

清华笔记：计算共形几何讲义 (18) 拟共形映射 (Quasi-Conformal Map)

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-04





图1. 曲面注册问题的描述。

在工程和医学实践领域，寻找曲面间满足特定的限制条件的高质量微分同胚，一直是最为根本的问题之一。研究曲面间映射的数学分支是拟共形映射理论，其主要内容是研究曲面间映射的表示，满足特定限制的映射的存在性和唯一性，在映射空间中的优化和变分，最优映射和全纯微分的内在关系等等。

例如图1所示，给定两张三维人脸曲面，上面标注着相应的特征点 $(S_1, \{p_k\}_{k=1}^n)$ 和 $(S_2, \{q_k\}_{k=1}^n)$ ，我们希望找到微分同胚 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ ，满足

$$\varphi(p_k) = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

同时此微分同胚尽量光滑，减小几何畸变。在通常情况下，满足这些限制的共形变换是不存在的。我们需要将共形映射拓广到一般的微分同胚，如图2所示的拟共形映射。

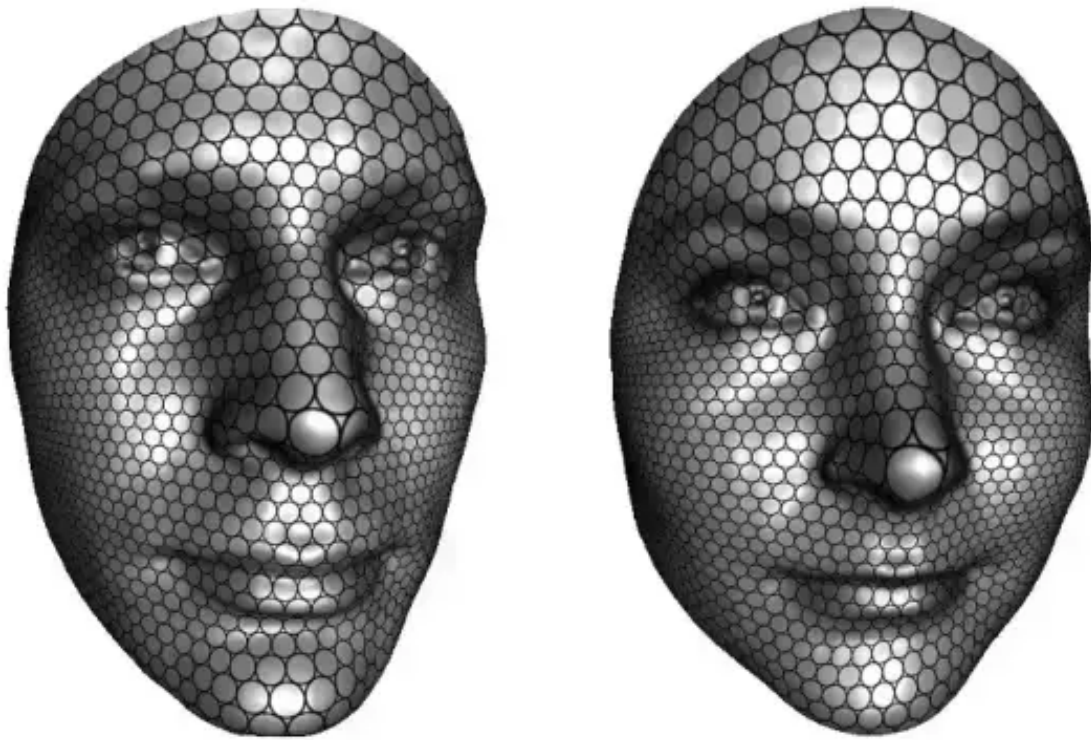


