

# 清华笔记：计算共形几何讲义（23）离散曲面曲率流（Discrete Surface Ricci Flow） V

顾险峰 老顾谈几何 2017-08-19



前面我们介绍了离散曲面的曲率流理论，曲面上配备着欧氏度量带有奇异点。这次，我们介绍双曲离散曲面的曲率流理论。对于欧拉示性数为负的曲面，其单值化度量自然是双曲度量。双曲度量具有非常多的优点，因此在工程实践中起到了非常根本的作用。

例如双曲度量下，每个曲线同伦类中存在唯一的测地线，两条封闭曲线同伦当且仅当它们可以同伦变换成同一条测地线，因此可以将拓扑问题转化成几何问题。再如，如果源曲面和目标曲面同胚，目标具有双曲度量，那么调和映照存在并且唯一，并且调和映照为微分同胚。这在曲面配准问题中，具有重要作用。

计算曲面双曲度量的最为简单方法就是双曲离散曲面的曲率流方法。

## 双曲背景几何

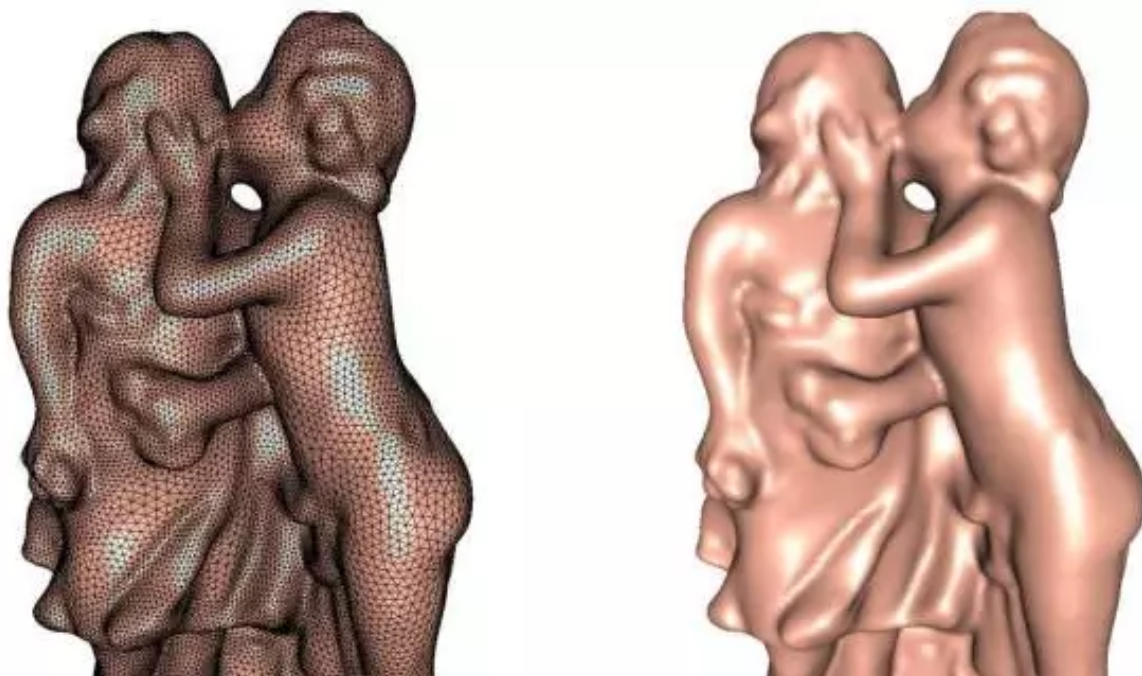


图1. 多面体曲面。

在工程实践中，光滑曲面 $(S, g)$ 嵌入在三维欧氏空间中，因而具有欧氏度量诱导的黎曼度量。我们在曲面上采样，然后以这些采样点为顶点进行三角剖分 $\mathcal{T}$ ，将每个面变成欧氏三角形，如此得到了一个多面体曲面（Polyhedral Surface）。

