# Лекция 1

## Эквивалентность

**Отношение** на множестве — любое подмножество .

Отношение — отношение **эквивалентности**, если:

* рефлексивно
* симметрично
* транзитивно

Отношение эквивалентности делит множество на подмножества – классы эквивалентности.

Подмножество — **класс *эквивалентности***, если в него входят все элементы , эквивалентные :

***Фактормножество*** — множество всех классов эквивалентности.

## Порядок

Отношение — отношение **частичного порядка**, если:

* рефлексивно
* антисимметрично
* транзитивно

**Отношение порядка** / линейный порядок — отношение частичного порядка, где любые два элемента сравнимы.

***Теорема***

Если и , то .

## Функциональное отношение

Пусть – совокупность таких , что множество первых элементов совпадает с .

* — область определения.
* — область значений.

Область отправления — любое множество, содержащее область определения.

Область прибытия — любое множество, содержащее область значений.

***Функциональное*** отношение T если и , то

Функциональное отношение = функция = отображение = соответствие

* Значение функции образ
* Прообраз

**Сюръекция** — область значений совпадает со всем множеством .

**Инъекция** = взаимно однозначное отображение — если , то

**Биекция** = сюръекция + инъекция

## Мощность

Два множества — ***эквивалентные***, или **равномощные**, если существует взаимно однозначное отображение (биекция) одного множества на другое.

**Равномощные** — множества, принадлежащие одному классу эквивалентности.

**Мощность** = кардинальное число — класс эквивалентности, к которому принадлежит . Обобщение понятия количества элементов множества.

### Теорема Кантора-Бернштейна (вторая формулировка)

Если для множеств и существуют инъекции и , то , т. е. множества и равномощны.

**Счётное** — эквивалентное множеству натуральных чисел. Можно пронумеровать элементы, т. е. установить биекцию .

## Счётные множества

***Теорема***

Всякое подмножество счётного множества не более чем счётно (т. е. либо конечно, либо счётно).

*Доказательство:*

Пусть ‒ счётное множество, ‒ его часть, .

Занумеруем элементы : .

Пусть ‒ те из , которые попали в .

Если среди индексов есть наибольший, то ‒ конечное множество, если нет ‒ счётное множество.

***Теорема***

Объединение не более чем счётного множества счётных множеств — не более чем счётно.

*Доказательство:*

Выпишем все элементы этих множеств в таблицу:

, где

Занумеруем их по диагоналям, таким образом устанавливая биекцию между и .

***Теорема***

Всякое бесконечное множество содержит в себе счетное подмножество.

*Доказательство:*

Пусть .

— бесконечное множество.

— также бесконечное множество.

Продолжаем этот процесс далее до бесконечности. Тогда мы получим

— счетное множество.

***Теорема***

Множество — несчетное множество.

*Доказательство:*

Будем доказывать от противного. Применим принцип вложенных отрезков:

Пусть

Разделим на 3 части и назовем . Такой отрезок всегда существует.

Далее разобьем на 3 части. Назовем тот отрезок, который не содержит , и так далее.

В результате выстраивается система вложенных отрезков:

По свойству системы вложенных отрезков:

. Пусть теперь .

По построению: , противоречие.

***Теорема***

Пусть ‒ множество, состоящее из всех подмножеств множества . Пусть ‒ множество всех последовательностей, состоящих исключительно из 0 и 1.

Тогда

***Континуум*** — множество .

***Теорема***

‒ несчетное множество.

***Теорема***

# Лекция 2

## Теорема Кантора-Бернштейна (3-я формулировка)

Пусть . Если , то и .

*Доказательство:*

Если , то существует биекция . По условию леммы . Тогда образ

Пусть .

Аналогично , .

Продолжая такой процесс до бесконечности, получим систему вложенных друг в друга множеств:

Элементы этих множеств связаны соотношением

По свойству биективного отображения

Значит из , следует, что

Мы имеем биекцию между

Распишем множества и

Таким образом, между каждыми квадратными скобками установлено взаимно-однозначное соответствие. Из этого заключаем, что .

## Теорема Кантора-Бернштейна (1-я формулировка)

Если множество равномощно некоторому подмножеству множества , а множество равномощно некоторому подмножеству множества , то множества и равномощны.

