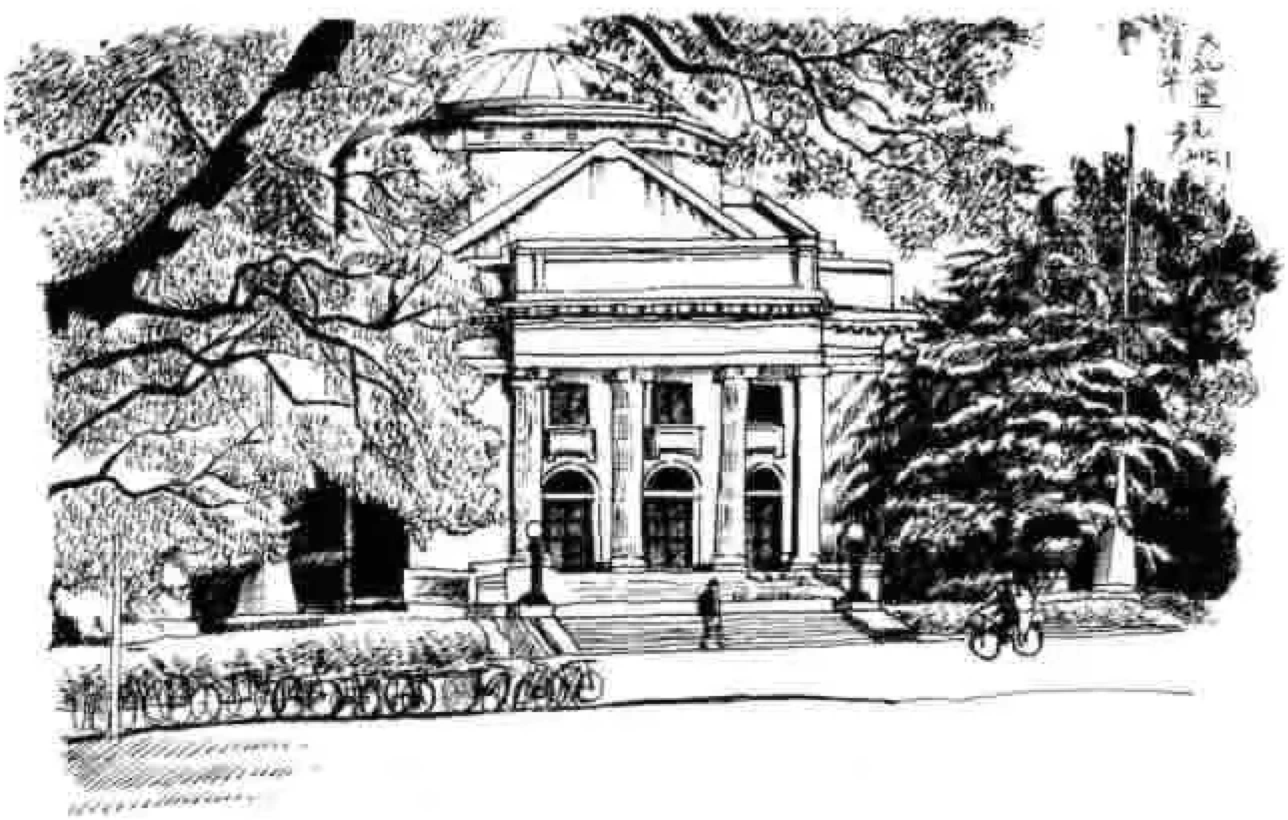
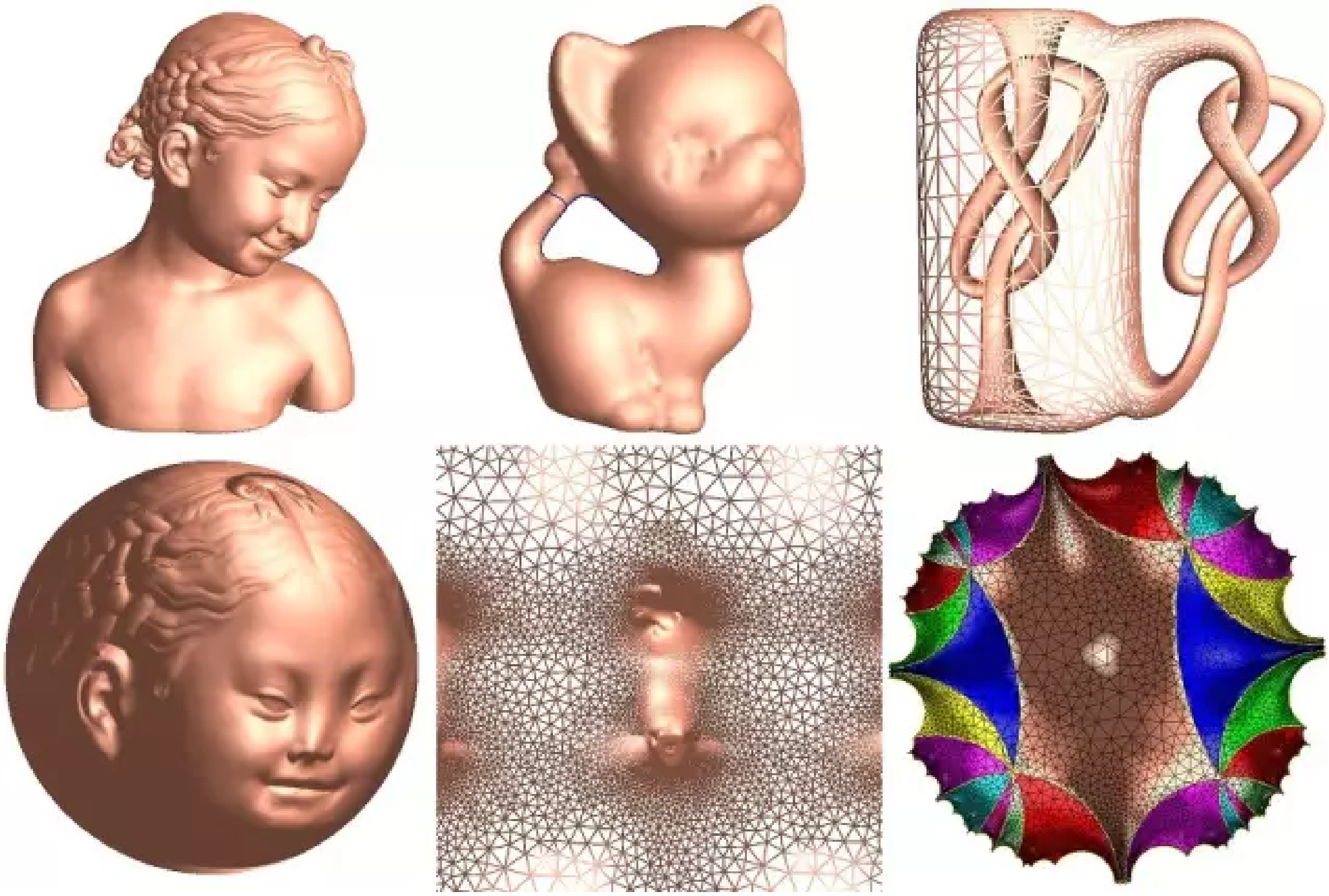
清华笔记：计算共形几何讲义 (26) 单值化定理证明

