清华笔记：计算共形几何讲义 (25) 共形几何的概率解释

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-29

布朗运动和共形变换

假设一个粒子在曲面上做随机布朗运动，那么在任一时刻，粒子的运动速度方向在单位圆周上均匀分布。如果我们对曲面进行共形变换，那么共形变换将无穷小圆变成无穷小圆，因此方向空间上的概率分布没有改变。因此，我们得到共形变换的最为本质的特性：

定理 共形变换保持布朗运动。

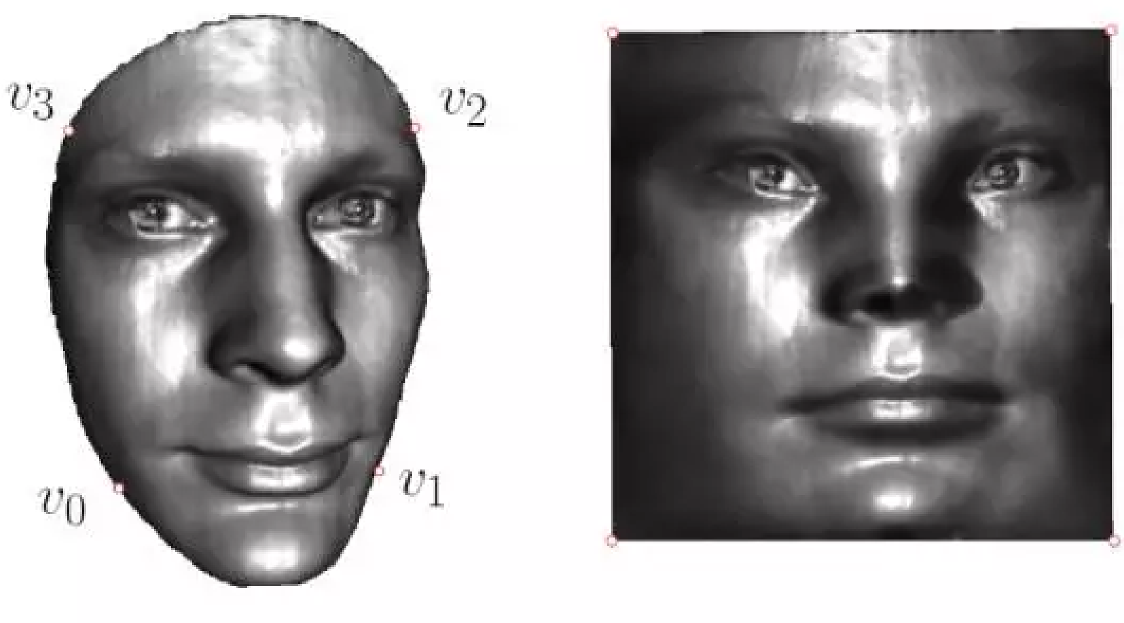

图0. 极值长度等价于等效电阻。

微观上的布朗运动表现为宏观上的电阻。如图0所示，我们有一张单联通曲面，边界上选取四个角点 $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$，我们将$[v_0, v_1]$和$[v_2, v_3]$绝缘，$[v_3, v_0]$和$[v_1, v_2]$接上电极。一个从$[v_3, v_0]$出发的粒子，在曲面上做布朗运动，有可能被侧壁吸收，也有可能到达彼岸$[v_1, v_2]$，那么曲面的等效电阻可以解释成到达彼岸的概率。我们通过共形变换，将曲面映成平面长方形，这种变换保持等效电阻不变。长方形的等效电阻等于长宽之比，亦即曲面的极值长度等价于等效电阻。

