CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

Ngày 23 tháng 3 năm 2021

Biên soạn: Đỗ Quốc Tuấn

Bộ môn Toán- Khoa Khoa học cơ bản

Trường Đại học Phenikaa

Mục lục

Tài liệu tham khảo chính

• Erwin Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Nhà xuất bản Wiley (10th Edition, 2011) (Chương 10).

• Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, tập III, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (2014) (Chương 3).

Tóm tắt lý thuyết

• Tích phân kép (bội hai): định nghĩa, cách tính trong tọa độ Descartes, đổi biến (chú ý phép đổi biến sang tọa độ cực), ứng dụng hình học.

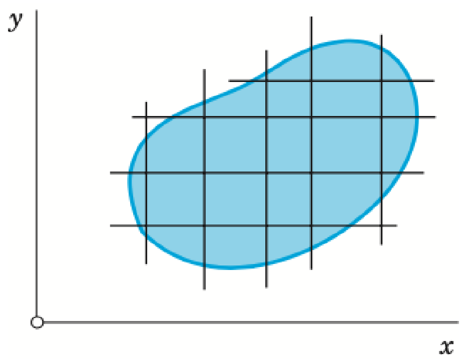
• Tích phân bội ba: định nghĩa, cách tính trong tọa độ Descartes, đổi biến (chú ý phép đổi biến sang tọa độ trụ, tọa độ cầu), ứng dụng hình học.

1 TÍCH PHÂN KÉP (double integrals)

Lưu ý: Tích phân kép còn được gọi với tên khác là tích phân bội hai.

1.1 Định nghĩa của tích phân kép

Để định nghĩa tích phân kép của hàm $f(x, y)$ trên miền R đóng, bị chặn trên mặt phẳng hai chiều xy với đường biên cong (không nhất thiết phải trơn, có thể gãy khúc), ta chia miền R bằng các đường song song [1] với trục Ox và Oy và đánh số các hình chữ nhật nằm trong miền R từ 1 đến n. Trong hình chữ nhật thứ k, ta chọn một điểm tuỳ ý (điểm mẫu) có toạ độ (x_k, y_k). Hình chữ nhật này có diện tích ΔA_k.



Hình 1: Miền R đóng, bị chặn (màu xanh). Ta chia miền R bởi các đường song song với Ox và Oy.

Bây giờ, ta đi tính tổng sau:

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k. \tag{1}$$

Ta thấy rằng, có nhiều cách chia miền R. Với mỗi cách chia miền R, ta có số hình chữ nhật nằm trong R là n_i. Và do đó, ta có các giá trị tương ứng J_{n_i}. *Câu hỏi đặt ra là khi $n_i \to \infty$ thì các J_{n_i} có tiến về cùng một giá trị hay không ?*

Các nhà toán học đã chỉ ra được rằng nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên R thì khi $n_i \to \infty$ sao cho $\Delta_{n_i} = \max\{\Delta A_k,\ 1 \le k \le n_i\} \to 0$, các J_{n_i} sẽ hội tụ về cùng một giá trị I . Điều này có nghĩa *giá trị giới hạn này tồn tại không phụ thuộc vào cách chia R và cách chọn điểm mẫu* (x_k, y_k). Giới hạn này được gọi là **tích phân kép** của $f(x, y)$ trên miền R. Ta kí hiệu tích phân kép như sau

$$I = \iint_R f(x, y)dA. \tag{2}$$

[1] Lưu ý: các đường chia này có thể không nhất thiết phải song song với các trục Ox và Oy. Tuy nhiên, việc chọn cách chia bằng các đường song song với các trục toạ độ sẽ giúp ta dễ hình dung hơn.

* Chú ý rằng, trong nhiều tài liệu, yếu tố diện tích dA được viết là dS.

Bên cạnh đó, chúng ta chú ý rằng $dA = dxdy$, do đó tích phân kép trên viết còn được viết như sau

$$I = \iint_R f(x,y)dxdy. \tag{3}$$

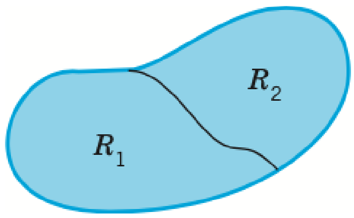
Lưu ý: tích phân kép có các tính chất tương tự như tích phân xác định của hàm một biến số. Cụ thể, ta có các tính chất sau của tích phân kép:

$$\iint_R kf(x,y)dxdy = k\iint_R f(x,y)dxdy \text{ với } k \text{ là hằng số,} \tag{4}$$

$$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy \pm \iint_R g(x,y)dxdy. \tag{5}$$

Nếu miền R chia thành hai miền con R_1 và R_2, nghĩa là $R = R_1 \cup R_2$, và đảm bảo rằng $R_1 \cap R_2$ là đường biên chung của R_1 và R_2 (như mô tả bởi hình 2 phía dưới) thì

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)dxdy. \tag{6}$$



Hình 2: Miền R được chia thành hai miền con R_1 và R_2.

Định lý giá trị trung bình: Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn R thì tồn tại ít nhất một điểm (x_0, y_0) thuộc miền R sao cho

$$\iint_R f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)A, \tag{7}$$

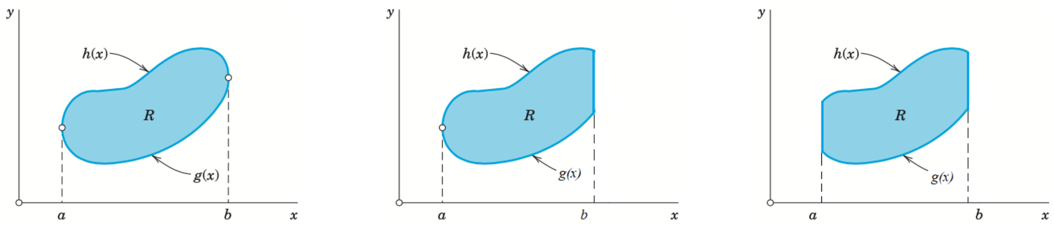
với A là diện tích của miền R.

