Теория случайных процессов

# 1. Действительная случайная величина

Вероятностное пространство

* Ω ‒ множество **элементарных событий**
* ‒ σ-алгебра — система подмножеств множества Ω, содержащая Ω и замкнутая относительно операций объединения, вычитания и, следовательно, пересечения множеств. Элементы σ-алгебры называются **событиями**.
  + для любого ,
  + ,
  + Если ‒ не более чем счетный набор попарно непересекающихся множеств из , то
  + Если и , то

Отображение — вероятностная мера.

Если множество состоит из конечного числа элементов, и алгебра состоит из всех подмножеств , то

События и — эквивалентные , если

Лемма. .

События и —независимые, если

Лемма. Если события и независимы, то независимы и следующие события:

n

## Условная вероятность

Пусть ‒ вероятностное пространство и таково, что .

Тогда существует новое вероятностное пространство , в котором множество элементарных событий есть , алгебра состоит из множеств

Вероятность — условная вероятность события при условии . Обозначается .

Набор событий , где не более чем счетно, — полная система событий, если

## Формула Байеса

Лемма. Для любого имеет место равенство

Формула Байеса

Пусть ‒ полная система событий и . Тогда

Доказательство:

## Определение

Действительная случайная величина (ДСВ) — вещественнозначная измеримая функция на множестве элементарных событий:

## Простые примеры

#### Пример

Бросание монеты ‒ вероятностное пространство есть, а случайной величины нет. Случайной величиной является, например, *количество выпавших орлов*.

Для заданной случайной величины нас интересуют вероятности

#### Пример

Случайная величина называется дискретной, если она принимает конечное или счетное число значений.

## Закон, функция и плотность распределения ДСВ

### Дискретная СВ

Закон распределения В — совокупность пар , где ‒ это все возможные значения , . При этом .

Функция распределения ДСВ — функция

### Непрерывная СВ

СВ — непрерывная, если существует ‒ плотность распределения вероятностей СВ , т. е. такая интегрируемая функция, что для любых

Функция распределения непрерывной СВ — функция

### Математическое ожидание

### Совместное распределение вероятностей

Пусть ‒ ДСВ, зависящие от элементарного исхода . Эти величины задают отображение по формуле .

Функция совместного распределения — вероятность

Функции распределения отдельных величин можно восстановить по формулам:

Для непрерывных случайных величин определяется совместная плотность вероятности :

Две СВ — независимые, если для любых значений выполнено неравенство

Если независимы, то

### Функции от ДСВ

Если ‒ функция, а ‒ СВ, то ‒ тоже СВ.

Пусть чередует интервалы монотонности, непрерывна в каждом интервале монотонности, лишь в изолированных точках. Тогда

где ‒ функции, обратные к в интервалах ее монотонного возрастания и убывания соответственно.

### Бесконечные семейства СВ

Пусть ‒ счетное семейство СВ. Статистические свойства семейства заданы. если для любого конечного набора при различных задана совместная функция распределения.

причем имеют место условия:

* согласованности
* инвариантности функции распределения относительно совместной одновременной перестановки любой пары индексов и соответствующих им значений .

## Характеристическая и производящая функции ДСВ

### Характеристическая функция

Пусть ‒ функция распределения ДСВ . Тогда определим характеристическую функцию :

Если ‒ дискретна, и принимает значения , то:

Если ‒ непрерывна, то

Теорема

Пусть ‒ независимые СВ. Тогда

### Производящая функция

Пусть ‒ ДСВ с целочисленными неотрицательными значениями.

Производящая функция СВ — функция от комплексной переменной , не превосходящей по абсолютной величине 1, которая задается формулой:

Производящая функция бесконечно дифференцируема при .

Теорема

Пусть ‒ независимые СВ с целочисленными неотрицательными значениями. Тогда

Теорема

Пусть ‒ независимые, одинаково распределенные СВ с целочисленными неотрицательными значениями и ‒ СВ с целочисленными неотрицательными значениями, не зависящая от . Тогда

# 2. Случайные процессы (СП)

## Определение

Случайный процесс — семейство СВ , где ‒ параметр, принадлежащий множеству (время). может быть дискретным: или непрерывным: .

Реализация или выборочная функция СП — функция из в множество значений , переходит в одно из возможных значений .

## Свойства СП

1. ***Пространство состояний*** ‒ общее для всех . Оно состоит из всех возможных значений всех возможных СП . Если , то это класс **целочисленных** процессов, если , то это класс **действительных** процессов. Если , то это класс **-мерных** процессов.
2. ***Временной параметр*** ‒ дискретный или непрерывный, в зависимости от пространства . Возможен многомерный временной параметр .
3. ***Отношения зависимости*** между различными .

Процесс полностью задан, если заданы 1, 2, 3.

Совместные функции распределения для любого конечного набора времен — конечномерное распределение процесса .

