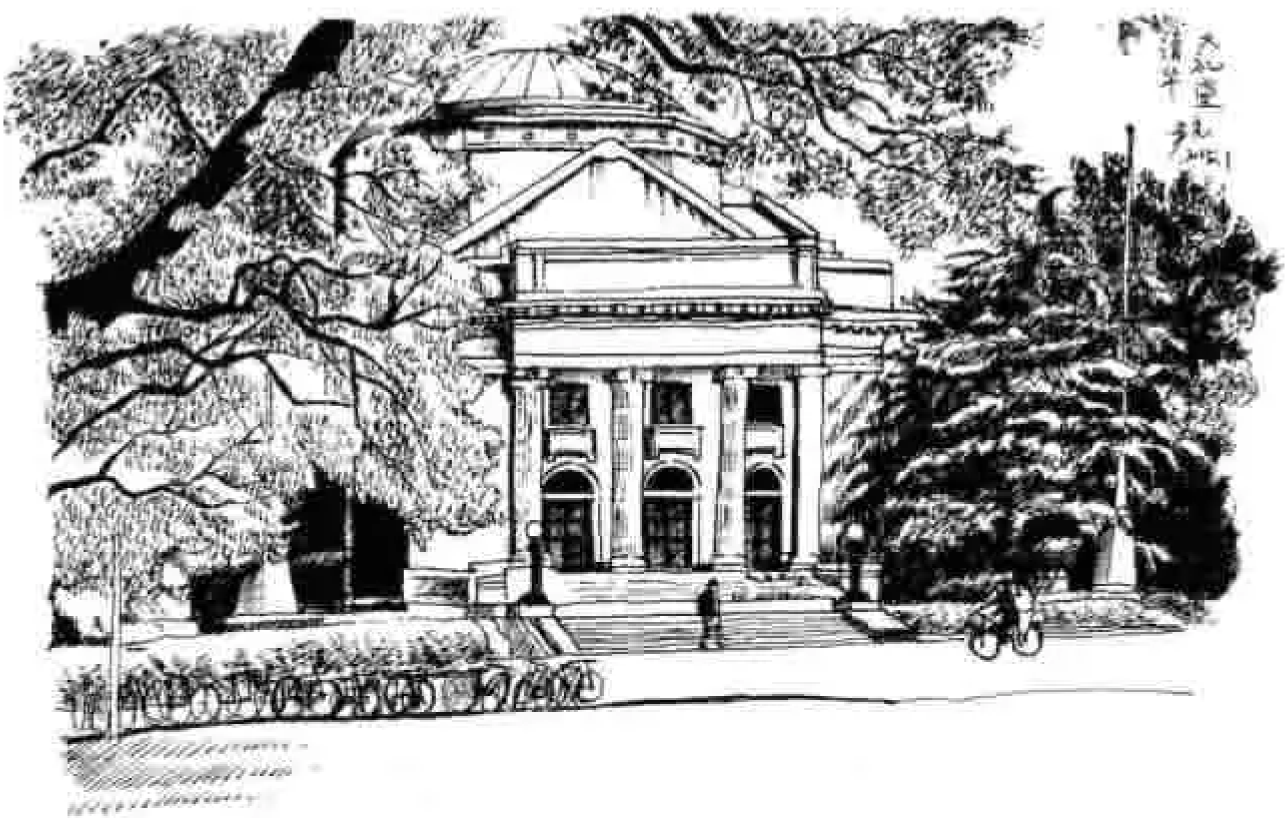
清华笔记：计算共形几何讲义 （3）微分拓扑

顾险峰 老顾谈几何 2017-07-05



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。】

这次课程，我们介绍微分拓扑中光滑同伦群的概念和计算，特别是曲面单位切丛的同伦群。这些概念的引入一方面可以作为同伦群应用的实例，更为重要的是它们是解决工程中一个源远流长的问题的理论基础，这个问题就是“神圣网格”问题。【1】给出了本课程的视频链接。

