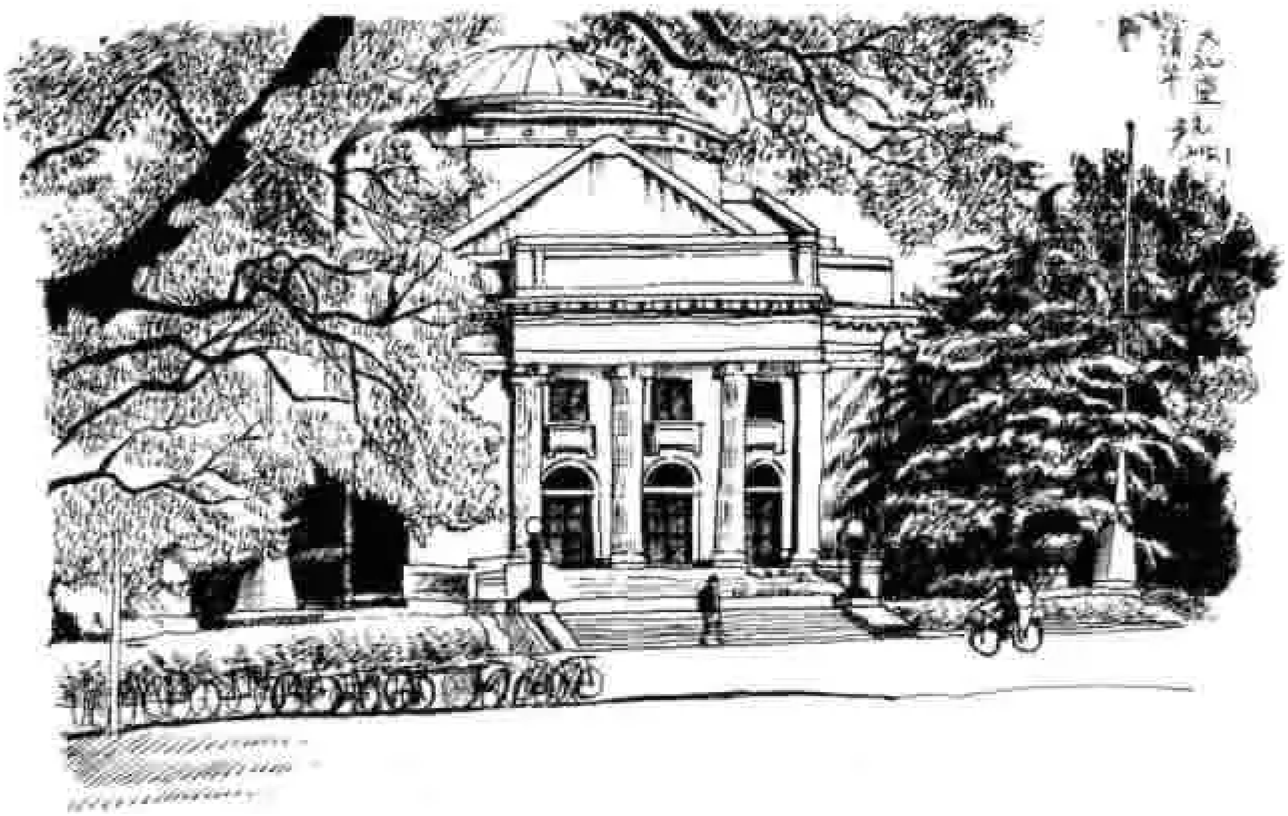
清华笔记：计算共形几何讲义 (0) 背景简介

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-24



计算共形几何是现代数学和计算机科学交叉的新兴学科，一方面将共形几何的基本概念和定理转换成计算机算法，应用于工程和医疗领域；另一方面，建立离散的共形几何理论，通过无限细分、求取极限来推导连续几何的相应理论，从而推动纯粹数学的发展。

