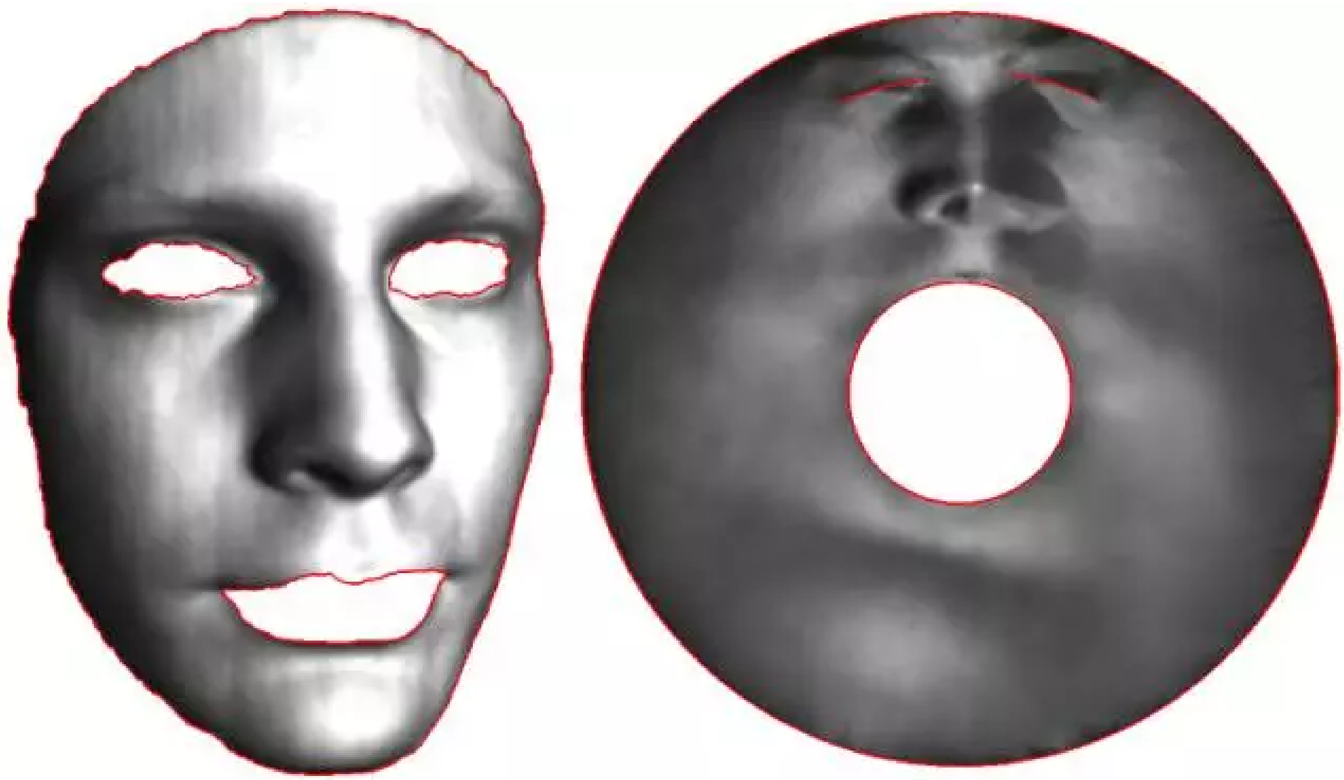
清华笔记：计算共形几何讲义 （8）狭缝映射（Slit Map）的存在性

顾险峰 老顾谈几何 2017-07-16



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。欢迎任何有兴趣的朋友，前来旁听指导。】

我们用较为初等的复变函数方法证明一种共形映射的存在性：狭缝映射（slit mapping）。如图所示，给定亏过为0的多连通曲面，存在共形映射将其映射到平面区域，每个边界的联通分支都被映成一条狭缝（slit）。这里所用的数学证明方法比较巧妙，令人赏心悦目。真正的计算和需要应用全纯微分的方法。这篇笔记和罗锋教授讨论过。