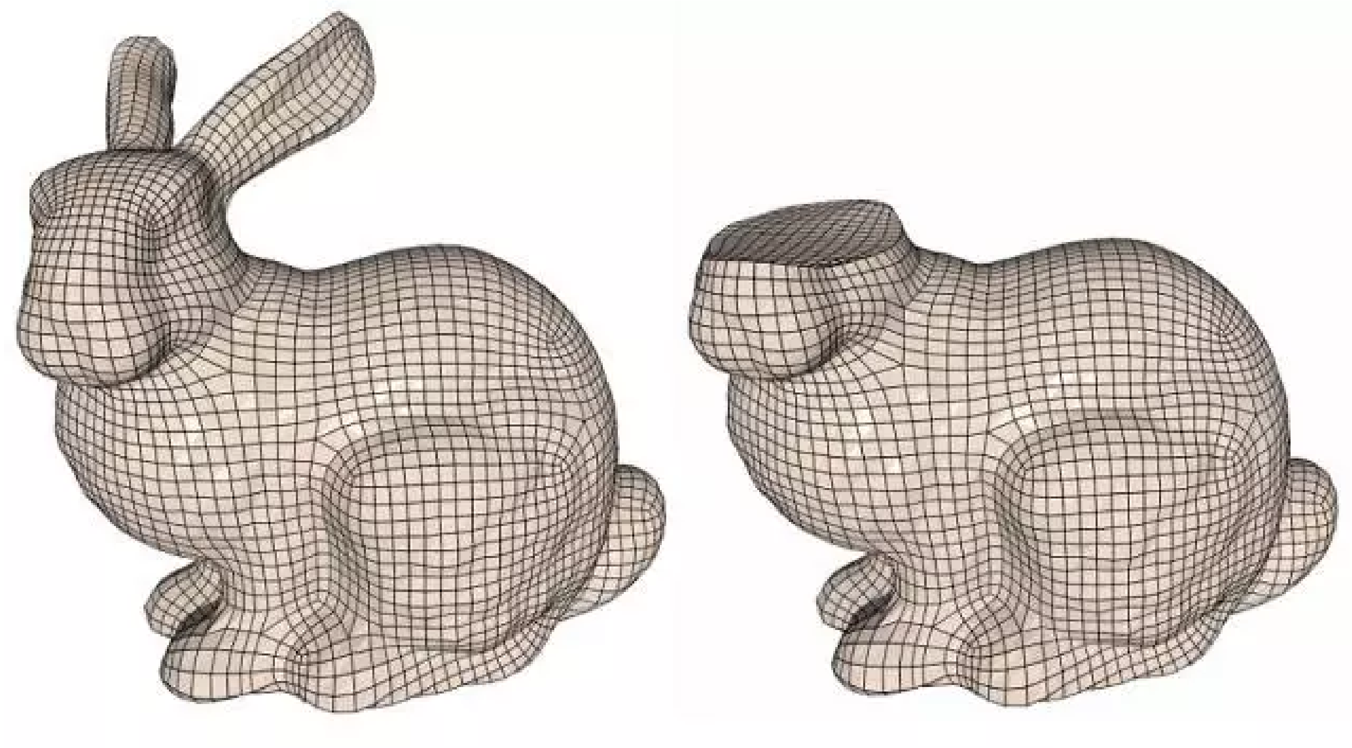


图1. 六面体网格化。

神圣网格问题

网格生成（Mesh Generation）是在计算机图形学、几何建模、计算力学的交叉领域。给定一个实体，我们希望将它进行剖分，每个剖分单元尽量的简单规则，同时整体的组合结构尽量的规则。图1给出了一个六面体网格的例子。通常而言，网格生成有四个类别，生成难度递增：非结构四面体网格、结构化四面体网格、非结构六面体网格、结构化六面体网格。**自动结构化六面体网格生成问题被称为是神圣网格问题**。在实际工程力学模拟过程中，网格生成步骤占据了60%的成本，因此网格生成问题具有重要的实际意义。

在过去数十年间，人们主要研究非结构化的六面体网格生成算法。一种思路是先生成体表面的四边形网格，然后将表面的四边形网格向内部扩展，生成体的六面体网格。假设Ω是三维空间中的一个实体（Solid），其边界$\partial\Omega$是一张光滑曲面（Regular Surface），更进一步，我们假设$\partial\Omega$是亏格为0的封闭曲面，换言之，拓扑球面。假设Ω内部存在一个六面体网格$\mathcal{H}$（hex-mesh），那么$\mathcal{H}$必然在边界曲面$\partial\Omega$上诱导了四边形剖分$\mathcal{Q}$（quad-mesh）。我们更为关注其逆问题：给定边界曲面$\partial\Omega$上的一个四边形网格$\mathcal{Q}$，我们是否可以将$\mathcal{Q}$拓展成Ω内部的一个六面体网格$\mathcal{H}$?

历史上，瑟斯顿首先从理论上厉清了这个问题【2】，他所用得理论工具来自微分拓扑。这一方法指导了六面体网格生成算法的研究长达二十多年，工业中著名的鲸须算法（Whisker）就是基于

这一理论【7】。

单位切丛的同伦群

给定一个光滑曲面S，曲面上所有的单位切向量构成一个三维流形$UTM(S)$，即所谓的单位切丛（unit tangent bundble），其定义为：

$$UTM(S):=\{(p,v)|p\in S, v\in TM_p(S), |v|=1\}。$$

固定一个点$p\in S$，所有的单位切向量构成一个圈；局部上，单位切丛具有直积结构；因此，曲面的单位切丛是一个纤维丛，每根纤维是一个圈。我们下面来直接构造球面的单位切丛。

