# 22.09.2020

## Понятие УрЧП

Уравнение в частных производных — уравнение вида:

Порядок — порядок старших производных.

* УрЧП — линейное, если оно линейно относительно и всех ее производных.
* УрЧП — квазилинейное, если оно линейно относительно старших производных.

Решить УрЧП – найти такую , для которой .

## Элементы линейной алгебры

Пусть в стандартным образом задано скалярное произведение:

Если — некоторая невырожденная матрица, то мы можем рассмотреть невырожденную билинейную форму:

Если мы рассмотрим такое , что , то матрица – симметрическая, тогда соответствующая квадратичная форма имеет вид:

– ортонормированный базис, матрица – симметрическая, как линейный оператор — самосопряженный, т. е. .

Матрица самосопряженного линейного оператора в ортонормированном базисе, состоящем из собственных векторов, диагональная.

Найдем канонический базис в , в котором квадратичная форма примет вид:

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы как линейного оператора:

Характеристический многочлен самосопряженного линейного оператора имеет только вещественные корни.

Собственные векторы самосопряженного линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

В результате матрица примет диагональный вид, и на главной диагонали будут располагаться собственные значения с учетом их кратностей:

В базисе из собственных векторов единичной длины :

## Приведение уравнения к диагональному виду

Рассмотрим УрЧП 2-го порядка следующего вида:

– дважды непрерывно дифференцируема на , т. е. не важен порядок дифференцирования:

Следовательно, матрица – симметрична.

Данную матрицу можно привести к диагональному виду заменой координат.

Возьмем функцию .

Будем считать, что замена координат — невырожденная.

Мы рассматриваем некоторую окрестность фиксированной точки .

Сделаем обратное преобразование:

В новых координатах производные в уравнении приобретут следующий вид:

* – новый вид
* – производные в новых координатах, но меньшего порядка

Рассмотрим наше уравнение в новых координатах:

Пусть

Тогда уравнение имеет вид:

где — функция, куда входят все «отклонения», т.е. члены, которые содержат и ***меньших*** порядков, чем , в т.ч.

Зафиксируем точку . Обозначим , тогда

Данное выражение – аналог преобразования квадратичной формы:

Это невырожденное линейное преобразование, где

Получим новую квадратичную форму

## Типы уравнений

1. Эллиптический — либо все коэффициенты положительны, либо все отрицательны.

‒ оператор Лапласа

1. Гиперболический — один(!) знак отличается.
2. Параболический — один из коэффициентов равен нулю.
3. Ультра-гиперболический — больше одного отличающегося знака

# 29.09.2020

В таком случае порядок дифференцирования не важен:

Тогда мы можем рассмотреть симметричную матрицу

которую с помощью замены переменных привести к диагональному виду.

Можно выбрать такие функции

что уравнение приобретёт следующий вид:

Необходимо выбрать такую замену координат, чтобы при :

## Характеристики

Определение. Пусть задана некоторая функция .

‒непрерывна дифференцируема

При этом на поверхности выполнены следующие условия:

Тогда поверхность — ***характеристика*** или характеристическая поверхность исходного квазилинейного уравнения 2-го порядка.

Пусть , т. е. дважды непрерывно дифференцирована. Положим

Тогда поскольку градиент не равен нулю:

то мы можем сделать невырожденную замену переменных, такую, что

В преобразованном уравнении исчезает одна компонента, уравнение упрощается.

Уравнение сводится к уравнению не в пространстве, а на гиперповерхности (обобщение понятия поверхности 3-мерного пространства для -мерного пространства).

