清华笔记：计算共形几何讲义 （4.5）相对同调 Mayer-Vietoris 序列

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-27

在拓扑中，有很多貌似非常直观的定理，其证明却非常艰难，例如平面上的若当曲线定理（Jordan Curve Theorem）：给定平面上的一条封闭连续曲线，平面被分成两个联通分支，即曲线的内部和外部。进一步，Schonflies 定理证明每个联通分支都是拓扑圆盘。

图1. Jordan 曲线定理。

但是，这一定理向高维推广却是非常反直觉的。我们考虑拓扑中常见的“亚历山大角球”（Alexander Horned Sphere）的反例。如图2所示，我们从一个标准球面开始，中间有一条赤道曲线，如左上帧所示；然后将其变形成钩子形状，定义两个帽状区域，帽子边缘线如右上帧所示；我们固定钩子的中段，将帽状区域变形成两个相互缠绕的次级钩子，每个次级钩子上我们标出了“赤道”和“帽子边缘线”，如左下帧所示；我们再固定次级钩子的中间区域，变形次级钩子的帽状区域，来生成第三级钩子，如图右下帧所示。如此迭代，以致无穷。第n步构造的角球记为S_n。

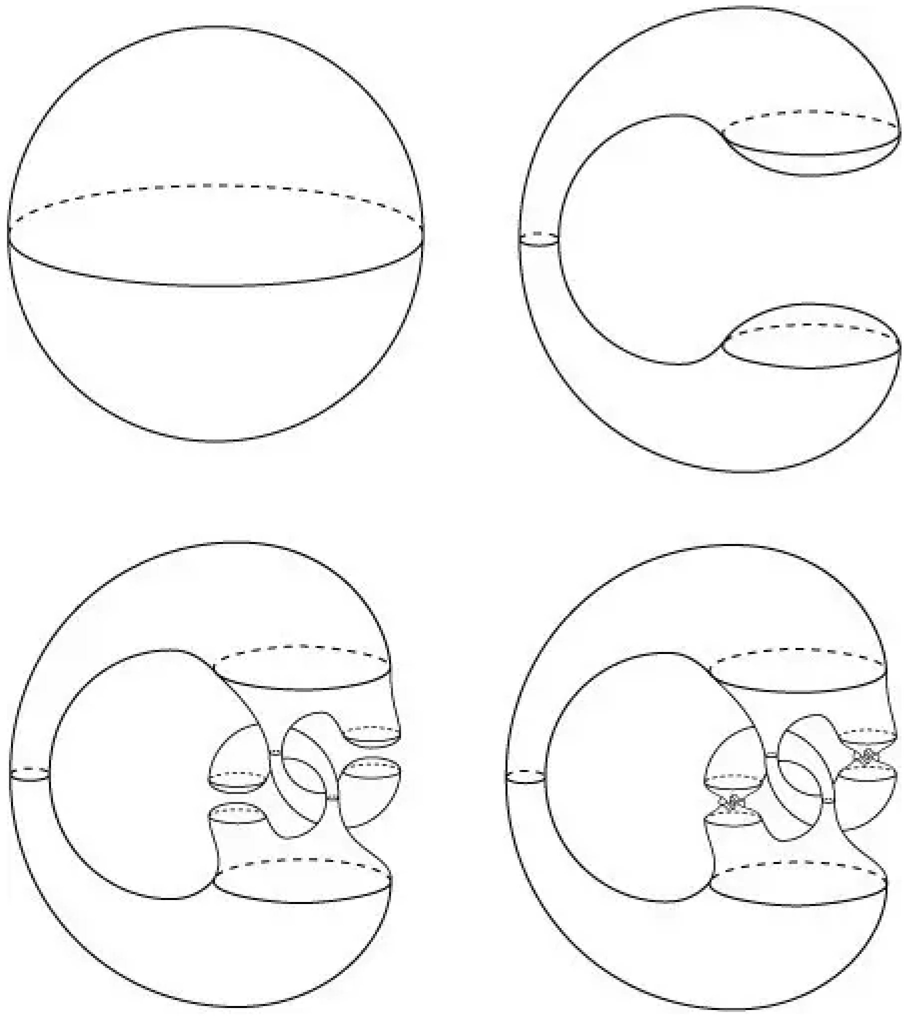

图2. Alexander 角球的构造过程。

Alexander角球和标准球面彼此拓扑同胚，如图3所示，每个圆盘映到相应的帽状区域，不同的颜色代表不同级别的帽状区域。第n步，我们可以构造同胚映射 $h_n : \mathbb{S}^2 \to S_n$，第n+1步的时候我们只改变第n级的帽状区域的映射。然后令n趋向无穷，我们得到Alexander角球和标准球面之间的同胚。

