清华笔记：计算共形几何讲义 （20）离散曲面曲率流 （Discrete Surface Ricci Flow）II

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-13

为了证明离散曲率流解的存在性，我们需要一些较为独特的数学工具，特别是双曲几何的理论知识。这次课程，我们讲解简单的双曲几何知识，特别是如何将一个带有锥奇异点的平直度量变换成完备双曲度量带有尖点，和Decorated双曲度量。然后，我们用双曲几何来解释离散熵能量。

平面双曲几何

复平面单位圆盘$\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$上配备黎曼度量

$$\mathbf{h} = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2},$$

则所得为双曲平面的庞加莱模型（Poincare's Disk）。双曲平面上的刚体变换是莫比乌斯变换，例如

$$z \mapsto e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}。$$

莫比乌斯变换可以将边界上的任意三点变成指定的三点。Poincare模型中的单位圆为无穷远点，双曲直线是和单位圆相互垂直的欧氏圆弧（或欧氏直线）。双曲三角形由三条双曲直线围成的多边形；双曲圆是到双曲圆心距离等于常数的点的轨迹，双曲圆和欧氏圆重合，但是圆心不重合，圆心靠近边界。

另外一种双曲平面的模型$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$，配有黎曼度量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y},$$

双曲等距变换为特殊线性群$SL(2, \mathbb{R})$，

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right), ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}。$$

实数轴为无穷远直线，测地线是和实数轴垂直的直线，或者半圆弧。如图1所示，两点之间的双曲距离如下计算：给定两点p, q，我们做过这两点的双曲直线，两个无穷远点为p', q'，计算这4个点的交比，记为$[p, q; p', q']$，

$$[A, B; C, D] = \frac{A - C}{A - D} : \frac{B - C}{B - D},$$

则双曲距离为

$$d_{\mathbb{H}}(p, q) = \ln \ [p, q; p', q']。$$

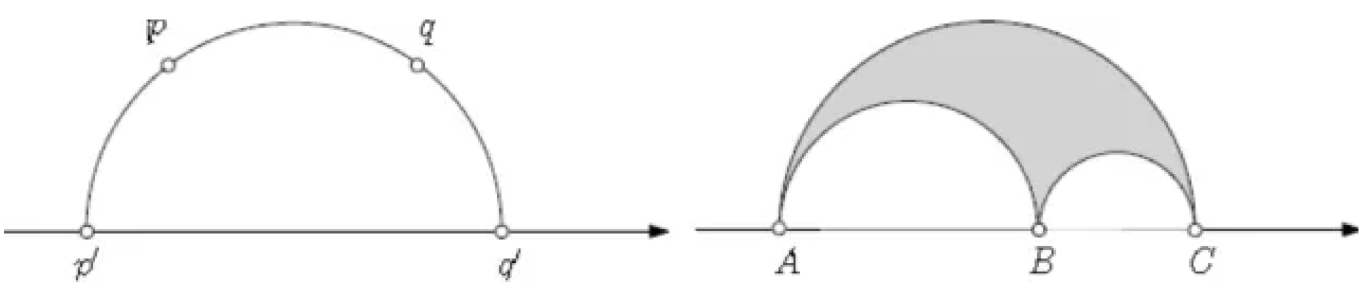

图1. hyperbolic lines，Ideal hyperbolic triangles。

我们主要应用一种特殊的双曲三角形，ideal hyperbolic triangle，其三个顶点都在无穷远处，边长为无穷大，三个内角为0，但是面积为π。所有的ideal hyperbolic triangles 彼此等距。