在纯粹数学领域，共形几何是很多领域交叉的区域，例如复变函数理论（Complex Analysis），代数拓扑（Algebraic Topology），代数几何（Algebraic Geometry）特别是代数曲线（Algebraic Curves）理论，黎曼面（Riemann Surface）理论，微分几何（Differential Geometry），偏微分方程（Partial Differential Geometry）等等；在计算数学领域，计算共形几何和计算复变函数理论（Computational Complex Analysis），有限元方法（Finite Element Method）和优化理论（Optimization）都有很深的渊源；在计算机科学领域，计算共形几何和经典的计算几何（Computational Geometry），数字几何处理（Digital Geometry Processing），几何建模（Geometric Modeling）等学科领域具有密切联系。

经典的有限元法主要计算欧氏空间中的偏微分方程，计算共形几何需要在黎曼流形上求解偏微分方程；有限元法经常计算未知函数，计算共形几何需要未知的张量（tensor），例如微分形式和黎曼度量。经典的计算复变函数致力于计算平面区域之间的保角变换（conformal mapping），强烈依赖于复变函数方法；计算共形几何则极大地扩充了计算范围，致力于计算曲面间的保角变换，因此依赖微分几何，黎曼面和Teichmuller空间理论等。经典的计算几何基本上是应用欧氏几何，计算共形几何则处理任意带度量的曲面，因此植根于曲面微分几何和黎曼几何。

根据Klein的Erlangen纲领，不同的几何研究不同变换量。在工程科学中常用的几何包括拓扑、黎曼几何以及曲面的微分几何。拓扑学的范畴过于宽泛，对于几何形状和变换的描述过于粗糙而简略；黎曼几何只限于等距变换，虽然对于几何和变换的描述精密而详尽，但是研究范围过于狭窄，无法涵盖一般的变换。例如等距变换保持高斯曲率，黎曼几何方法无法将弯曲的曲面映到平面上来。共形几何恰好介于拓扑和黎曼几何之间，共形结构远比拓扑结构丰富多彩，同时共形变换远比等距变换复杂而灵活。因此，共形几何理论非常适用于处理复杂的几何计算问题。

计算共形几何方法比较适用于如下的几何计算问题：

1. 曲面映射：给定两张拓扑等价的曲面，如何构造曲面间具有特定性质的映射。例如使得曲面弹性形变能量最小的映射，即所谓调和映照；使得曲面角度畸变最小的映射，即共形映射或者极值拟共形映射；使得曲面的面积畸变最小的映射，即所谓的最优传输映射等等。在计算机视觉应用中，曲面映射可以直接用于形状配准。

2. 形状分类：我们考虑所有拓扑同胚的带黎曼度量的曲面构成的形状空间，在这个空间中设计黎曼度量，计算每个具体曲面的坐标，从而定量衡量形状的异同，从而实现形状的分类。在计算机视觉中，几何分类经常被使用，例如人脸表情分类等等。

3. 形状分析：从曲面提取几何特征来进行分析判断。例如在医学图像领域，通过对大脑皮层几何的分析进行某些神经疾病的诊断，通过对直肠表面进行几何分析，来判断肿瘤等应用。

共形几何的研究途径非常丰富，既可以用代数几何的方法进行，也可以用微分几何的方法。例如，在代数曲线理论中，每一个黎曼面上都可以被表示成一条代数曲线，曲面上的全纯微分形式具有显式表达；每一个黎曼面上的所有半纯函数构成一个域（Field），两个黎曼面共形等价当且仅当相应的域同构。因此，共形几何问题可以被转化为数值代数问题，特别是理想的生成元表示问题。在微分几何中，曲面的共形不变量往往由某种特殊的几何偏微分方程来描述，例如曲面的单值化度量由所谓的Yamabe方程来控制。我们这门课程主要是采用微分几何和偏微分方程的途径。主要有如下原因：