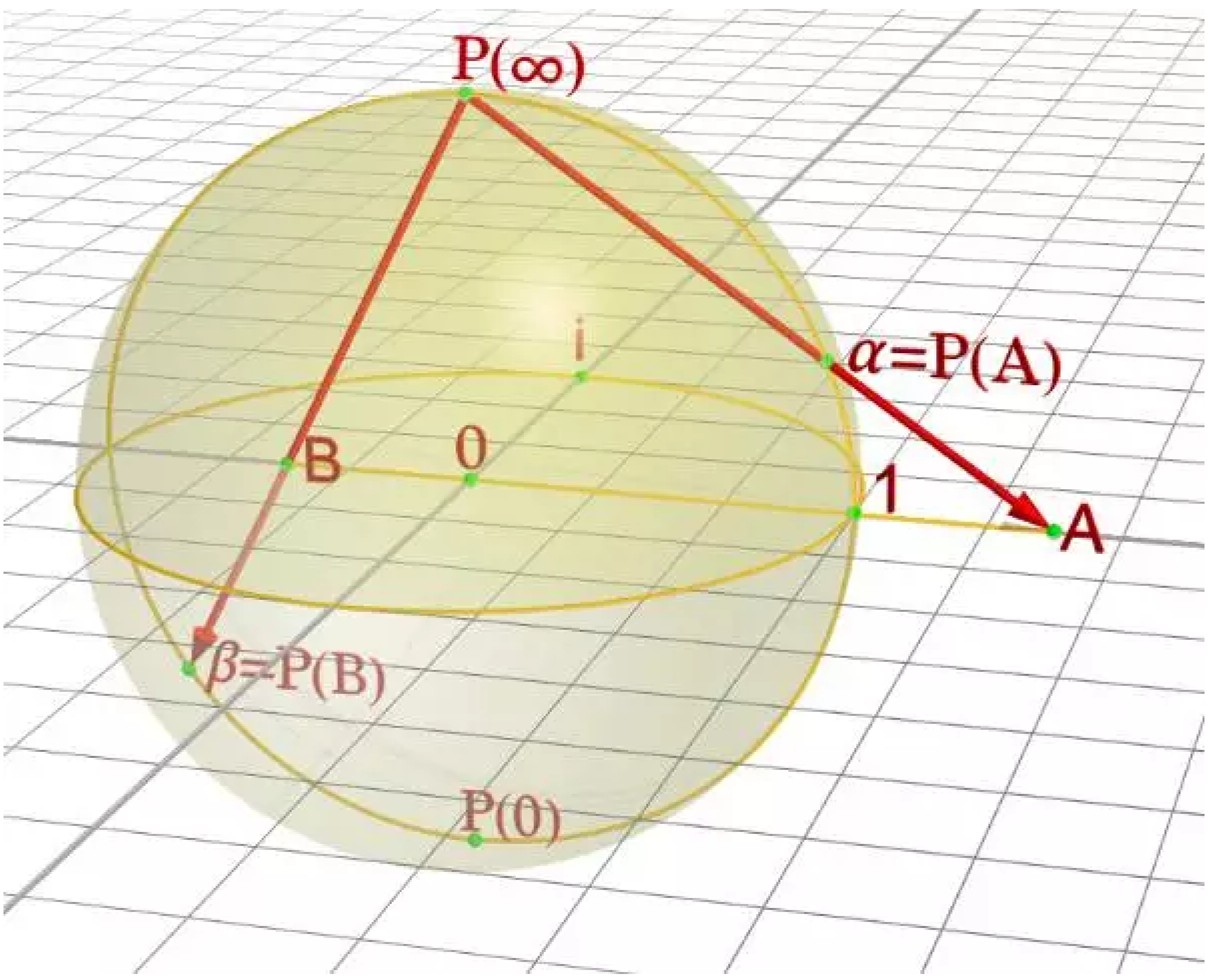


图1. 球极投影（Stereo-graphic Projection）。

给定单位球面$\mathbb{S}^2$，我们用球极投影来建立局部坐标。我们在北极放置一个光源，过赤道放置一张平面。发自北极点的射线穿透球面，投射到平面上，这样得到球面的局部坐标。球面上一点(x,y,z)映射到平面一点(X,Y)，直接计算得到：

$$(X,Y)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$$

。

这个局部坐标无法表示北极点。我们再将光源移至南极点，得到另外一个局部坐标：

$$(U,V)=\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right)$$

。

令$z=X+iY,\ w=U-iV$，我们得到坐标变换公式：$w=z^{-1}$。我们得到余切向量之间的变换公式：

$$dw=-\frac{1}{z^2}dz$$

。

我们考察赤道上的一个点$z=e^{i\theta}$，一个单位切向量$dz=e^{i\tau}$; 点坐标变换为 $w=e^{-i\theta}$，切向量坐标变换为$dw=e^{\pi-i2\theta+\tau}$。我们将坐标变换记为：$\varphi:(z,dz)\to(w,dw)$。

半球面的单位切丛是平凡丛，可以表示成$\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1$，这里$\mathbb{D}^2$，$\mathbb{S}^1$分别表示半球面和纤维。所以半球面的单位切丛是一个实心的轮胎。赤道的单位切丛是一个轮胎曲面$\mathbb{T}^2$，其参数为(θ,τ)。球面的单位切丛等价于将两个实心轮胎沿着其边界表面粘合起来，其粘合映射就是映射