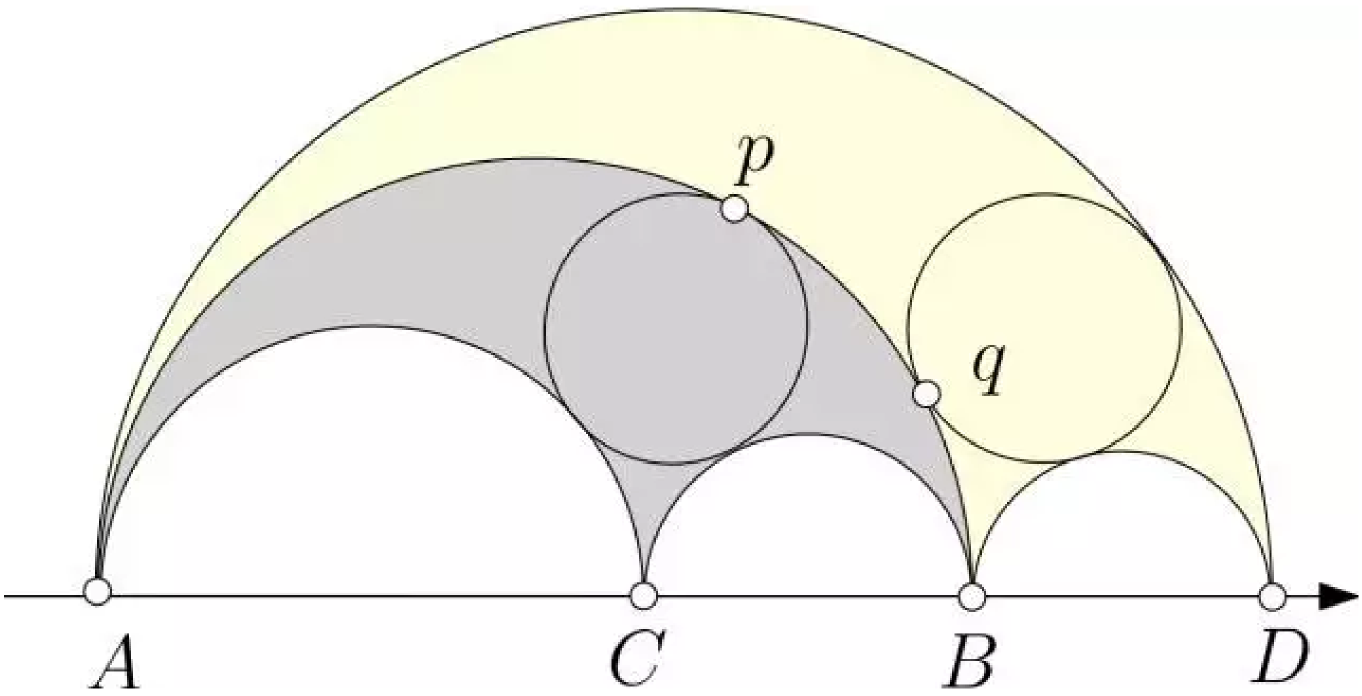

图2. Thurston's shear coordinates。

我们可以将hyperbolic ideal triangles沿着公共边粘贴起来，如图2所示。其公共边长度为无穷大，其粘贴方式需要用瑟斯顿的Shear Coordinates 来描述，如图2所示。每个双曲理想三角形都有一个内切双曲圆。公共边上，两个切点之间的双曲距离给出了Shear Coordinates。两个双曲理想三角形粘贴的shear coordinates不同，则所得的双曲测地四边形彼此不等距。

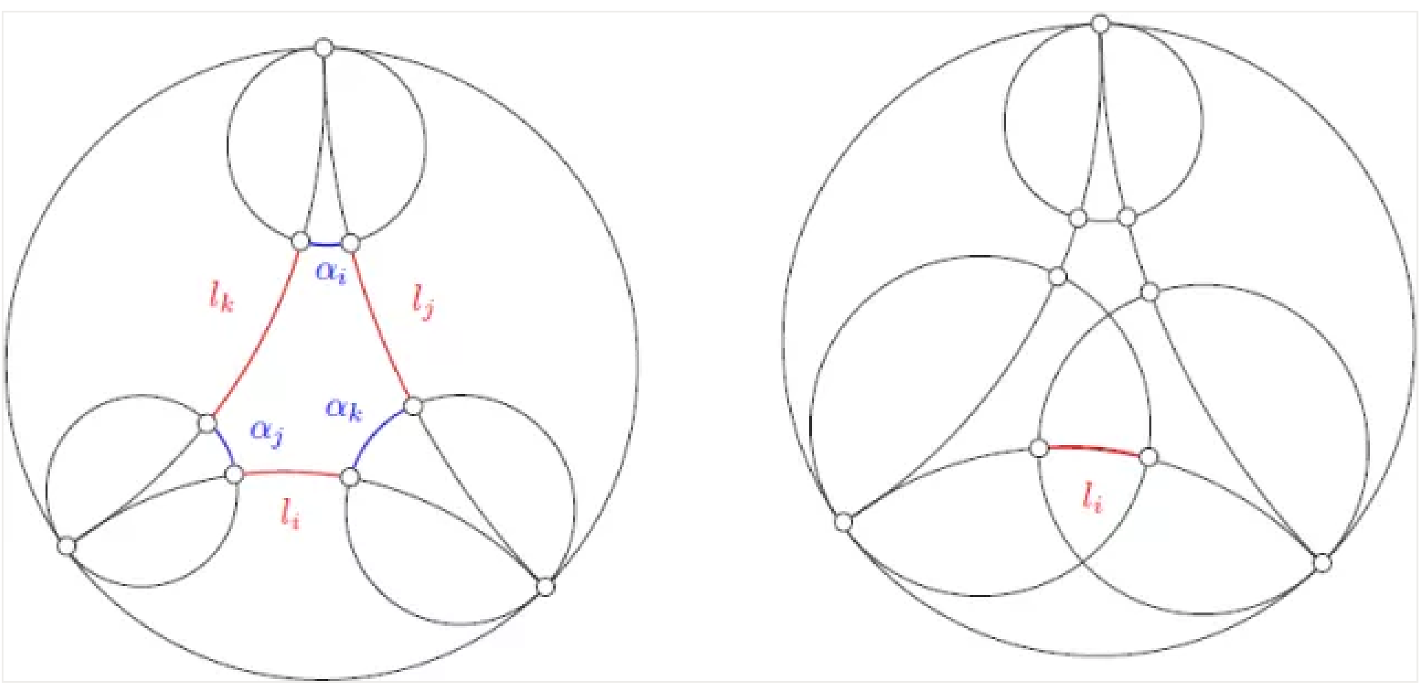

图3. Penner's decorated triangle.