图2. 曲面间的拟共形映射。左帧曲面的每一个小圆盘区域都映射到右侧椭圆盘区域。椭圆域的偏心率和方向给出了Beltrami系数，Beltrami系数决定了映射。

拟共形映射

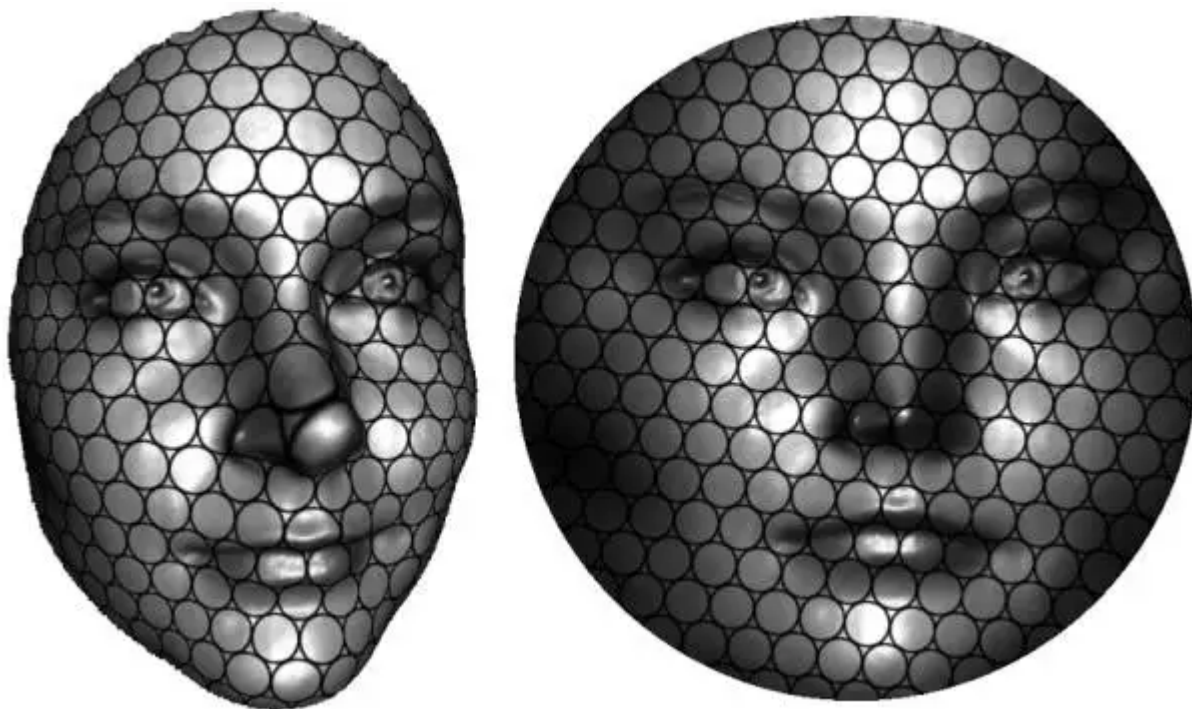


图3. 共形映射。

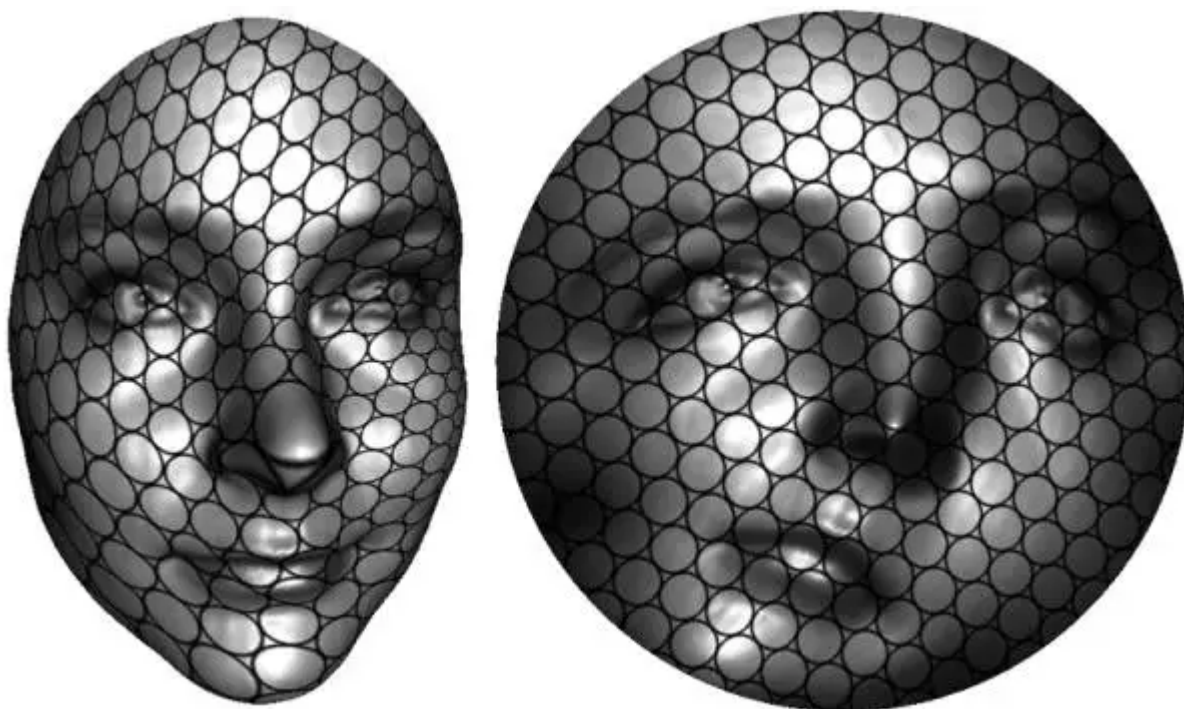


图4. 拟共形映射。

共形变换将曲面的无穷小圆映到无穷小圆，如图3所示；一般的微分同胚将无穷小椭圆映到无穷小圆，如图4所示。如果无穷小椭圆的偏心率有界，那么微分同胚被称为是拟共形映射。

我们考察复平面区域间的映射：

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad w = \varphi(z),$$

固定一点 $z \in \mathbb{C}$ ，其导映射给出了切平面间的线性映射 $d\varphi : T\mathbb{C}_z \rightarrow T\mathbb{C}_w$,

$$d\varphi = \varphi_z dz + \varphi_{\bar{z}} d\bar{z},$$

由此，我们定义Beltrami系数

$$\mu(z) := \frac{\partial\varphi(z)}{\partial\bar{z}} / \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}.$$

