 B0

등식 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=ae^{\frac{\pi}{2}}+b$가 성립할 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

1115 B+

함수 $f(t)=\int_0^1(3tx-e^x)^2dx$의 최솟값은?

① $\frac{1}{2}e^2$ ② $\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$
④ e^2-3 ⑤ e^2-7

유형 14 정적분을 포함한 등식 ; 아래끝과 위끝이 상수일 때

집중공략 개념 09-4

$f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$ 꼴의 등식이 주어지면 $f(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\int_a^b f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓는다.

(ii) $f(x)=g(x)+k$를 (i)의 식에 대입하여 k의 값을 구한다.

(iii) k의 값을 $f(x)=g(x)+k$에 대입하여 $f(x)$를 구한다.

1116 대표 문제

$x>0$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{x}+\int_1^e f(t)dt$$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

1117 B0 서술형

함수 $f(x)$가

$$f(x)=e^x+\int_0^1 e^{-t}f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

1118 B0

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\cos x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$$

를 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

유형 15 정적분을 포함한 등식 ; 아래끝 또는 위끝에 변수가 있을 때

집중공략 개념 09-4

$\int_a^x f(t)dt=g(x)$ 꼴의 등식에서 $f(x)$를 구할 때에는 양변을 x에 대하여 미분한다. 이때 주어진 등식이 미정계수를 포함하고 있으면 주어진 등식에 $x=a$를 대입하여 $\int_a^a f(t)dt=g(a)=0$임을 이용한다.

1119 대표 문제

$x>0$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_e^x f(t)dt=x\ln x-x+k$$

를 만족시킬 때, $k+f(e^2)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1120 B-

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\int_0^x f(t)dt=x(\sin x+\cos x)$$

를 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오.

1121 B0

함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여

$$\int_{\ln 4}^x e^t f(t)dt=e^{2x}-ae^x+8$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

ⓒ좋은책신사고

유형 16 정적분을 포함한 등식; 아래끝 또는 위끝과 피적분함수에 변수가 있을 때

집중공략 개념 09-4

$\int_a^x (x\pm t)f(t)dt=g(x)$ 꼴의 등식에서 $f(x)$를 구할 때에는 좌변을

$$\int_a^x (x\pm t)f(t)dt=x\int_a^x f(t)dt\pm\int_a^x tf(t)dt \text{ (복호동순)}$$

와 같이 피적분함수에 x가 포함되지 않도록 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다. 이때 주어진 등식이 미정계수를 포함하고 있으면 주어진 등식에 $x=a$를 대입하여 $\int_a^a f(t)dt=0$임을 이용한다.

1122 대표 문제

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt=e^{3x}+ax-1$$

을 만족시킬 때, $a+f(\ln 2)$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.)

1123 B0

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\int_0^x (x-t)f'(t)dt=\sin x\cos x-x$$

를 만족시킨다. $f(0)=1$일 때, 함수 $f(x)$는?

① $f(x)=\sin x+1$ ② $f(x)=\cos x$
③ $f(x)=\sin 2x+1$ ④ $f(x)=\cos 2x$
⑤ $f(x)=\cos 2x+x$

1124 B+

모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\int_0^x f(t)dt=ex+\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, $f(x)>0$)

유형 17 정적분으로 정의된 함수의 극대·극소

개념 09-4

$f(x)=\int_a^x g(t)dt$와 같이 정의된 함수 $f(x)$의 극값에 대한 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

(i) 양변을 x에 대하여 미분한다. ➡ $f'(x)=g(x)$
(ii) $f'(b)=0$을 만족시키는 b의 값을 구한다.
➡ $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $f(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖는다.

1125 대표 문제

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)=\int_0^x (2\sin t-1)\cos t\,dt$의 극솟값을 구하시오.

1126 B0

$x>0$일 때, 함수 $f(x)=\int_1^x \frac{5-t}{t}dt$는 $x=a$에서 극댓값 b를 갖는다. 이때 $a+b$의 값은?

① $3\ln 5+1$ ② $4\ln 5$ ③ $4\ln 5+1$
④ $5\ln 5$ ⑤ $5\ln 5+1$

유형 18 정적분으로 정의된 함수의 최대·최소

개념 09-4

주어진 등식을 미분하여 $f(x)$ 또는 $f'(x)$를 구한 다음 $f(x)$의 최댓값, 최솟값을 구한다.

1127 대표 문제

$0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)=\int_0^x \sqrt{t}(t-1)dt$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

1128 B0 서술형

함수 $f(x)=\int_0^x (e^t-2)(e^t+2)\,dt$의 최솟값을 구하시오.

1129 B0

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, 함수 $f(x)=\int_0^x \sin 2t(2\cos 2t-1)\,dt$는 $x=a$에서 최댓값 b를 갖는다. 이때 $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

유형 19 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)\,dt$ 꼴 개념 09-4

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}$$
$$=F'(a)=f(a)$$

1130 대표 문제

함수 $f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h} f(t)\,dt$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

1131 B0

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}(\ln x+xe^x)\,dx$의 값은?

① 1 ② e ③ $2e$
④ e^2 ⑤ $3e$

1132 B+ 서술형

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h} x\sin x\,dx$의 값을 구하시오.

유형 20 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$ 꼴 개념 09-4

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$
$$=F'(a)=f(a)$$

1133 대표 문제

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}} t(3^t+\ln t)\,dt$의 값을 구하시오.

1134 B0

함수 $f(x)=\frac{\cos x}{\sin 2x+1}$에 대하여 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t)\,dt$의 값은?

① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{16}$

1135 B0

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^3-8}\int_2^x t^2e^t\,dt$의 값은?