同时，我们主要考虑一种特殊的双曲圆，horocycle，其圆心在无穷远处，半径也是无穷大。给定一个hyperbolic ideal triangle，我们用三个horocyles来截除三个顶点，得到一个hyperbolic decorated triangle，如图8所示。我们用红边来表示decorated triangle的三条边，其有向双曲边长记为$\{l_i, l_j, l_k\}$。如果两个horocycles彼此相交，则边长为负，如图3右帧所示；蓝边表示三个horocycle的圆弧，其双曲长度记为$\{\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k\}$，我们可以称之为三个内角。给定任意的三个实数$\{l_i, l_j, l_k\}$，存在唯一的decorated triangle，其边长是$\{l_i, l_j, l_k\}$。Decorated triangle也满足特定的余弦定理（Cosine Law）：

$$\alpha_i = \frac{L_i}{L_j L_k}, \quad L_i = e^{l_i/2}$$。

这里$\{L_i, L_j, L_k\}$被称为是Penner的λ-长度。

三维双曲空间

三维双曲空间$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) | z > 0\}$，配有双曲度量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z},$$

xy-平面是无穷远平面。双曲测地线是和xy平面垂直的直线或者半圆弧，双曲测地平面是赤道在xy-平面上的半球面。

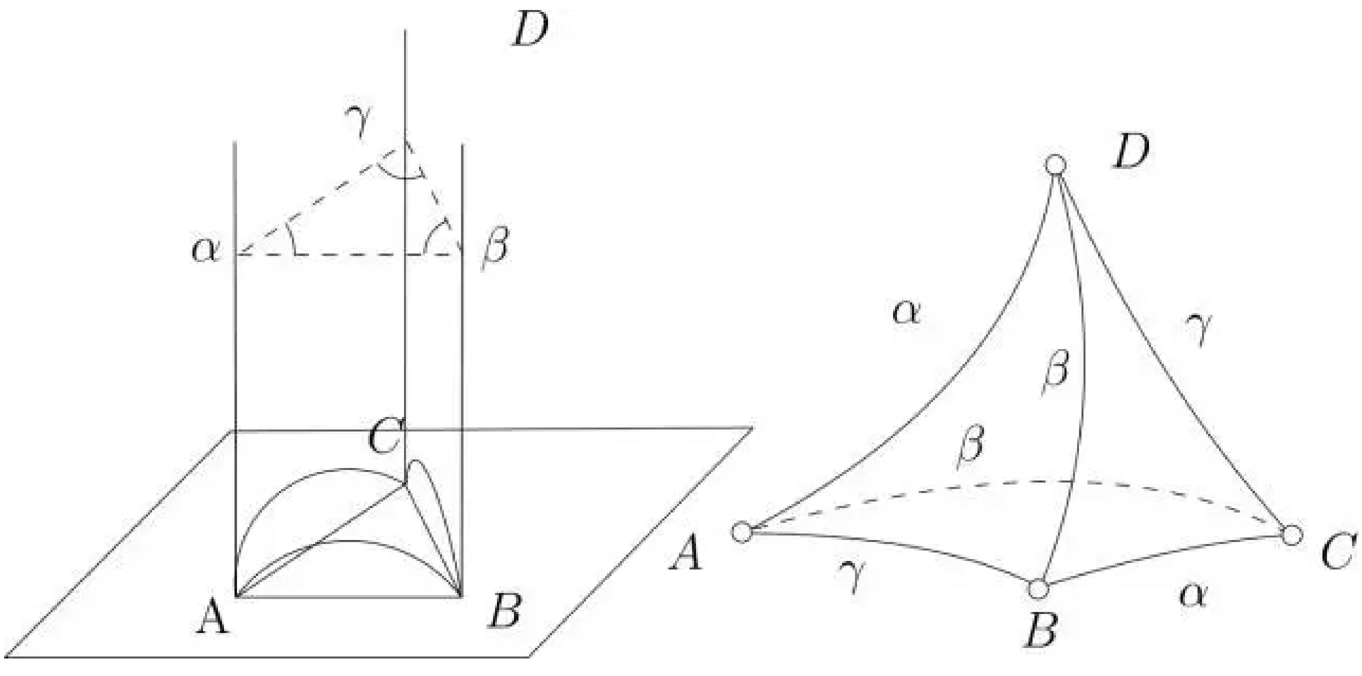

图4. hyperbolic ideal tetrahedron。

双曲空间凸包的定义和欧氏空间凸包的定义相仿。$\Omega \subset \mathbb{H}^3$是凸集合，如果对于一切$p, q \in \Omega$，连接它们的双曲线段也被包含在$\Omega$。给定离散点集$V \subset \Omega$，其双曲凸包就是所有包含$V$的双曲凸集的交集。给定4个无穷远点，其双曲凸包就是一个双曲测地四面体，如图4所示，每个面为双曲平面，更进一步，每个面是一个双曲理想三角形，每条边为双曲直线。

如果我们将一个面的三个顶点A，B，C放在xy-平面上，第四个顶点D放在z轴无穷远处，AD，BD，CD成为三根和xy-平面垂直的测地线，如图4左帧所示。在xy-平面上，ΔABC的三个内角为$\{\alpha, \beta, \gamma\}$，那么AD，BD，CD边上的二面角等于$\{\alpha, \beta, \gamma\}$。双曲理想四面体的对边上二面角彼此相等，如图4右帧所示。双曲理想四面体的体积等于

$$Vol(T) = 2\Lambda(\alpha) + 2\Lambda(\beta) + 2\Lambda(\gamma),$$

这里

$$\Lambda(\theta) = -\int_0^\theta \ln|2\sin s|ds$$

为Milnor的Lobachevsky函数。

平直度量到完备双曲度量的变换

假设(S, V)是一个拓扑曲面，带有离散点集$V \subset S$；d是一个平直度量，以顶点V为锥奇异点集（Cone Singularities）；$\mathcal{T}$是一个以V为顶点集合，曲面S的一个三角剖分。我们将$(S, V, \mathcal{T})$的平直度量变换成一个双曲度量。