### Волновое уравнение

Это уравнение гиперболического типа:

Характеристическое уравнение (характеристический конус) волнового уравнения:

Характеристический конус с вершиной в точке — это поверхность, которая задается уравнением:

*Доказательство:*

Подстановка этой характеристики (характеристической поверхности) в характеристическое уравнение дает образует равенство:

Другое семейство характеристик волнового уравнения:

*Доказательство:*

### Уравнение теплопроводности

Это уравнение параболического типа, т. к. коэффициент перед равен 0:

Характеристическое уравнение уравнения теплопроводности:

Поэтому все характеристики ‒ плоскости:

*Доказательство:*

### Стационарное уравнение

Если , то данное уравнение называется *уравнением* Лапласа:

Если , то данное уравнение называется *уравнением* Пуассона:

Это уравнение эллиптического типа:

Характеристическое уравнение отсутствует, т. к.:

## Типы уравнений по краевым и начальным условиям

### Уравнение упругих поперечных колебаний струны

— волновое уравнение гиперболического типа.

При постоянной плотности оно приводится к следующему виду:

Для -мерных колебаний:

### Стационарный процесс

Уравнение эллиптического типа:

### Процессы диффузии и передачи тепла

Уравнение параболического типа, :

Для векторного поля :

Аналогично, для :

## Дивергенция

Пусть — некоторая область, в которой изменяется .

— граница области , кусочно-гладкая.

Тогда для уравнения Лапласа или уравнения Пуассона область — область задания уравнения, т. к. нет зависимости от .

Для волнового и теплового уравнения

Тогда мы можем задать не просто область, а цилиндр:

Этот цилиндр будет являться областью задания данных уравнений.

Граница цилиндра будет состоять из трех частей: нижняя, верхняя и боковая поверхности:

Для следующих типов уравнений всегда заданы:

### Волновое

Область задания уравнения — :

### Теплопроводное / диффузии

Область задания уравнения — :

### Стационарное

Область задания уравнения — :

Кроме того, необходимо задать начальные условия и/или краевые условия.

### Три типа краевых задач:

1. Задача Коши для гиперболического типа

, отсутствуют граничные условия.

1. Краевая задача для эллиптического типа

Заданы граничные условия, начальные условия отсутствуют.

1. Смешанного типа для гиперболического и параболического типов

Заданы начальные и граничные условия,

# 06.10.2020

Пусть дана некоторая область , время , и мы считаем, что наше уравнение, если это уравнение гиперболического (волновое) или параболического (теплопроводности) типа, то оно задано на цилиндре

Область задания эллиптического (стационарного процесса) типа — область .

* Волновое (гиперболическое) :
* Теплопроводности (параболическое) :
* Стационарного процесса (эллиптическое) :

Если уравнение в точке имеет гиперболический или эллиптический тип, то можно говорить, что в некоторой маленькой окрестности оно сохраняет свой тип. Если чуть-чуть подвигать параметры, то уравнения гиперболического и эллиптического типа останутся такими же, в параболическом за счёт вырождения может выскочить один из других типов. Вырождение происходит в точке, поэтому рядом может оказаться невырожденный случай.

Для решения уравнения, т. е. нахождения функции , необходимо задать начальные и краевые условия. Для гиперболического и параболического типов существует задача Коши, когда мы задаем начальные условия.

### Задача Коши

, начальные условия заданы в при

### Краевая задача

не существует. , условия на границе

### Смешанная задача

, начальные + краевые условия\

## Постановка задачи Коши

### Уравнение колебаний (волновое)

Уравнение гиперболического типа:

***Задача Коши*** — требуется найти такую функцию класса , удовлетворяющую уравнению при и начальным условиям при :

Необходимо, чтобы

### Уравнение диффузии (передачи тепла)

Уравнение параболического типа:

***Задача Коши*** — требуется найти класса , удовлетворяющую уравнению при и начальным условиям при :

Необходимо, чтобы

## Постановка краевой задачи

### Стационарное уравнение

Уравнение эллиптического типа:

***Краевая задача*** — найти функцию класса , удовлетворяющую уравнению на и граничному условию на :

‒ заданные непрерывные функции на границе , причём .

— дифференцирование по направлению нормали .

