清华笔记：计算共形几何讲义 （11）黎曼映照（Riemann Mapping）的存在性

顾险峰 老顾谈几何 2017-07-17

【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。欢迎任何有兴趣的朋友，前来旁听指导。】

共形几何中最为大家所熟识的定理大概非黎曼映照莫属，其证明方法也是丰富多彩，各有千秋。这里，我们回忆一下经典的复分析手法，朴素初等，但是非常具有代表性。在复分析中，标准共形映射的存在性证明，一般都遵循如下的方法：首先定义一个全纯函数的正规族，然后考察函数的Taylor（或者Laurent）级数展开，构造一个序列使得某一个系数取得极值，由正规族的紧性得到极值函数的存在性，再证明这个极值函数就是所要求得的共形映射。我们下面的证明就是采用这种手法。

黎曼映照定理

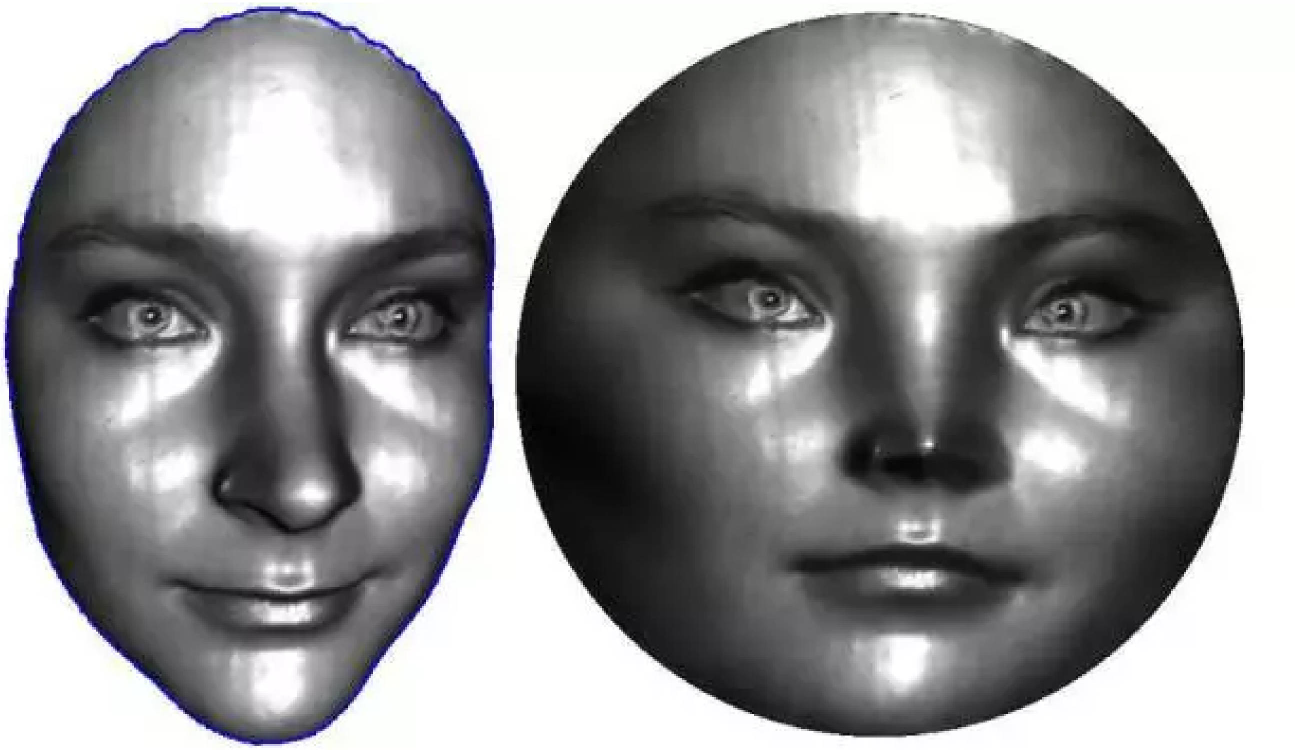

图1. 黎曼映照（Riemann Mapping）。

黎曼映照定理 给定复平面上单联通区域$\Omega \subset \mathbb{C}$，$\Omega$不是整个复平面，和一点$z_0 \in \Omega$，则存在唯一的一个解析函数$f : \Omega \to \mathbb{D}$，满足条件：$f(z_0) = 0$和$f'(z_0) > 0$，使得$f(z)$定义了从$\Omega$到单位圆盘$\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$的双射。

