清华笔记：计算共形几何讲义 （15）拓扑圆盘的调和映照

顾险峰 老顾谈几何 2017-07-30

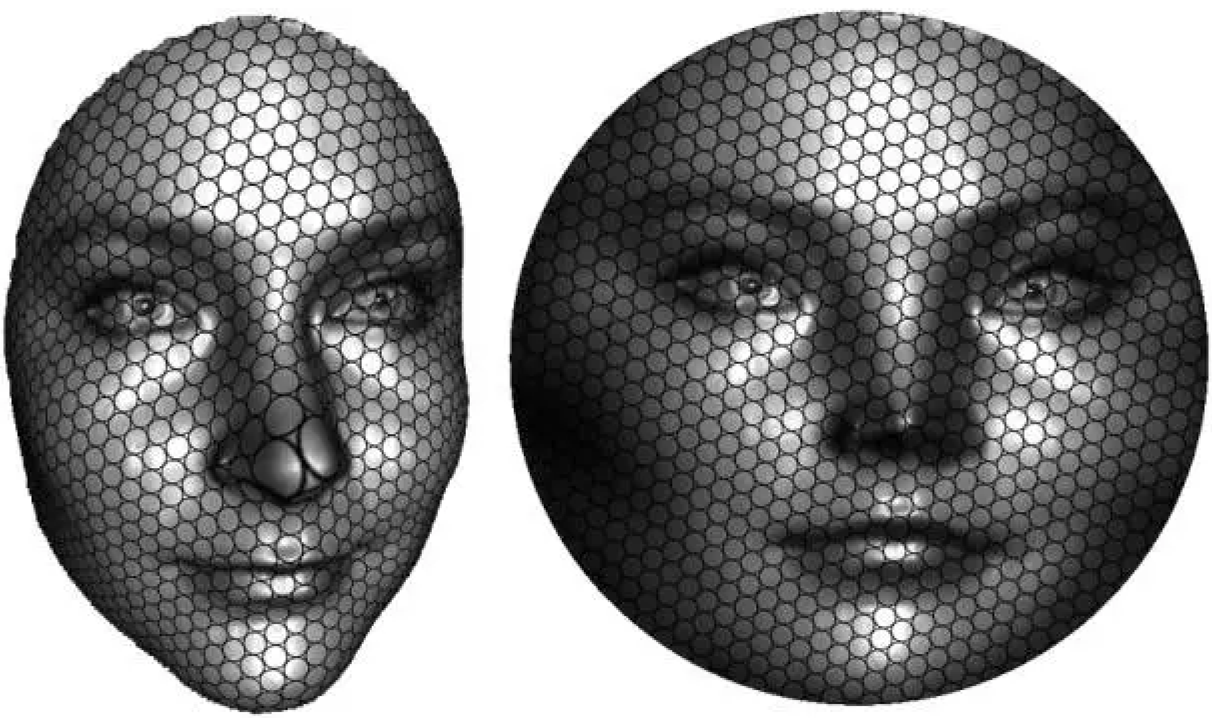

图1. 从三维人脸曲面到平面圆盘的调和映照。

【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。欢迎任何有兴趣的朋友，前来旁听指导。】

我们前面的课程介绍了亏格为0带边界曲面的典范共形映射，包括古典理论和基于全纯微分的计算方法。这里，我们着重介绍拓扑球面到标准球面的典范共形映射，主要是基于调和映照理论。

简介

物理上，调和映射极小化弹性形变势能，因而物理意义明确；偏微分方程理论证明了调和映照的存在性，唯一性，正则性，稳定性和光滑性；有限元方法保证了离散解到连续解的收敛性；数值计算方法的共轭梯度法保证了调和映照计算的高效性；微分几何保证了调和映射的共形不变性和微分同胚性。因此，调和映照简单直观，理论完备，在工程实践中被广泛应用。

同时，调和映照是一个极好的例子，从理论到实践，横跨物理学，偏微分方程理论，有限元理论，数值计算，微分几何等诸多领域，使我们能够融会贯通，体会到这些领域各有侧重，同时相辅相成的关系。

