清华笔记：计算共形几何讲义 （22）离散曲面曲率流 （Discrete Surface Ricci Flow）IV

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-18

设计黎曼度量又是计算机图形学、计算机视觉、计算力学、医学图像等领域最为基本的问题之一。许多工程中的关键问题可以归结为设计一种特殊的黎曼度量。离散曲面Ricci流是通过曲率来设计黎曼度量的有力武器。迄今为止，这是唯一的一种方法，既有严密的理论基础，又有高效稳定的算法。

在前述章节中，我们证明了离散曲面曲率流解的存在性、唯一性，其对应熵能量的凸性及其几何解释。这一讲，我们来证明离散曲率流所得到的离散共形变换收敛到光滑Ricci flow的结果。因为离散曲率流方法完全独立于传统的有限元分析方法，因此其收敛性证明的方法也必然是迥异的。通过冗长而严密地推导，我们给出了精确的逼近结果。

收敛性定理陈述

这里，我们首先解释主要的收敛性结果。

定义 （δ-三角剖分）给定一个紧的多面体曲面（Polyhedral Surface）(S,V,d)，三角剖分T是一个δ-三角剖分，$\delta>0$，如果每个面上所有的内角都在区间$(\delta,\pi/2-\delta)$中。

定义 （δ-三角剖分）给定一个紧的三角剖分的多面体曲面（Triangulated Polyhedral Surface）(S,T,l^*)，(T,l^*)的一个（Geometric Subdivision Sequence）几何细分系列(T_n,l_n^*)是(δ,c)细分系列，这里$\delta>0$，$c>0$为正常数，如果每个(T_n,l_n^*)都是δ-三角剖分，并且边长满足

$$l_n^*(e)\in(\frac{1}{cn},\frac{c}{n}),\quad \forall e\in E(T_n)$$
。

如上定义中，多面体曲面可以被替换成一般的带有黎曼度量曲面，三角剖分可以被替代成测地三角剖分，由此得到所谓的(δ,c)测地细分系列。

定理1 （离散曲率流收敛性定理）给定带有黎曼度量的曲边三角形$(S,\mathbf{g})$，在三个角点处的内角为$\pi/3$，给定一个(δ,c)测地细分系列$(\mathcal{T}_n,L_n)$，对于任意边$e\in E(\mathcal{T}_n)$，$L_n(e)$为度量g下的测地长度。那么存在离散共形因子$w_n\in\mathbb{R}^{V(\mathcal{T}_n)}$，对于足够大的$n$，令

$$C_n=(S,\mathcal{T}_n,w_n*L_n)$$

满足

a. C_n和平面等边三角形Δ等距，同时C_n是$\delta_S/2$-三角剖分，
b. 离散单值化映射$\varphi_n:(S,\mathbf{g})\to C_n$一致收敛到光滑单值化映射$\varphi:(S,\mathbf{g})\to(\Delta,dzd\bar{z})$，使得

$$\lim_{n\to\infty}||\varphi_n|_{V(\mathcal{T}_n)}-\varphi|_{V(\mathcal{T}_n)}||_\infty=0$$
。

主要技术定理

我们证明过程中的主要工具是如下的定理，这些工具性定理的证明细节可以在【1】找到，这里我们直接给出结论。

定理2 给定一个紧的三角剖分的多面体曲面(S,T,l^*)，(S,T_n,l_n^*)是它的一个(δ,c)几何细分系列；(S,T_n,l_n)是另外一系列多面体度量，满足不等式条件：

$$|l_n(e)-l_n^*(e)|\leq\frac{c_0}{n^3},$$

这里$c_0>0$是一个正常数，那么存在常数$c_1=c_1(l^*,\delta,c,c_0)$，和离散共形因子$\nu_n\in\mathbb{R}^{V(T_n)}$，对于足够大的$n$，

1. (T_n,ν_n*l_n)是$\delta/2$-三角剖分。
2. $K_{\nu_n*l_n}=K_{l_n^*}$
3. 离散共形因子

$$\|\nu_n\|_\infty\leq\frac{c_1(l^*,\delta,c,c_0)}{\sqrt{n}}$$

并且我们有估计

$$|l_n^*(e)-\nu_n*l_n(e)|\leq\frac{c_2(l^*,\delta,c,c_0)}{n\sqrt{n}},\quad\forall e\in E(T_n)$$

