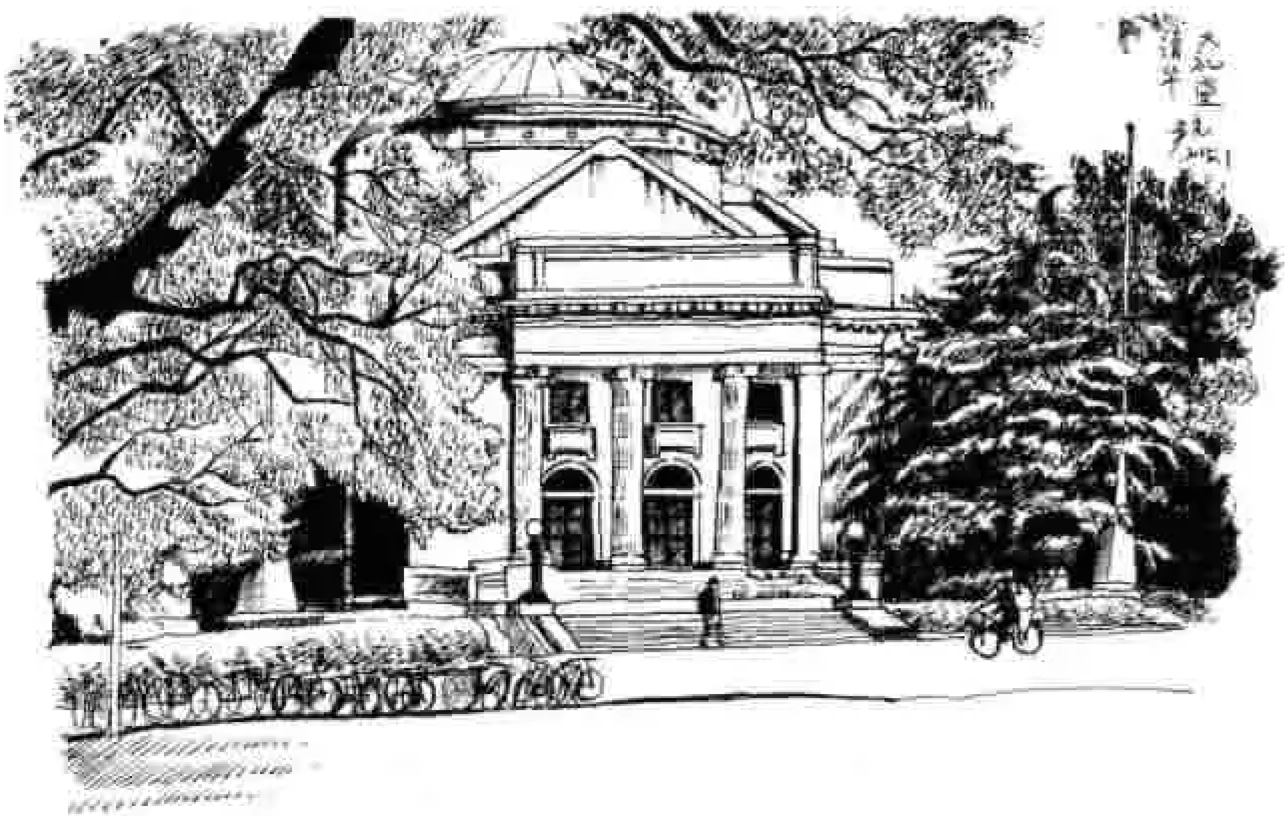
清华笔记：计算共形几何讲义 （13）Koebe 迭代收敛性

顾险峰 老顾谈几何 2017-07-25



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。