清华笔记：计算共形几何讲义 （21）离散曲面曲率流 （Discrete Surface Ricci Flow）III

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-17

以前章节，我们介绍了曲面曲率流的一种离散形式-离散Yamabe流，主要操作是顶点缩放（Vertex Scaling）来共形变换度量来实现目标曲率。在实践中，往往多面体曲面的三角剖分是固定的。如果给定一些较为极端的目标曲率，有可能离散曲率流会出现爆破情况（blowup），就是在有限时间内某个三角形退化（degenerated），离散度量不再满足三角形不等式。因此，如何解决离散曲率流的稳定性成为研究重点。

最为简洁有效的手段就是在曲率流中动态变换三角剖分，黎曼度量依随时间演化而变化，三角剖分依随度量的变化而变化，时刻保持是Delaunay剖分。这样，我们可以证明，对于任意满足高斯-博纳条件的目标度量，离散曲率流将会收敛到相应的目标曲率。这给了我们一个设计黎曼度量的强有力的工具。

这一讲，我们来证明离散曲面曲率流解的存在性，所用的数学工具主要是Teichmuller空间理论和代数拓扑中的区域不变定理。

存在性定理陈述

令S为一封闭曲面，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}\subset S$为离散顶点集合，满足欧拉示性数为负，$\chi(S-V)<0$。我们考虑$(S,V)$上平直度量$d$，以顶点集合锥奇异点，我们将$d$称为是PL度量。

定义 （离散共形等价度量）(S,V)上的两个PL度量d和d'离散共形等价，如果存在(S,V)上的一系列PL度量

$$d_1=d,d_2,\cdots,d_m=d',$$

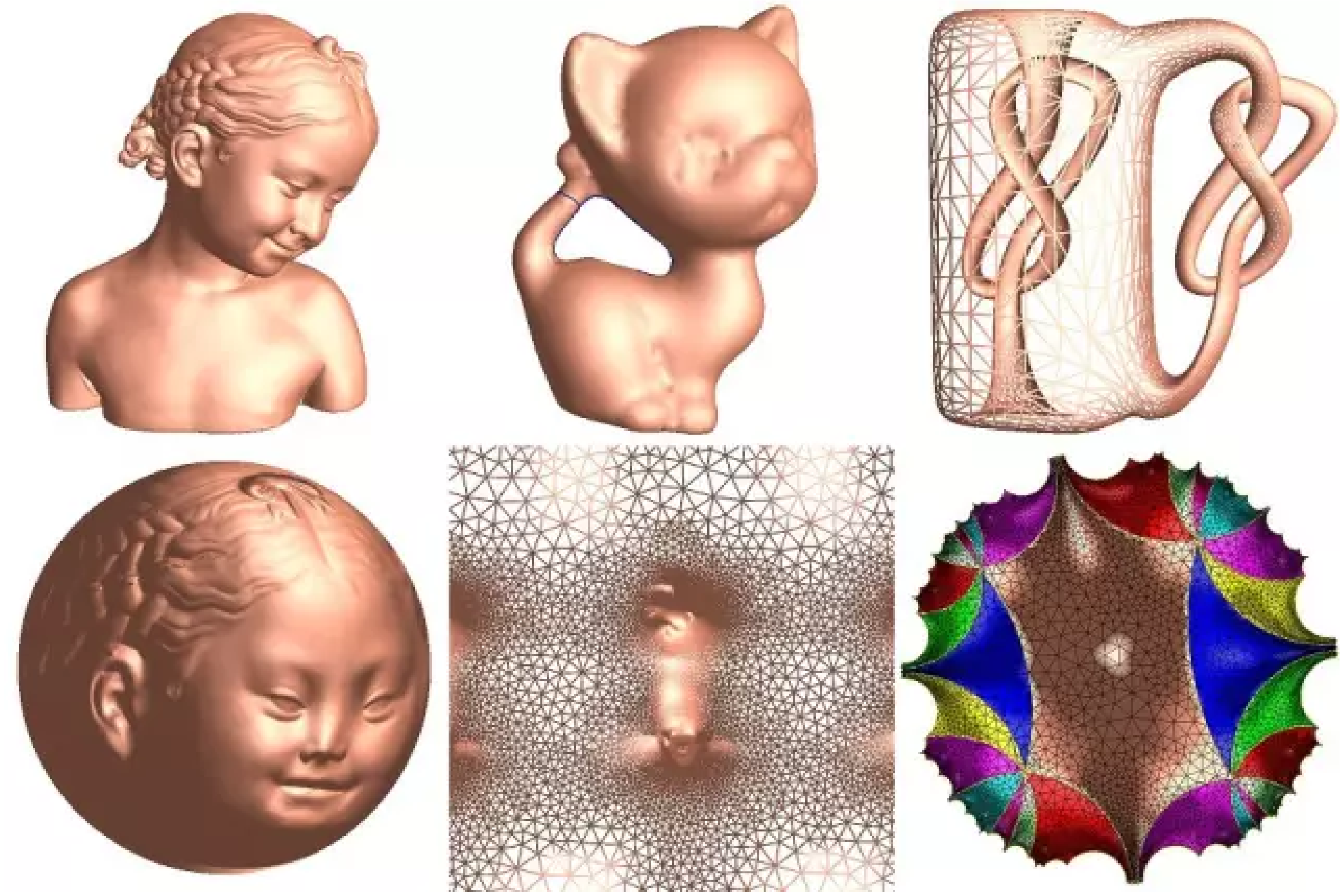
和一系列三角剖分

$$\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\cdots,\mathcal{T}_n,$$

使得

1. 每一个三角剖分$\mathcal{T}_k$在度量d_k下是Delaunay 的；
2. 如果$\mathcal{T}_i=\mathcal{T}_{i+1}$，则存在函数$\mathbf{u}:V\to\mathbb{R}$，使得$d_{i+1}=\mathbf{u}*d_i$，即两个PL度量彼此相差一个顶点缩放（Vertex Scaling）操作。
3. 如果$\mathcal{T}_i\neq\mathcal{T}_{i+1}$，则存在一个等距变换$h:(S,d_i)\to(S,d_{i+1})$，这一变换和$(S,V)$到自身的恒同变换同伦。