## Численные характеристики СП

### СП с независимыми приращениями

Если независимы для всех , то процесс ‒ процесс с независимыми приращениями.

Если существует минимальное , то предполагается, что независимы.

### Мартингалы

‒ мартингал, если для всех и для всех допустимых значений

Лемма. Пусть , где независимы и . Тогда ‒ мартингал с дискретным временем.

### Марковские процессы

Процесс, для которого его поведение в будущем при точном знании его состояния в настоящем не зависит от его поведения в прошлом. Т. е. дальнейшее поведение процесса будет зависеть только от его состояния в данный момент времени, а не от того, как процесс в это состояние пришел.

СП — марковский, если

Функция переходных вероятностей, :

**Лемма.** Распределение набора можно выразить через функцию переходных вероятностей и распределение начальной СВ .

Марковский процесс имеет стационарные переходные вероятности, если является функцией лишь разности .

### Стационарные процессы

#### В узком смысле

Для любого совместное распределение семейства СВ и одинаково при любом и при всех . может быть .

#### В широком смысле

СП ковариационно стационарен, т. е. существует и зависит только от при любом .

# 3. Марковские цепи

## Определение

‒ дискретная марковская цепь, если это марковский случайный процесс

у которого пространство состояний конечно или счетно, а .

## Матрица одношаговых переходных вероятностей МЦ

Одношаговая переходная вероятность — вероятность того, что процесс в момент времени окажется в состоянии при условии того, что в момент времени он находился в состоянии .

При условии, что МП обладает стационарными переходными вероятностями, т. е. для любых и , имеем

— марковскую матрицу или матрицу одношаговых переходных вероятностей МЦ.

Здесь строка ‒ распределение вероятностей СВ при условии , при этом и при

## Матрица перехода за шагов

Вероятность перехода за шагов — вероятность того, что процесс перейдет из состояния в состояние за переходов

Матрица вероятностей перехода за шагов:

## Связь с матрицей одношаговых вероятностей

Для -шаговой переходной вероятности и для любых фиксированных и таких, что выполняется

При этом по определению

Теорема

Матрица -шаговых переходных вероятностей равна -1 степени матрицы одношаговых переходных вероятностей:

Доказательство:

Для событие «переход из в за 2 шага» состоит из объединения непересекающихся событий

для всевозможных , откуда

Далее, по индукции

***Следствие.*** Если , то

## Лемма об определении МЦ

Лемма

Марковская цепь со стационарными переходными характеристиками полностью определена, если задана матрица одношаговых переходных вероятностей и начальное распределение . Т. е. можно узнать конечномерное распределение вероятностей в любые ненулевые моменты времени и ‒ отношения зависимости между в различные моменты времени.

Доказательство:

Пусть . Тогда

Продолжим по индукции:

# 4. Состояния марковской цепи

## Классификация состояний

Состояние достижимо из состояния , если существует такое, что .

Состояния и — сообщающиеся, если достижимо из , а достижимо из .

## Сообщаемость состояний как отношение эквивалентности

На некотором множестве задано **отношение** ‒ множество пар:

Элементы находятся в отношении, если их пара попадает в множество пар .

Отношение является отношением **эквивалентности**, если выполняется

* ‒ рефлективность
* ‒ симметричность
* ‒ транзитивность

Отношение сообщаемости является отношением эквивалентности:

‒ по определению состояние достижимо из самого себя

Если сообщаются, то , т. е. они достижимы друг из друга

Все состояния разбиваются на непересекающиеся классы эквивалентности.

## Неприводимость и периодичность

Марковская цепь неприводима, если отношение сообщаемости порождает только один класс эквивалентных состояний, т. е. все каждое состояние достижимо из любого другого.

Период состояния (обозначение ) — наибольший общий делитель всех , для которых . Если для всех , то период состояния по определению равен 0.

Теорема

Если состояния и сообщающиеся, то .

Доказательство

Т. к. существуют такие , что , то

откуда следует, что делится на .

Если для выполнено , то , следовательно, делится на , ⇒ делится на .

Иначе говоря, ‒ общий делитель тех , для которых . Аналогично получаем, что делится на , т. е. .

Теорема

Если состояние имеет период , то существует такое, что для любых целых чисел вероятность . То есть возврат в состояние может происходить во все достаточно далекие моменты времени, кратные .

Теорема

Если , то и для всех достаточно больших положительных целых .

Марковская цепь, каждое состояние которой имеет период 1 — непериодическая.

## Возвратность состояния

Пусть дана ‒ дискретная марковская цепь, то есть ‒ конечно или счетно, а время . Состояния нумеруются целыми неотрицательными числами.

Тогда вероятность попасть первый раз в состояние после начального состояния на -м шаге:

Положим также для всех .

Состояние — возвратное, если . Если , то ‒ невозвратно.

