Методы оптимизации

Евклидово пространство — линейное пространство, на котором введено скалярное произведение ‒ функция и обладающая следующими свойствами:

Полное пространство — пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства.

Гильбертово пространство — полное евклидово пространство.

— нормированное, если ‒ линейное, и на нем определен функционал , такой, что

# Теоремы существования

Задача оптимизации

Цель: найти

ограничено, если

неограниченно, если .

— предельная точка , если любая -окрестность этой точки содержит . будет предельной точкой , сходящаяся к .

‒ замкнутое, если оно содержит все свои предельные точки. Замкнутое множество является объединением всех своих внутренних и граничных (включая изолированные) точек. замкнуто.

‒ компактное, если для найдется , сходящаяся к точке, лежащей в . В любое замкнутое и ограниченное множество является компактным. не компактно.

, определенная на , непрерывна в точке в , если для , сходящейся к , справедливо .

непрерывна на множестве , если она непрерывна в каждой точке .

сходится ко множеству , если

— минимизирующая в задаче минимизации, если

#### Классическая теорема Вейерштрасса

Пусть

**замкнуто** и **ограничено** (т. е. компактно)

определена и непрерывна на .

Тогда

#### Теорема Вейерштрасса для компактных множеств

Пусть

**замкнуто**,

полунепрерывна снизу на

для некоторой точки множество Лебега **ограничено**

Тогда

#### Теорема Вейерштрасса для некомпактных множеств

Пусть

**замкнуто**,

полунепрерывна снизу на

для справедливо равенство

Тогда

# Дифференцируемость

Пусть определена , определена в и в .

дифференцируема в т. , если

Пусть дифференцируема в и .

дваждыдифференцируема в , если

## Безусловная оптимизация

Необходимое условие экстремума

* Пусть ‒ точка локального минимума, тогда, если , то.
* Пусть ‒ точка локального максимума, тогда, если , то .

Достаточное условие экстремума

* Пусть и , тогда ‒ точка локального минимума.
* Пусть и , тогда ‒ точка локального максимума.
* Если , нужны дополнительные исследования.
* Если знакопеременна, то ‒ не экстремум.

## Условная оптимизация

Функция Лагранжа:

#### Необходимое условие оптимизации

Если ‒ решение задачи, то

#### Достаточное условие оптимизации

Если

удовлетворяющим условиям

то ‒ точка локального минимума при , или точка локального максимума при .

Формула конечных приращений:

Теорема

Пусть .

, . Тогда

Пусть . Тогда

## Необходимое условие оптимальности

Пусть ‒ выпуклость. Пусть ‒ точка локального минимума. Если , то соблюдается ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО:

Если , то вариационное неравенство равносильно

# Элементы выпуклого анализа

— выпуклое, если

, определенная н выпуклом множестве — выпуклая на , если

, определенная на — строго выпуклая, если

, определенная на — сильно выпуклая, если

Свойства выпуклых функций:

* сумма выпуклых функций ‒ выпуклая функция
* сумма сильно выпуклых функций ‒ сильно выпуклая функция
* если ‒ выпуклая, то ‒ выпуклая или вогнутая
* сумма выпуклой и сильно выпуклой функции ‒ сильно выпуклая функция

#### Теорема (о локальном минимуме)

‒ выпуклая на выпуклом , тогда любая точка локального минимума является точкой глобального минимума.

Теорема (о множестве Лебега)

Если ‒ выпуклая на выпуклом , то множество Лебега ‒ выпуклое.

Следствие 1

Если ‒ выпуклая на выпуклом и , тогда ‒ выпуклое.

Следствие 2

Если строго выпуклая на выпуклом , тогда либо , либо .

Теорема (о касательной плоскости)

Пусть ‒ выпуклая на выпуклом , пусть для некоторого . Тогда

Теорема (о касательной плоскости для сильно выпуклых функций)

Пусть ‒ сильно выпуклая на выпуклом , для некоторого . Тогда

Теорема (критерий оптимальности)

Пусть ‒ выпуклое, , пусть ‒ точка локального минимума. Тогда

Если, кроме того, ‒ выпуклая, то, если

то ‒ точка глобального минимума.

