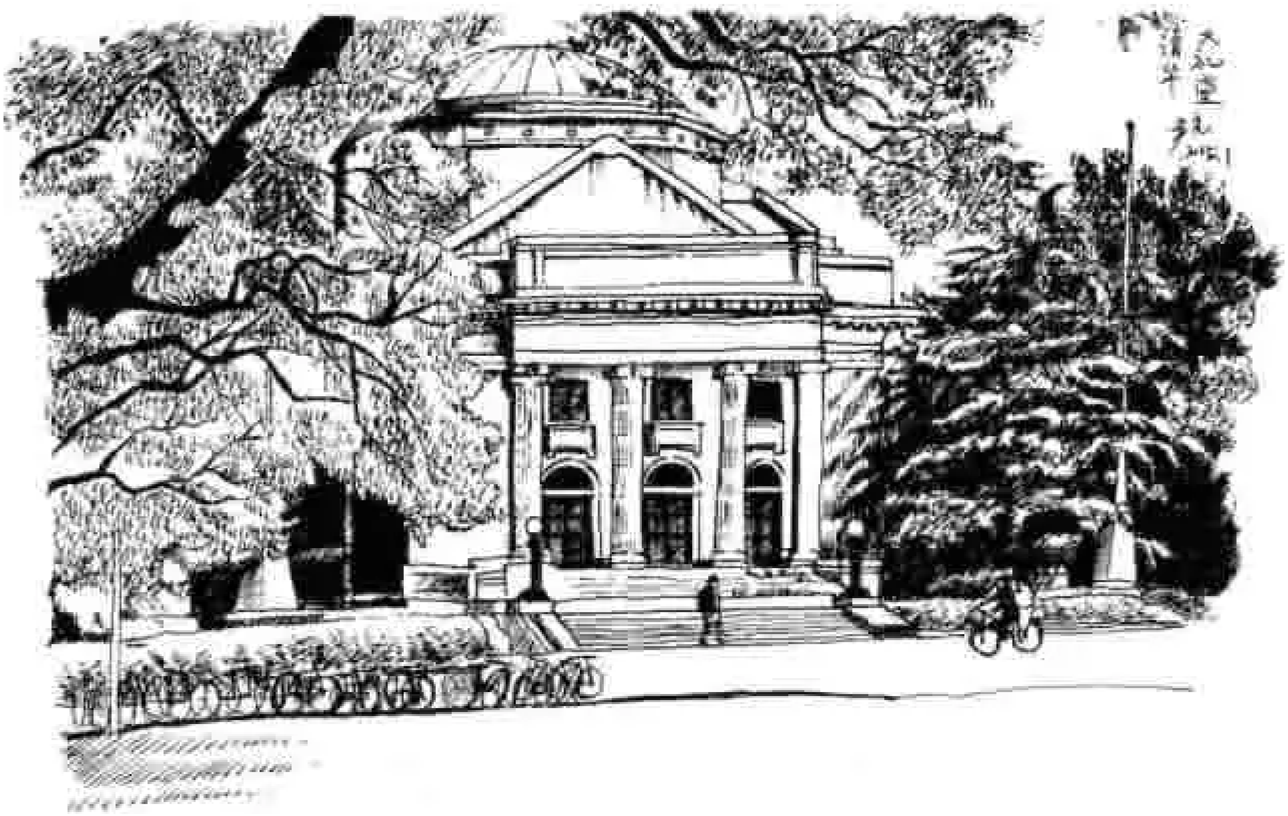
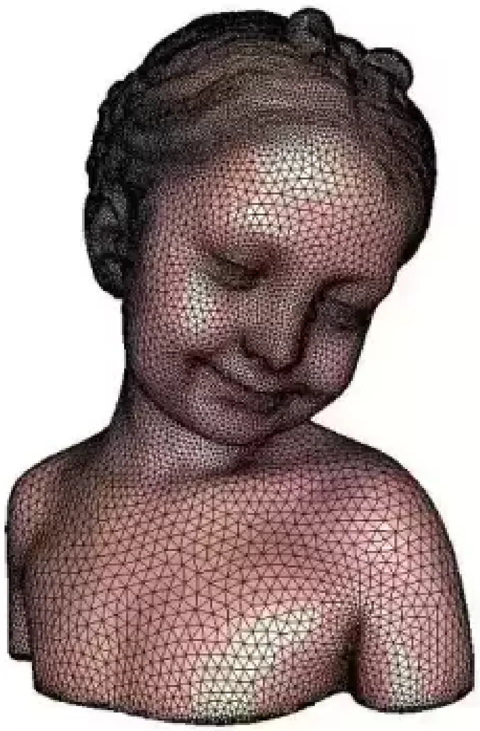
清华笔记：计算共形几何讲义 （4）单纯同调

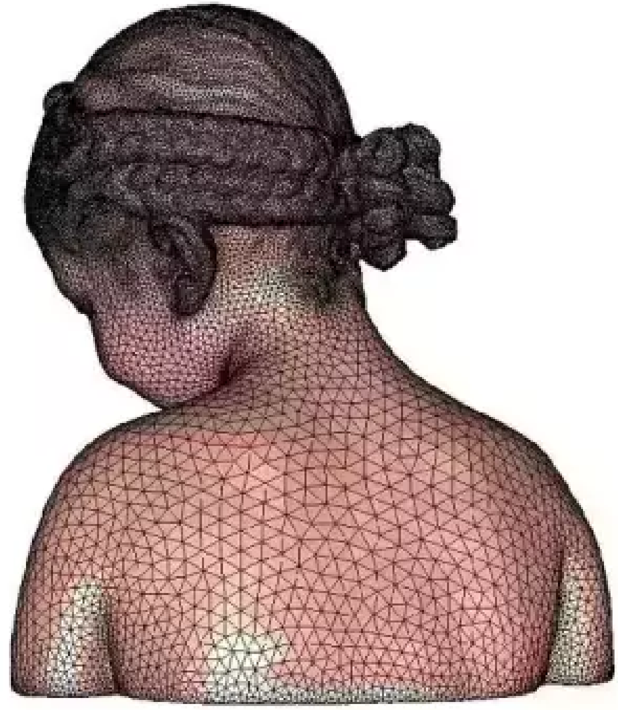
顾险峰 老顾谈几何 2017-07-05



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。】

这次课程，我们介绍单纯同调理论。在代数拓扑中，有单纯同调、奇异同调和de Rham同调理论。它们所用的数学工具不同，但是理论彼此等价。【1】给出了本课程的视频链接。