$$\varphi:(\theta,\tau)\mapsto(-\theta,\pi-2\theta+\tau),$$

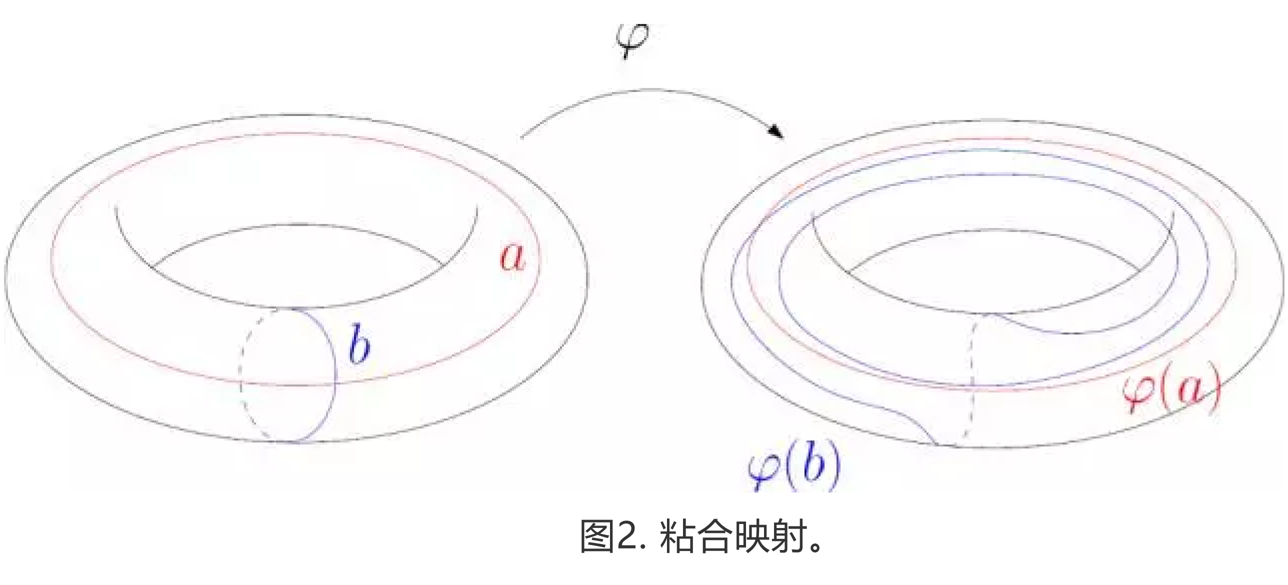


图2. 粘合映射。

粘合映射如图2所示，其中(a,b)分别代表纤维和赤道，粘合映射诱导的基本群间的映射可以写成如下形式：

$$\varphi_*: (a,b) \mapsto (a^{-1}, a^{-2}b)$$

粘合映射将纤维映成纤维，但是将赤道映成纤维和赤道的复合。

上半球面的单位切丛是一个实心轮胎，对应的同伦群为$\pi_1(M_1) = \langle a_1 \rangle$；同样的，下半球面的实心轮胎同伦群为$\pi_1(M_2) = \langle a_2 \rangle$；交集为环面，同伦群为$\pi_1(M_1 \cap M_2) = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$。同时，在$\pi_1(M_1)$中我们有$[a] = [a_1]$，$[b] = [e]$；在$\pi_1(M_2)$中我们有$[a] = [a_2^{-1}], b = [a_2^{-2}]$。根据Seifert-van Kampen定理，我们得到球面单位切丛的同伦群为:

$$\pi_1(M_1 \cup M_2) = \langle a | a^2 \rangle = \mathbb{Z}_2$$

模2域$\mathbb{Z}_2$只有两个元素0和1，这意味着：在球面的单位切丛上，所有封闭曲线只有两个同伦类。

正则同伦

正则同伦和通常意义下的同伦具有本质差别。假设光滑曲面S是一个拓扑球面，γ_0和γ_1是光滑封闭曲线（切向量处处有定义），那么γ_0可以在曲面上形变成γ_1，换言之，γ_0和γ_1彼此同伦（homotopy）。如果，我们要求γ_0在形变过程中，不出现尖点，切向量处处有定义，那么我们说γ_0和γ_1彼此正则同伦，或者光滑同伦（regular homotopy）。图6显示，具有偶数个自相交点的圈和简单圈（无自相交点）正则同伦。