首先，我们将每一个欧氏三角形变换成一个双曲理想三角形。其次，对于任意一对相邻的三角形，决定对应的shear coordinates。假设相邻三角形

$$[v_i, v_j, v_k] \cap [v_j, v_i, v_l] = [v_i, v_j],$$

将这两个欧氏三角形等距平铺在xy-平面上，计算四个顶点的双曲凸包。双曲凸包上对应欧氏三角形$[v_i, v_j, v_k]$的双曲理想三角形记为(v_i, v_j, v_k)，那么

$$(v_i, v_j, v_k) \cap (v_j, v_i, v_l) = (v_i, v_j)$$

其Shear Coordinates记为sc_{ij}。这样，我们为$(S, V, \mathcal{T})$所有的边定义了Shear Coordinates。我们用这些Shear Coordinates将所有的双曲理想三角形粘贴起来，这样就得到$(S, V, \mathcal{T})$的一个双曲度量。在这个度量下，所有的顶点成为无穷远的尖点（Cusps），所有的测地线都可以无限延长，因此这个度量是一个完备双曲度量。

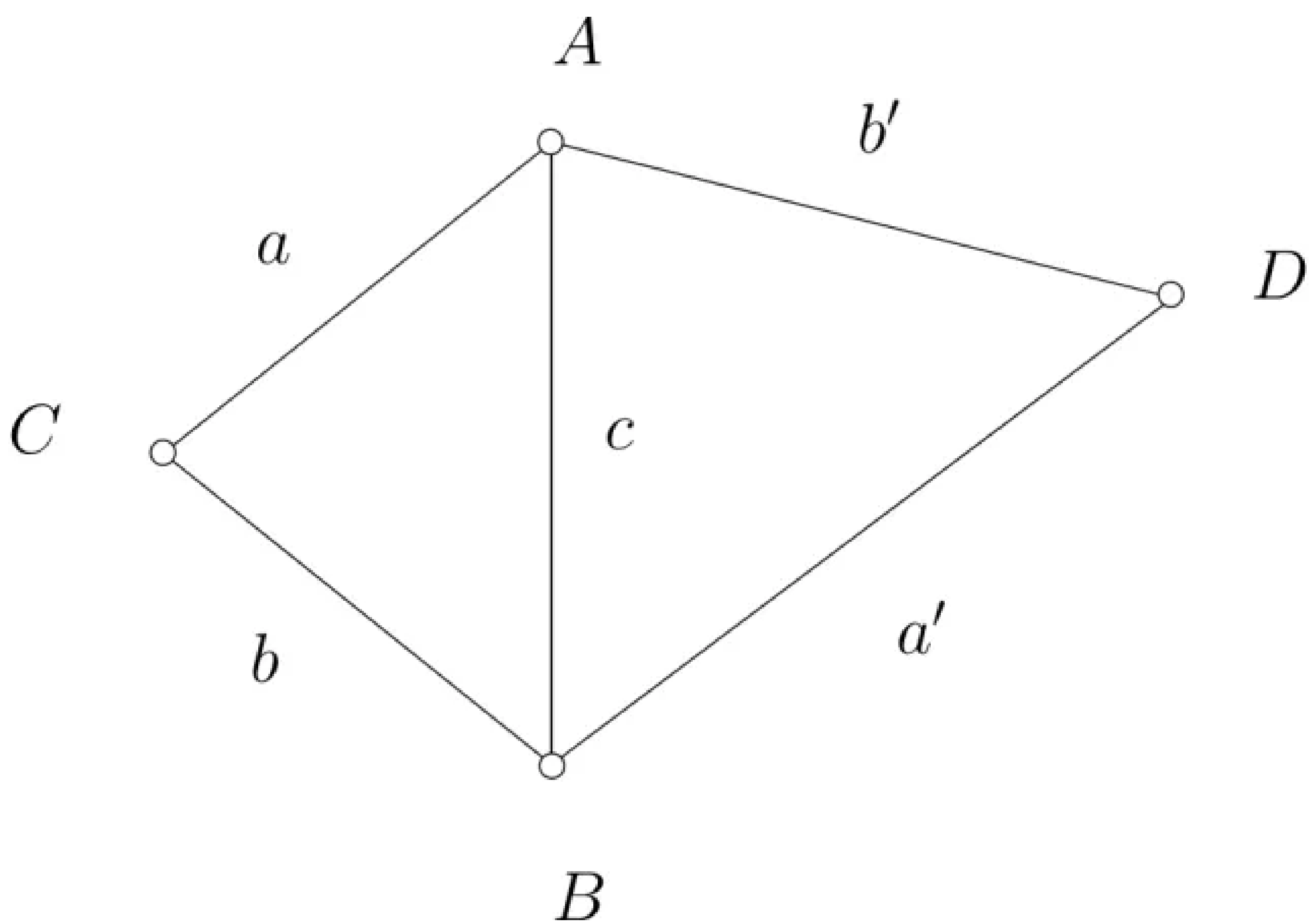

图5. 长度交比 Cross ratio。

上述方法通过用双曲凸包的方法得到Shear coordinates。这种方法和下面的代数方法等价。如图5所示，假设边长给定，那么边AB的交比定义为

$$Cr(AB) = \frac{aa'}{bb'},$$

通过计算，我们可以证明Shear Coordinates 等于交比的对数，

$$Sc(AB) = \ln Cr(AB)。$$

由此，我们可以得到如下引理：

引理 给定(S, V, T)，假设平直度量$\tilde{d} = u * d$，即两个度量相差一个顶点缩放，那么它们对应的双曲完备度量等距。

平直度量到Decorated双曲度量的变换