1.2 Cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ Đề-các

- Nếu ta phân tích miền R theo cách như mô tả bởi hình 3, nghĩa là ta xác định được hai đường cong $g(x)$ (phía dưới) và $h(x)$ (phía trên) bao quanh miền R. Ngoài ra, hai đầu của hai đường cong này có cùng chung hoành độ: $x = a$ (ngoài cùng bên trái) và $x = b$ (ngoài cùng bên phải), nghĩa là $a < b$. Theo đó, tích phân kép được tính như sau: *tính tích phân theo biến y trước, rồi tính theo biến x sau*:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right] dx. \tag{8}$$

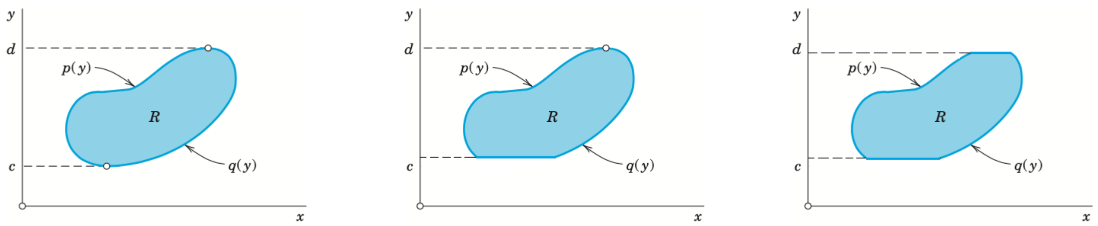
Lưu ý: Khi tính tích phân theo y thì ta coi x như hằng số.



Hình 3: Miền R được giới hạn bởi hai đường cong $g(x)$ (phía dưới) và $h(x)$ (phía trên).

- Nếu ta phân tích miền R theo cách như mô tả bởi hình 4, nghĩa là ta xác định được hai đường cong $p(y)$ (phía trái) và $q(y)$ (phía phải) bao quanh miền R. Ngoài ra, hai đầu của hai đường cong này có cùng chung tung độ: $y = c$ (dưới cùng) và $y = d$ (trên cùng), nghĩa là $c < d$. Theo đó, tích phân kép được tính như sau: *tính tích phân theo biến x trước, rồi tính theo biến y sau*, khi tính tích phân theo x thì ta coi y như hằng số.:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \right] dy. \tag{9}$$



Hình 4: Miền R được giới hạn bởi hai đường cong $p(y)$ (phía trái) và $q(y)$ (phía phải).

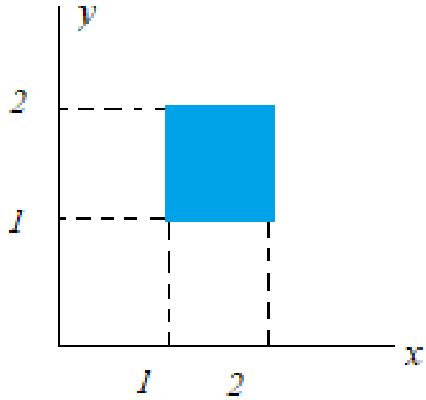
Một vài lưu ý quan trọng:

- Trong một số trường hợp, việc đổi thứ tự lấy tích phân, nghĩa là thay vì tính tích phân theo x trước, y sau ta có thể đổi lại tính tích phân theo y trước, x sau, hoặc ngược lại, có thể sẽ giúp tính toán nhanh hơn (bài tập 3).
- Trong một số trường hợp, việc xác định cận lấy tích phân gặp khó khăn thì ta nên chia miền lấy tích phân R thành các miền nhỏ sao cho dễ dàng xác định được cận lấy tích phân (bài tập 5).

Ví dụ 1: Tính tích phân sau

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \tag{10}$$

với miền R được xác định như sau $R = [1,2] \times [1,2]$ (xem hình 5).



Hình 5: Miền $R = [1, 2] \times [1, 2]$.

Miền R là hình vuông được xác định bởi bốn đường thẳng: $x = 1$ và $x = 2$ (hai đường này song song với trục Oy); $y = 1$ và $y = 2$ (hai đường này song song với trục Ox). Ta có thể tính theo một trong hai cách như trên.

- **Cách 1**: Tính y trước, x sau:

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} \right] dx, \tag{11}$$

ở đây $a = 1$, $b = 2$, $g(x) = 1$, và $h(x) = 2$. Ta tính tích phân theo y (trong ngoặc vuông) như sau

$$\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y}\bigg|_1^2 = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}. \tag{12}$$

Thay vào tích phân I bên trên, ta có

$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \bigg|_1^2 = \ln \frac{9}{8}. \tag{13}$$

- **Cách 2**: Tính x trước, y sau:

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{dx}{(x+y)^2} \right] dy, \tag{14}$$

ở đây $c = 1$, $d = 2$, $p(y) = 1$, và $q(y) = 2$. Ta tính tích phân theo x (trong ngoặc vuông) như sau

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y}\bigg|_1^2 = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}. \tag{15}$$

Thay vào tích phân I bên trên, ta có

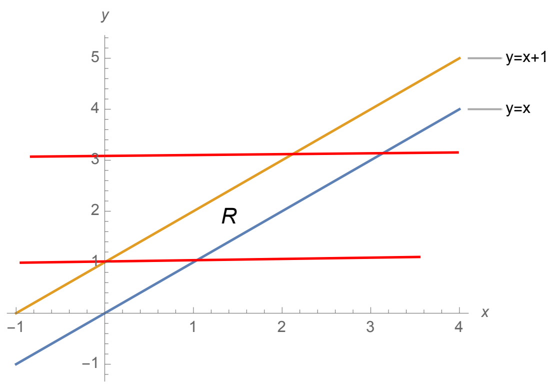
$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2} \right) dy = \ln \left| \frac{y+1}{y+2} \right| \bigg|_1^2 = \ln \frac{9}{8}. \tag{16}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân sau

$$I = \iint_R (x^2 + y^2) dxdy, \tag{17}$$

với miền R được giới hạn bởi các đường: $y = x$, $y = x + 1$, $y = 1$, và $y = 3$.