① $\frac{1}{4}e^2$ ② $\frac{1}{3}e^2$ ③ $\frac{1}{2}e^2$
④ $\frac{1}{4}e^3$ ⑤ $\frac{1}{3}e^3$

ⓒ좋은책신사고

문제 풀이 동영상

B-

1136

정적분 $\int_1^2 \frac{3x^2+x-1}{x^2}dx-3\int_1^2 \frac{x^2-x+1}{x^2}dx$의 값을 구하시오.

1137

$\int_0^1 3^{2x}dx=\frac{k}{\ln 9}$일 때, 상수 k의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

1138

정적분 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\cos \pi x+\sin \pi x)dx$의 값을 구하시오.

1139

연속함수 $f(x)$에 대하여 다음 중 정적분 $\int_0^2 f(3-x)dx$의 값과 항상 같은 것은?

① $\int_0^2 f(x)dx$ ② $\int_1^3 f(x)dx$ ③ $\int_0^3 f(x)dx$
④ $2\int_0^2 f(x)dx$ ⑤ $3\int_1^3 f(x)dx$

1140

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (t-1)e^t dt$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

B0

1141 서술형

동영상

$0<x\le\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots$$

일 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$의 값을 구하시오.

1142

$x>-\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}(\sin x+\cos x) & \left(x\ge\frac{\pi}{4}\right)\\ \sec^2 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

일 때, 정적분 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x)dx$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ $1+\sqrt{2}$ ⑤ $2+\sqrt{2}$

1143

동영상

정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |2\cos 2x-1|\,dx$의 값을 구하시오.

1144 서술형

동영상

자연수 n에 대하여 정적분 $\int_{2n\pi}^{(2n-1)\pi} \sin x\,dx$의 값을 구하시오.

1145

동영상

정적분 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} |\sin 2x|\,dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1146 서술형

$\int_{-1}^{1} \frac{4x+6}{x^2+3x+5}\,dx=\ln k$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

1147

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x\,dx=\frac{q}{p}$일 때, 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

1148

동영상

정적분 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+1}\,dx$의 값을 구하시오.

1149 평가원 기출

$\int_1^e x(1-\ln x)\,dx$의 값은?

① $\frac{1}{4}(e^2-7)$ ② $\frac{1}{4}(e^2-6)$ ③ $\frac{1}{4}(e^2-5)$
④ $\frac{1}{4}(e^2-4)$ ⑤ $\frac{1}{4}(e^2-3)$

1150 수능 기출

동영상

연속함수 $f(x)$가

$$f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)\,dx$의 값은?

① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

ⓒ좋은책신사고

1151

함수 $f(x)=\int_0^x \frac{2-t}{e^t}dt$의 최댓값을 구하시오.

B+

1152 수능 기출

함수 $f(x)$가

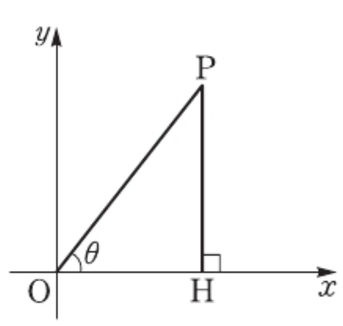
$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

일 때, $(f\circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은?

① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$
④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

1153 교육청 기출

그림과 같이 제1사분면에 있는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle POH=\theta$라 하자. $\frac{\overline{OH}}{\overline{PH}}$를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은?



(단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}\ln 3$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 6$
④ $2\ln 3$ ⑤ $2\ln 6$

1154 도전

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f'(x)=\frac{1}{(1+\sin^2 x)^3},\ g(x)=2\sin x\cos x$$

일 때, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx$의 값은?

① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{3}{8}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

1155 서술형

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x>0$에서 등식

$$e^x f(x)=e^x\ln x+\int_1^x e^t f(t)dt$$

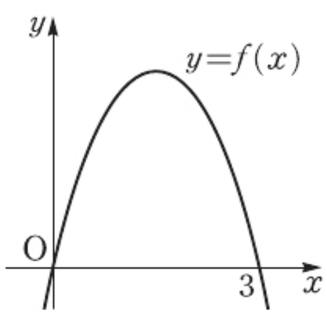
를 만족시킬 때, $f(e^2)$의 값을 구하시오.

1156 도전

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $x>0$에서 정의되는 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x \{e^{f(t)}-1\}dt$$

를 만족시킨다. 이때 $g(x)$의 최댓값은?



① $g\left(\frac{1}{3}\right)$ ② $g(1)$ ③ $g(2)$
④ $g\left(\frac{5}{2}\right)$ ⑤ $g(3)$

REVERETOILE.BLOG.ME
COPYRIGHT©BY PARK KYUNG MI ALL RIGHTS RESERVED.

ⓒ좋은책신사고

기본 Master A 단계

10-1 | 정적분과 급수의 관계

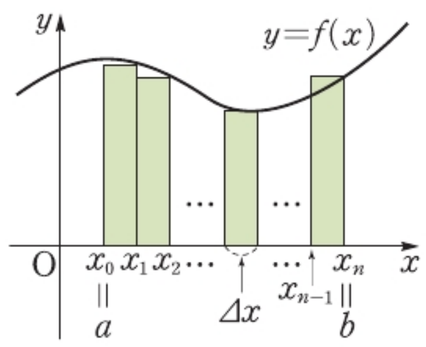
유형 | 01·02

(1) 정적분과 급수의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

$$\left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$



(2) 다음과 같이 여러 가지 급수를 정적분으로 나타낼 수 있다.

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)dx$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(a+x)dx$

참고 급수를 정적분으로 나타낼 때에는 다음과 같은 순서로 한다.
(i) 적분변수를 정한다.[1] (ii) 적분 구간을 구한다. (iii) 정적분으로 나타낸다.

