清华笔记：计算共形几何讲义 （12）极值长度

顾险峰 老顾谈几何 2017-07-23

图1. 圆柱面的共形模。

拓扑等价的度量曲面是否共形等价，亦即拓扑同胚的带有黎曼度量的曲面间是否存在保角双射，这是一个微妙的问题。几何上，我们需要寻找共形变换下的全系不变量，通过比较不变量，我们可以判断曲面是否共形等价。如果曲面是拓扑圆盘，边界上选取四个角点，则曲面被称为是拓扑四边形。拓扑四边形的共形不变量，被称为是曲面的共形模。

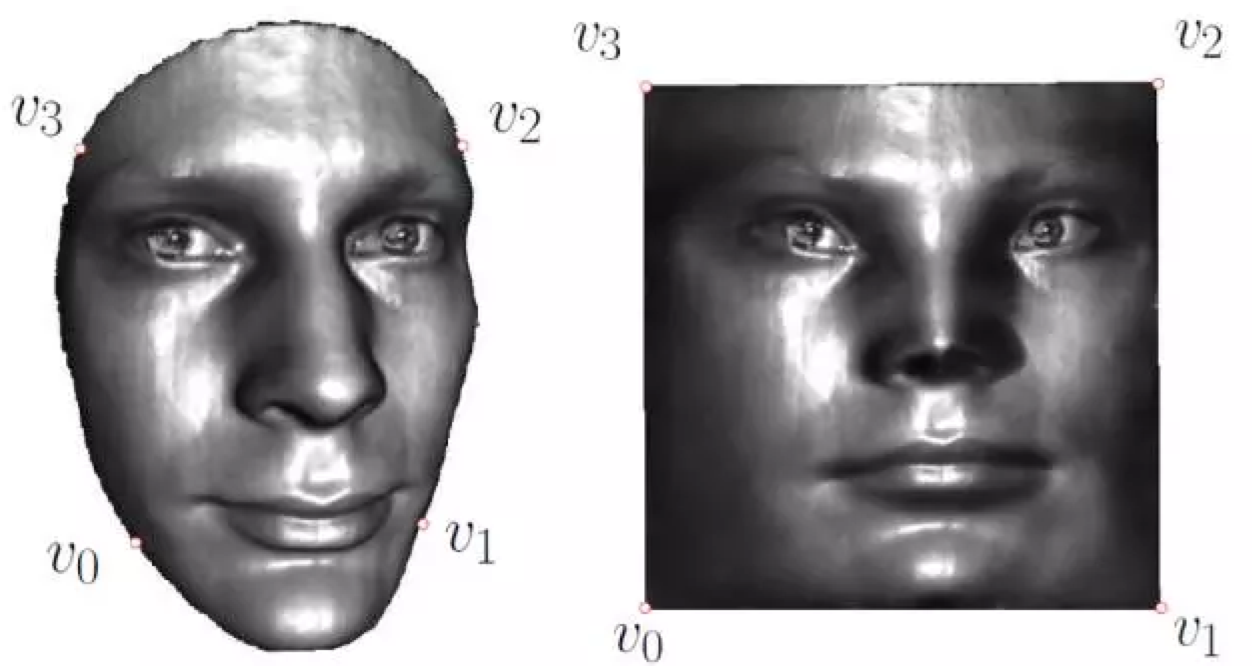

图2. 拓扑四边形和共形模。

极值长度

如图2所示，设$(S,\mathbf{g})$是一个拓扑圆盘，配有黎曼度量$\mathbf{g}$，边界上选取四个角点$\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$，逆时针排列，将边界分成4段，$\partial S = s_0 \cup s_1 \cup s_2 \cup s_3$，这里 s_k连接v_{k-1}和v_k，$k=0,1,2,3$模4。

我们考察所有连接左右两侧的路径，

$$\Gamma := \{\gamma : [0,1] \to S \mid \ \gamma(0) \in s_0, \gamma(1) \in s_2\}$$

