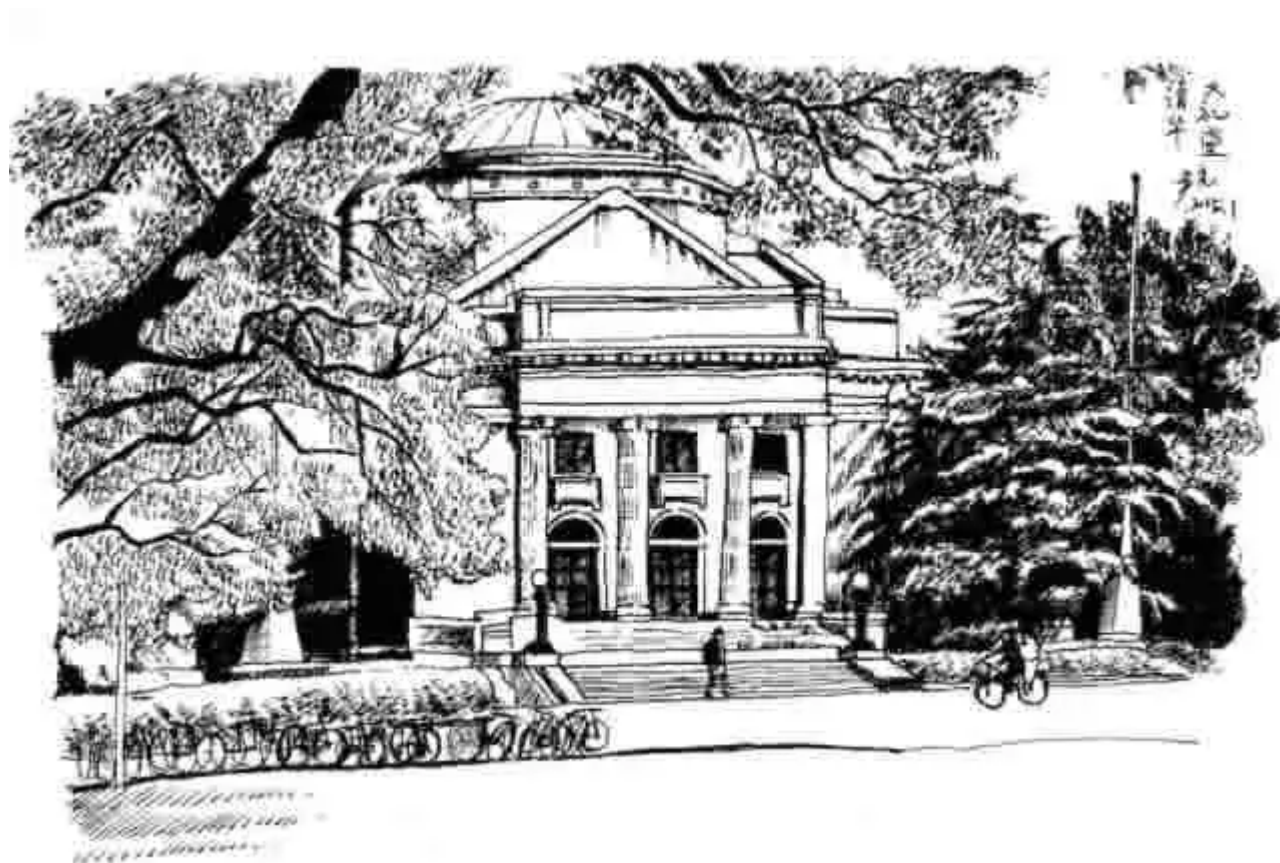


清华笔记：计算共形几何讲义（16）拓扑球面的调和映照

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-01



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。欢迎任何有兴趣的朋友，前来旁听指导。】

上次课程，我们讲解了拓扑圆盘间的调和映照。这次，我们讨论拓扑球面间的调和映照。

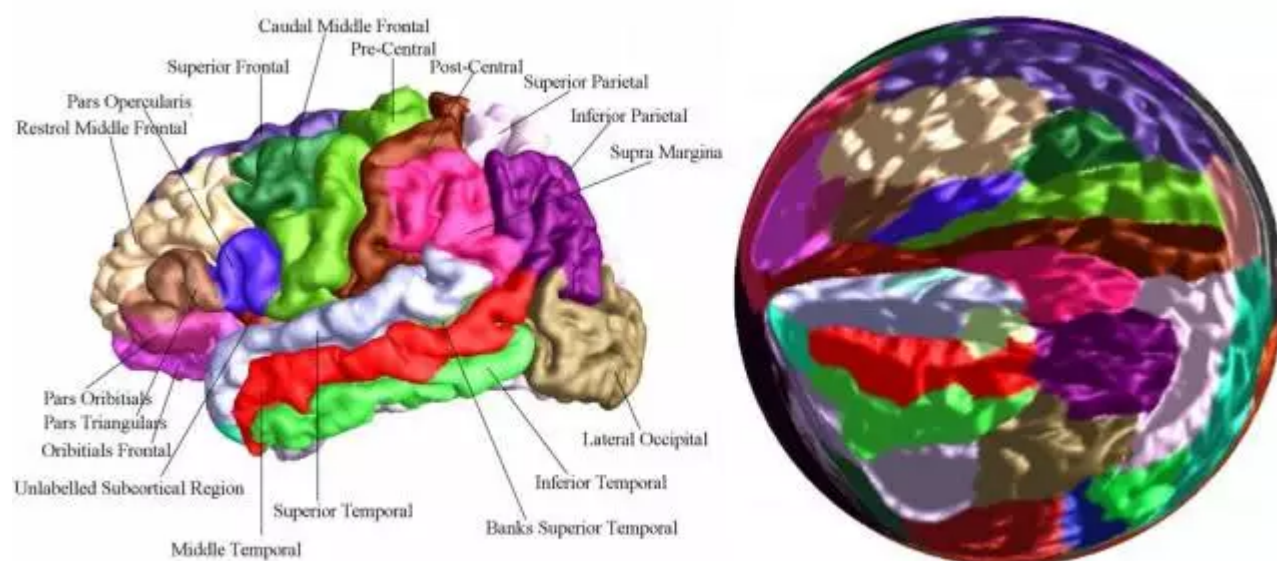


图1. 共形脑图。

拓扑球面间的调和映照在医学图像领域被频繁使用，特别是构造大脑皮层曲面到单位球面间的映射，我们称之为“共形脑图”，如图1所示。

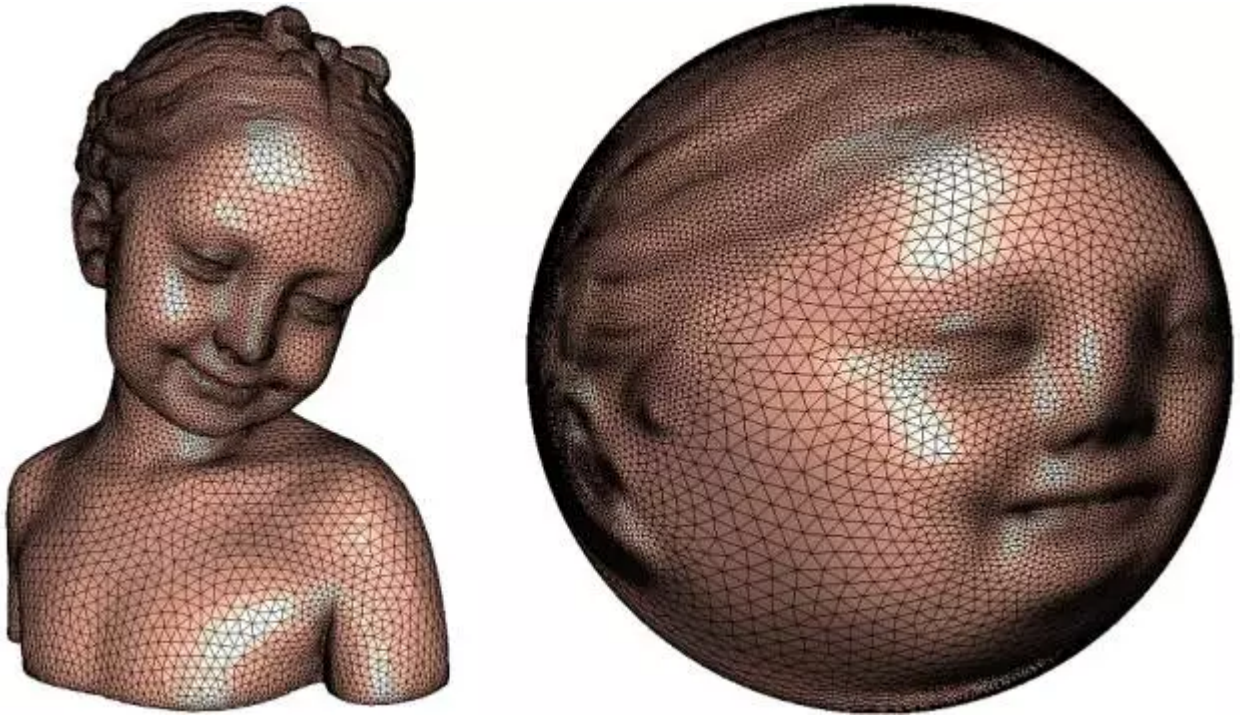


图2. 拓扑球面间的调和映射。

非线性热流方法

图2显示了亏格为0的封闭曲面到单位球面间的调和映射。我们将源曲面想象成橡皮膜制成的曲面，目标曲面由表面抛光的大理石制成。我们将橡皮膜罩在大理石上，橡皮膜在抛光的大理石表面上自由无摩擦地滑动，当系统到达稳衡状态，橡皮膜的弹性形变势能达到最小，所得映射即为调和映射。这一物理图景启发我们设计拓扑球面调和映射的计算方法。

外蕴方法 我们将目标曲面单位球面嵌在三维欧式空间中，这样曲面间的映射可以被表示成从源曲面到三维欧式空间的映射，并且像集被限制在单位球面上，