。

引理. 假设$(S,\mathbf{g}_1)$是一个C^2光滑的紧度量曲面，其边界∂S可能非空并且带有角点，$\mathbf{g}_2=e^{2\mu}\mathbf{g}_1$是另外一个黎曼度量，和初始度量共形等价，这里共形因子$\mu\in C^2(S)$为二阶光滑函数，那么存在常数$c=c(S,\mathbf{g}_1,\mu)$，使得对于任意连接两点p和q的测地线段γ，或者γ为光滑边界曲线段，$\gamma\subset\partial S$,我们有估计

$$|l_{\mathbf{g}_2}(\gamma)-e^{\frac{\mu(p)+\mu(q)}{2}}l_{\mathbf{g}_1}(\gamma)|\leq c(S,\mathbf{g}_1,\mu)l_{\mathbf{g}_1}^3(\gamma)$$

。

证明框架

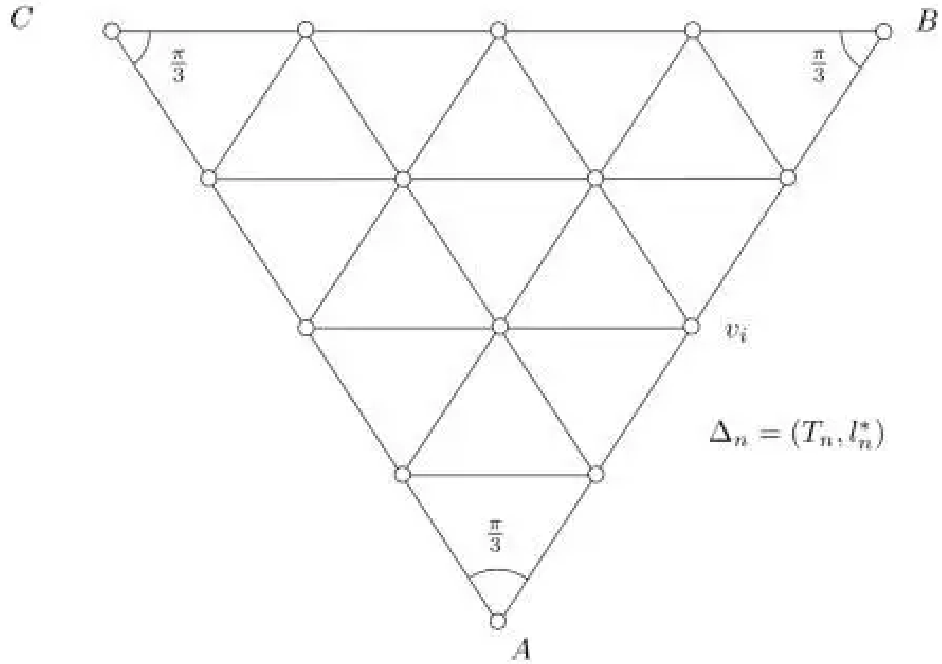

图1. 平面等边三角形。

图1显示了经典的平面等边三角形，ΔABC。每条边的长度为1，给个内角为$\pi/3$。一次细分操作（subidivision operator）加入每条边的中点，然后连接这些中点，将每个三角形分成4个三角形。第n次细分操作之后，所得的离散曲面记为Δ_n，其三角剖分记为T_n，其PL度量由平面欧氏度量$dzd\bar{z}$所诱导，表示成边长函数l_n^*。我们用$\Delta_n = (\Delta, T_n, l_n^*)$来表示这一离散曲面。

显然，Δ_n是一个(δ, c)细分系列，这里$(\delta_\Delta, c_\Delta) = (\pi/6 - \varepsilon, 1 - \varepsilon)$，$\varepsilon > 0$是任意小的正数。