如图1所示，人脸曲面到平面区域的调和映射$\varphi:(S,\mathbf{g})\to(\Omega,dx^2+dy^2)$，可以表示成坐标映射$\varphi:(x,y)\to(u,v)$，这里$u,v$是相互独立的调和函数。如果坐标分量函数彼此非独立而共轭，则调和映照称为共形映照。下面，我们首先考察调和函数。

物理解释

黎曼考察了这样一个物理问题：（Dirichlet问题）假设Ω是平面中的有界区域，由某种电阻率处处相同的材料制成。我们在Ω的边缘$\partial\Omega$处设置电压$g:\partial\Omega\to\mathbb{R}$，问$\Omega$内部电压函数$u:\Omega\to\mathbb{R}$是多少？

根据物理定律，Ω内的电场诱导电流，电流发热做功，那么真实可能的电压函数必定使得发热功率最小。电流强度正比于电压梯度，电阻率处处相同，因此电流发热功率可以表示成所谓的调和能量：

$$E(u) := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u \rangle dA,$$

如果函数$u:\Omega \to \mathbb{R}$极小化调和能量，则我们称其为调和函数。

我们进一步考察调和函数应该满足的条件。令试探函数为在边界$\partial\Omega$上取值为0的无穷阶光滑函数$C_0^\infty(\Omega)$。假设$h \in C_0^\infty(\Omega)$，则对一切ε，$\{u+\varepsilon h\}$的调和能量在ε为0的时候取到极值，因此

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \int_\Omega \langle \nabla u + \varepsilon \nabla h, \nabla u + \varepsilon \nabla h \rangle dA = 2\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla h \rangle dA = 0,$$

由关系式

$$\nabla \cdot (h \nabla u) = \langle \nabla h, \nabla u \rangle + h \nabla \cdot \nabla u,$$

我们得到

$$\int_\Omega \langle \nabla h, \nabla u \rangle dA = \int_\Omega h \nabla \cdot \nabla u dA - \int_\Omega \nabla \cdot (h \nabla u) dA$$

由斯托克斯定理和$h \in C_0^\infty(\Omega)$，我们有

$$\int_\Omega \nabla \cdot (h \nabla u) dA = \int_{\partial\Omega} h \nabla u ds = 0,$$

因为h任意，因此我们得到调和函数的欧拉-拉格朗日方程

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta u & \equiv & 0 \\ u|_{\partial\Omega} & = & g \end{array} \right.,$$

即所谓的Laplace方程。这里Laplace算子$\Delta = \nabla \cdot \nabla$的物理意义是*梯度的散度*。

事实上，热力学问题中稳衡温度场，弹性力学中橡皮膜的弹性位移，扩散过程中的化学浓度都是调和函数，都满足Laplace方程。

黎曼认为调和函数u的存在性是不证自明的，因为在以上电场模型中，它是唯一可能的真实电压。1849年，Riemann提出所谓的Dirichlet原理，即上述变分问题总是有解的。将解析函数看做特定的场分布，他用这一原理研究几何函数论，“证明”了著名的Riemann映射定理。

然而几年之后，Weierstrass以反例说明一般情况下的变分问题未必有解，Dirichlet原理也因而 被数学界搁置了近半个世纪。

在线性空间$C^\infty(\bar{\Omega})$上定义内积，

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f \cdot g dA + \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla g\rangle dA$$

自然地，我们可以在$C^\infty(\bar{\Omega})$取一系列调和能量递减的函数$\{f_k\}$，构成柯西列，我们希望这一序列的极限就是调和函数。但是函数空间$C^\infty(\bar{\Omega})$是不完备的，柯西列的极限有可能不属于$C^\infty(\bar{\Omega})$。恰如有理数构成的柯西列，其极限有可能是无理数。这需要我们扩充函数空间，使得极限运算封闭。