$$\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(S) \subset S^2$$

进一步，这一映射由三个坐标函数来表示，

$$\varphi(p) = (x(p), y(p), z(p)), \forall p \in S$$

映射的拉普拉斯由坐标函数的拉普拉斯给出,

$$\Delta_{\mathbf{g}}\varphi = (\Delta_{\mathbf{g}}x, \Delta_{\mathbf{g}}y, \Delta_{\mathbf{g}}z)$$

传统的热流方法将一个函数经过“热力学扩散”成一个调和函数, 使得其调和能量随时间单调下降:

$$\frac{\partial u(p, t)}{\partial t} = \Delta_{\mathbf{g}}u(p, t), \quad \forall p \in S, t \in [0, \infty)$$

但是, 在我们目前的情况下, 映射的像被限制在单位球面上, 因此每一点的像只能沿着单位球面的切方向移动, 而无法沿着球面的法方向移动。因此, 我们需要将传统的热流方法修改成非线性热流:

$$\frac{\partial \varphi(p, t)}{\partial t} = \Delta_{\mathbf{g}}\varphi(p, t)^T, \quad \forall p \in S, t \in [0, \infty)$$

这里等式右侧是映射拉普拉斯的切向分量,

$$\Delta_{\mathbf{g}}\varphi(p, t)^T = \Delta_{\mathbf{g}}\varphi(p, t) - \langle \Delta_{\mathbf{g}}\varphi(p, t), \varphi(p, t) \rangle \varphi(p, t)$$

这样我们可以保证对任意时间和任意点, 映射像一直在单位球面上,

$$\varphi(p, t) \in \mathbb{S}^2, \quad \forall p \in S, t \in [0, \infty)$$

由此可见, 所谓的“非线性”是指在每一点, 每一步我们都需要向切空间投影, 因此能量泛函的欧拉-拉格朗日方程不是线性偏微分方程, 其离散化的近似不是线性方程组:

$$\Delta_{\mathbf{g}}\varphi(p, \infty)^T \equiv 0, \quad \forall p \in S$$

非线性热流方法可以确保映射的调和能量单调递减, 但是由于调和映射不唯一, 计算并不稳定, 我们需要添加更多的条件来确保解的唯一性。事实上, 如果存在两个映射都是调和映射, 则它们彼此相差一个球面到自身的共形变换。首先, 我们用球极投影将球面映到扩展复平面上,