Теорема. Признак возвратности состояния

Состояние является возвратным тогда и только тогда, когда

Доказательство:

Рассмотрим производящие функции :

Отдельно рассмотрим два ряда:

тогда произведение этих рядов ‒ это новый степенной ряд:

Вернемся к производящей функции:

***Лемма Абеля***

Если ряд сходится и его сумма конечна:

Если все , и

По лемме Абеля:

Теорема о возвратности класса состояний

Если ‒ возвратное состояние и состояния и ‒ сообщающиеся, то ‒ возвратное состояние.

Доказательство:

Т. к. отбрасывание конечного числа первых члена не влияет на сходимость, то

Весь класс эквивалентных состояний либо одновременно возвратен, либо одновременно невозвратен.

Т. е. возвратность ‒ свойство класса эквивалентности состояний марковской цепи.

Теорема

Доказательство:

На -ом шаге мы в первый раз возвращаемся в исходное состояние, в который нам надо вернуться еще раз, поэтому:

Следствие. Пусть . Если и оба состояния возвратны, .

# 5. Предельные теоремы

— источник, если не существует такого, что .

— концевое (поглощающее) состояние, если не существует такого, что .

*—* соседнее по отношению к состоянию , если . Если и , то и называются соседними.

— транзитивное, если существуют такие, что и .

Подмножество состояний — замкнутое, если, попав в одно его состояние, система не может выйти из этого подмножества .

— связное или эргодическое, если для любого можно попасть в любое . В эргодическом множестве нет источников или поглощающих состояний.

— транзитивное, если система может войти в это подмножество и выйти из него (т. е. из любого можно за некоторое время выйти из ).

Случайный процесс можно трактовать как процесс блуждания по множеству состояний .

## Стационарный режим и финальные вероятности

Если существуют , то они называются финальными вероятностями состояний, т. е. это средняя доля времени, которую система проводит в состоянии .

Совокупность финальных вероятностей — стационарное распределение или стационарный режим.

### Условия существования стационарного режима марковской цепи

1. множество всех состояний цепи должно быть **эргодическим**, т. е. марковская цепь должна быть неприводима;
2. цепь должна быть **однородной**, т. е. иметь стационарные переходные вероятности ;
3. цепь не должна быть циклической, т. е. ее состояния имеют период .

Цепи Маркова, удовлетворяющие условиям 1‒3 — эргодические.

### Стационарный режим конечной марковской цепи

Пусть ‒ однородный марковский процесс с конечным числом состояний и пусть существует стационарный режим.

При больших , где не зависит от . Получаем систему из однородных алгебраических уравнений

Эта система линейно зависима и имеет бесконечное множество решений, поэтому добавляется уравнение нормировки:

Система уравнений на финальные вероятности:

### Основная предельная теорема для марковских цепей

— вероятности оказаться в -м состоянии на -м шаге при условии . по определению.

‒ вероятность впервые возвратиться в состояние на -м шаге, причем по определению.

Теорема

Для марковской цепи

возвратной

неприводимой

однородной

непериодической

со счетным числом состояний

вероятность попасть после большого числа шагов в состояние примерна одинакова при любых начальных состояниях

и она обратно пропорциональна среднему времени первого возврата

***Следствие.*** Пусть ‒ возвратный класс. Тогда при и для . Следовательно, попав в , выйти из него невозможно. Следовательно, подматрица является матрицей переходных вероятностей для неприводимой марковской цепи с состояниями из класса . Поэтому можно применять предельную теорему для всякого непериодического возвратного класса.

***Следствие.*** Если входит в возвратный непериодический класс, то

где ‒ среднее время возврата. Если входит в возвратный периодический класс, то

## Система уравнений на финальные вероятности непериодического возвратного положительного класса

***Лемма.*** Если для некоторого состояния из непериодического возвратного класса, то для всех из этого класса.

Непериодический возвратный класс со всеми — возвратно положительный или сильно эргодический.

Если все и класс возвратный, то класс возвратно нулевой или слабо эргодический.

Теорема

Для непериодического возвратного положительного класса со счетным числом состояний финальные вероятности удовлетворяют системе уравнений

И величины однозначно определяются условиями

Набор , удовлетворяющий таким условиям, называется стационарным распределением возвратного класса марковской цепи.

Доказательство:

Рассмотрим вероятность :

Переходим к пределу по :

При устремлении в бесконечность:

Домножим обе части на и просуммируем по всем :

Проделывая аналогичную процедуру, получаем, что

Предположим, что это неравенство строгое:

Т. к. все ограничены, то, переходя к пределу по

Докажем, что, если есть некоторая последовательность, удовлетворяющая такой системе уравнений, то она совпадает с финальными вероятностями.

Домножим на :

Продолжая такой процесс, получаем

Переходя к пределу по , получаем

Лемма. Если и ‒ состояния одного и того же возвратного периодического класса, то существует аналог для периодического случая:

## Предельные теоремы для невозвратных состояний

### Вероятность остаться среди невозвратных состояний

Пусть ‒ множество всех невозвратных состояний. Рассмотрим вероятность

‒ невозрастающая неотрицательная последовательность, имеющая предел:

Причем

Если единственным ограниченным решением этого уравнения является вектор , то с вероятностью 1 процесс будет поглощен одним из классов возвратных состояний.