задают разные типы граничных условий:

* Если бы не было , то была бы функция, заданная на границе
* Если бы не было , была бы задана скорость изменения на границе

### Типы краевых задач

* Граничные условия 1 рода
* Граничные условия 2 рода
* Граничные условия 3 рода

### Уравнение Лапласа / Пуассона

* Задача Дирихле
* Задача Неймана

## Постановка смешанной задачи

### Волновое уравнение

***Смешанная задача*** — необходимо найти функцию класса , удовлетворяющую уравнению в цилиндре , начальным условиям на нижнем основании цилиндра

и граничным условиям на боковой поверхности цилиндра:

При этом должны выполняться условия гладкости:

и условие согласованности:

### Уравнение диффузии

***Смешанная задача*** — необходимо найти функцию класса , такую, что градиент , удовлетворяющую уравнению в цилиндре , начальному условию

и граничному условию

Необходимо, чтобы было выполнено условие гладкости:

и условие согласованности:

## Корректность постановки задачи

### Корректность по Адамару

1. Решение должно существовать в некотором классе функций .
2. Решение единственно в этом классе функций .
3. Решение должно непрерывно зависеть от исходных данных (от всех коэффициентов, свободных членов, начальных и краевых условий).

### Условие Ковалевской

Существует набор функций и их всевозможные производные по и по ( ‒ число, ‒ количества по частных производных, т. е. раз дифференцировано по , и раз по ) и наложены следующие условия на и на :

* не зависят от производных порядка выше по и порядка выше по
* удовлетворяет условию:

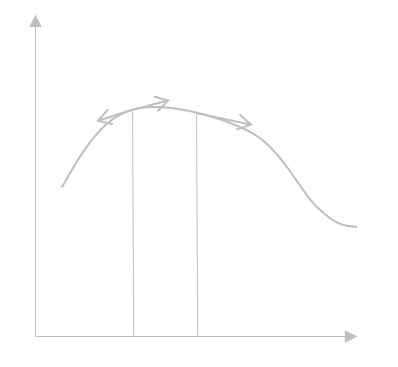
Тогда это уравнение типа Ковалевской и удовлетворяет теореме Ковалевской (обобщение теоремы о единственности решения задачи Коши).

Гиперболическое — уравнение типа Ковалевской. Параболическое — типа Ковалевской по , но не по .

Такие уравнения решаются в классе аналитических функций.

## Решение волнового уравнения методом Даламбера

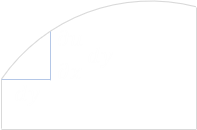
### Волновое уравнение

Рассмотрим случай одномерных упругих колебаний струны.

‒ отклонение струны или мембраны

В момент времени на струну действует сила натяжения и, возможно, внешняя сила .

Если струна не находится в положении равновесия, то сила натяжения, согласно закону Гука, пропорциональна увеличению длины струны.

Длина струны:

По теореме о среднем существует точка , такая, что

Это значит, что

и если , то и

Тогда

Разложим силу натяжения по осям:

Таким образом:

‒ плотность силы

При :

Если по , то

### Метод Даламбера

У нас есть волновое уравнение:

Края здесь нет, т. к. лежит везде в , т. е. это задача Коши, когда .

Задаем две функции:

Рассмотрим уравнение характеристик:

Отсюда мы имеем:

# 13.10.2020

## Общее решение волнового уравнения

Уравнение поперечных колебаний:

Поскольку задано на всем , необходимо знать только начальные условия:

Составим характеристическое уравнение:

Перейдем к новым координатам, чтобы уравнение упростилось:

После подстановки полученных производных уравнение принимает следующий вид:

Общее вид решения:

Общее решение в старых координатах:

***Теорема***

Любое решение уравнения поперечных свободных колебаний струны

класса имеет вид

для .

Функция (2) является решением уравнения (1) класса

*Доказательство:*

## Задача Коши волнового уравнения

Проинтегрируем нижнее уравнение:

Так как

Получаем, что

Подставляя найденные функции от аргументов и соответственно в общее решение, получаем ***формулу Даламбера***:

### Проверка на верное равенство

Проверим, действительно ли найденная функция является частным решением волнового уравнения:

Таким образом, ‒ верное равенство.