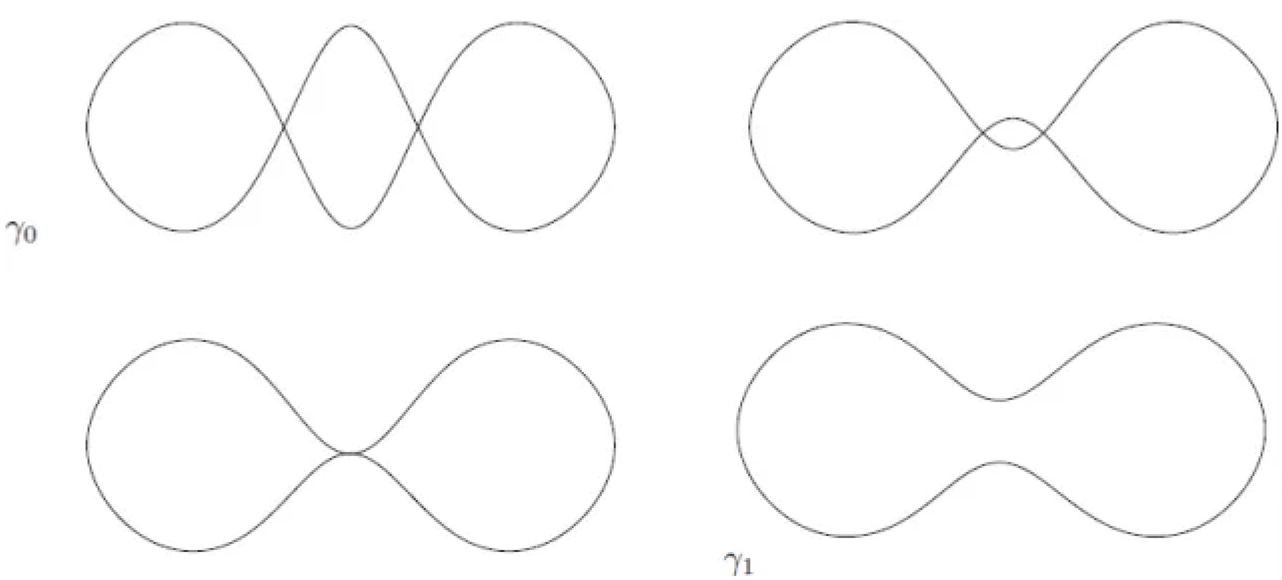


图3. 具有偶数个自相交点的圈和简单圈（无自相交点）正则同伦。

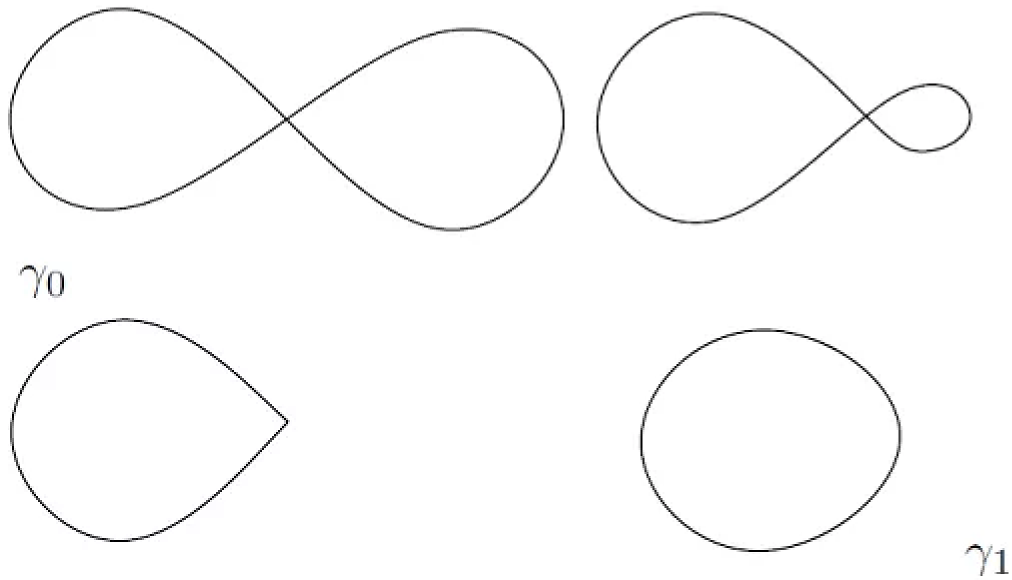


图4. 具有奇数个自相交点的圈和简单圈同伦，但是不正则同伦。

图4显示了具有奇数个自相交点的圈和简单圈同伦，但是并不正则同伦，因为在形变过程中，出现了尖点，在尖点处曲线的切向量无法定义。

那么，曲面S上所有光滑圈是如何被正则同伦分类的呢？这里，我们需要引入另一位菲尔茨奖得主斯梅尔（Smale）的工作。底流形上的一条光滑曲线$\gamma \subset S$，可以被“提升”为单位切丛上的一条曲线$\tilde{\gamma} \subset UTM$，点$\gamma(s)$被提升为点$(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \in \tilde{\gamma}$，这里s为弧长参数，$\dot{\gamma}(s)$为曲线的单位切向量。斯梅尔证明了：**底流形上两个圈正则同伦，当且仅当它们的提升在单位切丛上同伦**。由此，我们得到球面上具有两个正则同伦类：具有奇数个自交点的圈和具有偶数个自交点的圈。

如果两个圈γ_0和γ_1光滑同伦，则存在一个光滑曲面S连接γ_0和γ_1，意即

$$\partial S = \gamma_0 - \gamma_1。$$

曲面横截相交

在微分拓扑中，惠特尼（Whitney）对三维空间中光滑曲面的稳定相交情形进行了分类【3】。

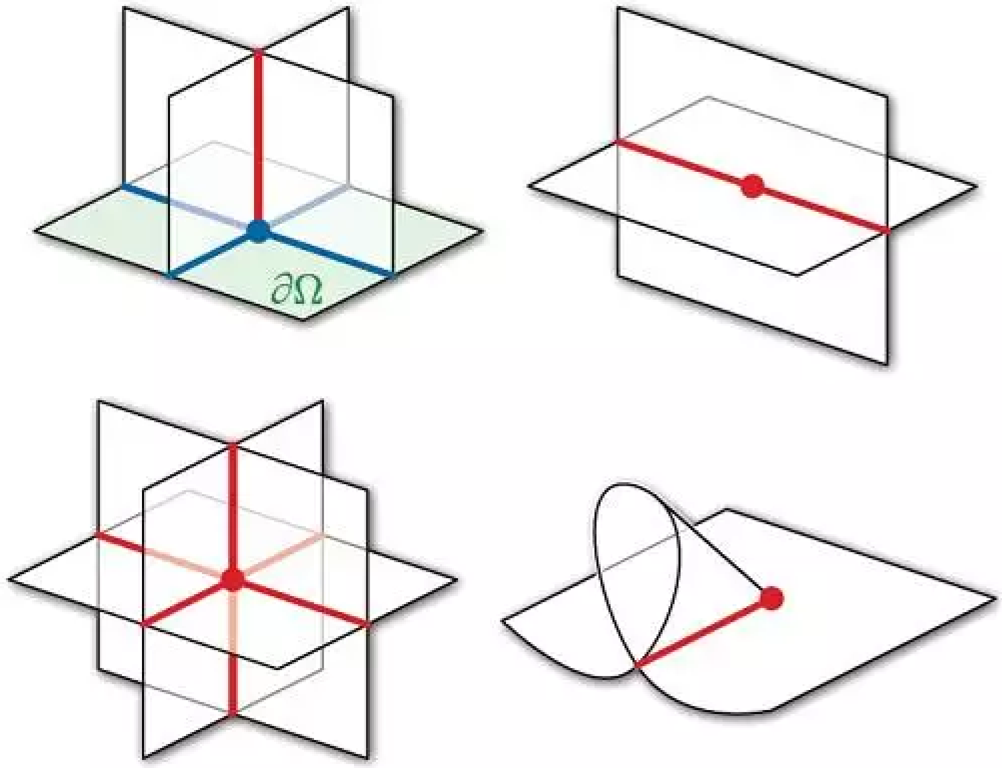


图5. 曲面稳定相交的分类， 边界双重点（boundary double point），内部双重点（interior double point），三重点（triple point），分支点（branch point）。