令$\rho = e^{2\lambda}\mathbf{g}$是和初始度量共形等价的任意一个度量，那么从左到右的最短距离为

$$L_\rho(\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma} L_\rho(\gamma)$$

这里$L_\rho(\gamma)$是路径γ在度量ρ下的长度。曲面上曲线族Γ的极值长度定义为

$$EL(\Gamma) := \sup_{\rho\sim\mathbf{g}} \frac{L_\rho(\Gamma)^2}{A(\rho)}$$

这里$A(\rho)$是曲面在度量ρ下的面积，ρ取遍所有和初始度量g共形等价的度量。

共形不变量

首先，我们来看，极值长度是共形不变量。假设两张度量曲面彼此共形等价，$\varphi : (S_1, \mathbf{g}_1) \to (S_2, \mathbf{g}_2)$，同时$\varphi$将角点映到角点，那么映射诱导的拉回度量满足$\varphi^*\mathbf{g}_2 = e^{2\mu}\mathbf{g}_1$。那么曲线长度

$$L_{e^{2\lambda}\mathbf{g}_1}(\gamma) = L_{e^{2(\lambda-\mu)}\mathbf{g}_2}(\varphi(\gamma)),$$

曲面面积

$$A_1(e^{2\lambda}\mathbf{g}_1) = A_2(e^{2(\lambda-\mu)}\mathbf{g}_2),$$

进一步

$$\sup_\lambda \frac{\inf_{\gamma\in\Gamma} L_{e^{2\lambda}\mathbf{g}_1}(\gamma)^2}{A_1(e^{2\lambda})\mathbf{g}_1} = \sup_\lambda \frac{\inf_{\gamma\in\Gamma} L_{e^{2(\lambda-\mu)}\mathbf{g}_2}(\varphi(\gamma))^2}{A_2(e^{2(\lambda-\mu)}\mathbf{g}_2)} = \sup_\lambda \frac{\inf_{\gamma\in\Gamma} L_{e^{2\lambda}\mathbf{g}_2}(\varphi(\gamma))^2}{A_2(e^{2\lambda}\mathbf{g}_2)}$$

由此，$EL(S_1) \le EL(S_2)$；由对称性，$EL(S_2) \le EL(S_1)$，因此$EL(S_1) = EL(S_2)$。我们得到两个曲面的极值长度相等。换言之，极值长度是拓扑四边形曲面的共形不变量。