### Проверка начальных условий

Проверим выполнение начальных условий:

### Проверка корректности

Докажем *корректность* решения, т. е. что решение непрерывно зависит от начальных условий.

Если заданы две функции, , близкие к , то мы получим решение , близкое к .

Тогда при фиксированном и

Таким образом, решение непрерывно зависит от начальных условий, и задача решена корректно.

## Свойство конечности области зависимости решения ЗК от начальных условий

Возьмем некоторую фиксированную точку . Решение уравнения в данной точке:

Получается, что значение в точке зависит интервала в любой момент времени. От функций вне интервала значение не зависит.

Пусть всюду, кроме отрезка .

Для того, чтобы получить ненулевое решение , необходимо провести две характеристики:

Эти характеристики и отсекают область, где .

Возмущение в струне будет распространяться в две стороны с ***конечной*** скоростью.

## Решение ЗК неоднородного волнового уравнения

Решение ЗК ищется в виде:

‒ решение ЗК однородного волнового уравнения с

‒ решение ЗК с и .

*Утверждение:*

Данная функция должна удовлетворять задаче Коши, нулевым и заданной .

После постановки производных в уравнение образуется верное равенство. Начальные условия и также выполняются.

# 27.10.2020

## Уравнение полубесконечной струны

Рассмотрим случай, когда струна не бесконечна с одного конца, т. е. :

Начальные условия:

## Один конец струны закреплен

Краевые условия:

Достроим *нечетным* образом функции на всю ось:

Таким образом, мы возвращаемся к задаче Даламбера.

При :

При :

Требования, необходимые для решения задачи методом Даламбера:

Проверим правильность решения при :

При подстановке полученных производных в волновое уравнение образуется верное равенство.

Подставим начальные и краевые условия:

## К одному концу прикреплено кольцо

Достроим *четным* образом функции на всю ось:

При :

При :

Требования, необходимые для решения задачи методом Даламбера:

Проверим правильность решения при :

При подстановке полученных производных в волновое уравнение образуется верное равенство.

Подставим начальные и краевые условия:

## Единственность решения

Остаётся нерешённым вопрос, являются ли полученные решения единственными.

Докажем единственность для случая, когда закреплен один конец струны:

Покажем, что, если , то и .

Общее решение волнового уравнения:

Тогда:

Из краевого условия

следует, что

Получается, что

Таким образом,

## Метод Фурье

Первая краевая задача для однородного уравнения струны:

Начальное условие:

Краевое условие:

Представим решение в виде произведения двух функций, разделив аргументы:

Подставим в уравнение:

Возникают два уравнения:

Из граничного условия следует, что .

Из граничного условия следует, что .

### Задача Штурма-Лиувилля

Найти все , для которых существует нетривиальное решение .

* ‒ собственные значения,
* функции , им соответствующие, ‒ собственные функции.

**1.**

Общее решение :

Подставим начальные условия:

Системе удовлетворяют только .

**2.**

**3.**

Пусть . Общее решение :

Подставим начальные условия:

*Получившееся решение:*

Найдем :

Найдем семейство функций

Решение краевой задачи ищется в следующем виде:

Нам нужно найти и .

Система является полным ортогональным базисом, по которому можно разложить функции в ряд Фурье. ‒ коэффициенты такого ряда Фурье.

## Условия сходимости

Функция — финитна на отрезке , если она в окрестностях и равна нулю и имеет непрерывные производные до 4 порядка включительно.

***Теорема***

тогда для ряд

равномерно сходится на множестве

и его сумма дважды дифференцируема в этом множестве по и по , удовлетворяет исходному уравнению, начальным и краевым условиям.

# 03.11.2020

## 1-я краевая задача для однородного уравнения струны

Функция — финитна на отрезке , если она в окрестностях и равна нулю и имеет непрерывные производные до 4 порядка включительно.

‒ множество всех пар , таких, что ,

***Теорема***

Пусть. Тогда для ряд

равномерно сходится в . Его сумма дважды непрерывно дифференцируема в этом прямоугольнике и удовлетворяет исходному уравнению, начальным и краевым условиям.