给定一个欧氏三角形，具有边长$\{l_i, l_j, l_k\}$，我们构造一个decorated hyperbolic triangle，其边长为$\{2\ln l_i, 2\ln l_j, 2\ln l_k\}$。给定封闭拓扑曲面$S$，和曲面上的有限离散点集$V$，记为$(S, V)$。我们在$(S, V)$配备一个欧氏度量，使得所有的离散曲率集中在顶点$V$上，则在通常情况下存在唯一的Delaunay三角剖分T。对于每条边，我们将相邻的两个欧氏三角形同时转换成decorated 双曲度量，如图11所示，这种转换方式给出了两个decorated triangles的粘贴方式。如此，我们将(S, V)的一个欧氏度量转换成了一个decorated 双曲度量。

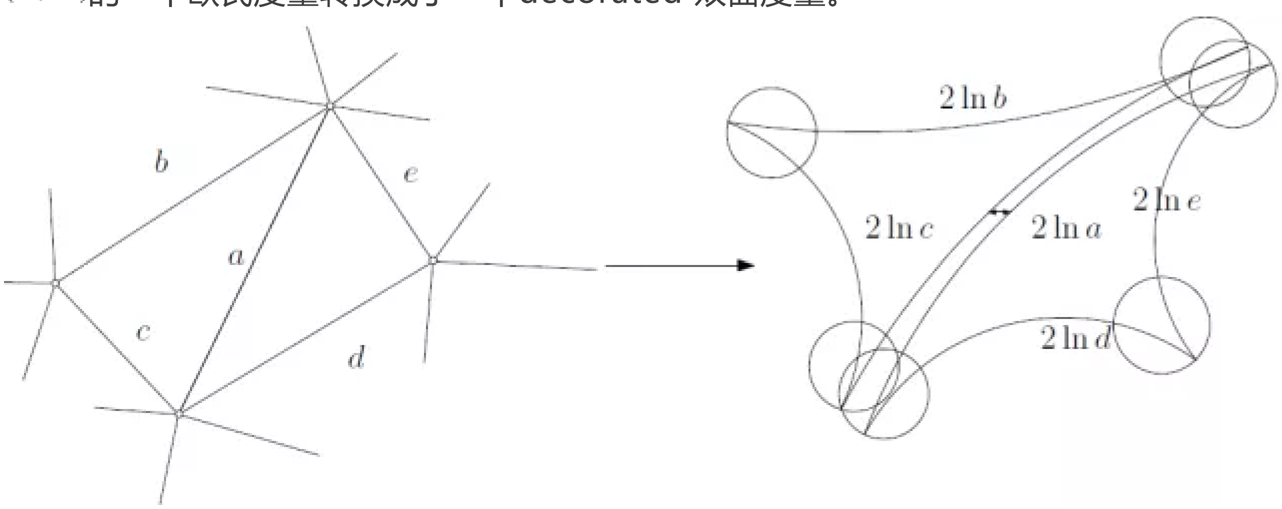

图6. 欧氏度量到decorated hyperbolic 度量的转换，将欧氏长度变换成Penner的λ-长度，$(l_i, l_j, l_k) \mapsto (2\ln l_i, 2\ln l_j, 2\ln l_k)$。

如果，我们忽略horocycles，那么每一个欧氏三角形都被转换成一个ideal 双曲三角形，由图6所示的粘贴方式，这些ideal 双曲三角形粘在一起，构成了(S,V)上的一个双曲度量，每个顶点都成为一个无穷远的尖点（cusp）。我们将这个度量称为(S,V)的一个带尖点的双曲度量（hyperbolic metric with cusps），记为$\mathbf{h}$。然后，我们用horosphere来截除顶点处的尖点，得到decorated hyperbolic metric，记为$\tilde{\mathbf{h}}$。这里我们得到的$\mathbf{h}$和上节我们构造的完备双曲度量相吻合。

在顶点$v_i \in V$处，horosphere和曲面$(S,V,\mathbf{h})$交线的双曲长度记为w_i，称次顶点处的decoration。那么decorated metric $\tilde{\mathbf{h}}$由 hyperbolic metric $\mathbf{h}$，和decorations $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$共同决定。