存在性 一个经典扩充方法如下：如果两个柯西列的并集依然是柯西列，则我们说这两个柯西列彼此等价。我们考察空间中所有柯西列的等价类构成的空间，则这个空间必然对极限运算封闭。这一过程被称为是原来空间的完备化。例如，有理数的完备化就是实数。函数空间$C^\infty(\bar{\Omega})$的完备化就是索伯列夫空间(Sobolev Space)$W^{1,2}(\Omega)$ 。那么，我们不断地减小调和能量就会得到柯西列$\{u_k\}$，柯西列的极限$u = \lim_{k\to\infty} u_k$依然在空间$W^{1,2}(\Omega)$中，我们称之为弱解。这给出了Laplace方程解的**存在性**。

正则性 但是弱解在空间$W^{1,2}(\Omega)$中，有可能极度不光滑。我们需要证明弱解实际上是经典解，恰如我们证明某个有理数柯西列的极限依然是一个有理数，这被称为是方程解的**正则性问题**。正则性微妙地依赖于边界$\partial\Omega$的光滑性，和边值条件$g: \partial\Omega \to \mathbb{R}$的光滑性。正则性证明依赖于Weyl引理：如果

$$\int_\Omega u \Delta h = 0$$

对任意$h \in G$成立，则可推出u光滑，这里探测函数空间

$$G = \{g \in C^\infty(\bar{\Omega}) : g|_{\partial\Omega} = 0\}。$$

因此，弱解就是经典解。

唯一性 我们考察调和函数u的梯度场∇u，因为$\nabla \cdot \nabla u$为0，所以∇u的旋度和散度同时为0. 我们将∇u旋转90度，所得矢量场记成${}^*\nabla u$，那么${}^*\nabla u$的旋度和散度也为0，因此${}^*\nabla u$

可积， 存在函数$v:\Omega\to\mathbb{R}$，满足$\nabla v =^* \nabla u$。那么v被称为是u的共轭函数，它们一同组成解析函数：$\varphi(z)=u+iv$。由柯西积分公式，

$$\varphi(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\varphi(z)}{z-a}dz,$$

这里γ是以a为圆心的小圆。因此，我们得到调和函数的均值性质(mean avalue property)，调和函数的每一点的值都是其邻域内所有点的值的平均。由此，我们可以得到调和函数的极大值定理：调和函数的极值点必在边界上。

我们用极大值定理来证明解的唯一性。假设存在两个调和函数u_1,u_2具有同样的边值，则u_1-u_2也是调和函数，并且边值为0，因此u_1-u_2的极大值和极小值都为0，u_1,u_2必处处相等。

稳定性 所谓稳定性就是解连续依赖于初边值条件。在柯西积分公式中，我们取积分路径为Ω的边缘$\partial\Omega$，则任意一点的函数值等于边界值的加权平均，稳定性由此可以得证。或者，我们用调和函数的极大值定理来证：内点处调和函数值之差介于边值之差的最大和最小值之间。

由此，偏微分方程理论给出了Laplace方程解的存在性，唯一性和稳定性，满足这三条性质的问题被称为是适定问题。同时，由Weyl引理，我们得到调和函数是无穷阶光滑的。