定理 （存在性、唯一性定理）假设(S,V)是一个封闭的带顶点的曲面，d是(S,V)的一个PL度量，那么对一切$K^*:V\to(-\infty,2\pi)$，满足高斯-博纳条件$\sum_{v\in V}K^*(v)=2\pi\chi(S)$，存在一个PL度量$d^*$，和度量$d$离散共形等价，诱导离散高斯曲率$K^*$。这样的PL度量彼此相差一个整体缩放系数。并且，$d^*$可以由离散曲率流得到。



存在性和唯一性定理可以自然推出离散单值化定理。

推论 （离散单值化）假设(S,V)是一个封闭的带顶点的曲面，d是(S,V)的一个PL度量，那么存在一个PL度量d^*，和度量d离散共形等价，诱导离散高斯曲率为常数$2\pi\chi(S)/|V|$。这样的PL度量彼此相差一个整体缩放系数。

由此，我们在离散的情形下证明了曲面微分几何最为根本的定理：单值化定理。

欧氏度量的Teichmuller空间

(S,V)上的两个PL度量d和d'等价，如果存在一个等距变换$h:(S,V,d)\to(S,V,d')$，同时h和(S,V)到自身的恒同变换同伦。(S,V)上所有PL度量的等价类构成PL度量的Teichmuller空间:

$$T_{pl}(S,V)=\{d|d \text{ a PL metric on (S,V)}\}/\text{isometry}\cong id$$

Troyanov曾经证明$T_{pl}(S,V)$和$\mathbb{R}^{-3\chi(S-V)}$拓扑同胚。

我们下面构造Teichmuller空间$T_{pl}(S,V)$的局部坐标卡，从而证明$T_{pl}(S,V)$是一个实解析流形。假设$\mathcal{T}$是(S,V)的一个三角剖分，其边长函数

$$\Phi_{\mathcal{T}}:\mathbb{R}_{\Delta}^{E(\mathcal{T})}\to T_{pl}(S,V)$$

给出了局部坐标，这里定义域

$$\mathbb{R}_{\Delta}^{E(\mathcal{T})}=\{x\in\mathbb{R}^{E}>0|x(e_i)+x(e_j)>x(e_k),\ e_i,e_j,e_j \text{ from a face}\}$$

是一个凸集合，并且是单射。我们用$\mathcal{P}(\mathcal{T})$来表示$\Phi_{\mathcal{T}}$的像集。那么$(\mathcal{P}(\mathcal{T}),\Phi_{\mathcal{T}}^{-1})$构成了$T_{pl}(S,V)$的一个局部坐标卡。