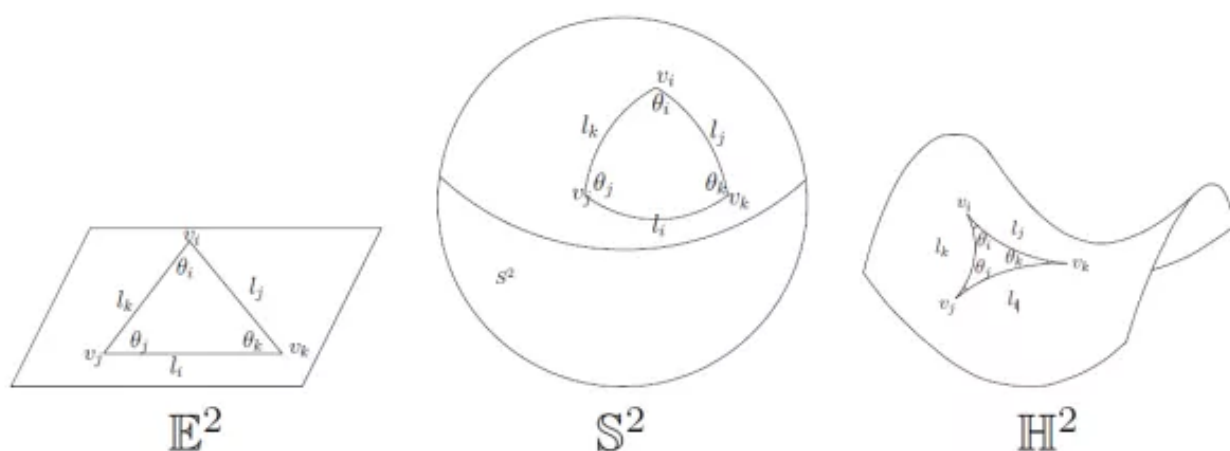


图2. 常曲率测地三角形。

我们也可以将每个面上的欧氏三角形换成常曲率测地三角形，例如球面三角形或者双曲三角形。换言之，给定一个边长函数  $l: E(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ，在每个面  $[v_i, v_j, v_k]$  上满足三角形不等式， $l_i + l_j > l_k$ ；我们用边长  $\{l_i, l_j, l_k\}$  构造一个双曲三角形  $\Delta_{ijk}$ ，我们将这些双曲三角形沿着公共边等距地粘贴起来，所得的曲面被称为是一个带有双曲背景几何的离散曲面（discrete surface with hyperbolic background geometry），记为  $(S, V, \mathcal{T}, l)$ 。这里顶点集合成为双曲度量的锥奇异点（cone singularities）。

### 双曲离散曲面曲率流

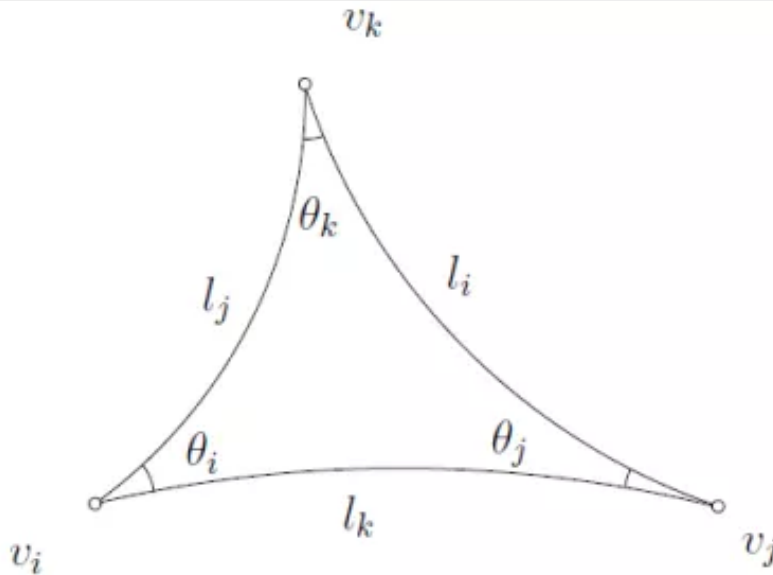


图3. 双曲三角形。

如图3所示，双曲三角形的边长和内角之间满足双曲余弦定理：

$$\cos \theta_i = \frac{\cosh l_j \cosh l_k - \cosh l_i}{\sinh l_j \sinh l_k}$$

和正弦定理：

$$\frac{\sinh l_i}{\sin \theta_i} = \frac{\sinh l_j}{\sin \theta_j} = \frac{\sinh l_k}{\sin \theta_k},$$

同时双曲三角形的面积等于



$$A = \frac{1}{2} \sinh l_j \sinh l_k \sin \theta_i \text{。}$$

双曲微分余弦定理表示为：

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial l_i} = \frac{\sinh l_i}{A}, \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial l_j} = -\frac{\sinh l_i}{A} \cos \theta_k \text{。}$$

