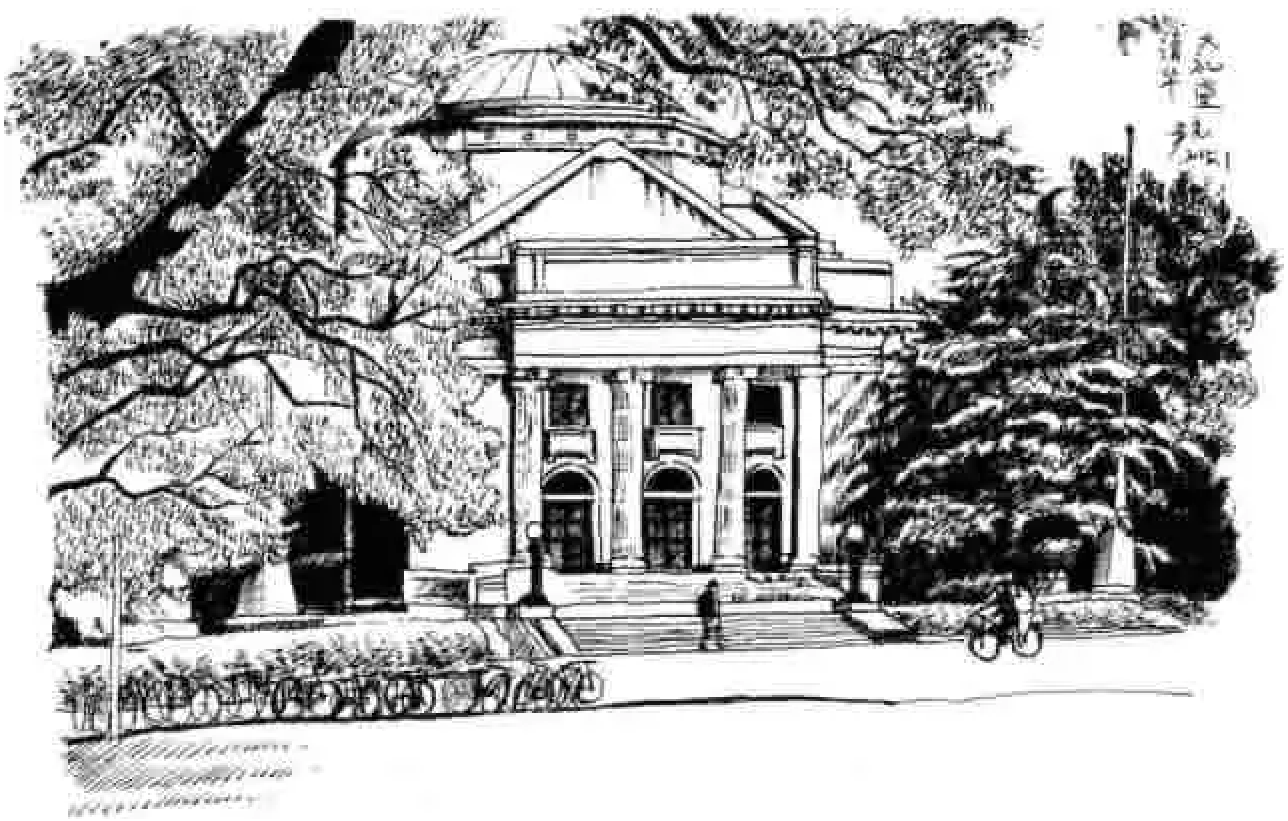
清华笔记：计算共形几何讲义 （10）纪念米尔扎哈尼——泰希米勒（Teichmuller）空间

顾险峰 老顾谈几何 2017-07-16



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。欢迎任何有兴趣的朋友，前来旁听指导。】

多年以前，我还在哈佛求学，导师丘成桐先生叮嘱我要研究柯蒂斯. 麦克马伦(Curtis McMullen)的理论，McMullen用组合的方法来研究共形结构，非常适合计算。丘先生自己也在哈佛的研究生课程上讲解这个理论。多少年来，我和合作者、学生们一直致力于探索这一方向，例如我们前不久基于全纯二次微分的计算曲面叶状结构（foliation）方法。后来，McMullen果然获得了菲尔兹奖，这使得我们非常敬佩丘先生的眼光。

后来，有一次我访问哈佛的时候，恰逢McMullen和他的一名研究生讨论泰希米勒空间问题。那名女研究生比较瘦小，但是联想异常丰富，将泰希米勒空间的不同理论大胆地联系起来，纵横捭阖，气魄恢弘。McMullen反倒显得非常温和谨慎，不停地提醒她猜测的严密性。

再后来，罗锋教授的弟子杨田博士毕业，前去斯坦福深造，追随一位伊朗裔的女数学家米尔扎哈尼（Maryam Mirzakhni）。当时听说米尔扎哈尼证明了一个举世震惊的结果，发明了计算泰希米勒空间体积的方法。一两年后，米尔扎哈尼由此获得了菲尔兹奖，成为历史上首位女菲尔兹奖得主。这令我们非常钦佩罗锋和杨田的眼光。