Gronwall 面积估计

在复平面$\mathbb{C}$上，复数$z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$，平面的Lebesgue测度为$\mu$，面元为

$$dA = dx\wedge dy = \frac{i}{2}dz\wedge d\bar{z} = \frac{i}{2}d(zd\bar{z})$$。

引理：假设J是一条Jordan曲线，是某个Jordan区域Ω的边界，解析映射$f:\mathbb{D}\to\Omega$为1-1映射，那么

$$\mu(\Omega) = \frac{i}{2}\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\overline{f'(z)}d\bar{z}$$。

证明：Jordan区域Ω的面积为

$$\mu(\Omega)=\frac{i}{2}\int_{\Omega}d(wd\bar{w})=\frac{i}{2}\int_{\partial\Omega}wd\bar{w},$$

代入$w=f(z)$，我们得到

$$\mu(\Omega)=\frac{i}{2}\int_{\partial\mathbb{D}}f(z)\overline{f'(z)}d\bar{z}。$$

定理（Gronwall）假设平面区域$\Omega\subset\bar{\mathbb{C}}$包含无穷远点$\infty\in\Omega$，解析映射$f:\Omega\to\bar{\mathbb{C}}$为1-1映射，并且具有Laurent级数表示，

$$f(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n},\quad |z|>R,$$

令$E=\mathbb{C}-f(|z|>R)$，那么

$$\mu(E)=\pi\left(R^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2R^{-2n}\right)。$$

证明：假设$r>R$，令$E_r=\mathbb{C}-f(\{|z|>r\})$，应用上面引理，

$$\mu(E_r)=\frac{i}{2}\int_{|z|=r}f(z)\overline{f'(z)}d\bar{z}$$

由于$z=re^{i\theta},dz=-i\bar{z}d\theta$，我们得到

$$\frac{1}{2}\int_{|z|=r}\left(z+\sum_{m=0}^{\infty}b_mz^{-m}\right)\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\bar{b_n}(\bar{z})^{-n-1}\right)\bar{z}d\theta$$

进一步化简，得到

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(z+\sum_{m=0}^{\infty}b_mz^{-m}\right)\left(\bar{z}-\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\bar{b_n}(\bar{z})^{-n}\right)d\theta$$

直接计算得到：

$$\mu(E_r)=\pi\left(R^2-\sum_{i=1}^{\infty}n|b_n|^2R^{-2n}\right),$$

然后，令$r\to R$，得到结论。证明完毕。

推论 1：假设平面区域$\Omega\subset\bar{\mathbb{C}}$包含无穷远点$\infty\in\Omega$，解析映射$f:\Omega\to\bar{\mathbb{C}}$为1-1映射，并且具有Laurent级数表示，

$$f(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n},\quad |z|>R,$$

那么 $|b_1|\leq R^2$，$\mathrm{Re}(b_1)\leq R^2$。极值情况，$\mathrm{Re}(b_1)=R^2$当且仅当

$$f(z)=z+\frac{R^2}{z}+b_0$$

这等价于$f(|z|>R)$的补集是一条长度为$4R$的水平线段。

证明：令$E=\mathbb{C}-f(|z|>R)$，解析映射$f:\Omega\to\bar{\mathbb{C}}$为1-1映射，因此$\mu(E)\geq 0$。由以上定理，我们得到$|b_1|\leq R^2$。极值情况，直接计算可得。证明完毕。

Hilbert定理

定理 （Bieberbach）解析函数（1-1映射）族

$$A=\{f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}|f(0)=0,f'(0)=1,f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n,|z|<1\}$$

中所有的函数都有$|b_2|\leq 2$。

证明：给定$f\in A$，构造

$$g(z)=f(\frac{1}{z^2})^{-\frac{1}{2}}:\{|z|>1\}\to\bar{\mathbb{C}}$$，

那么$g(\infty)=\infty$，在单位圆外是解析1-1映射。我们计算$g(z)$的Lauren展开，

$$g(z)=\left(\frac{1}{z^2}+\frac{b_2}{z^4}+\cdots\right)^{-\frac{1}{2}}=z\left(1+\frac{b_2}{z^2}+\cdots\right)^{-\frac{1}{2}}=z-\frac{b_2}{2}\frac{1}{z}+\cdots$$