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-30





黎曼面单值化定理是曲面微分几何最为深刻而基本的定理之一，其证明方法丰富多彩，例如基于复分析的古典方法，基于Ricci流的现代方法，基于射影结构的代数方法等等。这里我们给出最为朴实无华的初等复变函数方法，简单直观并且可以直接推广到离散情形。

定理 （Poincare-Koebe Uniformization）任意一个单联通的黎曼面都和三个标准黎曼面中的一个共形等价：扩展复平面$\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$(单位球面$\mathbb{S}^2$)，复平面$\mathbb{C}$或者单位圆盘$\mathbb{D}$。

这一讲我们给出曲面单值化定理的一个基于复分析原理的初等证明。我们首先证明开的单连通黎曼面的情形，然后推广到闭单连通黎曼面的情形。

我们采用和组合单值化定理相似的证明手法。给定单联通的开曲面$\widetilde{M}$，和一个**可数无穷**的三角剖分$\mathcal{T}$，将三角剖分的面进行排列

$$\mathcal{T}=\{\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\cdots,\Delta_n,\cdots\}$$

使得$\mathcal{T}_n=\bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k$是单联通的拓扑圆盘，然后构造一系列黎曼映照，

$\varphi_n : \mathcal{T}_n \to \mathbb{D}$，满足归一化条件。当n趋向于无穷时，$\mathcal{T}_n$穷尽了可数无穷三角剖分$\mathcal{T}$，得到极限映射$\varphi : \widetilde{M} \to \mathbb{C}$，$\varphi$的极限行为分成两种情况，$\varphi(\widetilde{M})$或者覆盖整个复平面，或者覆盖单位圆盘。

证明的关键是从$\varphi_n : \mathcal{T}_n \to \mathbb{D}$解析延拓到$\varphi_{n+1} : \mathcal{T}_{n+1} \to \mathbb{D}$，所用的主要工具是Schwartz反射原理，这一方法使我们能够将一个解析函数的定义域拓展。

Liouville定理

单位球面$\mathbb{S}^2$和扩展复平面$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$彼此共形等价，共形同胚由球极投影映射给出。复平面$\mathbb{C}$和单位圆盘$\mathbb{D}$都是开集，因此和单位球面$\mathbb{S}^2$不同胚。Liuelville证明复平面$\mathbb{C}$和单位圆盘$\mathbb{D}$彼此并非共形等价。

定理 （Liouville’s theorem）假设全纯函数$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 有界$|f(z)| < M, \forall z \in \mathbb{C}$，那么函数为常数 $f(z) = \text{const}$。

证明：根据Cauchy积分公式：

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

这里积分路径是以a为圆心，以γ为边界的圆。

$$|f'(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\gamma} d\theta = \frac{M}{\gamma},$$

当半径趋于无穷的时候，导数的模趋于0。因此，全纯函数为常数。

因此，复平面$\mathbb{C}$，单位圆盘$\mathbb{D}$和单位球面$\mathbb{S}^2$是三种彼此不共形等价的单联通黎曼面。我们下面证明所有单联通的黎曼面和其中的一种共形等价。