泰希米勒空间是所有拓扑同胚的黎曼面构成的空间，每个点代表一类曲面，每条曲线代表一个形变过程。更为奇妙的是泰希米勒空间具有黎曼度量，两个曲面间可以测量距离。因此泰希米勒空间理论是计算机视觉中“形状空间”理论的绝佳候选。我们在这方面进行了十数年的探索，发明了计算泰希米勒空间黎曼度量的算法。

昨天（2017年7月15日）惊闻米尔扎哈尼英年早逝，看到照片突然想起当年和McMullen讨论泰希米勒空间的女孩就是米尔扎哈尼。人生无常，天妒红颜。唏嘘慨叹之余，我想我们最好的纪念方式就是将米尔扎哈尼发明的泰希米勒空间测地流理论透彻理解，转换成计算机算法，让她的思想进一步影响人类社会。

拓扑环面的泰希米勒空间

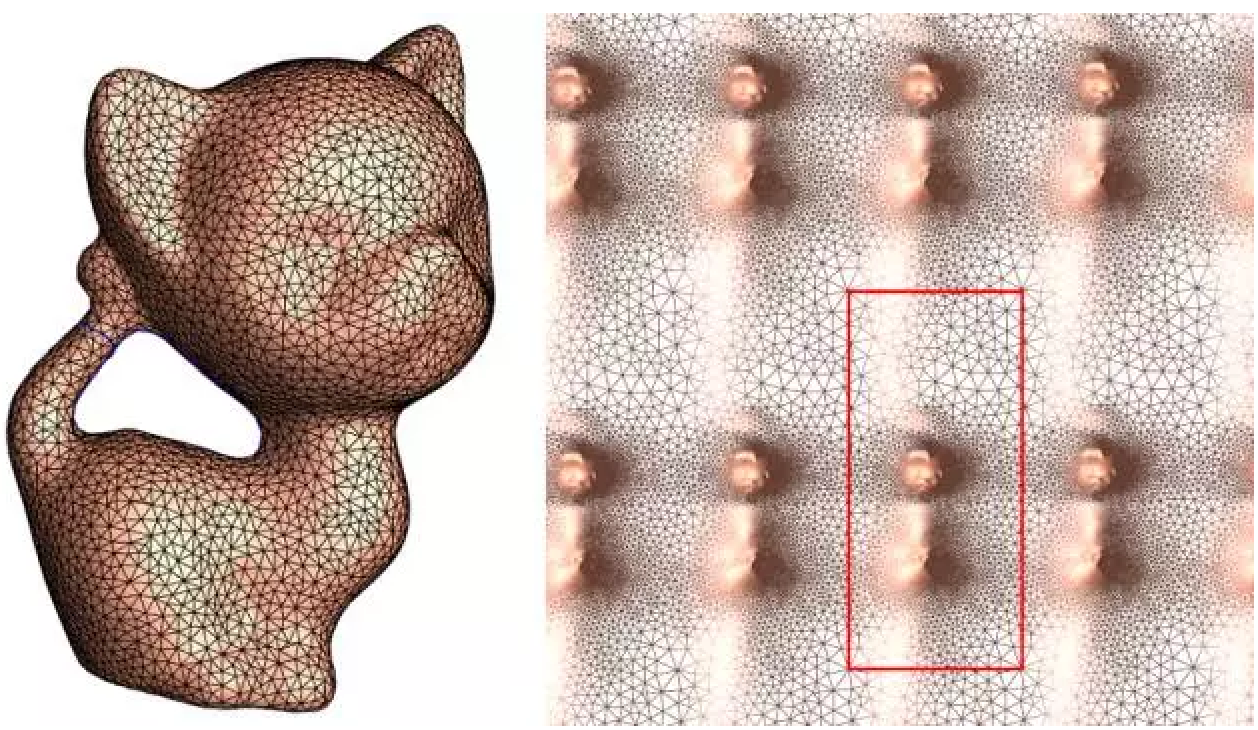


图4. 亏格为一的曲面的共形模。

我们下面考虑拓扑轮胎曲面上所有可能的共形结构。假设$(S_k, \mathbf{g}_k, \{a_k, b_k\})$，$k=1,2$是两个带标记的度量曲面，标记$\{a_k, b_k\}$是$S_k$的一组典范同伦群基底，如果存在共形映射

$$f:(S_1,\mathbf{g_1})\to(S_2,\mathbf{g_2})$$

并且

$$f_*([a_1])=[a_2],\quad f_*([b_1])=[b_2],$$

那么我们说这两个带标记的度量曲面Teichmuller等价。

我们考虑所有亏格为1的带标记的封闭度量曲面，在Teichmuller等价关系下被分成Teichmuller共形等价类。所有Teichmuller共形等价类构成的集合被称为是亏格为1的封闭曲面的Teichmuller空间，记为

$$T^{(1,0)} := \{\text{Teichmuller Euqlivalence Class of Topological Torus}\}。$$

由上讨论，我们知道所有亏格为1的带黎曼度量的曲面都和平环共形等价。每个平环的基本域是复平面上的一个平行四边形，底边是ω沿着a的积分，斜边是ω沿着b的积分。经过重整化，我们可以令平行四边形的底边为1，斜边表示为一个复数η，η的虚部为正数，

$$T^{(1,0)} := \{\eta\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Img}(\eta)>0\}。$$