基本方法

代数拓扑的目的是将拓扑范畴的问题转换成代数范畴的问题，用代数方法加以解决。最为基本的问题之一就是判断两个拓扑空间是否同胚。在理想情形下，我们为每一个空间配上一系列群结构，如果这些群彼此同构，则空间拓扑同胚。但是，目前代数拓扑的方法还没有到达这一程度。同调群同构只能推出空间伦型等价。伦型等价远远弱于拓扑等价。

同调论的基本方法是将流形三角剖分，然后将子流形表示成单形的线性组合，所有的子流形构成线性空间。将拓扑算子（边缘算子）表示成线性算子（矩阵），用线性代数的方法来获取拓扑信息。

同调方法将低秩、稀疏，高度非线性的拓扑性质变换成高维空间的线性运算，非常具有启发意义。

拓扑去噪应用

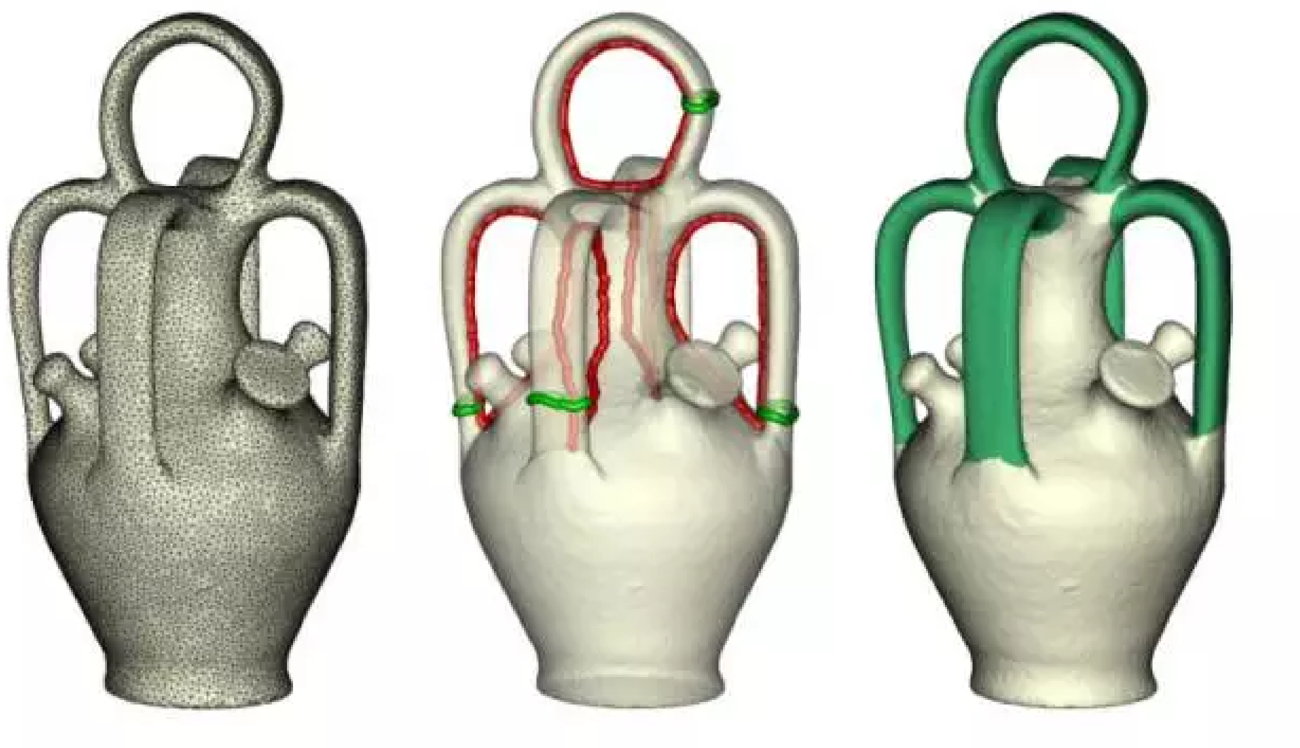


图1. 曲面上的环柄圈（绿色 handle loop）、隧道圈（红色 tunnel loop）。

如图1所示，给定一个嵌在三维欧氏空间中的高亏格曲面S，曲面S将三维欧氏空间分为内部$\mathbb{I}$和外部$\mathbb{O}$，存在一族同伦群的基底，$\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2g}\}$, 这里亏格$g > 1$。直观上，其中有$g$条圈在内部$\mathbb{I}$可以缩成点，但在外部$\mathbb{O}$中无法缩成点，它们构成外部空间$\mathbb{O}$的同伦群的基底，被称为是隧道圈（tunnel loop）；另外g条圈在外部$\mathbb{O}$中可以缩成点，但在内部$\mathbb{I}$中无法缩成点，它们构成内部$\mathbb{I}$的同伦群的基底，被称为是环柄圈（handle loop）。环柄圈和隧道圈对于医学图像具有重要意义。