*Доказательство*:

Пусть . В силу биекции из соотношения следует, что

Т. е. , и по т. Кантора-Бернштейна (3 формулировка) имеем, что

## Метрическое пространство

— множество , в котором для любой упорядоченной пары элементов определена числовая функция-метрика , удовлетворяющая следующим условиям:

**Неравенство четырехугольника:**

### Неравенство Коши-Буняковского

Скалярное произведение векторов в -мерном пространстве не превосходит произведения их длин.

# Лекция 3

## Множества в метрических пространствах

***Открытый*** шар — окрестность точки , т. е

***Сфера*** — множество

Шар ***с границей / замкнутый*** шар — множество

**Диаметр** — число

— **внутренняя** точка множества , если существует , т. е. принадлежит вместе с некоторой своей окрестностью.

— **открытое**, если ВСЕ его точки ‒ внутренние.

— **предельная** точка множества , если любая ее проколотая окрестность содержит хотя бы одну точку из .

***Теорема***

т. является предельной точкой множества , если в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек из .

Последовательность — *сходящаяся*, если существует элемент

— ***предельная*** точка множества , если существует последовательность различных точек множества , сходящаяся к точке .

— **изолированная**, если существует окрестность , не имеющая ни одной точки из , кроме самой .

— **замкнутое**, если оно содержит ВСЕ свои предельные точки.

— ***замкнутое***, если его замыкание совпадает с множеством .

***Теорема***

Объединение произвольного семейства открытых множеств — открытое множество.

Пересечение произвольного семейства замкнутых множеств — замкнутое множество.

Дополнение открытого множества замкнуто; дополнение замкнутого множества открыто.

**Замыкание** в МП — множество , состоящее из элементов самого множества и его предельных точек. замкнуто и является наименьшим замкнутым множеством, содержащим .

Множество — **всюду плотное** в МП, если его замыкание совпадает со всем МП.

## Полнота МП

Последовательность — **фундаментальная**, если она удовлетворяет критерию Коши:

если ‒ фундаментальная последовательность ЛНП, то числовая последовательность норм тоже фундаментальна.

МП — **полное**, если любая фундаментальная последовательность сходится, т. е.

### Критерий полноты МП

Для полноты метрического пространства необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность замкнутых вложенных шаров с радиусами, стремящимися к нулю, имела общую точку.

*Доказательство:*

Пусть МП полно. Возьмем какую-нибудь последовательность

вложенных друг в друга замкнутых шаров, для которой соответствующая последовательность радиусов стремится к нулю при .

Последовательность центров этих шаров фундаментальна, поскольку

Так как полно, то существует предел .

Убедимся, что . Шар содержит все точки за исключением, быть может, точек . Таким образом, точка является предельной точкой для каждого шара . Но так как эти шары замкнуты, то .

***Теорема***

Полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.

# Лекция 4

## Пополнение метрических пространств

Два метрических пространства — **изометричные**, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие , сохраняющее расстояние:

***Теорема***

Если ‒ неполное МП, то существует полное МП — **пополнение** , такое, что

* изометрично некоторой части
* всюду плотно в

С точностью до изометрии такое пополнение единственно.

## Компактные множества

Компакт ‒ аналог отрезка в произвольном метрическом пространстве.

Множество МП — **компактное**, если любое его бесконечное подмножество содержит фундаментальную последовательность.

Множество МП — **компакт**, если любое его бесконечное подмножество содержит сходящуюся последовательность, предел которой также принадлежит этому множеству.

***Теорема***

Компактное множество ограничено.

***Теорема***

Компактное множество полного МП — компакт, если замкнуто.

Функция , заданная на МП , — **непрерывная** в точке , если для

### Теорема Вейерштрасса 1

Функция , непрерывная на компакте , ограничена.

*Доказательство:*

Допустим противное, т. е., что функция не ограничена. Тогда существует последовательность точек этого компакта такая, что .

Т. к. – компакт, то существует сходящаяся подпоследовательность , которая имеет предел ‒ точка, в которой функция непрерывна и, следовательно

Противоречие.

### Теорема Вейерштрасса 2

Функция , непрерывная на компакте , достигает своей верхней и нижней грани.

*Доказательство:*

Пусть , тогда существует последовательность точек этого компакта такая, что .