这意味着拓扑轮胎的Teichmuller空间和上半复平面同胚。

模空间

假设$(S_k, \mathbf{g_k})$，$k=1,2$是两个度量曲面，如果存在共形映射

$$f:(S_1,\mathbf{g_1})\to(S_2,\mathbf{g_2})$$

那么我们说这两个带标记的度量曲面共形等价。我们考虑所有亏格为1的封闭度量曲面，在共形等价关系下被分成共形等价类。所有共形等价类构成的集合被称为是亏格为1的封闭曲面的模空间(Moduli Space)，记为

$$M^{(0,1)} = \{\text{Conformal Equivalence Class of Topological Torus}\}。$$

我们看到共形等价比Teichmuller共形等价更加宽泛：共形等价对于映射的同伦类没有要求，Teichmuller共形等价对于映射的同伦类有苛刻要求。

我们知道，曲面到自身的所有自同胚的同伦等价类构成了曲面映射类群(Mapping Class Group)，记为$\mathrm{MCG}(T^2)$。假设$\varphi:T^2\to T^2$是一个自同胚，它诱导了曲面同调群之间的同构，$\varphi_*:H_1(T^2,\mathbb{Z})\to H_1(T^2,\mathbb{Z})$，那么

$$\varphi_*=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{Z},$$

所以$\mathrm{MCG}(T^2)$和特殊线性群$SL(2,\mathbb{Z})$同构。设曲面基本域的形状，亦即周期是

$$\left(\int_a \omega, \int_b \omega\right) = (1, \eta)$$,

在φ作用下，周期变成

$$\left(\int_{\varphi(a)} \omega, \int_{\varphi(b)} \omega\right)^T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \end{pmatrix}$$,

重整化之后，新的周期是

$$\left(1, \frac{\int_{\varphi(b)} \omega}{\int_{\varphi(a)} \omega}\right) = \left(1, \frac{\gamma + \delta\eta}{\alpha + \beta\eta}\right)$$。