欢迎任何有兴趣的朋友，前来旁听指导。】

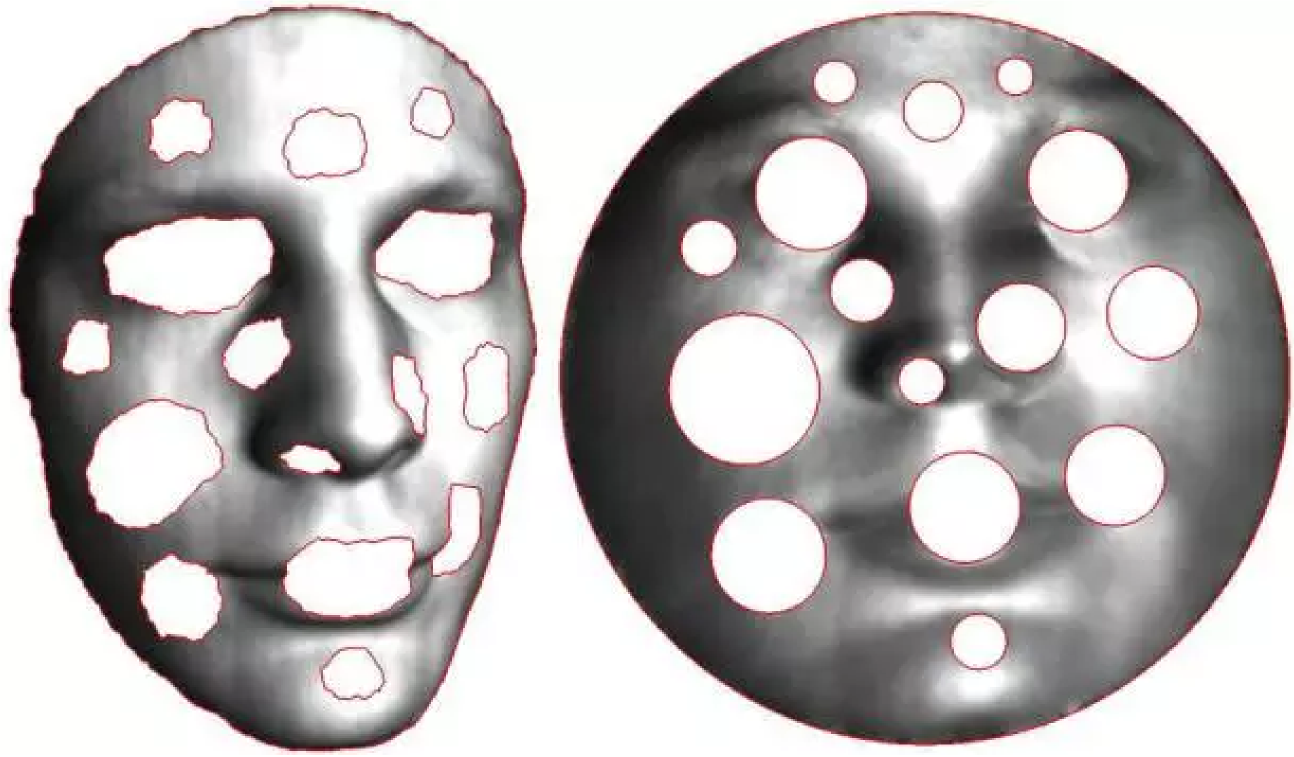
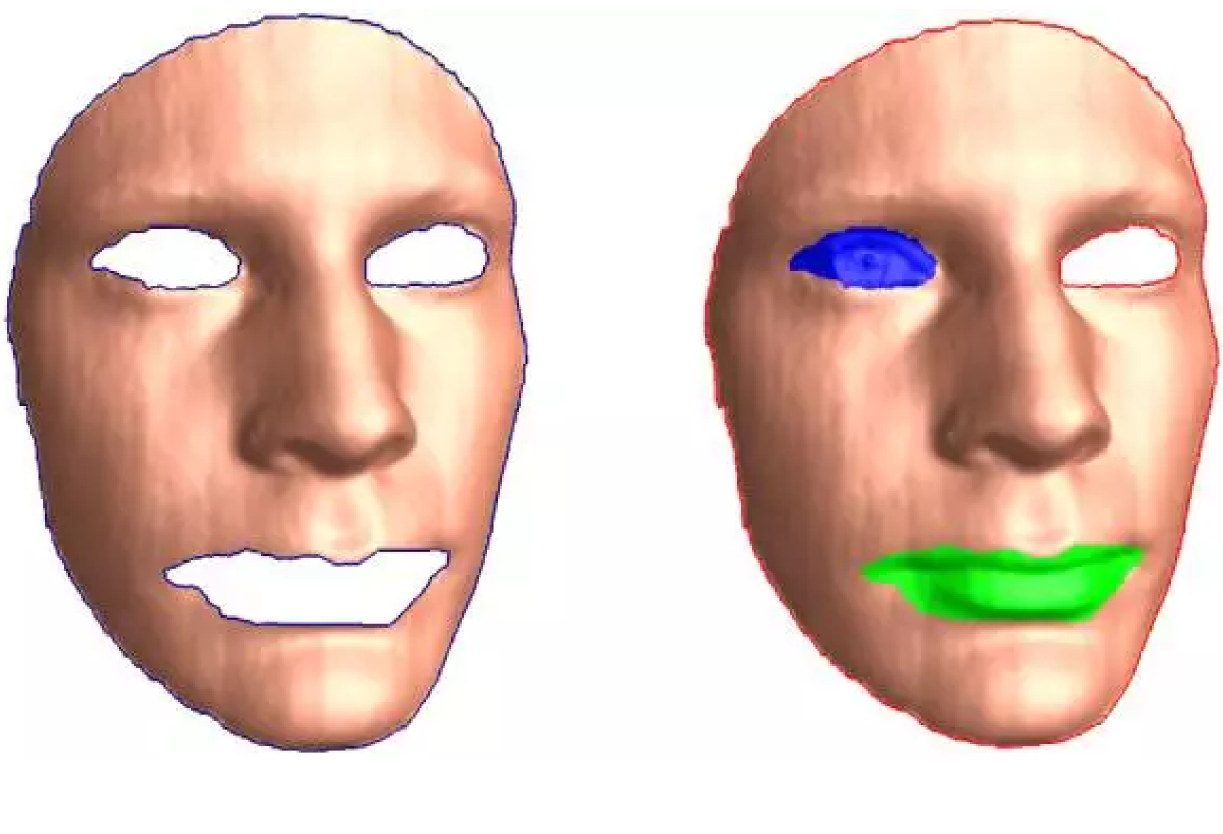
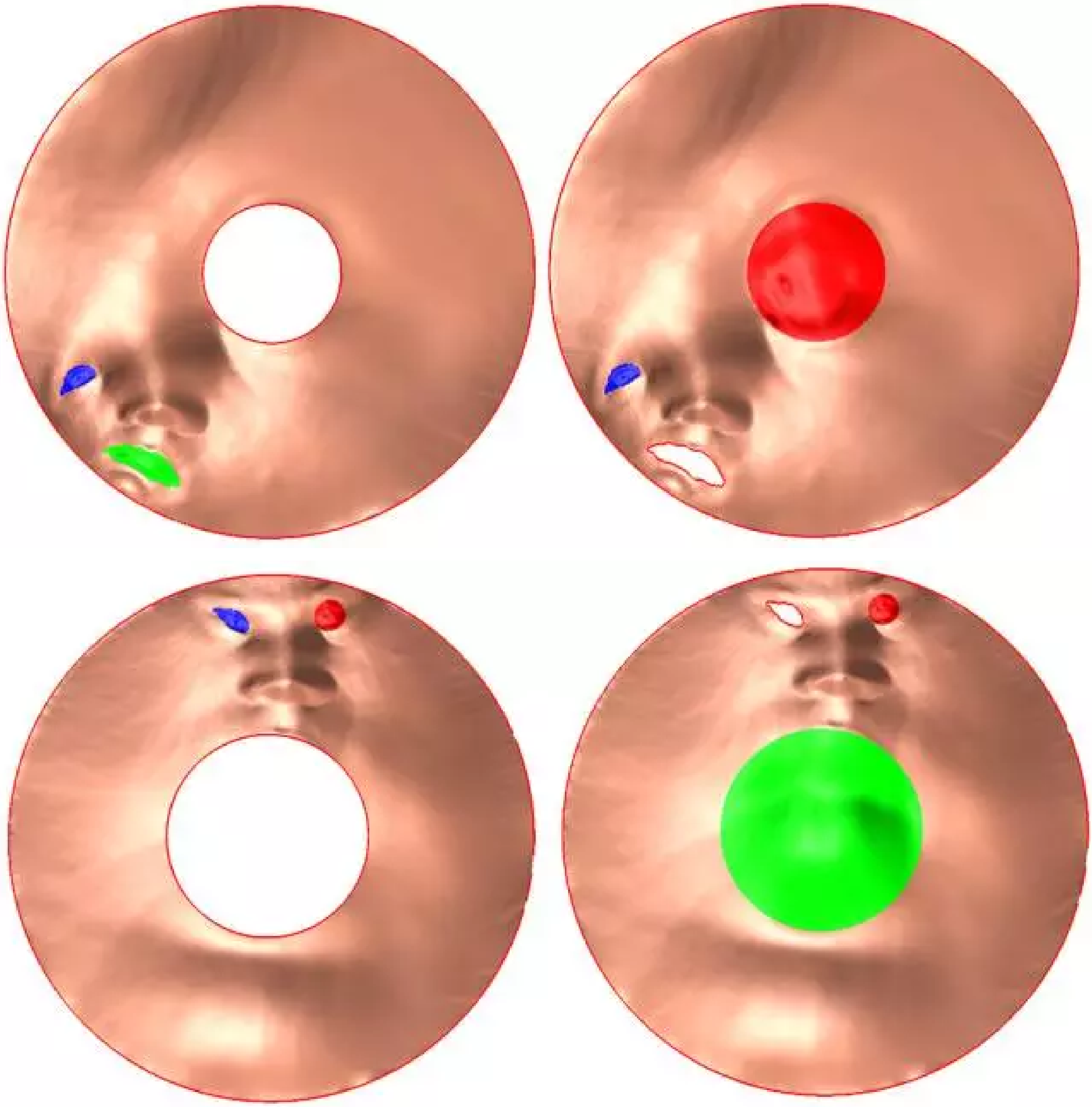


