

清华笔记：计算共形几何讲义（14）共形模的计算

顾险峰 老顾谈几何 2017-07-29



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。欢迎任何有兴趣的朋友，前来旁听指导。】

我们前面详尽地介绍了各种拓扑曲面共形不变量（共形模）的概念和理论，极值长度，狭缝映射，圆域映射，黎曼映照，Teichmüller空间等等。这些都是经典的共形几何的理论，由历史上知名的数学大家所建立。

今天，我们详细讲解如何在计算机上计算这些抽象的概念。这些方法都是崭新的，由我们自己发明。

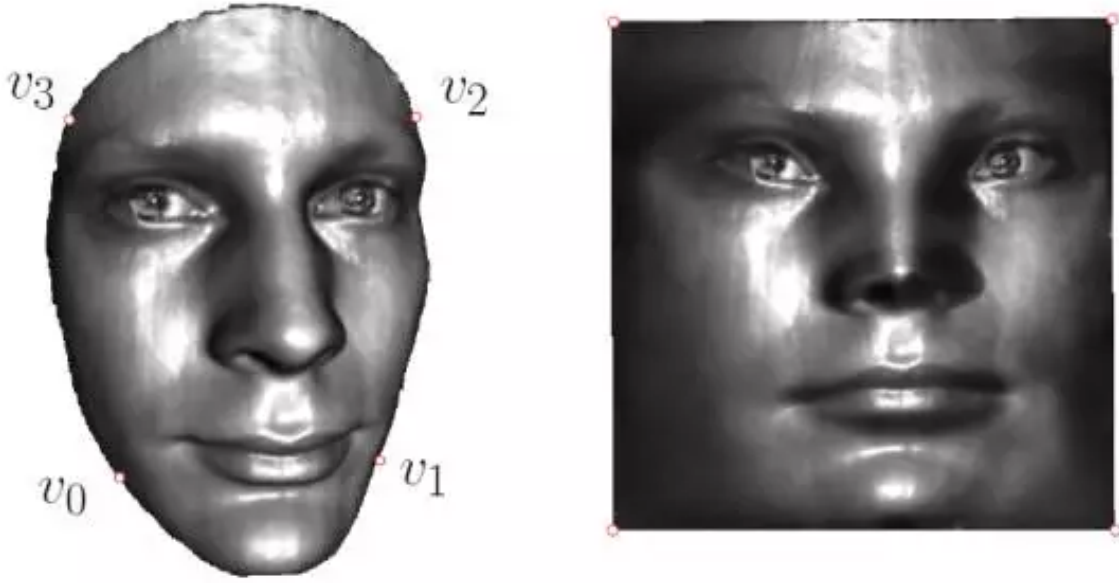


图1：拓扑四边形的共形模。

给定亏格为0的曲面 (S, g) ，带有一条边界 $\Gamma = \partial S$ ，边界上逆时针选取4个点 $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ ，则我们得到一个拓扑四边形。根据极值长度理论，存在一个共形变换 $\varphi : S \rightarrow R$ ，将曲面映射到标准平面长方形，并且把 $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ 映成长方形的角点，那么长方形的高宽之比是拓扑四边形的共形模。

角点 $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ 将边界曲线 Γ 分成四段， $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ，每一段的端点为 $\partial\Gamma_k = v_{k+1} - v_k$ ，这里角标模4。我们求解两个Dirichlet问题，得到两个调和函数 $f_1, f_2 : (S, g) \rightarrow \mathbb{R}$ ，同时满足Dirichlet和Neumann边界条件：

$$\begin{cases} \Delta f_1 &= 0 \\ f_1|_{\Gamma_0} &= 0 \\ f_1|_{\Gamma_2} &= 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial n}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta f_2 &= 0 \\ f_2|_{\Gamma_3} &= 0 \\ f_2|_{\Gamma_1} &= 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial n}|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} &= 0 \end{cases}$$

梯度 ∇f_1 和 ∇f_2 彼此处处垂直，但是并不共轭。我们需要找到一个常数 λ ，使得共形映射 $\varphi = \lambda f_2 + \sqrt{-1}f_1$ ，那么常数 λ 就是标准长方形的宽度。函数的调和能量在共形变换下不变，因此在原来曲面上 $f_1 : S \rightarrow \mathbb{R}$ 的调和能量等于 $Im(z)$ 在标准长方形上的调和能量，

$$E(f_1) = \int_S |\nabla_g f_1|^2 dA_g = \int_R |\nabla \operatorname{Im}(z)|^2 dA = \lambda,$$