从原来的周期到新的周期，彼此相差一个莫比乌斯变换，

$$\eta \mapsto \frac{\gamma + \delta\eta}{\alpha + \beta\eta}$$

同时我们可以看出，$\pm\varphi_* \in \mathrm{MCG}(T^2)$诱导同样的新周期。

实际上，Teichmuller空间是模空间的万有覆盖空间，由上讨论，我们知道覆盖变换群是模群（Modular Group），

$$z \to \frac{az+b}{cz+d},\ ad - bc = 1$$。

这个群和射影特殊线性群$PSL(2,\mathbb{Z})$同构。模群有两个生成元：

$$S: z \mapsto -1/z, \quad T: z \mapsto z + 1$$,

模群的表示为

$$\Gamma = \langle S, T | S^2, (ST)^3 \rangle$$。

因此拓扑轮胎的模空间等于上半平面关于射影特殊线性群$PSL(2,\mathbb{Z})$的商空间，

$$PSL(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z})/\{I, -I\}$$,

这里I是单位矩阵。

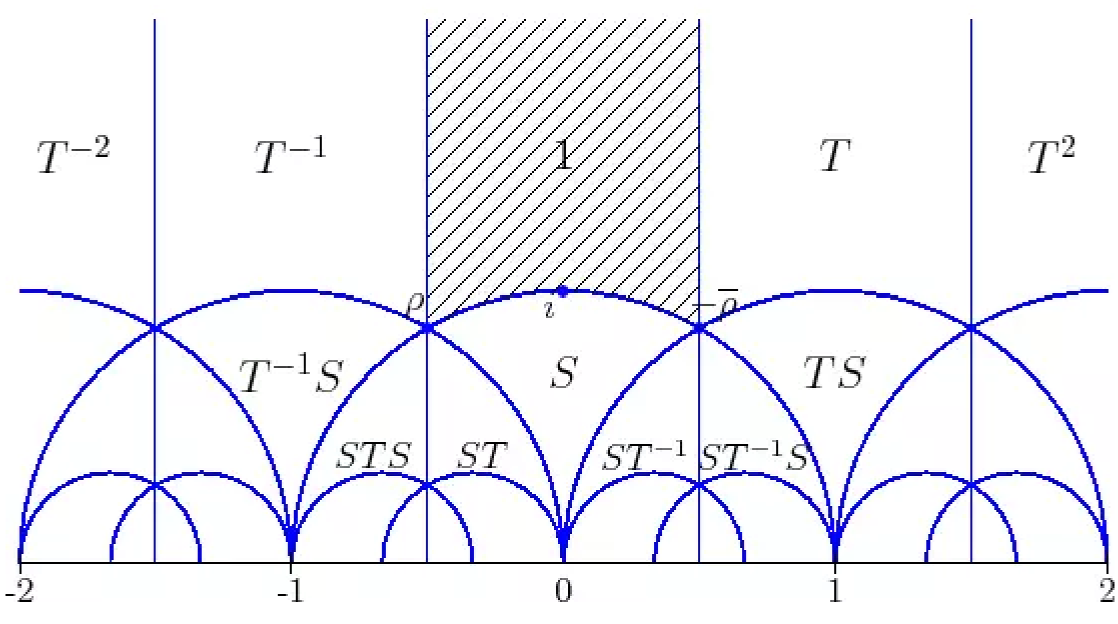


图5. 拓扑轮胎的模空间。

简单计算表明，轮胎的模空间同胚于图5中的阴影区域：

$$M^{(1,0)}=\{z\in\mathbb{C}|\ |\mathrm{Re}(z)|\le\frac{1}{2},|z|\ge 1\}$$

我们可以看出模空间具有奇异点，因而整体不是流形，而是orbifold。

周期矩阵

前面我们已经讨论了低亏格曲面的共形不变量和它们基于全纯微分的构造方法。在这里，我们讨论高亏格曲面的情形。

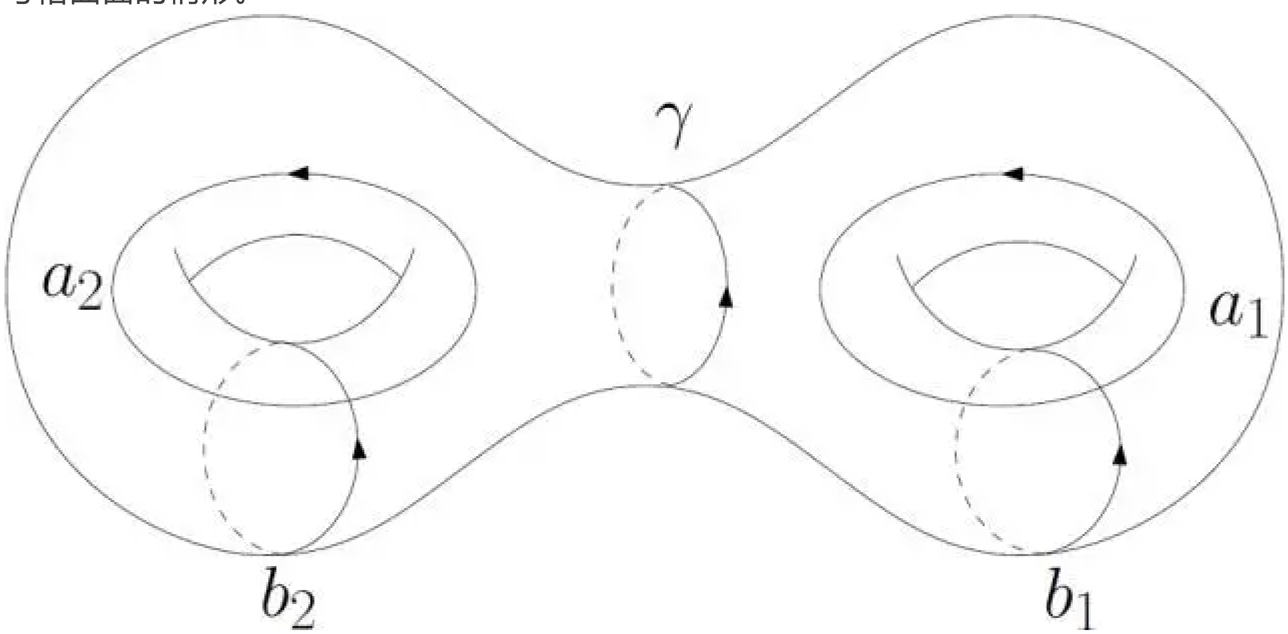


图6. 亏格为二的曲面，及其上的一族标准同伦群基底。

如图6所示，假设S是一拓扑曲面，带有标准同伦群基底

$\pi_1(S,p)=\langle a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_g,b_g|a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}\rangle$

我们在曲面上配备不同的黎曼度量，然后判断何时存在同伦于恒同映射的保角变换

$\varphi:(S,\mathbf{g}_1)\to(S,\mathbf{g}_2),\quad \varphi^*\mathbf{g}_2=e^{2\lambda}\mathbf{g}_1,\quad \varphi\sim id$