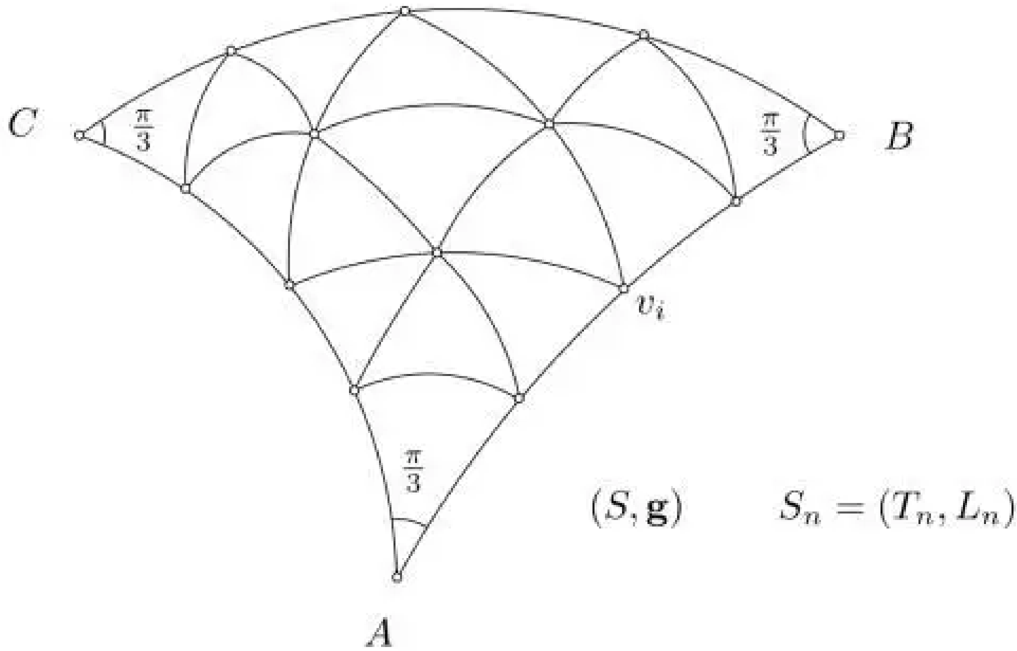

图2. 光滑曲面。

图2显示了一个带有黎曼度量的C^2光滑曲面$(S, \mathbf{g})$，有三个角点（corner points）A, B, C，其边界是连接角点的三条光滑曲线，$\partial S = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$；在任意角点处，两条光滑边界曲线的交角是$\pi/3$。

根据黎曼映照定理，存在共形映射$\varphi : (S, \mathbf{g}) \to \Delta$，将角点映成角点，边界曲线映成边界曲线。因为曲面$(S, \mathbf{g})$为紧曲面，对应角点处的角度相同，所以映射诱导的共形因子函数$\mu : S \to \mathbb{R}$光滑有界，

$$\mathbf{g} = e^{-4\mu} dz d\bar{z}。$$

同时映射φ将Δ_n的三角剖分T_n拉回到光滑曲面上。我们在S上将$\varphi^{-1}(\Delta_n)$的每条边都用测地线段来代替，顶点保留，于是得到光滑曲面的一个测地三角剖分，记为$S_n = (S, \mathbf{g}, T_n, L_n)$，这里$L_n$是三角剖分$T_n$的测地边长。

因为φ为共形映射，共形因子$\mu : S \to \mathbb{R}$一致连续，当n足够大的时候，在T_n的每个三角形面上，共形因子几乎为常数，三角形的测地边长几乎相等。S_n是曲面$(S, \mathbf{g})$的一个(δ, c)测地细分系列。对于任意的正数$\varepsilon > 0$，存在$N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，当$n > N(\varepsilon)$时，$(\delta_S, c_S) = (\pi/6 - \varepsilon, 1 - \varepsilon)$。