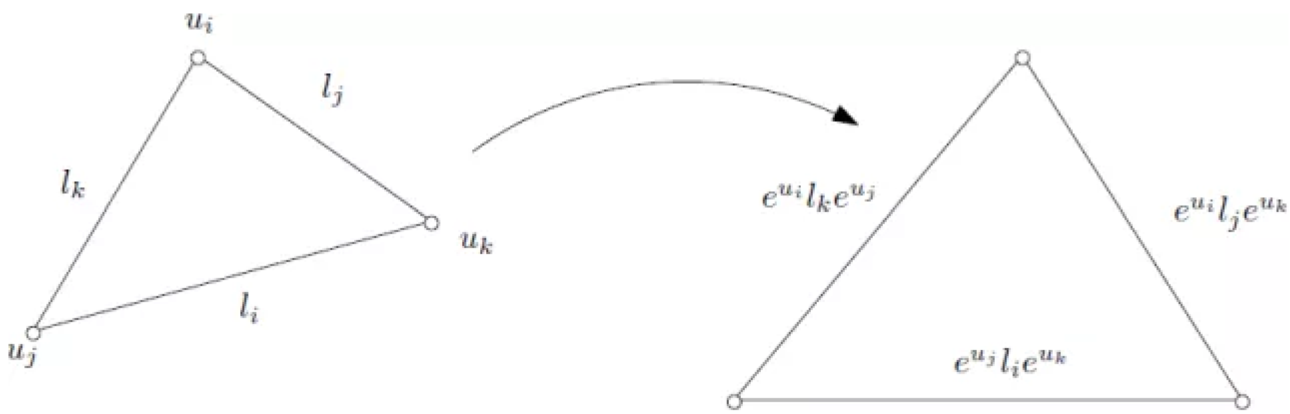

图7. 欧氏度量的顶点缩放操作。

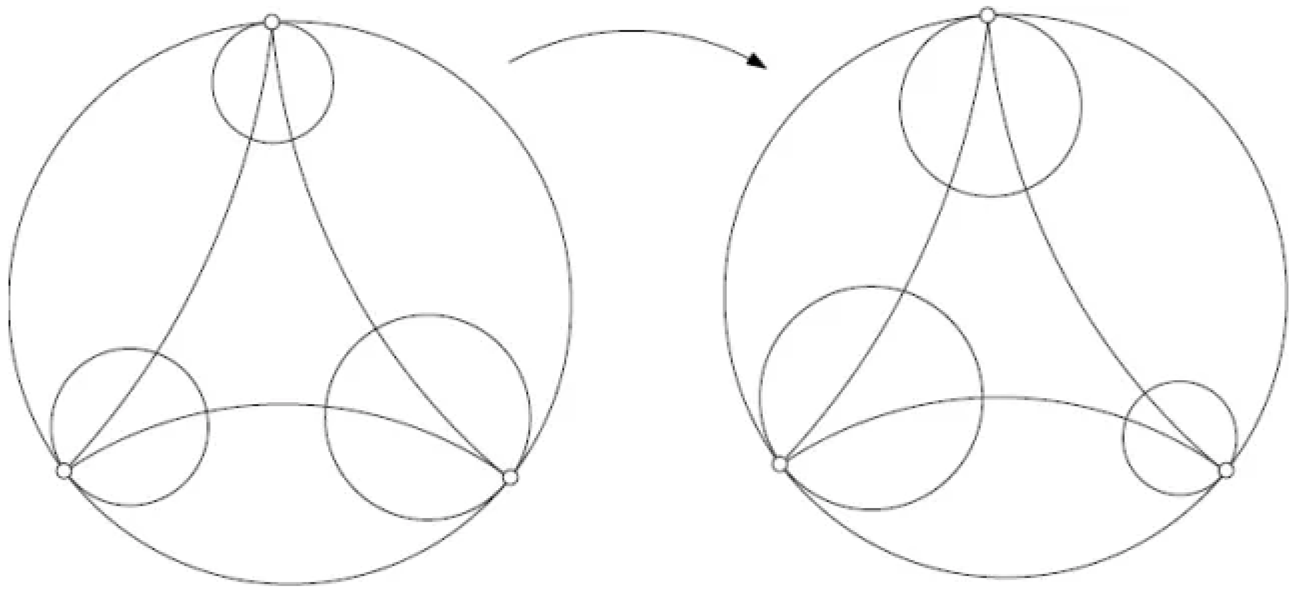

图8. decorated 双曲度量的decoration缩放操作。

从欧氏度量到decorated 双曲度量的变换具有如下的关键性质：将图7所示的欧氏度量的顶点缩放操作，变换成decorated 双曲度量decoration 缩放操作，即horosphere的缩放操作。