这等价于求度量曲面的Teichmuller共形等价的不变量。

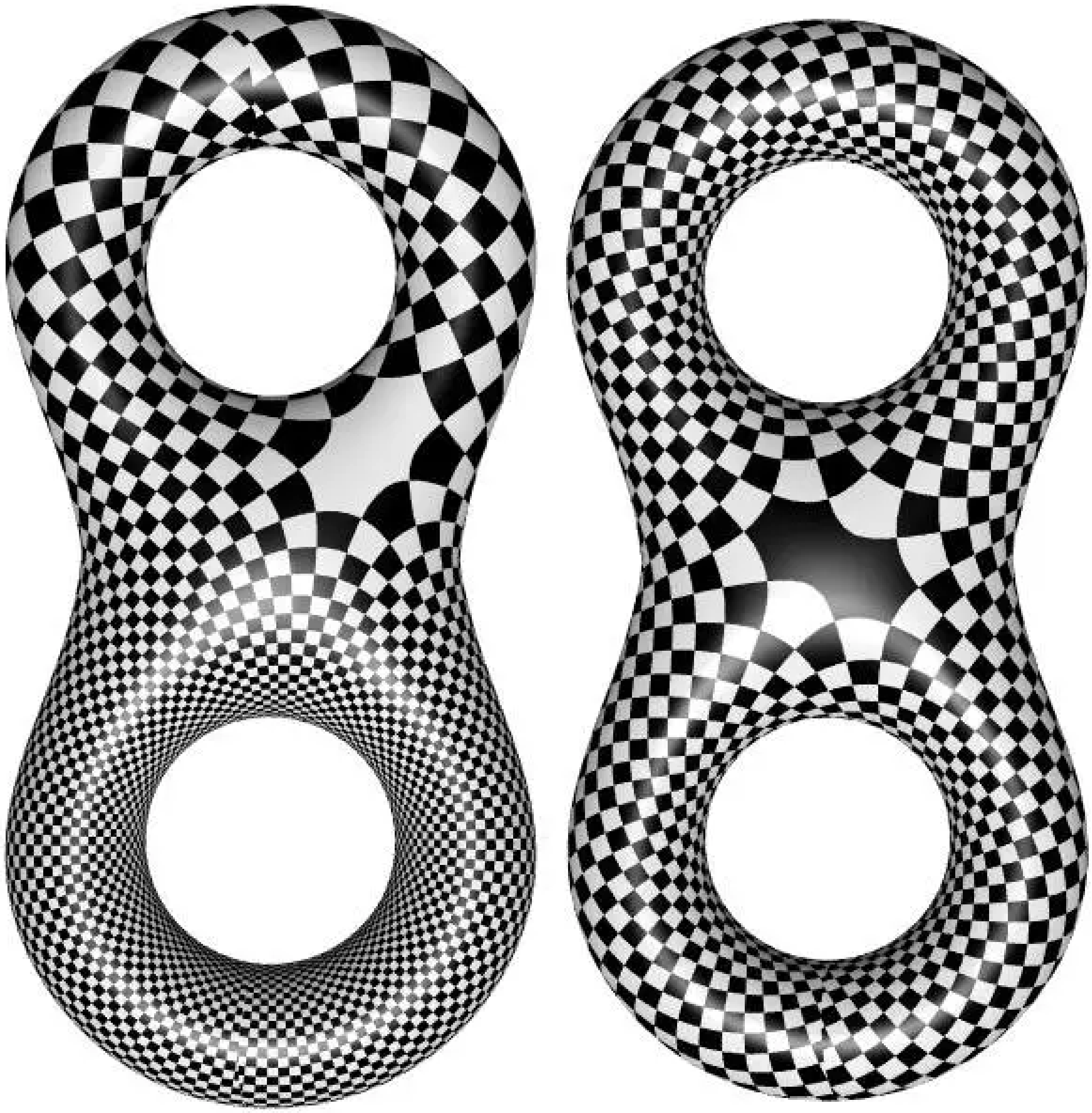


图7. 亏格为二的封闭曲面上全纯一次微分群的基底。

我们来考察亏格为g>1的曲面，如图7所示，曲面全纯1-形式群的基底为

$$\Omega(S)=\mathrm{Span}\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_g\}$$

满足如下条件

$$\int_{a_i}\omega_j=\delta_i^j$$

我们定义从曲面万有覆盖空间到g维复空间的全纯映射

$$\varphi:\tilde{S}\to\mathbb{C}^g,\quad p\mapsto\left(\int_{p_0}^{p}\omega_1,\int_{p_0}^{p}\omega_2,\cdots,\int_{p_0}^{p}\omega_g\right)$$

由此，我们定义映射的周期矩阵为

$$P(S)=\begin{pmatrix}\int_{b_1}\omega_1 & \int_{b_2}\omega_1 & \cdots & \int_{b_g}\omega_1\\ \int_{b_1}\omega_2 & \int_{b_2}\omega_2 & \cdots & \int_{b_g}\omega_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \int_{b_1}\omega_g & \int_{b_2}\omega_g & \cdots & \int_{b_g}\omega_g\end{pmatrix}$$