*Доказательство:*

Достаточно проверить, что ряд и ряды, полученные его почленным дифференцированием до 2-го порядка включительно, равномерно сходятся в .

В таком случае краевые условия выполняются для каждого члена этого ряда. Каждый член ряда, по построению, удовлетворяет заданному уравнению, т. е.,

В силу полноты системы , если ряд Фурье непрерывной функции равномерно сходится, то его сумма равна этой функции, следовательно, выполняются начальные условия.

Осталось проверить равномерную сходимость ряда и рядов, полученных его почленным дифференцированием до 2-го порядка.

Для этого достаточно построить числовые ряды с положительными членами, которые мажорируют рассматриваемые ряды. Оценим сверху коэффициенты :

Внеинтегральные члены обратились в нуль в силу того, что

мажорирует все ряды, сходится абсолютно, следовательно, сходится равномерно.

## 1-я краевая задача для неоднородного уравнения колебаний струны

Начальные условия:

Краевые условия:

Областью определения искомого решения является прямоугольник:

Решение задачи будем искать в виде ряда Фурье:

где ‒ решение задачи Штурма-Лиувилля:

Функции

‒ это коэффициенты Фурье разложения искомой функции .

Пусть решение :

Разложим в ряд Фурье:

Следовательно, функция удовлетворяет уравнению:

Решение для ОДУ задачи Коши с нулевыми начальными условиями

***Теорема***

Пусть функция трижды непрерывно дифференцируема в прямоугольнике и обращается в нуль в окрестности и . Тогда существует классическое (из класса ) решение задачи. Это решение записывается в виде ряда

где

*Доказательство:*

По построению функции сумма ряда формально удовлетворяет заданному уравнению, начальным и граничным условиям. Действительно,

Поэтому, доказательство сводится к проверке того, что ряд и все ряды, которые получаются из него почленным дифференцированием по и два раза, сходятся в равномерно.

Для равномерной сходимости этих рядов достаточно получить оценку их коэффициентов:

Соответствующие числовые ряды абсолютно сходятся.

# 10.11.2020

## Энергетическая оценка

Следующая теорема устанавливает непрерывную зависимость решения смешанной задачи от начальных условий и правой части уравнения.

***Теорема***

Пусть ‒ классическое решение задачи:

Тогда существует , не зависящее от , такое, что справедливо неравенство

*Доказательство:*

Умножим обе части уравнения на и проинтегрируем по . Интеграл слева равен:

Интеграл в правой части:

Граничное условие означает, что и тождественно равны нулю. Поэтому

**Энергия** струны:

При энергия постоянна: . Проинтегрируем по от 0 до

Обозначим

Тогда при получаем неравенство:

Таким образом, справедливо неравенство

Тогда при

Из этой интегральной оценки получим равномерную оценку решения. Поскольку , по формуле Ньютона-Лейбница имеем

тогда по неравенству Коши-Буняковского

Откуда вытекает более грубая оценка:

# 17.11.2020

## Обобщенные решения уравнения колебаний струны

Рассмотрим задачу Коши для уравнения струны в ℝ:

Классические решения краевых задач ‒ функции, обладающие непрерывными производными необходимого порядка, которые удовлетворяют уравнению и краевым условиям (начальным и граничным).

Для доказательства существования таких решений требуются довольно жесткие условия на начальные функции, граничные функции и функции правой части. Зачастую эти условия являются избыточными.

При изучении колебаний струны разумно считать, что начальное положение описывается непрерывной и лишь кусочно-непрерывно дифференцируемой функцией.

Тогда классическое решение не существует, однако оправданно считать, что формула Даламбера правильно описывает физический процесс:

Обобщенное решение краевой задачи даёт возможность получать разумные решения при слабых ограничениях на условия задачи.