Допустим, что в каждой точке компакта , тогда функция непрерывна на этом компакте, следовательно, ограничена. Но ее значения на образуют неограниченное множество ‒ противоречие.

***Теорема***

Функция , непрерывная на компакте , равномерно непрерывна.

*Доказательство:*

Допустим противное, т. е., что для некоторого существуют такие последовательности , что

В силу того, что – компакт, из можно выбрать подпоследовательность , сходящуюся к некоторой точке , причем подпоследовательность будет сходиться к той же точке . Но функция ‒ непрерывная в точке , поэтому для

при условии, что – противоречие.

### ε-сеть

Множество — **ε-сеть** множества , если для

***Теорема***

Для того, чтобы множество МП было ***компактным***, необходимо и достаточно, чтобы для любого для существовала *конечная* -сеть.

***Теорема***

Множество МП — ***компактное***, если для любого для существует *компактная* -сеть.

## Теорема Арцела

Множество функций, определенных на отрезке — **равномерно ограниченное**, если

Множество функций, определенных на отрезке — **равностепенно непрерывное**, если

***Теорема***

Для того чтобы множество функций, непрерывных на отрезке было компактным в , необходимо и достаточно, чтобы это множество было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.

## Принцип сжимающих отображений

Отображение МП в себя — **сжимающее**, если для некоторого

Всякое сжимающее отображение является непрерывным.

При отображении МП в себя точка — **неподвижная**, если .

***Теорема***

Сжимающее отображение в полном МП имеет *неподвижную* точку, притом единственную.

*Доказательство:*

Пусть – произвольная точка в . Положим и т.д.:

Покажем, что последовательность фундаментальна в . Для мы имеем

Т. к. , то при достаточно большом эта величина сколь угодно мала.

В силу полноты пространства последовательность имеет предел, который мы обозначим через . Из непрерывности отображения следует, что

Существование неподвижной точки доказано.

Докажем ее единственность. Так как – сжимающее отображение, то из , следует, что . Поскольку , то , т. е. .

Последовательность представляет собой последовательность приближенных решений уравнения .

## Линейное нормированное пространство

ЛНП — линейное пространство , если для определена числовая функция ‒ норма, удовлетворяющая следующим аксиомам:

В частности,

**Изоморфизм** ЛП — это взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции.

Если два ЛНП изоморфны как ЛП и изометричны как МП, то они — линейно изометричные или ***изоморфные***.

ЛНП — **банахово**, если оно полное.

Пространство является нормированным с нормой

Норма в пространстве непрерывных функций называется ***равномерной***:

Норма в пространстве ‒ ***интегральная:***

Множество — **линейное многообразие**, где ‒ НП, если

**Подпространство** *— замкнутое* линейное многообразие.

**Линейная оболочка** подмножества ЛП — наименьшее линейное многообразие, содержащее .

Линейная оболочка любого непустого множества обязательно существует и совпадает с пересечением всех линейных многообразий, содержащих . Линейную оболочку множества составляет множество всевозможных линейных комбинаций

конечных наборов элементов и коэффициентов .

# Лекция 5

**Сопряженные** числа — числа , для которых

нор

## Неравенство Юнга

Если ‒ сопряженные показатели, то для

*Замечание*. Неравенство Юнга обращается в равенство .

## Неравенство Гельдера

Если ‒ сопряженные показатели, то для

*Замечание 1*. Неравенство Гельдера обращается в равенство, только если , такое, что

*Замечание 2*. Неравенство Гельдера справедливо для бесконечных последовательностей, если ряды в правой части сходятся:

*Замечание 3*. Для функций и , непрерывных на отрезке :

## Неравенство Минковского

При и произвольных

*Замечание*. Для рядов и интегралов:

## Эквивалентность норм

‒ пространство векторов с нормой

‒ пространство векторов с нормой

Пусть в ЛНП заданы две нормы и . Норма **подчинена** норме , если

***Теорема*** (о подчиненных нормах)

Пусть – ЛНП, на котором заданы две нормы и . Пусть последовательность сходится по норме . Тогда, если подчинена , то последовательность сходится и по норме , причем к тому же пределу.

***Теорема***

В ЛНП ограниченное замкнутое множество является компактом.