Nhận xét: Ở đây, ta đã có hai đường thẳng $y = 1$ và $y = 3$, do đó ta sẽ tính tích phân theo y sau và theo x trước. Muốn tính x trước, ta cần xác định hai đường $p(y)$ và $q(y)$. Hai đường này xác định từ phương trình hai đường còn lại như sau: $y = x \Rightarrow x = y$ và $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$. Câu hỏi bây giờ là đường nào là $p(y)$ (nằm bên tay trái) và đường nào là $q(y)$ (nằm bên tay phải) ? Do đó, ta cần phải vẽ miền R trên hệ trục toạ độ Oxy để hình dung cho chính xác (xem hình dưới đây)



Hình 6: Miền R được giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1$ (màu đỏ phía dưới), $y = 3$ (màu đỏ phía trên), $y = x + 1$ (màu vàng), và $y = x$ (màu xanh).

Theo hình vẽ, ta xác định được: $p(y) = y - 1$ (ứng với đường màu vàng) và $q(y) = y$ (ứng với đường màu xanh). Do đó, ta tính được tích phân kép như sau

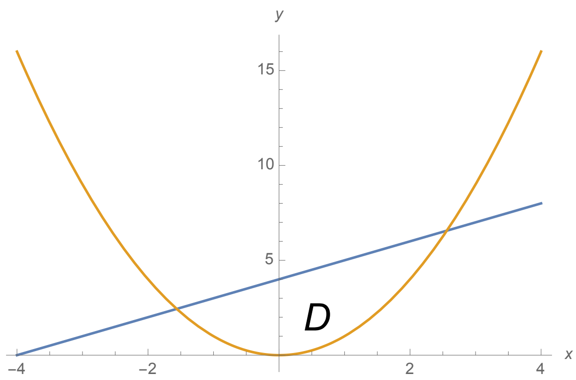
$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \left[\int_{y-1}^{y} (x^2 + y^2) dx \right] dy \\ &= \int_1^3 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \bigg|_{y-1}^{y} \right] dy \\ &= \int_1^3 \left[\frac{y^3}{3} + y^3 - \frac{(y-1)^3}{3} - y^2(y-1) \right] dy \\ &= \int_1^3 \left[\frac{y^3}{3} - \frac{(y-1)^3}{3} + y^2 \right] dy \\ &= \frac{y^4}{4} - \frac{(y-1)^4}{12} + \frac{y^3}{3} \bigg|_1^3 \\ &= 14. \end{aligned} \tag{18}$$

Ví dụ 3: Tính tích phân sau

$$I = \iint_D xydxdy, \tag{19}$$

với miền D được giới hạn bởi đường thẳng $x - y + 4 = 0$ và đường parabol $x^2 = y$.

Ở ví dụ này, ta chưa có thông tin gì về cận lấy tích phân của biến x. Để tìm các cận của x, ta cần tìm các điểm giao của đường thẳng $y = x + 4$ (hay chính là đường $x - y + 4 = 0$) và đường parabol $y = x^2$. Có hai cách để xác định các điểm giao này. **Cách thứ nhất** và là cách trực quan nhất đó là vẽ các đường $y = x + 4$ và $y = x^2$ trên cùng một hệ trục toạ độ, sau đó sẽ xác định toạ độ của các điểm giao, từ đó xác định được các cận lấy tích phân theo biến x. **Cách thứ hai** đó là giải phương



Hình 7: Hình vẽ xác định miền D giới hạn bởi hai đường: đường thẳng $y = x + 4$ (màu xanh) và đường parabol $y = x^2$ (màu vàng).

trình $x + 4 = x^2$. Giải phương trình này ta thu được hai nghiệm

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2};\ x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

Trong khoảng $[x_1, x_2]$ ta thấy đường $y = x + 4$ nằm bên trên đường $y = x^2$ theo trục Oy. Do đó, tích phân kép nêu trên sẽ được tính như sau

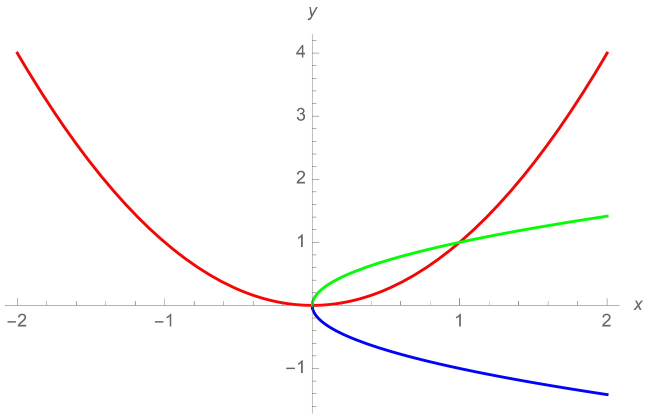
$$\begin{aligned}
I &= \iint_D xydxdy \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{x^2}^{x+4} xydy\right] dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{xy^2}{2}\Big|_{x^2}^{x+4}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left(-x^5 + x^3 + 8x^2 + 16x\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} + 8x^2\right)\Big|_{\frac{1-\sqrt{17}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \\
&= \frac{51\sqrt{17}}{8}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính tích phân sau

$$I = \iint_D (x^2 + y)dxdy, \tag{20}$$

với miền D được giới hạn bởi các đường parabol: $y = x^2$ và $x = y^2$.