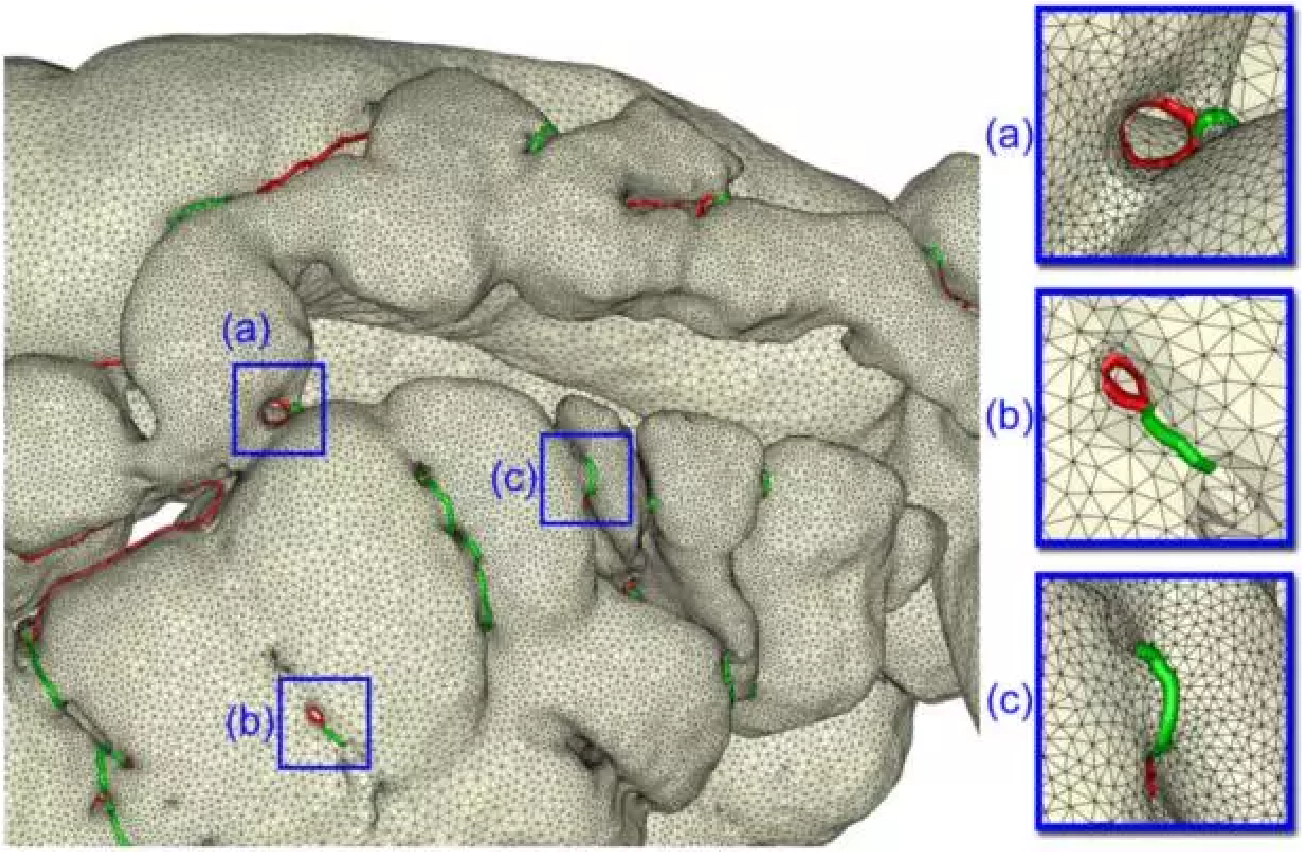


图2. 医学图像中的拓扑去噪。

如图2所示，我们用CT断层扫描技术获取直肠切面图像，经过曲面复建得到直肠曲面。由于图像分割的误差，复建的曲面有很多虚假的亏格（环柄）。在实际应用中，我们需要检测这些虚假亏格。这些环柄非常微小，用肉眼无法直接检测。唯一的方法就是通过计算拓扑方法得到，这往往依赖于曲面的环柄圈和隧道圈的算法。

单纯同调理论

相对于曲面而言，同伦群和同调群保留了相同的信息，因此彼此等价；对于三流形而言，同伦群反映的信息远远多于同调群，同伦群强于同调群。但是，同伦群本身为非阿贝尔群（非交换群），判定两个非阿贝尔群是否同构是非常繁难的问题。相反，同调群是同伦群的阿贝尔化，阿贝尔群的计算只需要线性代数。

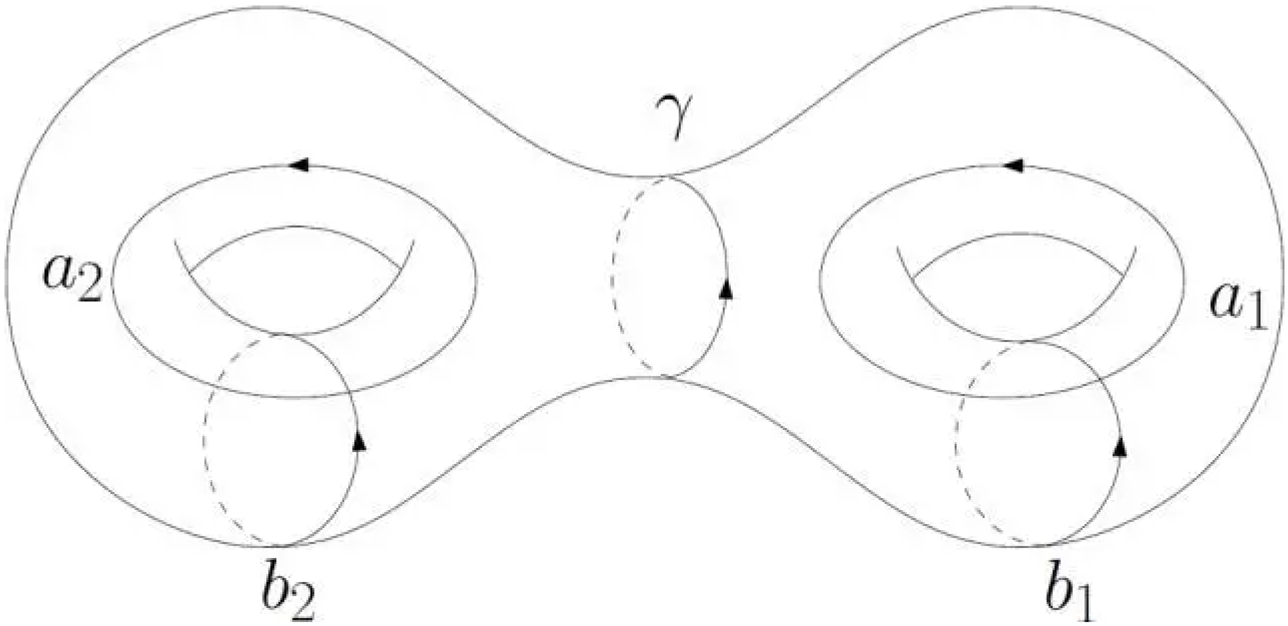


图0.同伦群是非阿贝尔群。

如图所示，环路γ无法在曲面上缩成一个点，因此同伦群中$[\gamma] \neq e$，同时$[\gamma] = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$，我们得到$a_1 b_1 \neq b_1 a_1$。因此亏格为2的曲面的同伦群$\pi_1(S,p)$不可交换。