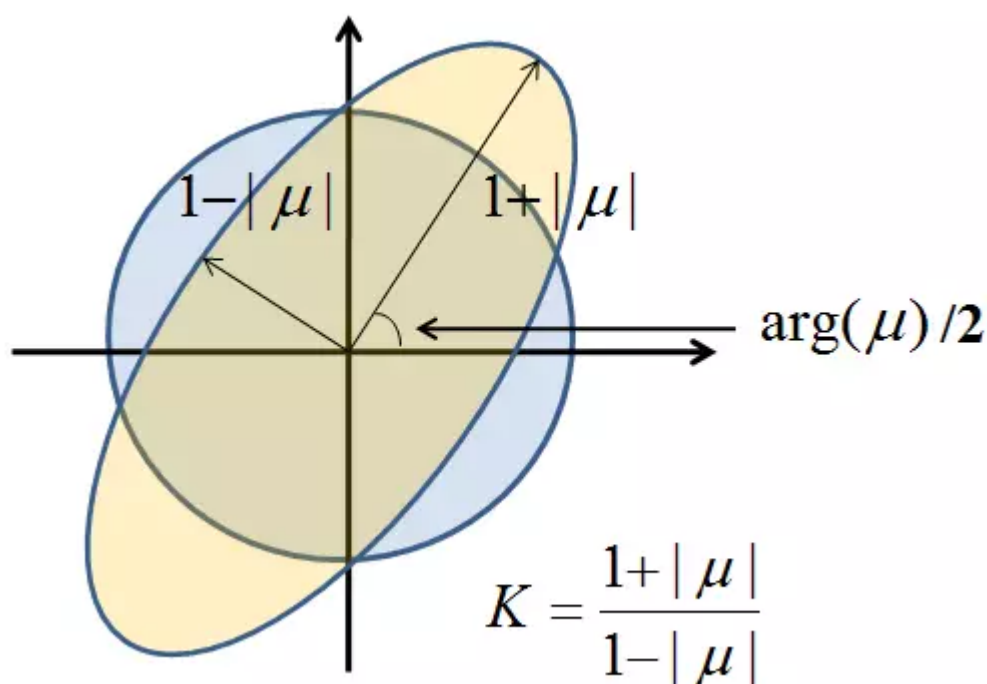


图5. Beltrami系数的几何意义。

微分同胚将无穷小椭圆映到无穷小圆，Beltrami系数的几何意义可以如下解释：无穷小椭圆的偏心率等于

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|},$$

无穷小椭圆的长轴和水平方向的夹角

$$\theta = \frac{1}{2} \arg \mu(z).$$

Beltrami系数和映射的Jacobi矩阵并不等价，Beltrami系数并不反映椭圆的面积大小，因此Beltrami系数的信息少于Jacobi矩阵的信息。但是，问题的关键是，我们可以通过映射的Beltrami系数完全复制出原来映射。换言之，如下的**广义黎曼映照定理**成立

定理（可测黎曼映照定理）假设 $\mu : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 是定义在单位圆盘上的可测复值函数， $\|\mu\|_\infty < 1$ ，那么存在单位圆盘到自身的同胚 $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ，使得Beltrami方程成立

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial\bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z},$$

并且不同的映射彼此相差一个单位圆盘上的Möbius变换，

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad |z_0| < 1.$$

这个定理可以用**辅助度量 (auxiliary metric)** 的方法证明，思路如下：

1. $\varphi : (\mathbb{D}, dzd\bar{z}) \rightarrow (\mathbb{D}, dwd\bar{w})$ 是拟共形映射，在其诱导的拉回度量为 $\varphi^*(dwd\bar{w})$ ，根据定义 $\varphi^*(dwd\bar{w}) = |dw|^2$ 。同样的映射，在拉回度量下

$$\varphi : (\mathbb{D}, \varphi^*(dwd\bar{w})) \rightarrow (\mathbb{D}, dwd\bar{w})$$

是等距变换。

2. 假设映射的Beltrami系数为 μ ，则其诱导的拉回度量为

$$\varphi^*(dwd\bar{w}) = dwd\bar{w} = |w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}|^2 = |w_z|^2 |dz + \mu d\bar{z}|^2,$$

那么辅助度量 $|dz + \mu d\bar{z}|^2$ 和拉回度量 $\varphi^*(dwd\bar{w})$ 共形等价，因此同样的映射在辅助度量下面成为共形映射：

$$\varphi : (\mathbb{D}, |dz + \mu d\bar{z}|^2) \rightarrow (\mathbb{D}, dwd\bar{w}).$$