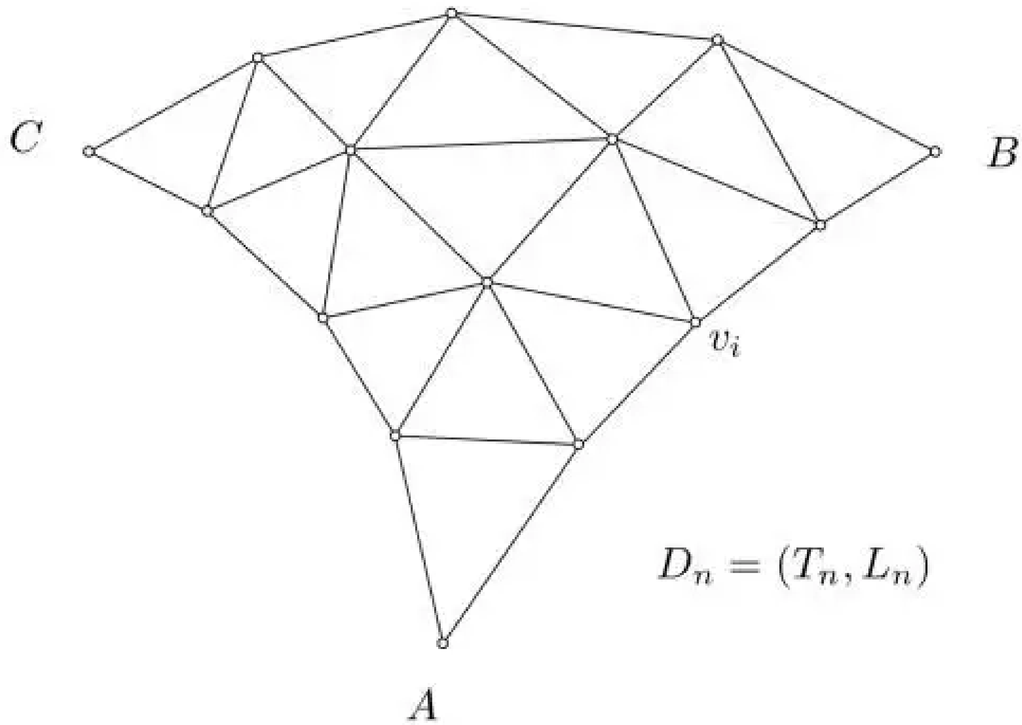

图3. 离散化。

图3显示了将光滑曲面离散化。我们将抽象的离散曲面$S_n = (T_n, L_n)$转换成PL曲面$D_n = (T_n, L_n)$。对于任何一个面$t \in T_n$，带有三个边e_i, e_j, e_k，我们以$\{L_n(e_i), L_n(e_j), L_n(e_k)\}$为边长构造一个欧氏三角形，然后将这些欧氏三角形沿着公共边等距地粘贴起来，得到一个具有PL度量的离散曲面，$D_n = (T_n, L_n)$。

根据几何逼近论，(D_n, L_n)的度量（包括Laplace-Beltrami 算子）收敛到光滑曲面$(S, \mathbf{g})$的度量。因为共形因子$\mu : S \to \mathbb{R}$一致连续，当n足够大的时候，在D_n的每个三角形面几乎为等边三角形。(D_n, L_n)为(δ, c)细分系列，这里常数c是曲面黎曼度量和共形因子的函数$c(S, \mathbf{g}, \mu)$。

我们计划构造离散共形映射$\varphi_n : (D_n, L_n) \to (\Delta, l_n^*)$，然证明在某种模（norm）下，离散共形映射收敛到光滑黎曼映照，$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$。