图2. 莫比乌斯变换（Mobisu Transformation）。

如图1所示，人脸曲面是一张单联通的带黎曼度量的曲面，存在共形映射，将人脸曲面映射到平面单位圆盘。同时，所有这种映射彼此相差一个圆盘到自身的莫比乌斯变换（Mobius Transformation）：

$$\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad \varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

如图2所示。

如果Ω是Jordan区域，那么共形映射可以延拓到边界上。

唯一性证明

我们先用最大值引理来证明Schwarz引理。

Schwarz引理　假设$f(z)$在$\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$上解析，并满足条件$|f(z)| \le 1$，并且$f(0) = 0$，那么$|f(z)| \le |z|$，并且$|f'(0)| \le 1$。如果存在一点$z \ne 0$，$|f(z)| = |z|$，或者$|f'(0)| = 1$，那么$f(z) = e^{i\theta} z$。

证明：我们构造函数

$$g(z)=\begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z\neq 0 \\ f'(0) & z=0 \end{cases}$$

在圆周$|z|=r<1$上，函数的模$|g(z)|\leq 1/r$，因此在圆盘$|z|\leq r$上，$|g(z)|\leq 1/r$。令 $r\to 1$，我们得到 $|g(z)|\leq 1$。如果在一点处，等式成立，根据极大值原理，$g(z)$必为常数。引理证明完毕。

引理2 假设$f(z)$是单位圆盘$\mathbb{D}=\{|z|<1\}$到自身的共形同胚，那么$f(z)$必为莫比乌斯映射。

证明：我们构造一个莫比乌斯映射

$$\varphi(z)=\frac{z-f(0)}{1-\overline{f(0)}z},$$

那么$g=\varphi\circ f$为单位圆盘到自身的共形同胚，并且$g(0)=0$。根据Schwarz引理，我们有

$$\forall z\in B(0,1),\quad |g(z)|\leq|z|,$$

同时由$w=g(z)$，我们有

$$|g^{-1}(w)|\leq|w|,$$

我们得到

$$\forall z\in B(0,1),\quad |g(z)|=|z|,$$

由Schwartz引理，我们得到 $g(z)=e^{i\theta}z$。$f(z)=\varphi^{-1}\circ g(z)$ 为莫比乌斯变换。引理证明完毕。

下面，我们用引理2来证明黎曼映照的唯一性。假设存在两个共形变换$f_1,f_2:\Omega\to\mathbb{D}$，那么复合映射

$$\varphi:=f_1\circ f_2^{-1}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$$

是单位圆盘到自身的共形映射，因此必为莫比乌斯变换。根据条件$\varphi(0)=0$和$\varphi'(0)>0$，我们得到$\varphi(z)=z$，即$f_1=f_2$。

存在性证明

我们考察所有满足如下3个条件的函数$g(z)$构成的函数族$\mathcal{F}$：

1. $g(z)$为解析函数，在Ω上是单射（univalent），
2. $\forall z\in\Omega,\quad |g(z)|<1$,
3. $g(z_0)=0$并且$g'(z_0)>0$。

证明分三个步骤：（1）函数族$\mathcal{F}$非空；（2）存在一个函数$f\in\mathcal{F}$，$f'(z_0)$达到最大；（3）这个函数f就是定理中的共形映射。

首先，我们证明函数族$\mathcal{F}$非空，即$\mathcal{F}\neq\emptyset$。根据假设，存在一个点$a\neq\infty$，不在Ω中。因为Ω是单连通的，我们可以在Ω内定义$\sqrt{z-a}$的一个单值分支，我们将这个函数记为$h(z)$。$h(z)$不会取同一个值两次，也不会相反的值：如果$w\in h(\Omega)$，那么$-w\notin h(\Omega)$。Ω在h下的像覆盖一个小圆盘$|w-h(z_0)|<\rho$，因此和圆盘$|w+h(z_0)|<\rho$没有交点。换言之，对于一切$z\in\Omega$，$|h(z)+h(z_0)|>\rho$, 因此我们得到

$$h_0(z)=\frac{\rho}{h(z)+h(z_0)}$$

在Ω上是单射（univalent），并且$\forall z\in\Omega,\ |h_0(z)|<1$。存在角度$\theta_0\in[0,2\pi)$,

$$h_1(z)=e^{i\theta_0}\frac{h_0(z)-h_0(z_0)}{1-\overline{h_0(z_0)}h_0(z)}$$

属于函数族$\mathcal{F}$，所以$\mathcal{F}$非空。

我们定义上确界

$$\beta=\sup_{g\in\mathcal{F}}g'(z_0),$$

存在序列$\{g_n\}\subset\mathcal{F}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}g_n'(z_0)=\beta。$$