개념 NOTE

* 어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때, 이 도형을 여러 개의 기본 도형으로 나누어 그 기본 도형의 넓이나 부피의 합의 극한값으로 구하는 방법을 **구분구적법**이라 한다.

1 무엇을 적분변수로 정하느냐에 따라 여러 가지 정적분으로 나타낼 수 있다.

1157 다음은 정적분을 이용하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$을 구하는 과정이다.

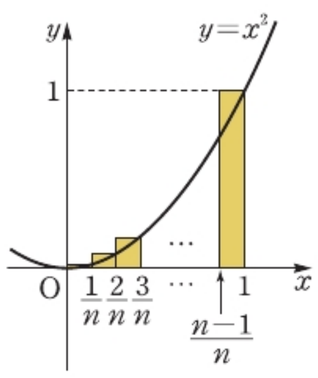
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

이때 $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\Delta x=$ (가), $x_k=$ (나)

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=\int_0^{\text{(다)}}x^2dx=\frac{1}{3}$$



위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

1158 정적분을 이용하여 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{4}{n}\right)^3+\left(\frac{6}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^3\right\}$$

을 구하시오.

1159 다음은 정적분을 이용하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$를 구하는 과정이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$$

이때 $f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$로 놓으면

$\Delta x=$ (가), $x_k=$ (나)

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=\int_0^{\text{(다)}}\sin x\,dx=2$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

1160 정적분을 이용하여 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$$

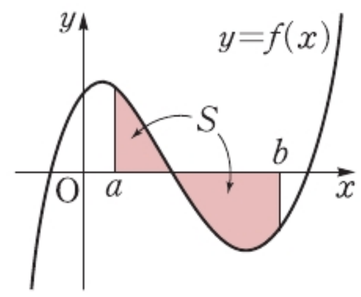
을 구하시오.

10-2 | 곡선과 좌표축 사이의 넓이

유형 | 03·04·05·08

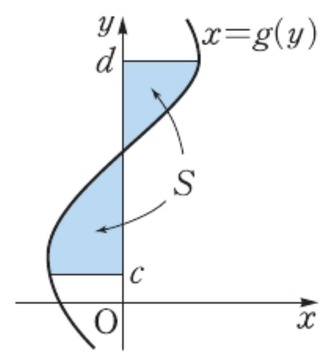
(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$ ❶



(2) 함수 $g(y)$가 닫힌구간 $[c, d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$



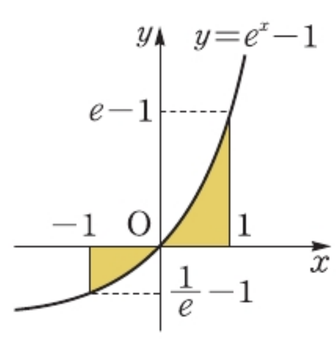
개념 NOTE

❶ 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)$의 값이 양수인 경우와 음수인 경우가 모두 있을 때에는 $f(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 넓이를 구한다.

1161 다음은 곡선 $y=e^x-1$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 과정이다.

오른쪽 그림에서 주어진 곡선은 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 y (가) 0이고, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 y (나) 0이다.
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(\boxed{(다)})dx+\int_{0}^{1}(\boxed{(라)})dx$$
$$=\boxed{(마)}$$

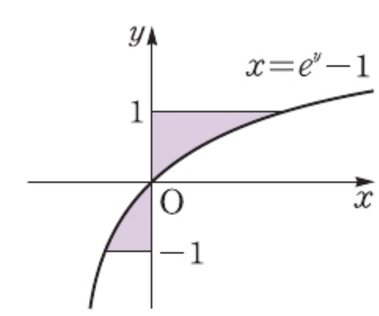


위의 과정에서 (가)~(마)에 알맞은 것을 써넣으시오.

1166 다음은 곡선 $x=e^y-1$과 y축 및 두 직선 $y=-1$, $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 과정이다.

오른쪽 그림에서 주어진 곡선은 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 x (가) 0이고, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 x (나) 0이다.
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}|e^y-1|dy$$
$$=\int_{-1}^{0}(\boxed{(다)})dy+\int_{0}^{1}(\boxed{(라)})dy$$
$$=\boxed{(마)}$$



위의 과정에서 (가)~(마)에 알맞은 것을 써넣으시오.

[1162~1165] 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

1162 $y=\sqrt{x}$, x축, $x=2$

1163 $y=\sin x\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$, x축, $x=\frac{\pi}{2}$

1164 $y=\frac{2}{x}$, x축, $x=1$, $x=e$

1165 $y=\cos x\,(0\le x\le \pi)$, x축, $x=0$, $x=\pi$

[1167~1169] 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

1167 $y=\frac{1}{x}$, y축, $y=1$, $y=3$

1168 $y=x^2\,(x\ge 0)$, y축, $y=4$

1169 $y=e^{-x}$, y축, $y=e$

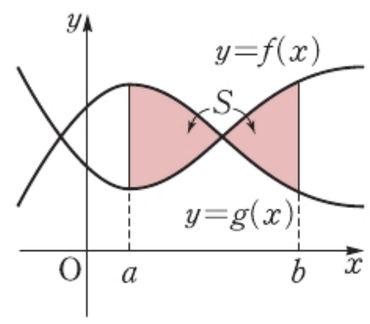
ⓒ좋은책신사고

10-3 | 두 곡선 사이의 넓이

유형 | 06~10

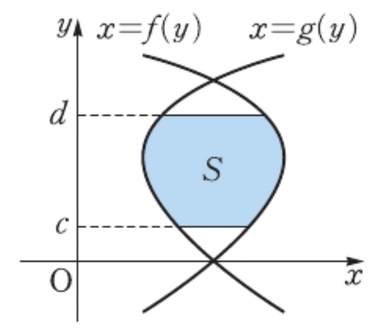
(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$ ❶



(2) 두 함수 $f(y)$, $g(y)$가 닫힌구간 $[c, d]$에서 연속일 때, 두 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)$ 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_c^d |f(y)-g(y)|dy$$



참고 두 곡선 사이의 넓이는

① $\int_a^b \{(\text{위쪽의 식})-(\text{아래쪽의 식})\}dx$ ② $\int_c^d \{(\text{오른쪽의 식})-(\text{왼쪽의 식})\}dy$

개념 NOTE

❶ 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)$와 $g(x)$의 대소 관계가 바뀔 때에는 $f(x)-g(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 넓이를 구한다.