由此，我们得到共形变换

$$\varphi = E(f_1)f_2 + \sqrt{-1}f_1.$$

拓扑环带

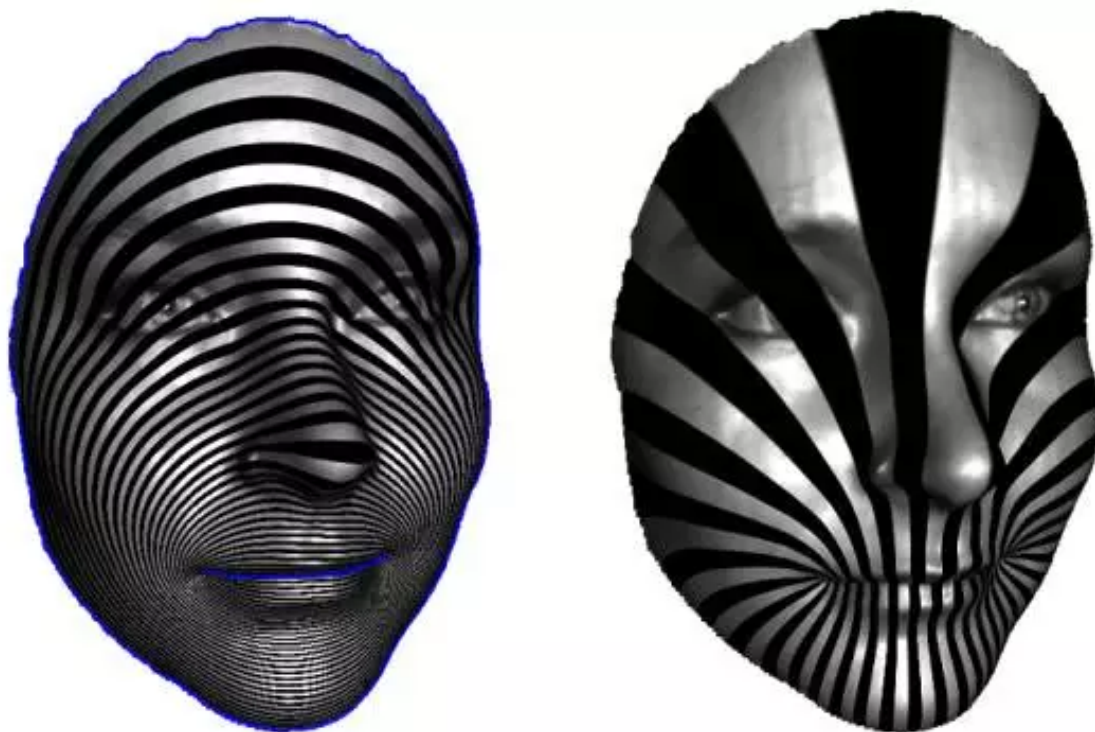


图2：恰当调和形式；闭而非恰当的调和形式。

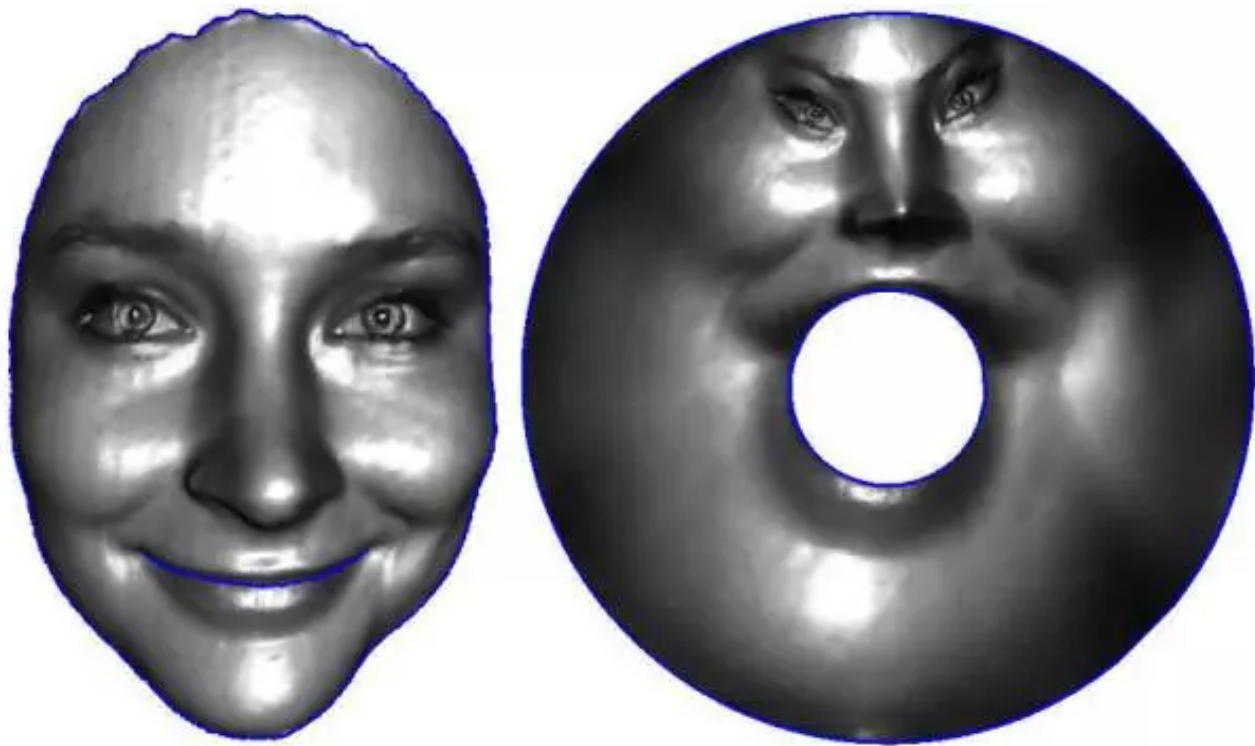


图3：拓扑环带的共形模。

给定一个拓扑环带 (S, g) ，亏格为0带有两条边界， $\partial S = \Gamma_0 - \Gamma_1$ 。我们通过解Dirichlet问题来计算一个调和函数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ，满足

$$\begin{cases} \Delta f &= 0 \\ f|_{\Gamma_1} &= 1 \\ f|_{\Gamma_0} &= 0, \end{cases}$$

那么 df 是一个恰当调和1-形式。

我们再计算连接 Γ_0 和 Γ_1 的最短路径 τ ，将曲面沿着最短路径切开，记为 $\bar{S} = S \setminus \tau$ 。构造函数 $g : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(p) = \begin{cases} 0 & p \in \gamma_0 \\ 1 & p \in \gamma_1 \\ \text{random} & \text{otherwise} \end{cases}$$

那么 dg 是在原来曲面上定义的闭1-形式，记为 $\omega := dg$ ，那么 ω 是环带曲面 S 同下调群 $H_1(S, \mathbb{R})$ 的生成元。

我们在寻找和 ω 同调的调和1-形式。构造一个函数 $h: S \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $\omega + dh$ 是调和1-形式,

$$\delta(\omega + dh) = 0。$$

由此, 得到Poisson方程:

$$\Delta_{\mathbf{g}} h = -\delta\omega。$$

由此, 我们得到调和1-形式 $\eta = \omega + dh$ 。

类似拓扑四边形的情形, 我们计算调和能量 $\lambda = \int_S |\nabla_{\mathbf{g}} f|^2 dA_{\mathbf{g}}$, 那么

$$\Omega = df + \sqrt{-1}\lambda\eta$$

是一个全纯1-形式。我们在曲面 \bar{S} 上做积分, 首先选择一个基 $p_0 \in \Gamma_0$, 对于任意一点 $p \in \bar{S}$, 定义映射:

$$\varphi(p) := \int_{p_0}^p \Omega,$$

我们算出周期:

$$\mu = \text{Im} \left(\int_{\gamma_0} \Omega \right),$$

然后用指数映射将曲面映到标准圆环,

$$p \mapsto \exp \left(\frac{2\pi}{\mu} \varphi(p) \right)。$$

黎曼映照

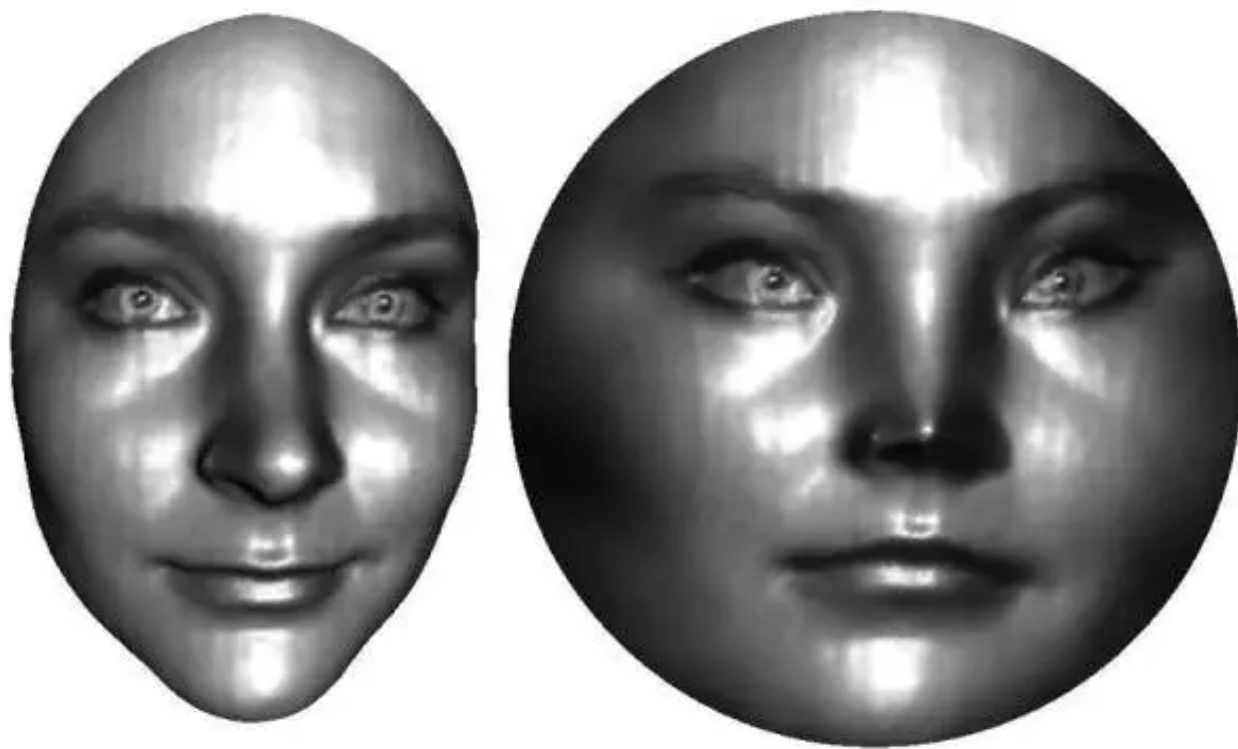


图4：黎曼映照。

给定亏格为0、带有一条边界的曲面，根据黎曼映照定理，我们可以找到共形映射，将曲面映到单位圆盘。

我们首先在曲面内部打穿一个洞，将曲面修改为托盘环带，用拓扑环带的方法将曲面映射到平面标准圆环。当我们将洞的半径缩小，趋向于0，并且保持边界上某个固定点映到+1点，则这一系列的环带之间的共形映射收敛到黎曼映照。

由此，我们看到所构造的映射具有3个自由度：打洞的中心和边界上的固定点。这验证了如下的定理：单位圆盘的共形自同胚群，莫比乌斯变换群，是3维的。

狭缝映射 (Slit Map)



图5：恰当调和形式基底。

我们称一个曲面 (S, g) 是多孔环带 (Poly-annulus) , 如果 S 是一个亏格为0的曲面, 具有多条边界, $\partial S = \Gamma_0 - \Gamma_1 - \cdots - \Gamma_n$ 。根据狭缝映射理论, 存在共形映射 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{C}$, 将两条边界映成同心圆, 将其他边界映成同心圆弧缝。

首先, 我们计算 n 个调和函数, $f_k: S \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 满足Dirichlet边界条件,

$$\begin{cases} \Delta f_k &= 0 \\ f_k|_{\Gamma_k} &= 1 \\ f_k|_{\Gamma_j} &= 0, j \neq k, \end{cases}$$

得到恰当调和1-形式 $\{df_1, df_2, \cdots, df_n\}$ 。

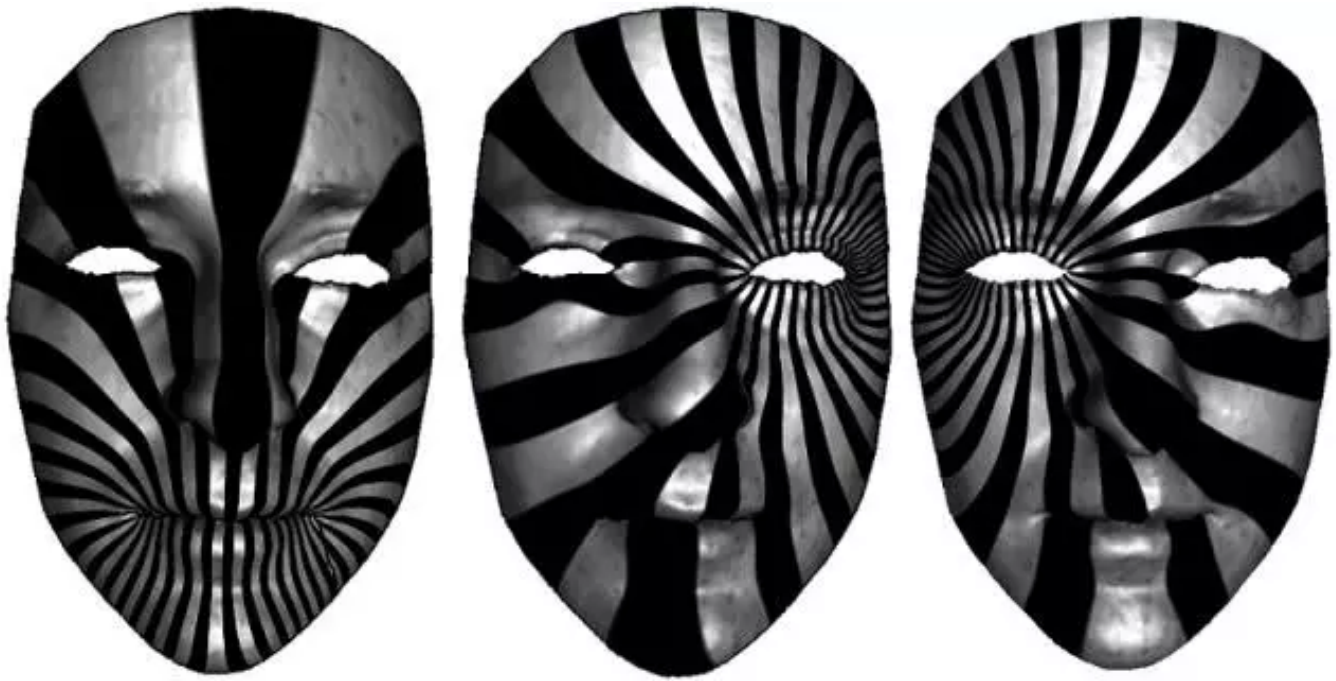


图6：调和1-形式上同调群基底。

我们计算连接 Γ_0, Γ_k 的最短路径 τ_k 。将曲面沿着一条 τ_k 切开，得到曲面 \bar{S}_k ，构造函数 $g_k: \bar{S}_k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_k(p) = \begin{cases} 1 & p \in \tau^+ \\ 0 & p \in \tau^- \\ \text{random} & \text{otherwise} \end{cases},$$