平离散熵能量的双曲几何解释

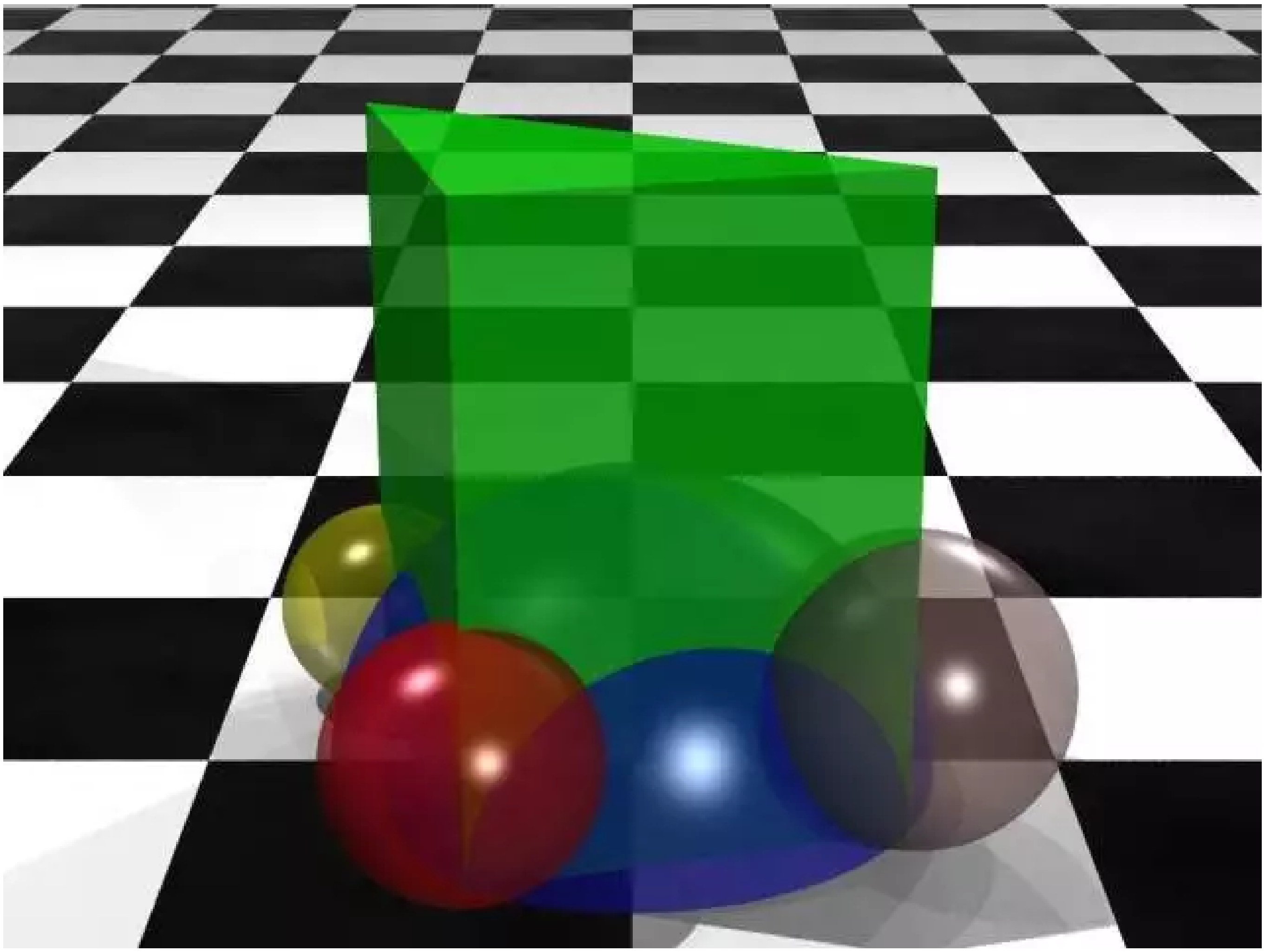

图9. 离散曲率流的双曲几何解释。

从双曲几何的观点来看，离散曲面曲率流对应的离散熵能量具有鲜明的几何意义，如图9所示。给定一个欧氏三角形，我们如图4所示的方法构造一个理想双曲四面体（Ideal Hyperbolic Tetrahedron），每个面为双曲测地平面，底面是以三角形外接圆为赤道的半球面（蓝色球面）。然后我们在每个顶点处放置一个horosphere。顶点A处的horosphere是和xy-平面相切于A点的球，顶点B,C处的horosphere相类似；顶点D处的horosphere是和xy-平面相平行的平面。如此，我们得到一个Decorated hyperbolic tetrahedron，每个面都是Decorated hyperbolic triangle。离散熵能量和这个双曲四面体有关。