给定一个带有双曲背景几何的离散曲面 $(S, V, \mathcal{T}, l)$ ，每个三角形都是测地双曲三角形，顶点处的离散曲率定义为角欠，

$$K(v) = \begin{cases} 2\pi - \sum_{jk} \theta_i^{jk}, & v \notin \partial S \\ \pi - \sum_{jk} \theta_i^{jk}, & v \in \partial S \end{cases},$$

离散高斯-博纳定理表示为：

$$\sum_{v \notin \partial S} K(v) + \sum_{v \in \partial S} K(v) - \text{Area}(S) = 2\pi \chi(S) \text{。}$$

给定离散共形因子函数 $u : V(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ ，双曲顶点缩放（hyperbolic vertex scaling）操作定义如下： $y = u * l$ ,

$$\sinh \frac{y_k}{2} = e^{u_i} \sinh \frac{l_k}{2} e^{u_j} \text{。}$$

通过直接计算，我们得到

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \end{pmatrix} = \frac{-2}{A} \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \cos \theta_3 & \cos \theta_2 \\ \cos \theta_3 & -1 & \cos \theta_1 \\ \cos \theta_2 & \cos \theta_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{S_1}{C_1+1} & \frac{S_1}{C_1+1} \\ \frac{S_2}{C_2+1} & 0 & \frac{S_2}{C_2+1} \\ \frac{S_3}{C_3+1} & \frac{S_3}{C_3+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix}$$

这里 $S_k = \sinh y_k$ ,  $C_k = \cosh y_k$ 。通过直接计算，我们得到对称关系

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial u_j} = \frac{\partial \theta_j}{\partial u_i} = \frac{C_i + C_j - C_k - 1}{A(C_k + 1)/2}$$

这样，离散双曲熵能量被定义成

$$E_f(u_i, u_j, u_k) = \int^{(u_i, u_j, u_k)} \theta_i du_i + \theta_j du_j + \theta_k du_k \quad \circ$$

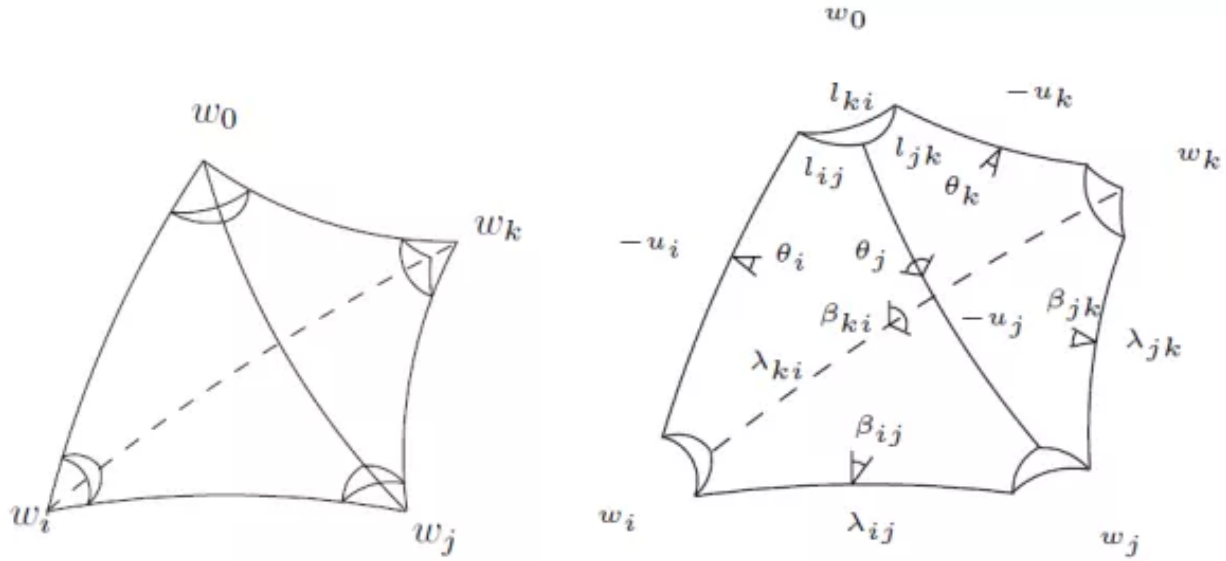


图4. 广义双曲四面体。

如图4所示，我们为三角形 $[v_i, v_j, v_k]$ 在 $\mathbb{H}^3$ 中构造广义双曲四面体，顶点 $w_i, w_j, w_k$ 在无穷远平面上，被三个horosphere截断。 $w_0$ 在 $\mathbb{H}^3$ 之外，被一个双曲平面截断。双曲四面体由6条边长所决定，