那么 dg_k 在原来曲面上定义了一个闭的1-形式，记为 ω_k ，那么 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 构成了曲面上同调群 $H^1(S, \mathbb{R})$ 基底。

然后我们再计算 n 个函数 g_k ，使得 $\omega_k + dg_k$ 是调和1-形式，求解偏微分方程，

$$\begin{cases} \Delta g_k &= -\delta \omega_k \\ \frac{\partial g_k}{\partial n} &= 0 \end{cases}$$

于是我们得到调和1-形式 $\eta_k = \omega_k + dg_k$ 。

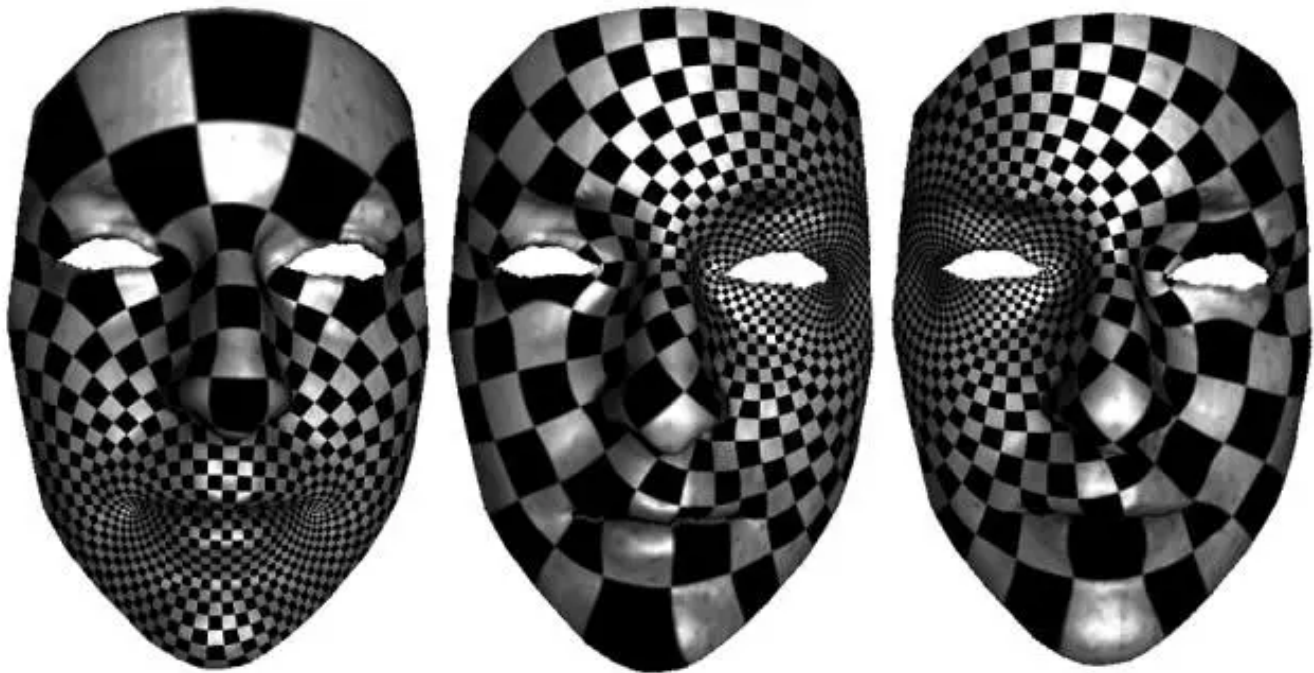


图7：全纯1-形式基底。

至此，我们得到调和1-形式基底

$$\{df_1, \dots, df_n, \eta_1, \dots, \eta_n\}$$

然后我们计算共轭调和1-形式,

$$*\eta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i df_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \eta_j,$$

我们得到方程,

$$\int_S df_k \wedge *\eta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \int_S df_k \wedge df_i + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} \int_S df_k \wedge \eta_j,$$

左侧我们用微分1-形式对偶的矢量场，将微分形式的外积转换成矢量的叉积，在每个面上计算然后累加。由此，解出待定系数 $\{\alpha_{ki}, \beta_{kj}\}$ ，从而求出共轭调和形式，构成全纯1-形式基底

$$\{\Omega_k = \eta_k + \sqrt{-1} *\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