图1. 亏格为0、带有多个边界的曲面到平面圆域（Circle Domain）的共形映射。

这节课我们讲解亏格为零、带有多个边界曲面的共形模（conformal module）。如图1所示，带有多个洞的人脸曲面可以保角的映射到带有圆洞的平面圆盘（circle domain）上。这种映射彼此相差一个莫比乌斯变换。





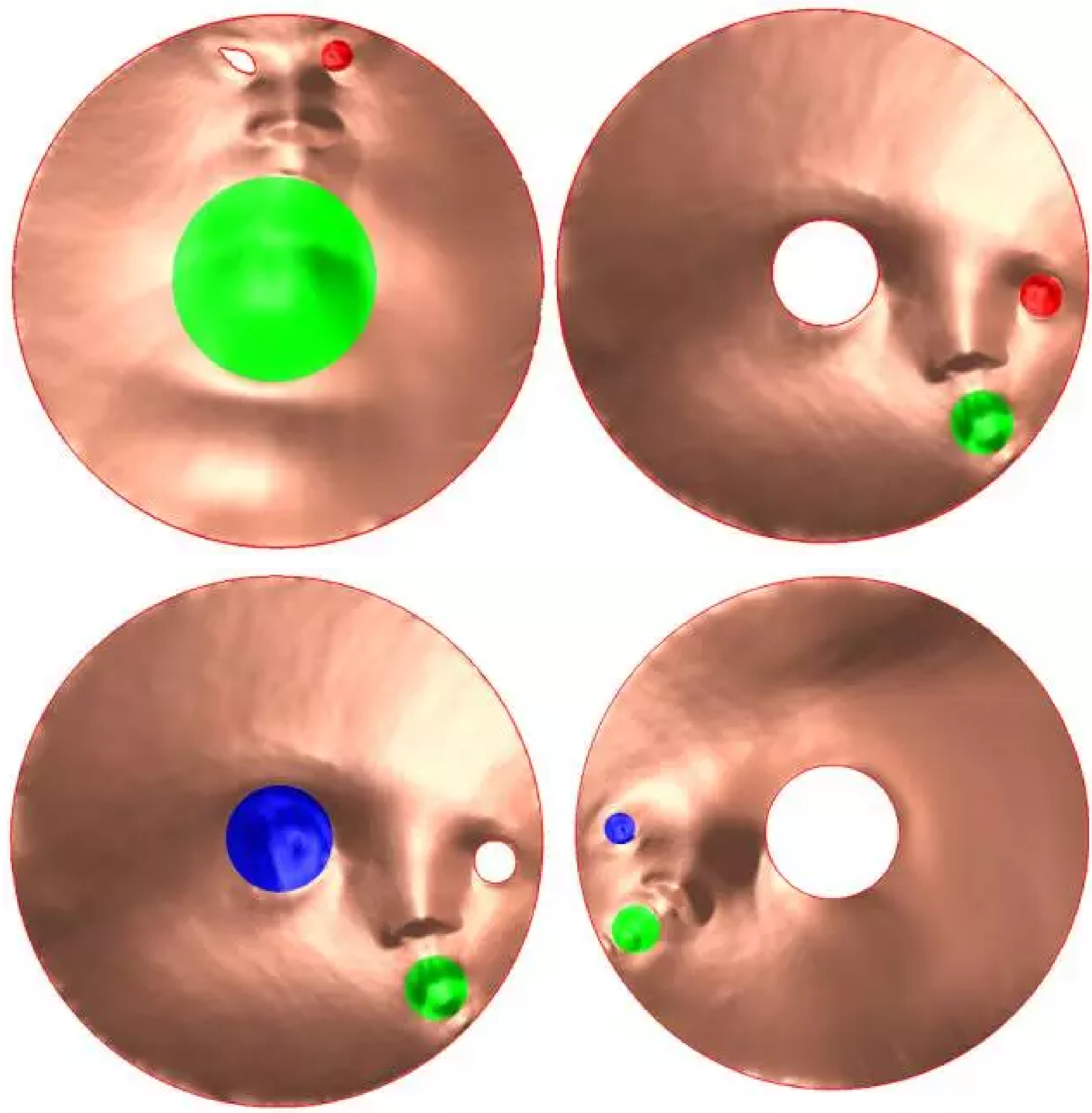


图2. Koebe迭代。

如图2所示，多联通区域到圆域（circle domain）的共形映射可以用Koebe迭代方法计算。假设多联通区域为R，其边界为

$$\partial R = \gamma_0 - \gamma_1 - \cdots - \gamma_n,$$

这里γ_0为外边界，其他$\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$为内边界。在第$k$步骤，我们将所有内边界填充，只留下$\gamma_k$，这里指标$k$代表模$n$再加上1，得到$C_k$，然后计算共形映射：$h_{k+1}: C_k \to C_{k+1}$，这里$C_{k+1}$是标准环带，$\partial C_{k+1} = \gamma_0 - \gamma_k$，$\gamma_0, \gamma_k$为标准同心圆。在第$k+1$步骤，我们将$C_{k+1}$的内圆$\gamma_k$填充，将$\gamma_{k+1}$打开，然后计算$h_{k+1}: C_{k+1} \to C_{k+2}$，将$\gamma_{k+1}$映成内圆。这时，