两张度量曲面Teichmuller共形等价，当且仅当它们具有相同的周期矩阵。

黎曼参模问题

1857年，黎曼提出了著名的Riemann参模问题，他猜测亏格为g的黎曼面，其模空间可以由3g-3个复数进行描述。这个问题的微分几何提法如下。假设给定两张亏格为g的带度量曲面，如果它们之间存在一个保角微分同胚，则它们彼此共形等价。所有的共形等价类构成的空间被称为模空间，

$$M(S) := \{(S, \mathbf{g})\}/\sim$$

黎曼猜测模空间的维数为复3g-3。

虽然已经过了150多年，人类迄今为止依然没有完全理解模空间的结构。这个问题一个巨大突破发生在1940年代，由泰希米勒（Teichmuller）完成。Teichmuller在1939年开始创立Tiechmuller理论。很可惜的是，Teichmuller狂热地崇拜纳粹主义，于1943年死于战场，时年30岁。但是，他的思想过于超前，在他死后几十年后，人们才逐渐理解并接受了他的想法。虽然，数学家们并不赞同他的政治理念，但在数学史上，依然给了他崇高的地位。

Teichmuller考虑的是模空间的万有覆盖空间 - Teichmuller空间，其关系可以表述成

$$\mathcal{M}(S) := \mathrm{Teich}(S)/\mathrm{Mod}(S)$$

模空间等于Teichmuller空间关于曲面映射类群的商空间。首先我们用Poincare-Koebe单值化定理来考察Teichmuller空间（模空间）的维数。显然，所有亏格为零的度量曲面都可以保角地映射到单位球面上，所以所有的零亏格度量曲面都共形等价，换言之零亏格曲面的Teichmuller空间只有一个点，维数为零。

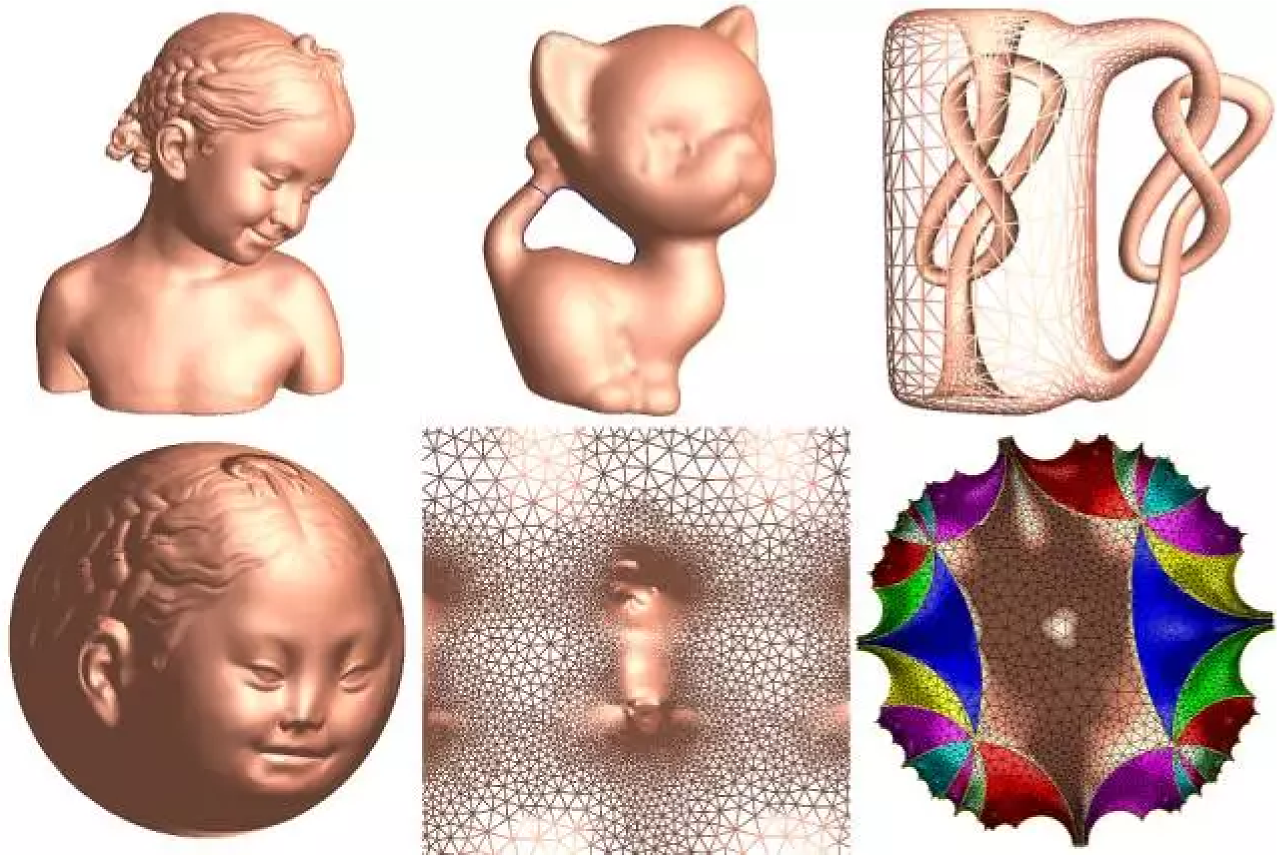


图8. 曲面单值化定理。

对于亏格为一的环面而言，它共形等价于一个平环，

$\mathbb{E}^2/\Gamma, \quad \Gamma = \{mz_1 + nz_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}, z_1 = 1$

z_2有两个自由度，所以亏格为一的环面的Teichmuller空间是二维的。

对于高亏格的曲面，它共形等价于一个带有双曲度量的曲面，

$\mathbb{H}^2/\mathrm{Fuchs}(S)$

这里Fuchs(S)是曲面的Fuchs群。Fuchs群和曲面的万有覆盖空间(Universal Covering Space)的甲板变换群(Deck Transformation Group)同构，并且是双曲空间等距变换群的子群，