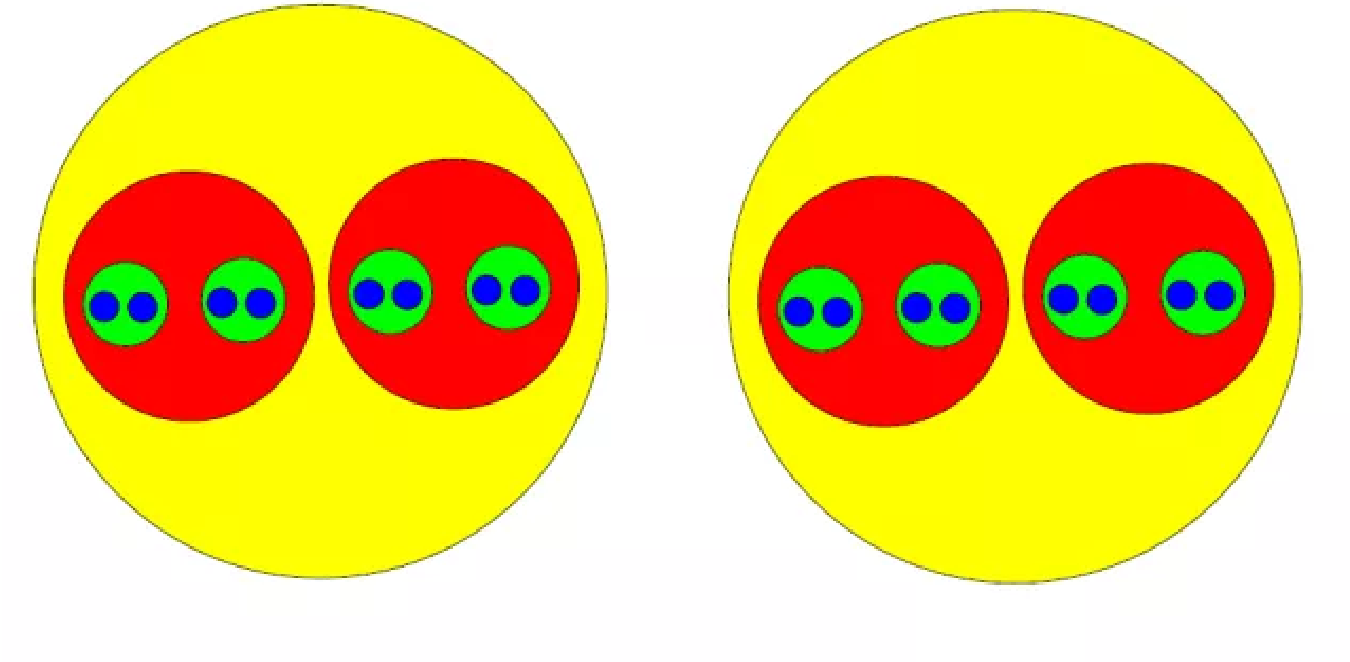

图3. 标准球面到Alexander角球的同胚映射。

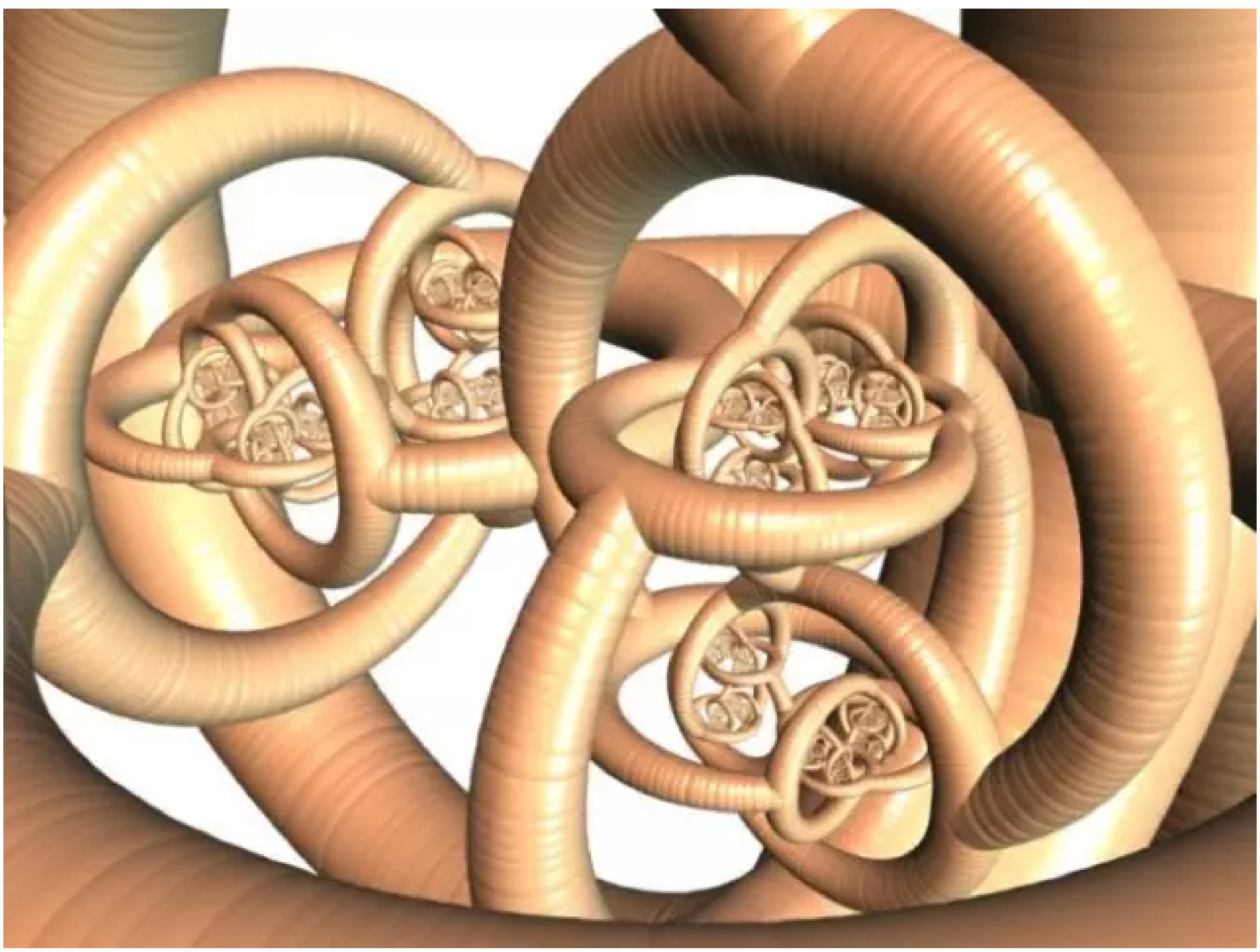

图4. Alexander角球在$\mathbb{R}^3$中的嵌入。（by Cliff Pickover）

如图4所示，Alexander角球嵌入在三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中，那么$\mathbb{R}^3$是否被分成两个道路联通分支？每个分支是否是单联通的？是否同胚于三维拓扑圆盘？这些问题不再那么显而易见。应用Jordan-Brouwer Seperation定理，我们可以证明Alexander角球将$\mathbb{R}^3$分成两个联通分支。但是每个分支不是单联通的，（所有钩子上的赤道曲线彼此不同伦）。这里我们看到人类的生活直觉让位给严密的拓扑理论。