原来的内圆γ_k不再是标准圆形。如此反复，所有内边界形状越来越接近圆形；以至无穷，所有内边界都收敛成标准圆形。

Koebe迭代算法优美和谐，目前为止难以被其它方法所取代。但是其收敛性的证明深奥而繁难，角标系统相对复杂。

对称

给定圆周$\Gamma : |z - z_0| = \rho$，关于圆周反射定义为
$$\varphi_\Gamma : re^{i\theta} + z_0 \mapsto \frac{\rho^2}{r} e^{i\theta} + z_0$$。
我没说两个平面区域S, S'关于圆周Γ对称，如果$\varphi_\Gamma(S) = S'$。如果Γ不是圆周，区域S, S'和曲线Γ同时包含在一个平面区域R中，和定义在R上的共形映射$f : R \to \hat{\mathbb{C}}$，使得$f(\Gamma)$成为标准圆周，$f(S)$和$f(S')$关于$f(\Gamma)$对称，这时我们依然说$S, S'$关于曲线$\Gamma$对称，并记成
$$S|S' \quad (\Gamma)$$。

Schwartz 反射准则

假设全纯函数$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$定义在上半平面上，同时 F 在实数轴上取值为实数，那么函数可以被延拓成定义在整个复平面上，

$$\tilde{F}(z) = \begin{cases} F(z) & Img(z) \geq 0 \\ \overline{F(\bar{z})} & Img(z) < 0 \end{cases}$$。
因为上半平面和单位圆盘共形等价，因此如果全纯函数 F 定义在单位圆内部，并且单位圆的取值在单位圆上，那么应用Schwartz 反射， F 可以被延拓到单位圆外部。

关键引理

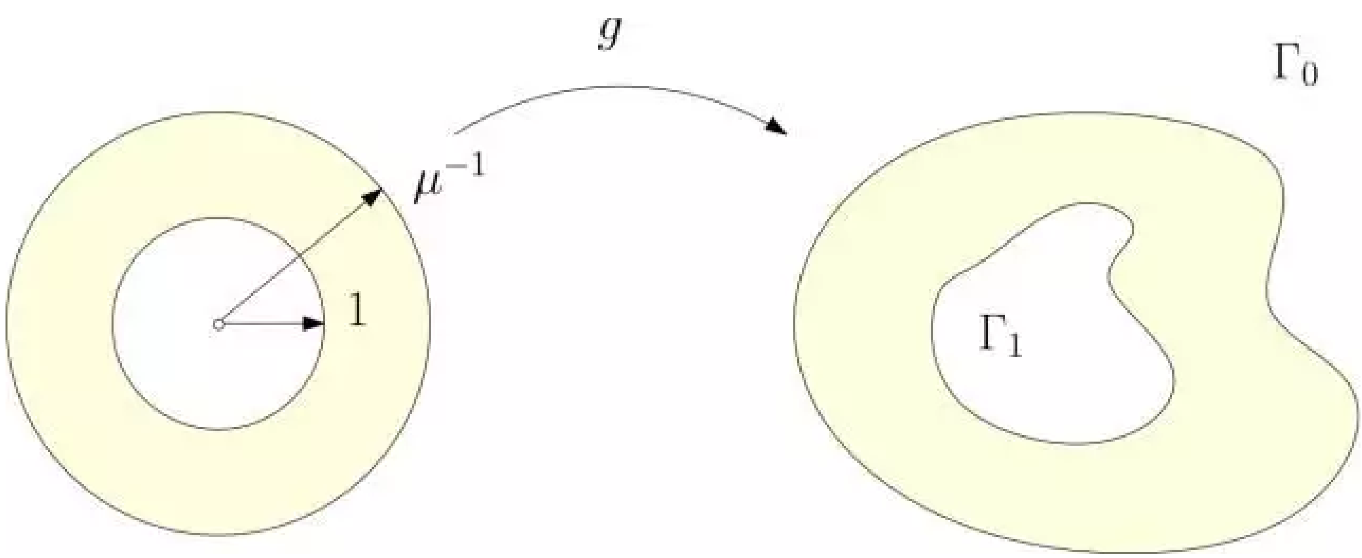


图3. 共形变换诱导的形变。

引理：假设A是一个拓扑环带，具有共形模$\mu^{-1} > 1$，内、外边界分别为Jordan曲线Γ_1, Γ_0，那么

$$\alpha(\Gamma_1) \le \mu^2 \alpha(\Gamma_0)$$

并且

$$[\mathrm{diam}\Gamma_1]^2 \le \frac{\pi}{2\log\mu^{-1}}\alpha(\Gamma_0),$$

这里$\alpha(\Gamma_0)$是曲线Γ_0所围绕的面积。

证明：令全纯函数g将标准环带 $\{1 \le |w| \le \mu^{-1}\}$映到拓扑环带A，

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n,$$

那么，

$$\alpha(\Gamma_1) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n|a_n|^2,$$

$$\alpha(\Gamma_0) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n|a_n|^2 \mu^{-2n},$$

因此，我们得到

$$\alpha(\Gamma_0) - \mu^{-2}\alpha(\Gamma_1) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n|a_n|^2(\mu^{-2n} - \mu^{-2}) \geq 0$$
。

直径$\dim \Gamma_1$被更大集合$g(\{1 < |w| < \rho\})$的直径所界定，这里$\rho \in (1, \mu^{-1})$。这些集合的直径被边界$g(|w| = \rho)$长度的一半所界定。于是我们有

$$2 \text{ diam } \Gamma_1 \leq \int_{|w|=\rho} |g'(w)|dw = \int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{i\theta})|\rho d\theta$$

由Schwartz引理，我们得到

$$[2 \text{ diam } \Gamma_1]^2 \leq \int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\theta \int_0^{2\pi} \rho d\theta = 2\pi\rho \int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

等价的

$$\frac{2}{\pi\rho}[\text{diam } \Gamma_1]^2 \leq \int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\theta$$
，