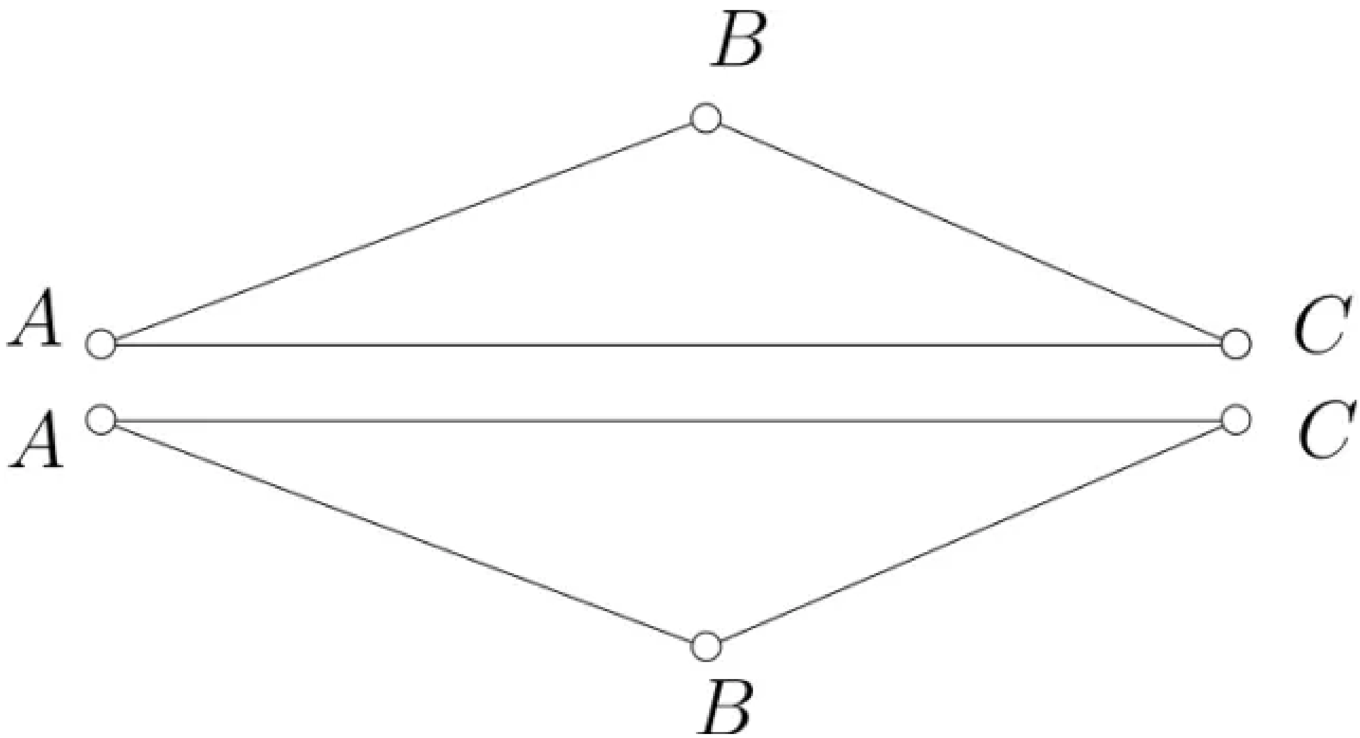


图6. 几何三角剖分。

如图6所示，我们取一个钝角三角形，将其双重覆盖，得到一个拓扑球面，带有三角剖分$\mathcal{T}$和PL度量d。如果我们将边AC进行Edge Swap，得到新的三角剖分$\mathcal{T}'$，那么在PL度量d下，$\mathcal{T}'$为Delaunay三角剖分；如果我们对边BC进行Edge Swap，那么在PL度量d下，新的三角剖分不是几何的。这意味着，

$$\mathcal{P}(\mathcal{T})\neq T_{pl}(S,V)。$$

由此，我们构造Teichmuller空间的一个图册，

$$\mathcal{A}=\{(\mathcal{P}(\mathcal{T}),\Phi_{\mathcal{T}}^{-1})|\mathcal{T}\ a\ triangluation of\ (S,V)\}。$$

给定(S,V)的两个三角剖分$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$，我们可以用一系列的Edge Swap操作从一个三角剖分$\mathcal{T}$变换成另外一个$\mathcal{T}'$。如图5所示，如果两个三角剖分相差一个Edge Swap，则边长变换为实解析的。由此可以，Teichmuller空间$T_{pl}(S,V)$是一个实解析流形。

Decareted 双曲度量的Teichmuller空间

令S为一封闭曲面，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}\subset S$为离散顶点集合，满足欧拉示性数为负，$\chi(S-V)<0$。我们在$(S,V)$上配备有限面积的完备双曲度量$d$，使得每个顶点成为无穷远的尖点（cusp）。我们在每个顶点v_i处放置一个horosphere，记为H_i。Horospere和双曲曲面交线∂H_i的长度记为w_i，曲面上的Decorated 双曲度量记为(d,w)，这里$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$。两个Decorated曲度量(d,w)和(d',w')等价，如果存在一个等距变换

$$h:(S,V,d,w)\rightarrow(S,V,d',w'),$$

同时h和(S,V)到自身的恒同变换同伦，同时保持horospheres。(S,V)上所有Decorated双曲度量的等价类构成Teichmuller空间$\mathcal{T}_D(S,V)$。

同样，我们可以构造Teichmuller空间$\mathcal{T}_D$的局部坐标系。固定(S,V)的一个三角剖分$\mathcal{T}$，Penner的λ长度给出了映射$\Psi_\mathcal{T}:\mathbb{R}^{E(\mathcal{T})}\rightarrow\mathcal{T}_D$。令$e_i,e_j,e_k$构成$\mathcal{T}$的一个面，我们构造一个Decorated 双曲三角形，具有边长

$$2\ln x(e_i),2x(e_j),2\ln x(e_k),$$

我们再将所有这些Decorated 双曲三角形沿着公共边等距粘贴起来，就得到一个Decorated双曲度量(d,w)。

我们考虑(S,V)上所有具有有限面积的完备双曲度量的Teichmuller空间$\mathcal{T}_\mathcal{H}(S,V)$，这样我们得到两个Teichmuller空间之间的关系：

$$\mathcal{T}_D=\mathcal{T}_\mathcal{H}\times\mathbb{R}^n_{>0}.$$

在双曲曲面(S,V,d)上，H_i是以尖点$v_i\in V$为球心的Horospere。我们变动∂H_i的长度，从w_i变成了$w_i'=w_ie^t$，那么$t=d(\partial H_i,\partial H_i')$，是边界$\partial H_i$和$\partial H_i'$之间的双曲距离。由此，我们得到如果$\Psi_\mathcal{T}(x)=[(d,w)]$，那么