那么，这种异常抽象的拓扑知识有什么实际用处？在我们后继的课程中，我们会介绍离散曲面Ricci流的理论和算法，Ricci流解的存在性证明依赖于所谓的区域不变性定理（Invariance of Domain），而这个定理的证明依赖于Jordan-Brouwer分离定理。所用的工具就是相对同调论中的Mayer-Vietoris序列。

在代数拓扑中，相对同调理论提供了计算空间拓扑不变量的有力工具。在同伦论中，Seifert-van Kampen定理提供了计算基本群的分而治之（Divide-Conquer）的方法。相应的，相对同调中的Mayer-Vietoris定理给出了计算同调群的分而治之的方法。

相对同调和切除定理

给定拓扑空间X及其子空间$A \subset X$，$C_q(X)$为X中所有q维链构成的群，$C_q(A)$为A中所有q维链构成的群，那么$C_q(A)$为$C_q(X)$的子群。空间偶(X,A)的**相对链群**定义为商群，

$$C_q(X,A) := C_q(X)/C_q(A)。$$

因为边缘算子∂_q具有性质$\partial_q(C_q(A)) \subset C_{q-1}(A)$，我们定义**相对边缘算子**

$$\partial_q : C_q(X,A) \to C_{q-1}(X,A)。$$

我们可以定义**相对闭链** $Z_q(X,A) = \ker\, \partial_q$ 和**相对边缘链** $B_q(X,A) = \mathrm{img}\ \partial_{q+1}$， 我们有$B_q(X,A) \subset Z_q(X,A)$，可以定义**相对同调群**：

$$H_q(X,A) = \frac{Z_q(X,A)}{B_q(X,A)}。$$

如果子空间$A = \emptyset$，则相对同调群等于绝对同调群$H_q(X) = H_q(X,\emptyset)$。

考虑包含映射 $i:A\to X$，我们得到包含映射诱导的同态映射

$$i_*:H_q(A)\to H_q(X),$$

同样的每一个绝对闭链都是一个相对闭链，由此得到包含同态映射

$$j_*:H_q(X)\to H_q(X,A)。$$

考虑一个相对闭链$z\in Z_q(X,A)$，其边缘必在A中，$\partial z\in A$。由此，我们定义同态，

$$\partial_*:H_q(X,A)\to H_{q-1}(A),\ \partial_*(\{z\}_{(X,A)})=\{\partial z\}_A。$$

组合以上三个同态映射，我们得到正合序列，

$$\cdots\xrightarrow{j_*}H_{q+1}(X,A)\xrightarrow{\partial_*}H_q(A)\xrightarrow{i_*}H_q(X)\xrightarrow{j_*}H_q(X,A)\xrightarrow{\partial_*}\cdots$$

我们称之为空间偶(X,A)的同调序列（homology sequence）。

定理 空间偶(X,A)的同调序列是正合的。

这意味着每一个同态的像（image）等于下一个同态的核（kernel）。空间偶的正合同调序列可以推广到空间三元组。

定理 给定子空间序列 $B\subset A\subset X$，考虑包含映射 $i:(A,B)\to(X,B)$和 $j:(X,B)\to(X,A)$，那么下列空间三元组(X,A,B)的相对同调序列

$$\cdots\xrightarrow{j_*}H_{q+1}(X,A)\xrightarrow{\partial_*}H_q(A,B)\xrightarrow{i_*}H_q(X,B)\xrightarrow{j_*}H_q(X,A)\xrightarrow{\partial_*}\cdots$$

是正合的。这里，边缘算子定义为 $\partial_*\left(\{z\}_{(X,A)}\right)=\{\partial z\}_{(A,B)}$。

直观而言，相对链群 $C_q(X,A):=C_q(X)/C_q(A)$ 忽略了A中所有的信息，我们期望相对同调群$H_q(X,A)$只依赖于A的补集$X\setminus A$。如此，我们有所谓的切除定理。

定理（切除定理）考虑子空间序列 $U\subset A\subset X$，满足 $\overline{U}\subset A^\circ$，那么包含映射 $i:(X\setminus U,A\setminus U)$ 诱导同构 $i_*:H_q(X\setminus U,A\setminus U)\to H_q(X,A)$。