两边对ρ进行积分，即得第二个公式。证明完毕。

Koebe迭代

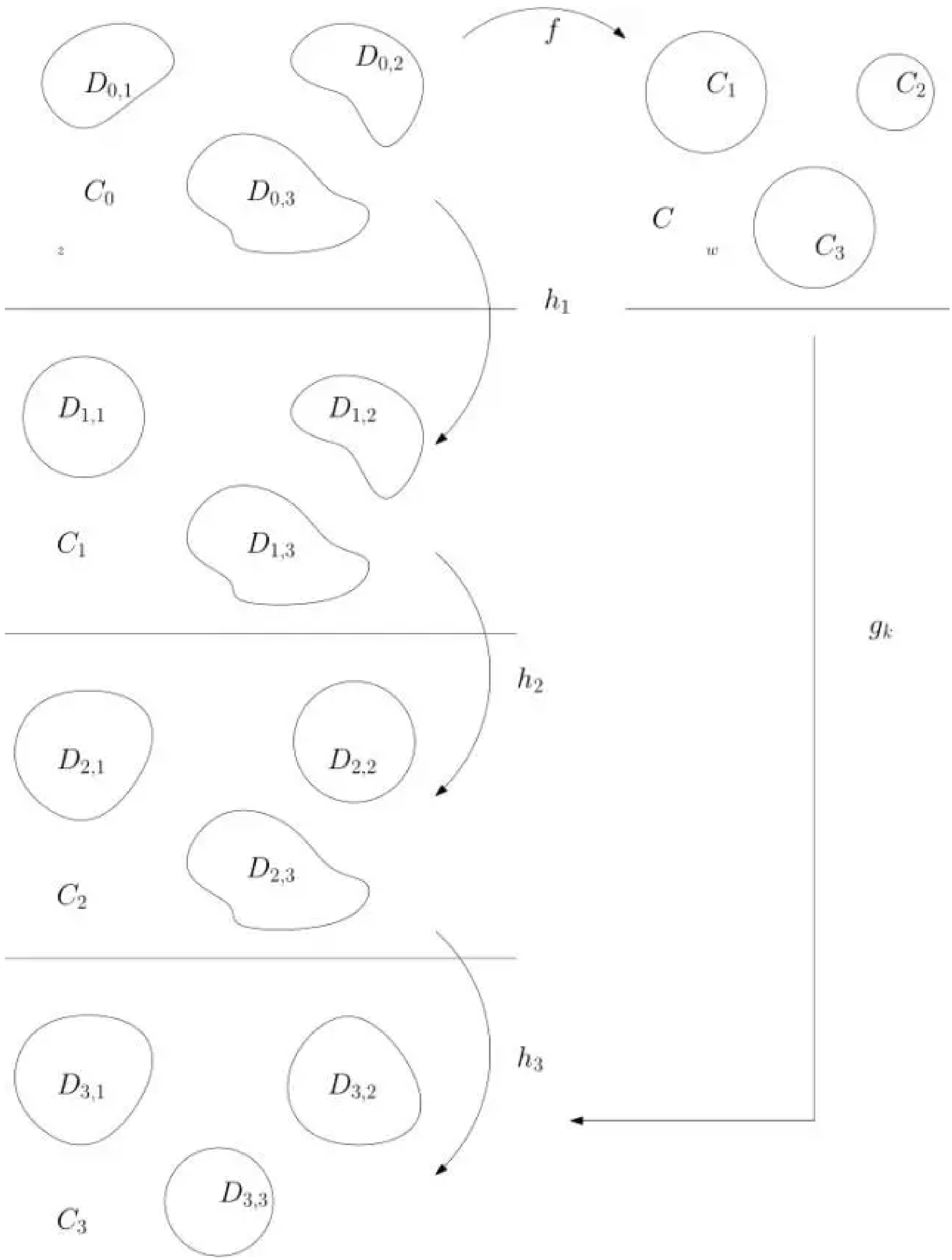


图4. Koebe's 迭代图解。

我们令$C_0=R$，包含无穷远点，$\infty\in C_0$，其在复平面上的补集为$\{D_{0,1},D_{0,2},\cdots,D_{0,n}\}$，其边界为$\partial D_{0,i}=\Gamma_{0,i}$，$i=1,2,\cdots,n$。
存在双全纯函数，$f:C_0\to C$，将多联通区域C_0映到圆域C。圆域C的补集为标准圆盘$\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$。同时在无穷远点附件，全纯函数具有归一化的形式，$f(z)=z+O(z^{-1})$。

应用黎曼映照，$h_1:C_0\to C_1$，将区域$D_{0,1}$映成单位圆$D_{1,1}$，同时$h_1(\infty)=\infty$，$h_1'(\infty)=1$。这样$D_{1,k}=h_1(D_{0,k})$，$k=1,2,\cdots,n$。如此反复，在第k步，构造黎曼映照$h_k:C_{k-1}\to C_k$，将$D_{k-1,k}$映成单位圆$D_{k,k}$；h_k在∞点归一化，$h_k(\infty)=\infty$，$h_k'(\infty)=1$。我们规定记号如下：

$$C_k=h_k(C_{k-1}),\ D_{k,i}=h_k(D_{k-1,i}),\ \Gamma_{k,i}=\partial D_{k,i}$$

构造双全纯映射：

$$f_k:C_0\to C_k,\ f_k=h_k\circ h_{k-1}\circ\cdots\circ h_1,$$

和从圆域C到C_k的双全纯映射，

$$g_k:C\to C_k,\ g_k=f_k\circ f^{-1},$$

在无穷远点归一化，$g_k(\infty)=\infty$，$g_k'(\infty)=1$。

因为$\Gamma_{1,1}$是标准单位圆，C_1能够关于$\Gamma_{1,1}$进行反射，其镜像记为C_1^1。黎曼映照h_k，$k=2,3,\cdots,n$定义在$C_k\cup D_{k,1}$上，区域

$$C_k^1:=h_k\circ h_{k-1}\circ\cdots\circ h_2(C_1^1),\quad k=2,\cdots,n,$$

满足

$$C_k^1|C_k\quad(\Gamma_{k,1})。$$

映射h_{n+1}在$D_{n,1}$上没有定义，但是它将边界$\partial D_{n,1}=\Gamma_{n,1}$映成标准圆，根据对称性原则，$h_{n+1}$可以被延拓，延拓后的$h_{n+1}$将$C_n^1$映成$C_{n+1}^1$，并且

$$C_{n+1}^1|C_{n+1}\quad(\Gamma_{n,1})。$$

重复迭代过程，我们得到一个序列$\{C_{k,1}\}$，满足对称关系：

$$\forall k \geq 1, \quad C_k^1 | C_k \quad (\Gamma_{k,1})$$。

同样，$\Gamma_{2,2}$是标准圆，C_2^2是C_2关于$\Gamma_{2,2}$的对称像，

$$C_k^2 := h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots h_3(C_2^2)$$,