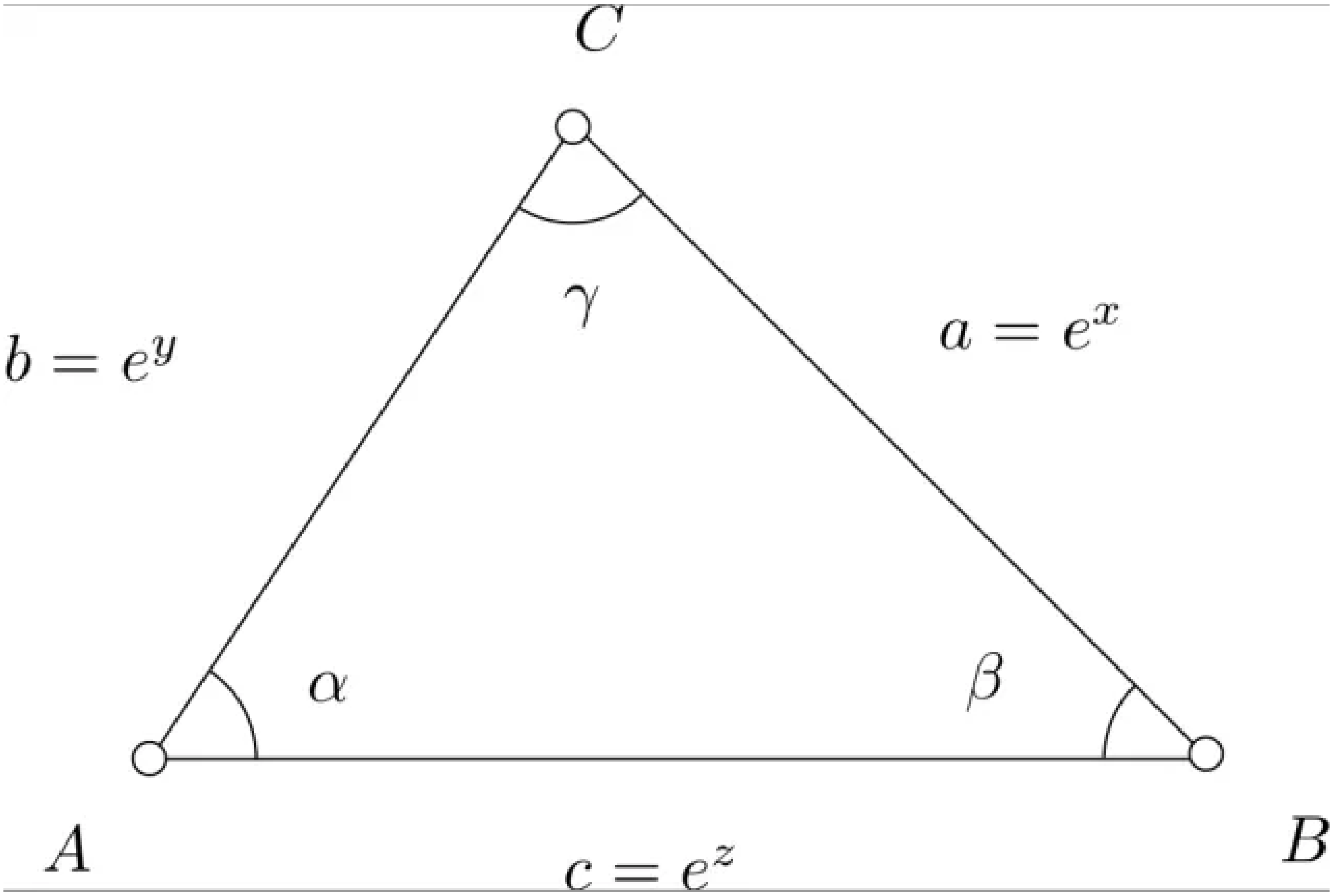

图10. 辅助函数的构造。

首先，我们构造辅助函数，如图10所示，

$$f(x,y,z)=\alpha x+\beta y+\gamma z+\Lambda(\alpha)+\Lambda(\beta)+\Lambda(\gamma)$$

直接计算可以得到

$$\nabla f(x,y,z)=(\alpha,\beta,\gamma)^T。$$

显然，辅助函数和双曲四面体的体积有关。

给定一个欧氏三角形，具有边长$\{l_i,l_j,l_k\}$，我们构造一个decorated hyperbolic triangle，其边长为$(\lambda_i,\lambda_j,\lambda_k)=(2\ln l_i,2\ln l_j,2\ln l_k)$。我们进行顶点缩放操作，

$$\tilde{l}_i=e^{(u_j+u_k)/2}l_i,$$

对应的Decorated hyperbolic 三角形边长变成简单的线性变换，

$$\tilde{\lambda}_i=\lambda_i+u_j+u_k,$$

我们上一讲构造了离散熵能量，

$$E_{ijk}(u_i,u_j,u_k)=\int^{(u_i,u_j,u_k)}\theta_i du_i+\theta_j du_j+\theta_k du_k,$$

其梯度为

$$\nabla E_{ijk}(u_i,u_j,u_k)=(\theta_i,\theta_j,\theta_k)^T,$$

我们用辅助函数来表示离散熵能量，

$$F(u_i,u_j,u_k)=\frac{\pi}{2}(\tilde{\lambda_i}+\tilde{\lambda_j}+\tilde{\lambda_k})-2f\left(\frac{\tilde{\lambda_i}}{2},\frac{\tilde{\lambda_j}}{2},\frac{\tilde{\lambda_k}}{2}\right),$$

直接计算我们得到 $F(u_i,u_j,u_k)=E_{ijk}(u_i,u_j,u_k)$ 。

由此，我们可以给出整个离散曲面的熵能量的双曲几何表示。给定曲面(S,V)的三角剖分$\mathcal{T}$，初始平直度量表示成对应的Decorated 双曲长度 λ，目标顶点锥角为Θ（离散曲率等于2π减去顶点锥角），那么相应的离散熵能量等于

$$E_{\mathcal{T},\lambda,\Theta}(u)=-\sum_{\Delta}F_{\Delta}(u)+\sum_i\theta_i u_i=\int^u\sum_i(K_i-\bar{K}_i)du_i$$

小结

这次课程，我们讲解了离散曲率流熵能量的双曲几何解释，将平直度量和双曲度量建立了联系。后继课程，我们会证明解的存在性和收敛性。

单纯从计算机算法实现角度而言，这些理论知识并不直接需要。但是，如果我们为了证明这一算法解的存在性，双曲几何必不可少。从短期的发表工程论文角度而言，这些努力是得不偿失的；但是从长远的历史观点来看，为了理论的严密性，我们花费的心血是值得的。

Reference

- Alexander Bobenko, Discrete Conformal Maps and Ideal Hyperbolic Polyhedra, Geometry and Topology 19(2015), 2155-2215

- X. Gu, R. Guo, F. Luo, J. Sun and T. Wu, A discrete Uniformization theorem for polyhedral surfaces I, Journal of Differential Geometry, 2016 (arXiv:1309.4175)

- X. Gu, R. Guo, F. Luo, J. Sun and T. Wu, A discrete Uniformization theorem for polyhedral surfaces II, Journal of Differential Geometry, 2016
(arXiv:1401.4594)