我们记$\pi_1(S,p)$的中心交换子群为所有形如$aba^{-1}b^{-1}$生成的正规子群，

$$[\pi_1(S,p), \pi_1(S,p)] = \langle aba^{-1}b^{-1} | a, b \in \pi_1(S,p) \rangle$$

那么商群

$$\frac{\pi_1(S,p)}{[\pi_1(S,p), \pi_1(S,p)]}$$

为一阿贝群，即为曲面的一维下同调群。换句话说，同调群是同伦群的阿贝尔化。

环路γ在同伦群中不是单位元，但是在同调群中却是单位元。几何上来看，γ将曲面分成两个连通分支，γ是其中一个分支的边缘。这意味着，在同调群中，边缘环路被视为单位元。

同调群概念的要义在于：边的边为空，圈和边的差别就是同调。

同调群的概念

单纯复形是曲面三角剖分的直接推广，但是单纯复形可以表示更为广泛的拓扑空间，例如非流形的空间。

单纯形 给定$\mathbb{R}^n$中一般位置的$k+1$个点$\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$，k维单纯形是这些点构成的凸包(convex hull)，

$$\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k] = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$$

我们称$v_0, v_1, \dots, v_k$为单纯形σ的顶点。如果另外一个单纯形τ包含在σ中，$\tau \subset \sigma$，我们称τ是σ的一个面。

单纯形是有定向的，每一个单纯形有两个定向，单纯形的定向由其顶点的排列给出。我们考虑数列$(0, 1, \cdots, k)$的所有排列，它们构成对称群S_{k+1}，其中所有由偶次对换（即只交换两个数的位置）构成的子群记为A_{k+1}。如果排列$(i_0, i_1, i_2, \dots, i_k)$属于$A_{k+1}$，则单纯形$[v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$的定向为正，反之定向为负。

通常意义下的点，线段，三角形，四面体就是0到3维的单纯形。

单纯复形 单纯形粘贴在一起就构成单纯复形。所谓一个单纯复形Σ就是一组单纯形的并集，满足两个条件，

1. 如果一个单纯形σ属于Σ，那么σ的所有面都属于Σ，
2. 如果两个单纯形都属于Σ，$\sigma_1, \sigma_2 \subset \Sigma$，那么或者它们的交集为空，或者它们的交集是它们共同的一个面。

通常意义下，曲面的三角剖分就是单纯复形。

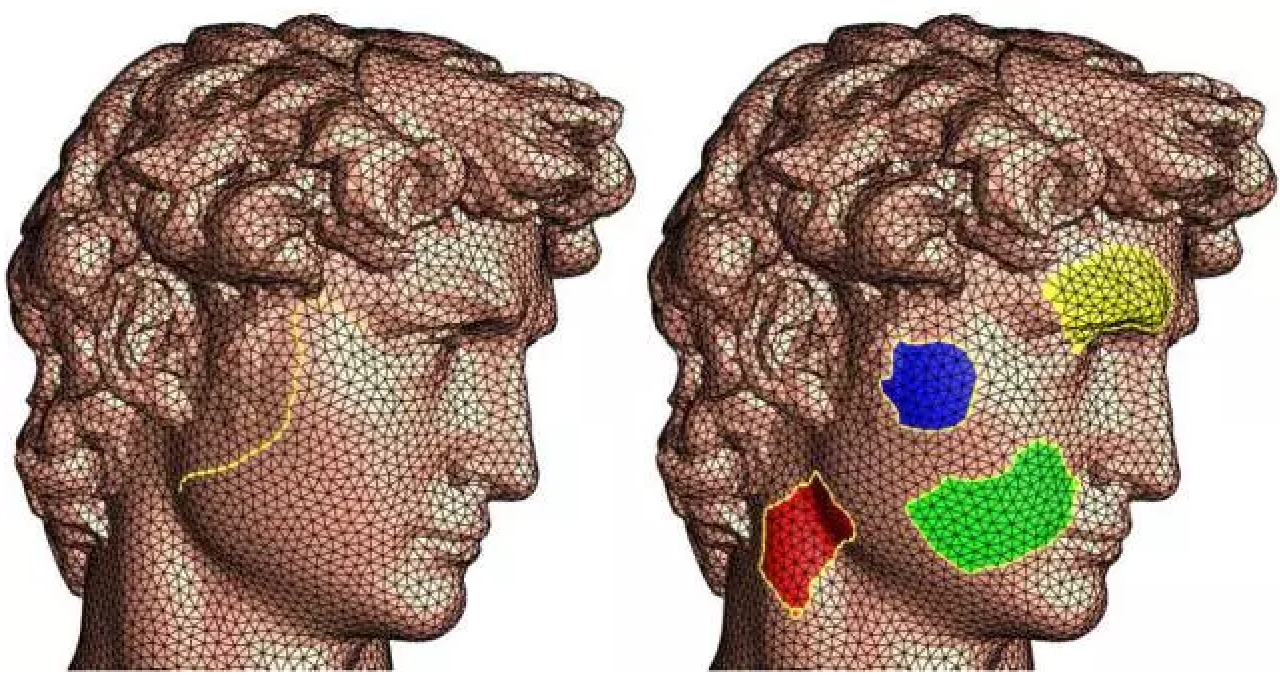


图1. 复形上的1维和2维链。

链群 给定一个单纯复形，一个k维链就是所k维单纯形的线性组合，如图1所示，

$$\sum_i \lambda_i \sigma_i, \lambda_i \in \mathbb{Z},$$

所有的k维链在加法下成一阿贝尔群（可交换群），记为$C_k(\Sigma)$,

$$\sum \alpha_j \sigma_j + \sum \beta_j \sigma_j = \sum (\alpha_j + \beta_j) \sigma_j.$$

其中零元为$\sum 0\sigma_j$，$\sum \alpha_j \sigma_j$的逆元为$\sum (-\alpha_j)\sigma_j$.