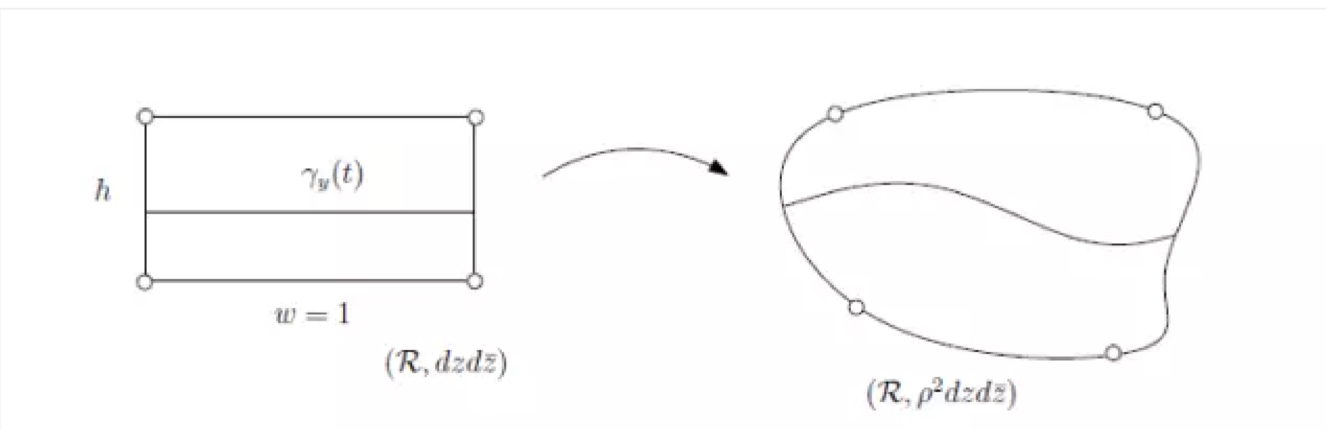

图3. 平直度量是极值度量。

平直度量是极值度量

如图3所示，给定平面长方形，宽为1，高为h，平直度量$\rho = 1$，则面积$A(\rho) = h$，曲线最短长度为$L_\rho(\Gamma) = 1$，极值长度$EL(\Gamma) \geq h^{-1}$。

给定任意一个共形度量$ds^2 = \rho^2(dx^2 + dy^2)$，满足$L_\rho(\Gamma) = 1$，并且面积$0 < A(\rho) < \infty$，考察水平直线$\gamma_y(t) = (t, y)$，其长度不小于1，

$$1 \leq \int_0^1 \rho \circ \gamma_y(x) dx = \int_0^1 \rho(x, y) dx$$

由此得到

$$h \leq \int_0^h \int_0^1 \rho(x, y) dx dy$$，

应用柯西-施瓦兹公式

$$h \leq \int_0^h \int_0^1 \rho(x, y) dx dy \leq \left(\int_R \rho^2 dx dy \int_R dx dy \right)^{1/2} = (A(\rho) h)^{1/2}$$

由此我们有$A(\rho) \geq h$，极值长度$EL(\Gamma) = 1/A \leq h^{-1}$，因此平直度量达到极值。

平直度量存在性

如图2所示的共形映射是存在的，这一点可以简单地证明如下。我们取曲面的一个拷贝，定向取反，沿着s_0, s_2粘合，得到一个对称的圆筒曲面。然后，类似地，我们取一个圆筒曲面的拷贝，定向取反，将两个圆筒曲面粘合，得到一个对称的轮胎曲面。根据曲面单值化定理，存在和初始度量共形等价的平直度量。由于对称性，在原来拓扑四边形曲面上，平直度量使得曲面成为一个平面长方形。这个长方形的宽高之比称为曲面的共形模。