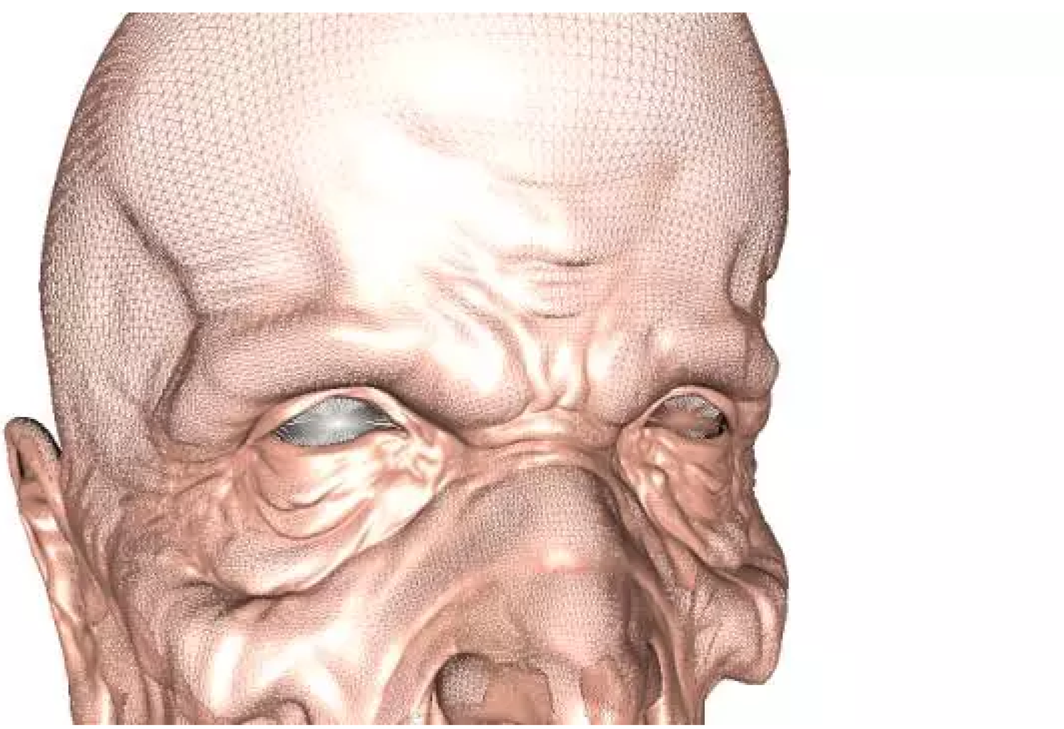

图2. 曲面的三角剖分。

偏有限元的计算方法

偏微分方程理论给出了指导，下一步我们需要真正将调和函数计算出来。有限元方法将曲面或平面区域三角剖分，形成三角网格，然后在网格上构造分片多项式函数。

有限元法将椭圆型偏微分方程（如Lapalce方程）转换成等价的变分形式（调和能量优化），将线性偏微分方程转化为线性方程组来求解。
有限元法需要强有力的网格生成算法，对所用网格质量有一定要求。对于平面区域，最为通用的方法当推Delaunay Refinement算法，如果$\partial\Omega$不存在过于尖锐的内角，则三角剖分的最小内角可以被保证。如果三角剖分质量达到要求，则离散解收敛到连续解，考虑函数值和一次导数，解的误差界为$O(\varepsilon)$，这里ε为三角形边长。

矩阵运算 通过有限元法，椭圆形偏微分算子被转化成正定对称阵，椭圆形偏微分方程被转化成求解大型稀疏线性系统$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，这进一步被转化为优化二次能量，

$$\min_{\mathbf{x}}\langle A\mathbf{x}-\mathbf{b}, A\mathbf{x}-\mathbf{b}\rangle$$。