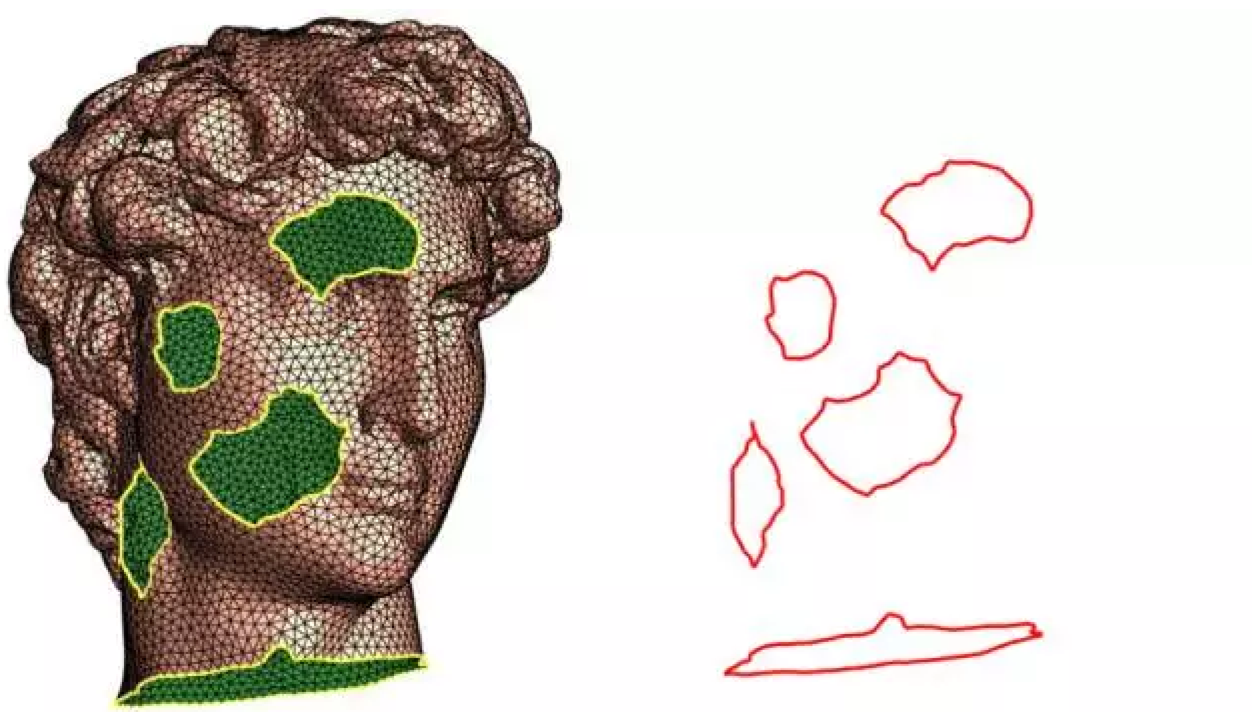


图2. 边缘算子。

边缘算子 k维边缘算子是链群之间的一个同态

$$\partial_k : C_k(\Sigma) \to C_{k-1}(\Sigma),$$

作用在单纯形上

$$\partial_k [v_0, v_1, \ldots, v_k] = \sum_i (-1)^i [v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k],$$

作用在链上

$$\partial_k \sum_i \alpha_i \sigma_i = \sum_i \alpha_i \partial_k \sigma_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{Z}。$$