这里，每个h_{kn+2}映射都需要用反射原则（reflection principle）来解析延拓。我们有对称关系：

$$\forall k \geq 2, \quad C_k^2 | C_k \quad (\Gamma_{k,2})$$。

同样，对于任意的$i = 3, \cdots, n$，$k \geq i$，我们定义区域C_k^i，使得对称关系成立：

$$\forall k \geq i, \quad C_k^i | C_k \quad (\Gamma_{k,i})$$。

经过第一轮迭代，所有的区域$C_k^i, \ i = 1, 2, \ldots, n$都被定义。因为$\Gamma_{n+1,1}$再度成为单位圆，我们定义$C_{n+1}^{i1}$为$C_{n+1}^i$关于$\Gamma_{n+1,1}$的反射图像。$C_{n+1}^{11} = C_{n+1}$，但是其他的$C_{n+1}^{i1}$为新生成的区域。应用延拓后的黎曼映照，我们得到一系列的镜像区域：

$$C_k^{i1} | C_k^i, \quad (\Gamma_{k,1}) \ \ \forall k \geq n+1, \ i = 2, \ldots, n$$,

同样，我们可以定义镜像区域：

$$C_k^{ij} | C_k^i, \quad (\Gamma_{k,j}) \ \ \forall k \geq n+j$$,

经过m轮迭代，我们得到m重镜像$C_k^{i_1 i_2 \cdots i_m}$，满足对称关系：

$$C_k^{i_1 i_2 \cdots i_m i_{m+1}} | C_k^{i_1 i_2 \cdots i_m} \quad (\Gamma_{k, i_{m+1}}), \quad k > (m+1)n$$。

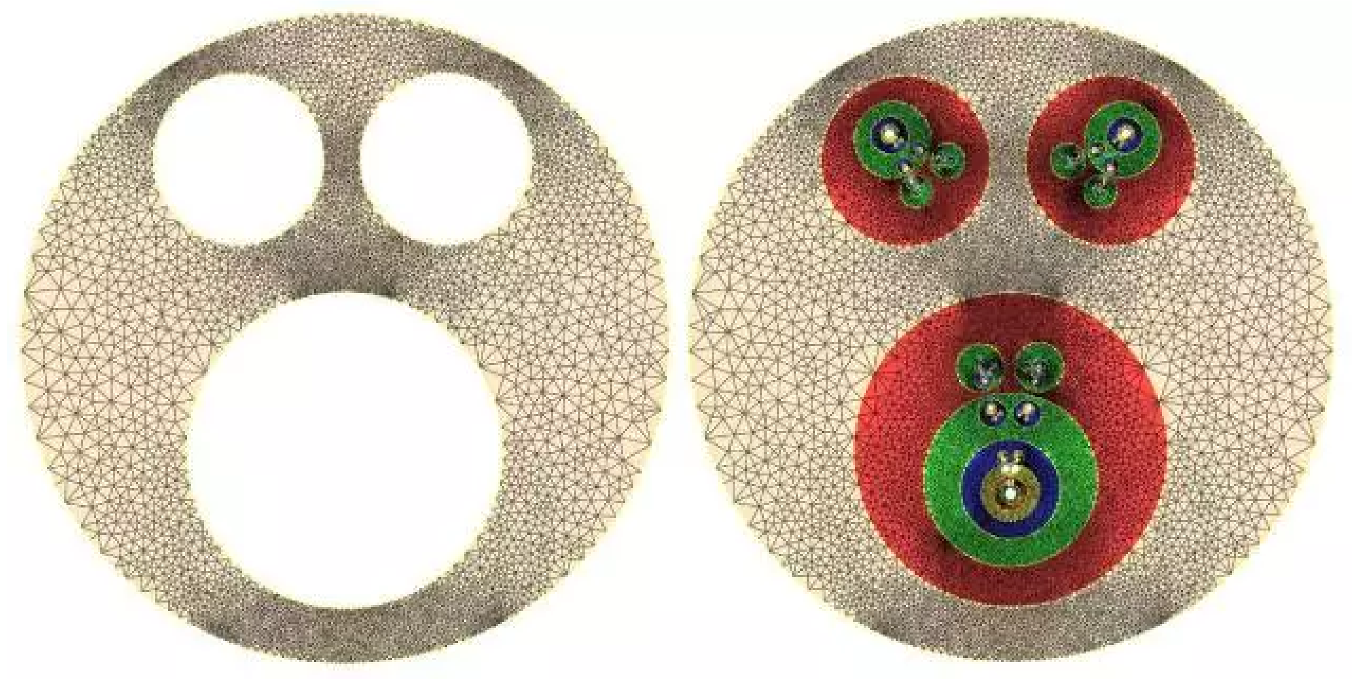


图5. 圆域上的多重镜像反射。

考察映射$g_k^{-1} = f \circ f_k^{-1}$，我们有

$$C = g_k^{-1}(C_k)$$

不依赖于角标k。同样，所有C_k的多重镜像

$$C^{i_1 \cdots i_m} = g_k^{-1}(C_k^{i_1 \cdots i_m}),$$

及其边界

$$\Gamma_j^{i_1 \cdots i_m} = g_k^{-1}(\Gamma_{k,j}^{i_1 \cdots i_m})。$$

圆域C的n个边界$\{\Gamma_j\}$都是圆，彼此相离。这些边界曲线都是$\{\Gamma_j\}$多重镜像，也都彼此相离。

我们在w-平面上进行如下操作。我们将所有的Γ_j同心放大，直至有两个圆相切，这时的圆记为$\tilde{\Gamma}_j$，放大系数为$\rho = \mu^{-1}$。我们将$\tilde{\Gamma}_j$关于$\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \cdots, \Gamma_{i_m}$进行多重反射，其镜像记为