Schwartz 反射原则

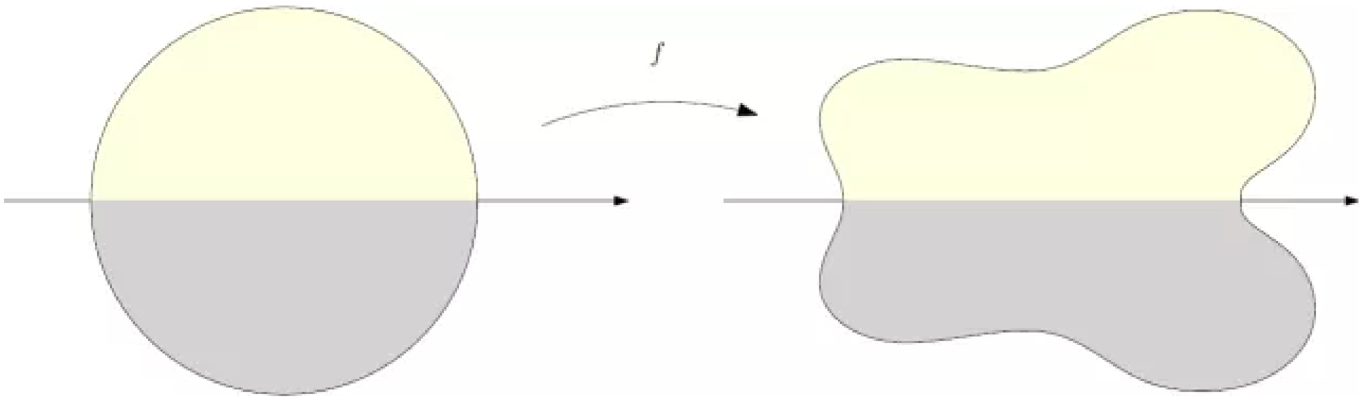


图1. Schwartz reflection principle。

定理（Schwartz Refelection Principle）假设f是一个解析函数，定义在上半圆盘$\{|z|^2<1, \mathrm{Im}(z)>0\}$，$f$可以拓展到定义在实数轴上的一个连续函数，那么$f$能够被拓展到定义在整个单位圆盘上的解析函数，满足 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$。

令人惊讶的是虽然我们只假设函数沿着实数轴连续，没有关于可微性的假设，但是拓展后的函数沿着实数轴是解析的。通过应用Schwartz反射原理，我们可以将一个解析函数的定义域进行拓展，相应地，值域也随之拓展。

