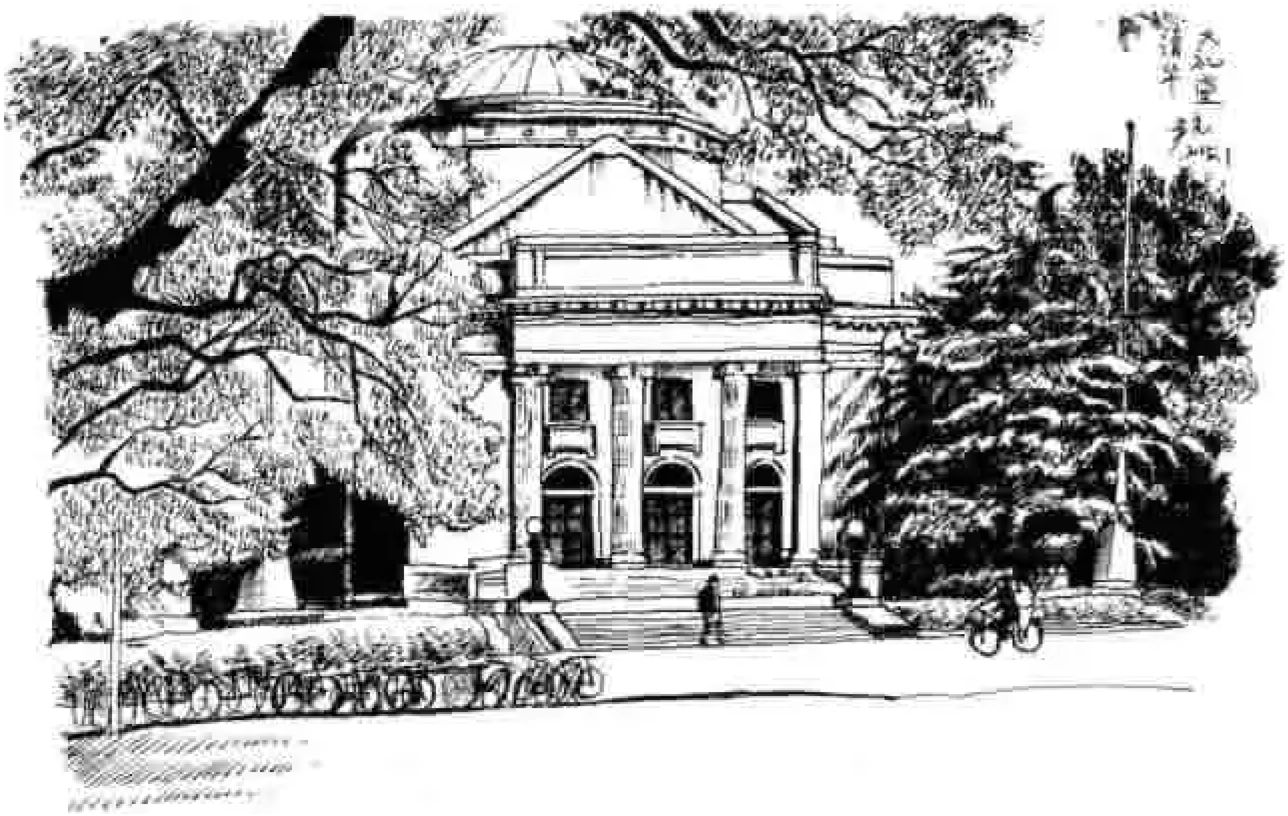
清华笔记：计算共形几何讲义 （6）上同调的霍奇理论

顾险峰 老顾谈几何 2017-07-12



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。】

这次课程，我们介绍霍奇分解定理，这一定理在图形学、视觉和网络中，应用非常广泛。直观而言，我们考察曲面上的切向量场，如果这个向量场光滑得无以复加，那么这个向量场被称为是调和场（harmonic field）。霍奇分解定理是说曲面上任意一个光滑切向量场，可以被唯一地分解为三个向量场：梯度场、散度场和调和场。霍奇分解经常被用于光滑化一个矢量场，将一个不可积矢量场变得可积。本次视频链接在【1】中可以找到。

图1. 曲面调和1-形式群的基底。

在几何应用中，很多时候我们需要在一类对象中选择一个代表元。在最为理想的情况下，代表元是唯一的。比如我们考察曲面的同伦群，每一个同伦类中有无穷多条闭合曲线，我们可以选择最短的测地线。如果曲面的曲率处处为负，则每一个同伦类中有唯一的一条测地线。但是，如果曲面配有一般的度量，同伦类中的测地线可能有多条。de Rham上同调群中的调和形式就像测地线一样，成为同一上同调类的唯一代表。