1. 因为我们设计的算法为工程实践服务，处理的都是三维欧氏中的嵌入曲面，具有黎曼独立。因此相对于抽象的代数几何方法，微分几何的计算方案更加直观，可以直接应用于工程和医疗领域。
2. 代数几何方法往往给出绝对精确的解，算法复杂度非常高。例如有关理想生成元表示的最为常见算法-Groebner基方法，其计算复杂度远超指数级。几何偏微分方程方法可以在可控制的范围内近似，很多时候归结为凸优化问题，因此计算复杂度较低，稳定性、鲁棒性较好，切实可行。
3. 关于几何偏微分方程方法，已经有大量的现成数值计算、优化、可视化工具，容易开发和推广新型的算法。

但是，代数曲线方法具有自身巨大的优势，例如判定全局对称性、计算全纯二次微分等问题，代数方法更为简洁优雅。我们相信代数几何方法具有巨大的潜力，这一方向非常值得进一步探索。

在课程中，我们主要强调三种几何偏微分方程方法：

1. 调和映照（Harmonic Map）：我们用非线性热流的方法计算调和映照，这给出了亏格为0封闭曲面的单值化映射，也用于计算曲面的全纯二次微分。
2. 霍奇分解（Hodge Decomposition）：我们用霍奇分解方法计算曲面的调和微分形式，进而计算曲面的全纯微分，由此可以计算具有复杂拓扑曲面的共形不变量。
3. 里奇流（Ricci Flow）：我们建立完备的离散曲面里奇流理论，证明了存在性、唯一性和离散解到连续解的收敛性。这种方法可以用于计算任意拓扑曲面单值化定理。

这些方法足以应对带有各种拓扑曲面的共形几何计算问题，理论上完备严密，工程中实用高效。

计算共形几何的基本理论计算问题如下：

给顶一个带有黎曼度量的曲面，计算由黎曼度量所决定的共形结构，例如计算局部的等温坐标；计算曲面的共形不变量，例如共形模，周期矩阵，Fenchel-Nilson Teichmuller坐标；固定曲面的共形结构，寻找最为简单的黎曼度量，例如单值化度量，简化拓扑问题；给定目标高斯曲率，计算一个黎曼度量实现目标度量；给定角度畸变，通过求解Beltrami方程来计算相应的拟共形变换；给定曲面映射的同伦类，计算角度畸变最小的极值拟共形映射，如Teichmuller映射等。