在实际应用中，实数轴可以被替换成圆周，这对于问题没有本质影响。

我们用Schwartz 反射原则来证明一个引理，这个引理将定义在新月形状区域上的解析函数延拓到整个圆盘，我们称之为新月满月引理。

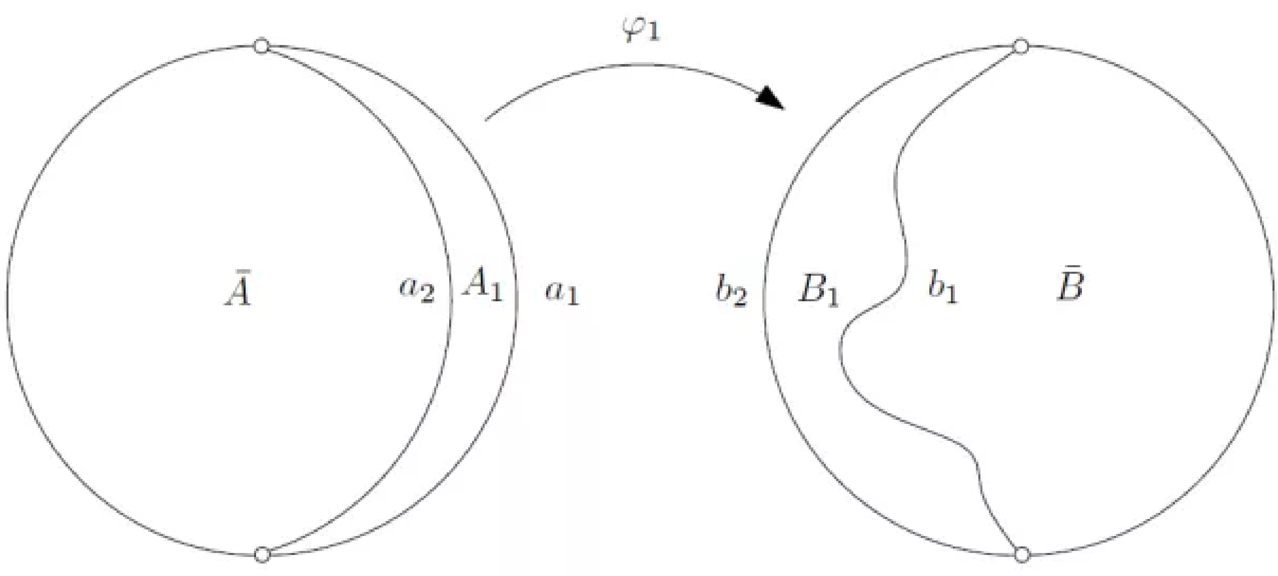


图2. 初始映射。

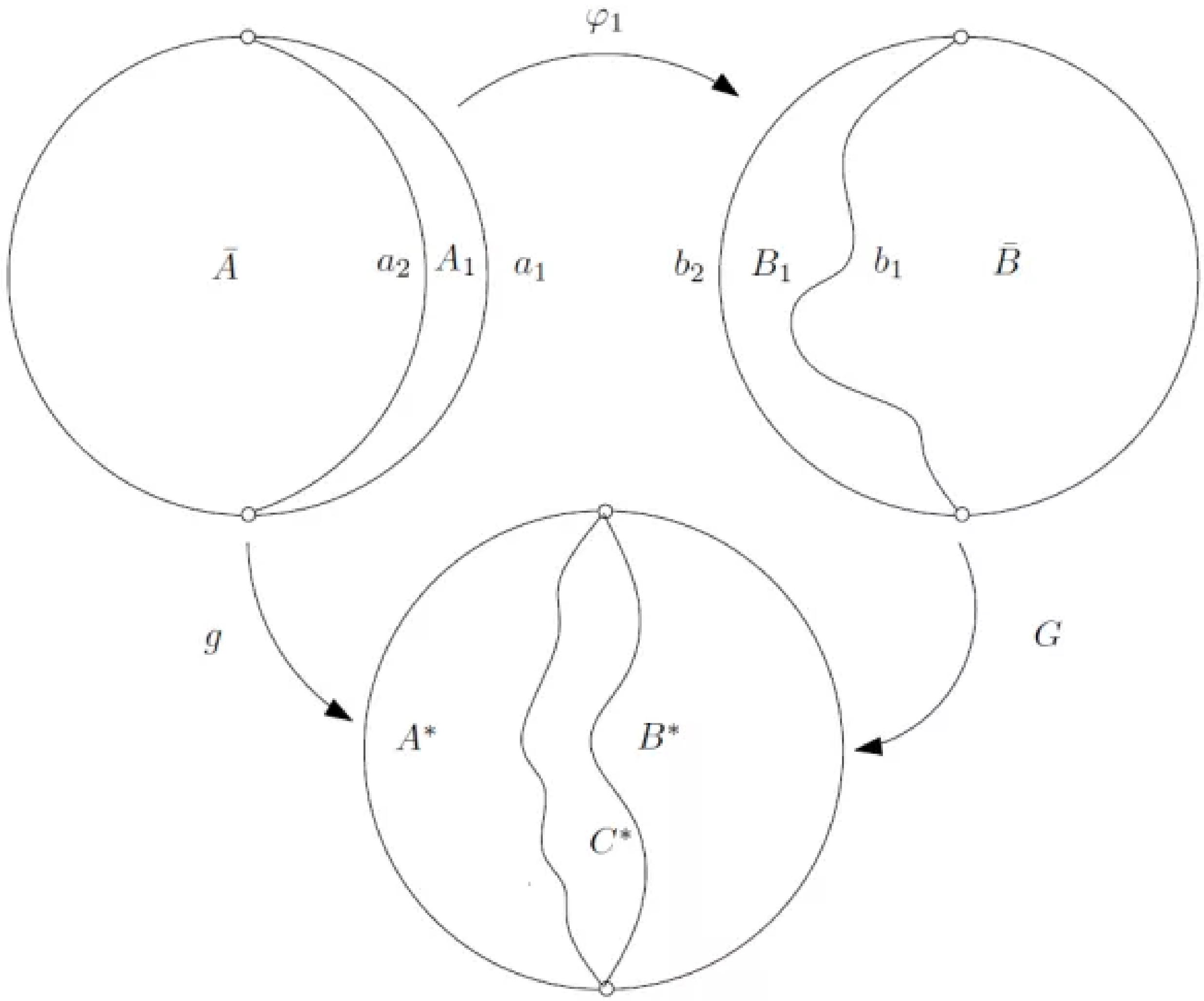


图3. 解析延拓结果。

引理 （新月-满月）如图2所示，新月形状区域A_1的边界是圆弧a_1和a_2，这里圆弧a_1和a_2在交点处的夹角为$\pi/2^k$。共形映射（解析函数）$\varphi_1 : A_1 \to B_1$的定义域为新月区域A_1，$\varphi_1(a_k) = b_k$，b_2是圆弧。那么存在解析函数 $g, G : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，如图3所示，满足

1. $A^* = g(\bar{A}),\ C^* = g(A_1)$
2. $B^* = G(\bar{B}),\ C^* = G(B_1)$
3. $g|_{A_1} = G \circ \varphi_1|_{A_1}$