$\mathrm{Fuchs}(S) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g | \pi_{i=1}^g \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} = id \rangle$

每个生成元都是莫比乌斯变换，需要3个参数来确定，同时关系式给出了3个限制，

$\alpha_i, \beta_i \in SL(2, \mathbb{R}), \quad \pi_{i=1}^g \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} = id$

同时对于任意一个莫比乌斯变换

$\eta \in SL(2, \mathbb{R}), \quad \langle \eta \alpha_1 \eta^{-1}, \eta \beta_1 \eta^{-1}, \cdots, \eta \alpha_g \eta^{-1}, \eta \beta_g \eta^{-1} | \pi_{i=1}^g \eta \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} \eta^{-1} = id \rangle$

给出了同样的Fuchs群的等价表示。因此，曲面的Teichmuller空间为复3g-3维。

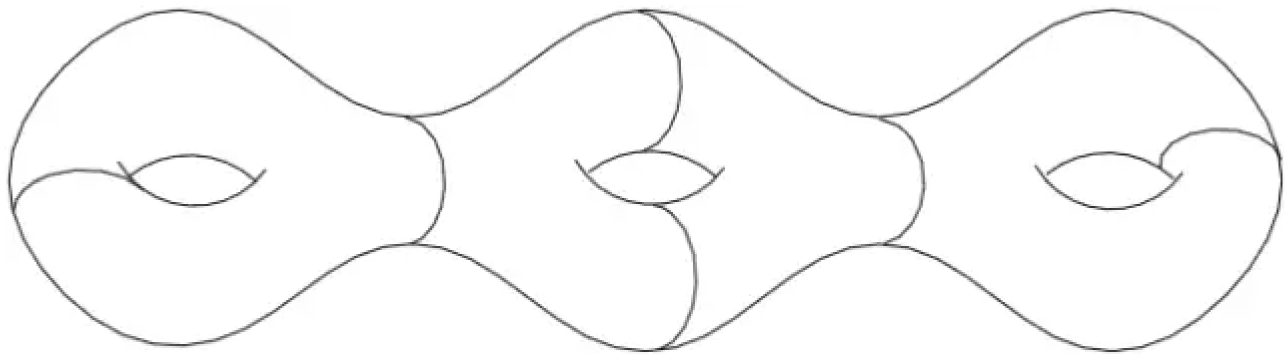


图9. 曲面的裤子分解。

有另外一种更为直观的方法证实黎曼模参数猜测-裤子分解。我们在曲面上找到3g-3条简单闭曲线，将曲面分割为2g-2条“裤子”。我们设曲面的度量为双曲度量，3g-3条分割线为测地线。所谓“裤子”就是亏格为0的曲面带有三条边界。图10显示了一条双曲裤子，三条边界皆为测地线。连接两条边界的最短线必然为测地线。沿着三条最短线将曲面切开，我们得到两个全等的双曲六边形，每个内角都为直角，每条边都为测地线。如果两条双曲裤子，对应的边界长度相同，则他们必然等距。所以如果3g-3条切割线的长度相同，则所有对应的裤子都等距。