根据经典的黎曼映照定理，这种映射存在，并且彼此相差一个莫比乌斯变换。

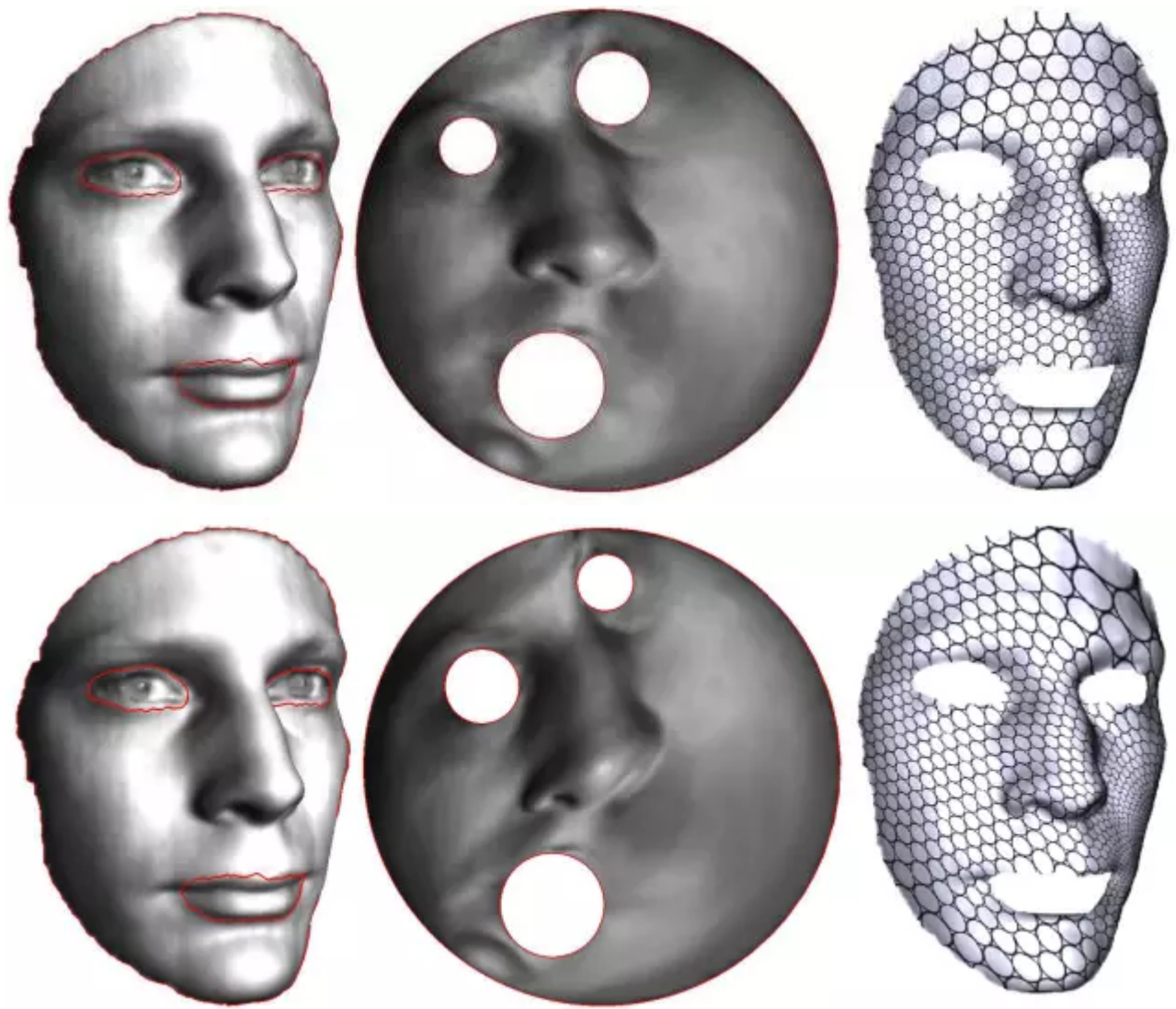


图6. 通过操纵Beltrami系数来控制曲面间的映射。

广义黎曼映照定理实际上将曲面间的微分同胚和源表面上的Beltrami系数之间建立了双射。固定两个带有一个边界的单联通曲面，它们之间所有的微分同胚关于莫比乌斯变换群的商空间，和源表面上所有Beltrami系数组成的函数空间一一对应。这样，我们就可以在Beltrami系数函数空间中做变分，从而操纵优化曲面间的微分同胚。图8就显示了这样一个例子，通过改变Beltrami系数，反解Beltrami方程，我们能够得到相应的微分同胚。

等温坐标

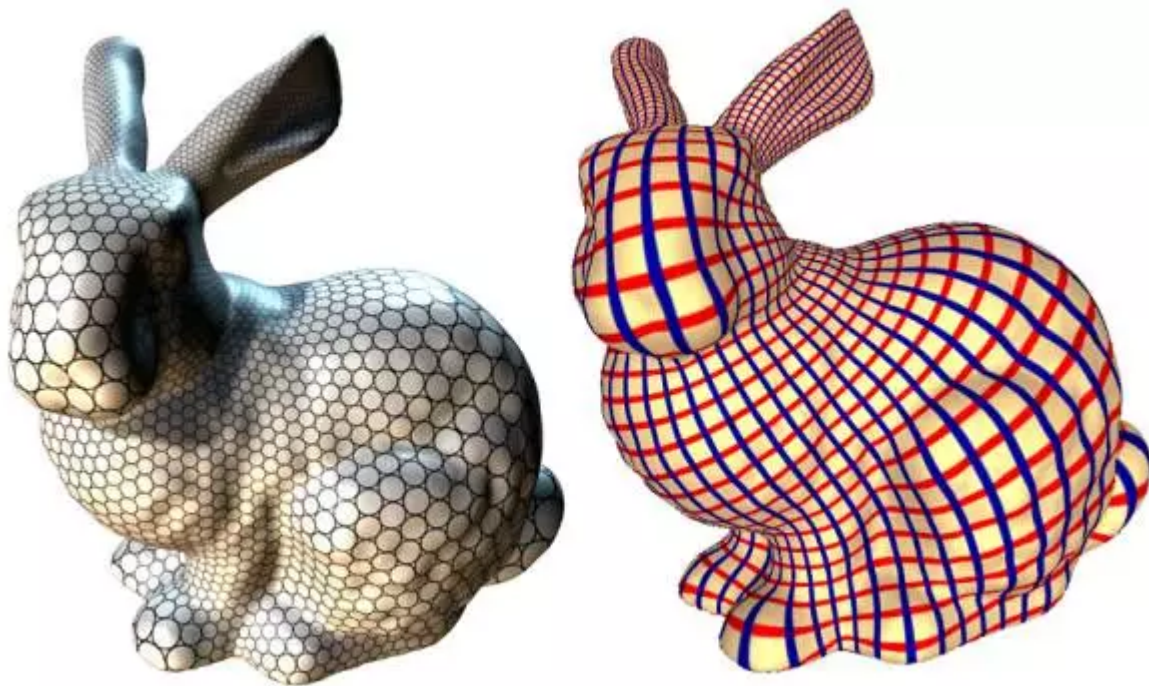


图7. 兔子曲面上的等温坐标。

流形无法用一个坐标系整体覆盖，只能被一族局部坐标系覆盖。局部坐标的选取具有很大的自由度，选取合适的局部坐标，可以简化微分算子，因而简化理论证明和实际计算。曲面上，最为常用的一种特殊局部坐标系，叫做**等温坐标**。假设曲面 S 配备有黎曼度量 \mathbf{g} ，开集 $U \subset S$ 的局部坐标为 (x, y) ，使得度量张量具有表示形式

$$\mathbf{g}(x, y) = e^{2\lambda(x, y)}(dx^2 + dy^2),$$

这里 $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在开集上的函数，那么 (x, y) 被称为是等温坐标，或者等温参数。这意味着曲面的黎曼度量和平面的欧式度量共形等价。