并且限制在每个区域的边界上，g 和 G 为拓扑同胚。

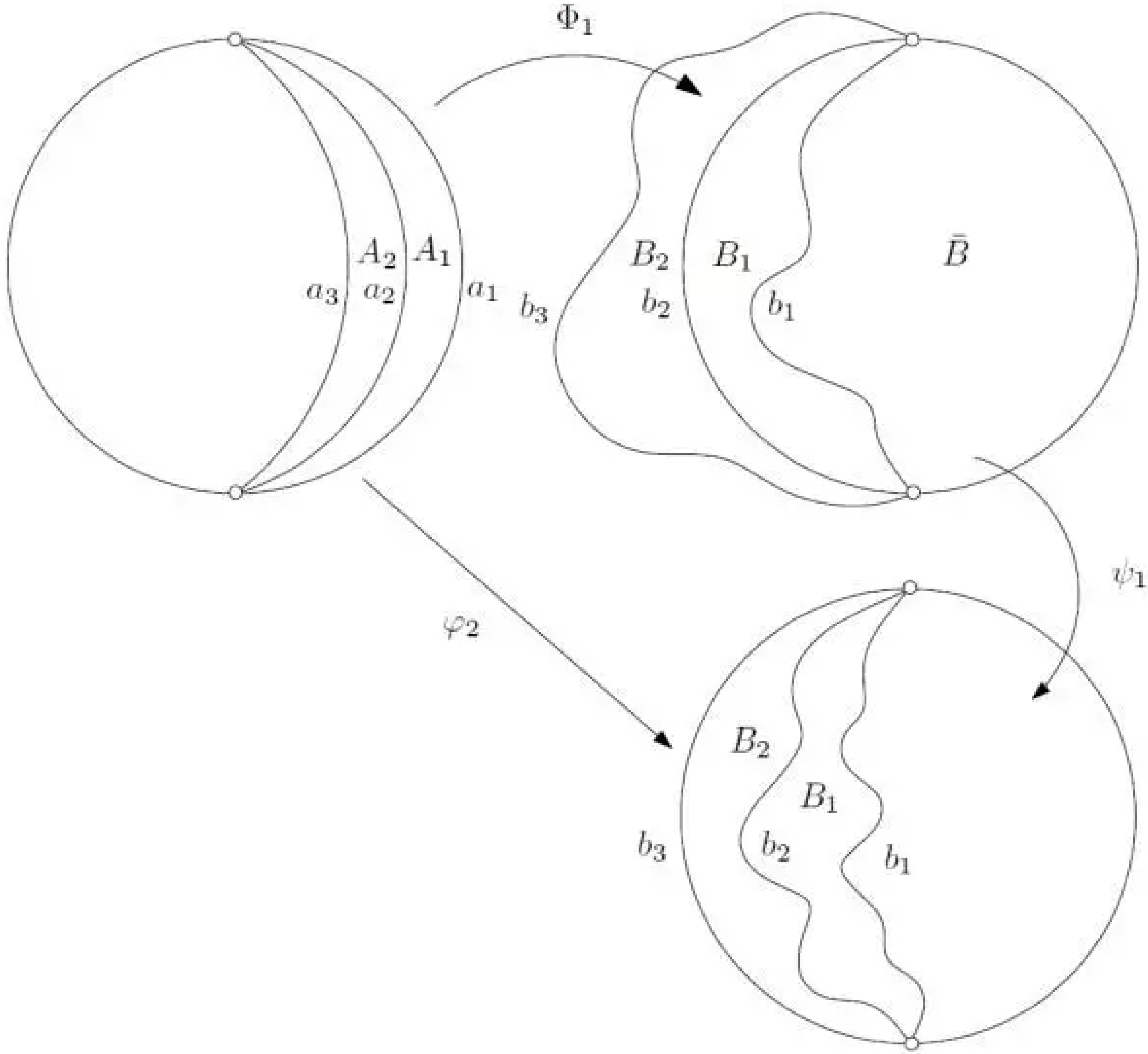


图4. 第一步解析延拓。

证明：如图4所示，新月区域A_1和A_2关于圆弧a_2对称，应用Schwartz反射原则，解析函数$\varphi_1 : A_1 \to B_1$关于圆弧a_2拓展成 $\Phi_1 : A_1 + A_2 \to B_1 + B_2$。用黎曼映照图$\psi_1 : B_1 + B_2 + \bar{B} \to \mathbb{D}$将值域映成单位圆盘。复合映射为：

$$\varphi_2 = \psi_1 \circ \Phi_1 : A_1 + A_2 \to B_1 + B_2。$$

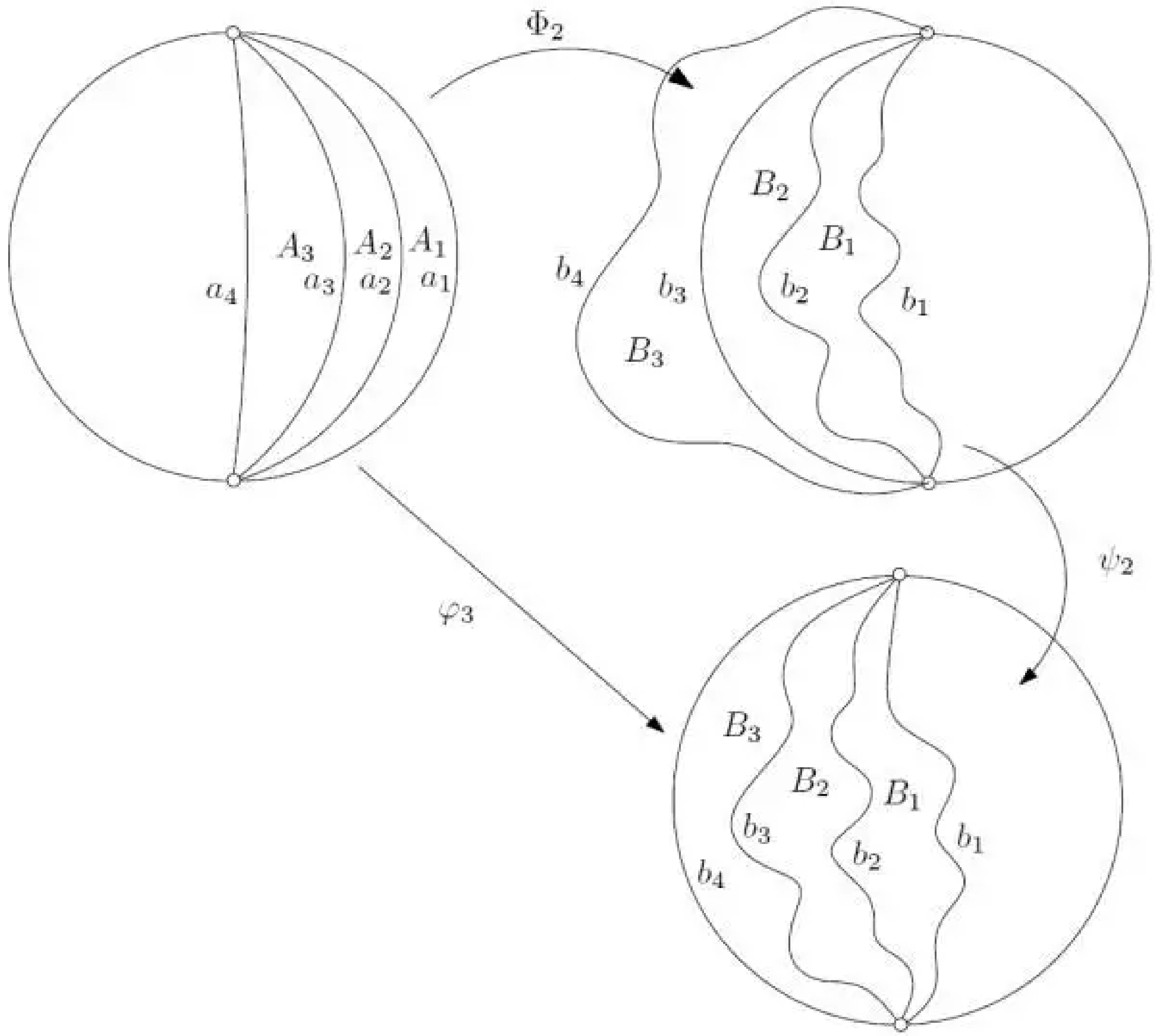


图5. 第二步解析延拓。

我们再次解析延拓，$A_1 + A_2$关于a_3反射，得到新月形区域A_3；我们将解析函数 $\varphi_2 : A_1 + A_2 \to B_1 + B_2$ 应用Schwartz反射原则 拓展成

$$\Phi_2 : A_1 + A_2 + A_3 \to B_1 + B_2 + B_3,$$

在复合黎曼映照 $\psi_2 : B_1 + B_2 + B_3 + \bar{B} \to \mathbb{D}$，得到第二步解析延拓结果：

$$\varphi_3 = \psi_2 \circ \Phi_2 : A_1 + A_2 + A_3 \to B_1 + B_2 + B_3。$$

如此重复，我们得到解析延拓得到的共形映射

$$\varphi_k : \sum_{i=1}^{k} A_i \to \sum_{j=1}^{k} B_k。$$

我们考察新月区域的内角，A_k的内角为θ_k，我们有递推公式

$$\begin{cases} \theta_i & = & \sum_{j=1}^{k-1} \theta_j \\ \theta_1 & = & \pi/2^k \\ \theta_2 & = & \pi/2^k \end{cases}$$