虽然这些问题的提法比较理论化，但是它们都有非常坚实的应用背景。

计算共形几何的理论和算法在工程和医疗领域具有广阔的应用前景，在非常多的工程和医疗领域都有其直接应用。

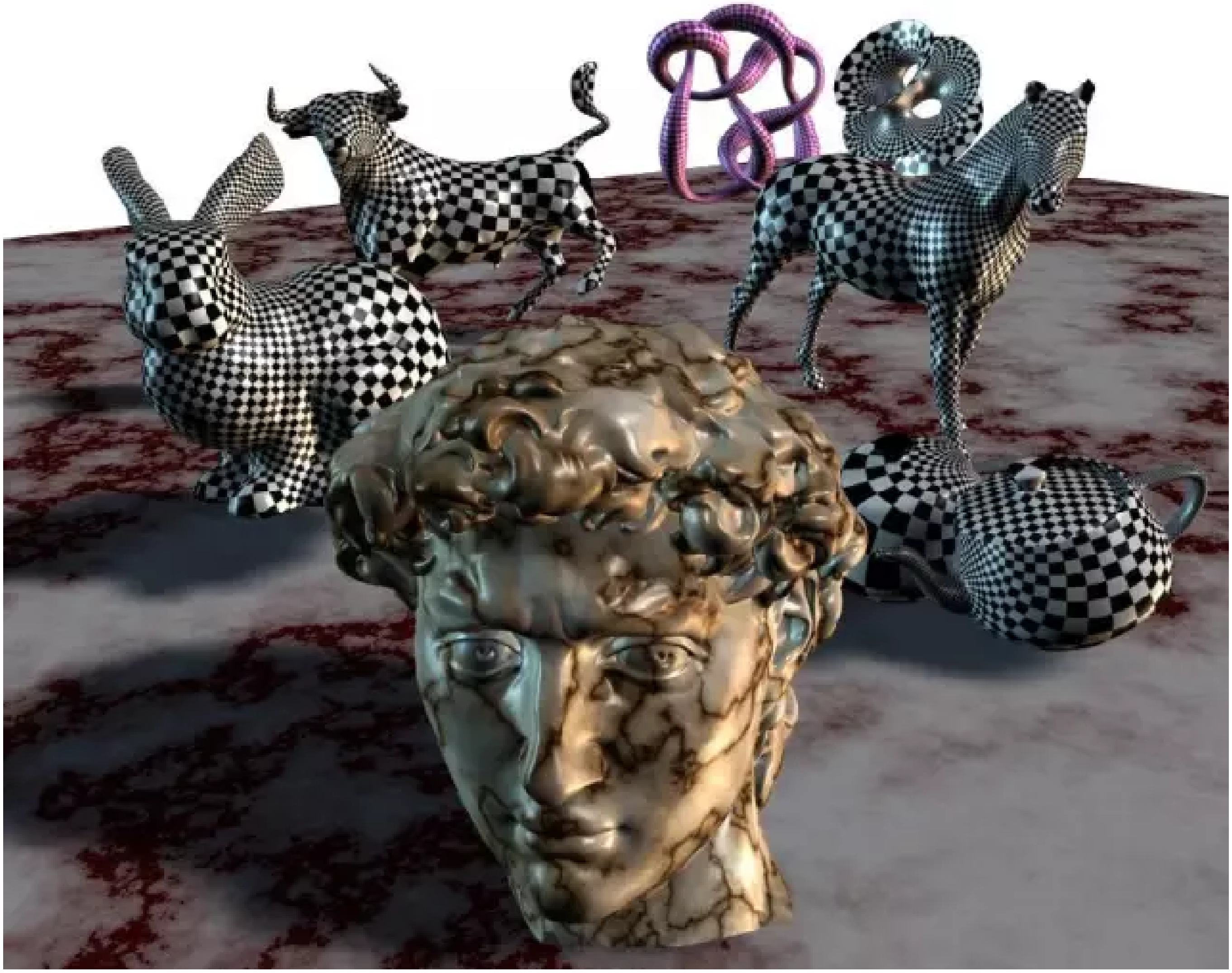


图1. 计算机图形学：曲面全局参数化。

图1显式了计算机图形学领域中的全局参数化问题。在计算机游戏、CG影视技术中，曲面由多面体网格表示，其颜色纹理由二维平面图像表示。将纹理图像贴附到曲面上面，这需要求解曲面到平面的微分同胚，即所谓的曲面参数化。我们希望这种曲面参数化尽量保持局部形状，减小角度畸变，因此共形映射提供了自然的解决方案。同时我们希望尽量保持曲面映射的整体性，曲面整体的单值化定理给出了理论基础。