$$-2u_i, -2u_j, -2u_k, \lambda_{ij}, \lambda_{jk}, \lambda_{ki},$$

这里 $\lambda_{jk}$ 为共形结构参数，为常数，

$$\lambda_{ij} = 2 \ln \sinh \frac{l_{ij}}{2},$$

所有的二面角为

$$\theta_i, \theta_j, \theta_k, \beta_{ij}, \beta_{jk}, \beta_{ki}$$

为共形因子 $(u_i, u_j, u_k)$ 的函数。根据Schlafli定理，我们双曲四面体体积的变分公式，
$$dV = -\frac{1}{2}(-2u_i d\theta_i - 2u_j d\theta_j - 2u_k d\theta_k + \lambda_{ij} d\beta_{ij} + \lambda_{jk} d\beta_{jk} + \lambda_{ki} d\beta_{ki})$$

我们构造函数

$$W(u_i, u_j, u_k) = 2u_i \theta_i + 2u_j \theta_j + 2u_k \theta_k - \lambda_{ij} d\beta_{ij} - \lambda_{jk} d\beta_{jk} - \lambda_{ki} d\beta_{ki} - 2V,$$

那么我们直接得到

$$dW = (\theta_i du_i + \theta_j du_j + \theta_k du_k) \circ$$

---

由此，我们得到离散双曲曲率流方程为：

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \bar{K}_i - K_i(t),$$

它是双曲离散熵能量的梯度流，

$$E(\mathbf{u}) = \int^{\mathbf{u}} \sum_i (\bar{K}_i - K_i) du_i,$$

这一能量的严格凹性蕴含着离散双曲曲率流解的唯一性。我们用Teichmuller理论和区域不变原理可以证明解的存在性【2】。

---

### 双曲离散曲率流的拓扑应用

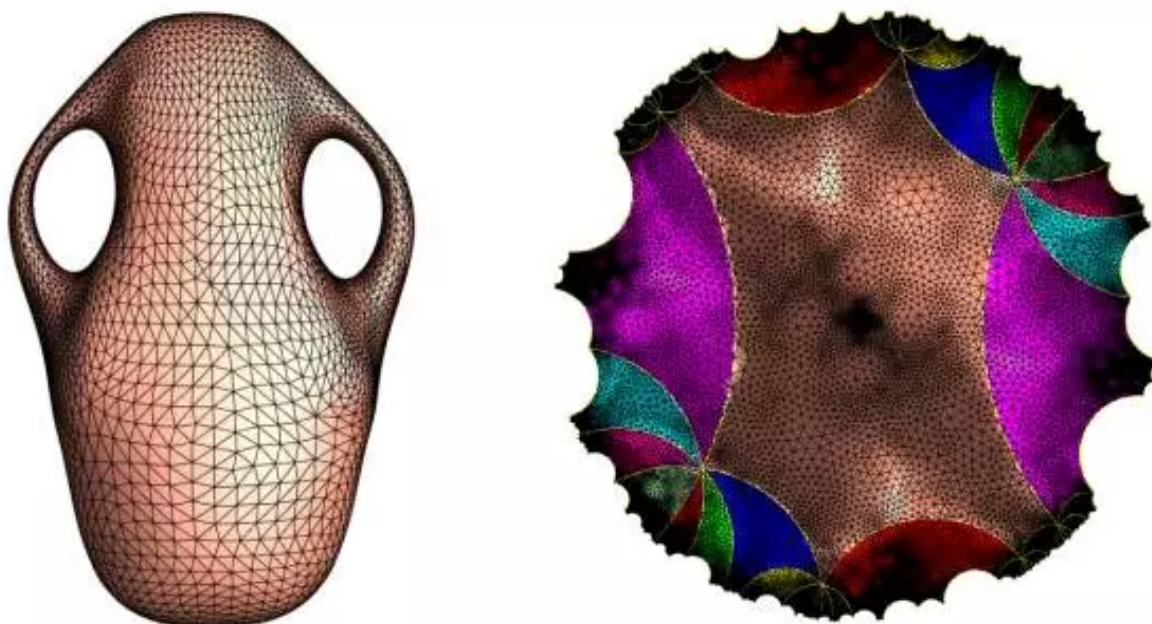


图5. 亏格为2的曲面上的双曲度量。

双曲度量比较抽象，远离人们日常生活。但是在几何和拓扑问题中，发挥着非常基本的作用。我们可以考察计算拓扑中的“最短词”（shortest word）问题。

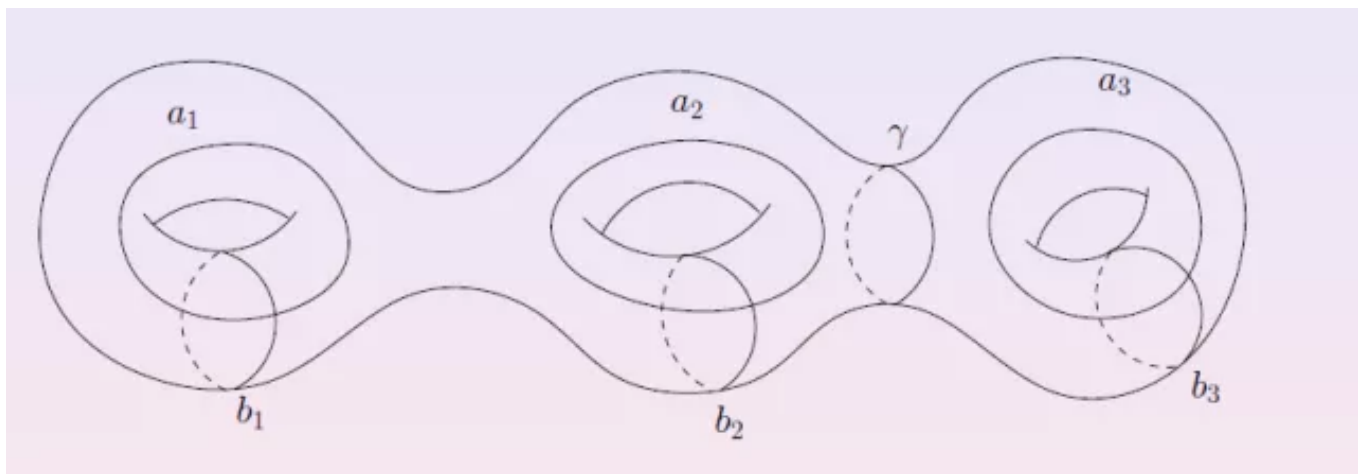


图6. 最短词问题。

如图6所示，给定一个高亏格曲面 $S$ ，和一组基本群基底，例如

$$\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g\},$$

对于任意给定的封闭曲线 $\gamma$ ，我们欲求同伦类 $[\gamma]$ 在基本群中的表示。一般情况下， $[\gamma]$ 的表示并不唯一，如图6所示，

$$[\gamma] = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = b_3 a_3 b_3^{-1} a_3^{-1}.$$

对于任给的同伦类 $[\gamma]$ ，求其中最短的表示被称为是最短词问题。只用代数拓扑方法，最短词问题是NP难问题。但是如果我们将所有的基底曲线形变成测地线，将 $\gamma$ 也同伦变换成测地线，如图7所示，那么最短词问题在多项式时间内可解。