因此第k步，所有的新月区域覆盖整个圆盘。由此，我们可以得到解析函数

$$G = \psi_k \circ \psi_{k-1} \circ \cdots \circ \psi_2 \circ \psi_1$$

并且

$$g = \psi_k \circ \psi_{k-1} \circ \cdots \circ \psi_2 \circ \psi_1 \circ \varphi_1,$$

引理证明完毕。

正规函数族

定义在平面区域$R \subset \mathbb{C}$上的函数族$\mathcal{F}$被称为是**正规函数族**，如果对于函数族中的任意一个序列$\{f_n\}$，存在一个子序列$\{f_{n_k}\}$在R的任意紧子集上一致收敛。由Koebe distortion定理，我们可以得到下面的引理，

引理 在区域R上取定一点，如果单值全纯函数族$\mathcal{F}$在此点的函数值和导数有界，那么$\mathcal{F}$是正规函数族。

单值化定理

我们用组合方式定义黎曼面。给定一个黎曼面M，及其一个三角剖分$\mathcal{T}$，如果三角剖分具有有限个面，则曲面是**闭曲面**或者**紧曲面**；如果三角剖分具有可数无穷多个面，则曲面是**开曲面**。Van der Waerden 引理证明了特殊三角剖分$\mathcal{T}$的存在性，

引理 （Van der Waerden）假设M是一个开的曲面，那么其三角剖分$\mathcal{T}$的面可以如下排列，

$$\mathcal{T} = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_n, \cdots\}$$

使得$\mathcal{T}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k \Delta_{n+1}$交于一条边或者两条边。

令$\widetilde{M}$是黎曼面M的万有复迭空间，则$\widetilde{M}$是单联通的黎曼面，其三角剖分$\mathcal{T}$的面$\Delta_1, \Delta_2, \cdots$依照Van der Waerden方式排列，$\mathcal{T}$的所有边都是解析弧线，并且每个三角形$\Delta_k$都被某一个局部坐标系覆盖。我们欲证明下面的引理。

引理：对于任意一个n，$E_n = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n$ 的内部被共形映射到开单位圆盘，$\varphi_n : E_n \to R_n$，（R_n是开单位圆盘），并且映射限制在边界上，是拓扑同胚。

证明：我们应用数学归纳法。假设$\widetilde{M}$的一个局部坐标系为(U, t)，三角形$\Delta_1 \subset U$，在 t-平面中Δ_1的原像是Δ'，Δ'是单联通的区域，其边界是解析弧线。根据黎曼映照定理，存在全纯映射$A : \Delta' \to \mathbb{D}$，将$\Delta'$映到s-平面上的单位圆盘，并且边界映射为双射，$A : \partial\Delta' \to \partial\mathbb{D}$。