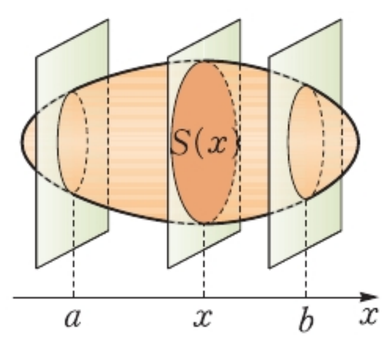
10-4 | 입체도형의 부피

유형 | 11·12

닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$ ❷

(단, $S(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이다.)



❷ x좌표가 x_k인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x_k)$라 하면

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\Delta x$$
$$=\int_a^b S(x)dx$$
$$\left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

1170 정의역이 $\left\{x \middle| 0\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}$인 두 함수 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 a라 할 때, 다음에 답하시오.

(1) a의 값을 구하시오.

(2) 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f(x)$, $g(x)$의 대소를 비교하시오.

(3) 두 곡선과 두 직선 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

[1171~1174] 다음 도형의 넓이를 구하시오.

1171 곡선 $y=\frac{3}{x}$과 직선 $y=4-x$로 둘러싸인 도형

1172 두 곡선 $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$로 둘러싸인 도형

1173 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형

1174 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$과 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형

[1175~1176] 닫힌구간 $[0, 3]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이 $S(x)$가 다음과 같은 입체도형의 부피를 구하시오.

1175 $S(x)=3x^2+5$

1176 $S(x)=2\sqrt{x}$

10-5 | 속도와 거리

유형 | 13·14·15

개념 NOTE

위치 $\underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}}$ 속도

(1) 직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때

① 시각 t에서의 점 P의 위치 x는 $\quad x=x_0+\int_a^t v(t)dt$

② 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\quad \int_a^b v(t)dt$

③ 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 $\quad s=\int_a^b |v(t)|dt$

(2) 좌표평면 위를 움직이는 점의 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

(3) 곡선의 길이

① 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a\le t\le b)$의 겹치는 부분이 없을 때 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

② 곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$ ❶

❶ 곡선 $y=f(x)$에서 $x=t$, $y=f(t)$로 나타낼 수 있으므로

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$
$$=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

1177 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=2\sin t$일 때, 다음을 구하시오.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치

(2) 시각 $t=\frac{\pi}{6}$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리

[1178~1180] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 다음과 같을 때, 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

1178 $x=t^2+3$, $y=-t^2$

1179 $x=\frac{4}{5}t^2\sqrt{t}$, $y=\frac{1}{4}t^4-t$

1180 $x=2\sin t$, $y=3+2\cos t$

1181 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

1182 $0\le t\le \pi$일 때, 곡선 $x=\sin t+3$, $y=1-\cos t$의 길이를 구하시오.

[1183~1184] 다음 곡선의 길이를 구하시오.

1183 $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}$ $\quad (1\le x\le 3)$

1184 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad (-1\le x\le 1)$

ⓒ좋은책신사고

B 단계 유형 Master

유형 01 정적분과 급수의 관계 개념 10-1

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx \quad \left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

1185 대표 문제

등식 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(1+\frac{3k}{n}\right)=p\int_q^r \sin x\,dx$가 성립할 때, 유리수 p, q, r에 대하여 pqr의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

1186

다음은 정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2-k^2}$의 값을 구하는 과정이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boxed{(가)}\sqrt{1-(\boxed{(가)})^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boxed{(가)}\sqrt{1-(\boxed{(가)})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=\boxed{(나)}$$

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 써넣으시오.

1187

함수 $f(x)=\cos\pi x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$의 값을 구하시오.

1188 서술형

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$의 값을 구하시오.

1189

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}})$의 값은?

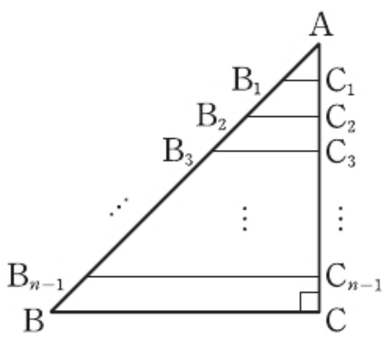
① $e-2$ ② $e-1$ ③ e ④ $e+1$ ⑤ $e+2$

유형 02 정적분과 급수의 활용 개념 10-1

삼각형의 닮음 또는 여러 가지 도형의 성질을 이용하여 급수를 $\frac{k}{n}$를 포함한 식으로 나타낸 다음 정적분으로 변형하여 그 값을 구한다.

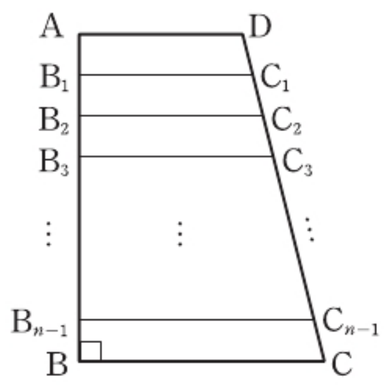
1190 대표 문제

$\overline{AC}=\overline{BC}=1$, $\angle C=90°$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 오른쪽 그림과 같이 변 AB를 n 등분 한 점을 각각 B_1, B_2, B_3, $\cdots$, B_{n-1}이라 하고, 각 점에서 변 BC와 평행한 직선을 그어 변 AC와 만나는 점을 각각 C_1, C_2, C_3, $\cdots$, C_{n-1}이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^2$의 값을 구하시오.