Ta thấy rằng $x = y^2$ tương đương với $y = \pm\sqrt{x}$. Tuy nhiên, do $y = x^2 > 0$ nên chỉ có đường $y = \sqrt{x}$ mới giao với đường $y = x^2$. Điều này cũng thể hiện trên hình vẽ 7 dưới đây. Theo hình vẽ



Hình 8: Hình vẽ xác định miền D giới hạn bởi hai đường: đường parabol $y = x^2$ (màu đỏ) và đường parabol $y = \sqrt{x}$ (màu xanh lá cây). Rõ ràng đường parabol $y = -\sqrt{x}$ (màu xanh nước biển) không tham gia vào việc xác định miền D.

(hoặc giải phương trình $x^2 = \sqrt{x}$) ta thấy toạ độ các điểm giao là $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Ngoài ta ta thấy đường $y = \sqrt{x}$ nằm trên đường $y = x^2$ $\forall x \in [0, 1]$. Như vậy, tích phân hai lớp trên được xác định như sau

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x^2 + y)dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right) dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{3x^4}{2} + x^2\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) dx \\
&= \frac{-3x^5}{10} + \frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 \\
&= \frac{33}{140}.
\end{aligned}$$

1.3 Đổi biến

Trong nhiều trường hợp, miền R có các dạng đặc biệt như hình tròn, hình elip, nên việc đổi biến ví dụ như từ biến (x, y) sang biến toạ độ cực (r, θ) là cần thiết. Do đó, ta cần phải xây dựng cách chuyển tích phân kép từ hệ toạ độ Đề-các (x, y) sang hệ toạ độ (u, v).

Nhắc lại, với tích phân xác định một biến, nếu ta đổi biến x thành biến u theo cách sau $x = x(u)$, thì tích phân sẽ biến đổi như sau với chú ý $dx = x'(u)du$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(u))\frac{dx}{du}du, \tag{21}$$

với $x(\alpha) = a$ và $x(\beta) = b$.

Quay lại với tích phân kép, nếu ta đổi hai biến (x, y) thành hai biến (u, v) theo cách sau $x = x(u, v)$ và $y = y(u, v)$, thì tích phân kép sẽ biến đổi tương ứng như sau: nếu $\det(J) \neq 0$ (hoặc có thể bằng 0 tại một số hữu hạn điểm) thì

$$\int_R f(x,y)dxdy = \iint_{R^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\det(J)\right| dudv, \tag{22}$$

với J là ma trận Jacobi,

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Chú ý $\det(J)$ còn được gọi là định thức **Jacobian**

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Lưu ý rằng điều kiện $\det(J) \neq 0$ đảm bảo phép đổi biến là *song ánh*. Định thức Jacobian J có thể âm hoặc dương. Do đó, dấu trị tuyệt đối $|J|$ đảm bảo rằng kết quả thu được luôn dương. Trong tích phân trên, R^* là ảnh ngược của miền R trong mặt phẳng uv sao cho mỗi điểm (u, v) trong R^* tương ứng với một điểm (x, y) trong R và ngược lại mỗi điểm (x, y) trong R tương ứng với duy nhất một điểm (u, v) trong R^* (đảm bảo tính chất của ánh xạ song ánh).

- Hệ toạ độ cực (polar coordinates): Bây giờ ta xét một phép biến đổi quan trọng đó là việc đổi biến từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ cực:

$$x = r\cos\varphi, \tag{23}$$

$$y = r\sin\varphi. \tag{24}$$

Trong trường hợp này, $u = r$ và $v = \varphi$. Do đó, Jacobian tương ứng là

$$\begin{aligned}\det(J) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos\varphi(r\cos\varphi) - (-r\sin\varphi)\sin\varphi = r, \end{aligned} \tag{25}$$

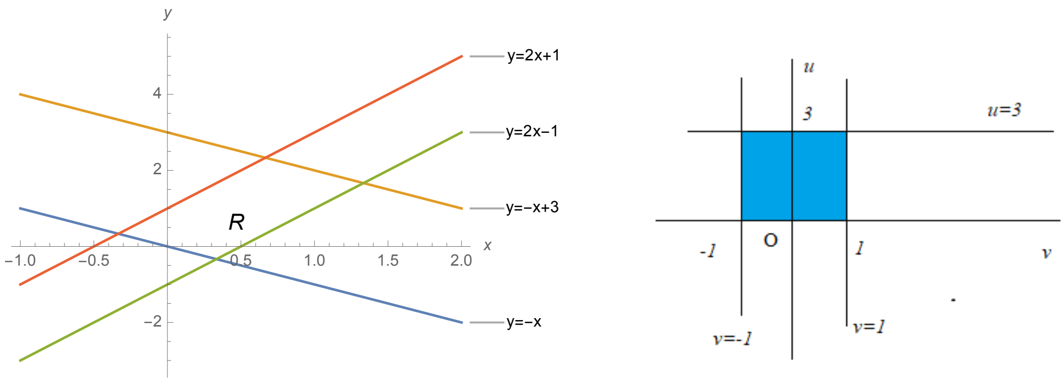
Do $r \geq 0$ nên $|\det(J)| = r$. Vậy,

$$\int_R f(x,y)dxdy = \iint_{R^*} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))rdrd\varphi. \tag{26}$$

Ví dụ 5: Tính tích phân sau

$$I = \iint_R (x+y)dxdy, \tag{27}$$

với R là miền giới hạn bởi các đường thẳng sau: $y=-x$, $y=-x+3$, $y=2x-1$, và $y=2x+1$.



Hình 9: Hình vẽ xác định miền $R(x,y)$ (trái) và miền $R^*(v,u)$ (phải, hình vuông màu xanh).