由上面推论，我们得到$|b_2|\leq 2$。证明完毕。

定理 （Koebe - 1/4）解析函数（1-1映射）族

$$A=\{f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}|f(0)=0,f'(0)=1,f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n,|z|<1\}$$，

如果$f\in A$，那么

$$\{|z|<\frac{1}{4}\}\subset f(D)$$。

证明：设$w\notin f(D)$，考虑

$$g(z)=\frac{wf(z)}{w-f(z)}\in A$$，

考虑$g(z)$在0点的Tayler展开:

$$g(z)=f(z)\cdot\frac{1}{1-f(z)/w},$$

直接计算表明

$$\begin{aligned}&(z+b_2z^2+\cdots)(1+\frac{f(z)}{w}+\frac{f^2(z)}{w^2}+\cdots)\\=&(z+b_2z^2+\cdots)(1+\frac{z}{w}+\cdots)\\=&z+(b_2+\frac{1}{w})z^2+\cdots\end{aligned}$$

由Breberbach定理，我们得到

$$\left|b_2+\frac{1}{w}\right|\le 2,\quad |b_2|\le 2,$$

由此$|\frac{1}{w}|\le 4$，所以$|w|\ge\frac{1}{4}$。证明完毕。

推论2：假设解析1-1映射

$$f(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots,|z|>1,$$

那么

$$\partial f(|z|>1)=f(|z|=1)\subset\{|w-b_0|\le 2\}。$$

证明：考虑 $f(z^{-1})^{-1}$，因为

$$f(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots$$

所以

$$f(z^{-1})=\frac{1}{z}+b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

故

$$\begin{aligned}f(z^{-1})^{-1}&=z(1+b_0z+b_1z^2+\cdots)^{-1}\\&=z(1-(b_0z+b_1z^2+\cdots)+\cdots)\\&=z-b_0z^2-b_1z^3+\cdots\end{aligned}$$

令$g(z):=f(z^{-1})^{-1}$，则$g(z)$属于集合A，故$\forall z_0,|z_0|=1,\quad w=g(z_0)\notin f(\mathbb{D})$，那么有

$$|-b_0+\frac{1}{w}|\le 2,\quad |-b_0|\le 2,$$

因为$w=g(z_0)=f(z_0^{-1})^{-1}$，所以$f(z_0^{-1})=\frac{1}{w}$，即

$$|f(z_0^{-1})-b_0|\le 2,$$

由$|z_0|=1$，我们得到

$$|f(z_0)-b_0|\le 2,$$

证明完毕。

正规函数族 一族复值函数$\mathcal{F}$，如果任意序列存在子列收敛到一个解析函数，这个极限解析函数不必属于这个函数族$\mathcal{F}$，则$\mathcal{F}$被称为是Normal family。

判定准则1 一族函数$\mathcal{F}$，如果都不取值同样的3个点，则这些函数构成一个正规函数族。

判定准则2 如果$\mathcal{F} = \{f\}$是正规函数族，那么$\mathcal{F}^{-1} = \{f^{-1}\}$也是正规函数族。

定义：复平面上的区域$\Omega \subset \mathbb{C}$被称为是狭缝区域（slit domain），如果其边界$\partial\Omega$的每个联通分支或者是一个点，或者是水平闭区间。

引理1：在∞点附近，解析函数

$$\alpha(z) = z + \frac{k_1}{z} + \cdots, \ \beta(z) = z + \frac{l_1}{z} + \cdots$$