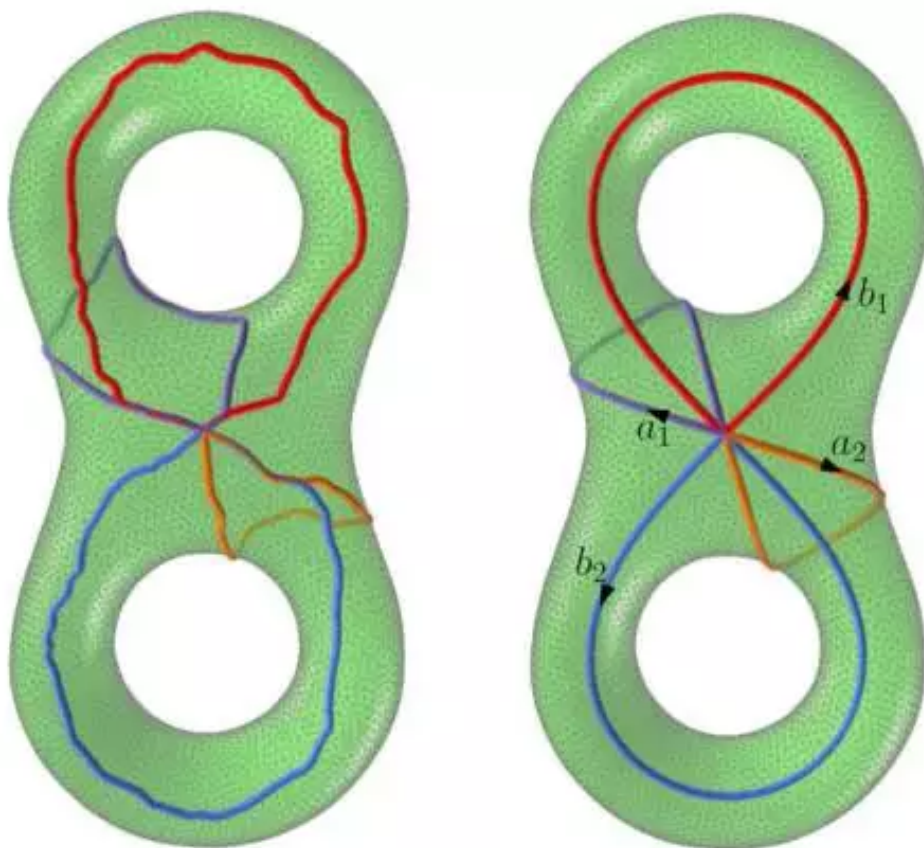


图7. 将基本群基底同伦变换成测地线。

给定初始曲面 $(S, g)$ ，我们用离散双曲曲率流的算法得到双曲度量 $h$ 。将曲面的基本群 $\pi_1(S, p)$ 基底同伦变换成测地线。设 $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ 是曲面的万有复迭空间，我们将 $(\tilde{S}, \pi^*h)$ 等距嵌入在双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 中，基本群基底曲线在 $(\tilde{S}, \pi^*h)$ 中的提升构成 $\mathbb{H}^2$ 的胞腔分解，每个胞腔是曲面的一个基本域 (fundamental domain)，其边界为测地线，如图8所示。