在等温参数下，Laplace-Beltrami算子具有极为简洁的形式：

$$\Delta_{\mathbf{g}} = \frac{1}{e^{2\lambda(x, y)}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

曲面高斯曲率的公式得到极大简化：

$$K(x, y) = -\Delta_{\mathbf{g}} \lambda(x, y).$$

等温坐标的存在性是一个饶有兴味的问题，对于面上的任意一点 $p \in S$ ，存在开集 $U(p) \subset S$ ，使得此开集内存在等温坐标。

假设度量曲面 (S, \mathbf{g}) 可定向，那么曲面上所有的等温坐标构成曲面的一个图册，并且局部坐标之间的变换是共形的，平面上的共形映射等价于全纯映射，因此等温坐标构成的图册是一个共形图册。换言之，面上的度量自然诱导了一个共形结构，即和黎曼度量相容的共形结构。由此我们得出结论：**所有可定向的度量曲面都是黎曼面。等温坐标架设了黎曼面理论和曲面微分几何之间的桥梁。**

下面，我们用拟共形映射理论来证明等温参数的局部存在性。假设曲面 (S, \mathbf{g}) 的局部坐标为 (x, y) ，黎曼度量的局部表示为

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(x, y) & F(x, y) \\ F(x, y) & G(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

几何直观上，如图2所示，我们在曲面上放上一个“无穷小测地圆域”，用非常密集的彼此相切的测地圆来填充曲面，每个小测地圆满足方程

$$Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2 = \varepsilon^2,$$

那么在参数平面上， (dx, dy) 的轨迹是一个小椭圆，椭圆的偏心率 ρ ，长轴和水平方向的夹角 θ 都可以由度量矩阵系数直接算出。由此，我们可以构造Beltrami系数 $\mu = \rho e^{i2\theta}$ 。令 $z = x + iy$ ， $w = u + iv$ ，解Beltrami方程

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} = \mu \frac{\partial z}{\partial w},$$

根据广义黎曼映照定理，方程的解存在。映射 $\varphi: w \rightarrow z$ 将 w 平面上的小圆映到 z 平面上的小椭圆，椭圆的偏心率为 ρ ，长轴方向为 θ 。如果我们用 $w = u + iv$ 作为曲面的局部参数，则表面上的无穷小圆映到 w 平面上的无穷小圆。换言之， w 是曲面的等温参数。

通过直接计算，我们可以得到

$$ds = \lambda |dz + \mu d\bar{z}|,$$

这里共形因子为

$$\lambda^2 = (E + G + 2\sqrt{EG - F^2})$$

Beltrami系数为

$$\mu = \frac{E - G + 2iF}{E + G + 2\sqrt{EG - F^2}},$$

Beltrami系数的模小于1，Beltrami方程的解是一个微分同胚。

总而言之，定向表面上的黎曼度量决定了一个共形结构。

从共形结构到黎曼度量

反过来，我们可以由共形结构来构造度量。首先，我们从曲面的共形图册中选取一个局部有限的开覆盖 $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$ ，即表面上的每一个点被有限个开集覆盖。然后，我们构造关于这个有限开覆盖的光滑单位分解 $\{f_\alpha: U_\alpha \rightarrow [0, 1], \alpha \in I\}$ ，满足紧支集的条件，

$$\forall \alpha \in I, \text{Supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha,$$

和单位分解的条件

$$\forall p \in S, \sum_{\alpha} f_\alpha(p) = 1.$$

在每个开集 U_α 上选取参数平面上的欧式度量，记为 \mathbf{g}_α ，因为黎曼度量的凸组合还是黎曼度量，我们得到一个全局定义的度量，

$$\mathbf{g} = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha},$$

可以看出，共形图册的局部坐标就是这一度量的等温坐标。由此，我们看到，给定共形结构，我们可以非常轻而易举地构造与之匹配的黎曼度量。

Teichmuller 映射

我们考虑两个拓扑同胚的黎曼面之间的所有微分同胚，这些微分同胚可以由同伦等价进行分类，这些同伦等价类构成一个结构复杂的非交换群，被称为是**曲面映射类群**（Mapping Class Group）。我们固定一个同伦类，进一步考察这一类中所有的微分同胚。自然，同伦等价的微分同胚有无穷多个，那么在这无穷多个微分同胚中，**是否存在某种意义下的极值映射？这种极值映射是否唯一？它的几何特征如何刻画？**Teichmuller理论对这些问题给出了完美的解答。

Teichmuller理论简洁优美。我们这里关心的是微分同胚所带来的角度的畸变。从以前讨论（拟共形映射1,2）我们知道，微分同胚将源表面上的无穷小椭圆映成目标表面上的无穷小圆，映射所诱导的角度畸变由无穷小椭圆的偏心率（长轴短轴之比）来刻画。**Teichmuller理论保证在每一个同伦类中，必定存在唯一的微分同胚，它使得无穷小椭圆偏心率的最大者最小**，我们姑且称这种映射为Teichmuller映射。在一般情形，**在任一同伦类中，Teichmuller映射唯一**。更进一步，Teichmuller映射具有非常简洁优美的几何解释。

我们首先将Beltrami系数的概念推广到一般黎曼面上。假设 $\varphi: (\mathcal{S}, \{z_\alpha\}) \rightarrow (\mathcal{T}, \{w_\beta\})$ 是曲面间的映射，它借用黎曼面的复坐标的局部表示为： $w_\beta(z_\alpha)$ 。那么由通常定义，这个局部表示的Beltrami系数为：

$$\mu_\alpha = \frac{\partial w_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} / \frac{\partial w_\beta}{\partial z_\alpha}$$