拓扑环带

共形模的概念可以自然的推广到拓扑环带情形，因为拓扑环带可以共形映射到长方形（左右两侧重合），如图1所示。

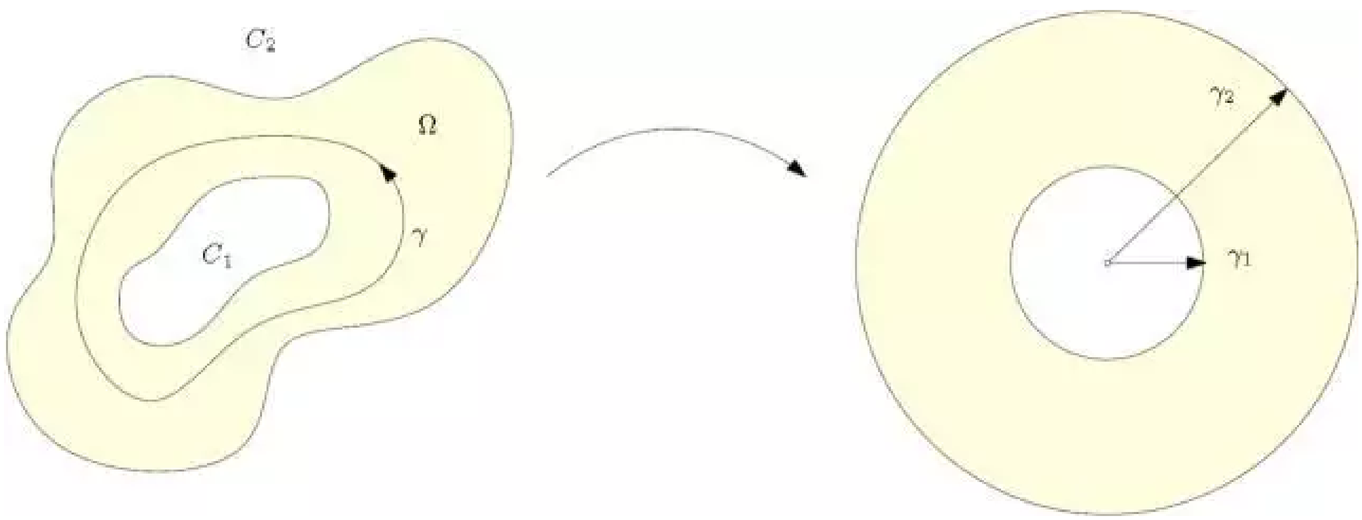

图4. 拓扑环带的共形模。

假设Ω是一个拓扑环带，$\mathbb{C}/\Omega = C_1 \cup C_2$，这里$C_1$是有限的，$C_2$是无限的。我们考察$\Omega$的同伦群$\pi_1(\Omega) = \mathbb{Z}$，其生成元记为$\gamma$，曲线族

$$\Gamma := \{\tau : \mathbb{S}^1 \to \Omega | \tau \sim \gamma\}$$

为和γ同伦的封闭曲线族。令$\rho : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$为正值函数，定义了度量$\rho(x, y)(dx^2 + dy^2)$。曲线族中的最短长度为

$$L(\rho) := \inf_{r \in \Gamma} \oint_\gamma \rho \ d\gamma$$，

拓朴环带的面积为

$$A(\rho) := \int_\Omega \rho(x, y) dx \wedge dy$$，

拓扑环带的共形模定义为：

$$mod(\Omega) := \sup_\rho \frac{L^2(\rho)}{A(\rho)}$$。

那么存在共形变换，将拓扑环带Ω映成标准圆环$R = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z| < r_2\}$。在标准环带上，我们任取半径为$r$的圆，这里$\gamma_1 \le r \le \gamma_2$。那么

$$L(\rho) \le \int_0^{2\pi} \rho(re^{i\theta}) r d\theta$$

对半径r进行积分，然后平方

$$\left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{L(\rho)}{r} dr\right)^2 \le \left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int_0^{2\pi} \rho(re^{i\theta}) d\theta dr\right)^2$$

由Schwartz不等式，

$$L^2(\rho)\left(\log\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2 \le \int_R \rho^2 r d\theta dr \int_0^{2\pi}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{1}{r}dr d\theta = A(\rho)2\pi\log\frac{\gamma_2}{\gamma_2},$$

由此得到，

$$\frac{L^2(\rho)}{A(\rho)} \le 2\pi\cdot\left(\log\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{-1}$$

等号成立，当且仅当 $\rho(re^{i\theta}) = (2\pi r)^{-1}$， 即曲面为标准圆柱面。我们定义拓扑环带的共形模为：

$$mod(R) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{\gamma_2}{\gamma_1}。$$

极物理意义

串联两个电阻，则等效电阻为各个电阻之和；并联两个电阻，则等效电导（电阻之倒数）等于各个电导之和。假设电阻率为常值，则长方形材料的等效电阻等于宽比高（电极连接左右两侧）。如果，我们将长方形进行相似变换，则等效电阻并不变化。

共形变换在无穷小意义下是相似变换，因此宏观上，等效电阻在共形变换下不变，共形模的物理解释就是等效电阻。

组合理论

奇妙的是，共形模理论在组合意义下依然成立，当然从统计物理角度而言，这自然顺理成章。假设$G=(V,E)$是一张平面图，其中一个面被选为“外面”（包含无穷远点的面），在“外面”的边界上选取四个顶点$\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$，将外边界分成四段$\{s_0,s_1,s_2,s_3\}$。 图中的一条路径是一个顶点序列$\gamma=\{v_{i_0},v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$，
$v_{i_j},v_{i_{j+1}}$之间有边相连。我们定义路径族，

$$\Gamma := \{\gamma = \{v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_k}\} | v_{i_0}\in s_0, v_{i_k}\in s_2\}$$