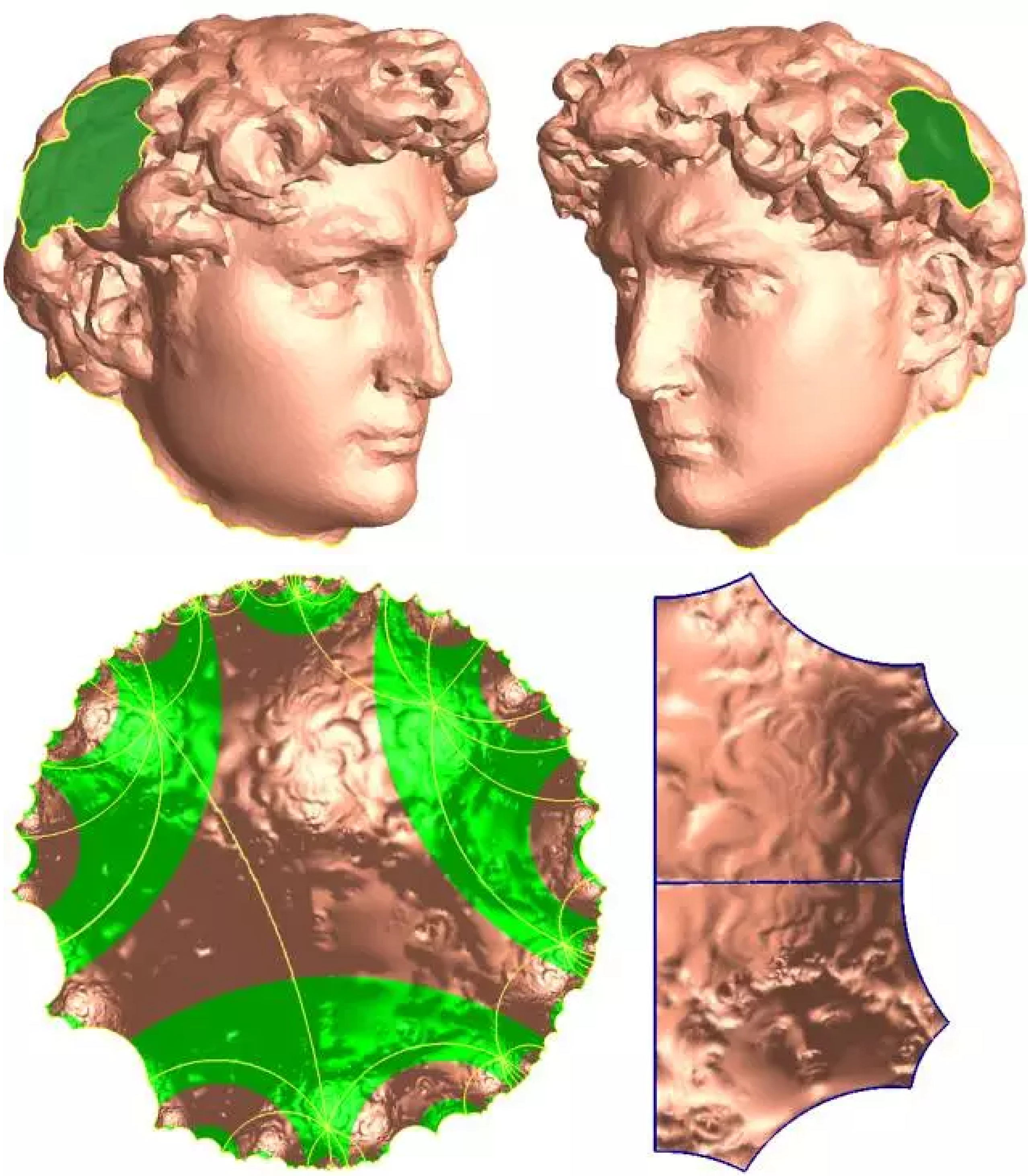


图10. 双曲裤子的共形模是边界测地线长度。

但是，两条裤子沿着公共边界测地线粘合的时候，其中的一条裤子可以相对于另外一条裤子转动。所以我们需要每条割线的长度，和这条割线两侧裤子粘合时的相对扭角来描述整个双曲曲面，共需6g-6个实数参数。

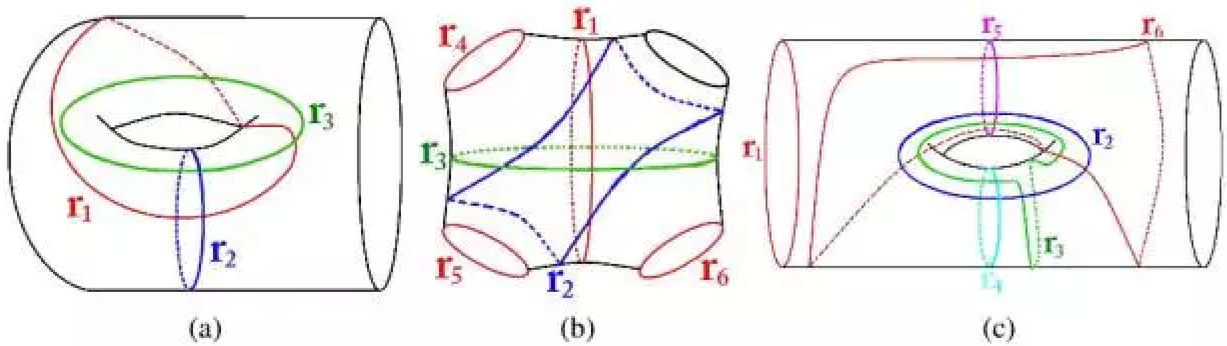


图11. 计算相对扭角的方法。

图11给出了一种计算扭角的方法。双曲曲面被分解为三种基本构建单元，每个单元的边界为测地线， 如图所示的所有同伦类中的测地线都被计算出来。从这些测地线的长度，我们可以推演出扭角。由此，曲面的Teichmuller空间为6g-6实数维。

后继的课程，我们会讲解如何计算Teichmuller空间的黎曼度量，由此衡量形状之间的距离。

【老顾谈几何】邀请国内国际著名纯粹数学家，应用数学家，理论物理学家和计算机科学家，讲授现代拓扑和几何的理论，算法和应用。回复“**目录**”，可以浏览往期精华。