1191 B0

$\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이고 $\angle B=90°$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$, $\overline{AD}=2$이다. 오른쪽 그림과 같이 변 AB를 n 등분 한 점을 각각 B_1, B_2, B_3, $\cdots$, B_{n-1}이라 하고, 각 점에서 변 BC와 평행한 직선을 그어 변 CD와 만나는 점을 각각 C_1, C_2, C_3, $\cdots$, C_{n-1}이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^2$의 값은?



① 10 ② $\frac{32}{3}$ ③ $\frac{34}{3}$
④ 12 ⑤ $\frac{38}{3}$

유형 03 곡선과 x축 사이의 넓이 (1) 개념 10-2

연속함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

① 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$이면

$$\int_a^b f(x)dx$$

② 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$이면

$$\int_a^b \{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$

1192 대표 문제

곡선 $y=\frac{1}{x-1}$과 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=2e$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\ln(e-1)$ ② $\ln(e+1)$ ③ $\ln(2e-1)$
④ $\ln 2e$ ⑤ $\ln(2e+1)$

1193 B0 서술형

곡선 $y=e^x$과 x축 및 두 직선 $x=n$, $x=n+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(n)$이라 할 때, $\frac{S(5)}{S(2)}$의 값을 구하시오.

1194 B+

곡선 $y=\sqrt{x-a}$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a<4$)

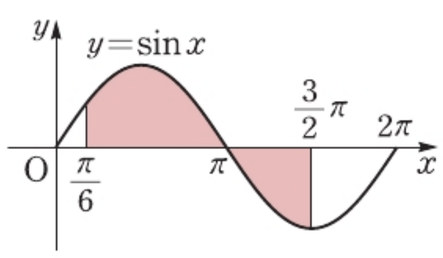
① 0 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

유형 04 곡선과 x축 사이의 넓이 (2) 개념 10-2

곡선 $y=f(x)$에서 $f(x)\geq 0$인 구간과 $f(x)\leq 0$인 구간으로 나누어 각 부분의 넓이를 구한다.

1195 대표 문제

오른쪽 그림과 같이 $0\leq x\leq 2\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{3}{2}\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

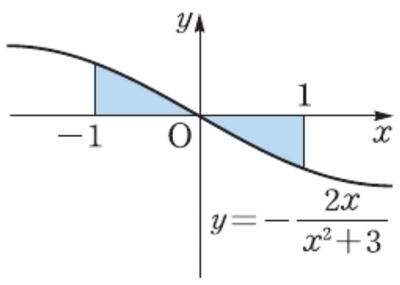


① $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓒ좋은책신사고

1196 B0

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=-\dfrac{2x}{x^2+3}$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



1197 B0

곡선 $y=-\ln x$와 x축 및 두 직선 $x=\dfrac{1}{e}$, $x=e$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $2-\dfrac{2}{e}$ ② $2-\dfrac{1}{e}$ ③ $2-\dfrac{2}{e^2}$
④ $2-\dfrac{1}{e^2}$ ⑤ $2-\dfrac{2}{e^3}$

유형 05 곡선과 y축 사이의 넓이 개념 10-2

연속함수 $g(y)$에 대하여 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

① 닫힌구간 $[a, b]$에서 $g(y)\geq 0$이면

$$\int_a^b g(y)dy$$

② 닫힌구간 $[a, b]$에서 $g(y)\leq 0$이면

$$\int_a^b \{-g(y)\}dy=-\int_a^b g(y)dy$$

1198 대표 문제

곡선 $y=\dfrac{1}{1-x}$과 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
④ $e+1$ ⑤ $e+2$

1199 B0 서술형

곡선 $y=\ln(x+1)$과 y축 및 두 직선 $y=-2$, $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

1200 B+

곡선 $y=(x+a)^2$ $(x\geq -a)$과 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\dfrac{4}{3}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$)

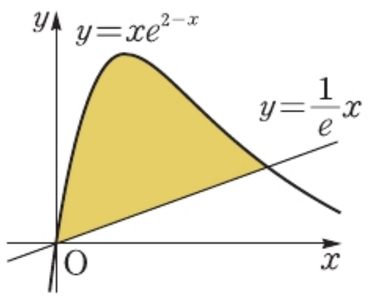
① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

유형 06 두 곡선 사이의 넓이 집중공략 개념 10-3

두 곡선 사이의 넓이는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(ii) 두 곡선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(iii) (i)의 적분 구간에서 {(위쪽의 식)−(아래쪽의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

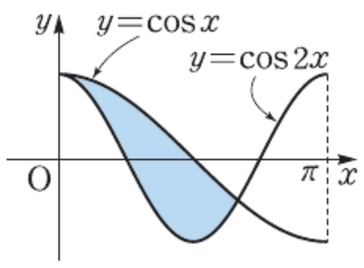
1201 대표 문제

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=xe^{2-x}$과 직선 $y=\dfrac{1}{e}x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



1202 B0

오른쪽 그림과 같이 $0 \le x \le \pi$에서 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\cos 2x$로 둘러싸인 도형의 넓이는?