那么

$$\beta \circ \alpha(z) = z + \frac{k_1 + l_1}{z} + \cdots$$

。

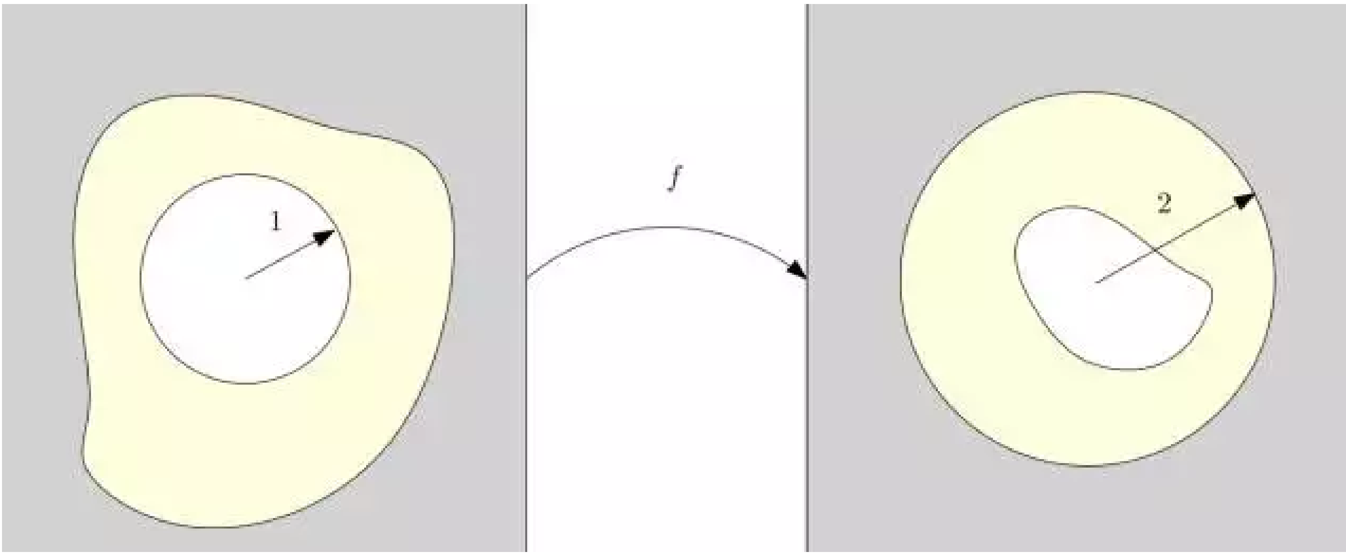
定理（Possel-Gronwall）： 复平面上的一切区域$\Omega \subset \mathbb{C}$都和平面狭缝区域共形等价。
定理（Hilbert）： 复平面上的一切区域$\Omega \subset \mathbb{C}$，其边界$\partial\Omega$具有有限个联通分支，都和平面狭缝区域共形等价。

证明：给定一个平面区域$\Omega \subset \bar{\mathbb{C}}$，我们用Mobius变换，可以假设$\infty \in \Omega$并且$\Omega \subset \{|z| > 1\}$，令解析1-1映射族

$$A = \{f : \Omega \to \bar{\mathbb{C}} | f(\infty) = \infty, f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots, |z| > 1\}$$

，

令$f(z) = z \in A$，所以A是非空集合$A = \emptyset$。



考察$\mathcal{A}^{-1}=\{f^{-1}|f\in\mathcal{A}\}$，由推论2，我们得到

$$\{|z|<1\}\subset[f^{-1}(|w-b_0|>2)]^c,$$

因此，$f^{-1}(|w-b_0|>2)$不包含三个点$\{-1,0,+1\}$，$\mathcal{A}^{-1}$是一个正规函数族。故而，$\mathcal{A}$也是一个正规函数族，（normal family）。