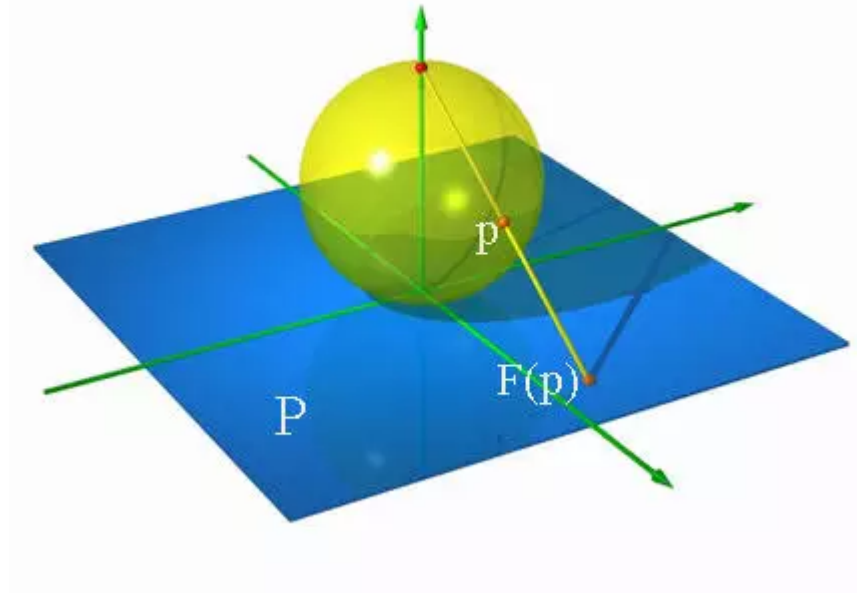


图4. 球极投影。

如图4所示, 我们在单位球的北极放置一盏灯, 从北极发射的光线将球面上所有点映到过南极的切平面上, 同时将北极点映成无穷远点。直接计算表明, 球极投影是共形映射。扩展复平面到自身的所有共形变换构成所谓的莫比乌斯变换群, 每一个自映射都具有如下形式:

$$Mob(\mathbb{S}^2) := \left\{ z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

如果存在两个调和映射，则它们相差一个莫比乌斯变换：

$$\varphi_1, \varphi_2 : (S, \mathbf{g}) \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in Mob(\mathbb{S}^2)$$

为了去掉莫比乌斯变换群带来的歧义性，我们添加一些归一化条件，例如我们要求映射满足

$$\int_S \varphi(p) dA_{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$$

这个限制去掉了3个自由度，余下的莫比乌斯变换是单位球面到自身的旋转。非线性热流方法是稳定的，不会诱发旋转，因此这一归一化条件足够确保调和映射解的唯一性。

非线性热流方法将一个初始映射“扩散”成一个调和映射，那么我们如何选取初始映射？理论上，任何一个映射度为1的映射都可以，例如最为常见的高斯映射。但在实践中，光滑曲面被离散的多面体网格所逼近，优化过程有可能落入局部最优的陷阱。一种有效的避免局部最优陷阱的方法如下：我们将源曲面一分为二，将每一半用拓扑圆盘的调和映射映到单位圆盘，并且边界映射相互一致。然后我们用球极投影将两个单位圆盘映到上半球面和下半球面，如此得到曲面到单位球面的初始映射。然后，我们再用非线性热流方法将初始映射进一步扩散。

内蕴法 内蕴方法只需要曲面的黎曼度量，不需要曲面在欧式空间中的等距嵌入。外蕴法引导我们得到计算方法，内蕴法使我们能够洞察调和映射更为深刻的性质。假设曲面间的映射给定，我们取曲面的等温坐标：

$$u : (M, \mathbf{g}) \rightarrow (N, \mathbf{h}), \quad \mathbf{g} = \lambda dz d\bar{z}, \quad \mathbf{h} = \rho dw d\bar{w}$$

我们记

$$|\partial u|^2 = \frac{\rho(u(z))}{\lambda(z)} |u_z|^2, \quad |\bar{\partial} u|^2 = \frac{\rho(u(z))}{\lambda(z)} |u_{\bar{z}}|^2$$

映射的调和能量密度为

$$e(u; \lambda, \rho) = |\partial u|^2 + |\bar{\partial} u|^2$$

映射的调和能量为

$$E(u; \lambda, \rho) = \int_M e(u; \lambda, \rho) \lambda dx dy = \int_M \rho(u(z)) (|u_z|^2 + |u_{\bar{z}}|^2) dx dy$$

由此，我们可以看到调和能量只和源曲面的共形结构有关，和具体的共形黎曼度量无关。

进一步，我们得到调和能量的欧拉-拉格朗日为

$$(\log \rho)_u u_{\bar{z}} u_z + u_{z\bar{z}} = 0$$

从而，内蕴的非线性热流方程为

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = - \left(\frac{\rho_u(u)}{\rho(u)} u_{\bar{z}} u_z + u_{z\bar{z}} \right)$$