Nhận xét: Miền R được mô tả như hình vẽ số 8 dưới đây. Rõ ràng hình R rất khó để xác định cận lấy tích phân do các cạnh không song song với trục Ox và Oy, bên cạnh đó các đường không liên tục, được mô tả bởi các phương trình khác nhau. Thông thường, muốn xử lý hình R, ta cần phải chia nó thành các phần nhỏ bởi các đường song song với Ox hoặc Oy. Tuy nhiên, có một cách đơn giản hơn để xử lý, đó là đổi biến số theo cách sau

$$u = x+y, \tag{28}$$

$$v = -2x+y. \tag{29}$$

Với cách đổi biến này, ta thu được một hình $R^*(v,u)$ có dạng hình chữ nhật (xem hình), được bao quanh bởi các đường $u=0$ (tương ứng với $y=-x$), $u=3$ (tương ứng với đường $y=-x+3$), $v=-1$ (tương ứng với đường $y=2x-1$), và $v=1$ (tương ứng với đường $y=2x+1$).

Ta có,

$$x = \frac{1}{3}(u-v), \tag{30}$$

$$y = \frac{1}{3}(2u+v), \tag{31}$$

do đó ta tính được Jacobian như sau

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0. \tag{32}$$

Theo đó, ta tính được tích phân kép như sau

$$I = \iint_{R^*} u\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{3}\int_0^3 udu \int_{-1}^1 dv = 3. \tag{33}$$

Ví dụ 6: Tính tích phân sau

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \tag{34}$$

với R là phần tư hình tròn đơn vị (là hình tròn được bao bởi đường tròn có bán kính bằng đơn vị độ dài, nghĩa là bằng 1) nằm góc phần tư thứ nhất.

Hình tròn đơn vị có phương trình như sau

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ với } 0 \leq r \leq 1. \tag{35}$$

Với tích phân này, để cho thuận tiện trong việc tính toán ta chuyển hệ toạ đồ Đề-các sang hệ toạ độ cực như sau

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi. \tag{36}$$

Ở đây về mặt tổng quát khi chưa có điều kiện gì thì φ có giá trị nằm trong đoạn $[0, 2\pi]$, nghĩa là $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tuy nhiên, do yêu cầu đầu bài thì ta chỉ xét góc phần tư thứ nhất của hình tròn nên $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Nhắc lại với cách đổi biến như này thì Jacobian có giá trị là $\det(J) = r$. Do đó, tích phân trên trong hệ toạ độ cực có dạng như sau

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1). \tag{37}$$

1.4 Ứng dụng của tích phân kép

- **Tính diện tích miền phẳng**: Diện tích A của miền R trong mặt phẳng Oxy được xác định như sau:

$$A = \iint_R dxdy. \tag{38}$$

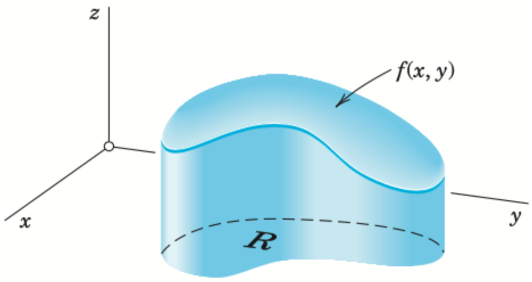
- **Tính thể tích của vật thể hình trụ**: Vật thể hình trụ có mặt xung quanh là mặt trụ với đường sinh song song với Oz, đáy là miền R trong mặt phẳng Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x, y)$ với $f(x, y) \geq 0$ (xem hình màu xanh trong hình 9):

$$V = \iint_R f(x, y)dxdy. \tag{39}$$

Lưu ý, trong trường hợp $f(x, y) \leq 0$, ta hoàn toàn có thể tính thể tích của vật thể hình trụ tương ứng như sau:

$$V = -\iint_R f(x, y)dxdy. \tag{40}$$

- **Tính khối lượng của bản phẳng**: Xét bản phẳng kim loại (hoặc chất liệu khác như nhựa, giấy,...) trong mặt phẳng xy có mật độ khối lượng (= khối lượng trên một đơn vị diện tích) là $\rho(x, y)$



Hình 10: Hình trụ có một mặt cho bởi đồ thị $z = f(x, y)$.

và hình dạng được xác định bởi miền R. Khi đó, khối lượng của bản phẳng được tính bằng công thức sau

$$M = \iint_R \rho(x, y)dxdy. \tag{41}$$

- Xác định trọng tâm của bản phẳng: Với bản phẳng kim loại R như trên, ta xác định được toạ độ trọng tâm $G(x_G, y_G)$ theo công thức sau

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_R x\rho(x, y)dxdy, \tag{42}$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_R y\rho(x, y)dxdy, \tag{43}$$

với M là khối lượng của bản phẳng tính theo công thức (41).

- Xác định mô-ment quán tính của bản phẳng: Với bản phẳng kim loại R như trên, ta tính được mô-ment quán tính của nó đối với trục x (I_x), trục y (I_y), và đối với gốc toạ độ (I_0) như sau

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x, y)dxdy, \tag{44}$$

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x, y)dxdy, \tag{45}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy. \tag{46}$$

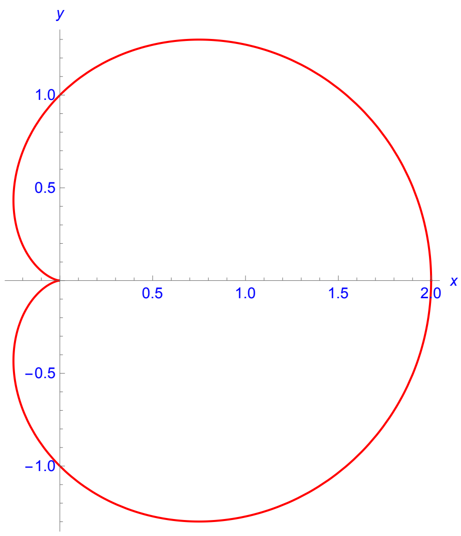
Ví dụ 7: Xác định trọng tâm của bản phẳng đồng chất D được giới hạn bởi đường sau $r = a(1 + \cos\varphi)$ với $a > 0$.