Reduced Homology

在传统同调论中，我们有 $\partial_0 = 0$。我们可以用不同的同态 $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$，增广边缘算子，

$$\varepsilon\left(\sum_\sigma n_\sigma \sigma\right) = \sum_\sigma n_\sigma。$$

我们可以直接验证 $\varepsilon\partial_1 = 0$ 。令 $\tilde{Z}(X) = \ker\, \varepsilon$，则 $B_0(X) \subset \tilde{Z}_0(X)$，我们可以定义 reduced homology，

$$\tilde{H}_0(X) = \frac{\tilde{Z}_0(X)}{B_0(X)},$$

对于任意 $q > 0$，我们定义 $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)$。

由 X 的增广复形（augumented complex）

$$\cdots \to C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

我们得到 $\tilde{Z}_0(X)$ 是 $Z_0(X) = C_0(X)$ 的子群，因此 $\tilde{H}_0(X)$ 是 $H_0(X)$ 的子群，我们定义同态 $\xi : \tilde{H}_0(X) \to H_0(X)$。由 $\varepsilon(B_0(X)) = 0$，我们得到同态 $\varepsilon_* : H_0(X) \to \mathbb{Z}$。由此，我们得到正合序列

$$0 \to \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\xi} H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{Z} \to 0$$

进而得到分解公式

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}。$$

$H_0(X)$ 是自由阿贝尔群（free abelian group），其秩等于 X 的道路联通分支的个数。

Mayer-Vietoris 序列

Mayer-Vietoris序列是计算同调群的有力工具。我们有如下的引理，

引理 （Barratt-Whitehead）给定下列图，每行都是正合序列，每个长方形都可交换，

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & A_q & \xrightarrow{f_q} & B_q & \xrightarrow{g_q} & C_q & \xrightarrow{h_q} & A_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & B_{q-1} & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow \alpha_q & & \downarrow \beta_q & & \downarrow \gamma_q & & \downarrow \alpha_{q-1} & & \downarrow \beta_{q-1} & \\
\cdots \longrightarrow & A'_q & \xrightarrow{f'_q} & B'_q & \xrightarrow{g'_q} & C'_q & \xrightarrow{h'_q} & A'_{q-1} & \xrightarrow{f'_{q-1}} & B'_{q-1} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

如果每个$\gamma_q : C_q \to C'_q$都是同构，那么存在正合序列，

$$\cdots \xrightarrow{\Gamma_{q+1}} A_q \xrightarrow{\Phi_q} B_q \oplus A'_q \xrightarrow{\Psi_q} B'_q \xrightarrow{\Gamma_q} A_{q-1} \xrightarrow{\Phi_{q-1}} \cdots$$

这里$\Phi_q(a) = (f_q(a), \alpha_q(a))$，$\Psi_q(b, a') = \beta_q(b) - f'_q(a')$并且
$\Gamma_q(b') = h_q \gamma_q^{-1} g'_q(b')$。这个序列被称为是 Barratt-Whitehead 梯子序列 （Barratt-Whitehead sequence of ladder）。

对于复杂拓扑空间，我们一般用分而治之的方法来计算其同调群。首先将空间分解为两个子空间的并集，分别计算每个子空间的同调群，再用Mayer-Vietoris定理来推导全空间的同调群。

定理（Mayer-Vietoris）令X_1和X_2是拓扑空间X的子空间，使得$X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$，那么存在空间$X$的正合的Mayer-Vietoris序列，

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\phi} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{\psi} H_q(X) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\phi} \cdots$$

这里 $\phi(x) = (i_*(x), j_*(x)),\ \ x \in H_q(X_1 \cap X_2)$，

并且 $\psi(x_1, x_2) = k_*(x_1) - l_*(x_2),\ \ x_1 \in H_q(X_1),\ x_2 \in H_q(X_2)$。

包含映射

$i : X_1 \cap X_2 \to X_1,\ j : X_1 \cap X_2 \to X_2,\ k : X_1 \to X,\ l : X_2 \to X$