从更高的观点来看，调和形式是流形上椭圆型偏微分方程的解，其解空间的维数（同调群的维数）由流形的拓扑所决定。这正是指标定理的精髓。指标定理联结了分析（偏微分方程）和拓扑（上同调群）。

物理解释

曲面上所有无旋无散矢量场成群，此群和曲面的上同调群同构，这就是所谓的霍奇(Hodge)理论。

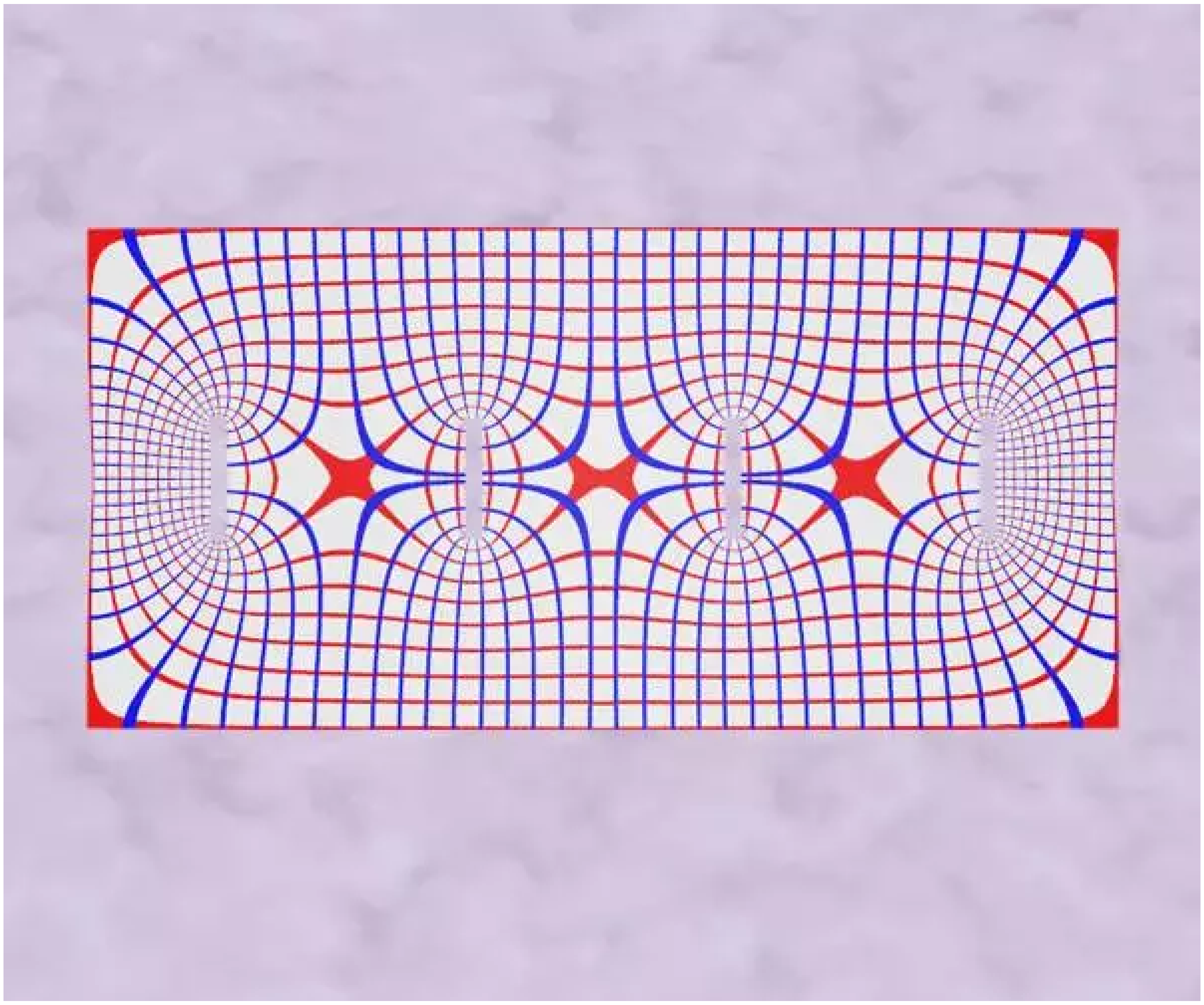


图2. 平面区域上的电场。

曲面上的无旋无散场（旋度为0，散度为0的场）的现实世界模型就是静电场，也可以理解为曲面上光滑得无法再光滑的矢量场。详细解释，请参考【2】。

平面静电场 如图2所示，假设Ω是平面区域，具有边界

$$\partial\Omega = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$$

其中γ_0是外边界，$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$是内边界。我们在$\Omega$上设置电场，电势函数为$u : \Omega \to \mathbb{R}$，电势在$\gamma_0$上为0，在$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$上为1。带电粒子在电场中的每一点都受到电场力，带电粒子在电场中的自由运动轨迹是蓝色轨道，被称为是电力线。图中红色轨道是等势线。平面区域Ω上的电场强度是平面上的光滑矢量场，$\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$，分量表示

$$\mathbf{f}(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{e}_1 + f_2(x, y)\mathbf{e}_2$$