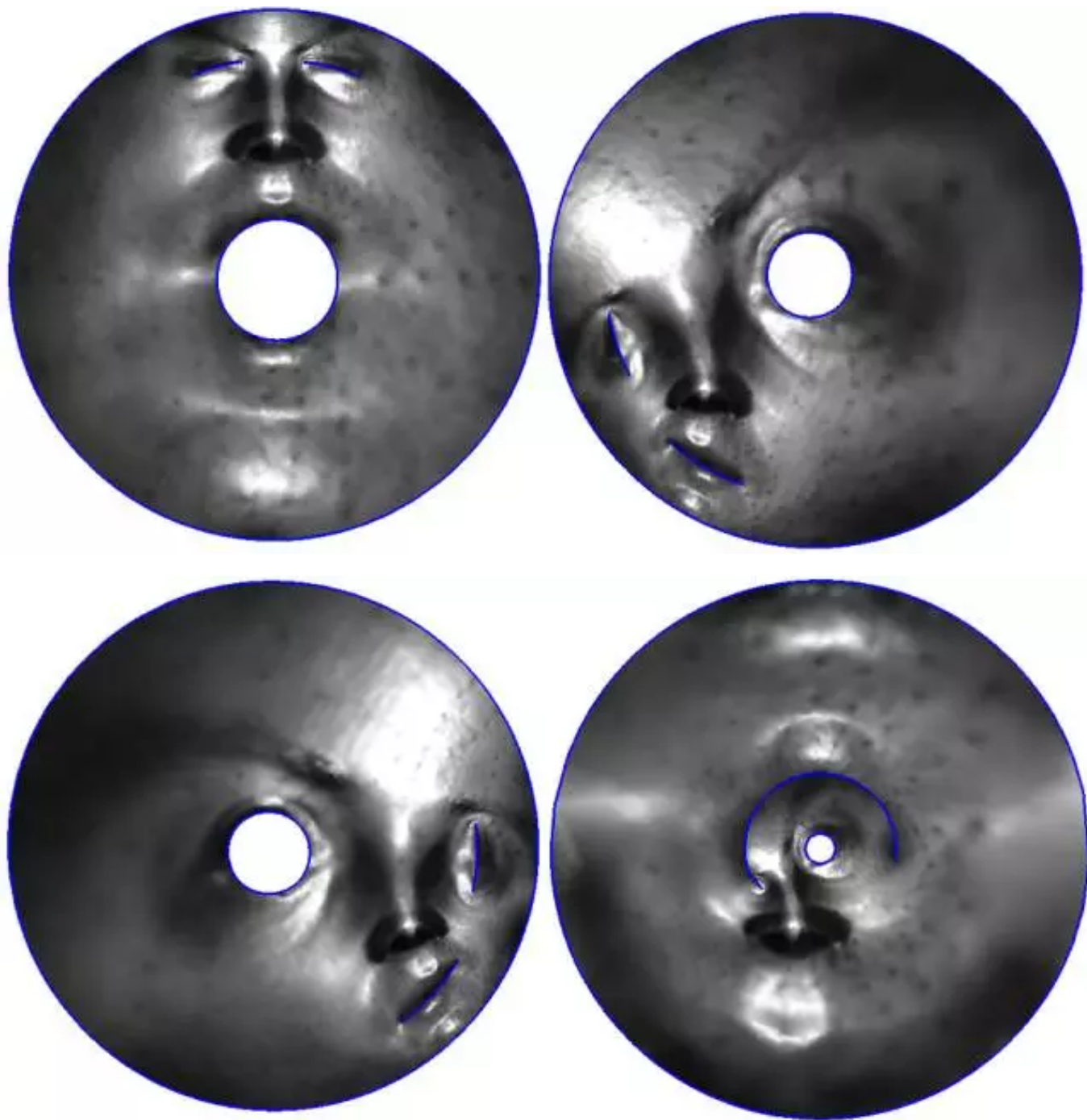


图8：狭缝映射。

我们选择两条边界，例如 Γ_0, Γ_1 ，我们希望找到一个全纯1-形式，

$$\Omega = \sum_{k=1}^n \lambda_k \Omega_k$$

满足如下积分条件：

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\Gamma_0} \Omega \right) = 2\pi, \operatorname{Im} \left(\int_{\Gamma_1} \Omega \right) = -2\pi, \operatorname{Im} \left(\int_{\Gamma_k} \Omega \right) = 0$$

通过求解线性系统，我们可以求得待定系数，从而得到唯一满足条件的全纯1-形式 Ω 。

我们将曲面沿着所有的最短路径切开， $\bar{S} = S \setminus \cup_{k=1}^n \Gamma_k$ ，然后选则基点 $p_0 \in \Gamma_0$ ，对于一切点 $p \in \bar{S}$ ，在 \bar{S} 中任意选择路径连接 p_0 和 p ，定义映射

$$p \mapsto \exp \left(\int_{p_0}^p \Omega \right),$$

即为所求的狭缝映射。

圆域映射

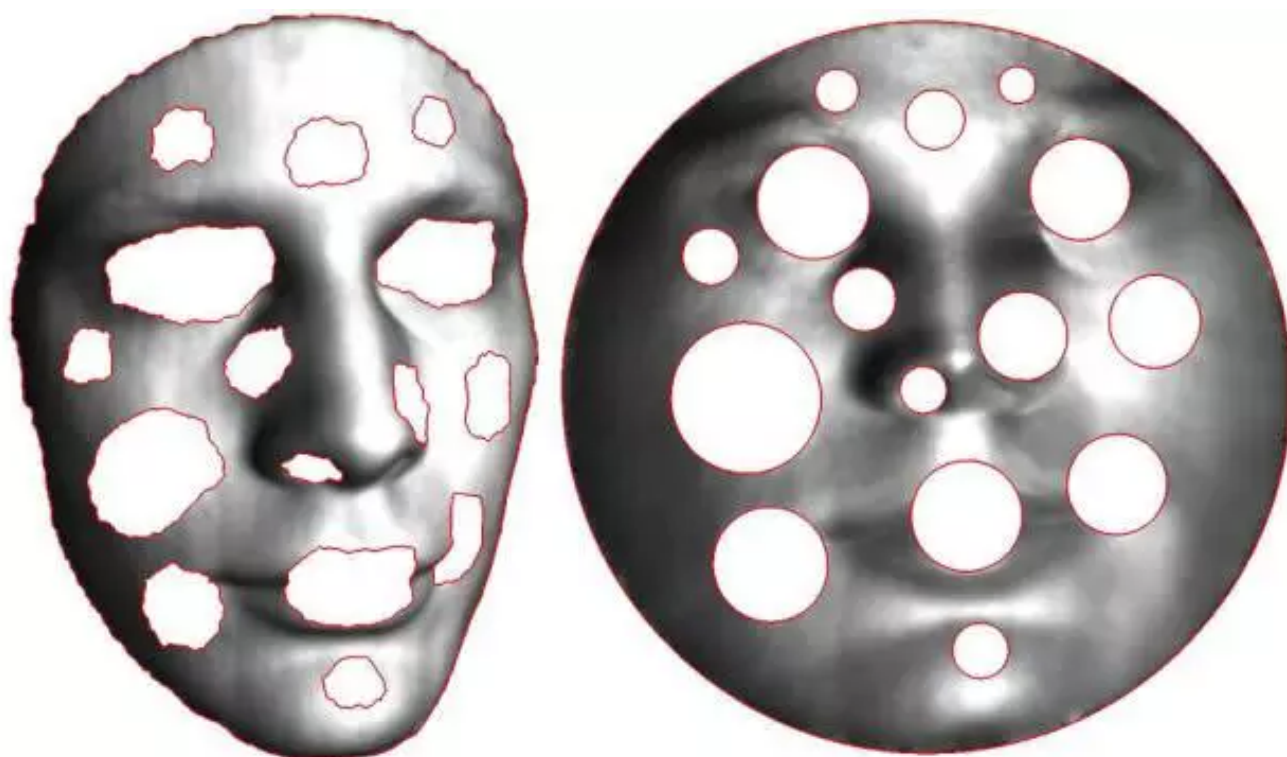


图9. 圆域映射。

根据Koebe迭代理论，存在共形映射，将多孔环带曲面映到平面圆域。算法如下：每次将曲面所有的边界内部填满，只留下两条边界；然后计算填充后的曲面到标准平面环带的共形映射；再将标准环带的内外圆形边界填满，打开另外两个边界；计算拓扑环带到