诱导了同态i_*, j_*, k_*和l_*，最后$\Delta = dh_*^{-1} q_*$，

h和q是包含映射，d是空间偶$(X_1, X_1 \cap X_2)$的边缘算子。

证明：我们考虑空间偶所构成的图（diagram），这里所有的映射都是包含映射，并且是可交换的，

$$\begin{array}{ccccc} (X_1\cap X_2,\emptyset) & \xrightarrow{i} & (X_1,\emptyset) & \xrightarrow{p} & (X_1,X_1\cap X_2) \\ \downarrow j & & \downarrow k & & \downarrow h \\ (X_2,\emptyset) & \xrightarrow{l} & (X,\emptyset) & \xrightarrow{q} & (X,X_2) \end{array}$$

由此诱导下列的Barratt-Whitehead 梯子序列，

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots\longrightarrow & H_q(X_1\cap X_2) & \xrightarrow{i_*} & H_q(X_1) & \xrightarrow{p_*} & H_q(X_1,X_1\cap X_2) & \xrightarrow{d} & H_{q-1}(X_1\cap X_2) & \longrightarrow\cdots \\ & \downarrow j_* & & \downarrow k_* & & \downarrow h_* & & \downarrow j_* & \\ \cdots\longrightarrow & H_q(X_2) & \xrightarrow{l_*} & H_q(X) & \xrightarrow{q_*} & H_q(X,X_2) & \longrightarrow & H_{q-1}(X_2) & \longrightarrow\cdots \end{array}$$

根据切除定理， $h_*:H_q(X_1,X_1\cap X_2)\to H_q(X,X_2)$是同构。由 Barratt-Whitehead引理，定理得证。

同样，我们可以证明 reduced homology 的 Mayer-Vietoris 定理，

定理 令X_1和X_2是拓扑空间X的子空间，使得$X=X_1^\circ\cup X_2^\circ$，那么存在空间$X$的正合的Mayer-Vietoris序列，

$$\cdots\xrightarrow{\Delta}\tilde{H}_q(X_1\cap X_2)\xrightarrow{\phi}\tilde{H}_q(X_1)\oplus\tilde{H}_q(X_2)\xrightarrow{\psi}\tilde{H}_q(X)\xrightarrow{\Delta}\tilde{H}_{q-1}(X_1\cap X_2)\xrightarrow{\phi}$$

序列的结尾为

$$\cdots\xrightarrow{\phi}\tilde{H}_0(X_1)\oplus\tilde{H}_0(X_2)\xrightarrow{\psi}\tilde{H}_0(X)\xrightarrow{\Delta}0。$$

证明方法非常类似，选取点 $x_0\in X_1\cap X_2$，考虑下面的可交换图，

$$\begin{array}{ccccc} (X_1\cap X_2,x_0) & \xrightarrow{i} & (X_1,x_0) & \xrightarrow{p} & (X_1,X_1\cap X_2) \\ \downarrow j & & \downarrow k & & \downarrow h \\ (X_2,x_0) & \xrightarrow{l} & (X,x_0) & \xrightarrow{q} & (X,X_2) \end{array}$$

方法类似。

Jordan-Brouwer分离定理

我们用Mayer-Vietoris序列来证明著名的Jordan-Brouwer分离定理。

引理：令$B \subset \mathbb{S}^n$是$\mathbb{S}^n$的子集，B和I^k拓扑同胚，$0 \le k \le n$，那么对于一切 q，

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \setminus B) = 0。$$

证明：我们用数学归纳法。当$k = 0$ 时，B是独点集，$\mathbb{S}^n \setminus B \cong \mathbb{R}^n$，结论成立。假设定理在 $k-1$ 时成立。

令 $z \in \tilde{Z}_q(\mathbb{S}^n \setminus B)$，我们欲证明存在 $b \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus B)$，使得$z = \partial b$，由此 $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \setminus B) = 0$。