假设$\gamma : [0, 1] \to \Omega$是平面区域上的一条路径，带电粒子沿着路径移动，电场对于粒子做功，总功为

$$W = q\int_\gamma \langle \mathbf{f}, d\gamma\rangle = q\int_\gamma \langle \mathbf{f}, \dot{\gamma}\rangle d\tau$$

假如γ是一条环路，围绕$D\subset\Omega$，D是点p的邻域，那么我们可以引进旋量的概念，

$$\text{curl }\mathbf{f}(p)\cdot\mathbf{n} = \lim_{D\to\{p\}}\frac{1}{|D|}\oint_\gamma \langle \mathbf{f}, d\gamma\rangle$$。

这里直接计算得到

$$\text{curl }\mathbf{f} = \nabla\times\mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$。

根据Stokes定理，场强沿着一条封闭曲线$\gamma = \partial D$做功

$$\oint_{\partial D}\langle \mathbf{f}, d\gamma\rangle = \int_D \nabla\times\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\ dA$$。

在电场情形，电场强度是电势函数的梯度，$\mathbf{f} = \nabla u$，电场沿着路径$\gamma:[0,1]\to\Omega$做功

$$\int_\gamma \langle \mathbf{f}, d\gamma\rangle = \int_\gamma \langle \nabla u, d\gamma\rangle = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0))$$，

因此，电场强度沿着任意封闭曲线做功都为0，电场强度的旋量处处为0，$\nabla\times\mathbf{f} = 0$。

矢量场电场强度的散度定义为无穷小面元的净流入量，

$$\text{div }\mathbf{f}(p) = \lim_{D\to\{p\}}\frac{1}{|D|}\int_{\partial D}\langle \mathbf{f}, \mathbf{n}\rangle ds$$

直接计算得到

$$\text{div }\mathbf{f} = \nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

根据高斯通量定理，对于任意$D\subset\Omega$，电通量

$$\Phi = \oint_{\partial D}\langle \mathbf{f}, \mathbf{n}\rangle ds = \int_D \nabla\cdot\mathbf{f}\ dA$$

等于D的内部净电荷，因为内部净电荷为0，所以电场强度的散度处处为0，$\nabla\cdot\mathbf{f} = 0$。由此，平面区域上的电场强度矢量场是无旋场和无散场，我们称这种矢量场为调和场。