直观上，边缘算子就是剥离每个链的边界。

通过直接计算，我们可得到

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0,$$

亦即边的边为空。

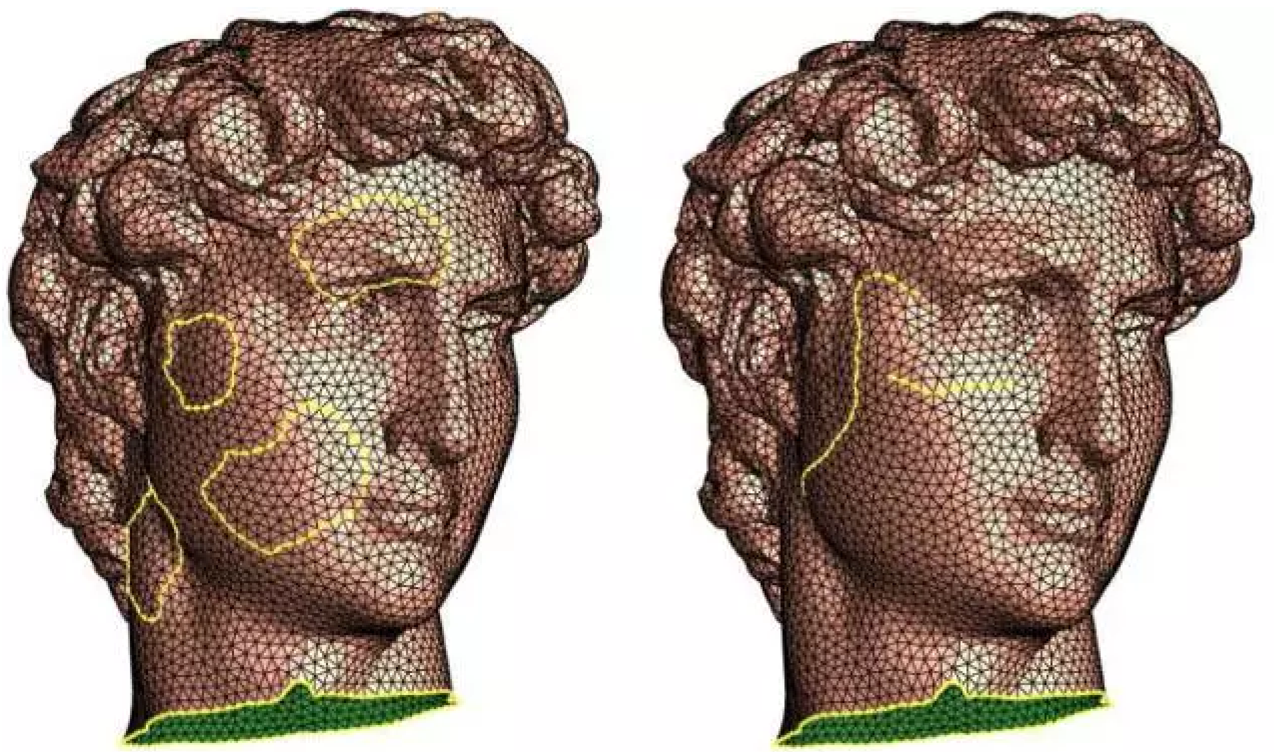


图3. 闭链和开链。

同调群 k维链$\gamma \in C_k(\Sigma)$被称为是闭链，如果$\partial_k \gamma = 0$。所有的k维闭链构成$C_k(\Sigma)$的一个子群，记为$Z_k(\Sigma)$；如果存在一个$(k+1)$维链$\sigma \in C_{k+1}(\Sigma)$，满足$\partial_{k+1}\sigma = \gamma$，那么$\gamma \in C_k(\Sigma)$被称为是恰当链，所有$k$维恰当链构成一个子群，记为$B_k(\Sigma)$。因为边的边为空，所以恰当链必为闭链，

$$B_k(\Sigma) \subset Z_k(\Sigma) \subset C_k(\Sigma)。$$

给定单纯复形Σ，我们得到链复形，

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \cdots$$

具有条件$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$。

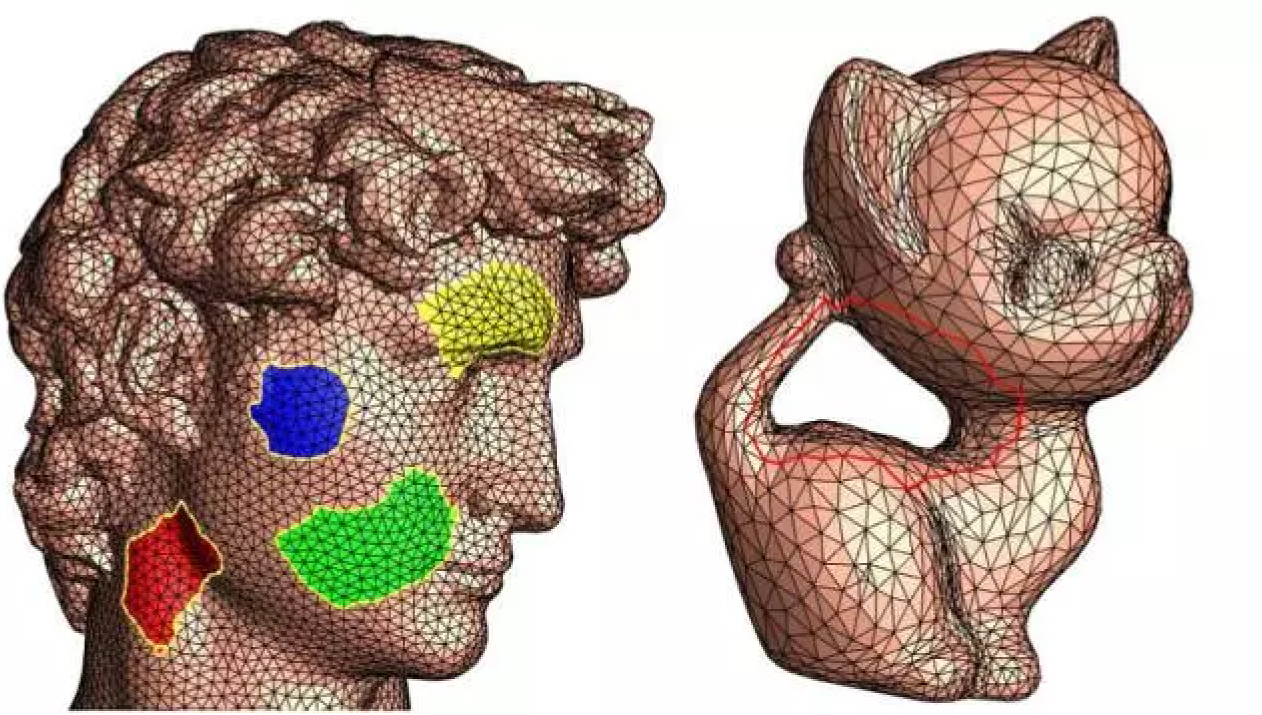


图4. 恰当闭链和非恰当闭链。

综上所述，边（恰当链）一定是圈（闭链），圈可能不是边。圈和边的差别就是同调

$$H_k(\Sigma) = \frac{Z_k(\Sigma)}{B_k(\Sigma)},$$

如图4所示，左帧显示了恰当的闭链，每一个闭链都包围着一个曲面区域，因此是边缘。右帧是非恰当的闭链γ，这条链γ并不包围任何一个曲面区域。如果我们把曲面S沿着γ切开，我们得到一个圆筒面$S \setminus \gamma$，圆筒面有两个边缘曲线，

$$\partial_2(S \setminus \gamma) = \gamma^+ - \gamma^-,$$

但是γ本身并不构成圆筒面$S \setminus \gamma$的边界。

我们将单纯复形的所有同调群放在一起，记为$H_*(\Sigma) = \{H_k(\Sigma)\}$。

同调群的计算

曲面一维同调群的基底和曲面基本群基底相同，我们可以用基本群的组合算法来计算一维同调群基底。高维同调群的算法基于线性代数的矩阵特征值和特征向量算法。

我们可以将链群视为线性空间，边缘算子$\partial_k : C_k(\Sigma) \to C_{k-1}(\Sigma)$是线性算子，因此可以被表示为矩阵。假设复形$\Sigma$所有的$k$维单纯形为