Bản phẳng D có hình dạng giống như hình vẽ dưới đây:

Do bản phẳng là đồng chất nên $\rho(x, y) = \rho_0$, với ρ_0 là hằng số, không phụ thuộc vào biến x và y. Do đó, công thức tính trọng tâm của bản phẳng đồng chất trong hệ toạ độ Đề-các sẽ trở thành

$$x_G = \frac{1}{S}\iint_D xdxdy, \tag{47}$$

$$y_G = \frac{1}{S}\iint_D ydxdy, \tag{48}$$



Hình 11: Bản phẳng D được tạo bởi $r = a(1 + \cos\varphi)$ với $a = 1 > 0$. Hình này còn có tên gọi là hình Cardioid.

sới $S \equiv \iint_D dxdy$ là diện tích của bản D. Đầu tiên ta tính diện tích bản D trong hệ toạ độ cực với $x = r\cos\varphi$ và $y = r\sin\varphi$ như sau

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} rdr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)} \right] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{3}{2}\pi a^2. \end{aligned} \tag{49}$$

Tiếp theo, ta tính công thức trọng tâm của bản phẳng trong hệ toạ độ cực như sau

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\cos\varphi r dr \\ &= \frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos\varphi \frac{r^3}{3}\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)} \right] \\ &= \frac{2a}{9\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi(1+\cos\varphi)^3 d\varphi \\ &= \frac{2a}{9\pi}\frac{15\pi}{4} \\ &= \frac{5a}{6} \end{aligned} \tag{50}$$

và

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\sin\varphi r dr \\
&= \frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\sin\varphi \frac{r^3}{3}\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)}\right] \\
&= \frac{2a}{9\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi(1+\cos\varphi)^3 d\varphi \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{51}$$

Kết quả này đúng như dự đoán dựa trên tính chất đối xứng của hình D. Thật vậy, từ tính chất đối xứng qua trục Ox của hình D ta kết luận là trọng tâm G phải nằm trên trục Ox, nghĩa là $y_G = 0$.

2 TÍCH PHÂN BỘI BA (triple integrals)

2.1 Định nghĩa

Đây là sự mở rộng của tích phân bội từ hai biến lên ba biến.

Xét một miền không gian ba chiều đóng, bị chặn T. Xét hàm số $f(x, y, z)$ xác định trong miền T này. Ta chia miền T này bởi các mặt phẳng song song với các mặt toạ độ. Với cách chia này, giả sử ta có n hình hộp chữ nhật con nằm trong T. Trong mỗi hình hộp chữ nhật này, ta chọn một điểm tuỳ ý (điểm mẫu), giả sử có tọa độ là (x_k, y_k, z_k) trong hộp thứ k.

Gọi ΔV_k là thể tích của hộp thứ k. Bây giờ, ta xét tổng sau

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k. \tag{52}$$

Tương tự như đối với tích phân kép, ta thấy rằng, có nhiều cách chia miền T. Với mỗi cách chia miền T, ta có số hình hộp chữ nhật nằm trong T là n_i. Và do đó, ta có các giá trị tương ứng J_{n_i}. Tương tự như tích phân kép, câu hỏi đặt ra bây giờ đó là: *khi $n_i \to \infty$ sao cho đường kính các hình hộp chữ nhật nhỏ tiến về* 0 *thì các J_{n_i} có tiến về cùng một giá trị hay không ?*

Người ta chứng minh được rằng nếu $f(x, y, z)$ liên tục trong T thì các J_{n_i} sẽ hội tụ về cùng một giá trị I, không phụ thuộc vào cách chia miền T và cách chọn điểm mẫu (x_k, y_k, z_k). Giới hạn này được gọi là **tích phân bội ba** của $f(x, y, z)$ trên miền T và được kí hiệu như sau

$$I = \iiint_T f(x, y, z)dV. \tag{53}$$

Nếu chú ý rằng yếu tố thể tích được xác định như sau $dV = dxdydz$, thì tích phân bội ba còn được viết như sau

$$I = \iiint_T f(x, y, z)dxdydz. \tag{54}$$

2.2 Cách tính tích phân bội ba trong hệ toạ độ Đề-các

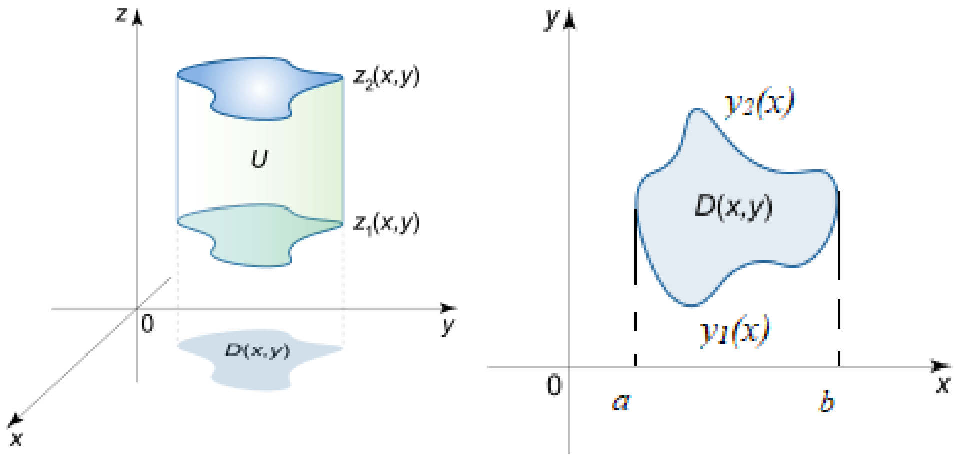
Nếu miền T được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x, y)$ và $z = z_2(x, y)$ trong đó $z_1(x, y)$ và $z_2(x, y)$ là các hàm số liên tục trên miền R với miền R hình chiếu của miền T lên mặt phẳng Oxy, thì ta có

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \iint_R \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dxdy. \tag{55}$$

Tiếp tục, nếu miền R được giới hạn bởi các đường $y = y_1(x)$ và $y = y_2(x)$ trong đó $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì tích phân trên được tính như sau

$$\begin{aligned}\iiint_T f(x, y, z)dxdydz &= \iint_R \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dxdy \\ &= \int_a^b \left\{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dy\right\} dx. \end{aligned} \tag{56}$$

Ta có thể hiểu công thức như sau: tính tích phân theo z trước (coi x và y như hằng số), sau đó tính tích phân theo y (coi x là hằng số), và cuối cùng là tính tích phân theo x.