那么，曲面上的静电场又该如何描述？

调和微分形式

曲面静电场 调和场的概念可以推广到曲面上，如图3所示，红色轨道表示等势线，蓝色轨道表示电力线。曲面上的电场强度切矢量场为无旋无散的调和场。

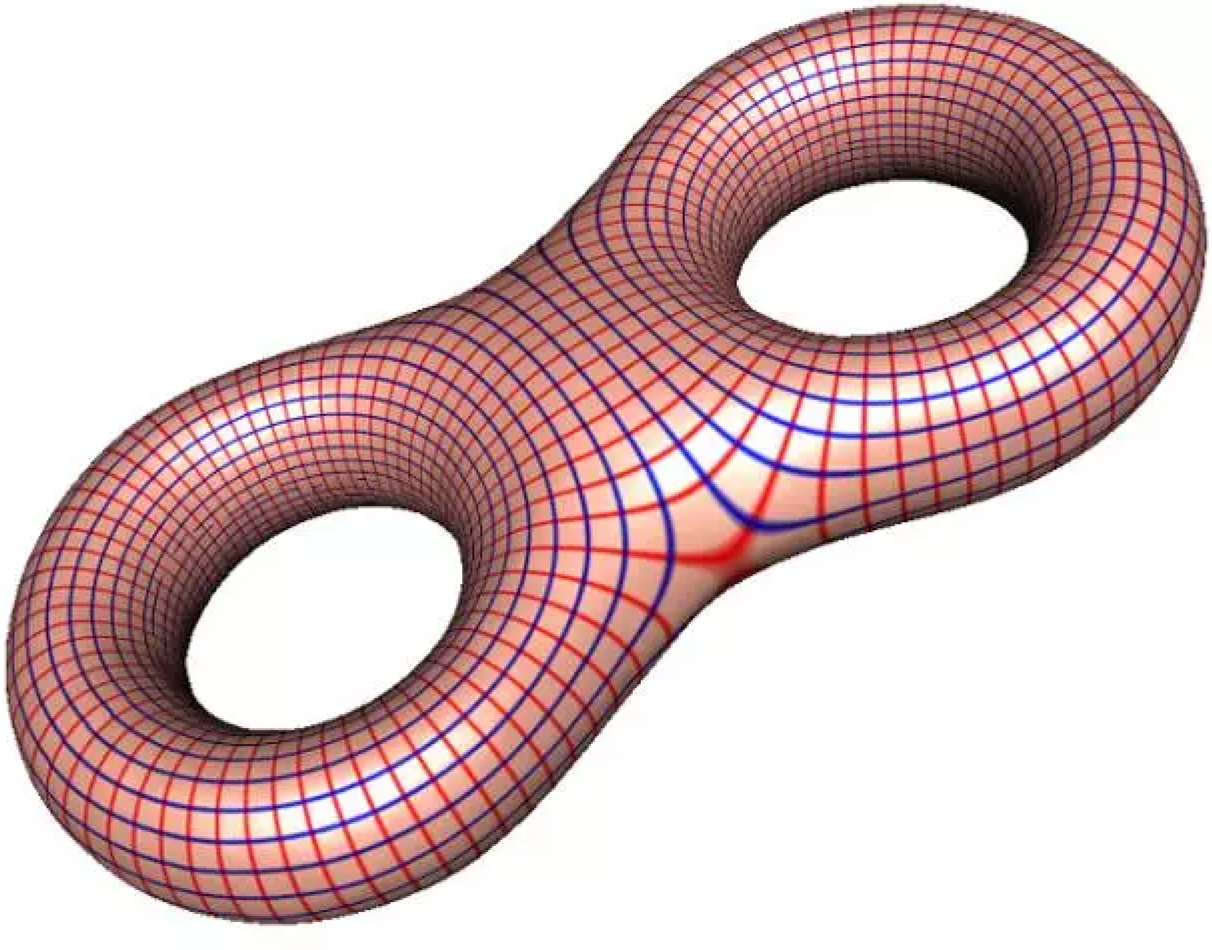


图3. 亏格为二的曲面上的调和矢量场。

图4显示的是另外一个调和切矢量场，同样无旋无散。

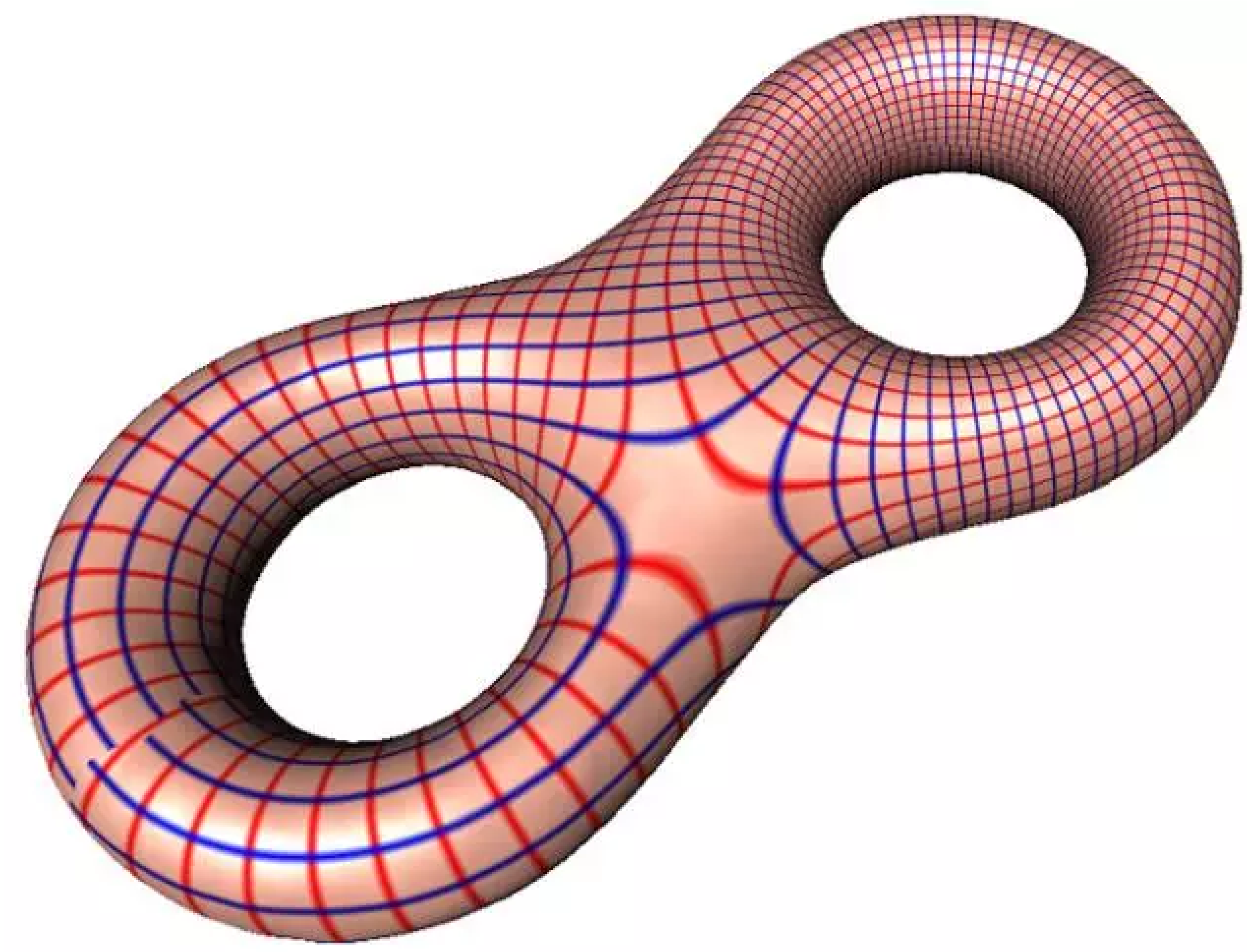


图4. 亏格为二的曲面上的调和矢量场。

外微分算子

上面我们讨论的场论中的微分算子，比如梯度，旋度和散度，可以被外微分所统一。k阶外微分算子将一个k-形式变成一个(k+1)-形式$d_k:\Omega^k(S)\to\Omega^{k+1}(S)$。

对于0-形式，$f:S\to\mathbb{R}$，$df\in\Omega_1(S)$就是函数的全微分，

$$df=\frac{\partial f}{\partial u_\alpha}du_\alpha+\frac{\partial f}{\partial v_\alpha}dv_\alpha,$$

对于1-形式，$\omega=fdu_\alpha+gdv_\alpha$，$d\omega$就是对于矢量场的旋度，

$$d\omega=\left(\frac{\partial g}{\partial u_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial v_\alpha}\right)du_\alpha\wedge dv_\alpha$$

对于2-形式 $\tau\in\Omega^2(S)$，在曲面上 $d\tau$为0。

Hodge星算子

如图1左帧所示，任意带度量的可定向曲面局部存在等温坐标，

$$\mathbf{g} = e^{2\lambda(u,v)}(du^2 + dv^2)$$

则曲面的面积元为

$$\omega_{\mathbf{g}} = e^{2\lambda(u,v)} du \wedge dv,$$

给定两个1-形式，$\omega = \omega_1 du + \omega_2 dv$，$\tau = \tau_1 du + \tau_2 dv$，则其内积为

$$\langle \omega, \tau \rangle := e^{-2\lambda}(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2),$$

我们可以定义Hodge星算子，$^* : \Omega^k \to \Omega^{2-k}$，