$$\tilde{\Gamma}_j^{i_1 i_2 \cdots i_m}。$$

令A_j表示标准环带，其边界为

$$\partial A_j = \tilde{\Gamma}_j - \tilde{\Gamma}_j^j,$$

其共形模为

$$mod(A_j) = \mu^{-2},$$

它的任意镜像都具有相同的共形模

$$mod(A_j^{i_1 i_2 \cdots i_m}) = \mu^{-2}。$$

这些标准环带在共形映射下的像也具有相同的共形模μ^{-2}，我们记为

$$A_{k,j}^{i_1 \cdots i_m} := g_k(A_j^{i_1 \cdots i_m}),$$

其边界为

$$\Gamma_{k,j}^{i_1 \cdots i_m} := g_k(\Gamma_j^{i_1 \cdots i_m})。$$

我们的目的是估计全纯函数 $g_k(w) - w$，圆域的k 重镜像反射是

$$\hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i_1 i_2 \cdots i_m, j \neq i_1} D_j^{i_1 i_2 \cdots i_m}$$

每个圆盘的边界为

$$\partial D_j^{i_1 i_2 \cdots i_m} = \Gamma_j^{i_1 i_2 \cdots i_m},$$

这里的指标$(i) := i_1 i_2 \cdots i_m$，满足任意相邻的一对脚标不等，同时 $j \neq i_1$。我们选择一个足够大的圆周Γ_ρ，包括所有的初始补集圆盘D_j，对于一切属于初始圆域的点

$$w \in C = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} D_j,$$

根据柯西公式（Cauchy formula）

$$g_k(w) - w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{g_k(s) - w}{s - w} ds - \sum_{(i),j} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j^{(i)}} \frac{g_k(s) - w}{s - w} ds,$$

因为$g_k(w) - w = O(w^{-1})$， 当$\rho \to \infty$时

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{g_k(s) - w}{s - w} ds \to 0,$$

对于余下的积分，因为 w 在所有的圆 $\Gamma_j^{(i)}$ 之外，积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j^{(i)}} \frac{s}{s - w} ds = 0。$$

对于任意复数$c_j^{(i)}$，积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j^{(i)}}\frac{c_j^{(i)}}{s-w}ds=0,$$

我们得到

$$g_k(w)-w=-\sum_{(i),j}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j^{(i)}}\frac{g_k(s)-c_j^{(i)}}{s-w}ds \qquad (*)$$

令距离常数

$$\delta:=\min_{i\neq j}\ dist(\Gamma_i,D_j^i),$$

我们有$\delta>0$，因为 $\Gamma_j^{(i)}\subset D_j^{i_1}$，$|s-w|>\delta$。更进一步，我们定义

$$\delta_{k,j}^{(i)}:=\operatorname{diam}\left(\Gamma_{k,j}^{(i)}\right),$$

曲线$\Gamma_{k,j}^{(i)}=g_k(\Gamma_j^{(i)})$在半径为$\delta_{k,j}^{(i)}$的圆中，我们将$c_j^{(i)}$选成这个圆的圆心，那么对于一切$s\in\Gamma_j^{(i)}$，

$$|g_k(s)-c_j^{(i)}|\leq\delta_{k,j}^{(i)},$$

积分路径的长度是$\pi\delta_j^{(i)}$，这里$\delta_j^{(i)}=\dim(\Gamma_j^{(i)})$，由（*）式我们得到

$$\begin{aligned}|g_k(w)-w| &\leq \sum_{(i)}\sum_j\frac{1}{\pi\delta}\delta_{j,k}^{(i)}\delta_j^{(i)}\\ &\leq \sum_{(i)}\sum_j\frac{1}{2\pi\delta}\left([\delta_{j,k}^{(i)}]^2+[\delta_j^{(i)}]^2\right)\end{aligned}$$

由引理，考虑以$\tilde{\Gamma}_{k,j}^{(i)},\Gamma_{k,j}^{(i)}$为边界的拓扑环带，我们得到估计

$$[\delta_{k,j}^{(i)}]^2\leq\frac{\pi}{2\log\mu^{-1}}\alpha(\tilde{\Gamma}_{k,j}^{(i)})$$

同时，

$$[\delta_j^{(i)}]^2=\frac{4}{\pi}\alpha(\Gamma_j^{(i)})=\frac{4}{\pi}\mu^2\alpha(\tilde{\Gamma}_j^{(i)})。$$