二次能量的水平集为椭球面。传统的最速下降法沿着梯度探索，因此算法的搜索方向和椭球面垂直，搜索路径蜿蜒曲折，费时低效。

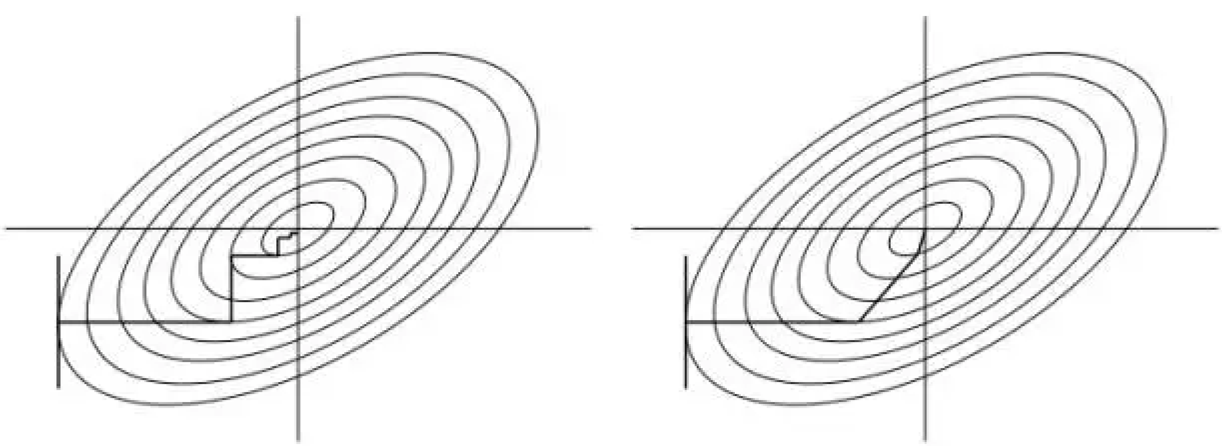

图3. 最速下降法和共轭梯度法对比。

共轭梯度法每一步的下降方向和椭球面切方向相互共轭（仿射正交），也跟以前所有下降方向共轭，从而直达椭球中心，直截了当，迅速高效。理论上，如果矩阵为n维，则共轭梯度法必在n步内达到最优。

微分几何的解释

下面，我们再从微分几何角度来考察。假设曲面带有黎曼度量$(S,\mathbf{g})$，我们采用等温参数(x,y)，

$$\mathbf{g}=e^{2\lambda(x,y)}(dx^2+dy^2),$$

则梯度算子$\nabla_{\mathbf{g}}=e^{-\lambda}\nabla$，这里$\nabla$是欧式平面上的微分算子；面积元$dA_{\mathbf{g}}=e^{2\lambda}dA$，这里$dA$是欧式平面上的面积元。我们来看调和能量

$$\int_S\langle\nabla_{\mathbf{g}}u,\nabla_{\mathbf{g}}u\rangle dA_{\mathbf{g}}=\int_S\frac{1}{e^{2\lambda}}\langle\nabla u,\nabla u\rangle e^{2\lambda}dA=\int_S\langle\nabla u,\nabla u\rangle dA,$$

这意味着调和能量在共形变换下不变。我们再看调和函数，

$$\nabla_{\mathbf{g}}u=\frac{1}{e^{2\lambda}}\nabla(u),$$

这意味着调和函数在共形变换下不变。这为计算带来极大的便利。比如我们可以将曲面片Ω用保角变换映到单位圆盘上，然后在单位圆盘上解Dirichlet问题。在圆盘上，关于Laplace方程的解我们有解析解：Poisson核为

$$P_r(\theta)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right),$$

调和函数的公式为

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta)g(e^{i\tau})d\tau。$$

对于一般的椭圆型偏微分算子，

$$a(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+f(x,y)$$，这里矩阵

$$\begin{pmatrix}a(x,y)&b(x,y)\\b(x,y)&c(x,y)\end{pmatrix}$$

处处正定。从几何上讲，我们可以找到一个定义在Ω上的黎曼度量g，使得椭圆型微分算子是度量g下的Laplace算子。进一步，我们可以找到度量g的等温坐标

$$\mathbf{g} = e^{2\mu(\xi,\eta)}(d\xi^2 + d\eta^2),$$

则微分算子成为标准的Laplace算子，

$$\frac{1}{e^{2\mu(\xi,\eta)}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$$

。这意味着椭圆型PDE本质上和Laplace方程是一致的，只不过变换了度量和参数。

Rado定理

调和映照之所以在工程领域备受青睐，除了算法简单，计算稳定之外，主要是因为它具有微分同胚性质，即下面的Rado定理：

定理（**Rado**）假设调和映射$\varphi : (S, \mathbf{g}) \to (\Omega, dx^2 + dy^2)$满足

1. 平面区域Ω是凸的，
2. 映射在边界上的限制$\varphi : \partial\Omega \to \partial\mathbb{D}$是拓扑同胚，

那么调和映射在Ω内部是微分同胚。

其证明概略如下：由Weyl引理，我们得到映射的光滑性，我们证映射为同胚。假设在某一内点$p \in \Omega$，映射$\varphi : (x, y) \to (u, v)$不是同胚，则Jacobi矩阵退化，存在常数$a, b \in \mathbb{R}$不同时为0，使得$a\nabla u + b\nabla v = 0$，因此调和函数$au + bv$以p为极值点。因为调和函数的极大值原理，内点p必为鞍点。p点附近$au + bv$的水平集具有两个连通分支，和边界$\partial\Omega$有四个交点。但是$\partial\Omega$为平面凸曲线，和直线$au + bv = const$只有两个交点，矛盾。因此映射必为微分同胚。