$$\omega \wedge^* \tau := \langle \omega, \tau \rangle \omega_{\mathbf{g}},$$

由此我们得到在等温坐标下，我们有简单的规则

$$^*du = dv, \quad ^*dv = -du$$

从而得到

$$^*(\omega_1 du + \omega_2 dv) = \omega_1 dv - \omega_2 du。$$

同时，

$$^*1 = \omega_{\mathbf{g}}, \quad ^*\omega_{\mathbf{g}} = 1。$$

Hodge星算子可以直观理解如下：令切矢量$\mathbf{w} \in T_pS$和微分1-形式$\omega \in T_p^*S$对偶，$\tilde{\mathbf{w}} \in T_pS$和$^*\omega \in T_p^*S$对偶，那么

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{n} \times \mathbf{w},$$

这里$\mathbf{n}$是曲面在p点的法向量，即$\tilde{\mathbf{w}}$是由$\mathbf{w}$旋转$\pi/2$得到。

由Hodge星算子，我们可以定义微分形式间的另外一种L^2内积，

$$(\zeta, \eta) = \int_S \zeta \wedge^* \eta = \int_S \langle \zeta, \eta \rangle \omega_{\mathbf{g}},$$

由此我们得到codifferential算子，$\delta : \Omega^k \to \Omega^{k-1}$，它是外微分算子关于内积$(\cdot, \cdot)$的共轭算子，

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta),$$

更为直接的

$$\delta = *d*,$$

那么codifferential算子的物理意义就是散度。

调和微分形式

调和微分形式的物理意义就是无旋无散场，$\omega \in \Omega^k$调和，则

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d\omega & = & 0 \\ \delta\omega & = & 0 \end{array} \right.。$$

上式给出了调和场的椭圆型偏微分方程。

那么，自然的问题就是：调和形式存在吗？如果存在，解唯一吗？如果不唯一，那么所有的解空间的维数如何？所有解构成的群结构如何？Hodge理论给出了所有这些问题的解答：所有的调和k-形式构成群，调和k-形式群和流形的k阶上同调群同构。