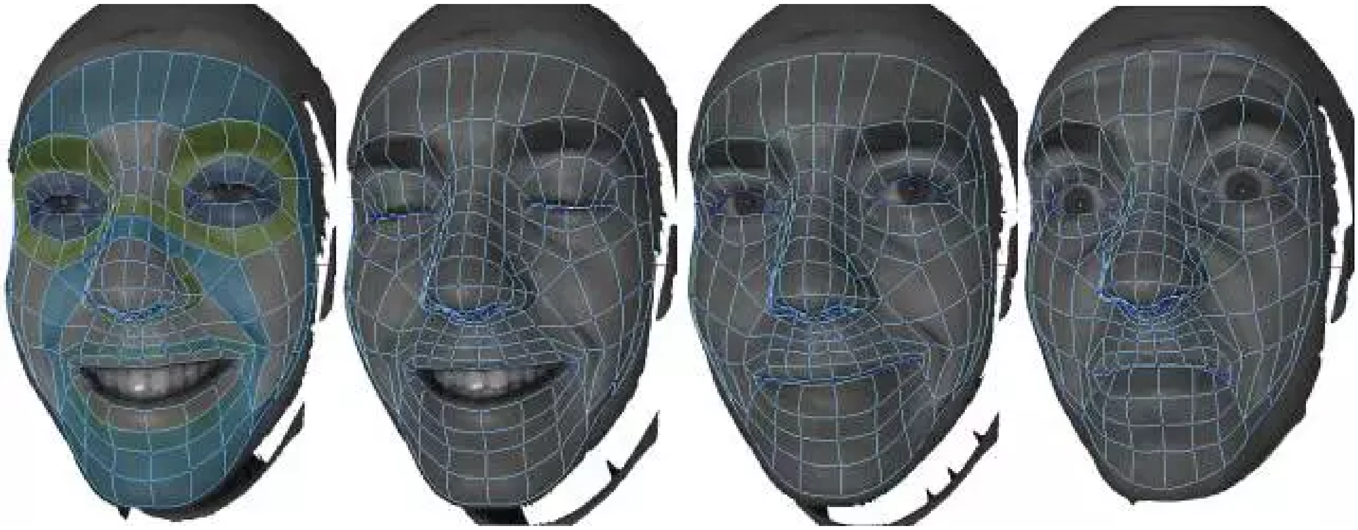


图2. 计算机视觉：动态曲面跟踪。

图2显示了在计算机视觉中的曲面配准，动态形状追踪问题。给定两张曲面，建立曲面间的微分同胚，这被称为是曲面配准问题（shape registration）；给定一系列动态曲面，建立曲面间的微分同胚。例如图2中显示的一系列三维动态人脸曲面，带有不同的表情变化。我们希望算法自动建立人脸曲面的微分同胚，得到皮肤表面的逐点对应，从而实现曲面追踪，表情提取和分析。人脸曲面的几何变换是非等距的，却是拟共形的，可以用共形几何的方法加以解决。

图3. 几何建模：流形样条理论。

图3显示了几何建模领域中流形样条的例子。在计算机游戏和影视制作中，曲面可以是连续不可微曲面。在数字制造领域中，数控机床的刀具的轨迹控制需要计算速度和加速度（力量），这要求曲面是二阶光滑的。因此，构造全局二阶光滑的曲面是几何建模领域的中心问题之一。我们可以证明，传统的样条构造是基于仿射几何，拓扑复杂曲面上的全局样条需要曲面具有仿射结构。因为拓扑障碍的存在，一般情形下全局仿射结构并不存在。因此，奇异点无法避免。如何选取奇异点的位置，控制奇异点的指标，构造其余部分的仿射结构，这些都需要用到计算共形几何的方法。