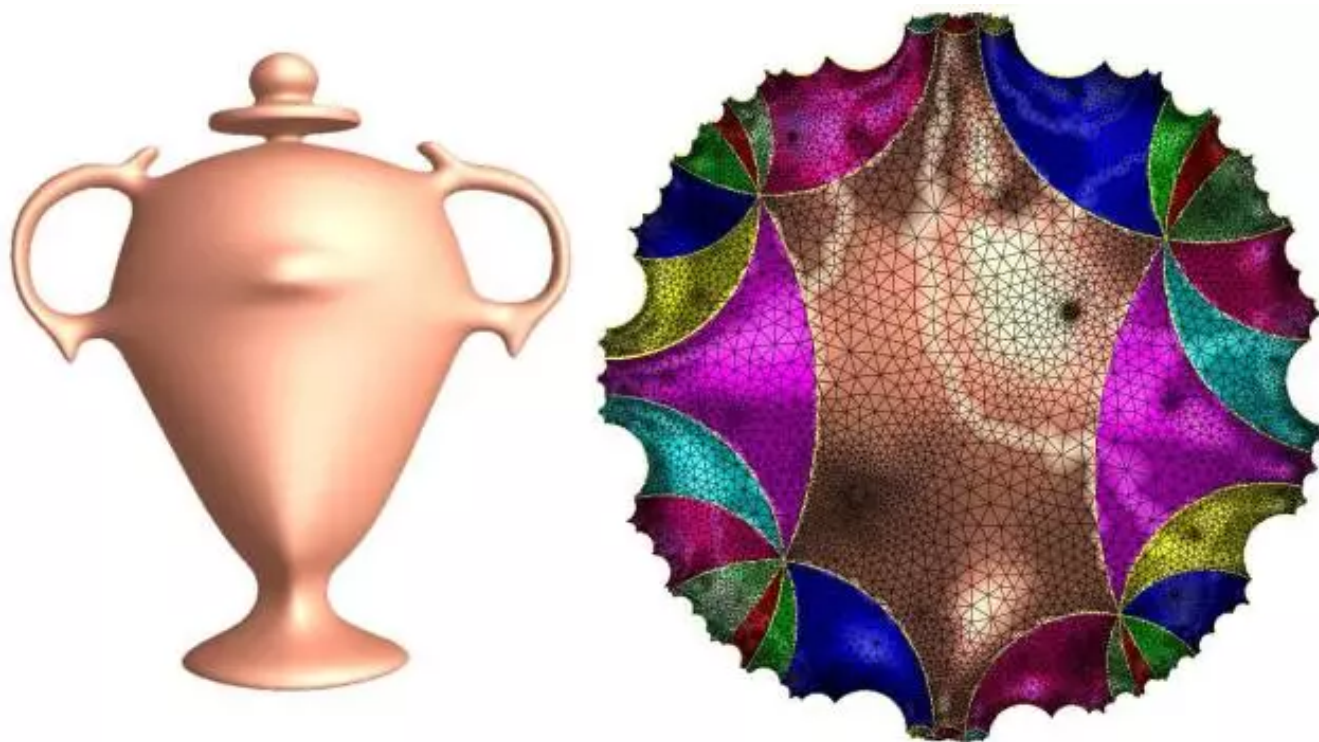


图8. 亏格为2的曲面的双曲度量，及其万有复迭空间的等距嵌入。

我们将 $\gamma$ 同伦变换成测地线，然后提升到 $(\tilde{S}, \pi^*h)$ 中，记为 $\tilde{\gamma}$ ；再将 $[\gamma]$ 的表示初始化为空， $w_\gamma \leftarrow \emptyset$ ；追踪 $\tilde{\gamma}$ ，如果 $\tilde{\gamma}$ 穿过 $b_k$ ，在 $w_\gamma$ 后加上 $a_k$ ， $w_\gamma \leftarrow w_\gamma + a_k$ ；如果 $\tilde{\gamma}$ 穿过 $a_k$ ，在 $w_\gamma$ 后加上 $b_k^{-1}$ ， $w_\gamma \leftarrow w_\gamma + b_k^{-1}$ 。如此，我们可以得到同伦类 $[\gamma]$ 的最短词表示。

这里我们看到一个饶有兴味的现象：某些具有非多项式复杂度的算法，经过恰当选取黎曼度量，被转化成具有多项式复杂度的算法。这种用几何做拓扑的思路非常奏效，值得进一步探索。