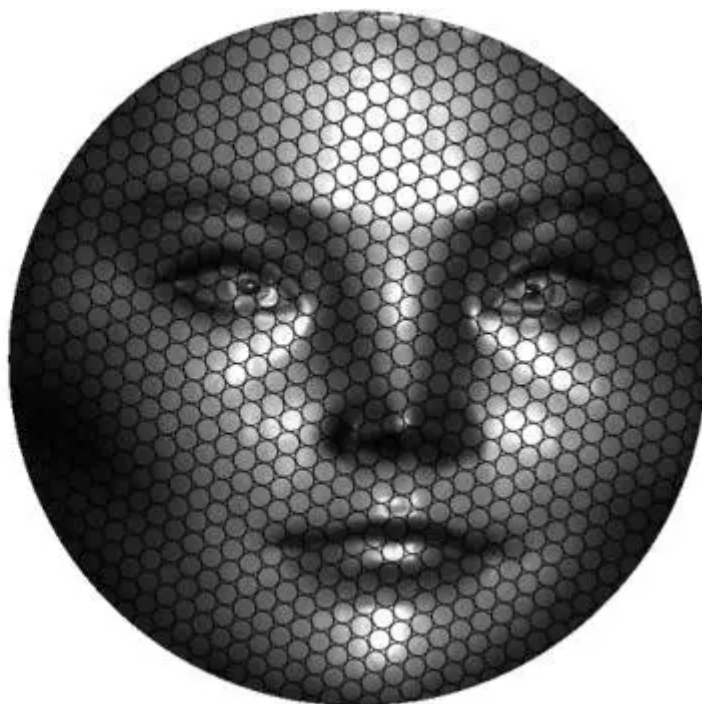
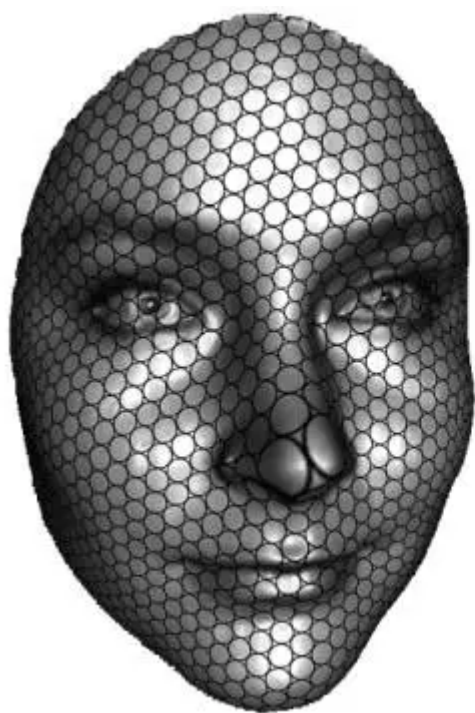