***Замечание.*** Если марковская цепь имеет конечное число состояний, то среди них нет возвратных нулевых, а все состояния не могут быть невозвратными.

## Вероятности поглощения

Пусть ‒ возвратные классы. Вероятность поглощения невозвратного состояния возвратным классом :

## Система уравнений на вероятности поглощения невозвратных состояний возвратным классом

Пусть ‒ вероятность того, что, выйдя из невозвратного состояния , процесс попадет в на -м шаге.

Тогда .

Если единственным ограниченным решением однородной системы уравнений является нулевой вектор, то является единственным решением данной системы.

Более того, либо существует , такое, что , либо для всех и для всех .

Теорема

Пусть ‒ непериодический возвратный класс и . Тогда для имеем

## Критерии возвратности

Теорема

Для того чтобы неприводимая марковская цепь со счетным числом состояний 0, 1, 2, … была невозвратна, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

имела ограниченное решение, отличное от .

Теорема

Для того, чтобы неприводимая марковская цепь с состояниями 0, 1, 2, … была возвратной, достаточно, чтобы существовала последовательность такая, что

Доказательство:

Рассмотрим матрицу одношаговых переходных вероятностей другого процесса :

Так как процесс невозвратный, то .

Для процесса

Значит, ‒ ограниченное решение системы уравнений

отличное от константы.

Существует также решение . Т. к. система однородна, то линейная комбинация двух решений также является решением, т. е. существует решение .

Подбирая и можно получить решение .

По условию

При

Следовательно, выполняется

Умножив последние равенства слева на и просуммировав по , получаем

и, следовательно, для всех имеем

Цепь неприводима, поэтому

Из последнего следует, что в цепи состояние 0 является возвратным классом, а каждое из состояний должно быть невозвратным.

Таким образом имеем

по теореме о вероятностях поглощения, имеем

где ‒ вероятность, выйдя из состояния , быть поглощенным состоянием 0 в цепи .

При всех выполняется неравенство

При получаем .

Возможны два случая: либо существует для такое, что , либо все .

В первом случае . Тогда в цепи состояние достижимо из 0 и вероятность возвращения меньше 1. Значит, цепь невозвратна.

Во втором случае рассмотрим новое решение исходной системы

и применим к нему все рассуждения.

Получим

что и позволяет сделать вывод о невозвратности цепи .

# 6. Потоки событий

Поток событий — последовательность точек на оси .

С потоком событий можно связать несколько случайных величин:

* ‒ промежутки времени между соседними событиями.
* ‒ количество событий за время , ‒ количество событий за время .

СВ ‒ **непрерывная**, СВ ‒ **дискретная**. Если рассмотреть в качестве времени в первом случае ‒ число взятых промежутков, а во втором случае ‒ прошедшее время, то процесс в первом случае ‒ с **дискретным** временем, а во втором ‒ с **непрерывным**. Реализация ‒ ступенчатая функция.

Имеет смысл рассмотреть ‒ количество событий на маленьком промежутке времени .

Поток — регулярный, когда .

## Интенсивность потока событий

Пусть ‒ ДСВ, равная числу событий в потоке, произошедших за промежуток времени .

Если существует предел

то он называется интенсивностью потока и обозначается , т. е. это среднее число событий, приходящихся на единицу времени для элементарного участка , примыкающего к .

Интенсивность потока измеряется в .

## Свойства потоков

### Ординарность

Тогда выполнено неравенство

Предполагаем, что величина сравнима с при , т. е.

Поток событий — ординарный, если верно

Среднее ординарного потока событий может быть получено по формуле

где ‒ сколь угодно большая, но не стремящаяся к бесконечности при величина.

Тогда

Таким образом, — интенсивность ординарного потока событий.

Среднее число событий за промежуток вычисляется по формуле

### Поток без последействия

Поток без последействия — это поток событий, для которого на любых непересекающихся участках времени

**числа событий** являются независимыми случайными величинами.

### Пуассоновский поток

Ординарный поток событий без последействия — пуассоновский поток, число событий в нем называется пуассоновским процессом.

### Стационарный поток

Поток событий — стационарный, если все его вероятностные характеристики не меняются со временем. В частности, вероятность попадания события на участок зависит от , но не зависит от . Интенсивность стационарного потока постоянна: .

### Простейший поток

Простейший поток — стационарный пуассоновский поток.

## Пуассоновский поток

Рассмотрим простейший поток . Его постулаты:

Выведем вероятность .

Сначала выведем вероятность . Поток без последействия, поэтому верно

Для вероятности рассуждаем аналогично:

Введем вспомогательные функции . Тогда выполнены следующие равенства:

Аналогично получаем

При фиксированном СВ является случайной величиной с распределением Пуассона и параметром . Среднее число событий за время равно .