*Доказательство:*

Пусть , где , тогда

⇒ числовые последовательности ограничены, и из них можно выбрать сходящиеся подпоследовательности. Выберем из последовательности подпоследовательность, в которой первые компоненты сходятся, затем из этой подпоследовательности подпоследовательность, у которой и вторые компоненты сходятся и т. д.

Таким образом, получим сходящуюся покоординатно и, значит, по норме последовательность элементов . Так как по условию замкнуто, то предел этой последовательности тоже принадлежит , т. е. ‒ компакт.

2 нормы и , заданные на ЛН , — **эквивалентные** если существуют числа такие, что для любого справедливы неравенства

***Теорема***

В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.

*Доказательство:*

Возьмем базис , тогда каждый элемент и рассмотрим произвольную норму и норму , тогда

Функция в любой точке непрерывна относительно нормы , т. к.

Рассмотрим функцию на единичной сфере . Так как сфера ‒ компакт, то непрерывная функция достигает на компакте своего наибольшего и наименьшего значений.

Пусть и пусть , где . , т. к. , в то время как . Следовательно, на множестве

Значит, всюду .

*Следствие 1.* Для сходимости по норме в конечномерном ЛНП необходимо и достаточно, чтобы была покоординатная сходимость.

*Следствие 2.* Для того, чтобы в конечномерном ЛНП множество было компактным (компактом), необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено (и замкнуто).

*Следствие 3.* В ЛНП конечномерное подпространство замкнуто.

*Следствие 4*. Конечномерное ЛНП полное.

# Лекция 6

## Приближение

**Расстояние** от до — число

Если замкнуто и , то .

*—* элемент **наилучшего приближения** , если

***Теорема***

Если ‒ конечномерное линейное подпространство ЛНП , тогда для любого существует хотя бы один элемент наилучшего приближения в .

*Доказательство:*

замкнуто, поэтому, если .

Пусть . Тогда существует последовательность . Последовательность ограничена, поскольку

Тогда из ограниченной последовательности конечномерного подпространства можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к . Причем, .

## Сепарабельные пространства

Множество в ЛНП — **плотное** в , если любой шар в содержит хотя бы одну точку этого множества.

ЛНП — **сепарабельное**, если существует счетное всюду плотное множество .

### Примеры сепарабельных пространств:

‒ пространство векторов , наделенное нормой

‒ пространство векторов , наделенное нормой

‒ пространство последовательностей , таких, что , с нормой

– пространство сходящихся к нулю последовательностей , с нормой

‒ пространство сходящихся последовательностей с нормой

‒ пространство функций , раз непрерывно дифференцируемых на , с нормой

‒ пространство функций , непрерывных на , с нормой

# Лекция 7

## Теорема Вейерштрасса

### Бином Ньютона

Дважды дифференцируя это равенство по и домножая результат на , получаем:

### Многочлены Бернштейна

**Базисные многочлены Бернштейна** имеют вид:

Заметим, что

**Многочлен Бернштейна** функции ‒ многочлен

*Свойства многочленов Бернштейна:*

‒ алгебраический многочлен степени

Если , то

(следует из неравенства Коши-Буняковского)

### Модуль непрерывности

Пусть . Модуль непрерывности — величина, определяемая как

*Свойства модуля непрерывности:*

возрастает на

### Лемма (Теорема Бернштейна)

***Теорема***

Для любой функции

Многочлены Бернштейна на отрезке [0,1] равномерно сходятся к самой функции . Данное неравенство характеризует скорость, с которой полином Бернштейна сходится к функции .

*Доказательство:*

Необходимо равномерно оценить :

При переходе к максимуму: .

Т. е. .

### Теорема Вейерштрасса

***Теорема***

Любую функцию можно равномерно приблизить с заданной точностью многочленом степени , т. е.

*Доказательство:*

Поскольку , по теореме Бернштейна .

# Лекция 8

Поскольку любой многочлен можно приблизить равномерно на отрезке многочленом с рациональными коэффициентами и т. к. множество таких многочленов счетно, то ЛНП сепарабельно.

## Теорема Чебышева

‒ линейное подпространство многочленов степени не выше в ЛНП .

— ***многочлен наилучшего приближения*** по норме пространства для в

принимает свое максимальное значение на с последующей сменой знака разности не менее, чем раза.