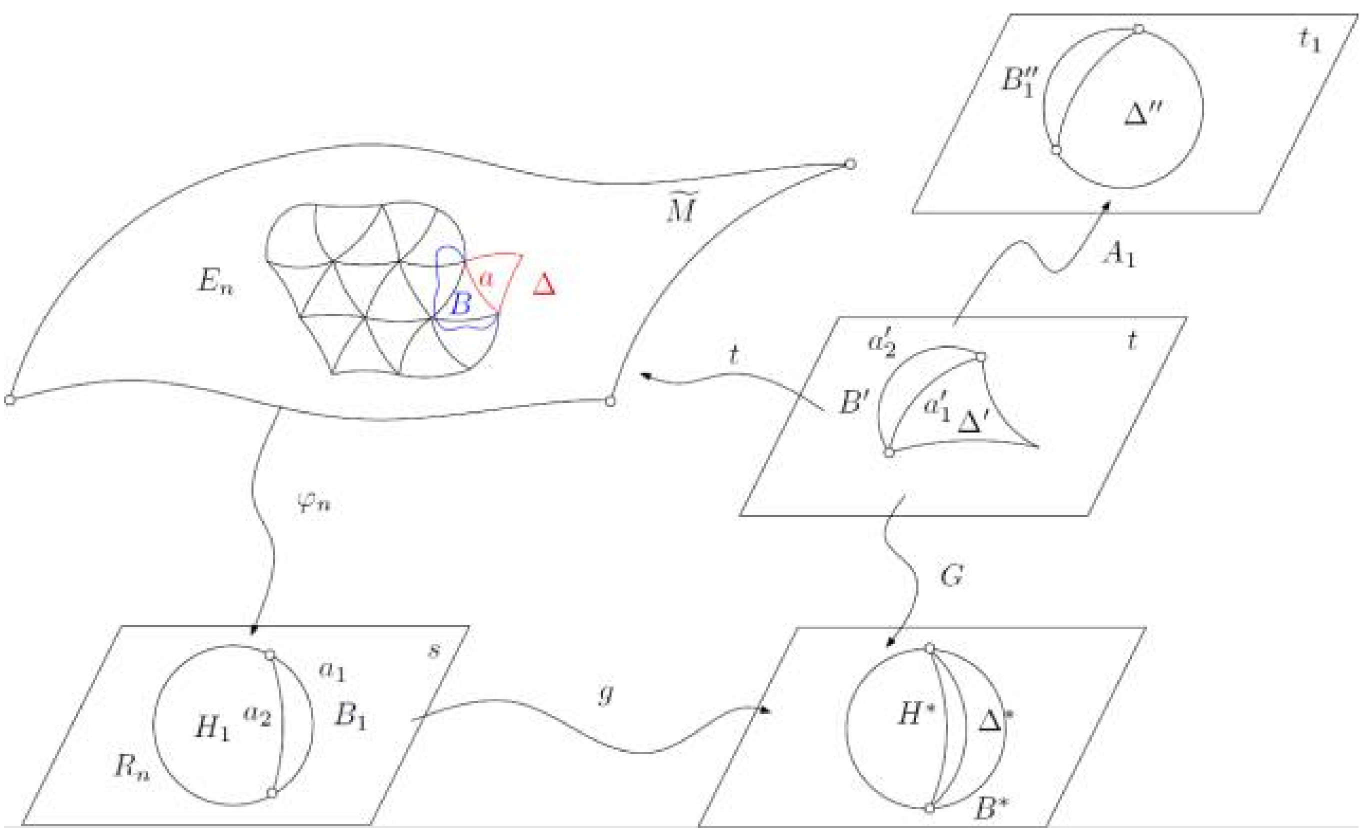


图3. 归纳步骤。

假设在第n步，$E_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n$ 被共形映到 s-平面上的单位圆盘，$\varphi : E_n \to R_n$，这里R_n是s-平面上的单位圆盘。共形映射限制在边界上是双射$\varphi : \partial E_n \to \partial R_n$。我们考虑$E_{n+1} = E_n + \Delta_{n+1}$，$\Delta = \Delta_{n+1}$。局部坐标$(U, t)$覆盖$\Delta$，$t(U) = U'$，$t(\Delta) = \Delta'$。$\Delta \cap E_n = a$，$\varphi_n(a) = a_1$，$t(a) = a_1'$。

在万有复迭空间$\widetilde{M}$中，令 开集$V \subset U \cap E_n$，并且 $a \subset \partial V$； 在局部坐标t-平面中，$V_1' = t^{-1}(V)$；在s-平面中，$V_1 = \varphi_n(V)$。我们用局部坐标表示映射，$s = \varphi_n(t)$，$V_1 = \varphi_n(V_1')$。

我们在s-平面的单位圆R_n内部，作出另外一条圆弧 $a_2 \subset V_1 \subset R_n$，两条圆弧 a_1, a_2具有同样的端点。并且在端点处，两条圆弧的夹角为$\pi/2^k$，这里k是一个足够大的正整数。两条圆弧所夹的新月形区域记为 B_1，$B_1 \subset V_1$；在万有复迭空间$\widetilde{M}$中的原像记为 B，$B \subset V$；在局部坐标平面中的像记为 B'，$B' \subset V'$。
这三个区域B_1,B,B'，彼此共形等价。

我们欲证明存在全纯映射 $s^* = g(s)$ 和 $s^* = G(t)$，满足：

1. 共形映射$s^* = g(s)$将新月区域B_1映到B^*，将H_1映到H^*，这$H_1 = R_n - B_1$
2. 共形映射$s^* = G(t)$将B'映到B^*，将Δ'映到Δ^*，
3. 在区域B'上，$G(t) = g(\varphi_n(t))$，
4. $R_{n+1} = \Delta^* + B^* + H^*$为开单位圆盘。