我们将其拓展成所谓的Beltrami微分

$$\mu := \mu_\alpha \frac{d\bar{z}_\alpha}{dz_\alpha}$$

当我们转换成另外的局部坐标系 (z_γ) ，Beltrami微分相应的表示变化为，

$$\mu = \mu_\alpha(z_\alpha) \frac{d\bar{z}_\alpha}{dz_\alpha} = \mu_\gamma(z_\gamma) \frac{d\bar{z}_\gamma}{dz_\gamma}$$

由此我们得到关系方程：

$$\mu_\alpha(z_\alpha) = \mu_\gamma(z_\gamma(z_\alpha)) \overline{\left(\frac{\partial z_\gamma}{\partial z_\alpha}\right)} / \left(\frac{\partial z_\gamma}{\partial z_\alpha}\right).$$

Teichmuler映射极小化Beltrami微分的 L^∞ 模，

$$\min_{\mu} \|\mu\|_\infty.$$

我们首先来考察最为简单的情形：拓扑四边形。给定一张单连通的带度量的光滑曲面 $(\mathcal{S}, \mathbf{g})$ ，假设其边界 $\partial\mathcal{S}$ 光滑。我们在其边界上指定四个角点

$$P = \{p_0, p_1, p_2, p_3\} \subset \partial\mathcal{S},$$

那么我们称 $(\mathcal{S}, \mathbf{g}, P)$ 为一个拓扑四边形。根据共形几何中的极值长度理论，存在一个共形映射，将拓扑四边形映成平面上的标准长方形，这个长方形的长宽之比是由曲面的几何以及四个角点所确定，被称为是曲面的共形模。

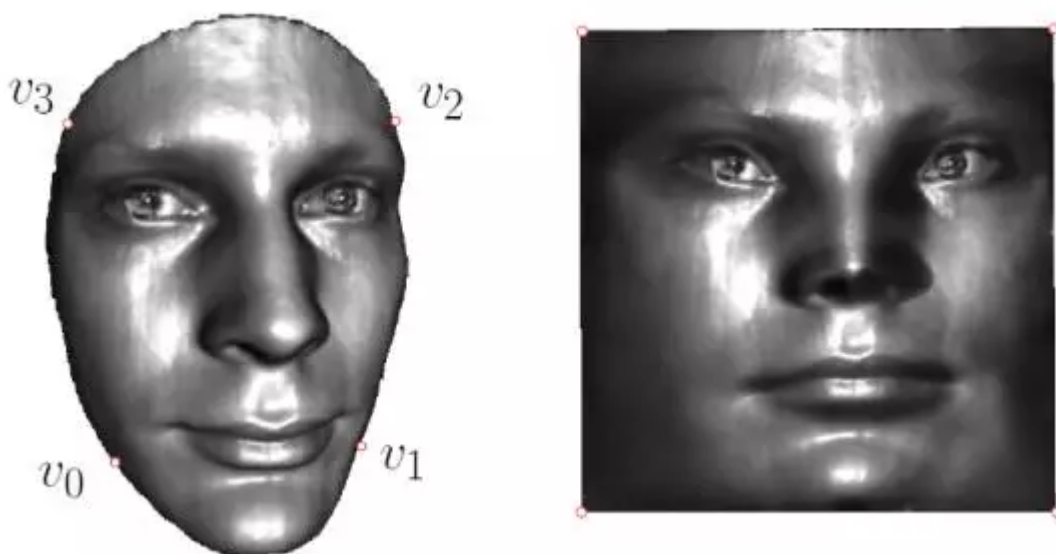


图2. 拓扑四边形的共形模。

两个拓扑四边形曲面之间的Teichmuller映射，简单得无法再简单了，恰好就是它们所对应的长方形之间的线性映射！这一事实，在Teichmuller之前很早就被数学家发现了。