Hình 12: Miền không gian 3 chiều T (hay là U như trong hình vẽ) và hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy, nghĩa là miền hai chiều R (hay là D như trong hình vẽ). Nguồn ảnh: https://www.math24.net/triple-integrals-cartesian-coordinates

Ví dụ 8: Tính tích phân bội ba sau

$$I = \iiint_T z dx dy dz, \tag{57}$$

với T được giới hạn như sau: $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$, $x \leq y \leq 2x$, và $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Trong ví dụ này, $f(x, y, z) = z$. Do thông tin đầu bài rất rõ ràng nên ta có thể tính được luôn tích phân bội ba như sau

$$\begin{aligned}
\iiint_T z dx dy dz &= \int_0^{1/4} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\
&= \int_0^{1/4} dx \int_x^{2x} dy \left[\frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right] \\
&= \int_0^{1/4} dx \int_x^{2x} \left[\frac{1}{2} \left(1 - x^2 - y^2\right) \right] dy \\
&= \int_0^{1/4} dx \left[\frac{1}{2} \left(y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_x^{2x} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{1/4} \left(x - \frac{10x^3}{3} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{10x^4}{12} \right) \Big|_0^{1/4} \\
&= \frac{43}{3072}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Ví dụ 9: Tính tích phân bội ba sau

$$\iiint_T (x+y+z)dxdydz, \tag{59}$$

với T được xác định bởi các đường: $x=0$, $y=0$, $z=0$ và mặt phẳng $x+y+z=1$.

Ta xác định các cận của tích phân như sau:

- Từ phương trình mặt phẳng $x+y+z=1$ ta suy ra $z=1-x-y$.

- Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, ta có $z=0$ và do đó $y=1-x$

- Khi $y=z=0$ thì $x=1$.

Như vậy, tích phân trên được tính như sau

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x+y+z)dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x-y}\right] \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2}\left(1-x^2-2xy-y^2\right)\right] dy \\
&= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}\left(y-x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{1-x}\right] \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right) dx \\
&= \frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned} \tag{60}$$

2.3 Đổi biến

Tương tự như tích phân kép, trong nhiều bài toán ta cần phải đổi hệ toạ độ thông qua đổi biến, nghĩa là $x \mapsto x(u,v,w)$, $y \mapsto y(u,v,w)$, và $z \mapsto z(u,v,w)$. Ở đây, u, v, và w là các biến mới.

Khi đó, nếu $J \neq 0$ (hoặc có thể bằng 0 tại một số hữu hạn điểm) thì

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T^*} f(x(u,v,w), y(x,y,w), z(x,y,w))|J|dudvdw, \tag{61}$$

với T^* là ảnh ngược của T và J là định thức **Jacobian** được xác định như sau

$$J = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}. \tag{62}$$

Để đảm bảo phép đổi biến là *song ánh* thì $J \neq 0$. Nhắc lại J có thể âm hoặc dương. Do đó, dấu trị tuyệt đối $|J|$ đảm bảo rằng kết quả thu được luôn dương.

Hệ toạ độ trụ (Cylindrical coordinates): Bây giờ ta xét việc đổi biến từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ trụ như sau

$$x = r\cos\varphi, \tag{63}$$

$$y = r\sin\varphi, \tag{64}$$

$$z = z, \tag{65}$$

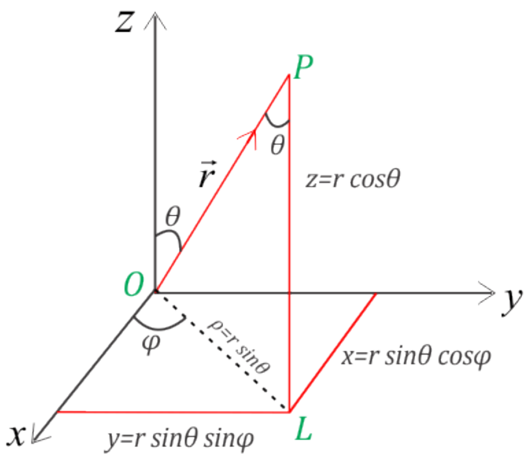
với $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, và $-\infty < z < +\infty$. Đồng nhất $u = r$, $v = \varphi$, và $w = z$ (tất nhiên cách đồng nhất này không phải là duy nhất, ví dụ ta có thể đồng nhất u với φ hoặc z), ta tính được J như sau

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \tag{66}$$

Do $r > 0$ nên $|J| = r$. Do đó,

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz. \tag{67}$$

Hệ toạ độ cầu (Spherical coordinates): Bây giờ ta xét việc đổi biến từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ cầu như sau (xem hình vẽ):



Hình 13: Hệ toạ độ cầu (r, θ, φ). Nguồn ảnh: https://physicscatalyst.com/graduation/spherical-coordinates-system

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \tag{68}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi, \tag{69}$$

$$z = r\cos\theta, \tag{70}$$

với $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, and $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Đồng nhất $u = r$, $v = \theta$, và $w = \varphi$, ta tính được Jacobian như sau

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta. \tag{71}$$

Do $\sin\theta > 0 \;\forall\; \theta \in (0, \pi)$, nên $|J| = r^2 \sin\theta$. Như vậy,

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T^*} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi. \tag{72}$$

Ví dụ 10: Tính tích phân bội ba sau

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \tag{73}$$

với V được xác định bởi: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq z^2$, và $z \geq 0$.