## Поток Пальма

Поток событий — поток с ограниченным последействием, если **временные промежутки** между событиями в потоке являются независимыми случайными величинами.

Поток Пальма — **стационарный** поток с ограниченным последействием.

Теорема

**Простейший поток** является потоком Пальма. Интервал между двумя событиями является случайной величиной с показательной плотностью распределения.

Доказательство:

Простейший поток — стационарный пуассоновский поток.

Надо найти закон распределения интервала времени между любыми двумя соседними событиями:

Это вероятность того, что на промежутке времени длины появилось хотя бы одно событие потока.

,поэтому и .

Значит, имеют одинаковые экспоненциальные распределения с плотностью .

Независимость величин следует из отсутствия последействия в пуассоновском потоке.

Среднее время между событиями в простейшем потоке с интенсивностью определяется по формуле:

## Время наступления очередного события

Пусть дан поток событий, ординарный, с интенсивностью , зависящей от времени. Надо найти распределение ‒ времени наступления очередного события.

Если момент времени наступления очередного события больше времени , то

# 7. Марковские процессы с непрерывным временем

Рассмотрим процесс , имеющий состояние: . Пусть некоторым парам состояний процесса

поставлены в соответствие положительные функции . Каждое такое число является интенсивностью пуассоновского потока, и переход процесса из состояния в состояние происходит тогда и только тогда, когда процесс находится в состоянии , а в потоке с индексами происходит событие. Пуассоновские потоки считаются независимыми.

Если ‒ интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние , то при малом времени и имеем

## Однородные и эргодические марковские процессы

Если не зависит от при любых , то марковский процесс называется однородным.

Марковский процесс называется эргодическим, если выполнено следующее:

* множество всех его состояний эргодично

все потоки, переводящие процесс из одного состояния в другое — простейшие.

## Уравнения Колмогорова

Обозначим . Какова вероятность ?

Есть две непересекающиеся возможности:

Полученные уравнения называются уравнениями Колмогорова и описывают динамику процесса во времени. Начальные условия задаются с помощью начального распределения:

Дополнительно включается уравнение нормировки:

которое означает, что в любой момент времени процесс находится в одном из состояний .

### Инфинитезимальная матрица процесса

Поток вероятностей, переводящих процесс из состояния в состояние :

Правило составления уравнений Колмогорова:

Производная вероятности любого состояния равна сумме потоков вероятностей, переводящих процесс в это состояние минус сумма потоков вероятностей, выводящих процесс из этого состояния.

Интенсивности потоков , переводящих процесс из состояния в состояние , образуют матрицу интенсивностей процесса :

Система уравнений Колмогорова может быть записана в матричном виде:

где ‒ вектор-строка распределения процесса, а матрица ‒ инфинитезимальная матрица процесса:

недиагональные элементы матрицы совпадают с недиагональными элементами матрицы интенсивностей , а диагональными элементами матрицы являются суммы элементов матрицы интенсивностей по соответствующим строкам, взятые с обратным знаком.

### Стационарный режим

При переходе к стационарному режиму . Следовательно

В стационарном режиме для каждого состояния сумма всех входящих потоков вероятностей равна сумме всех выходящих потоков.

Добавив уравнение баланса

получаем систему уравнений на финальные вероятности.

## Переход от марковского процесса с непрерывным временем к марковской цепи с дискретным временем

1. Надо выбрать шаг достаточно малым, чтобы за время был невозможен переход из текущего состояние в не соседнее, и чтобы ни в одном пуассоновском потоке, воздействующем на систему, практически не могло появиться больше одного события за время .
2. Посчитать для каждой пары состояний , для которой , одношаговую переходную вероятность , где ‒ номер шага, по формуле .
3. Посчитать для каждого состояния вероятность остаться на месте за один шаг на -ом шаге по формуле

Если процесс однородный, то для любых .

Чем меньше , тем точнее, но тем больше вычислений. ∆*t* надо выбирать так, чтобы максимальное приращение вероятностей не превышало заданной точности *ε* вычислений.

Начинаем с произвольной , если , то уменьшаем .

Формулы, с помощью которых по ищем , следуют из нижеизложенных:

## Цепи Маркова с конечным числом состояний и непрерывным временем

Рассмотрим процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем . Будем считать, что процесс однороден, то есть вероятности

не зависят от (стационарные переходных характеристики)

Выполнено следующее:

Обозначим . При таком обозначении уравнение Колмогорова‒Чэпмена имеет вид

Из этого условия следует, что ‒ единичная матрица.

#### Свойство непрерывности

Последнее условие означает непрерывность при . Из уравнения Колмогорова‒Чэпмена и непрерывности при следует непрерывность при всех , т. к.