***Теорема***

Пусть задано ДУ и начальные условия

и пусть функция , удовлетворяет условию Липшица

Тогда существует, причем единственное, решение задачи Коши , удовлетворяющее данному начальному условию и определенное на некотором промежутке .

## Строго нормированные пространства

ЛНП — **строго нормированное**, если равенство для ненулевых элементов возможно только в том случае, если .

ЛНП при строго нормированные.

ЛНП при и не являются строго нормированными.

***Теорема***

Если строго нормированное ЛП и ‒ его линейное подпространство, то для существует не более одного элемента наилучшего приближения.

*Доказательство:*

Пусть и пусть и являются элементами наилучшего приближения для в , то есть и .

Докажем, что тогда все точки отрезка, соединяющего , т. е. точки вида , где , также являются элементами наилучшего приближения для в .

Действительно, так как , то

и, значит, .

В частности, при получим или

Но ‒ строго нормированное пространство, поэтому , а т. к.

то и, следовательно, или .

***Теорема***

Для того, чтобы ЛНП было конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы любое ограниченное замкнутое множество было компактом.

*Доказательство:*

Покажем, что в бесконечномерном ЛНП единичная сфера не является компактом, хотя она представляет собой ограниченное замкнутое множество.

Пусть S – сфера: и . Так как бесконечномерное ЛНП, то найдется линейно независимый элемент и рассмотрим (если бы , то ). Выберем такое, что и рассмотрим элемент единичной сферы

Заметим, что вместо можно было брать любое число .

Аналогично, далее мы взяли бы линейную оболочку ‒ линейное подпространство , натянутое на и нашли такое, что

Продолжая этот процесс, мы получим бесконечную последовательность элементов единичной сферы , отстоящих друг от друга на расстояние . Следовательно, из этой последовательности нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность, т. е. ограниченное замкнутое множество не является компактным.

# Лекция 9

## Гильбертово пространство

Пусть ‒ линейное пространство над полем .

**Скалярное произведение** — вещественная функция двух переменных , определенная при всех и подчиняющаяся следующим аксиомам:

при всех и любых

* ‒ **симметричность**
* ‒ **линейность**
* , если и , если ‒ **положительная определенность**

Пара — пространство со скалярным произведением. Далее ‒ просто .

***Теорема***

В пространстве скалярное произведение порождает норму по формуле

*Доказательство:*

положительно определена и положительно однородна. Для доказательства выполнения неравенства треугольника сначала докажем неравенство Коши-Буняковского:

Рассмотрим вектор . Из аксиом скалярного произведения следует

Т. к. , то или

В случае равенство может наступить, только если , т. е. , где .

Докажем неравенство треугольника:

Следовательно,

Таким образом, функция действительно представляет собой норму в , причем будет строго нормированным.

Полученное ЛП с нормой, порожденной скалярным произведением — ЛНП со скалярным произведением (ЛНП с СП).

***Теорема***

Скалярное произведение непрерывно по совокупности своих аргументов.

Доказательство:

Пусть . Рассмотрим

Если данное ЛНПсСП является неполным, то его можно пополнить и скалярное произведение определить на пополнении естественным образом с сохранением всех его свойств.

Полное ЛНПсСП — **гильбертово** пространство. Такие пространства обозначаются буквой .

### Тождество параллелограмма

Для любых двух элементов и из пространства

*Доказательство:*

Складывая эти равенства, получаем доказываемое тождество.

Элементы и — ортогональные, если , .

### Теорема (Теорема Пифагора)

Если , то

*Доказательство:*

Если , то

### Теоремы в замкнутых линейных подпространствах

***Теорема***

Пусть ‒ замкнутое линейное подпространство, тогда любой элемент можно представить в виде

причем это представление единственно.

*Доказательство:*

Если , то

Пусть , тогда и существует при

Для произвольного элемента , т. е.

Положим , тогда получим, что

Это неравенство вернодля любого , в том числе и для .

Из этого неравенства следует, что

т. е. последовательность ‒ фундаментальная и в силу полноты и замкнутости существует элемент .

Переходя к пределу в неравенстве , получим что и поскольку произвольный элемент , то , т. е. мы получили требуемое представление.

Покажем, что это представление единственное.