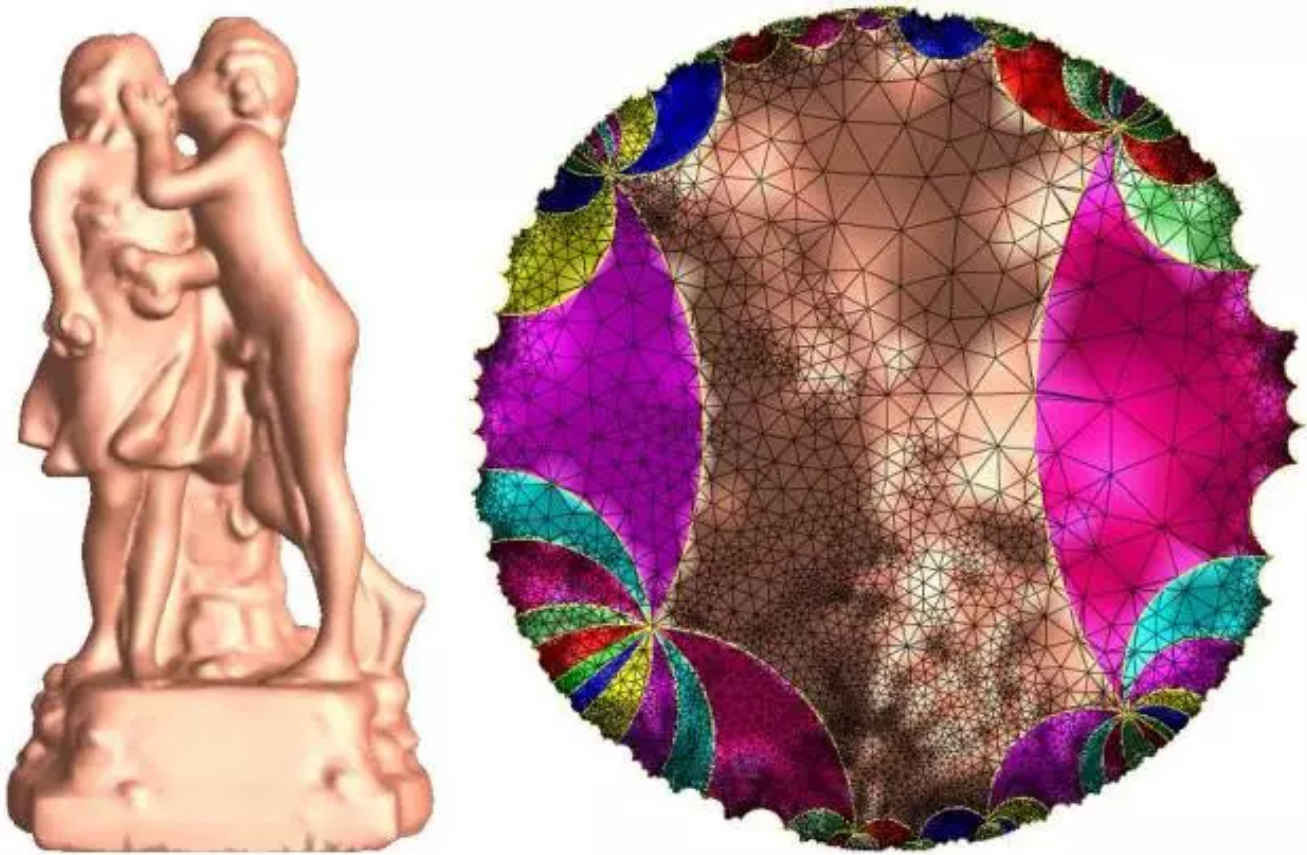


图9. 亏格为3的曲面的共形模计算。

给定一个高亏格封闭曲面 $(S, \mathbf{g})$ ，由单值化定理，存在共形因子 $u: S \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得 $\mathbf{h} = e^{2u}\mathbf{g}$ 诱导常数值高斯曲率，常数为-1。亦即单值化度量 $\mathbf{h}$ 为双曲度量。两个带度量的曲面共形等价，当且仅当在它们的单值化度量下，它们彼此等距。

设 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ 是曲面的万有复迭空间，其覆盖变换群（甲板映射群）和曲面本身的基本群同构，我们记为：

$$Deck(\tilde{S}) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g | \prod_{k=1}^g [\alpha_k, \beta_k] \rangle,$$

这里 $[\alpha_k, \beta_k] = \alpha_k \beta_k \alpha_k^{-1} \beta_k^{-1}$ 。投影映射 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ 将双曲度量拉回到覆盖空间上得到双曲曲面 $(\tilde{S}, \pi^*\mathbf{h})$ 。我们将 $(\tilde{S}, \pi^*\mathbf{h})$ 等距嵌入在双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 中，那么覆盖空间的覆盖映射群成为 $\mathbb{H}^2$ 等距变换群的子群，被称为是曲面的Fuchs群。Fuchs群的每个元素都是双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 的等距变换，即莫比乌斯变换，

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}), \gamma_k(z) = \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}, a_k d_k - b_k c_k = 1,$$

Fuchs群有 $2g$ 个生成元，每个生成元有3个自由度，一共6个自由度。整体约束