$$\{\sigma_1^k, \sigma_2^k, \ldots, \sigma_m^k\},$$

它们线性张成k维链群

$$C_k(\Sigma) = Span(\sigma_1^k, \sigma_2^k, \dots, \sigma_m^k);$$

复形Σ所有的$k-1$维单纯形为

$$\{\sigma_1^{k-1}, \sigma_2^{k-1}, \dots, \sigma_n^{k-1}\}$$

它们线性张成$k-1$维链群

$C_{k-1}(\Sigma) = Span(\sigma_1^{k-1}, \sigma_2^{k-1}, \dots, \sigma_n^{k-1})$。边缘算子具有矩阵表示，

$$\partial_k = ([\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}]),$$

这里联接数$[\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}]$是一个整数，定义如下：如果$\sigma_j^{k-1} \cap \sigma^k = \emptyset$，则$[\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}]$为0；如果$+\sigma_j^{k-1}$是$\sigma_i^k$的一个边缘面，$+\sigma_j^{k-1} \in \partial_k \sigma_i^k$，则$[\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}]$为+1；如果$-\sigma_j^{k-1}$是$\sigma_i^k$的一个边缘面，$-\sigma_j^{k-1} \in \partial_k \sigma_i^k$，则$[\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}]$为-1。

如此，我们构造离散拉普拉斯算子：

$$\Delta_k = \partial_{k+1} \circ \partial_{k+1}^T + \partial_k^T \circ \partial_k,$$

$H_k(\Sigma, \mathbb{Z})$的基底是Δ_k的对应于0特征根的特征向量。

这里，Δ_k是整数矩阵，存在Smith 标准型（Smith Normal Form）：存在$m \times m$可逆整数矩阵S和T, $S\Delta_k T$为对角阵，

$$\begin{pmatrix}
\alpha_1 & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\
0 & \alpha_2 & 0 & & \cdots & & 0 \\
0 & 0 & \ddots & & \cdots & & \\
\vdots & & & \alpha_r & & & \vdots \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & & \cdots & & 0
\end{pmatrix}$$

这里$\alpha_i | \alpha_{i+1}, \ \forall 1 \le i < r$, α_i整除α_{i+1}，并且

$$\alpha_i = \frac{d_i(\Delta_k)}{d_{i-1}(\Delta_k)}$$

$d_i(\Delta_k)$是所有$i \times i$阶子矩阵行列式的最大公因子。

伦型不变量

单纯映射 假设$f: M \to N$是拓扑空间之间的连续映射，我们可以将M和N用单纯复形来逼近，同时映射本身可以用所谓的单纯映射来逼近。所谓单纯映射，就是说对于M中的任意一个单纯形$\sigma \in M$，其像$f(\sigma) \in N$是N中的单纯形。给定一个连续映射，我们可以将M和N进一步细分(subdivision)，在细分后的复形上定义单纯映射来逼近连续映射。可以证明，对于任意给定的误

差，我们可以将M和N细分的足够细腻，使得单纯映射和连续映射的误差小于给定的阈值。单纯映射可以表示成分片线性映射，图中，我们显示一个单纯映射的实例，从小女孩的雕像到单位球面的形变。现实生活中，所有的动漫动画都是基于单纯映射的理论。

链映射 C和D是M和N的链复形，

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \cdots$$

单纯映射诱导了链复形之间的映射，被称为是链映射$f=\{f_q : C_q \to D_q\}$,
同时对于每一维度，单纯映射和边缘算子可交换，
$f_{q-1}\circ\partial_q = \partial_q \circ f_q$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"'] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"'] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"'] & C_{q-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q-2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & D_{q-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

因为单纯映射将闭链映为闭链，链映射诱导了同调群间的同态，$f_*: H_*(C) \to H_*(D)$, $f_*([z_q]) := [f_q(z_q)],\ \forall z_q \in Z_q(C)$。

链同伦 假如映射$f, g: M \to N$彼此同伦，它们诱导的链映射$f=\{f_q : C_q \to D_q\}$, $g=\{g_q : C_q \to D_q\}$, 满足如下条件

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "g_{q+1}"', shift right] \arrow[d, "f_{q+1}", shift left] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "g_q"', shift right] \arrow[d, "f_q", shift left] \arrow[dl, "T_q"'] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "g_{q-1}"', shift right] \arrow[d, "f_{q-1}", shift left] \arrow[dl, "T_{q-1}"'] & C_{q-2} \arrow[r] \arrow[d, "g_{q-2}"', shift right] \arrow[d, "f_{q-2}", shift left] \arrow[dl, "T_{q-2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & D_{q-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

这里T是一系列同态$T=\{T_q : C_q \to D_{q+1}\}$,满足

$$g_q - f_q = \partial_{q+1}\circ T_q + T_{q-1}\circ\partial_q,$$

这两个链映射被称为是链同伦。

$F:[0,1]\times M \to N$是同伦，$F(0,\cdot)=f(\cdot)$并且$F(1,\cdot)=g(\cdot)$，那么同伦F将M中的低维链映到N中的高一维链，诱导了同态T。如下图所示，$\gamma:[0,1]\to M$是M上的一条路径，关系式成立：

$$\partial_2\circ T_1(\gamma) + T_0\circ\partial_1(\gamma) = g_1(\gamma) - f_1(\gamma)$$