图5. 调和映射

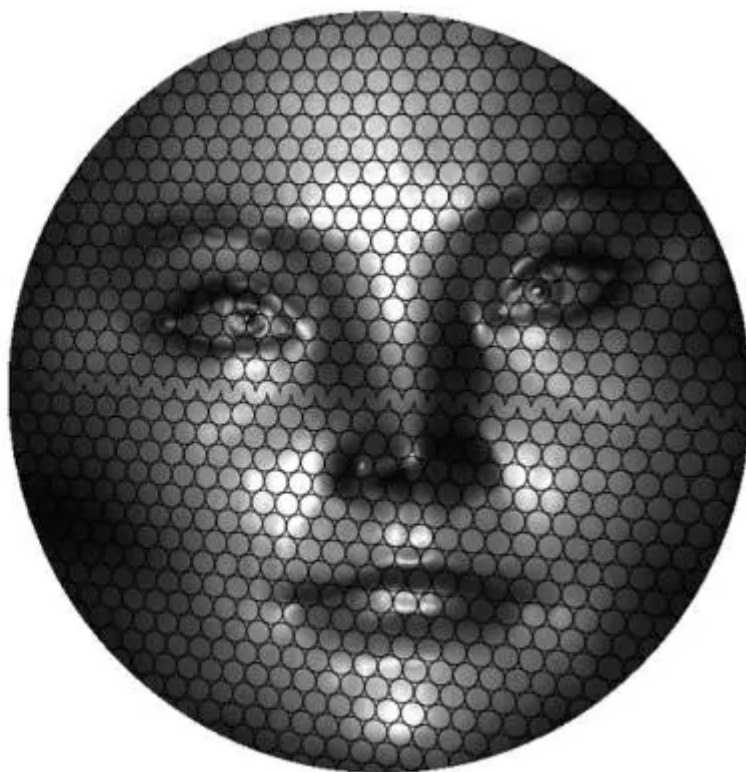
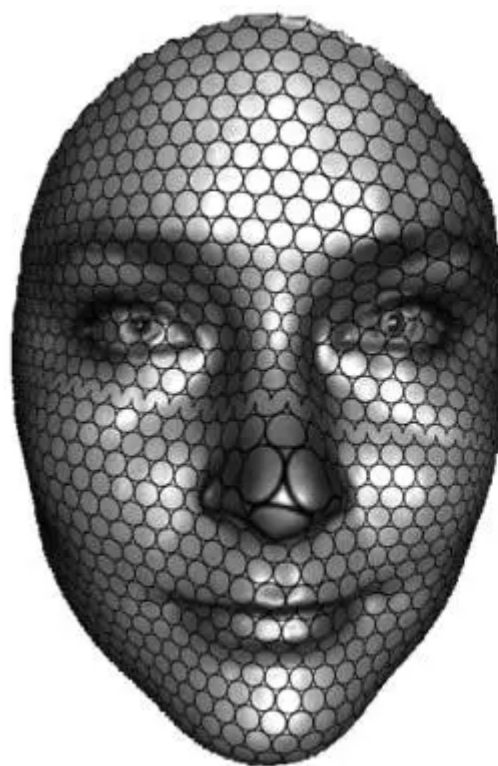


图6. 共形映射

图5和图6显示了从人脸曲面到单位圆盘的调和映射和共形映射。两个映射非常接近，但是如果我们仔细考察，我们发现在调和映射中，平面上的小圆被拉回到曲面上成为小椭圆（偏心率接近0）；在共形映射中，平面上的小圆被拉回到曲面上成为小圆。

通常情况下，**共形映射一定是调和的，调和映射不一定是共形的**。在上图情形，当我们固定边界映射，优化调和能量，我们得到调和映射。如果，我们放开边界，令边界的像在单位圆上可以自由滑动，从而进一步减小调和能量，则我们得到共形映射。换言之，**共形映射是所有调和映射中调和能量最小者**。

但是，对于球面而言，**拓扑球面间的调和映射一定是共形的**。直观来说，拓扑球面间的映射可以在球面上自由滑动，从而使调和能量无障碍地达到最优，从而得到共形映射。下面，我们将这一直觉述诸严格的证明。我们定义曲面间映射所诱导的二次微分，霍普夫微分：

$$\phi(z) = \rho(u)u_z \bar{u}_z dz^2$$

我们可以证明，**如果霍普夫微分全纯，则映射必为调和；如果霍普夫微分为0，则映射必为共形**。

曲面上所有的全纯二次微分构成一个群，根据黎曼-罗赫定理，亏格为 $g > 1$ 的曲面，这个群的维数为 $6g - 6$ 。黎曼-罗赫定理是指标定理的特殊形式，本质上是说流形上椭圆型偏微分方程解的空间维数被流形拓扑决定。

拓扑球面上所有的全纯二次微分必然为0。假如球面上存在一个全纯二次微分，那么它诱导一个带有奇异点的平直度量，奇异点对应着全纯二次微分的零点，因此奇异点处的曲率测度为 -180° 。根据高斯博内定理，总曲率等于球面的欧拉示性数乘以 360° ，从而奇异点的个数为0，全纯二次微分没有零点。我们能够取其平方根的一个分支，得到一个全纯1-形式。球面上的全纯1-形式的实部为调和1-形式。因为球面的一阶上同调群为0，所以调和1-形式必为0，进而全纯二次微分必为0。

因此，拓扑球面间的所有的调和映射，其霍普夫微分为全纯二次微分，必然为0。我们得到**拓扑球面间的所有调和映射必为共形映射**。

利用拓扑球面间的调和映射，我们可以构造拓扑圆盘曲面间的共形映射，亦称是黎曼映射。假设源曲面是亏格为0的曲面，带有一条边界，边界足够光滑。我们取曲面的一个拷贝，将其定向取反，将两张曲面沿着边界上的对应点粘合，得到一张对称的拓扑球面。这一技术被称为是**曲面的双重覆盖**。我们用拓扑球面的调和映射将双重覆盖的曲面共形地映到单位球面上，然后复合一个莫比乌斯变换，使得原来曲面的边界被映成单位球面的赤道，再用球极投影将上半球面映成单位圆盘。由此，我们得到拓扑圆盘曲面的黎曼映射，如图5所示。