### Система дифференциальных уравнений на переходные вероятности

Найдем . Для этого найдем

Для марковского процесса с конечным числом состояний верно . Инфинитезимальная матрица имеет вид:

Имеем

откуда следует

Обратите внимание на перестановочность матрицы переходных вероятностей за время и инфинитезимальной матрицы . В отличие от системы дифференциальных уравнений для матрицы , в системе уравнений Колмогорова для вектора-строки распределения процесса в момент времени существенен порядок сомножителей:

При решении используются методы дифференциальных уравнений:

Практически, находим базис, в котором диагональна, т. е.

‒ собственные значения . Тогда

Столбцы матрицы образуют полную систему соответствующих правых собственных векторов .

Строки матрицы образуют полную систему соответствующих левых собственных векторов, биортогональных к .

# 8. Процессы рождения и гибели

Значение пуассоновского процесса в момент времени ‒ число событий, произошедших в пуассоновском потоке за время . Одномерное распределение в момент времени для такого процесса является пуассоновским распределением с параметром , где ‒ интенсивность потока.

Обобщением пуассоновских процессов являются процессы, в которых вероятность наступления событий зависит от числа событий, уже произошедших. К такому типу процессов относятся процессы гибели и размножения.

## Постулаты процессов размножения и гибели

Рассмотрим марковский процесс со счетным числом состояний, непрерывным временем, и стационарными вероятностями перехода

не зависящими от времени .

Процесс — процесс рождения и гибели, если выполнены следующие условия:

Аналогично марковским цепям,

Пусть ‒ длительность пребывания процесса в состоянии . Нас интересует распределение времени до первого выхода процесса из состояния при условии, что .

Введем обозначение

Функция распределения случайной величины равна

Процесс марковский, поэтому при выполнено

**Время пребывания** процесса рождения и гибели в состоянии подчинено **экспоненциальному** распределению. с параметром, равным сумме соответствующих этому состоянию и .

Процесс покидает состояние , когда в пуассоновском потоке с интенсивностью происходит событие.

Такой поток может рассматриваться как объединение двух независимых потоков, первого с интенсивностью и второго с интенсивностью . Если в таком потоке происходит событие, то оно принадлежит первому потоку с вероятностью и второму потоку с вероятностью .

## Реализация процесса рождения-гибели

Пусть .

Находим

1. , считая, что оно распределено экспоненциально с параметром ;
2. переход из в или с вероятностями соответственно и

Далее процесс повторяется для нового состояния. Пример реализации:

Для реализации процесса рождения и гибели делаются выборки из экспоненциального и биноминального распределений.

## Дифференциальные уравнения

Для переходных вероятностей процесса рождения и гибели можно написать систему дифференциальных уравнений, при этом мы можем записать эту систему в матричной форме, умножая матрицу переходных вероятностей на инфинитезимальную матрицу как слева, так и справа:

* ‒ матрица переходных вероятностей за время
* *‒* инфинитезимальная матрица процесса:
* ‒ инфинитезимальные интенсивности рождения и гибели

Если , то нулевое состояние ‒ поглощающее.

Вероятность того, что за малый промежуток времени популяция увеличится или уменьшится на 1, пропорциональна этому промежутку.

### Обратные дифференциальные уравнения Колмогорова

Если мы рассмотрим матричное уравнение

мы получим систему обратных дифференциальных уравнений Колмогорова:

В этих уравнениях  **фиксировано, меняется**.

Начальное условие следует из факта, что за нулевое время процесс никуда перейти не может:

Вывод этих уравнений получается разбиением промежутка времени на два промежутка: :

При этом

### Прямые уравнения Колмогорова

Если мы рассмотрим матричное уравнение

мы получим систему обратных дифференциальных уравнений Колмогорова:

В этих уравнениях  **фиксировано, меняется**.

## Стационарный режим

Пределы существуют, не зависят от начальных условий и удовлетворяют уравнениям:

Эти уравнения можно получить, приравнивая к нулю левую часть прямых уравнений Колмогорова.

Из того, что следует, что сходится.

Если , то последовательность называется стационарным распределением и для него выполнено:

Решить эту систему можно по индукции. Для этого выразим все через . Введем обозначения:

Тогда . Предположим, что , тогда для

Из последнего следует , а значит мы доказали наше предположение по индукции.

Для того, чтобы было распределением, надо, чтобы .

Если , то

Если , то и в этом случае не существует предельного стационарного распределения.

## Процесс чистого рождения

Постулаты процесса чистого рождения:

* Предположим также, что процесс однородный, т. е. со стационарными переходными характеристиками.
* От пуассоновского процесса процесс чистого рождения отличается только зависимостью от .
* Значение процесса ‒ число рождений на .
* Функция в каждом уравнении ‒ своя бесконечно малая функция.

Теорема

Обозначим . Тогда

Доказательство:

Так как

то

Далее:

и, переходя к пределу при получаем исходные уравнения, откуда

Как уже было показано,

где ‒ время первого рождения.