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
⑤ $\sqrt{3}$

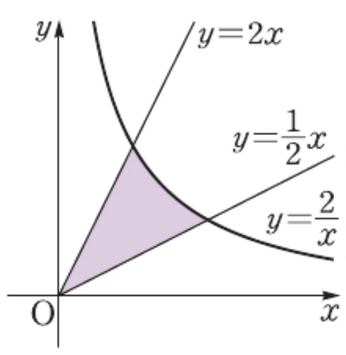
1203 B0

두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{k}{2\ln 2}$일 때, 상수 k의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

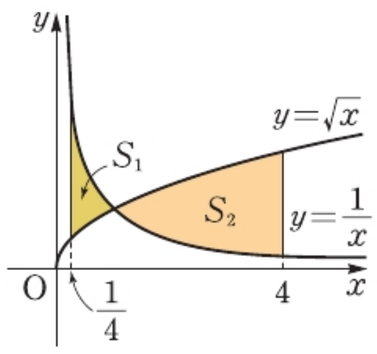
1204 B0

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\frac{2}{x}$와 두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (단, $x>0$)



1205 B+ 서술형

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$와 두 직선 $x=\frac{1}{4}$, $x=4$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, S_2-S_1의 값을 구하시오.



유형 07 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 개념 10-3

곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접선의 방정식을 구한다.
➡ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$
(ii) 곡선과 접선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(iii) 적분 구간에서 {(위쪽의 식)−(아래쪽의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

1206 대표 문제

곡선 $y=e^{x-1}$과 이 곡선 위의 점 $(2, e)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $e-\frac{2}{e}$ ② $e-\frac{1}{e}$ ③ e
④ $e+\frac{1}{e}$ ⑤ $e+\frac{2}{e}$

1207 B0 서술형

곡선 $y=-\sqrt{x}$와 이 곡선 위의 점 $(4, -2)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

1208 B+

곡선 $y=\ln x$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 점 $(0,\ 0)$에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

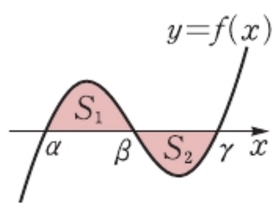
(2) 곡선 $y=\ln x$와 (1)의 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

유형 08 두 도형의 넓이가 같을 조건

개념 10-2, 3

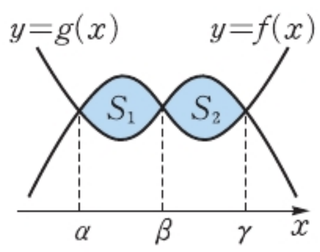
(1) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx=0$$



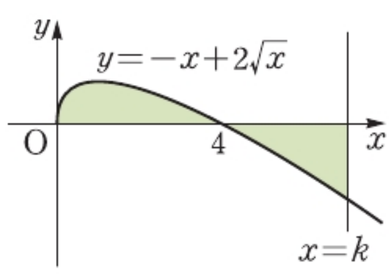
(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

$$\int_{\alpha}^{\gamma} \{f(x)-g(x)\}dx=0$$



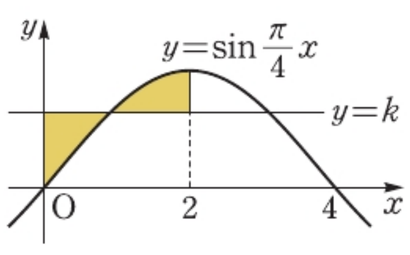
1209 대표 문제

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=-x+2\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $k>4$)



1210 B0

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{4}x$와 y축 및 두 직선 $x=2$, $y=k$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $0<k<1$)

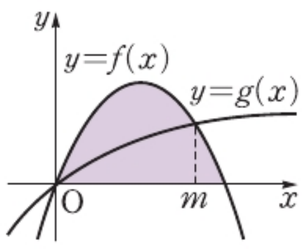


유형 09 두 곡선 사이의 넓이의 활용; 이등분

집중공략 개념 10-3

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S가 곡선 $y=g(x)$에 의하여 이등분되면

$$\int_{0}^{m} |f(x)-g(x)|dx=\frac{1}{2}S$$



1211 대표 문제

곡선 $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $y=ax$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<a<\frac{3}{2}\right)$

1212 B0

곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $x=k$에 의하여 이등분될 때, 상수 k의 값은? (단, $0<k<3$)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

1213 B0 서술형

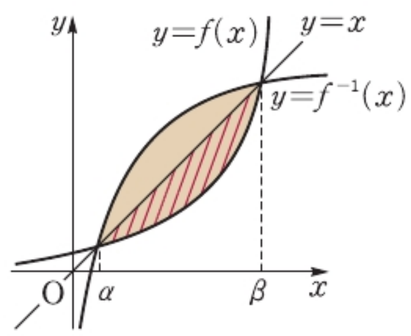
곡선 $y=e^x$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=ae^{2x}$이 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<a<\frac{1}{5}\right)$

유형 10 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

개념 10-3

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-f^{-1}(x)|dx$$
$$=2\int_{\alpha}^{\beta}|x-f(x)|dx$$



1214 대표 문제

함수 $f(x)=2\sqrt{x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$
④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

1215

곡선 $y=2^x$과 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, 곡선 $y=\log_2 x$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 할 때, $A+B$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

1216

함수 $f(x)=e^x+\frac{1}{3}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{4}{3}}^{e+\frac{1}{3}} g(x)dx$의 값을 구하시오.

1217 서술형

함수 $f(x)=\frac{1}{a}\ln x$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=e$인 점에서 서로 접하도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

유형 11 입체도형의 부피 ; 단면이 밑면과 평행한 경우

개념 10-4

주어진 입체도형을 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 식으로 나타낸 후, 이를 주어진 조건을 만족시키는 구간에서 적분한다.

➡ 밑면으로부터의 높이가 x인 곳에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형에서 밑면으로부터의 높이가 a일 때의 부피는

$$\int_0^a S(x)dx$$

1218 대표 문제

깊이가 5 cm인 어떤 그릇을 밑면으로부터의 높이가 x cm인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이는 $3(x+1)^2$ cm^{2}라 한다. 이 그릇의 부피를 구하시오.