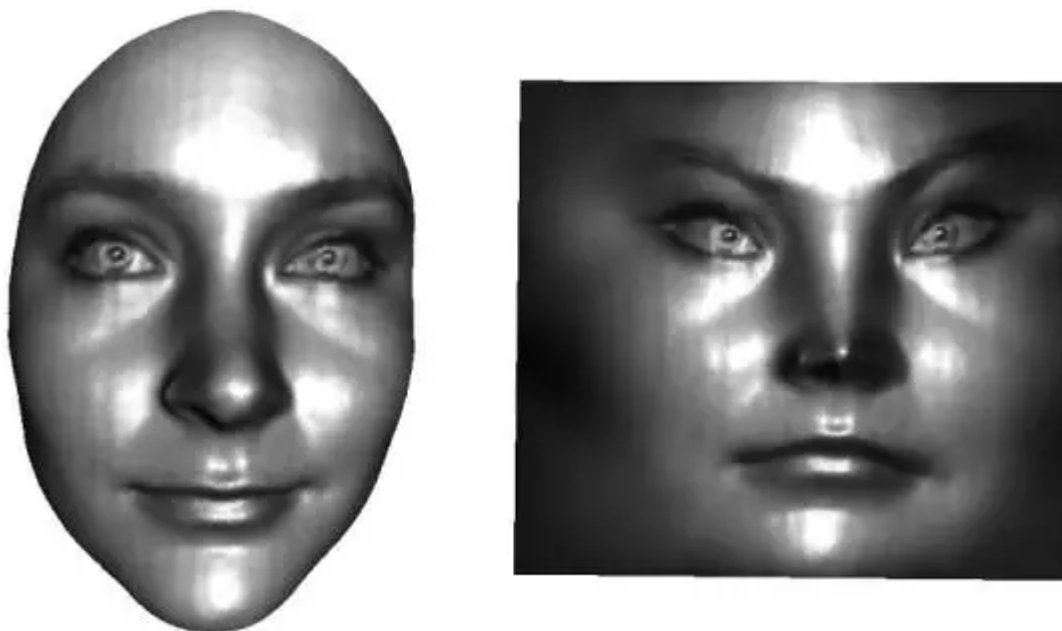


图3. 拓扑四边形之间的Teichmuller映射是长方形间的线性映射。

我们再来考察亏格为一的曲面情形。根据曲面单值化定理，黎曼面可以共形地，周期性地映到平面上，换言之，映到平环上 \mathbb{E}^2/Γ ，这里格群 $\Gamma := \{ma + nb | a, b \in \mathbb{C}\}$ 。平环的一个基本域是一个平行四边形。曲面间的Teichmuller映射由平行四边形之间的线性映射给出。由此可见，Teichmuller映射都是在曲面的某个共形的平直度量下的线性映射。Teichmuller的伟大之处在于，他将这一简单情形系统地推广到了拓扑复杂曲面的情形。他天才地将Teichmuller映射和黎曼面上的全纯二次微分联系在一起，从而彻底澄清了极值映射的内在几何意义。

首先，我们介绍黎曼面上的全纯二次微分的概念。如果 Φ 是黎曼面上的一个全纯二次微分，在局部复坐标 (z_α) 下，具有局部表示：

$$\Phi = \varphi_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha^2$$

这里 $\varphi_\alpha(z_\alpha)$ 是全纯函数。当我们转换到另一个局部坐标 (z_β) 下，全纯二次微分的局部表示相应的变化为

$$\Phi = \varphi_\beta(z_\beta) dz_\beta^2$$

由此我们得到关系式：

$$\varphi_\alpha(z_\alpha) = \varphi_\beta(z_\beta(z_\alpha)) \left(\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha} \right)^2.$$

假设在离散点 $\{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ 处， $\Phi(z_i) = 0$ ，这些点被称为是全纯二次微分的零点。根据高斯-博内定理，零点的个数等于 $4g - 4$ ，这里 g 是曲面的亏格。任取一个正常点 $p \in S$ ， $\Phi(p) \neq 0$ ，取此点的一个开邻域 $U \subset S, p \in U$ ，我们定义映射 $\zeta : U \rightarrow \mathbb{C}$ ，

$$\zeta(q) = \int_p^q \sqrt{\Phi}$$

如此我们为曲面定义了局部坐标，所谓的由全纯二次微分 Φ 所确定的自然坐标。曲面上的一条曲线 $\gamma \subset S$ ，如果在任意自然坐标下，都是水平线，那么我们称这条曲线为水平轨道 (horizontal

trajectory)。相类似的，我们可以定义铅直轨道 (vertical trajectory)。过零点的轨道被称为是临界轨道(critical trajectory)。

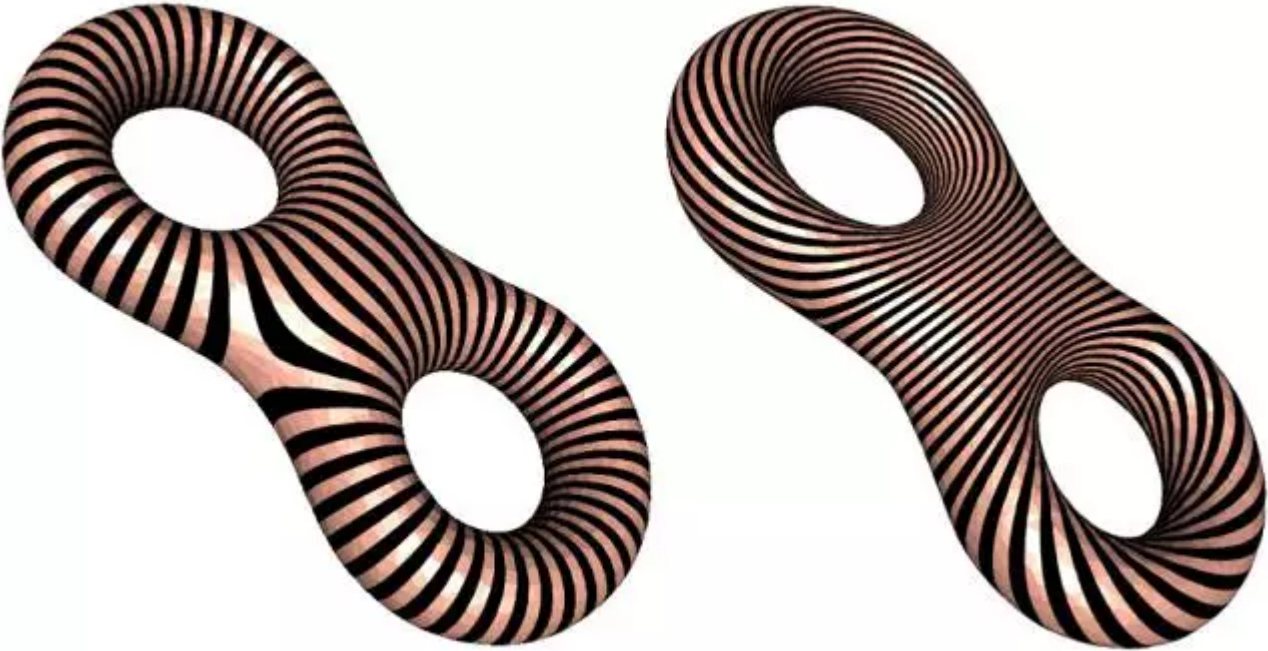


图4. 全纯二次微分的水平轨道(雷娜，郑晓朋计算绘制)。

曲面上所有的全纯二次微分构成一个线性空间，根据黎曼-罗赫定理，这个空间的维数是实的 $6g - 6$ 维。

给定两张黎曼面，和映射的同伦类，存在唯一的Teichmuller映射 $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ 。根据Teichmuller理论，存在源曲面上的全纯二次微分 Φ_S ，和目标曲面上的全纯二次微分 Φ_T ， φ 把 Φ_S 的轨道映到 Φ_T 的轨道，把 Φ_S 的零点映到 Φ_T 的零点。我们用 Φ_S 的自然坐标和 Φ_T 的自然坐标，则Teichmuller映射的局部表示为线性映射，把水平轨迹处处均匀拉伸，保持铅直轨迹不变。换言之，在特殊的共形平直度量下，Teichmuller映射就是线性映射；但是这种特殊的共形平直度量取决于两个曲面的几何，和曲面映射的同伦类。