Если ‒ время между и рождениями, то из постулатов можно вывести, что также имеют экспоненциальное распределение с параметром . При конкретных значениях можно последовательно проинтегрировать уравнения:

Еще одно требование, которое должно выполняться:

Лемма

Время между соседними рождениями распределено экспоненциально с параметром , то есть среднее время между -м и -м рождением равно , поэтому ‒ среднее время до того, как популяция стала бесконечной. Отсюда следует, что при , популяция становится бесконечной за конечное время.

## Процесс Юла

Процесс чистого рождения. Считается, что ‒ прирост популяции за время .Каждый член популяции рождает нового члена в интервале времени с вероятностью .

В момент времени в популяции членов. Тогда

откуда .

## Линейный рост с иммиграцией

Пусть инфинитезимальные параметры процесса рождения и гибели определяются формулами:

* ‒ текущий размер популяции
* ‒ естественный прирост
* ‒ естественная гибель
* ‒ внешний источник

Средний размер популяции в момент времени определяется по формуле:

Уравнения Колмогорова процесса имеют вид:

Умножим -е уравнение на и просуммируем. Получаем слева производную , а справа выражение

Это значит, что среднее в момент времени удовлетворяет уравнению

* Если , то при .
* Если , то при

# 9. Броуновское движение

## Нормально распределенная случайная величина

ДСВ имеет гауссовское (нормальное) распределение, если она непрерывна и ее плотность распределения определена формулой:

* ‒ математическое ожидание СВ ,
* ‒ дисперсия СВ

Характеристическая функция определена формулой:

Стандартное — гауссовское распределение с параметрами .

Лемма

Если две СВ и независимы и имеют гауссовское распределение с математическими ожиданиями и и дисперсиями и соответственно, то их сумма также имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием и дисперсией .

## Процесс броуновского движения

Процесс броуновского движения является примером марковского процесса с непрерывным временем и непрерывным пространством состояний. Будет рассмотрен одномерный случай.

* ‒ положение частицы на прямой в момент времени .
* ‒ условная плотность вероятности величины при условии, что .

Предполагается, что процесс обладает стационарными переходными вероятностями, т. е. вероятность не зависит от начального момента времени .

Случайный процесс — процесс броуновского движения / гауссовский / винеровский, если он обладает следующими свойствами:

1. Для любых разность является **гауссовской** случайной величиной со средним, равным 0, и дисперсией , где ‒ фиксированный постоянный параметр.
2. Для любого натурального числа непересекающихся интервалов времени **приращения** являются **независимыми** действительными гауссовскими случайными величинами, распределенными согласно п.1.
3. **Реализации** процесса **непрерывны** почти всюду на временном интервале .

Корректность определения следует из свойств гауссовского распределения, сформулированных в лемме: если , то

‒ сумма независимых нормально распределенных случайных величин с нулевыми матожиданиями и дисперсиями является нормально распределенной случайной величиной с нулевым матожиданием и дисперсией .

Без ограничения общности будем в дальнейшем считать, что .

Из пункта 2 о независимости приращений процесса случайного блуждания следует его **марковское свойство**: для любых выполнено

Вычислим совместную плотность распределения СВ при условии, что .

Эта плотность, взятая в точке равна совместной плотности распределения случайных величин , взятой в точке . Последние являются приращениями процесса и, в силу пункта 2 определения, независимы и нормально распределены с нулевым матожиданием и дисперсиями, равными :

Если и нам известно , то условная плотность величины определена однозначно, независимо от значения :

Найдем плотность величины при известных и . Совместная плотность и при условии равна

Если известно, что и , то получаем:

Таким образом, условная плотность при условии и является нормальной с математическим ожиданием

и дисперсией

Если принять то условная плотность примет вид

## Принцип отражения

Траектории броуновского движения являются непрерывными, хотя и не дифференцируемыми ни в одной точке. В силу симметричности нормального распределения относительно оси ординат, для каждой траектории можно построить соответствующую ей траекторию

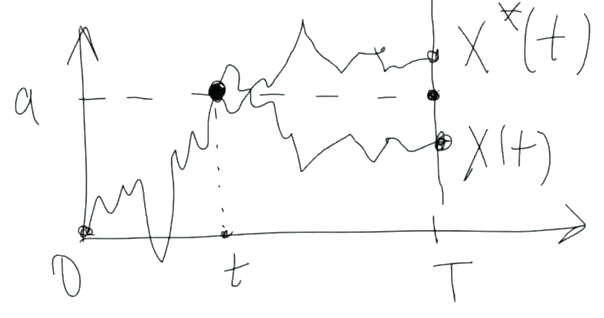
график которой будет симметричным отражением графика относительно прямой .

## Задача о максимуме

Требуется найти вероятность того, что в течение промежутка времени траектория достигнет точки при условии, что .