$$\Psi_\mathcal{T}(e^tx)=[(d,e^{-t}w)].$$

欧氏Delaunay三角剖分

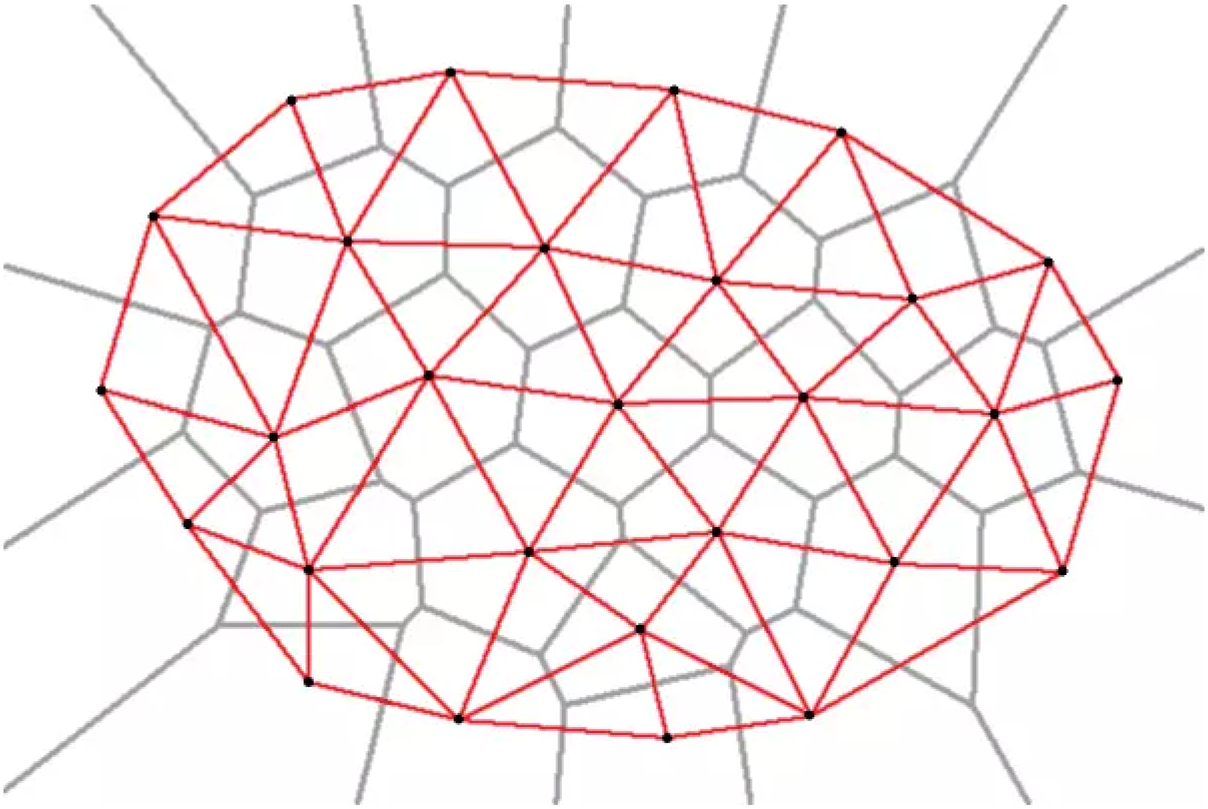


图1. Delaunay三角剖分，对偶的Voronoi Diagram。

我们可以用距离来定义Delaunay三角剖分。如图1所示，我们可以在离散曲面上定义测地Voronoi Diagram，

$$M = \bigcup_{v_i \in V} W(v_i),$$

这里Voronoi胞腔

$$W(v_i) = \{p \in M | d_{\mathbf{g}}(v_i, p) \le d_{\mathbf{g}}(v_j, p), \forall v_j \in V\},$$

这里$d_{\mathbf{g}}(\cdot, \cdot)$代表测地距离。测地Voronoi Diagram的对偶被称为是测地Delaunay三角剖分。可以证明，通常对于一般（generic）的多面体度量，Delaunay三角剖分存在并且唯一。反之，给定带顶点曲面(S, V)一个三角剖分$\mathcal{T}$，则必然存在(S, V)的一个平直度量d，使得$\mathcal{T}$在d下成为Delaunay三角剖分。（例如，我们令$\mathcal{T}$所有的边长为1，如此得到的d即可。）