1219

어떤 용기에 물의 깊이가 x가 되도록 물을 넣으면 용기에 담겨진 물의 부피 $V(x)$는 $V(x)=\ln(x+1)+x^2$이라 한다. 물의 깊이가 8일 때, 수면의 넓이는?

① 16 ② $\frac{145}{9}$ ③ $\frac{146}{9}$
④ $\frac{49}{3}$ ⑤ $\frac{148}{9}$

ⓒ좋은책신사고

1220 B0

어떤 입체도형을 밑면으로부터 높이가 x인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{25-4x}$인 정사각형이다. 이 입체도형의 높이가 4일 때, 부피를 구하시오.

유형 12 입체도형의 부피 ; 단면이 밑면과 수직인 경우

개념 10-4

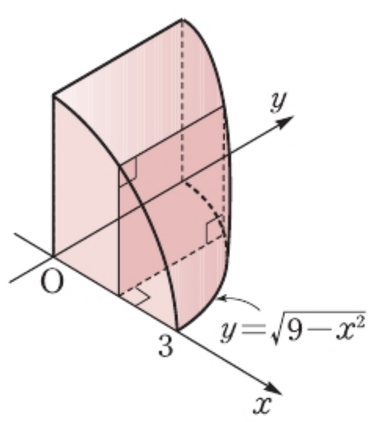
밑면에 대한 도형의 방정식이 주어진 입체도형의 부피를 구할 때에는 밑면을 좌표평면 위에 나타내고, 입체도형을 밑면에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키는 구간에서 적분한다.

➲ 닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는

$$\int_a^b S(x)dx$$

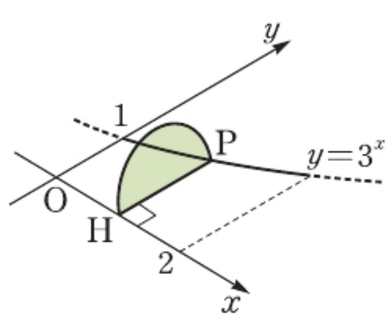
1221 대표 문제

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{9-x^2}$ $(0\le x\le 3)$과 x축, y축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.



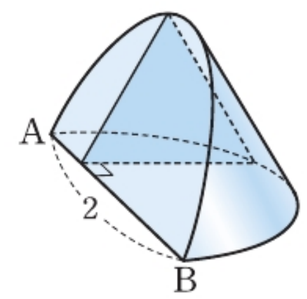
1222 B0 서술형

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=3^x$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 PH를 지름으로 하는 반원을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P의 x좌표가 0에서 2까지 변할 때, 이 반원이 만드는 입체도형의 부피는 $\frac{k}{\ln 3}\pi$이다. 이때 상수 k의 값을 구하시오.



1223 B+

오른쪽 그림과 같이 지름의 길이가 2인 반원을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 반원의 지름 AB에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.



유형 13 직선 위에서 움직인 거리

개념 10-5

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때

① 시각 t에서의 점 P의 위치 x는 $x=x_0+\int_a^t v(t)dt$

② 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)\,dt$

③ 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b |v(t)|dt$

1224 대표 문제

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=(t-1)e^t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $e-2$ ② 1 ③ $e-1$
④ 2 ⑤ e

1225 B0

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=\cos \pi t$일 때, $0<t\le 5$에서 점 P가 원점을 지나는 횟수를 구하시오.

1226 B+

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=\sin t-\sin 2t$ $(0\le t\le \pi)$일 때, 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

유형 14 평면 위에서 움직인 거리

집중공략 개념 10-5

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

1227 대표 문제

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x=\pi+\cos \pi t,\ y=\pi+\sin \pi t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는?

① 2 ② π ③ 4
④ 2π ⑤ 8

1228 B0

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x=t^2-2t,\ y=\frac{8}{3}t\sqrt{t}$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 8이 되도록 하는 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1229 B+ 서술형

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$$

일 때, 출발 후 처음으로 점 P의 속력이 0이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

유형 15 곡선의 길이

개념 10-5

① 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a\le t\le b)$의 겹치는 부분이 없을 때 길이는

$$\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)^2\}}\,dt$$

② 곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이는

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

1230 대표 문제

곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$ $(-2\le x\le 2)$의 길이를 구하시오.

1231 B0

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$일 때, 곡선 $x=\sin^2\theta$, $y=\cos^2\theta$의 길이는?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

1232 B0

$0\le x\le a$에서 곡선 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2+2}$의 길이가 12일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

유형 Review

문제 풀이 동영상

B-

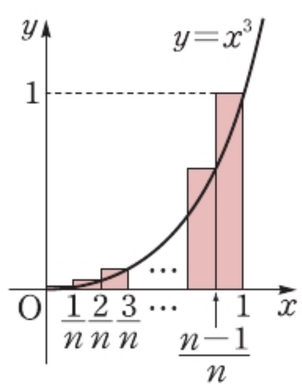
1233

다음은 곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법을 이용하여 구하는 과정이다.

닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n 등분 한 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 차례대로

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots,\ \frac{n}{n}\ (=1)$$

이고 오른쪽 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면



$$S_n=\boxed{(가)}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\boxed{(가)}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\boxed{(가)}\left(\frac{n}{n}\right)^3$$

$$=\frac{1}{\boxed{(나)}}(1^3+2^3+\cdots+n^3)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\boxed{(다)}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는 $\boxed{(다)}$이다.