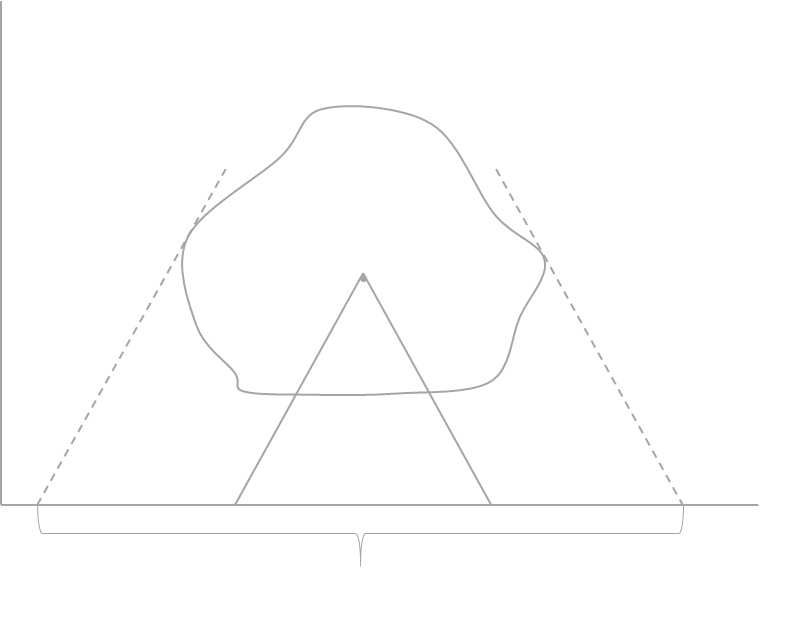
Класс обобщенных решений выбирается шире класса классических и удовлетворяет следующим условиям:

1. Если классическое решение существует, то оно должно быть также и обобщенным.
2. Класс обобщенных решений должен быть шире класса классических.
3. Класс обобщенных решений должен быть разумным:

* Решение должно быть единственным,
* Задача должна быть корректна в соответствующем классе решений.

### Последовательности исходных данных

Рассмотрим произвольную ограниченную область в полупространстве . Пусть отрезок на оси – это область зависимости решений уравнения колебаний струны в области Ω от начальных данных и .



Пусть и ‒ последовательности дважды непрерывно дифференцируемых функций, которые на равномерно сходятся при к функциям .

Согласно теореме Вейерштрасса, в качестве таких функций можно взять полиномы.

‒ классические решения, которые равномерно сходятся в области к обобщенному решению при .

Обобщенное решение можно определить как предел классических решений.

## Обобщенные решения краевой задачи для уравнения ограниченной струны

Классическое решение задачи — функция , где

которая удовлетворяет уравнению, его начальным и граничным условиям.

**Определение 1.** Функция — обобщенное решение задачи , если существуют классические решения этой задачи с начальными функциями и , такие, что при последовательности и сходятся равномерно на к и , соответственно, а равномерно в .

**Лемма 1**

Если ‒ классическое решение задачи , то

*Доказательство:*

Поскольку и , то для функция представима рядом Фурье

который равномерно сходится по при фиксированном . Функции – это коэффициенты Фурье , которые вычисляются по формулам

В силу волнового уравнения:

Последний интеграл интегрируем по частям два раза, учитывая граничные условия:

Получаем ОДУ:

Т. к. , то функция разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по при каждом фиксированном :

***Теорема***

Если начальные функции таковы, что

то существует единственное обобщенное решение задачи .

*Доказательство:*

‒ классическое решение задачи с соответствующими начальными условиями.

Следовательно, последовательность равномерно сходится в к функции

Из формул для коэффициентов и следует, что

## Обобщенные решения для неоднородного уравнения колебаний струны

**Определение 2.** Функция — обобщенное решение задачи , если существует классическое решение этой задачи с правыми частями ,такими, что сходятся равномерно к , а сходятся равномерно к при на .

***Теорема***

Если , то существует и единственное обобщенное решение задачи .

**Определение 3.** Функция — обобщенное решение задачи , если

для любой функции , где

Обозначим оператор . Тогда