### Теорема (Вейерштрасса для сильно выпуклых функций)

Пусть

‒ **выпуклое** и **замкнутое**,

‒ **сильно выпуклая** и полу непрерывная снизу

Тогда

### Критерии выпуклости и сильной выпуклости

Теорема 1

Пусть ‒ выпуклое, :

‒ выпуклая

*‒* сильно выпуклая

Теорема 2

Пусть ‒ выпуклое, :

‒ выпуклая

*‒* сильно выпуклая

## Проекция точки на множество

‒ проекция точки на множество , если

Теорема (характеристическое свойство)

Пусть ‒ выпуклое и замкнутое, тогда

существует и единственна

Теорема (свойство нерасширяемости)

Теорема (критерий оптимальности в проекционной форме)

Пусть ‒ выпуклое и замкнутое, ‒ выпуклая, . Тогда

Проекция на гиперплоскость:

Проекция на шар:

# Методы снятия ограничений

#### Теорема (правило множителей Лагранжа)

Пусть

‒ выпуклое и замкнутое,

непрерывно дифференцируемы в ,

‒ точка локального минимума

Тогда существует , такое, что

***Замечание***. Если , условие (2) равносильно

Нормализованная (нормальная) функция Лагранжа:

— седловая точка функции Лагранжа , если

#### Теорема (достаточное условие оптимальности)

Пусть

определены и конечны на .

‒ седловая точка функции

Тогда .

#### Теорема (условие Слейтера)

Если исходная задача выпукла, т. е. ‒ выпуклая функция на выпуклом , и , то задача регулярна, т. е. .

### Теорема (Куна-Таккера)

Пусть

‒ выпуклое замкнутое множество

‒ выпуклые функции на

(условие Слейтера)

Тогда

‒ седловая точка.

Если для некоторого набора соблюдаются условия (1)-(3) [правила множителей Лагранжа](#Правило_множителей_Лагранжа), и , то .

## Двойственные задачи

Двойственная задача

При этом имеет место соотношение

Двойственная задача ВСЕГДА выпукла.

Теорема

Для того, чтобы , , необходимо и достаточно, чтобы существовало седло , при этом множество седловых точек .

# Задачи

*Исследуйте на выпуклость, сильную выпуклость функции одной переменной в области их определения:*

Согласно [критерию выпуклости 2](#Критерий_выпуклости_2):

при ⇒ не выпукла не сильно выпукла

⇒ выпукла

⇒ не сильно выпукла

⇒ выпукла

⇒ не сильно выпукла

при ⇒ не выпукла не сильно выпукла

при ⇒ не выпукла не сильно выпукла

*Выясните, при каких значениях параметров будут выпуклыми, сильно выпуклыми на указанных множествах функции:*

Согласно [критерию выпуклости 2](#Критерий_выпуклости_2):

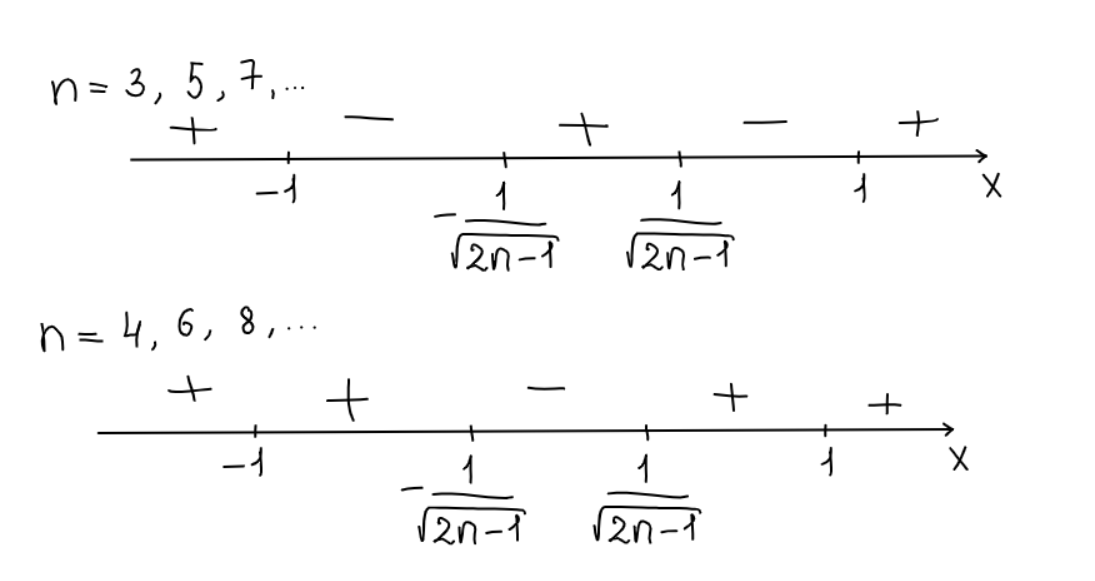
**Выпуклость**:

**Сильная выпуклость**:

**Выпуклость**:

**Сильная выпуклость**:

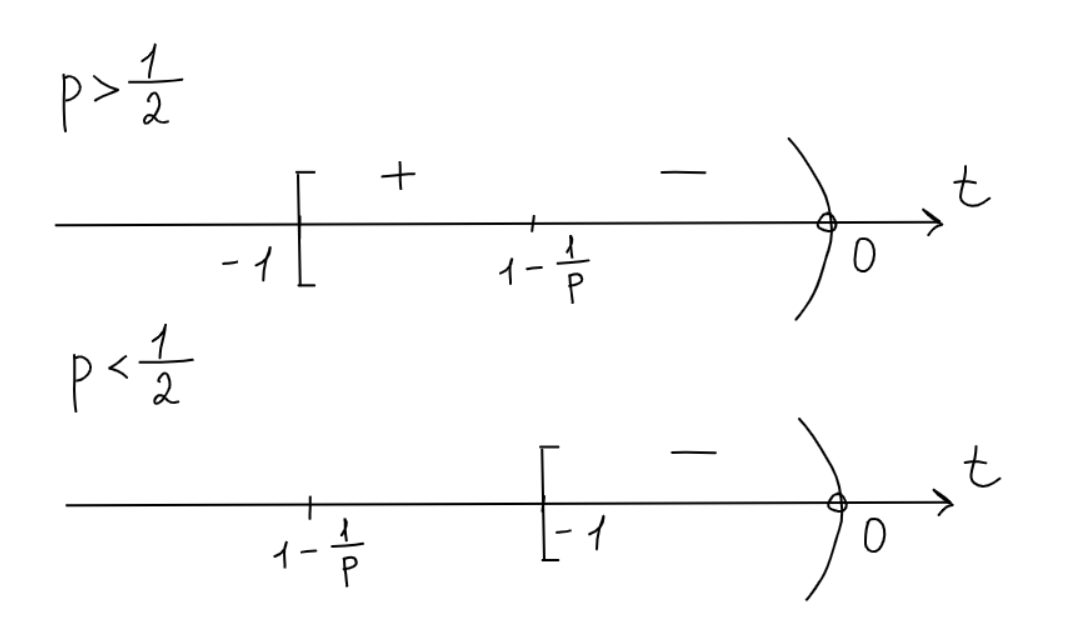
**Выпуклость**:



при ⇒ не выпукла

**Сильная выпуклость**:

**Выпуклость**:



при ⇒ не выпукла

**Сильная выпуклость**:

*С помощью критериев выпуклости докажите, что на указанных множествах будут выпуклы функции*

*Найдите проекцию нулевого вектора на множество X.*

‒ выпуклое пространство

‒ сильно выпуклая функция

выпуклая функция

⇒ выпуклая функция

‒ замкнутое выпуклое множество, ‒ сильно выпуклая непрерывная функция ⇒ по [теореме Вейерштрасса для сильно выпуклых функций](#_Теорема_(Вейерштрасса_для) решение существует и единственно.