标准平面环带的共形映射。如此循环往复，原来曲面的边界会越来越圆，直至收敛到一个平面圆域。

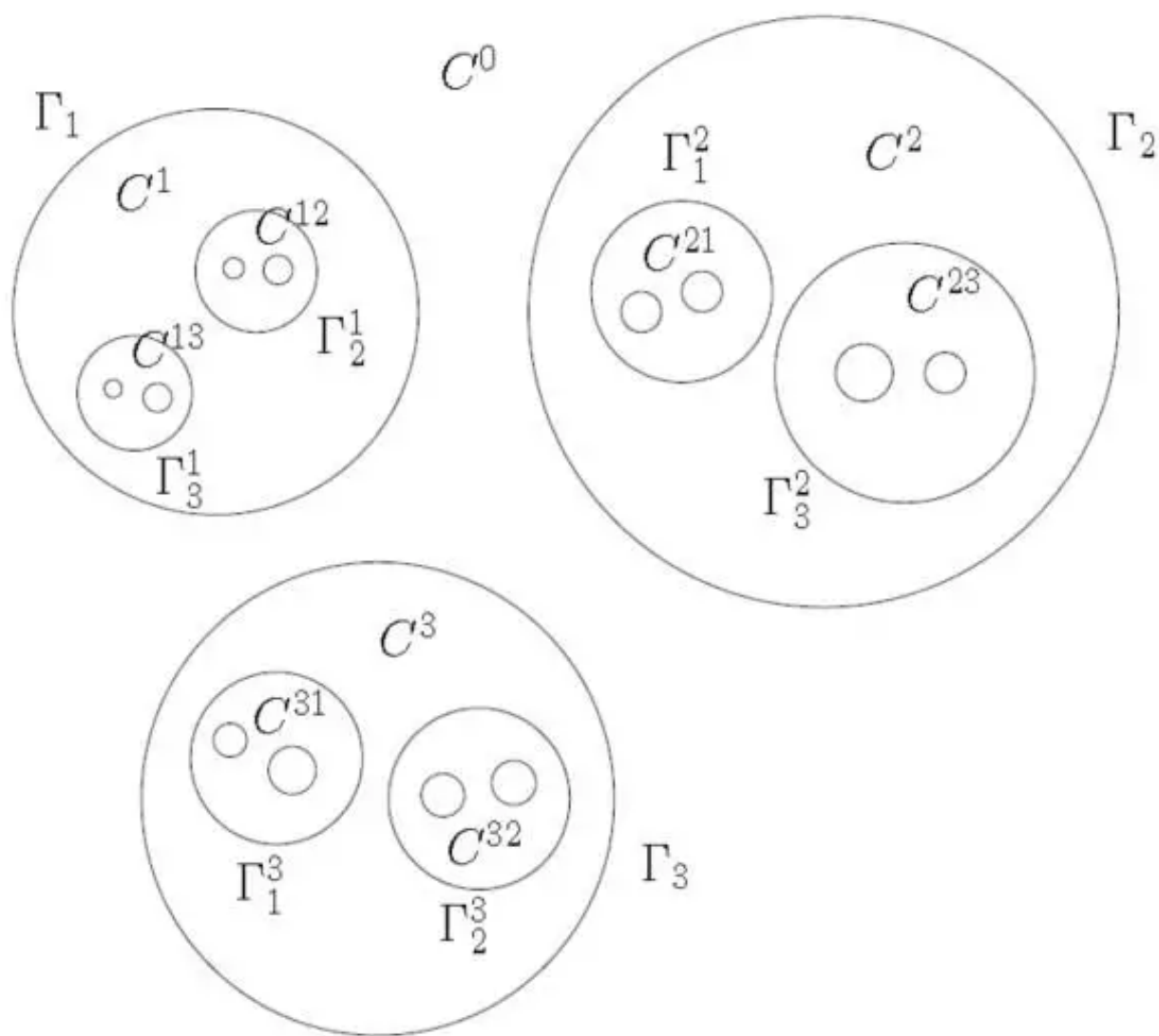


图10、圆域反射示意图。

我们在证明Koebe的迭代算法收敛性时，使用了复杂的角标系统。这里，我们试图简化迭代算法的说明。如图10所示，我们考虑复平面去掉三个圆洞，其边缘记为 $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ ，初始区域记为 C^0 ； C^0 关于 Γ_k 反射，所得的像是 C^k ； C^k 的边界曲线记为 Γ_j^k ； C^k 关于 Γ_i 反射，所得的区域是 C^{ik} ； C^{ik} 的边界曲线是 Γ_j^{ik} ； C^{ik} 关于 Γ_j 反射，所得区域是 C^{jik} 。如此反复，以致无穷。

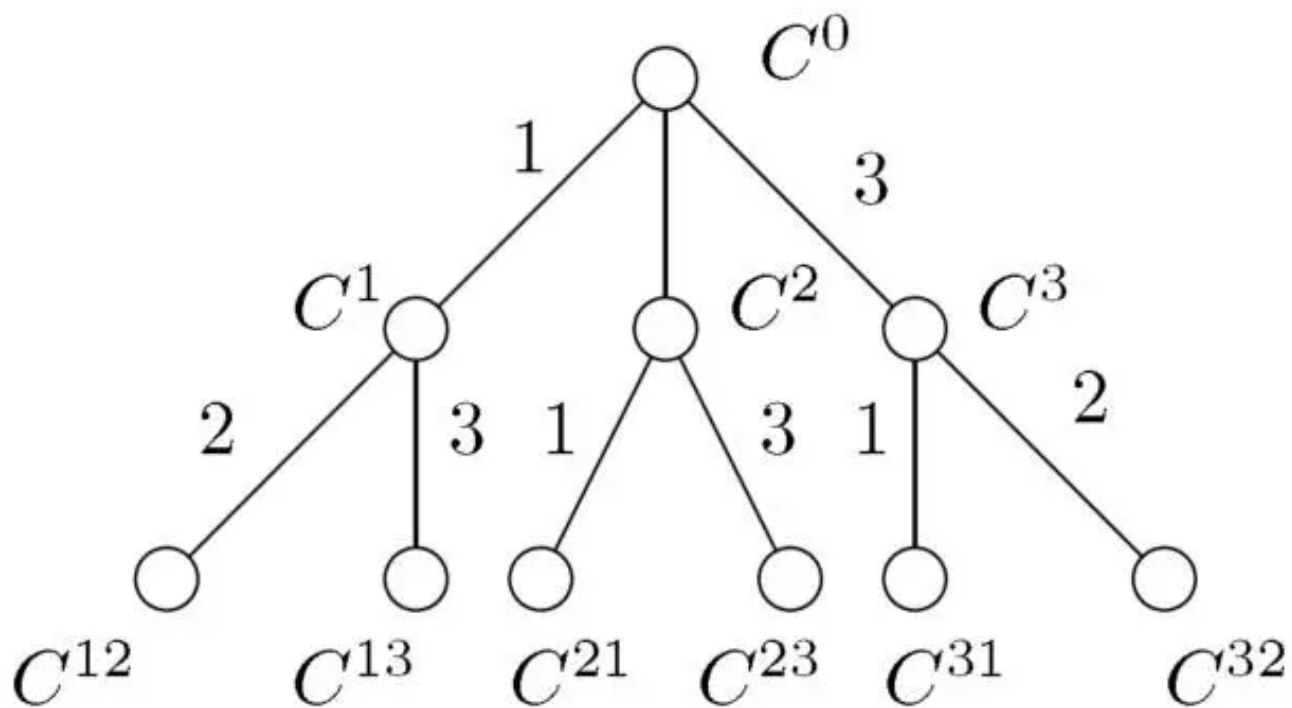


图 11. 反射树。

这一过程，可以用树来描述，并且用递归算法实现。如图11所示，

1. 每个节点代表一个初始平面圆域的多重反射像 $C^{i_0 i_1 \cdots i_n}$;
2. 每条边上有一个标号 k ，代表一个边界圆 Γ_k ;
3. 每个节点的角标，等于从根到此节点的路径上所有边的标号。