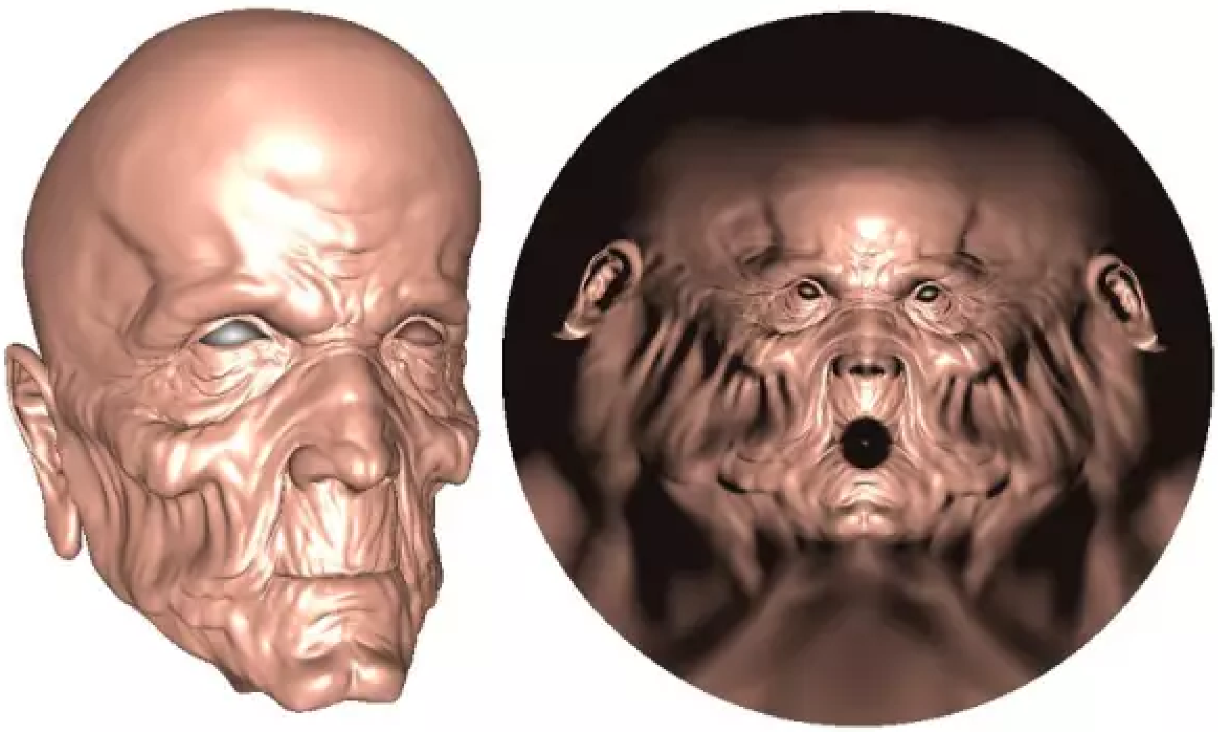

图3. 调和映射是微分同胚，并且接近共形映射。

工程上偏爱调和映照的另外一个原因是调和映射接近保角映射，因此曲面的角度畸变比较小，如图3所示。通常意义下，共形映射是调和映射，调和映射不一定是共形映射。

请长按下方二维码，选择“识别图中二维码”，即可关注。

【老顾谈几何】邀请国内国际著名纯粹数学家，应用数学家，理论物理学家和计算机科学家，讲授现代拓扑和几何的理论，算法和应用。回复“**目录**”，可以浏览往期精华。