*Постройте двойственные задачи к задачам:*

# Контрольная работа

*В пространстве рассматривается множество*

*При каких значениях параметра функция будет на нем выпуклой? Сильно выпуклой?*

Т. к. то, согласно [критерию выпуклости 2](#Критерий_выпуклости_2):

⇒ функция выпукла.

Сильная выпуклость:

функция сильно выпукла.

*Ответ:* выпукла , сильно выпукла при

*Найдите проекцию точки на множество*

Проекция точки — ближайший к элемент , т. е.

Решим задачу минимизации:

Это задача [условной минимизации](#_Условная_оптимизация), которая решается с помощью метода множителей Лагранжа:

[Необходимое условие оптимизации](#Необходимое_условие_Лагранжа):

Существует **единственная** точка , подозрительная на глобальный минимум.

‒ замкнутое множество (т. к. содержит все свои [предельные](#предельная_точка) точки), непрерывна,

для ⇒ по [теореме Вейерштрасса для некомпактных множеств](#ТВ_для_некомп_мн) решение существует и достигается в точке минимума, т. е. ‒ глобальный минимум.

*Ответ:*

*В пространстве рассматривается задача минимизации*

*Докажите, что для решения задачи можно применить теорему Куна-Таккера. С ее помощью найдите множество точек минимума и точную нижнюю грань . Укажите множители Лагранжа, соответствующие найденным решениям.*

Условия теоремы [Куна-Таккера](#_Теорема_(Куна-Таккера)):

1) ‒ выпуклое замкнутое множество

2) ‒ выпуклые функции на

Проверка на выпуклость согласно [критерию выпуклости 2](#Критерий_выпуклости_2):

* ,
* ,

3)

* ‒ выпуклое, т. к. ‒ выпуклое, ‒ выпуклые функции (п. 1 и п. 2)
* — замкнутое, т. к. содержит все свои [предельные](#предельная_точка) точки (ограничения нестрогие)
* ‒ сильно выпуклая (п. 2) и непрерывная снизу

⇒ по [Теореме Вейерштрасса для сильно выпуклых функций](#_Теорема_(Вейерштрасса_для)

4) (условие Слейтера)

⇒ задача удовлетворяет условиям теоремы Куна-Таккера, существует седло .

Составим [нормализованную функцию Лагранжа](#Нормализованная_Лагранжа):

По теореме Куна-Таккера .

*Ответ:*

*В пространстве рассматривается множество*

*При каких значениях параметра функция будет на нем выпуклой? Сильно выпуклой?*

Т. к. то, согласно [критерию выпуклости 2](#Критерий_выпуклости_2):

функция выпукла.

тут ничего не получается

*Найдите проекцию точки на множество*

Проекция точки — ближайший к элемент , т. е.

Решим задачу минимизации:

Это задача [условной минимизации](#_Условная_оптимизация), которая решается с помощью метода множителей Лагранжа:

[Необходимое условие оптимизации](#Необходимое_условие_Лагранжа): т. к.

Существует единственная точка , подозрительная на минимум.

‒ замкнутое множество (т. к. содержит все свои [предельные](#предельная_точка) точки), непрерывна,

для ⇒ по [теореме Вейерштрасса для некомпактных множеств](#ТВ_для_некомп_мн) решение существует и достигается в точке минимума, т. е. ‒ глобальный минимум.

*Ответ:*

*В пространстве рассматривается задача минимизации*

*Докажите, что для решения задачи можно применить теорему Куна-Таккера. С ее помощью найдите множество точек минимума и точную нижнюю грань . Укажите множители Лагранжа, соответствующие найденным решениям.*

Условия теоремы [Куна-Таккера](#_Теорема_(Куна-Таккера)):

1) ‒ выпуклое замкнутое множество

2) ‒ выпуклые функции на

Проверка на выпуклость согласно [критерию выпуклости 2](#Критерий_выпуклости_2):

3)

тут ничего не получается

4) Условие Слейтера:

⇒ задача удовлетворяет условиям теоремы Куна-Таккера, существует седло .

Составим [нормализованную функцию Лагранжа](#Нормализованная_Лагранжа):

*Ответ:*