给定三维空间中的一族浸入曲面，曲面之间的交点被称为奇异点。经过微小扰动，曲面之间彼此不相切，所有奇异点都是稳定奇异点。图5给出了稳定奇异点的分类。其中三重点，和分支点是我们关注的对象。

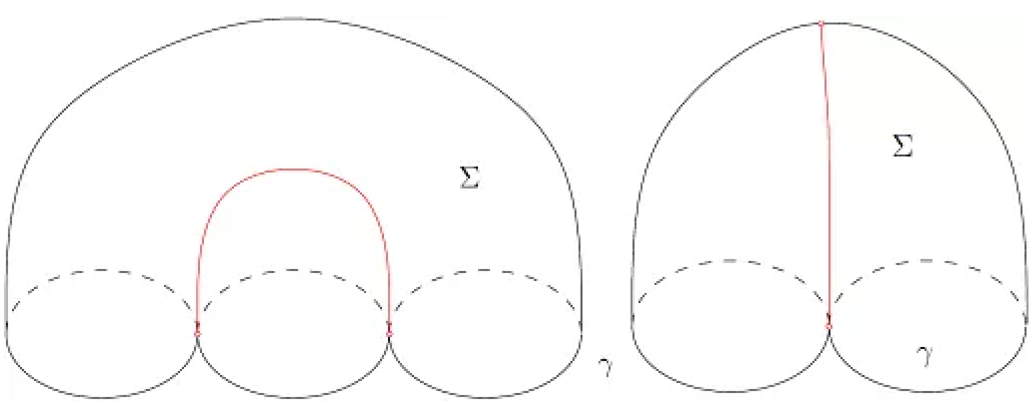


图6. 以光滑曲线γ为边界的曲面Σ，若曲线有偶数个自交点，则Σ没有分支奇异点；若曲线有奇数个自交点，则Σ必有分支奇异点。红色曲线是曲面自相交线。

如图9所示，更进一步，假设γ具有偶数个自相交点，则我们可以构造一个光滑曲面Σ以γ为边界，同时Σ有自相交曲线，但是上面没有分支奇异点；反之，若γ具有奇数个自相交点，则我们构造的以γ为边界的曲面Σ，必然有分支奇异点。

我们再回到神圣网格问题。瑟斯顿首先只考虑了拓扑六面体剖分，即每个胞腔是拓扑六面体，然后再考虑几何嵌入问题。我们依循他的思路来考察，核心的想法是对偶。

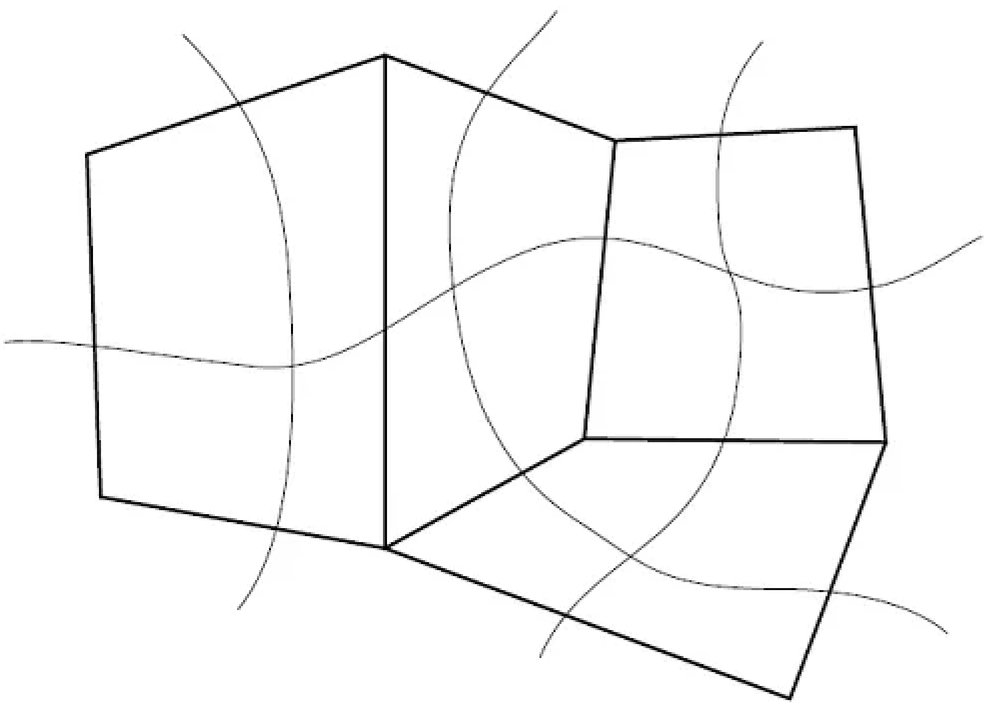


图7. 四边形网格$\mathcal{Q}$的对偶$\mathcal{Q}^*$。

我们首先介绍边界曲面$\partial\Omega$上的四边形网格$\mathcal{Q}$的对偶$\mathcal{Q}^*$。如图7所示，我们在每个四边形中连接对边中点，生成两条曲线段，这些曲线段连接成全局封闭的圈，这些圈彼此相交，构成对偶的曲线网格$\mathcal{Q}^*$，对偶曲线网格$\mathcal{Q}^*$所有顶点的度都是4。