在顶点上我们定义离散共形因子$\rho:V\to[0,\infty)$，路径$\gamma=\{v_{i_0},v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$的长度定义为

$$L_\rho(\gamma) := \sum_{j=0}^{k} \rho(v_{i_j})$$
，

整个图的总面积为

$$A(\rho) := \sum_{i=0}^{n} \rho(v_i)^2$$

同样的，我们定义

$$L_\rho(\Gamma) := \min_{\gamma\in\Gamma} L_\rho(\gamma)$$

离散极值长度定义为

$$EL(G, \{v_0, v_1, v_2, v_3\}) := \sup_\rho \frac{L_\rho(\Gamma)^2}{A(\rho)}$$
。

存在性和唯一性

我们将离散共形因子表示成空间中的向量：$\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$，每个分量非负，$\rho_i \geq 0$，同时对于曲线族中的所有路径$\gamma \in \Gamma$，其长度不小于1，$L_\rho(\gamma) \geq 1$，所有满足这些线性不等式条件的$\rho$构成$\mathbb{R}^n$中的凸集，

$$\Omega := \{\rho \in \mathbb{R}^n, \rho_i \geq 0 | \forall\gamma \in \Gamma, L_\rho(\gamma) \geq 1\}$$
，

总面积为ρ的二次函数，其水平集为椭球族。椭球和凸集的切触点存在并唯一，在此点总面积达到最小，离散极值长度被达到， 如图5所示。

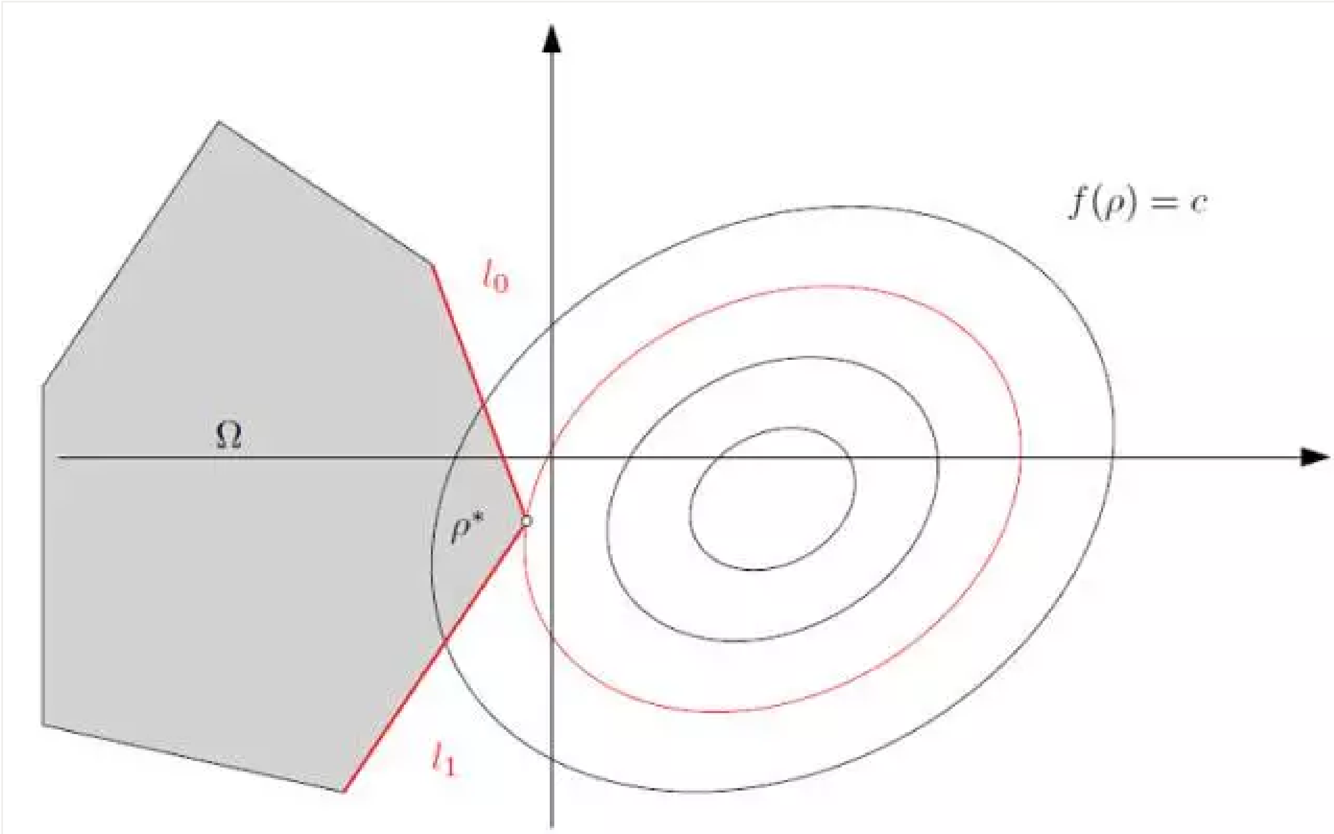

图5. 存在性和唯一性

方块填充

离散极值长度有一个非常优雅的几何解释：方块填充，如图5所示。

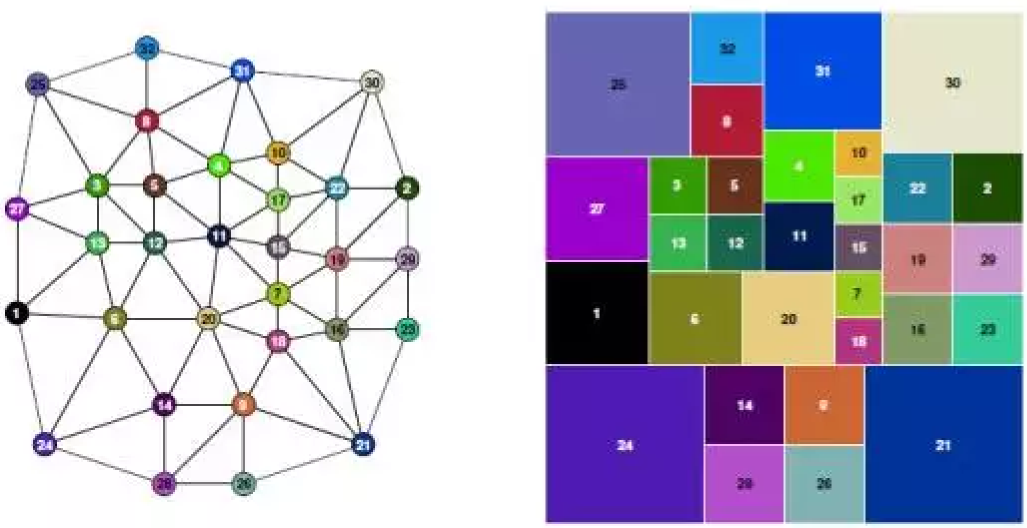

图6. 方块填充。

所谓图的方块填充是指长方形的一个胞腔分解，满足如下条件：

1. 图$G=(V,E)$中的每一个顶点对应一个方块，
2. 如果两个顶点在图中有边相邻，则它们对应的方块彼此相切，
3. 图的四个角点对应的方块被映成长方形的四个角。

图的离散极值长度所对应的度量实际上给出了图的一个方块填充，这个方块填充在相似意义下是唯一的。如果极值度量是ρ，则顶点v_i对应的方块的边长为$\rho(v_i)$，这些方块之间的接触关系由图的组合结构所决定，彼此严丝合缝地垒砌起来，形成一个长方形，如图6所示。原图的共形模，亦即极值长度，由长方形的宽高之比给出。