我们用同样的观点来解释无限平面图（infinite planar graph）的组合单值化定理，用图上的随机行走来解释无限图的共形不变量，即等效电阻。

最大双曲圆盘填充

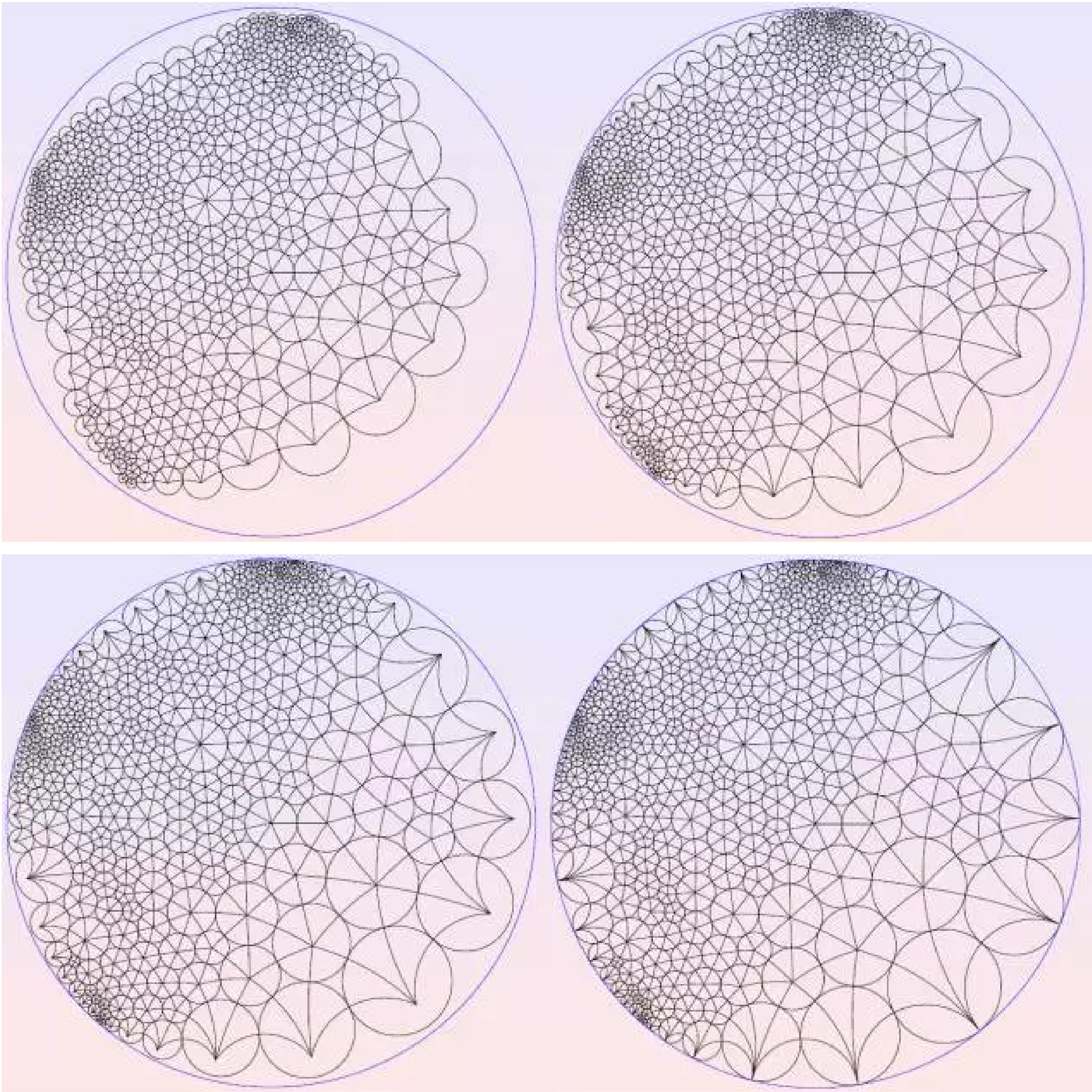

图1. 离散黎曼映照。

给定单联通的开曲面S，和一个**有限**三角剖分T。我们令每个三角形为双曲三角形，每条边为双曲测地线，边长和角度满足双曲余弦定理，

$$\cos\theta_i = \frac{\cosh l_j \cosh l_k - \cosh l_i}{\sinh l_j \sinh l_k},$$

三角形面积为

$$A = \frac{1}{2}\sinh l_j \sinh l_k \sin\theta_i。$$

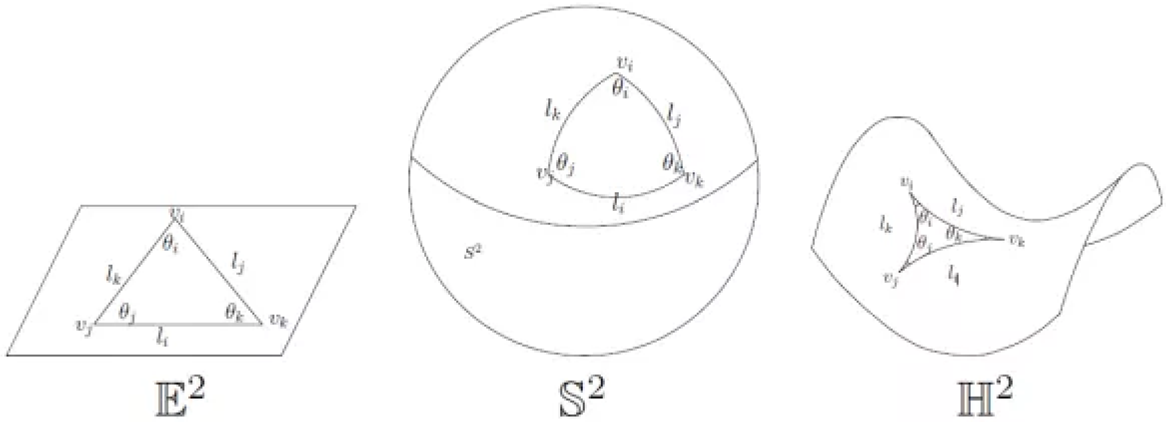

图2. 不同背景几何下的三角形。

我们在每个顶点$v_i \in V(\mathcal{T})$上定义一个圆盘$C_i(v_i, \gamma_i)$，每条边$e_{ij} \in E(\mathcal{T})$的两个端点为

$$\partial e_{ij} = v_i - v_j,$$

e_{ij}的长度等于两个顶点圆半径之和，

$$l_{ij} = \gamma_i + \gamma_j。$$

顶点的离散高斯曲率为角欠，

$$K_i = \begin{cases} 2\pi - \sum_{jk} \theta_i^{jk} & v_i \notin \partial \mathcal{T} \\ \pi - \sum_{jk} \theta_i^{jk} & v_i \in \partial \mathcal{T} \end{cases}。$$

高斯曲面满足离散高斯-博纳定理：

$$\sum_{v_i \in V(\mathcal{T})} K_i - Area(S) = 2\pi\chi(S)。$$

我们定义离散共形因子为$u_i = \log\tanh(\gamma_i/2)$，我们可以直接得到对称性，

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial u_j} = \frac{\partial \theta_j}{\partial u_i}。$$

更进一步，

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{A} \begin{pmatrix} \sinh l_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh l_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \cos\theta_3 & \cos\theta_2 \\ \cos\theta_3 & -1 & \cos\theta_1 \\ \cos\theta_2 & \cos\theta_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dl_1 \\ dl_2 \\ dl_3 \end{pmatrix}$$