选定一个拓扑同胚 $f : I^{k-1} \times I \to B$， 令 $B_t = f(I^{k-1} \times t) \subset B \subset \mathbb{S}^n$，$B_t$ 是一个$(k-1)$维圆盘，由归纳假设 $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \setminus B_t) = 0$ 。由$z \in \tilde{Z}_q(\mathbb{S}^n \setminus B_t)$，我们得到存在$b_t \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus B_t)$， 使得 $\partial b_t = z$。假设$b_t = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \cdots + n_l\sigma_l$，这里 $\sigma_i : \Delta_{q+1} \to \mathbb{S}^n \setminus B_t$ 是奇异单形。考察集合 $L = \bigcup_{i=1}^{l} \sigma(\Delta_{q+1})$ 为紧集，并且 $L \cap B_t = \emptyset$，因此存在B_t的一个邻域 U_t，满足$L \cap U_t = \emptyset$，由此 $b_t \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus U_t)$。因为 $I^{k-1} \times t \subset f^{-1}(B \cap U_t)$，存在t的一个邻域 V_t，满足 $I^{k-1} \times V_t \subset f^{-1}(B \cap U_t)$。

我们选择足够大的m，使得对每一个区间 $I_j = [(j-1)/m, j/m]$，存在t_j使得 $I_j \subset V_{t_j}$。由此 $Q_j = f(I^{k-1} \times I_j)$，$Q_j \subset U_{t_j}$，并且 $B = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$。对于每一个 $1 \le j \le m$，存在一个 $b_{t_j} \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus Q_j)$，使得 $z = \partial b_{t_j}$ 。

令 $X_1 = \mathbb{S}^n \setminus Q_1$ 和 $X_2 = \mathbb{S}^n \setminus Q_2$，那么

$$X_1 \cup X_2 = \mathbb{S}^n \setminus (Q_1 \cap Q_2) = \mathbb{S}^n \setminus B_{1/m}$$
$$X_1 \cap X_2 = \mathbb{S}^n \setminus (Q_1 \cup Q_2)$$

考虑$\mathbb{S}^n \setminus B_{1/m}$的Mayer-Vietoris正合序列：

$$\tilde{H}_{q+1}(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\Delta} \tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\phi} \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cup X_2)$$

因为$B_{1/m}$是（k-1）圆盘，因此 $\tilde{H}_{q+1}(X_1\cup X_2)\cong\tilde{H}_q(X_1\cup X_2)=0$，因此$\phi$是同构。考察$z\in\tilde{Z}_q(X_1\cap X_2)$，我们得到在$X_1$中$z=\partial b_{t_1}$，在$X_2$中 $z=\partial b_{t_2}$，
因此$\phi(\{z\})=0$，进而得到 $\{z\}=0$。因此存在$b\in C_{q+1}(\mathbb{S}^n\setminus(Q_1\cup Q_2))$，
$z=\partial b$。

同理，我们再令 $X_1=\mathbb{S}^n\setminus(Q_1\cup Q_2)$和$X_2=\mathbb{S}^n\setminus Q_3$，考察Mayer-Vietoris序列，我们得到 z 是 $\mathbb{S}^n\setminus(Q_1\cup Q_2\cup Q_3)$ 中的边界链。重复这一过程，我们得到存在$b\in C_{q+1}(\mathbb{S}^n\setminus(Q_1\cup Q_2\cdots\cup Q_m))$，$z=\partial b$。证明完毕。

定理1 假设$S\subset\mathbb{S}^n$是$\mathbb{S}^n$的一个子集，S 和$\mathbb{S}^k$拓扑同胚，$0\le k\le n-1$。那么
$\tilde{H}_{n-k-1}(\mathbb{S}^n\setminus S)\cong\mathbb{Z}$ 并且 $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus S)\cong\mathbb{Z}$，对一切 $q\neq n-k-1$。

证明：我们用数学归纳法。当 $k=0$ 情形，S 包含两个点，$\mathbb{S}^n\setminus S$ 拓扑等价
$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\cong\mathbb{S}^{n-1}$，因此 $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})=\mathbb{Z}$ 并且 $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^{n-1})=0$，对一切$q\neq n-1$。