Допустим противное: , с другой стороны эти элементы ортогональны,

Из этой теоремы следует, что гильбертово пространство раскладывается в прямую сумму замкнутых ортогональных подпространств:

так что любой элемент равен сумме проекций на ортогональные подпространства.

***Теорема***

Для того чтобы линейное подпространство было всюду плотно в , необходимо и достаточно, чтобы не существовало элемента, отличного от 0, ортогонального всем элементам .

*Доказательство:*

*Необходимость*. Поскольку если , то он ортогонален его замыканию (в силу непрерывности скалярного произведения), следовательно , и, значит,

*Достаточность*. Пусть не всюду плотно в , т. е. замыкание , т. е. существует элемент . По предыдущей теореме , где , . Т. к. по предположению , то , что противоречит условию теоремы.

## Сумма Фурье

Система из попарно ортогональных элементов — **ортогональная** (ОС).

Бесконечная система элементов — линейно независимая, если линейно независима любая ее конечная подсистема.

Пусть ‒ линейное замкнутое подпространство, порожденное ОС . Это значит, что любой элемент можно приблизить с наперед заданной точностью (конечной) линейной комбинацией элементов ОС:

***Теорема***

Наилучшее приближение даст **сумма Фурье**, т. е. сумма

где коэффициенты — **коэффициенты Фурье**:

*Доказательство:*

Отсюда следует, что сумма Фурье — проекция на подпространство, натянутое на : ‒ сумма двух ортогональных слагаемых.

Возьмем теперь произвольную линейную комбинацию и оценим

Слагаемые этой суммы ортогональны, следовательно, по теореме Пифагора

Таким образом, наилучшее приближение по норме дает сумма Фурье.

Мы брали элемент и линейного замкнутого подпространства , порожденного ОС . Поскольку этот элемент можно приблизить как угодно суммами Фурье, то, переходя к переделу, получим

Причем, в силу теоремы Пифагора

⇒ ряд сходится и его сумма равна .

Пусть теперь ‒ произвольный элемент . Разложим в прямую сумму:

где ‒ ортогональное дополнение . Тогда

Проекция на равна ‒ ряд Фурье, причем

т. к. . Таким образом,

### Неравенство Бесселя

## Ортогональная система

Ортогональная система в ℋ — плотная, если не существует элементов, отличных от нуля, ортогональных всем элементам этой системы.

Ортогональная система в ℋ — замкнутая, если линейное замкнутое подпространство, порожденное этой системой, совпадает с ℋ.ℋℋℋ

Для любого его ряд Фурье по замкнутой системе сходится к нему (по норме) и имеет место **равенство Парсеваля-Стеклова**:

Полная система является замкнутой и наоборот.

Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля-Стеклова упрощаются, если ОС является ортонормированной, т. е. нормы ее элементов равны 1. В этом случае

Замкнутая ортонормированная система — **ортонормированный базис** в ℋ.

***Теорема***

Сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство ℋ содержит полную ортонормированную систему.

*Доказательство:*

В силу сепарабельности в ℋ есть счетное всюду плотное множество . Возьмем , затем возьмем в качестве линейно независимый элемент из оставшихся с наименьшим номером и т. д.

Продолжая этот процесс, мы выберем линейно независимую подпоследовательность . Полученная система будет **полной**, так как любой элемент есть линейная комбинация элементов , и эти линейные комбинации образуют всюду плотное множество в ℋ.

Остается систему ортогонализировать, и мы получим счетную полную ортогональную систему.

Итак, сепарабельные гильбертовы пространства имеют счетные ортонормированные базисы. С их помощью устанавливается изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Так все они изоморфны .

## Аппроксимация в гильбертовом пространстве

Подмножество линейного нормированного пространства — **выпуклое**, если вместе с любыми двумя своими точками множество содержит соединяющий их отрезок , т. е. при и .

***Теорема***

Пусть ‒ замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства ℋ. Для любого в этом множестве существует единственный элемент наилучшего приближения (ЭНП).

Доказательство:

Можно считать, что и, следовательно, . Существует последовательность такая, что при любом натуральном . Докажем, что ‒ фундаментальная последовательность. Тождество параллелограма дает

при .

Т. к. ℋ ‒ полное пространство, то существует . Переходя к пределу в неравенстве

получим . Наконец, по условию теоремы множество замкнуто, поэтому . Это означает, что является элементом наилучшего приближения для вектора во множестве .