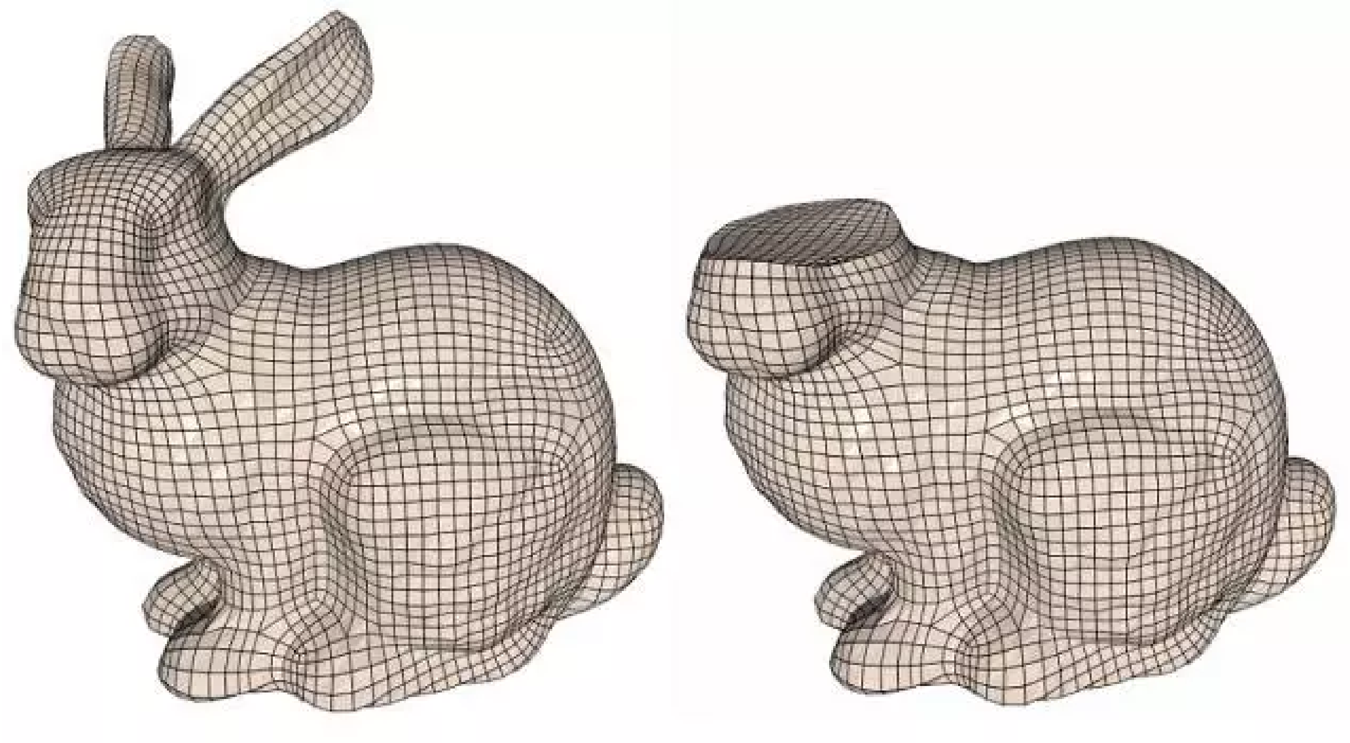


图4. 计算力学：六面体网格化。

图4显示了计算力学中六面体网格化的应用。在计算力学中，我们需要求解各种物理偏微分方程，这需要计算实体的剖分。如何将实体剖分成六面体网格，同时具有最少的奇异点和奇异线，这被称为是网格生成领域的圣杯问题。应用共形几何中的曲面叶状结构理论和全纯微分理论，我们可以自动构造神圣网格。