同时，

$$\begin{pmatrix} dl_1 \\ dl_2 \\ dl_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \sinh\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh\gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix}$$

这里矩阵

$$M=\begin{pmatrix}0 & \lambda(1,2,3) & \lambda(1,3,2)\\ \lambda(2,1,3) & 0 & \lambda(2,3,1)\\ \lambda(3,1,2) & \lambda(3,2,1) & 0\end{pmatrix},$$

$$\lambda(i,j,k)=\frac{-\cosh\gamma_k+\cosh l_i\cosh\gamma_j}{\sinh l_i\sinh\gamma_j}。$$

由此我们可以定义离散熵能量为

$$E(\mathbf{u})=\int^{(u_1,u_2,\cdots,u_n)}\sum_{i=1}^{n}K_i du_i,$$

那么离散熵能量为严格凸的。对于任意给定的目标离散高斯曲率
$\bar{K}$，通过优化能量

$$\int^{\mathbf{u}}\sum_i(\bar{K}_i-K_i)du_i$$

我们可以求得唯一的双曲度量实现目标曲率。或者，固定边界顶点处的圆周半径，给定内顶点处的目标高斯曲率$\bar{K}$，我们也可以实现目标双曲度量。

我们令内顶点的曲率处处为0，边界半径固定，则可以得到唯一的双曲度量，将离散曲面等距地嵌入在双曲平面$\mathbb{H}^2$上，例如庞加莱圆盘。如果我们令边界半径都趋于无穷大，那么边界顶点圆趋于horocircle，如此我们得到一个圆盘填充（circle packing），满足如下条件：

1. 每条边上的两个圆周彼此相切，
2. 边界顶点处的圆周和单位圆相切，
3. 每个双曲圆周以相应的顶点为圆心。

$\mathcal{T}$上的这种双曲度量是唯一的，因此这种圆盘填充彼此相差一个双曲的等距变换，即莫比乌斯变换。这种圆盘填充被称为是**最大圆盘填充**，（maximal hyperbolic circle packing），可以被视作是离散黎曼映照。图1显示了离散黎曼映照的计算过程，边界圆轴的半径逐渐增大，以致至无穷，圆盘填充逐渐填满整个双曲平面。

定理（最大圆盘填充 maximal circle packing）：给定平面区域$S\subset\mathbb{C}$的有限三角剖分$\mathcal{T}$，则存在最大圆盘填充，并且最大圆盘填充间相差一个莫比乌斯变换。