Для доказательства единственности элемента наилучшего приближения предположим, что существуют элементы , для которых выполнены равенства

Из выпуклости и из неравенства треугольника видно, что

Т. к. ℋ строго нормированное пространство, то . Т. к. , то либо , либо , но тогда , что противоречит условию. Итак, ЭНП в этом случае единственный.

***Теорема***

Пусть ‒ подпространство гильбертова пространства ℋ. Для того, чтобы был элементов наилучшего приближения для вектора в пространстве , необходимо и достаточно выполнение следующего условия

*Доказательство:*

Необходимость. Пусть ‒ элемент наилучшего приближения для в , и . Рассмотрим функцию действительного переменного . Т. к.

тогда

Но по условию имеет минимум при , поэтому должно быть соблюдено . Следовательно, .

Достаточность. Пусть известно, что и . Тогда

по теореме Пифагора. Мы видим, что , а это значит, что является единственным элементов наилучшего приближения для в подпространстве .

# Лекция 10

## Линейные операторы

Пусть и ‒ линейные нормированные пространства.

Отображение — **линейный оператор**, если

* его область определения ‒ линейное подпространство пространства
* для любых векторов и любых чисел выполняется равенство

**Ядро** оператора — множество всех таких элементов , что .

Отображение — **непрерывное** в точке , если из того, что , следует, что .

***Теорема***

Если линейный оператор непрерывен в точке , то непрерывен и в любой другой точке .

*Доказательство:*

Сформулированное утверждение следует из равенства

отсюда видно, что если , то .

Отображение — **ограниченное**, если оно переводит любое ограниченное множество в ограниченное множество .

***Теорема***

Линейный оператор ограничен тогда и только тогда, когда существует неотрицательная константа такая, что

*Доказательство:*

Пусть сначала известно, что ограничен. В таком случае образ единичного шара пространства покрывается — замкнутым шаром пространства с центром в 0 и радиуса . Но тогда для любого из будет

и потому . Это неравенство верно и при .

Пусть теперь при всех выполнено неравенство и пусть ‒ ограниченное множество, т. е. при некотором значении . Но тогда и, следовательно, ‒ ограниченное множество.

***Теорема***

Линейный оператор , определенный на всем , непрерывен при всех тогда и только тогда, когда он ограничен.

*Доказательство:*

Если оператор ограничен, то в силу неравенства при будет . Это значит, что оператор непрерывен при . Но тогда он непрерывен при любом .

Пусть известно, что оператор непрерывен при и пусть , тогда существует такое , что из условия будет следовать неравенство . В таком случае для любого будем иметь или . Следовательно, ‒ ограниченный оператор.

**Норма** линейного непрерывного оператора — число

***Теорема***

Если линейный оператор ограничен на замкнутом шаре , т. е. при , то ограничен и .

*Доказательство:*

Для любого , принадлежащего замкнутому шару получим , поэтому , тогда .

***Теорема*** о продолжении линейного непрерывного оператора

Пусть ‒ всюду плотное подпространство ЛНП , ‒ банахово пространство и ‒ линейный непрерывный оператор. В этих условиях оператор можно единственным способом продолжить до линейного непрерывного оператора , определенного на всем пространстве . При продолжении сохраняется норма оператора, т. е. .

*Доказательство:*

Пусть . Определим оператор . Для некоторой последовательности будет . Эта последовательность являяется фундаментальной в подпространстве . Так как ‒ ограниченный линейный оператор, определенный в , то ‒ фундаментальная последовательность в . Но пространство ‒ банахово, следовательно, существует .

Этот предел не зависит от выбора последовательности . Этот предел принимается за значение . является продолжением оператора с подпространства на все .

Пусть ‒ вектора, а ‒ числа. Пусть далее последовательности таковы, что . Тогда будем иметь . В то же время будет .

По определению , и . Кроме того, . Поэтому , т. е. ‒ линейный оператор. Наконец, пусть снова ‒ последовательность элементов , стремящаяся к . Тогда . Переходя к пределу при , и пользуясь непрерывностью норм в пространствах и , получаем неравенство . Поэтому оператор ограничен и . Так как противоположное неравенство является очевидным, то нормы и совпадают.