假设在$k-1$时定理成立。固定一个同胚映射 $f:\mathbb{S}^k\to S$，令$\mathbb{D}^k_+$和 $\mathbb{D}^k_-$ 分别是 $\mathbb{S}^k$ 的上半球面和下半球面。那么 $B_1=f(\mathbb{D}^k_+)$ 和 $B_2=f(\mathbb{D}^k_-)$ 是 k维拓扑圆盘，则 $S=B_1\cup B_2$，$T=B_1\cap B_2$ 和 $\mathbb{S}^{k-1}$ 同伦，

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{S}^n\setminus B_1)\cup(\mathbb{S}^n\setminus B_2)&=\mathbb{S}^n\setminus T\\
(\mathbb{S}^n\setminus B_1)\cap(\mathbb{S}^n\setminus B_2)&=\mathbb{S}^n\setminus S
\end{aligned}
$$

应用Mayer-Vietoris序列，

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n\setminus B_1)\oplus\tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n\setminus B_2)&\to\tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n\setminus T)\to\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus S)\\
&\to\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus B_1)\oplus\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus B_2)
\end{aligned}
$$

由引理，我们得到对于所有$q\ge 0$，$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus B_1)=\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus B_2)=0$，由此得到
$\tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n\setminus T)\cong\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus S)$，这完成了归纳。证明完毕。

定理 （Jordan-Brouwer Separation 定理）假设$S\subset\mathbb{S}^n$是$\mathbb{S}^n$的一个子集，S 和
$\mathbb{S}^{n-1}$ 拓扑同胚，那么$\mathbb{S}^n\setminus\mathbb{S}^{n-1}$ 恰有两个联通分支。

证明：应用定理1，令 $k=n-1$ 得到 $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n\setminus S)\cong\mathbb{Z}$，因此 $H_0(\mathbb{S}^n\setminus S)\cong\mathbb{Z}^2$，这意味着 $\mathbb{S}^n\setminus\mathbb{S}^{n-1}$ 恰有两个道路联通分支。证明完毕。

当$n=2$时，这就是古典的 Jordan 曲线定理。

由Jordan-Brouwer分离定理，我们可以得到Brouwer的区域不变性定理，这一定理在我们后面证明离散曲面里奇流解的存在性时起到了至关重要的作用。

定理 （Invariance of Domain）令 $U,V\subset\mathbb{S}^n$，U和V拓扑同胚，如果U是开集那么V也是开集。

证明：令$f:U\to V$同胚映射，$x\in U$和$y\in V$，并且$y=f(x)$。选择点$x\in U$的一个闭邻域$N\in U$，并且N和I^k拓扑同胚，其边界和（n-1）维球面同胚 $\partial N\cong\mathbb{S}^{n-1}$。$f(N)\subset V$是闭集，并且包含点y。

由定理1我们得到$H_0(\mathbb{S}^n\setminus f(N))=\mathbb{Z}$，因此 $\mathbb{S}^n\setminus f(N)$是道路联通的。由Jordan-Brouwer分离定理，$\mathbb{S}^n\setminus f(\partial N)$有两个分立的联通分支，

$$\mathbb{S}^n\setminus f(\partial N)=(\mathbb{S}^n\setminus f(N))\bigcup(f(N)\setminus f(\partial N)),$$

每个分立分支在全空间 $\mathbb{S}^n\setminus f(\partial N)$ 中都是开集，因此 $f(N)\setminus f(\partial N)$ 在$\mathbb{S}^n\setminus f(\partial N)$中是开集，$f(N)\setminus f(\partial N)$在$\mathbb{S}^n$中是开集。由此，$f(N)\setminus f(\partial N)$是点y在$V$中的开邻域，因此$V$是开集。证明完毕。

这里，定义域和值域都是欧氏空间的子集，关键在于定义域所在的欧氏空间和值域所在的**欧氏空间维数**相等，反之，定理不再成立。例如，考虑映射 $f:(0,1)\to\mathbb{R}^2$，$f(t)=(t,0)$。这个映射是连续单射，定义域是$\mathbb{R}$的开子集，但是值域不是$\mathbb{R}^2$的开子集。这一定理是欧氏空间所独有的性质，在一般拓扑空间上并不成立。