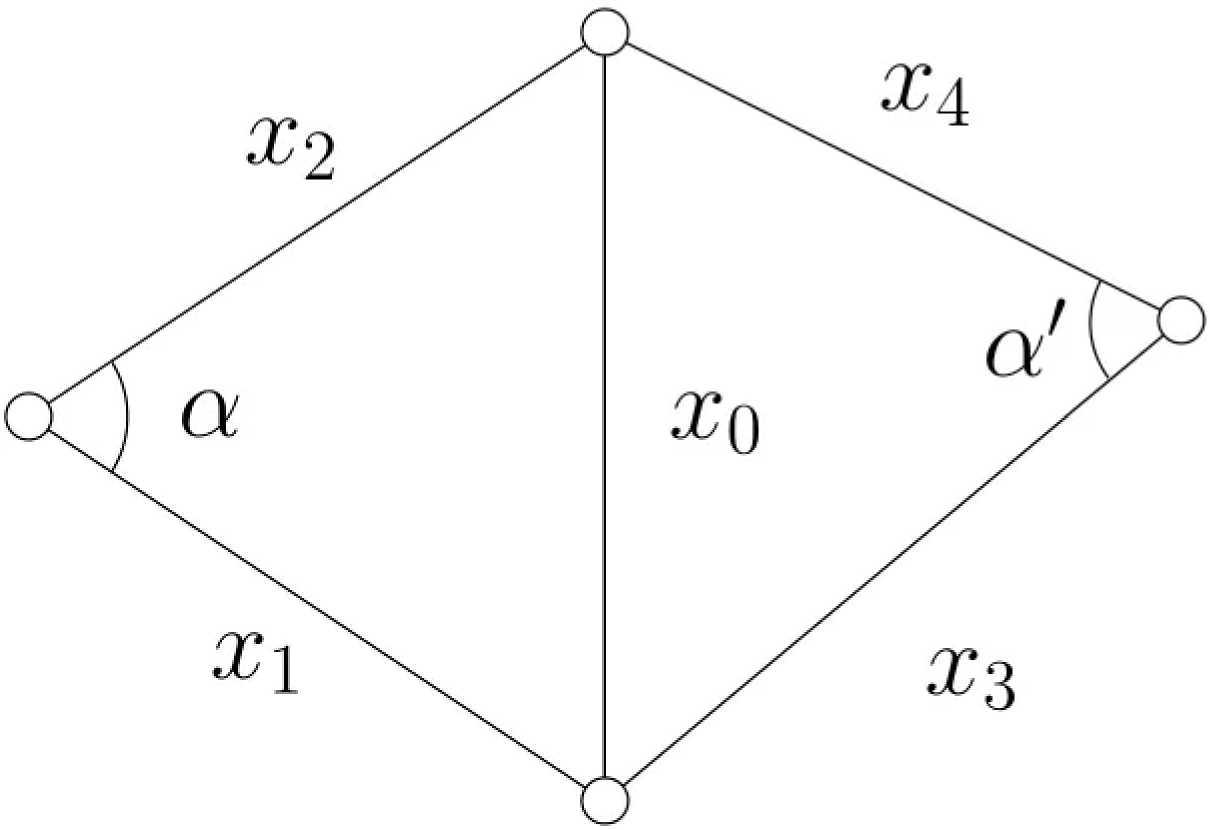


图2. Delaunay三角剖分的条件。

图2显示了Delaunay三角剖分的等价条件：对于每一条内边，其对角和不大于π，意即

$$\alpha+\alpha'\leq\pi,$$

这等价于

$$\cos\alpha+\cos\alpha'\geq 0,$$

用边长表示

$$\frac{x_1^2+x_2^2-x_0^2}{2x_1x_2}+\frac{x_3^2+x_4^2-x_0^2}{2x_3x_4}\geq 0$$

我们可以证明，上述等式蕴含着三角形不等式：固定三角剖分$\mathcal{T}$，给定边长函数$x:E(\mathcal{T})\to\mathbb{R}_{>0}$，任意一条边满足上式，那么在任意一个面上，三角形不等式成立。

双曲Delaunay三角剖分

令S为一封闭曲面，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}\subset S$为离散顶点集合，满足欧拉示性数为负，$\chi(S-V)<0$。我们在$(S,V)$上配备有限面积的完备双曲度量$d$，使得每个顶点成为无穷远的尖点（cusp）。我们在每个顶点v_i处放置一个horosphere，记为H_i。Horospere和双曲曲面交线∂H_i的长度记为w_i，曲面上的Decorated 双曲度量记为(d,w)，这里$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$。

我们考虑紧曲面

$$X_w = (S, V, d) - \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{int}(H_i(w))$$
，

这里$\mathrm{int}(H_i(w))$为Horosphere的内部。我们定义Voronoi胞腔分解，

$$X_w = \bigcup_{i=1}^{n} R_w(i)$$
，

这里Voronoi胞腔定义为

$$R_w(i) = \{p \in X_w | d(p, \partial H_i(w)) \leq d(p, \partial H_j(w)), \forall j\}$$。

X_w上的一条正交测地线（orthogeodesic）是从∂X_w到∂X_w的测地线，同时和边界∂X_w垂直。X_w的Voronoi胞腔分解也是(S, V, d)的胞腔分解，其对偶的三角剖分$\mathcal{T}(d, w)$被称为是X_w的Decorated 双曲Delaunay三角剖分，其中每条边都是连接两个尖点的正交测地线。

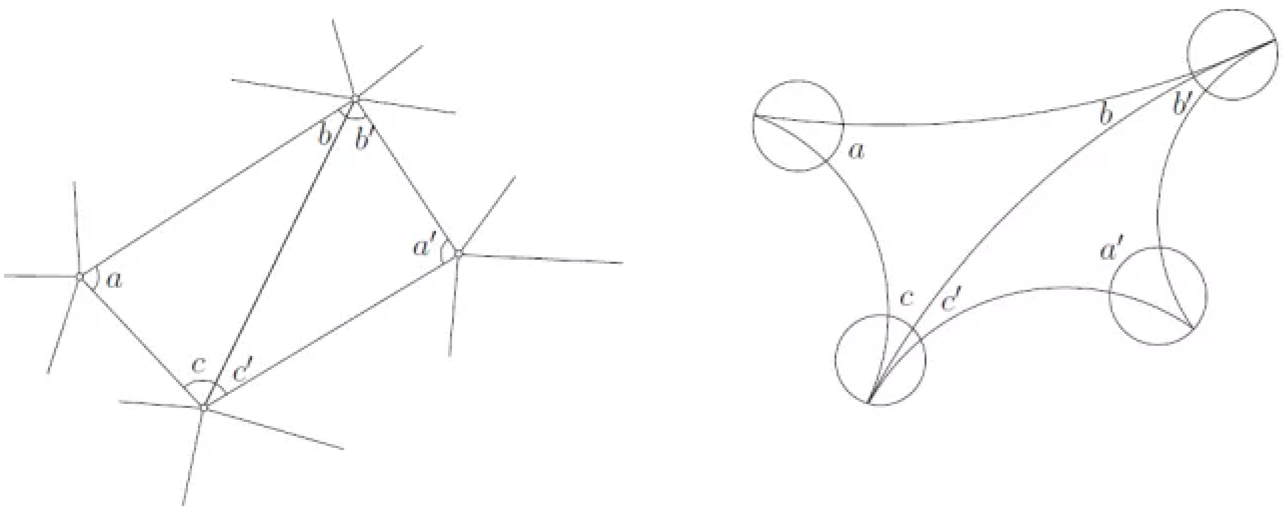


图3. 欧氏和双曲Delaunay三角剖分。

等价地，我们也可以用角度来定义Delaunay三角剖分。如图3所示，在欧氏度量下和Decorated双曲度量下，一个三角剖分是Delaunay的充分必要条件是：对于任意一对相邻的三角形，其角度满足不等式