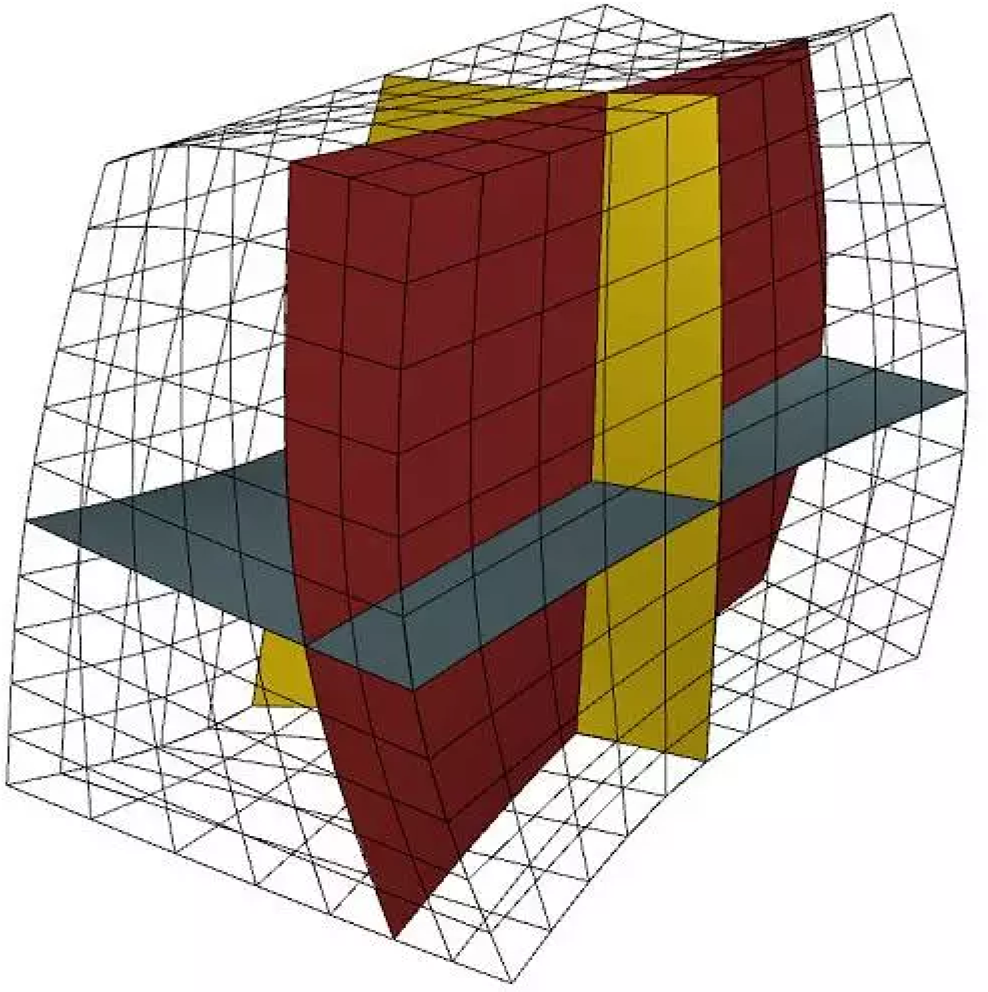


图8. 六面体网格$\mathcal{H}$的对偶$\mathcal{H}^*$。

同理，我们介绍实体Ω的六面体网格$\mathcal{H}$的对偶$\mathcal{H}^*$。如图8所示，我们在每个六面体中构造三张曲面片，彼此横截相交，共同交于一点。这些曲面片连接，得到全局曲面，这些曲面横截相交，构成对偶的曲面网格$\mathcal{H}^*$。$\mathcal{H}^*$将体Ω进行胞腔分解，$\mathcal{H}^*$的每个顶点都由三张曲面彼此横截相交得来，并且每个顶点都是Whitney理论中的三重点。

六面体网格的对偶$\mathcal{H}^*$和边界曲面$\partial\Omega$的交集就是四边形网格的对偶$\mathcal{Q}^*$。瑟斯顿的核心想法是**从$\mathcal{Q}^*$出发来构建$\mathcal{H}^*$。**$\mathcal{Q}^*$可以被分解为很多圈，我们希望能够以这些圈为边界构造曲面，这些曲面彼此横截相交，所有的交点都是三重点，那么这些曲面构成了$\mathcal{H}^*$，然后我们将$\mathcal{H}^*$对偶，就得到六面体网格$\mathcal{H}$。

这个思路的关键在于：以$\mathcal{Q}^*$为边界的**所有曲面的交点都是三重点，没有分支点。**瑟斯顿给出了一种消除分支奇异点的方法：如图10所示，给定一对分支奇异点，我们去除奇异点的邻域，粘贴上一张曲面，则所有的交点为内部双重点。