共形映射和调和能量

通过Hopf微分理论，我们知道保角映射一定是调和映射。更进一步，我们思考如下的问题：如果目标表面上的曲率有正有负，那么同一同伦类中的调和映射有可能并不唯一，每一个调和映射都是调和能量的驻点，那么这些调和能量是否存在下界？假如存在共形映射，那么共形映射是否达到调和能量的下界？这两个问题的答案都是肯定的。

我们直接计算调和能量：

$$E(u) = \int_M \rho(u)(|u_z|^2 + |u_{\bar{z}}|^2) dx dy = \int_M \rho(u) \frac{|u_z|^2 + |u_{\bar{z}}|^2}{|u_z|^2 - |u_{\bar{z}}|^2} J(u) dx dy$$

这里雅可比矩阵

$$J(u) = |u_z|^2 - |u_{\bar{z}}|^2$$

因此我们得到

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_M \left(\frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} + \frac{1 - |\mu|}{1 + |\mu|} \right) \rho(u) J(u) dx dy = \frac{1}{2} \int_N \left(K + \frac{1}{K} \right) dA_N \geq \text{Area}(N)$$

这里

$$\mu = u_{\bar{z}}/u_z$$

是映射诱导的Beltrami系数，

$$K = (1 + \mu)/(1 - \mu)$$

是映射的伸缩商。



图2. Beltrami系数和伸缩商的几何意义。

我们考察从人脸曲面到平面单位圆盘的映射，如图2所示，映射将曲面上的无穷小椭圆映到平面的无穷小圆。无穷小椭圆的偏心率，就是伸缩商 K ，偏心率和椭圆长轴方向构成了Beltrami系数。从上面的推导我们可以看出，调和能量的下界等于目标曲面的面积；当所有的伸缩商 K 都是1时，调和能量的下界能够被达到，这时，映射为共形映射。

换言之，在所有可能的调和映射中，如果存在共形映射，则共形映射的调和能量达到全局最优。

调和映照唯一性

调和映射的唯一性 调和映射的唯一性和目标曲面的曲率具有非常紧密的联系。这一点在一维情形就已经体现出来。比如，我们考察从圆周到度量曲面的映射，

$$\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow (N, \rho)$$

当映射为调和映射时，其像为闭测地线。如果目标曲面的曲率有正有负，那么在同一同伦类中，测地线并不唯一。如果目标曲面的曲率处处为负，那么同伦的测地线一定重合。直观上讲，假如曲面上有两条彼此同伦的闭测地线，它们之间的同伦在曲面上扫过一个拓扑圆柱面。根据高斯-博内定理，我们有

$$\int_C K dA + \int_{\partial C} k_g ds = 2\pi\chi(C) = 0$$

等式左边，因为圆柱面的边界为测地线，所有第二项为0，第一项非正。等式右边为0，所以第一项为0，圆柱面面积为0。两条测地线彼此重合。

封闭曲面间的调和映射，如果目标曲面上的高斯曲率处处为负，且M在N上的像不是一条闭测地线，则同伦的调和映射必然重合。一种想法是基于调和能量的凸性，设定二阶光滑同伦连接着两个调和映射，

$$F: M \times [0, 1] \rightarrow N, \quad u_t(x) = F(x, t), \quad \forall x \in M$$

我们计算调和能量的二阶导数

$$\frac{d^2}{dt^2} E(u_t) = 2 \int_M \left(\sum_i |\nabla_{e_i} V|^2 - K_N(V, F_* e_i) + \langle \nabla_{e_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, F_* e_i \rangle \right) dA$$

这里切矢量场定义为

$$V = F^* \frac{\partial}{\partial t}$$

拉回联络算子，源曲面上的标准正交基底和高斯曲率分别为

$$\nabla, \{e_1, e_2\}, K_N$$

我们选取测地同伦，亦即

$$t \rightarrow u_t(x), \quad \forall x \in M$$

为测地线，那么最后一项恒为0，因为

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V \equiv 0$$

因此调和能量的二阶导数恒正，调和能量为严格凸。同时在时间为0和1点处，映射为调和映射，调和能量关于时间的一阶导数为0，由此我们有

$$\frac{d^2}{dt^2} E(u_t) \equiv 0, \quad |\nabla_{e_i} V| \equiv 0, \quad K_N(V, F_* e_i) \equiv 0$$