由正规函数族的紧性，函数序列的极限也在A中。所以，存在$f\in A$，使得

$$\mathrm{Re}_f(a_1)=\max\{\mathrm{Re}(a_1)_g|\forall g\in A\},$$

我们欲证明 $f(\Omega)$是一个狭缝区域。

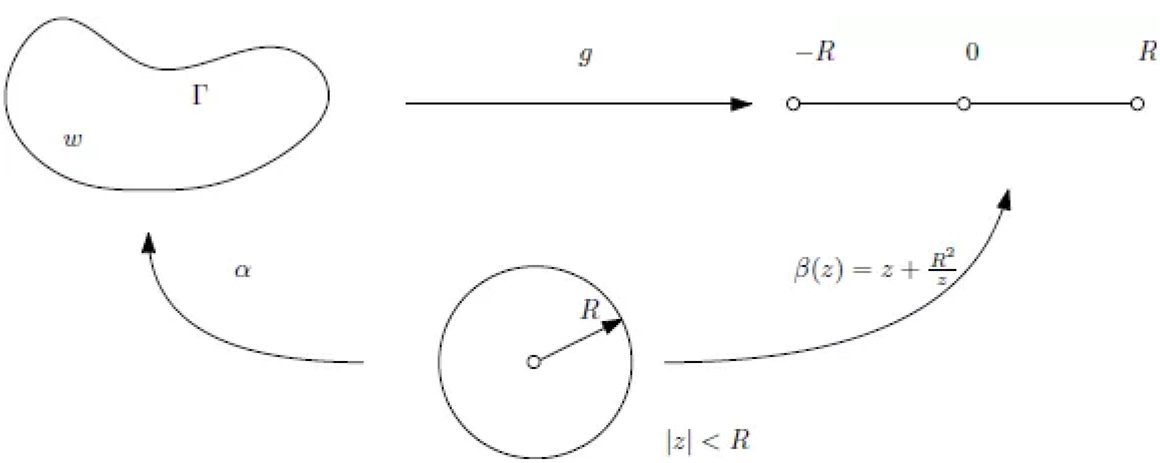


图1. 构造狭缝映射（slit map）。

若反之，则存在$\partial f(\Omega)$的一个联通分支Γ，Γ既不是一个点，也不是一条水平线段。我们可以构造一个映射$g:\bar{\mathbb{C}}\setminus\Gamma\to\bar{\mathbb{C}}\setminus[-2R,2R]$，构造方法如下：

如图1所示，我们构造黎曼映照的逆映射：

$$\alpha:\{|z|>R\}\to\bar{\mathbb{C}}\setminus\Gamma,\quad \alpha(z)=z+\frac{\varepsilon}{z}+\cdots$$

和狭缝映射：

$$\beta:\{|z|>R\}\to\bar{\mathbb{C}}\setminus[-2R,2R],\quad \beta(z)=z+\frac{R^2}{z}。$$

则复合映射：

$$g:\bar{\mathbb{C}}\setminus\Gamma\to\bar{\mathbb{C}}\setminus[-2R,2R],\quad g(w)=\beta\circ\alpha^{-1}(w)=w+\frac{\lambda}{w}+\cdots$$

由推论1，比较α,β，它们将圆盘的补集映到平面区域，狭缝映射b_1的实部取到最大，因此

$$R^2=\mathrm{Re}(a_1)_\beta>\mathrm{Re}(a_1)_\alpha=\mathrm{Re}(\varepsilon),$$

由引理1，$\beta(z)=g\circ\alpha(z)$，我们得到：

$$R^2=\mathrm{Re}(a_1)_\beta=\mathrm{Re}(a_1)_{g\circ\alpha}=\mathrm{Re}(\varepsilon+\lambda)>\mathrm{Re}(\varepsilon),$$

由此，我们得到$\mathrm{Re}(\lambda)>0$。

由此，由引理1，在$\{|z|>1\}$上，复合映射

$$g\circ f(z)=z+\frac{a_1+\lambda}{z}+\cdots,$$

由$\mathrm{Re}(\lambda)>0$，我们得到$\mathrm{Re}(a_1+\lambda)>\mathrm{Re}(a_1)$，这和$f$的取法矛盾，因此假设错误，结论成立。证明完毕。

后面我们会详细解释狭缝映射（Slit Map）的算法，主要的理论工具是全纯1-形式。