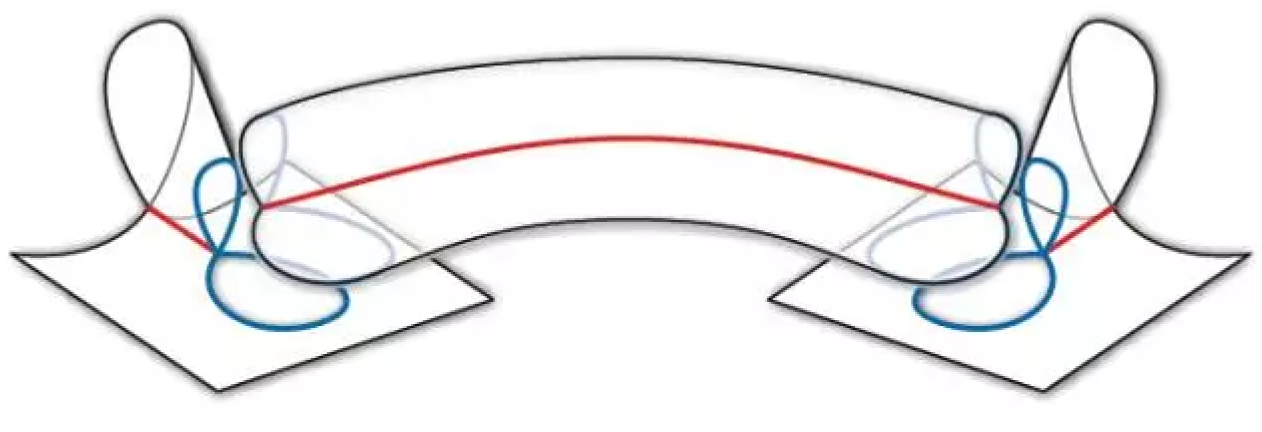


图10. 瑟斯顿的手术，消除分支奇异点【4】。

至此，我们可以证明下面的瑟斯顿定理。

定理： 假设Ω是三维空间中的一个实体（Solid），其边界$\partial\Omega$是一张亏格为0的光滑曲面（RegularSurface），更进一步，假设边界曲面$\partial\Omega$上给定四边形剖分$\mathcal{Q}$。那么四边形剖分$\mathcal{Q}$能够拓展成一个六面体剖分$\mathcal{H}$的充要条件是：$\mathcal{Q}$具有**偶数**个四边形面。

必要性：$\mathcal{H}$的每个六面体有6个四边形面，每个四边形面至多被两个六面体分享。因此，边界四边形必然为偶数。

充分性：$\mathcal{Q}^*$由一些分离的圈组成，他把这些圈依据自相交点数的奇偶分成两类:

$$\mathcal{Q}^* = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\} \cup \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n\},$$

这里γ_k有偶数个自相交点，τ_j有奇数个自相交点。根据欧拉公式$\mathcal{Q}^*$的顶点V，边E和面数F满足：

$$\chi(\partial\Omega) = V + F - E = V - F = 2, \quad 4F = 2E$$

因此顶点数必为偶数。任意两个圈的交点个数必为偶数。因此，所有圈的自相交点的个数必为偶数，具有奇数个自相交的圈$\{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n\}$的条数n必为偶数。过每一条$\gamma_k$构造光滑曲面$S_k$；将$\{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n\}$配对，过每对$\tau_i, \tau_j$构造光滑曲面$\Sigma_{ij}$，曲面族$\{S_k, \Sigma_{ij}\}$没有分支奇异点。我们可以在体的内部再加入一些拓扑球面B_l，那么$\{S_k, \Sigma_{ij}, B_l\}$只有三重点，我们得到六面体网格对偶$\mathcal{H}^*$。

后来，Mitchell【3】、Ericson【5】将Thurston【2】的理论推广完善，成为非结构化六面体网格生成的理论基础，所用的工具是同调理论。这种理论指导了所谓的“鲸须”（Whisker）算法【7】，成为工业界非结构化六面体网格生成最为普遍的方法。

拓扑障碍类

我们所构造的单位切丛是一个三维流形，我们可否找到一张曲面，和所有的纤维只交于一点。这张曲面被称为是全局截面（global section）。由于粘合映射的强烈扭曲，我们可以推测全局截面无法存在。这个想法的精确描述需要上同调语言，全局截面存在的拓扑障碍类就是陈类。我们后面会详细介绍。

【1】http://m.iqiyi.com/w_19rtrx33gx.html?wx_uid1=qyid79ECB59D-5D37-4938-8C8D-94EA627E917D&wx_uid2=wxidoG0a9jmCUQcEL7iHVqB_wwWL-gS4

【2】http://www.ics.uci.edu/~eppstein/gina/Thurston-hexahedra.html

【3】Scott A. Mitchell, "A Characterization of the Quadrilateral Meshes of a Surface Which Admit a Compatible Hexahedral Mesh of the Enclosed Volume." In proc. 13th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS `96), Lecture Notes in Computer Science 1046, Springer, pages 465-476, 1996.

【4】Hassler Whitney. The singularities of a smooth n-manifold in (2n-1)-space. Ann. Math. 45(2):247– 293, 1944.

【5】Jeff Erickson. Efficiently hex-meshing things with topology,*Discrete & Computational Geometry*52(3):427–449, 2014.

【6】David Eppstein. Linear-complexity hexahedral mesh generation. Comput. Geom. Theory Appl. 24 12:3–16, 1999.

【7】Nathan T. Folwell and Scott A. Mitchell. Reliable whisker weaving via curve contraction. Eng.32 Comput. 15(3):292–302, 1999.