图5. 女孩曲面上的调和1-形式。

霍奇（Hodge）理论

Hodge理论本质是说：每一个上同调类中有且仅有一个调和微分形式。这个定理有两层意思，一是存在性，二是唯一性。

我们首先证明唯一性。假设$(S, \mathbf{g})$是一个亏格为g的封闭曲面，$\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2g}\}$是其一维同调群$H_1(M, \mathbb{Z})$的生成元。假设$\omega_1, \omega_2$是上同调等价的调和1-形式，这意味着

$$\int_{\gamma_k} \omega_1 = \int_{\gamma_k} \omega_2, \ k = 1, 2, \cdots, 2g$$
。

由外微分算子和余微分算子的线性性质，我们有

$$d(\omega_1 - \omega_2) = d\omega_1 - d\omega_2 = 0, \ \delta(\omega_1 - \omega_2) = \delta\omega_1 - \delta\omega_2 = 0,$$

所以$(\omega_1 - \omega_2)$是调和1-形式。同时，

$$\int_{\gamma_k} (\omega_1 - \omega_2) = \int_{\gamma_k} \omega_1 - \int_{\gamma_k} \omega_2 = 0,$$

因此$(\omega_1 - \omega_2)$是恰当的调和1-形式，存在调和函数$f : S \to \mathbb{R}$，使得

$$\omega_1 - \omega_2 = df。$$

由调和函数的极大值定理，f的极值取在曲面S的边界，但是S是封闭曲面，边界为空，因此函数f没有极值，必为常数。由此，$\omega_1 - \omega_2 = df = 0$，调和形式的唯一性得证。

然后，我们证明调和形式的存在性。假设$\omega \in \Omega^1(S)$是闭的1-形式，$f : S \to \mathbb{R}$是一个光滑函数，那么$\omega + df$和ω上同调等价。我们求解方程$\delta(\omega + df) = 0$，这等价于求解曲面上的Poisson方程：

$$\Delta_{\mathbf{g}} f = -\delta\omega,$$

根据椭圆型PDE理论，Poisson方程解存在，并且彼此相差一个常数，因此df唯一，$\omega + df$是唯一的和ω上同调等价的调和形式。存在性得证。全体调和微分k-形式在加法下成群，记为$H^k_\Delta(S)$。

给定任意一个微分k-形式$\omega \in \Omega^k(S)$，Hodge分解定理是说微分形式可以被唯一地分解成三个微分形式：恰当形式，余恰当形式和调和形式：$\exists! \ \tau \in \Omega^{k-1}(S), \ \eta \in \Omega^{k+1}(S),$ 和调和k-形式h，使得

$$\omega = d\tau + \delta\eta + h。$$

我们利用微分形式间的内积：

$$(\omega, \eta) = \int_S \omega \wedge^* \eta。$$

首先$\text{Img } \delta \subset (\text{Img } d)^\perp, \quad \text{Img } d \subset (\text{Img } \delta)^\perp$，这是因为：

$$(d\omega, \delta\eta) = (\omega, \delta^2\eta) = (d^2\omega, \eta) = 0,$$

同时$H_\Delta = (\text{Img } d)^\perp \cap (\text{Img } \delta)^\perp$，这是因为如果$\eta \in (\text{Img } d)^\perp$，那么

$$\forall\omega, 0 = (d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta), \delta\eta = 0。$$

如果$\eta \in (\text{Img } \delta)^\perp$，那么

$$\forall\tau, 0 = (\delta\tau, \eta) = (\tau, d\eta), \ d\eta = 0。$$

所以$\eta \in H_\Delta$，

$$(\text{Img } d)^\perp \cap (\text{Img } \delta)^\perp \subset H_\Delta。$$

同样可证，如果$\eta \in H_\Delta$，则

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta) = 0, \ (\delta\tau, \eta) = (\tau, d\eta) = 0,$$

因此

$$H_\Delta \subset (\text{Img } d)^\perp \cap (\text{Img } \delta)^\perp,$$

我们得到：

$$H_\Delta = (\text{Img } d)^\perp \cap (\text{Img } \delta)^\perp,$$
$$\Omega^k(S) = H_\Delta \oplus \text{Img } d \oplus \text{Img } \delta。$$