组合单值化定理

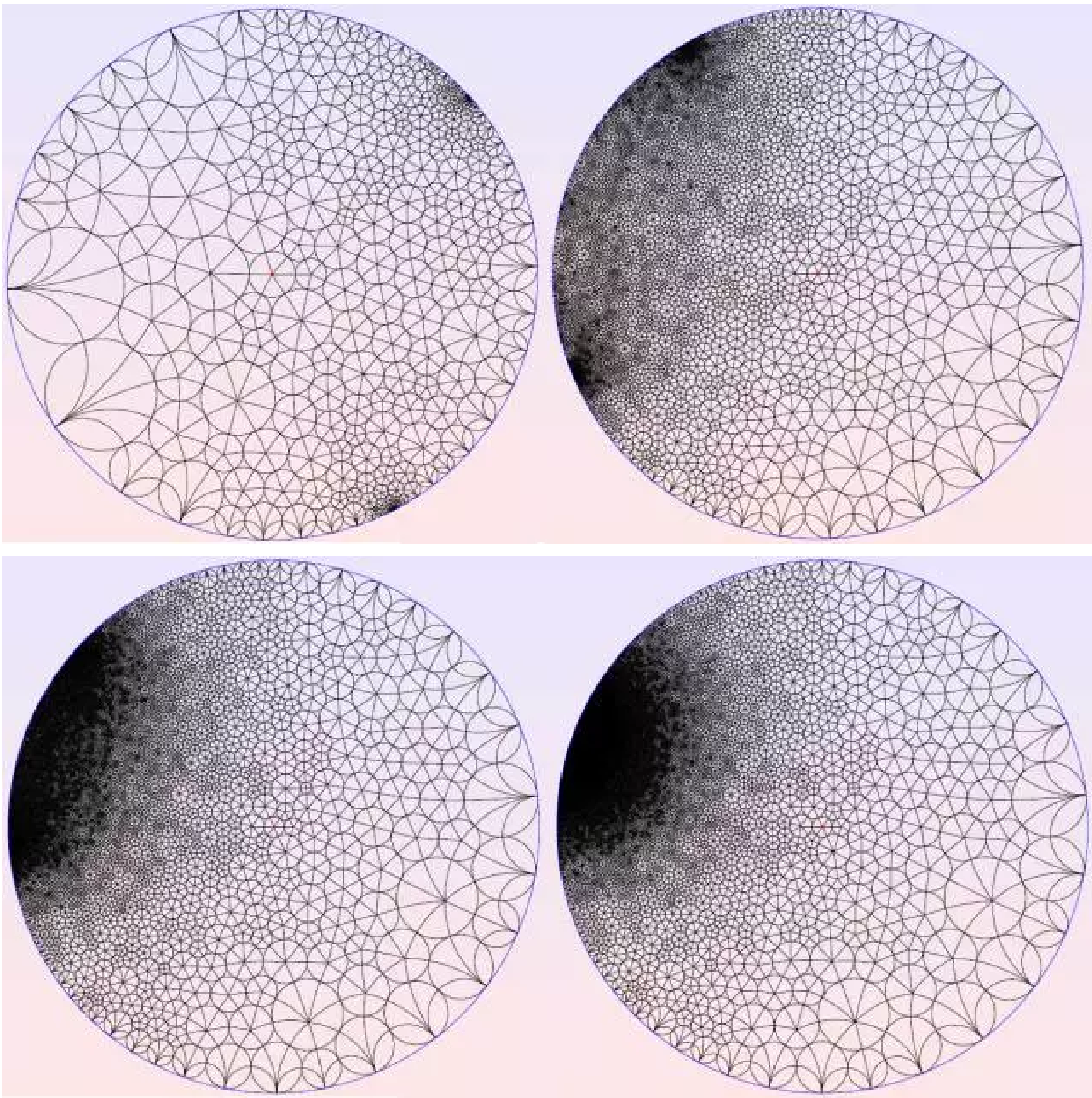

图2. 无限黎曼映照序列，中心（红点）的圆趋于稳定，半径收敛到一个严格正的常数。

给定单联通的开曲面S，和一个**无限**的三角剖分$\mathcal{T}$，将三角剖分的面进行排列

$$\mathcal{T} = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_n, \cdots\}$$

使得$\mathcal{T}_n=\bigcup_{k=1}^n \Delta_k$是单联通的拓扑圆盘，或者等价的，$\mathcal{T}_n$和$\Delta_{n+1}$交于一条边或者两条边，（而非一个顶点、三条边，或者一条边和第三个顶点）。我们选Δ_1的一个顶点$v_0\in\Delta_1$和一条边$[v_0,v_1]\in\Delta_1$，然后构造一系列离散黎曼映照，$\varphi_n:\mathcal{T}_n\to\mathbb{H}^2$，满足归一化条件$\varphi_n(v_0)=0$，并且 $\varphi_n(v_1)>0$。图2显示了一系列离散黎曼映照，$\varphi_n(v_0)$为圆盘中心的红点。