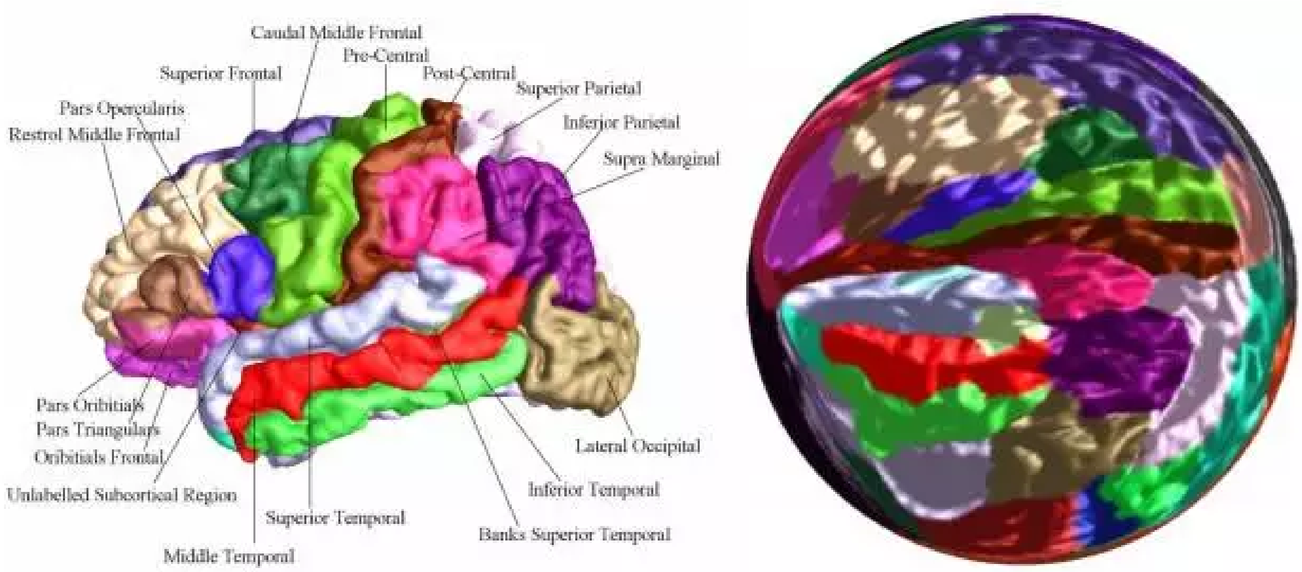


图5. 医学图像：共形脑图。

在医学图像中，如何配准人体器官曲面，如何精准测量几何形状的相异程度都是基本问题。如图5所示，人的大脑皮层曲面具有复杂的沟回结构，并且这种结构因人而异。我们用共形映射将大脑皮层曲面映射到单位球面，为皮层上的每点建立经纬坐标，这样就容易配准大脑皮层曲面，进行精确测量。这为诊断脑神经方面的疾病诊断提供了精准的方法。

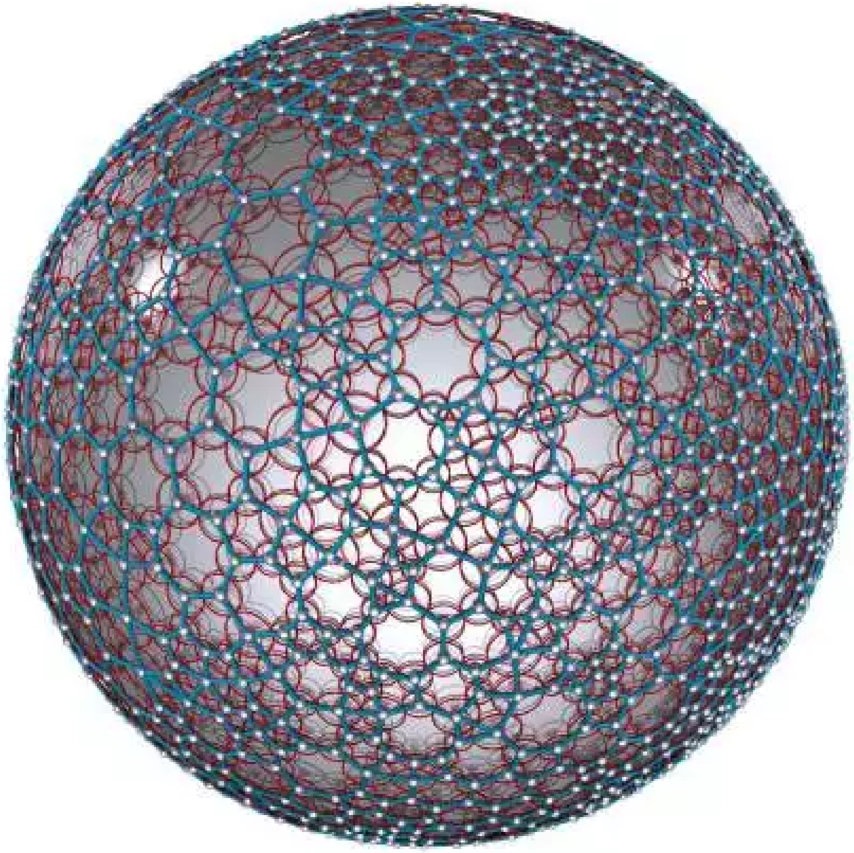


图6. 传感器网络的几何路由算法。

如图6所示，在无线传感器网络（wireless sensor network）中的几何路由（routing）算法需要用到每个传感器的坐标。一般情况下，可以用每个传感器的GPS坐标。但是，GPS信号无法穿越水层，因此水下传感器网络需要设计虚拟坐标。我们应用离散共形映射方法，将抽象的图映射到单位球面上，在投射到平面上面，得到虚拟坐标以利于实现路由算法。