这样，映射(g, G)的合并给出了从E_{n+1}到单位圆盘的共形映射。

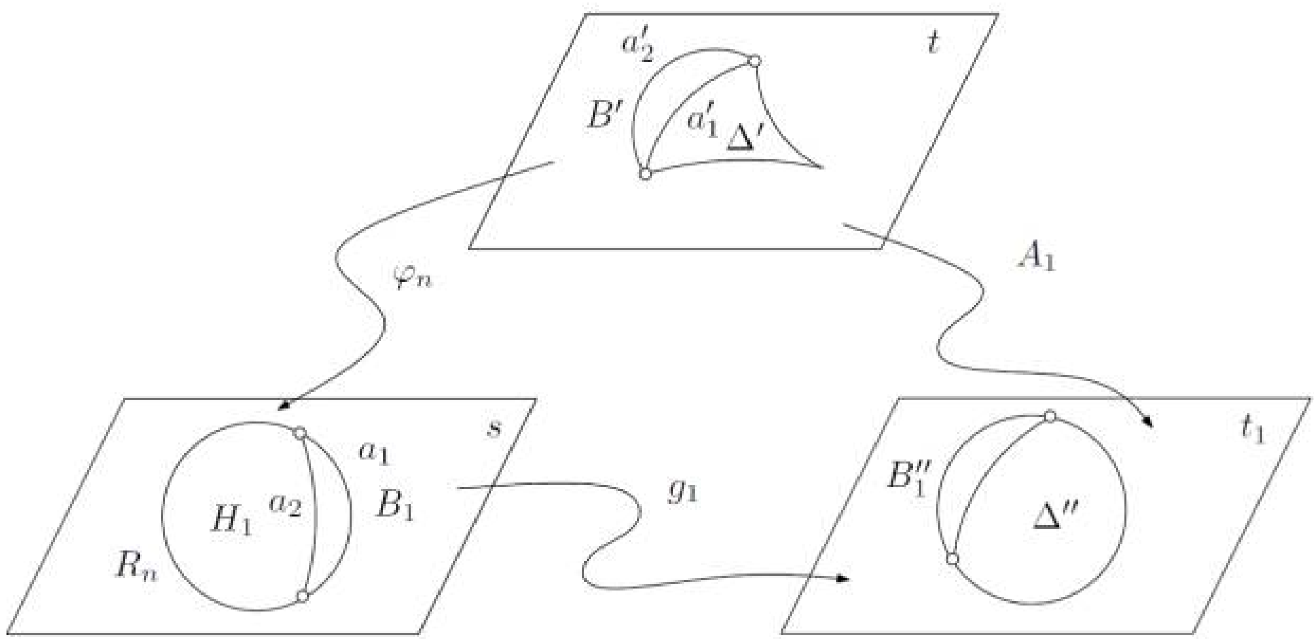


图4. 共形映射的合并。

我们下面来构造映射(g,G)。根据黎曼映照定理，存在共形映射 $t_1=A_1(t)$，将$\Delta'+B'$映到单位圆盘$\Delta''+B''_1$，圆盘的中心在Δ''内部。这样，复合映射

$$g_1=A_1\circ\varphi_n^{-1},\quad t_1=g_1(s)$$

将新月形区域B_1映到B''_1。注意，共形映射$g_1:B_1\to B''_1$的定义域是新月形区域B_1，在H_1上没有定义。根据新月-满月引理，存在满足要求的全纯函数(g,G)。这就证明了$\varphi_n:E_n\to R_n$的存在性。证明完毕。

定理：开黎曼面$\widetilde{M}$或者和整个复平面$\mathbb{C}$共形等价，或者和单位圆盘$\mathbb{D}$共形等价。

证明：我们构造函数序列

$$\varphi_{1,n}(s)=\varphi_n\circ\varphi_1^{-1}(s),$$

在R_1上单值，全纯，在$s=0$点归一化，因此是正规函数族。我们选择一个子序列，在R_1内部收敛到单值函数，我们挑选子序列

$$\varphi_1^1(p),\varphi_2^1(p),\varphi_3^1(p),\cdots$$

在E_1内部收敛到单值全纯函数 $\varphi_0(p)$。

同样，我们构造函数序列

$$\varphi_{2,n}(s)=\varphi_n\circ\varphi_2^{-1}(s),$$

得到子序列

$$\varphi_1^2(p),\varphi_2^2(p),\cdots$$

在E_2内部收敛到单值全纯函数，并且在E_1上的限制等于$\varphi_0(p)$，我们仍然记之为$\varphi_0(p)$。

重复这一步骤，应用对角线法则，我们得到函数序列

$$\varphi_1^1(p),\varphi_2^2(p),\varphi_3^3(p),\cdots$$

这里$\varphi_k^k(p)$在E_n上有定义，只要$k\geq n$，并且在E_n上序列收敛到$\varphi_0(p)$。因为E_n穷尽整个开黎曼面$\widetilde{M}$，$\varphi_0(p)$在$\widetilde{M}$上单值，将$\widetilde{M}$映射到s-平面的单联通区域R。因为$\widetilde{M}$为开曲面，R不可能是扩展复平面。因此，R或者是整个复平面，或者是复平面内的一个区域，根据黎曼映照定理，可以映射到单位圆盘。证明完毕。

定理：紧单联通黎曼面$\widetilde{M}$和单位球面$\mathbb{S}^2$共形等价。

证明：$\widetilde{M}$的三角剖分$\mathcal{T}$包含有限个三角形，$E_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n$，最后一个三角形$\Delta_n$和$E_{n-1}$有三条公共边。我们选取一内点 $q \in \Delta_n$，将这点去掉，得到开的黎曼面，$\widetilde{M}_0 = \widetilde{M} \setminus \{q\}$，根据开黎曼面的单值化定理，存在共形映射$\varphi : \widetilde{M}_0 \to \mathbb{C}$，$s = \varphi(p)$，将开黎曼面映到单位圆盘或者整个复平面。

在s-复平面上，令 $\varphi(\Delta_n \setminus \{q\}) = \Delta'$，$\varphi(E_{n-1}) = E'$，点$o \in E_{n-1}$，映到原点$\varphi(o) = 0$。令$R' \subset E'$是以原点为中心的圆盘，那么$\Delta'$在此圆盘之外。函数$w = 1/s$将$\Delta'$映到w-平面上的有界区域。考察函数定义在$\widetilde{M} \setminus \{q\}$上的函数$w = 1/\varphi(p)$，w在q点的一个邻域内有界，所以q点是函数w的可去奇异点。令q点在w-平面上的像点为$w(q)$。

假设$R = \varphi(\widetilde{M} \setminus \{q\})$不是整个复平面，而是单位圆盘，在$R$中选取点列$s_1, s_2, \cdots$, 期聚点在单位圆周上，对应的点列在曲面上为$p_1, p_2, \cdots$。因为$\widetilde{M}$ 为紧曲面，点列的聚点在曲面上，但是$\widetilde{M} \setminus \{q\}$的所有点在s-平面上的像都不在单位圆周上，因此$q = \lim_{n\to\infty} p_n$ 。对于单位圆周∂R上的任意点$\bar{s}$，都存在点列收敛到点$\bar{s}$，因此$1/\bar{s} = w(q)$。但是$\bar{s}$有无穷多个取值，这意味着$w(q)$有无穷多个，矛盾。因此假设错误，$R = \varphi(\widetilde{M} \setminus \{q\})$是整个复平面，$\widetilde{M}$和扩展复平面共形等价。定理得证。

【老顾谈几何】邀请国内国际著名纯粹数学家，应用数学家，理论物理学家和计算机科学家，讲授现代拓扑和几何的理论，算法和应用。

回复“**目录**”，可以浏览往期精华；回复“**智商**”，可以阅读“**如何从大脑形状判断一个人的智商**”；回复“**象牙塔**”，可以阅读“**纯粹数学走出象牙塔**”；回复“**概览**”，可以阅读“**计算共形几何概览**”。