$$a + a' \leq b + b' + c + c'$$。

我们用Penner's λ长度，利用Decorated双曲余弦定理，上式等价于

$$\frac{x_0}{x_1 x_2} + \frac{x_0}{x_3 x_4} \leq \frac{x_1}{x_0 x_2} + \frac{x_2}{x_0 x_1} + \frac{x_4}{x_0 x_3} + \frac{x_3}{x_0 x_4},$$

由此我们得到

$$\frac{x_1^2+x_2^2-x_0^2}{2x_1x_2}+\frac{x_3^2+x_4^2-x_0^2}{2x_3x_4}\geq 0,$$
这和欧氏的Delaunay条件完全等价。

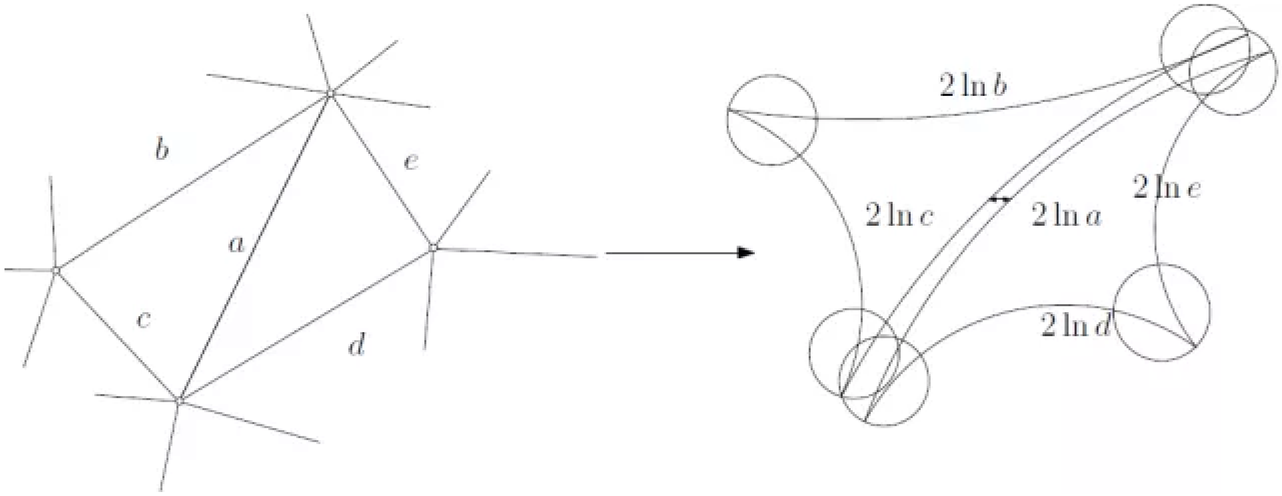


图4. 欧氏度量到decorated hyperbolic 度量的转换，$(l_i,l_j,l_k)\mapsto(2\ln l_i,2\ln l_j,2\ln l_k)$。