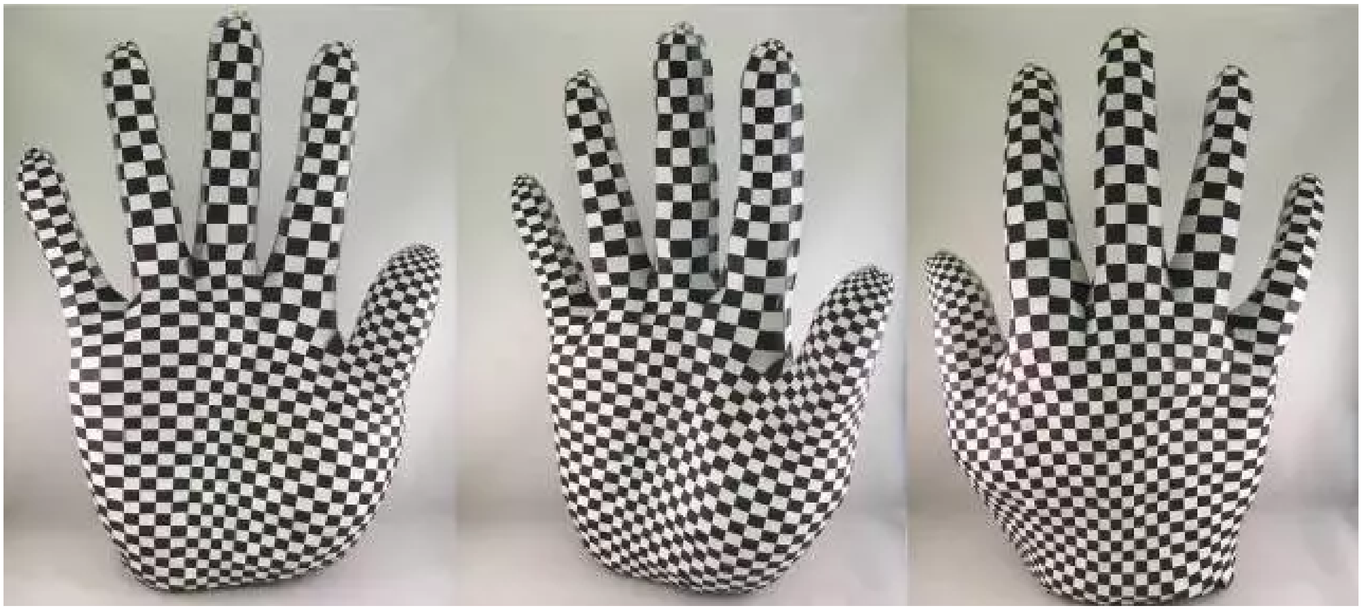


图7. 在机械制造领域中的超材料设计和三维编织。

图7显示了在数字制造领域中的新颖应用，三维编织。给定复杂三维曲面，我们可以将其分解成两族彼此共轭的纤维（叶状结构），通过编织这些纤维来制造这个曲面。这种叶状结构的计算用到全纯微分的算法，这种编织方法可以适用于任意拓扑和复杂几何曲面。

由此可以，计算共形几何在工程和医疗中具有非常广泛的应用。在后继课程中，我们会对这些应用案例加以详细解释。

【老顾谈几何】邀请国内国际著名纯粹数学家，应用数学家，理论物理学家和计算机科学家，讲授现代拓扑和几何的理论，算法和应用。

回复“**目录**”，可以浏览往期精华；回复“**智商**”，可以阅读“**如何从大脑形状判断一个人的智商**”；回复“**象牙塔**”，可以阅读“**纯粹数学走出象牙塔**”；回复“**概览**”，可以阅读“**计算共形几何概览**”。