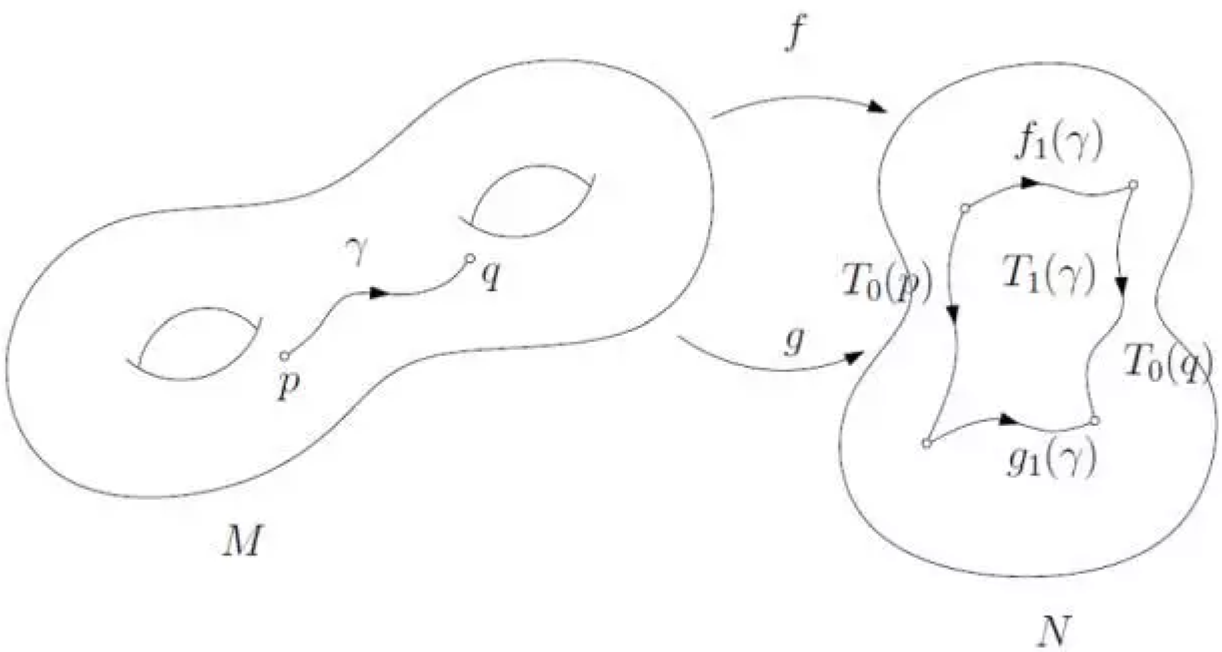


图5. 链同伦的直观解释。

我们考察$f, g: M \to N$所诱导的同调群间的同态，令$\sigma \in Z_q(M)$为一闭链，则$\partial_q \sigma = 0$，

$$g_q(\sigma) - f_q(\sigma) = \partial_{q+1} \circ T_q(\sigma) + T_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = \partial_{q+1} \circ T_q(\sigma),$$

因此$g_q(\sigma)$和$f_q(\sigma)$相差一个边缘链，彼此同调。因此$f_*, g_*: H_*(C) \to H_*(D)$彼此相等。如此，我们证明了同伦映射诱导相同的同调群同态。

伦型等价 假如存在连续映射$f: M \to N$和$g: N \to M$，满足$f \circ g \cong id_N$，并且$g \circ f \cong id_M$，就是说f和g的复合同伦于N上恒同映射，g和f的复合同伦于M上的恒同映射，则我们说拓扑空间M和N同伦等价，或M和N具有相同的伦型。如上讨论，我们得出同伦等价的空间具有同构的同调群。

形变收缩核 假如B是A的子空间，B是A的形变收缩核，是指B可以在保持A上各点不变的情况下连续形变到A上。这样形变收缩映射与自然包含构成了同伦等价关系。一个拓扑空间和其形变收缩核具有相同的同调群。

环柄圈和隧道圈算法

在【2】中，孙剑等给出了环柄圈和隧道圈的计算方法。这里，给定一个嵌在三维欧氏空间中的高亏格曲面S，曲面S将三维欧氏空间分为内部$\mathbb{I}$和外部$\mathbb{O}$，存在一族同调群的基底，$\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2g}\}$, 这里亏格$g > 1$。直观上，其中有$g$条圈在内部$\mathbb{I}$同调于0，但在外

部$\mathbb{O}$非同调于0，它们构成外部空间$\mathbb{O}$的同调群的基底，被称为是隧道圈（tunnel loop）；另外g条圈在外部$\mathbb{O}$中同调于0，但在内部$\mathbb{I}$中无法缩成点，它们构成内部$\mathbb{I}$的同伦群的基底，被称为是环柄圈（handle loop）。

计算环柄和隧道圈的核心想法有两个：过滤（filtration）和配对（pair）。一个单纯复形的过滤（filtration）是一系列嵌套的复形：

$$\emptyset = K_{-1} \subset K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K。$$

我们可以假设每一步$K_i - K_{i-1} = \sigma_i$，即添加一个单纯形。每一次我们添加一个k维单纯形，有两种可能性：

1. 生成一个k维非边界闭链，这时我们称σ_i为正的单形；
2.消灭掉一个$(k-1)$维已经存在的闭链，这时我们称σ_i为负的单形。我们将被消灭掉的闭链中最后一个正单形和σ_i配对。

我们将曲面S三角剖分，再取一个实心球B，包含曲面S。再对B进行三角剖分，使得B的三角剖分限制在S上，等于S的三角剖分。球外取一点q，边界∂B上的每个三角形都和q连成一个四面体。如此，我们得到了一个三维球面$\mathbb{S}^3$的一个三角剖分，同时得到内部$\mathbb{I}$、外部$\mathbb{O}$和曲面S的三角剖分。

我们首先构造曲面S的一个过滤序列，然后逐步添加单形构造内部$\mathbb{I}$的过滤序列，最后在添加单形，构成整个$\mathbb{S}^3$的过滤序列。
1. 在完成曲面S的过滤后，存在$2g$个没有被配对的正单形，对应着$2g$个同调群的基底。
2. 在完成内部$\mathbb{I}$的过滤后，会有S上g个正单形被配对，它们对应着g个环柄圈。
3. 剩下的g个正单形，对应着g个隧道圈。
计算细节可以在【2】中找到。

References:
【1】http://www.iqiyi.com/w_19rtrpkd5x.html
【2】T.Dey, K. Li, J. Sun and D. Cohen-Steiner, "Computing Geometry-aware Handle and Tunnel Loops in 3D Models", SIGGRAPH 2008.