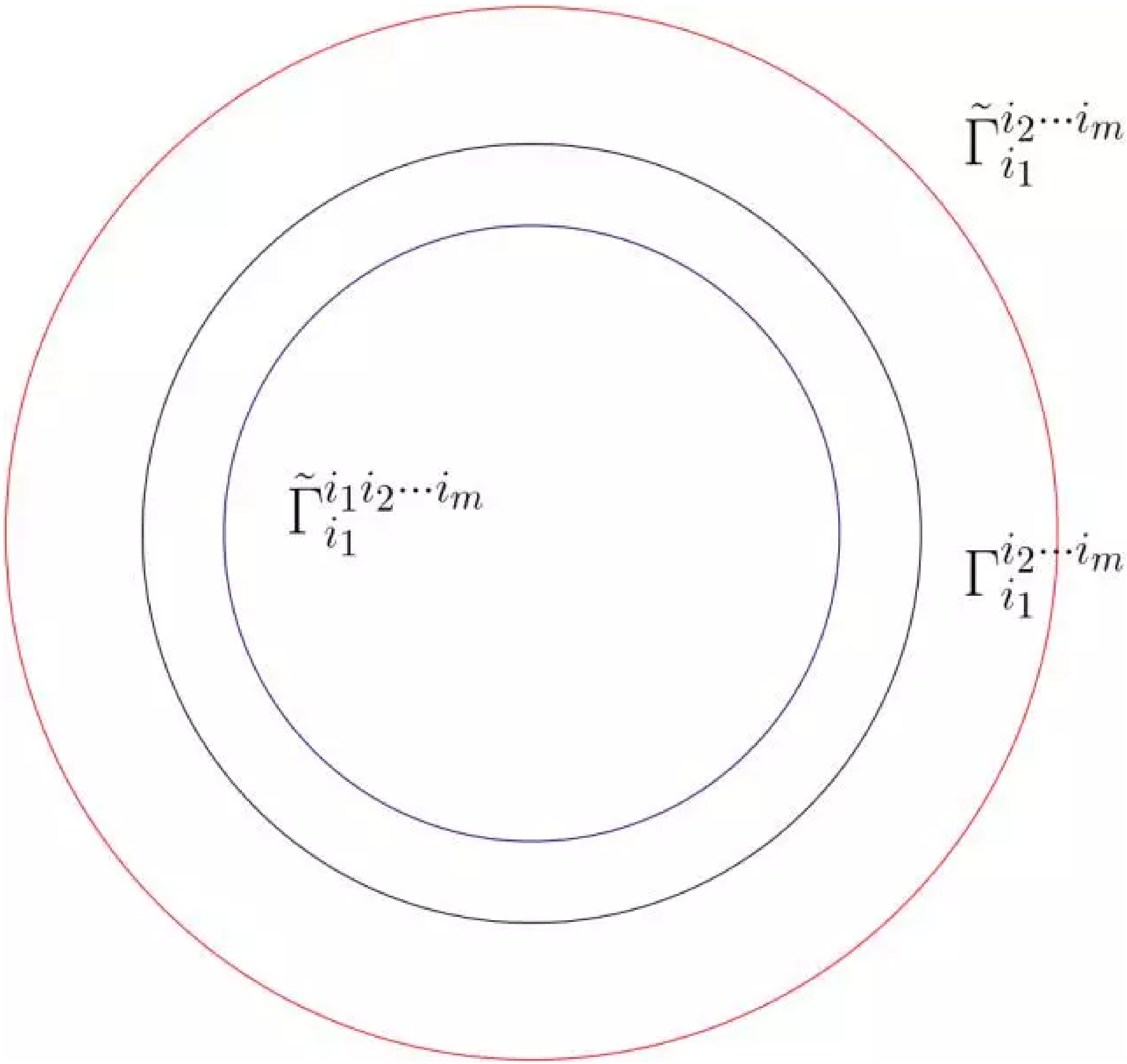


图6. 标号图解。

考察所有的圆$\Gamma_j^{i_1\cdots i_m}, j \neq i_1$，它们都在圆盘$C^{i_1\cdots i_m}$的内部，因为

$$C^{i_1 i_2\cdots i_m} | C^{i_2\cdots i_m} \quad (\Gamma_{i_1}^{i_2\cdots i_m})$$

因此所有这些圆$\Gamma_j^{i_1 i_2\cdots i_m}$都在$\Gamma_{i_1}^{i_2\cdots i_m} = \partial C^{i_1 i_2\cdots i_m}$之内，因此也都在$\tilde{\Gamma}_{i_1}^{i_1 i_2\cdots i_m}$之内。我们得到不等式：

$$\sum_{(i),j} \alpha(\tilde{\Gamma}_j^{(i)}) \leq \sum_{(i)} \alpha(\tilde{\Gamma}_{i_1}^{(i)}),$$

同样的

$$\sum_{(i),j}\alpha(\tilde{\Gamma}^{(i)}_{k,j})\le\sum_{(i)}\alpha(\tilde{\Gamma}^{(i)}_{k,i_1}),$$

考察环带$A^{i_2\cdots i_m}_{i_1}$，其边界为

$$\partial A^{i_2\cdots i_m}_{i_1}=\tilde{\Gamma}^{i_2\cdots i_m}_{i_1}-\tilde{\Gamma}^{i_1 i_2\cdots i_m}_{i_1},$$

共形模为

$$\sum_{(i)}\alpha(\tilde{\Gamma}^{i_1 i_2\cdots i_m}_{i_1})\le\mu^4\sum_{(i)}\alpha(\tilde{\Gamma}^{i_2\cdots i_m}_{i_1})。$$

同理，考察g_k的像，

$$\sum_{(i)}\alpha(\tilde{\Gamma}^{i_1 i_2\cdots i_m}_{k,i_1})\le\mu^4\sum_{(i)}\alpha(\tilde{\Gamma}^{i_2\cdots i_m}_{k,i_1})。$$

所有圆$\tilde{\Gamma}^{i_2\cdots i_m}_{i_1}$都包含在$\tilde{\Gamma}^{i_2\cdots i_m}_{i_2}$内，因此

$$\sum_{i_1\cdots i_m}\alpha(\tilde{\Gamma}^{i_2\cdots i_m}_{i_1})\le\sum_{i_2\cdots i_m}\alpha(\tilde{\Gamma}^{i_2\cdots i_m}_{i_2})\le\mu^4\sum_{i_2\cdots i_m}\alpha(\tilde{\Gamma}^{i_3\cdots i_m}_{i_2})$$

继续下去，我们得到

$$\sum_{(i),j}\alpha(\tilde{\Gamma}^{(i)}_{j})\le\mu^4\sum_{i_1\cdots i_m}\alpha(\tilde{\Gamma}^{i_2\cdots i_m}_{i_1})\le\cdots\le\mu^{4m}\sum_{i_m}\alpha(\tilde{\Gamma}_{i_m}),$$

最后一项求和式的值等于所有圆盘D_{i_m}的面积和乘以μ^{-2}，我们记之为γ_1。至此，我们得到

$$\sum_{(i),j}[\delta^{(i)}_j]^2\le\frac{4}{\pi}\mu^{4m}\gamma_1。$$

同样的，在z平面上，我们得到估计

$$\sum_{(i),j}[\delta^{(i)}_{k,j}]^2\le\frac{\pi}{2\log\mu^{-1}}\mu^{4m-2}\gamma_2,$$

这里γ_2是所有曲线Γ_{k,i_m}所围区域的面积之和。

如果所有的标准圆盘D_i都包含在大圆$|w|<\rho$之内。全纯函数 $g_k(w)=w+\cdots$ 在区域$|w|>\rho$上是单值的（univalent），根据Koebe 1/4定理，圆域C的像$g_k(C)$包含$|z|>4\rho$，由此我们得到估计

$$\gamma_2 \leq 16\pi\rho^2。$$

综上所诉，我们得到最终的估计，当$k > mn$时：

$$|g_k(w) - w| \leq \frac{1}{2\pi\delta}\left(\frac{\pi}{2\mu^2 \log \mu^{-1}} 16\pi\rho^2 + \frac{4}{\pi}\pi\rho^2\right)\mu^{4m}$$

至此，我们证明了Koebe迭代算法的收敛性，给出了收敛阶。