当n趋向于无穷时，$\mathcal{T}_n$穷尽了无穷三角剖分$\mathcal{T}$，$\varphi_n:\mathcal{T}_n\to\mathbb{H}^2$的极限行为分成两种情况，

1. 中心处的圆周$\varphi_n(C_0)$半径收敛到一个正的常数，$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\gamma_0)=c>0$，每个圆周$\varphi_n(C_k)$都收敛到稳定位置，$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\mathcal{T}_n)$覆盖整个双曲圆盘$\mathbb{D}$；
2. 中心处的圆周$\varphi_n(C_0)$半径收敛到0。如果我们通过缩放变换使得$\varphi_n(v_1)=1$，$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\mathcal{T}_n)$覆盖整个复平面$\mathbb{C}$。

这意味着开单联通曲面的任意一个无穷三角剖分$\mathcal{T}$，或者离散共形等价于整个复平面$\mathbb{C}$，或者单位圆盘$\mathbb{D}$。如果单联通闭曲面的三角剖分$\mathcal{T}$只有有限个面，则$\mathcal{T}$和单位球面$\mathbb{S}^2$离散共形等价。这被称为是离散单值化定理。

离散单值化定理有一个概率解释。假设有一个醉汉沿着平面图$\mathcal{T}$随机行走，在每一个顶点处，他以同样的概率随机选择一条邻边走向下一个顶点。假设平面图$\mathcal{T}$无穷大，那么有两种可能情况：

1. 醉汉以一直无法走出去，以一定概率回到起点v_0。这对应着$\mathcal{T}$和复平面$\mathbb{C}$离散共形等价，这时$\mathcal{T}$被称为是“常返的”（recurrent）。
2. 醉汉有可能一去不复返，以概率0回到起始点v_0。这对应着$\mathcal{T}$和单位圆盘$\mathbb{D}$离散共形等价。这时$\mathcal{T}$被称为是“过渡的”（transient）。

从组合角度讲，我们考察顶点的拓扑度（邻边的条数）。如果$\mathcal{T}$只有有限个顶点其度小于7，那么$\mathcal{T}$是过渡的，$\mathcal{T}$和单位圆盘离散共形等价；如果$\mathcal{T}$只有有限个顶点其度大于6，那么$\mathcal{T}$是常返的，$\mathcal{T}$和复平面离散共形等价。

如果从等效电阻角度而言，我们假设每条边都是具有单位电阻，然后考察从原点到无穷远边界的等效电阻。常返网络的等效电阻为无穷大，因此没有电子可以逃逸出去；过渡网络的等效电阻为有限值，因此电子可以逃逸出去。顶点的拓扑度反应了串联和并联，串联使得等效电阻增大，并联使得等效电阻降低。如果顶点拓扑度为6，那么串联占优势，等效电阻为无穷大；如果顶点拓扑度为7，那么并联占优势，等效电阻为有限。

总结

共形变换保持布朗运动不变，因此保持等效电阻。换言之，等效电阻代表了组合图的共形不变量。无穷平面图的等效电阻或者有限，或者无穷；在这些图上的随机行走或者是过渡的或者是常返的；这些图中或者并联占优，或者串联占优；无穷图或者可以共形覆盖整个复平面，或者单位圆盘。这就是组合单值化定理。

在证明中，我们将曲面进行可数无穷三角剖分，然后逐渐添加三角形来构造一系列的子空间，穷尽原来曲面。每个字空间都被共形映入单位圆盘，归一化之后得到曲面到平面区域的整体共形映射。曲面的像或者占据整个复平面，或者单位圆盘，如此证明了组合单值化定理。我们将用同样的思想方法来证明光滑黎曼面的单值化定理。

请长按下方二维码，选择“识别图中二维码”，即可关注。

【老顾谈几何】邀请国内国际著名纯粹数学家，应用数学家，理论物理学家和计算机科学家，讲授现代拓扑和几何的理论，算法和应用。

回复“**目录**”，可以浏览往期精华；回复“**智商**”，可以阅读“**如何从大脑形状判断一个人的智商**”；回复“**象牙塔**”，可以阅读“**纯粹数学走出象牙塔**”；回复“**概览**”，可以阅读“**计算共形几何概览**”。