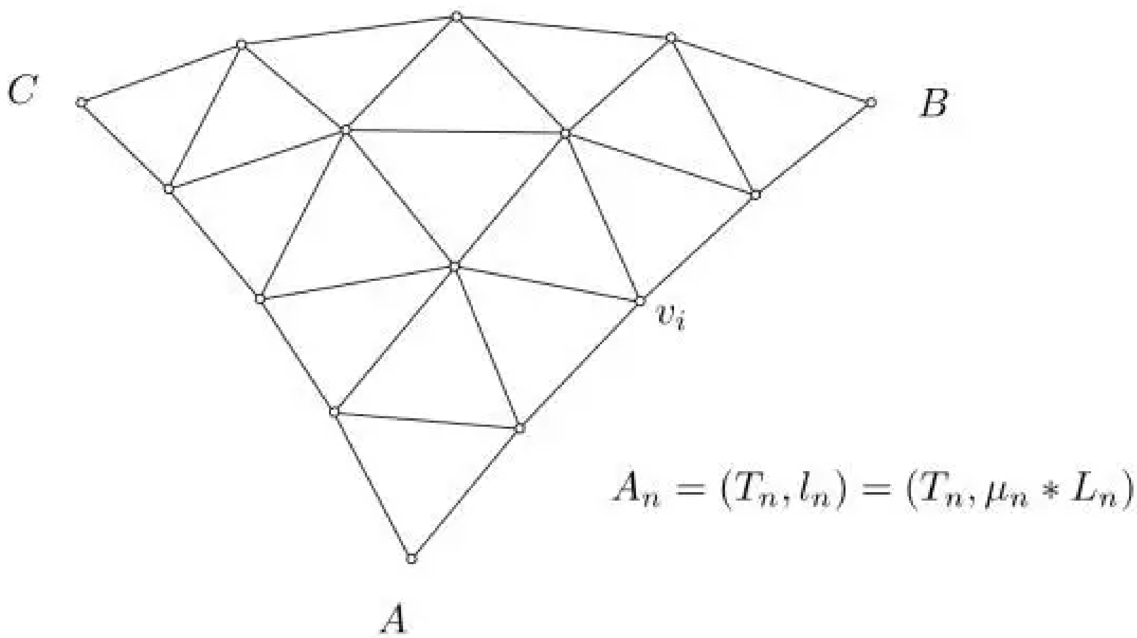

图4. 逼近。

图4显示了对黎曼映照的初步逼近。光滑黎曼映射$\varphi : (S, \mathbf{g}) \to \Delta$诱导的共形因子为$\mu : S \to \mathbb{R}_{>0}$，

$$dz d\bar{z} = e^{4\mu}\mathbf{g}。$$

我们定义其对应的离散共形因子$\mu_n : V(T_n) \to \mathbb{R}_{>0}$，对一切顶点$v_i \in T_n$，

$$\mu_n(v_i) = \mu(\varphi^{-1}(v_i)),$$

这里$v_i \in \Delta_n$，$\varphi^{-1} : \Delta_n \to S$。

我们用离散曲面$D_n = (T_n, L_n)$来逼近光滑曲面$(S, \mathbf{g})$，离散度量L_n来逼近光滑度量$\mathbf{g}$，离散共形因子μ_n来逼近光滑共形因子μ，用顶点缩放来逼近共形变换，

$$\mu_n * L_n \sim l_n^*,$$

这里平直度量

$$l_n^* = \int_e |dz| = \int_e \mu^2 ds。$$

由此，得到离散曲面$A_n = (T_n, \mu_n * L_n)$，用于逼近平面等边三角形Δ_n 。

由引理1，我们得到如下估计：存在常数$c_1 = c_1(\mathbf{g}, \delta_S, c_S, \mathbf{g}^*)$，这里平直度量$\mathbf{g}^* = dz d\bar{z}$，对于一切边$e \in \mathcal{T}_n$，