Если , то существует момент времени , когда траектория впервые достигает значения . Траектории и достигают значения , при этом либо ровно одна из них в точке принимает значение больше , либо .

Следовательно, каждой выборочной траектории с соответствуют две равновероятные выборочные траектории и такие, что максимальное значение каждой из них на промежутке времени не меньше, чем .



С другой стороны, если , но , то является одной из двух равновероятных выборочных траекторий, для одной из которых значение в больше, чем .

## Задача о минимуме

Пусть даны . Требуется найти вероятность того, что в течение промежутка времени траектория не опустится ниже 0 и примет в значение больше, чем при условии, что .

Обозначим искомую вероятность . Тогда

Применим принцип отражения к последнему слагаемому. Любая выборочная траектория, принимающая в нулевой момент времени положительное значение и пересекающая на промежутке ось абсцисс, имеет равновероятную выборочную траекторию, симметричную исходной относительно оси абсцисс с момента пересечения. Поэтому выполнено:

В правой части равенства условие излишне, поскольку , из чего следует

Откуда следует, что

В результате получаем:

## Задача о плотности распределения момента первого достижения уровня

‒ момент первого достижения винеровским процессом уровня при условии, что . Если выполнено неравенство , то это означает, что

Поэтому для функции распределения момента верно

Сделаем замену переменной . Тогда

Продифференцировав функцию распределения по , получим плотность распределения

# 10. Канонические разложения случайных процессов

* если и независимы, то

Неслучайная функция при некоторых условиях на раскладывается в ряд Фурье:

где

Идея В. С. Пугачева состояла в том, чтобы представить случайный процесс в виде случайного ряда:

где ‒ случайные величины, а ‒ неслучайные функции. Для любого можно построить такое разложение несколькими способами.

Пусть ‒ центрированная случайная величина, т. е. , ‒ неслучайная функция. Тогда

называется элементарным случайным процессом.

Корреляционная функция случайного процесса — неслучайная функция , которая при каждой паре аргументов и равна ковариации соответствующих сечений случайного процесса и , т. е.

**Свойства** корреляционной функции

1. положительно определена, т. е. верно

Для элементарного случайного процесса:

Нормированная корреляционная функция определяется как

где ‒ среднеквадратичное отклонение.

**Свойства** нормированной корреляционной функции:

Каноническое разложение случайного процесса — представление его в виде

* ,
* ‒ некоррелированные центрированные случайные величины с дисперсиями ,
* ‒ неслучайные функции аргумента

‒ **коэффициенты** канонического разложения

‒ **координатные функции** канонического разложения

Найдем характеристики , заданного своим каноническим разложением. При фиксированном зависит линейно, поэтому

но для любого по условию , поэтому

Учитывая, что

получаем:

Это каноническое разложение корреляционной функции случайного процесса .

Мы доказали, что из существования канонического разложения процесса следует существование канонического разложения его корреляционной функции.

Можно доказать обратное утверждение: если существует каноническое разложение корреляционной функции случайного процесса , то может быть представлен каноническим разложением.

Каноническое разложение дисперсии :

**Замечание 1.** Каноническое разложение случайного процесса неоднозначно.

**Замечание 2.** Одинаковые канонические разложения могут иметь различные законы распределения, т. к. распределены различно.

**Замечание 3.** Практические способы основаны на статистических данных.

## Интегральное каноническое представление

В каноническом разложении мы считаем натуральным числом. Пусть ‒ действительное, меняющееся с шагом , где ‒ элементарная длина. Тогда

При , значит,

— случайная функция непрерывного аргумента , — функция двух непрерывных аргументов:

Теперь можно записать интегральное каноническое представление случайного процесса :

## Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов

**Задача:**

имеется система , на вход дается , на выходе получается , выход — реакция системы.

Символическая запись: , где ‒ оператор системы :

Можно ставить два типа задач: прямую и обратную.

1. Прямая

* известны характеристики (или законы распределения) на входе в систему ,
* известен оператор системы ,
* требуется определить характеристики (или законы распределения) случайного процесса на выходе .

2. Обратная

* известны характеристики (или законы распределения) на входе в систему ,
* заданы требования к характеристикам (или законам распределения) случайного процесса на выходе ,
* требуется определить вид оператора системы , наилучшим образом удовлетворяющий заданным требованиям к .

Прямая задача проще обратной.

Третий тип задач: зная и , определить характеристики .

Модификация обратной задачи: постановка, как в обратной, только вид предполагается известным, требуется найти параметры .

Проведем анализ множества операторов .

, ‒ линейные, ‒ нелинейные операторы. , ‒ однородные, ‒ неоднородные.

называется линейным однородным оператором, если

, где не зависит от .

Отсюда следует

Если входное воздействие отсутствует, то реакция системы равна нулю ‒ это верно для однородных линейных операторов.

— линейный неоднородный оператор, если оператор можно представить в виде , где однороден, а ‒ неслучайная функция.