我们可以直接证明，图4所示的从欧氏度量到decorated hyperbolic 度量的变换将欧氏Delaunay三角剖分映成双曲Delaunay三角剖分。

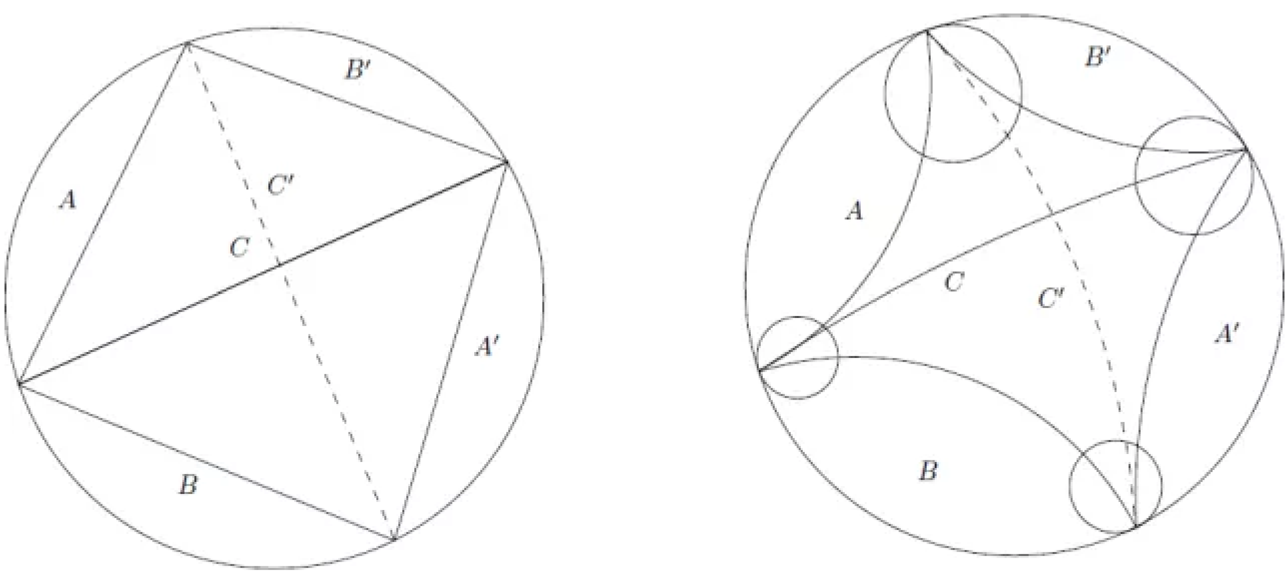


图5. 欧氏和双曲的Ptolemy等式。

在特殊情况下，同样的欧氏度量，会有两个Delaunay三角剖分，这时存在两个相邻的三角形，四个顶点共圆，如图4左帧所示。这时，边长满足所谓的Ptolemy等式：

$$CC'=AA'+BB',$$

这两个Delaunay三角剖分相差一个对角线对换。那么，欧氏度量对应的双曲度量的Delaunay三角剖分也不唯一，彼此也相差一个对角线对换，如图5右帧所示，双曲的λ-长度也满足Ptolemy等

式。

Teichmuller空间之间的微分同胚

我们首先对PL度量的Teichmuller空间进行胞腔分解。首先定义胞腔

$$D_{pl}(\mathcal{T}) = \{[d] \in T_{pl}(S,V) |\ \mathcal{T} \text{ is Delaunay w.r.t. } d\}$$。

我们需要证明D_{pl}是一个单联通的胞腔。我们将边长$x(e)$坐标转换成Rivin坐标$y(e)$，如图2所示，每个边的Rivin坐标是对角和，$y(e) = \alpha + \alpha'$。$(S, V, , \mathcal{T}, d)$的边长可以被对应的Rivin坐标在相差一个放缩系数的情况下所决定。因此，

$$D_{pl}(\mathcal{T}) = \{y(e) \in (0,\pi) | e \in E(\mathcal{T})\} \times \mathbb{R}^E_{>0}$$

是一个凸集。D_{pl}是一个单联通的胞腔。Teichmuller空间的胞腔分解，

$$T_{pl}(S,V) = \bigcup_{\mathcal{T}} D_{pl}(\mathcal{T})$$

。

同样，我们可以构造Decorated双曲度量Teichmuller空间的胞腔分解，

$$T_D(S,V) = \bigcup_{\mathcal{T}} D(\mathcal{T})$$

，

这里胞腔

$$D(\mathcal{T}) = \{(d,w) \in T_D(S,V) | \mathcal{T} \text{ is Delaunay w.r.t. } (d,w)\}$$。

我们用Penner的λ长度来建立两个胞腔之间的同胚，

$$A_{\mathcal{T}} = \Psi_{\mathcal{T}} \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1} : D_{pl}(\mathcal{T}) \to D(\mathcal{T}),\ x(e) \mapsto 2\ln\ x(e)$$

因为Penner的λ长度映射将欧氏Delaunay三角剖分映成Decorated双曲Delaunay三角剖分，并且Delaunay性质蕴含三角形不等式，因此$A_{\mathcal{T}}$是微分同胚。

假设三角剖分$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$相差一个Edge Swap，考察一个PL度量$[d] \in D_{pl}(\mathcal{T}) \cap D_{pl}(\mathcal{T}')$，则在$d$下$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$中存在四点共圆如图5所示。由Ptolemy等式，我们得到对于任意$x \in \Phi_{\mathcal{T}}^{-1}(D_{pl}(\mathcal{T}) \cap D_{pl}(\mathcal{T}'))$，

$$\Phi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{T}'}(x) = \Psi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{T}'}(x),$$

这等价于

$$A_{\mathcal{T}}|_{D_{pl}(\mathcal{T})\cap D_{pl}(\mathcal{T}')} = A_{\mathcal{T}'}|_{D_{pl}(\mathcal{T})\cap D_{pl}(\mathcal{T}')}。$$

由此，我们将分片同胚$A_{\mathcal{T}}$粘贴起来，构成一个整体同胚：

$$A : T_{pl}(S,V) \to T_D(S,V), \quad A|_{D_{pl}(\mathcal{T})} = A_{\mathcal{T}}|_{D_{pl}(\mathcal{T})}。$$

我们进一步可以证明，这个映射是全局C^1微分同胚。

存在性证明

我们现在来证明主要定理。首先我们构造一个映射：$F : \Omega_u \to \Omega_K$,

$$\Omega_u \stackrel{\exp}{\to} \{p\} \times \mathbb{R}^{|V|}_{>0} \to T_D(S,V) \stackrel{A^{-1}}{\to} T_{pl}(S,V) \stackrel{K}{\to} \Omega_K$$

这里定义域Ω_u是离散共形因子空间是欧氏空间中的超平面，

$$\Omega_u = \mathbb{R}^n \cap \left\{ \mathbf{u} | \sum_{i=1}^{n} u_i = 0 \right\},$$

值域Ω_K是离散曲率空间，

$$\Omega_K = \left\{ \mathbf{K} \in (-\infty, 2\pi)^n | \sum_{i=1}^{n} K_i = 2\pi\chi(S) \right\},$$