根据Arzela-Ascoli定理，$\mathcal{F}$是一个正规函数族（normal family），因此$\{g_n\}$存在子序列$\{g_{n_k}\}$，在Ω上收敛到一个解析函数f，并且在Ω的任意一个紧集上都是一致收敛。因此，我们有$\beta=f'(z_0)$，因此β是有限的。由$\beta>0$，我们得到解析函数f不是常值函数。

我们欲证f是定理中的共形映射。首先f是univalent，否则存在相异的两点$z_1, z_2 \in \Omega$，取值相同$f(z_2)-f(z_1)=0$。因此，z_2是函数$f(z)-f(z_1)=0$的一个零点。根据Rouche定理，对于充分大的n，在z_2附近函数$f_n(z)-f_n(z_1)$具有零点z_n'，亦即$f_n(z_n')-f_n(z_1)=0$。这和在Ω上f_n是univalent相矛盾。故而极限函数f必是univalent。

我们已经证明$f:\Omega \to f(\Omega) \subset B(0,1)$是保角变换，我们需要进一步证明映射是满射，$f(\Omega)=B(0,1)$。因为$f:\Omega \to f(\Omega)$ 是双射，Ω是单连通的，因此$f(\Omega)$也是单连通的。如果存在单位圆内一点$w_0 \in \mathbb{D}$，不是像点$w_0 \notin f(\Omega)$，那么$w_0 \neq 0$，并且在Ω上函数

$$\sqrt{\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z)}}$$

具有解析分支，记为$f_2:\Omega \to B(0,1)$，f_2的限制$f_2:\Omega \to f_2(\Omega)$为双射，$f_2(\Omega) \subset B(0,1)$。令

$$F(z)=\frac{f_2(z)-f_2(z_0)}{1-\overline{f_2(z_0)}f_2(z)},$$

那么$F:\Omega \to B(0,1)$是单射，由$f(z_0)=0$得到$|f_2(z_0)|=\sqrt{|w_0|}$，

$$|F'(z)|=\left|\frac{1-\overline{f_2(z_0)}f_2(z)}{[1-\overline{f_2(z_0)}f_2(z)]^2}\right|\frac{1}{2\left|\sqrt{\frac{f(z)-w_0}{1-\overline{w_0}f(z)}}\right|}\left|\frac{1-w_0\overline{w_0}}{[1-\overline{w_0}f(z)]}\right||f'(z)|$$

带入$z=z_0$，

$$\begin{aligned}|F'(z)| &= \left|\frac{1-|f_2(z_0)|^2}{[1-|f_2(z_0)|^2]^2}\right|\frac{1}{2\sqrt{\frac{f(z_0)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z_0)}}}\left|\frac{1-w_0\bar{w}_0}{[1-\bar{w}_0 f(z_0)]^2}\right||\beta| \\ &= \frac{1}{1-|w_0|}\frac{1}{2\sqrt{|w_0|}}|1-|w_0|^2|\cdot|\beta| \\ &= \frac{1+|w_0|}{2\sqrt{|w_0|}}|\beta|>|\beta|\end{aligned}$$

构造函数

$$g(z)=\frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)}F(z),$$

那么$g \in \mathcal{F}$并且$g'(z_0)>\beta$，这和β的定义相矛盾。因此，假设错误，映射$f:\Omega \to B(0,1)$为满射。

由此，我们证明了$f:\Omega\rightarrow B(0,1)$为所要求的共形映射。证明完毕。

Schwartz-Christoffel 映射

当平面单连通区域是多边形的时候，黎曼映照具有非常简洁的形式：Schwartz-Christoffel映射。这一公式在工程上被广泛应用。

给定多边形$\Omega=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，在顶点$v_k$处，多边形外角为$\beta_k\pi$，共形映射记为$f:\Omega\rightarrow\mathbb{D},\ z\rightarrow w$。顶点$v_k$的原像和像记为$z_k$和$w_k$，那么逆映射具有形式

$$f^{-1}(w)=C_1\int_0^w\prod_{k=1}^n(w-w_k)^{-\beta}dw+C_2$$

，

这里C_1,C_2是两个复值常数。在实际应用中，我们往往需要探测w_k的位置，这增加了算法的复杂度。

虽然 Schwartz-Christoffel 公式具有显式表达，但是无法直接处理三维曲面。在实际应用中，我们更多地使用全纯微分和离散Ricci流的方法。