并进一步我们得到V必然处处为0，因此起始和终点处的调和映射重合。

调和映照存在性

根据调和映射理论，如果两个曲面间有一个微分同胚，那么存在一个和此微分同胚同伦的调和映射。如果曲面间有一个非同胚的映射，那么是否一定存在一个与之同伦的调和映射？这个问题的答案是否定的。下面我们给出一个实例。

我们首先定义两个辅助函数

$$|\partial u|^2 = \frac{\rho(u(z))}{\lambda(z)} |u_z|^2, \quad |\bar{\partial} u|^2 = \frac{\rho(u(z))}{\lambda(z)} |u_{\bar{z}}|^2$$

那么，映射的雅克比行列式为

$$J(u) = |\partial u|^2 - |\bar{\partial} u|^2$$

对于调和映射，我们得到Bochner公式

$$\Delta_M \log |\partial u|^2 = -2K_N(\rho)J(u) + K_M(\lambda)$$

$$\Delta_M \log |\bar{\partial} u|^2 = 2K_N(\rho)J(u) + K_M(\lambda)$$

调和映射诱导的辅助函数的零点是孤立零点，我们可以定义零点的阶数。

如果辅助函数不恒为0，那么辅助函数零点的总阶数和曲面的拓扑及映射的映射度之间有着整体的关系

$$\begin{aligned}\sum_{|\partial u|(p)=0} n_p &= -\deg(u)(2g_N - 2) + (2g_M - 2) \\ \sum_{|\bar{\partial} u|(p)=0} n_p &= \deg(u)(2g_N - 2) + (2g_M - 2)\end{aligned}$$

由此，我们能够在特定条件下，讨论调和映射的存在性。例如，**不存在从拓扑环面到拓扑球面，度为一的调和映射。**

如果调和映射存在，并且非共形，那么零点的总阶数应该非负，

$$\bar{\partial} u \neq 0, \quad \sum_{|\bar{\partial} u|(p)=0} n_p = \deg(u)(2g_N - 2) + (2g_M - 2) = -2$$

矛盾。因此调和映射必然为共形映射，进一步映射必为分支覆盖映射。因为映射的度为1，所以映射为同胚。但是我们知道拓扑环面和拓扑球面之间不存在同胚，矛盾。由此，拓扑环面和拓扑球面之间不存在度为1的调和映射。

调和映照正则性

丘成桐先生曾经证明过如下的定理。**如果源曲面和目标曲面同为亏格为g的封闭曲面，调和映射的度为一，目标表面上的曲率处处为负，那么调和映射必为微分同胚。**

我们用反证法给出简略证明。假设在某一内点，雅克比行列式为负，因此区域

$$D = \{p \in |J(p) < 0\}$$

非空。研究函数

$$\Delta_M \log \frac{|\partial u|}{|\bar{\partial} u|} = -4K_N J(u)$$

则它在D的边界上为0，在D的内部处处为负，因此函数

$$\log \frac{|u_z|}{|u_{\bar{z}}|}$$

为上调和函数(super harmonic), 在D的内部处处为正，那么雅克比行列式

$$J(u) = |u_z|^2 - |u_{\bar{z}}|^2$$

在D的内部处处为正，这和D的定义相矛盾。

1. Xianfeng Gu, Yalin Wang, Tony F. Chan, Paul M. Thompson and Shing-Tung Yau. Genus Zero Surface Conformal Mapping and Its Application to Brain Surface Mapping. IEEE Transaction on Medical Imaging (TMI), 23(8):949-958, August 2004.
 2. Craig Gotsman, Xianfeng Gu and Alla Sheffer. Fundamentals of Spherical Parameterization for 3D Meshes. ACM Transaction on Graphics (TOG), 22(3):358-363,2003.
-

请长按下方二维码，选择“识别图中二维码”，即可关注。



【老顾谈几何】邀请国内国际著名纯粹数学家，应用数学家，理论物理学家和计算机科学家，讲授现代拓扑和几何的理论，算法和应用。回复“**目录**”，可以浏览往期精华。