$$|l_n^*(e) - l_n(e)| = |l_n^*(e) - \mu_n * L_n(e)| \leq \frac{c_1}{n^3}。$$

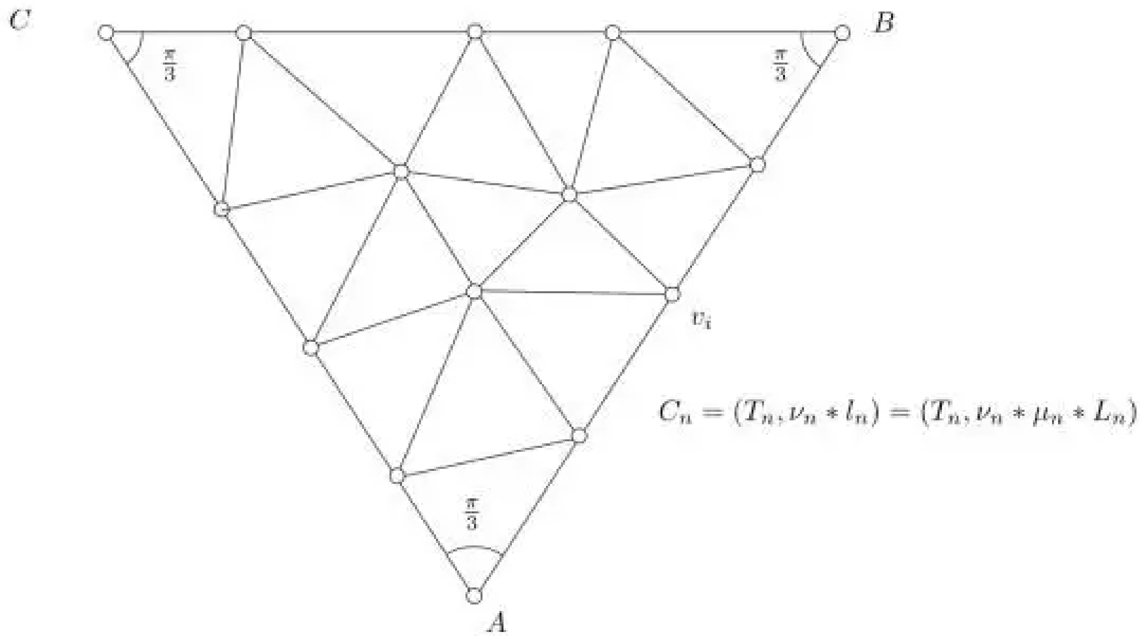

图5. 补偿化。

我们最后对初步逼近得到的离散度量$A_n = (T_n, \mu_n * L_n)$进一步补偿。由定理2，我们得到存在离散共形因子$\nu_n : V(T_n) \to \mathbb{R}_{>0}$，使得

1. $C_n = (T_n, \nu_n * (\mu_n * L_n))$是$\delta_S/2$-三角剖分，
2. $K_{\nu * l_n} = K_{l_n^*}$，这意味着$C_n = \Delta$成为平面等边三角形，
3. 共形因子的L^∞模
$$\|\nu_n\|_\infty \leq \frac{c_2(\mathbf{g}^*, \delta_S, c_1, c_S)}{\sqrt{n}},$$
4. 对于一切边$e \in E(\mathcal{T}_n)$
$$|l_n^*(e) - \nu_n * l_n(e)| \leq \frac{c_3(\mathbf{g}^*, \delta_S, c_1, c_S)}{n\sqrt{n}}。$$

我们来证明主要定理1：由C_n是$\delta_S/2$-三角剖分，我们证明了主定理结论中的（a）。我们构造分片线性映射

$$\psi_n = \varphi \circ \varphi_n^{-1} : C_n \to \Delta_n,$$

因为C_n和Δ_n都是等边三角形，通过反射，我们将映射ψ_n拓展成复平面到自身的映射，$\tilde{\psi}_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。由$C_n$是$\delta_S/2$-三角剖分，我们得到存在一个大于1的正数$K>1$，$\tilde{\psi}_n$是$K$-拟共形映射。我们得到复平面到自身的$K$-拟共形映射族$\{\tilde{\psi}_n\}$

，由拟共形映射族的紧性，存在收敛子列$\{\tilde{\psi}_{n_k}\}$，

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\psi}_{n_k} = \tilde{\psi}$$ 。

令$w_n = \nu_n + \mu_n$，由4我们得到

$$\lim_{k\to\infty} \frac{l_n^*(e)}{w_n * L_n(e)} = 1$$ ，

因此极限K-拟共形映射$\tilde{\varphi}$的伸缩商$K=1$，即$\tilde{\psi}$是共形映射。同时$\tilde{\psi}$将C_n的三个角点映到Δ_n的三个角点，因此$\tilde{\psi}$是复平面到自身的恒同映射。由此，我们证明了主定理结论中的（b）。

总结

综上所述，我们的整体证明思路是：

$$(S_k, L_n) \stackrel{\alpha_n}{\to} (D_n, L_n) \stackrel{\beta_n}{\to} (A_n, \mu_n * L_n) \stackrel{\gamma_n}{\to} (C_n, \nu_n * \mu_n * L_n) \stackrel{\psi_n}{\to} \Delta_n$$

这里映射α_n是用测地距离来离散化光滑曲面；β_n是光滑共形因子来直接逼近单值化映射；γ_n是进一步补偿离散带来的误差；$\psi_n = \phi \circ \phi_n^{-1}$是离散单值化映射和光滑单值化映射的差距。拟共形映射ψ_n的Beltrami系数的模小于$C/\sqrt{n}$，这给出了逼近阶。这一方法可以推广到拓扑复杂的曲面情形。

近二十年来，在工程领域，学者们发明了大量的计算共形映射的算法。真正给出收敛性证明和逼近阶估计的工作却极其稀少。依随这一领域的日益成熟，我们期待看到更多有关算法收敛性的严格证明。

Reference

- X. Gu, F. Luo and T. Wu, Convergence of Discrete Conformal Geometry and Computation of Uniformization Maps, Asian Journal of Mathematics, 2017.