它们都是欧氏空间$\mathbb{R}^{n-1}$中的开集。

因为$A : T_{pl}(S,V) \to T_D(S,V)$是$C^1$映射，$K : T_{pl}(S,V) \to \mathbb{R}^n$是实解析的，因此$F$ 是C^1的。

我们首先证明映射$F : \Omega_u \to \Omega_K$是单射。我们来考察离散熵能量的凸性，

$$E(\mathbf{u}) = \int^{\mathbf{u}} \sum_{i=1}^{n} K_i du_i。$$

在优化过程中，三角剖分一直保持是Delaunay。每条Voronoi Diagram的边，都对应于Delaunay三角剖分的一条边$e \in E$，两条边的比值被称为是这条Delaunay边的权重$w(e)$，即为余切权重。Delaunay三角剖分保证边的权重非负$w(e) \geq 0$。

由此，我们定义曲面的离散Laplace-Beltrami算子Δ，给定任意一个定义在顶点集上的离散函数$f: V \to \mathbb{R}$，离散函数可以利用重心坐标线性拓展成分片线性函数，

$$\Delta f(v_i) = \sum_{v_j \sim v_i} w_{ij}(f(v_j) - f(v_i)),$$

通过直接计算我们可以证明，

$$\frac{1}{2}\mathbf{f}^T \Delta \mathbf{f} = \int_M |\nabla f|^2 dA,$$

由此我们证明离散Laplace-Beltrami算子是半正定矩阵，其零空间是直线，由向量$(1, 1, \cdots, 1)^T$生成。我们需要下面的引理：

引理 假设函数$f: \Omega \to \mathbb{R}$是定义在凸集Ω上的C^2严格凸函数，那么梯度映射$\mathbf{x} \mapsto \nabla f(\mathbf{x})$是单射。

假设存在$\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$，但是$\nabla f(\mathbf{x}_1) = \nabla f(\mathbf{x}_2)$。构造函数$g(t) = f((1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2)$。因为$\Omega$是凸集，线段$\{(1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2) | t \in [0, 1]\}$
则一阶导数

$$g'(t) = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \nabla f((1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2),$$

 二阶导数

$$g''(t) = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \frac{\partial^2 f((1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2)}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) > 0,$$

因此 $g'(0) < g'(1)$。但是另一方面，

$$g'(0) = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \nabla f(\mathbf{x}_1) = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \nabla f(\mathbf{x}_2) = g'(1)$$

矛盾。因此梯度映射为单射。

我们这里离散熵能量的海森矩阵（Hessian Matrix）就是离散Laplace-Beltrami算子，因此熵能量在定义域Ω_u上是严格凸的。另外，共形因子的定义域Ω_u是一个凸集。离散熵能量的梯度是当前曲率。因此，映射$\mathbf{u} \mapsto \nabla E(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u})$是单射。

接下来，我们再证明$F: \Omega_u \to \Omega_K$是满射。这·需要用到代数拓扑中的区域不变性定理。

定理：（Invariance of Domain）如果U是$\mathbb{R}^n$中的开集，$f: U \to \mathbb{R}^n$是连续单射，那么$V = f(U)$开集，f是U和V之间的同胚。

因为Ω_u，Ω_K都是n-1维的开集，F为连续单射，因此$F(\Omega_u)$是开集。我们需要证明$F(\Omega_u)$在Ω_K中是闭的。我们取一个序列$\{x_k\} \subset \Omega_u$，使得x_k离开Ω_u中所有紧集，欲证$F(x_k)$离开Ω_K中紧集。由Akiyoshi的一个结果，$\{p\} \times \mathbb{R}^n_{>0}$和$T_D(S, V)$相交于有限个胞腔，因此我们可以假设三角剖分$\mathcal{T}$固定。$x_k$离开$\Omega_u$中所有紧集，意味着存在一个顶点$v \in V$，$\lim_{k \to \infty} x_k(v) \to \infty$，其相邻顶点共形因子趋向于有限值。容易证明$\lim_{k \to \infty} K(v) \to 2\pi$。这证明了$F(\Omega_u)$在$\Omega_K$中是闭的，因此$\Omega_K = F(\Omega_u)$，$F: \Omega_u \to \Omega_K$为微分同胚。

总结

离散曲面曲率流解的存在性证明，最为困难之处在于三角剖分的动态变化。传统的算法，例如有限元方法，多是基于固定三角剖分进行分析。在我们的推导中，黎曼度量一直起到主导作用，三角剖分退为其次。这意味着组合结构应该为几何结构服务。

回顾以上证明过程，我们看到需要一些比较深入的双曲几何和Teichmuller 空间理论。虽然结论和算法貌似初等，但是其后面的理论基础却是非常现代而深奥，并且和连续理论所用的数学工具迥然不同。这显示了将连续理论推广成离散理论的内在难度。但是，为了适应计算机迅猛的发展，推广古典几何理论和建立离散理论已经成为时代的必然。

Reference

- X. Gu, R. Guo, F. Luo, J. Sun and T. Wu, A discrete Uniformization theorem for polyhedral surfaces I, Journal of Differential Geometry, 2016 (arXiv:1309.4175)

- X. Gu, R. Guo, F. Luo, J. Sun and T. Wu, A discrete Uniformization theorem for polyhedral surfaces II, Journal of Differential Geometry, 2016
  (arXiv:1401.4594)