高阶调和形式的存在性和唯一性证明方法非常类似。

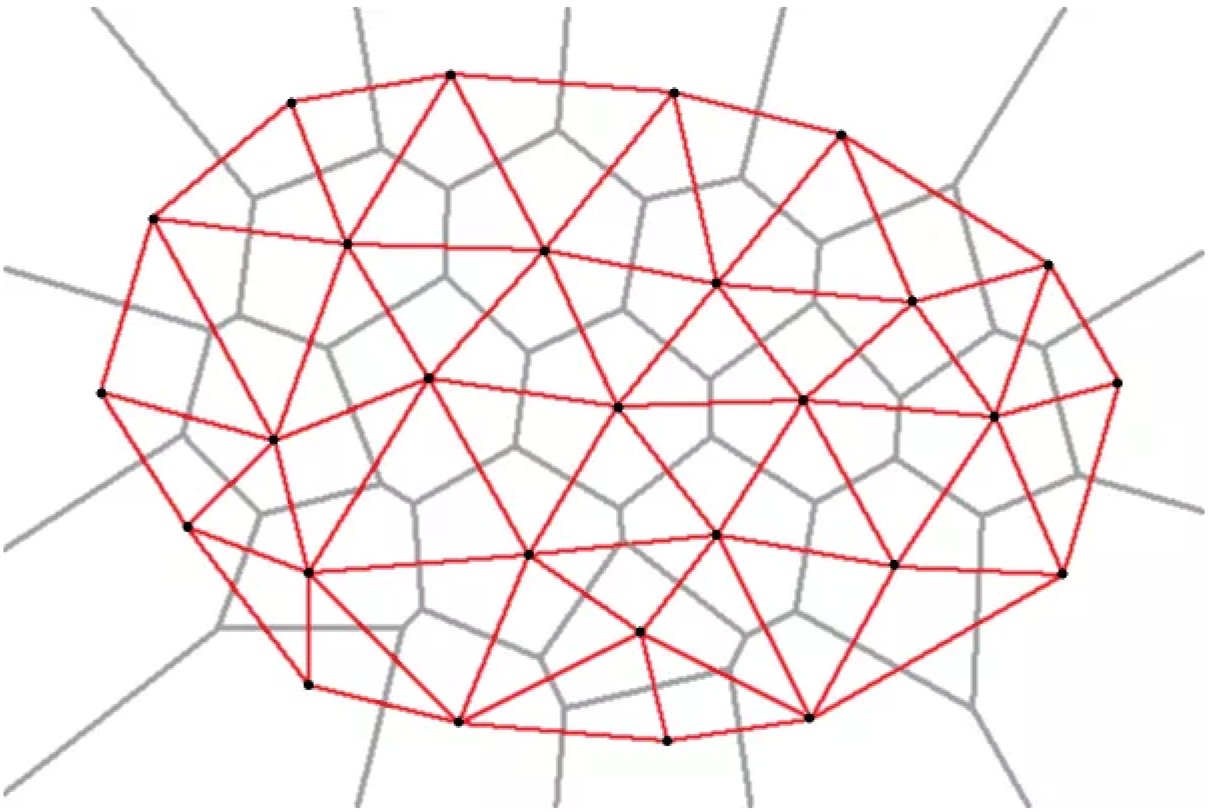


图6. 对偶剖分。

离散霍奇理论

出于计算的目的，我们需要将经典光滑流形的霍奇理论离散化。假设光滑曲面被一个单纯复形M所近似，单纯复形$M=(V,E,F)$嵌入在三维欧氏空间之中，因而具有诱导的欧氏度量，我们称之为带度量的离散曲面(M,d)。我们构造顶点的Voronoi图（Voronoi Diagram），记为$\bar{M}$。对任意顶点$v_i \in V$，其对应的Voronoi胞腔为：

$$Vol(v_i) := \{p \in M | d_g(p, v_i) \le d_g(p, v_j), \forall v_j \in V\},$$

Voronoi Diagram 构成离散曲面(M,d)的一个胞腔分解，记成$\bar{M}=(\bar{V},\bar{E},\bar{F})$。我们称$\bar{M}$为$M$对偶复形。显然，$M$的每个顶点，边和面分别对偶于$\bar{M}$的面，边和顶点，如图6所