$$\prod_{k=1}^g [\alpha_k, \beta_k] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

减少了3个自由度。另外，我们对整个 $\mathbb{H}^2$ 进行一个莫比乌斯变换，这样又减少了3个自由度。所以，一共有 $6g - 6$ 个自由度。

如此，我们证明了亏格为 $g$ 的封闭曲面的Teichmuller空间是 $6g - 6$ 维，Fuchs群生成元就构成了曲面在Teichmuller空间中的坐标，即曲面的共形不变量的一种表示形式。这为曲面分类提供了直接的计算方法。

---

### 总结

从理论角度而言，双曲背景几何下的离散曲面曲率流和欧氏背景几何下的曲率流具有相似的理论框架。从计算角度而言，因为双曲离散熵能量是严格凸的，没有零空间，双曲曲率流具有更稳定的收敛性；由于双曲度量的共形因子在靠近 $\mathbb{H}^2$ 边界时趋于无穷大，双曲离散曲面（顶点离散高斯曲率处处为0）在 $\mathbb{H}^2$ 中的等距嵌入的算法对于数值误差更为敏感，因此双曲曲率流的计算需要更高的精度。

双曲度量具有很多优点，可以用于简化拓扑问题，可视化一般图的嵌入问题，拓扑复杂曲面间的配准问题，曲面的几何分类问题，光滑样条曲面的构造问题，网络中的安全路由问题等等，因此在工程中具有根本的重要性。

---

### Reference

- M. Zhang, R. Guo, W. Zeng, F. Luo, S-T Yau and X. Gu, The unified discrete surface Ricci flow, Graphics Models Vol 76 (5), Pages 321-339, 2014.
- X. Gu, R. Guo, F. Luo, J. Sun and T. Wu, A discrete Uniformization theorem for polyhedral surfaces II, Journal of Differential Geometry, 2016  
(arXiv:1401.4594)



【老顾谈几何】邀请国内国际著名纯粹数学家，应用数学家，理论物理学家和计算机科学家，讲授现代拓扑和几何的理论，算法和应用。

回复“**目录**”，可以浏览往期精华；回复“**智商**”，可以阅读“**如何从大脑形状判断一个人的智商**”；回复“**象牙塔**”，可以阅读“**纯粹数学走出象牙塔**”；回复“**概览**”，可以阅读“**计算共形几何概览**”。