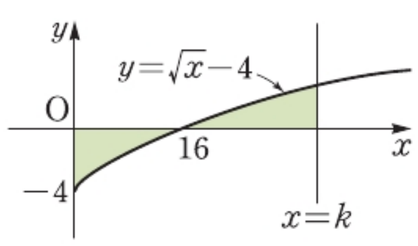
위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

1234

곡선 $y=\ln x+2$와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

1235

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}-4$와 x축, y축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $k>16$)



1236

어떤 그릇에 물을 넣으면 물의 깊이가 x일 때 물의 부피는 $x\ln(x+1)$이 된다고 한다. 물의 깊이가 e^2-1일 때 수면의 넓이를 구하시오.

B0

1237

정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4n}{n+2k}}$의 값을 구하시오.

1238 서술형

동영상

자연수 k에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y=k\sin x$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오.

1239

곡선 $y=(x+1)^2\ (x\geq -1)$과 x축, y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

1240

동영상

곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 두 직선 $y=-x$, $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

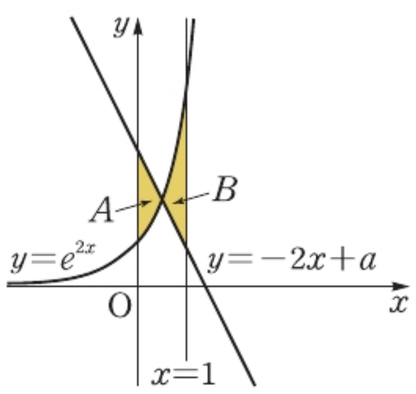
1241 서술형

동영상

곡선 $y=\ln x$와 이 곡선 위의 점 $(e^3, 3)$에서의 접선 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

1242 수능 기출

곡선 $y=e^{2x}$과 y축 및 직선 $y=-2x+a$로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=e^{2x}$과 두 직선 $y=-2x+a$, $x=1$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 a의 값은? (단, $1<a<e^2$)



① $\frac{e^2+1}{2}$ ② $\frac{2e^2+1}{4}$ ③ $\frac{e^2}{2}$
④ $\frac{2e^2-1}{4}$ ⑤ $\frac{e^2-1}{2}$

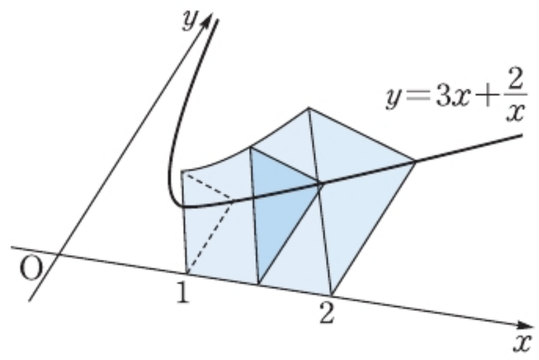
1243

어떤 그릇에 물을 부으면 물의 깊이가 x일 때, 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{x+5}$인 원이 된다고 한다. 그릇의 높이가 10일 때, 그릇에 가득 담긴 물의 부피를 구하시오.

1244 교육청 기출

동영상

그림과 같이 곡선 $y=3x+\frac{2}{x}(x>0)$와 x축 및 직선 $x=1$, 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\frac{35\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{37\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{39\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{41\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{43\sqrt{3}}{4}$

1245 교육청 기출

동영상

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0\le t\le 2\pi)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=t+2\cos t,\ y=\sqrt{3}\sin t$$

일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $t=\frac{\pi}{2}$일 때, 점 P의 속도는 $(-1, 0)$이다.
ㄴ. 점 P의 속도의 크기의 최솟값은 1이다.
ㄷ. 점 P가 $t=\pi$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는 $2\pi+2$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1246

곡선 $y=-\frac{1}{4}x^2+\ln\sqrt{x}$ $(1\le x\le 4)$의 길이를 구하시오.

ⓒ좋은책신사고

B+

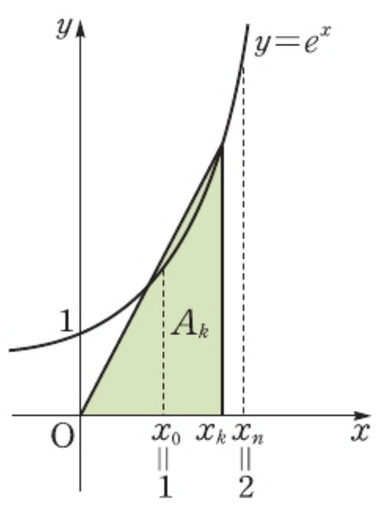
1247 평가원 기출 동영상

함수 $f(x)=e^x$이 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[1, 2]$를 n 등분 한 각 분점(양 끝 점도 포함)을 차례로

$$1=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=2$$

라 하자. 세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k $(k=1, 2, \cdots, n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값은?

① $\frac{1}{2}e^2-e$ ② $\frac{1}{2}(e^2-e)$ ③ $\frac{1}{2}e^2$
④ e^2-e ⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$



1248 도전 동영상

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=k\sin x$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=\cos x$가 이등분할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

1249 동영상

함수 $f(x)=\tan\frac{\pi}{4}x\ (-1\le x\le 1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $2+\frac{2}{\pi}$ ② $2-\frac{4}{\pi}\ln 2$ ③ $2-\frac{8}{\pi}\ln 2$
④ $4+\frac{4}{\pi}$ ⑤ $4-\frac{4}{\pi}\ln 2$

1250 서술형

곡선 $y=a\ln x\ (1\le x\le e)$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{PH}}$를 한 변으로 하는 정사각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P의 x좌표가 1에서 e까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피가 $4(e-2)$이다. 이때 양수 a의 값을 구하시오.

1251 도전 동영상

원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각 $v_1(t)=\sin 2\pi t$, $v_2(t)=\cos \pi t$이다. 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 처음으로 다시 만날 때의 두 점의 위치는?

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$
④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$