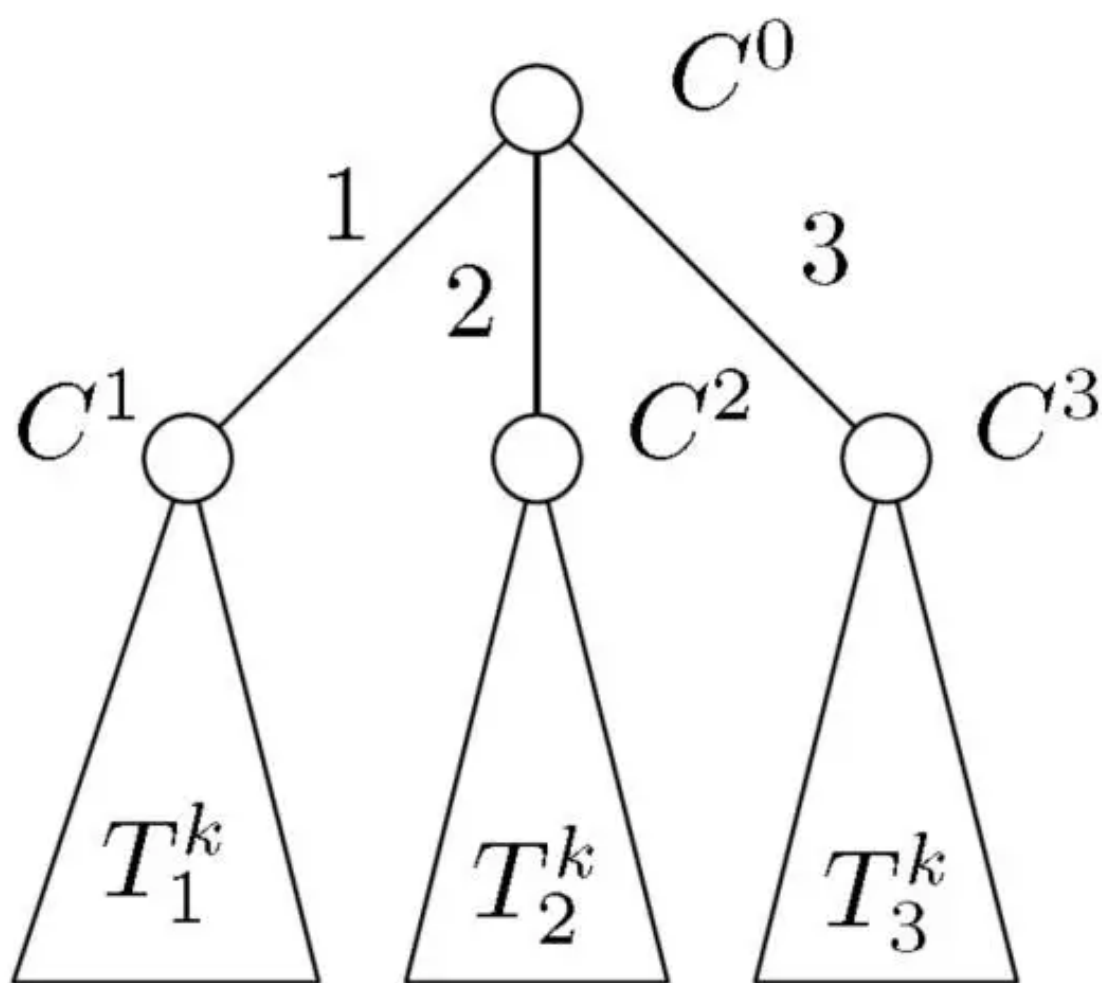


图12、第 (k) 重反射树。

假设，经过了第 k 重循环，我们得到的树如图12所示，以 C^i 为根节点的子树记为 T_i^k 。到第 $k + 1$ 重循环，反射树演化为：

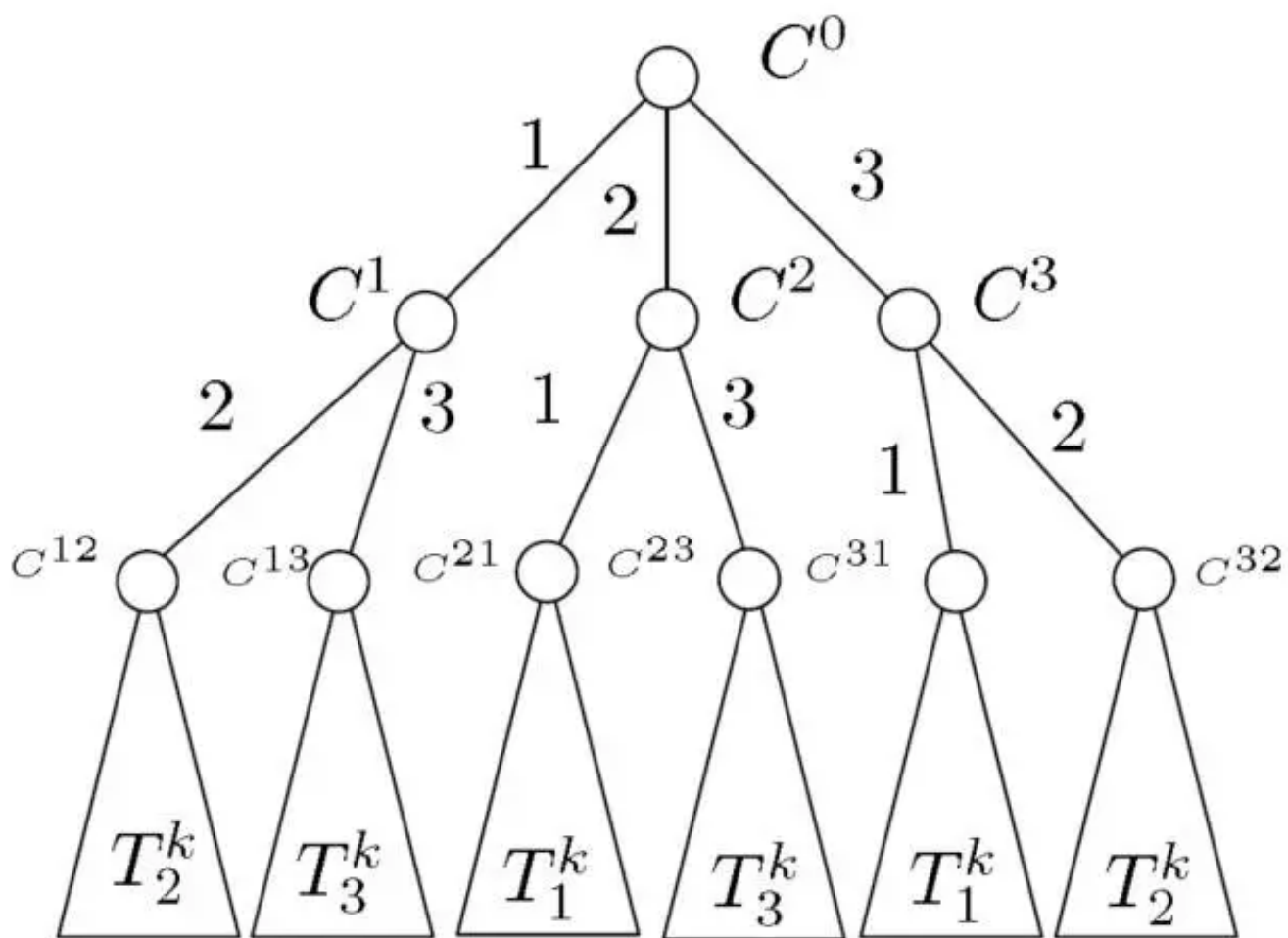


图13、第 $(k+1)$ 重反射树。

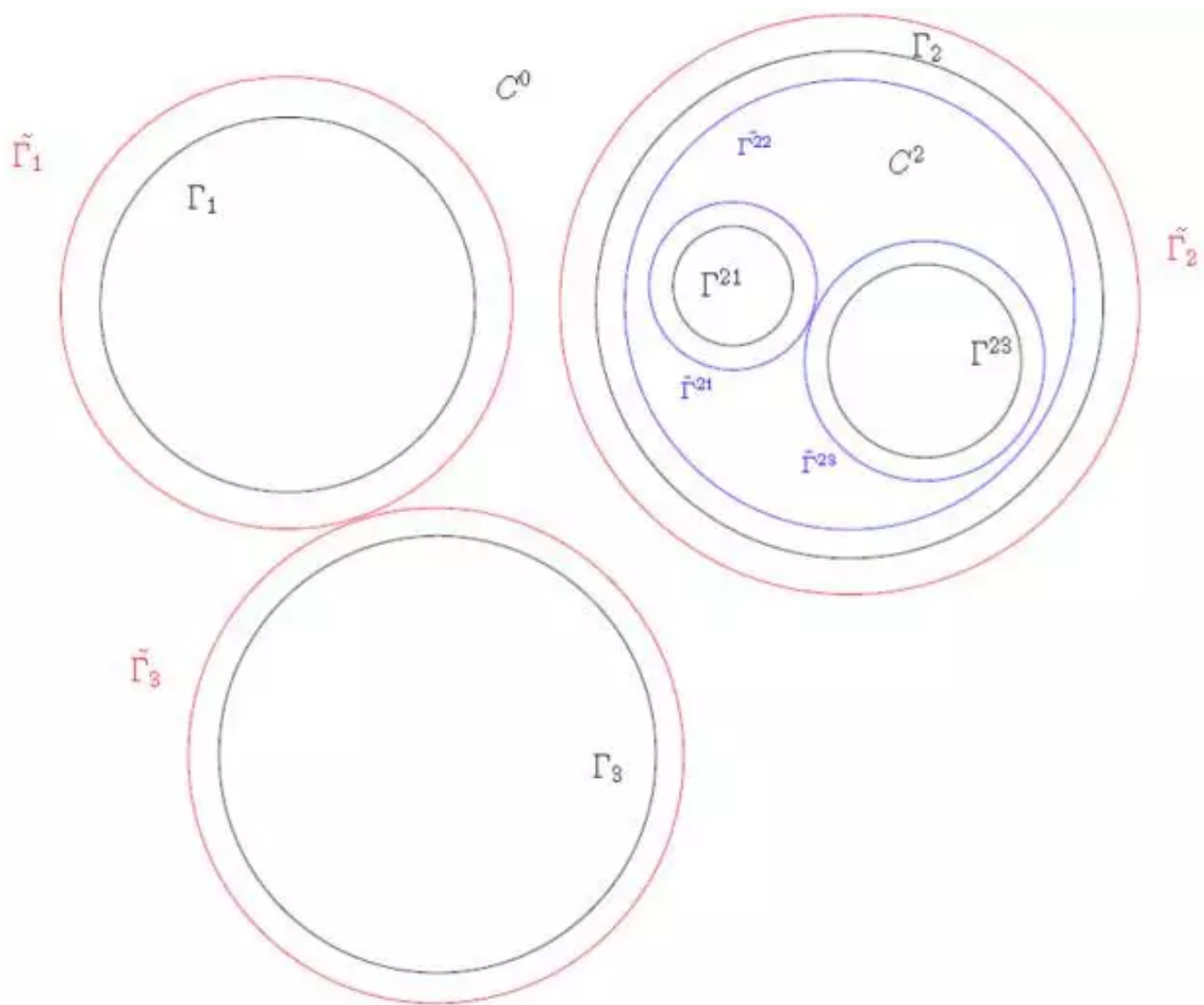


图 14. 面积估计。

如图14所示，我们将所有的圆同心放大 μ^{-1} 倍，黑色的圆 Γ_k 放大成红色的 $\tilde{\Gamma}_k$ 。然后将 C^0 关于 Γ_2 反射，黑色的圆反射成黑色的圆，红色的圆反射成蓝色的圆。红色的圆彼此相离，因此蓝色的圆彼此相离。由此，我们得到如下估计，

$$\alpha(\tilde{\Gamma}^{21}) = \mu^{-2}\alpha(\Gamma^{21}), \quad \alpha(\tilde{\Gamma}^{23}) = \mu^{-2}\alpha(\Gamma^{23}),$$

这里 $\alpha(\Gamma)$ 代表曲线 Γ 所包围区域的面积。同时，

$$\alpha(\tilde{\Gamma}^{21}) + \alpha(\tilde{\Gamma}^{21}) \leq \alpha(\tilde{\Gamma}^{22}) = \mu^2\alpha(\Gamma^2)。$$

由此，我们得到：

$$\alpha(\Gamma^{21}) + \alpha(\Gamma^{23}) \leq \mu^4\alpha(\Gamma^2)。$$

由此，我们得到对于任意一个内结点而言，父亲结点边界包围区域的面积不小于所有儿子结点边界所包围的面积和乘以 μ^4 。利用这一关键的估计，我们可以得到Koebe迭代算法的收敛性。

请长按下方二维码，选择“识别图中二维码”，即可关注。



【老顾谈几何】邀请国内国际著名纯粹数学家，应用数学家，理论物理学家和计算机科学家，讲授现代拓扑和几何的理论，算法和应用。回复“**目录**”，可以浏览往期精华。