示。

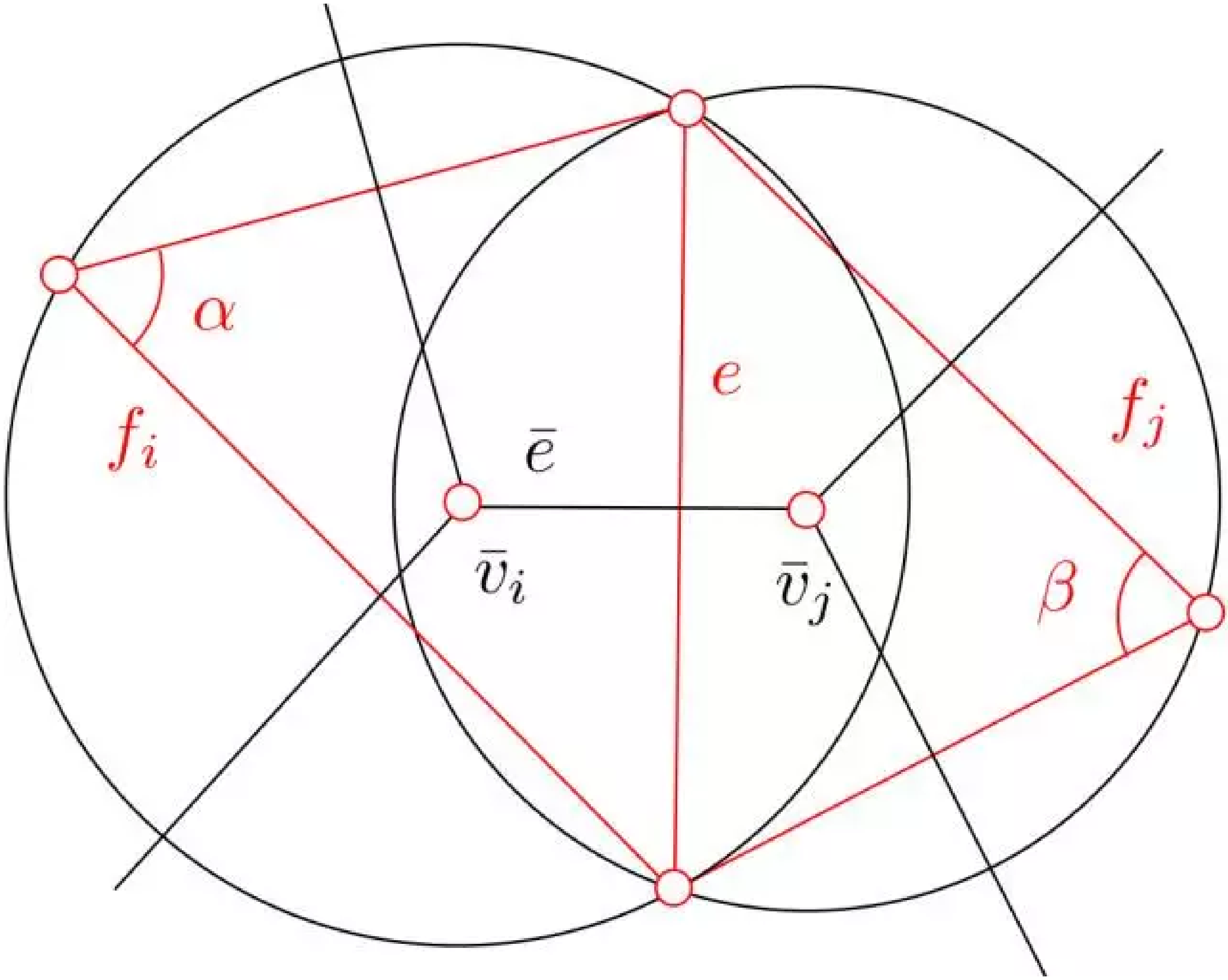


图7. 每条边和其对偶的长度之比。

更进一步，如图7所示，我们计算对偶边长之比。假设两个面f_i, f_j交于一条边e，$f_i \cap f_j = e$。每个面的对偶顶点为对应的外接圆圆心，$\bar{v}_i, \bar{v}_j$分别为f_i, f_j的外心。那么$\bar{v}_i, \bar{v}_j$的连线$\bar{e}$为边e的对偶。由此，我们得到对偶边的长度之比为：

$$\frac{|\bar{e}|}{|e|} = \frac{1}{2}(\cot\alpha + \cot\beta) = w_e$$

。

给定一个1-形式 $\omega \in C^1(M, \mathbb{R}), \omega : E \to \mathbb{R}$，它的Hodge Star是定义在对偶复形上的1-形式，${}^*\omega \in C^1(\bar{M}, \mathbb{R}), {}^*\omega : \bar{E} \to \mathbb{R}$，满足如下的对偶公式：

$$\frac{{}^*\omega(\bar{e})}{|\bar{e}|} = \frac{\omega(e)}{|e|}$$

。

那么，ω是调和的1-形式，当且仅当如下条件被满足：

$$\begin{cases} d\omega &= 0 \\ d^*\omega &= 0 \end{cases}$$

离散曲面(M,d)的调和1-形式群$H^1_\Delta(M,\mathbb{R})$的基底计算方法如下：

1. 计算(M,d)的下同调群$H_1(M,\mathbb{Z})$基底；
2. 计算(M,d)的上同调群$H^1(M,\mathbb{R})$基底，$\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{2g}\}$；
3. 求解离散泊松方程，$d^*(\tau_k+df_k)=0,\ \ \forall 1\le k\le 2g$；
4. 调和形式的基底为 $\omega_k:=\tau_k+df_k,\ \ \forall 1\le k\le 2g$。

离散泊松方程为对称正定稀疏线性系统，我们用共轭梯度方法可以求解。

References:

【1】http://m.iqiyi.com/w_19rtoay4k9.html#vfrm=8-8-u-1
【2】苏变萍，陈东立，《复变函数与积分变换》，高等教育出版社。