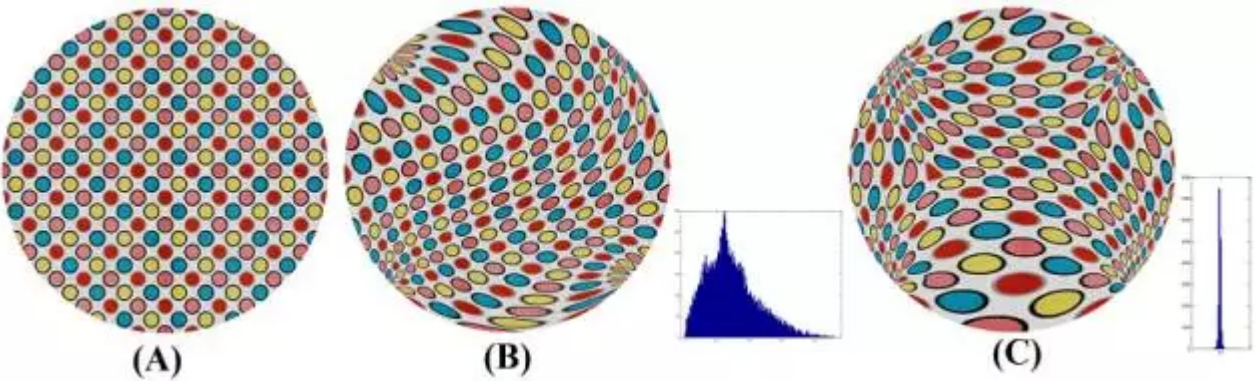


图5. 一般微分同胚(B)和Teichmuller映射(C)对比(雷乐铭计算绘制)。

Teichmuller的Beltrami微分具有特殊形式：

$$\mu = k \frac{\bar{\Phi}_S}{\Phi_S}$$

一般的微分同胚把源表面上的无穷小圆映到目标表面上的无穷小椭圆，这些无穷小椭圆的偏心率彼此不同；Teichmuller映射将源表面上的无穷小圆映到目标表面上的无穷小椭圆，这些无穷小椭圆具有相同的偏心率。如图5所示，B显示了一个微分同胚，及其无穷小椭圆偏心率的直方图；C显示了一个Teichmuller映射，及其无穷小椭圆偏心率的直方图。我们看到，Teichmuller映射所诱导的无穷小椭圆具有相同的偏心率。

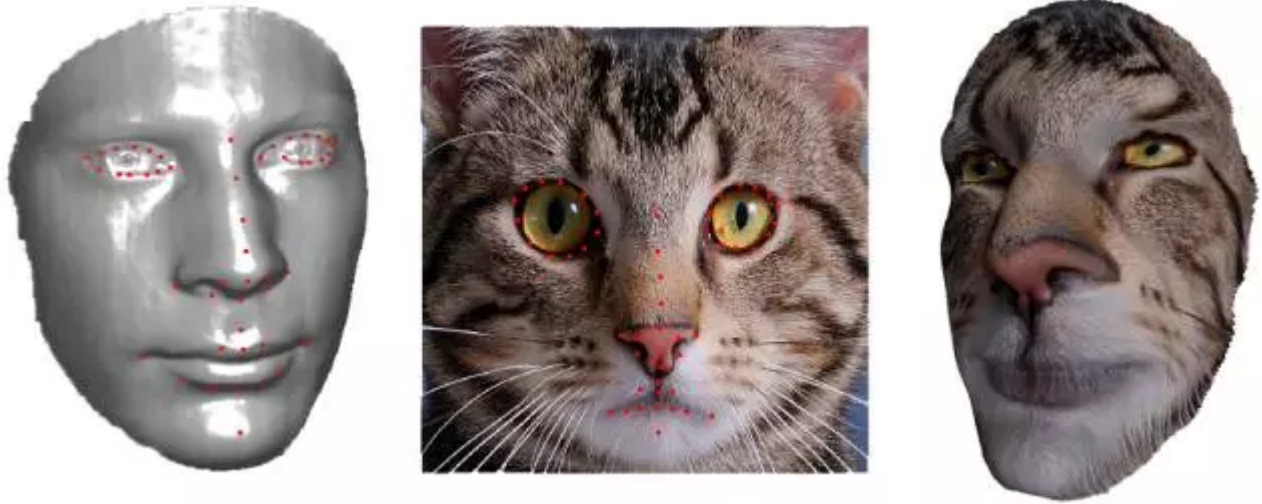


图6. Teichmuller映射应用于纹理贴图(雷乐铭计算绘制)。

请长按下方二维码，选择“识别图中二维码”，即可关注。



【老顾谈几何】邀请国内国际著名纯粹数学家，应用数学家，理论物理学家和计算机科学家，讲授现代拓扑和几何的理论，算法和应用。回复“**目录**”，可以浏览往期精华。