Với ví dụ này, ta sẽ chuyển từ hệ toạ độ Đề-các (x, y, z) sang hệ toạ độ cầu (r, θ, φ) như sau

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta. \tag{74}$$

với $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ và $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Khi chuyển đổi hệ toạ độ, ta cần tính định thức Jacobi tương ứng. Cụ thể, ta đã tính được định thức với kết quả như sau

$$J = r^2\sin\theta. \tag{75}$$

Để xác định các cận lấy tích phân, ta sẽ phân tích các thông tin đầu bài đưa ra. Đầu tiên, điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ tương đương với $r^2 \leq 1$ hay $0 \leq r \leq 1$. Như vậy, $0 \leq r \leq 1$ đã được xác định đối với biến r. Điều kiện $z \geq 0$ tương đương với $\cos\theta \geq 0$ hay $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Điều kiện $x^2 + y^2 \leq z^2$ tương đương với $\sin\theta \leq \cos\theta$ hay $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Với góc φ ta không có điều kiện rằng buộc nào nên ta vẫn sử dụng điều kiện tổng quát $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Với các thông tin phân tích trên và $\sqrt{x^2+y^2} = r\sin\theta$, ta tính tích phân như sau

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 r\sin\theta r^2 \sin\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \left[\sin^2\theta \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4}\sin^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/4}\right] \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)d\varphi \\ &= \frac{\pi-2}{16}\pi. \end{aligned} \tag{76}$$

2.4 Ứng dụng của tích phân bội ba

- Tính thể tích của vật thể ba chiều: Thể tích V của miền không gian đóng, kín ba chiều T (dùng để mô tả hình dáng vật thể) được xác định như sau

$$V = \iiint_T dxdydz. \tag{77}$$

- Tính khối lượng của vật thể ba chiều: Giả sử vật thể không đồng chất, có khối lượng riêng của nó là hàm theo các biến toạ độ $\rho(x, y, z)$ (nếu vật thể đồng chất thì khối lượng riêng của nó là hằng số ρ_0, nghĩa là như nhau tại mọi khu vực trên vật thể). Khi đó, khối lượng của vật thể được xác định như sau

$$m = \iiint_T \rho(x, y, z)dxdydz. \tag{78}$$

- Xác định trọng tâm G của vật thể ba chiều: Toạ độ trọng tâm G (x_G, y_G, z_G) của vật thể ba chiều được xác định theo công thức sau

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_T x\rho(x, y, z)dxdydz, \tag{79}$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iiint_T y\rho(x, y, z)dxdydz, \tag{80}$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_T z\rho(x, y, z)dxdydz, \tag{81}$$

với m là khối lượng của vật thể tính theo công thức (78).

Ví dụ 11: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, và $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Với vật thể được giới hạn bởi các mặt đặc biệt như đầu bài cho, ta cần chuyển sang hệ toạ độ cầu để làm việc với: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, và $z = r\cos\theta$. Theo đầu bài ta có, $1 \le r \le 2$. Từ phương trình mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ta suy ra $r\cos\theta = r\sin\theta$ hay $\theta = \pi/4$. Như vậy, $0 \le \theta \le \pi/4$. Với các thông tin trên, thể tích V tính như sau

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 r^2 \sin\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin\theta \frac{r^3}{3}\bigg|_1^2 \right) d\theta \\ &= \frac{7}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \\ &= -\frac{7}{3}2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \\ &= \frac{14}{3}\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned} \tag{82}$$

BÀI TẬP

Bài tập 1: Tính các tích phân kép sau

$$I = \int_0^2 \int_x^{2x} (x+y)^2 dydx, \tag{83}$$

$$I = \int_0^3 \int_{-y}^{y} (x^2+y^2) dxdy. \tag{84}$$

Bài tập 2: Tính các tích phân kép sau

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \text{ với } R \text{ được giới hạn bởi } x^2+y^2 \le 2y,\ x \le y, \tag{85}$$

$$I = \iint_R \left(\frac{y^2}{x^2} + xy + x + y\right), \text{ với } R \text{ được giới hạn bởi } 1 \le x^2+y^2 \le 4. \tag{86}$$

Bài tập 3: Đổi thứ tự lấy tích phân

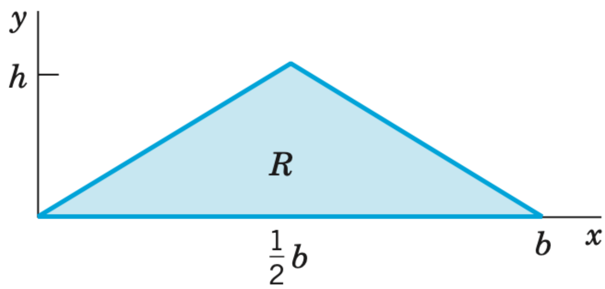
$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx. \tag{87}$$

Bài tập 4: Tính các tích phân bội ba sau

$$I = \iiint_V (1-x-y-z)dxdydz, \text{ với } V \text{ được xác định bởi } x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1, \tag{88}$$

$$\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz, \text{ với } V \text{ được xác định bởi } 3(x^2+y^2)+z^2 = 3a^2 \text{ và } a > 0. \tag{89}$$

Bài tập 5: Xét một tấm kim loại mỏng đồng chất có mật độ khối lượng là $\rho(x,y) = 1$ và hình dáng như mô tả bởi hình vẽ R dưới đây



Hình 14: Thông số kích thước của tấm kim loại mỏng

i) Hãy tính diện tích của tấm kim loại trên theo công thức tích phân kép.

ii) Hãy xác định vị trí trọng tâm của tấm kim loại trên.

Bài tập 6: Xét một nửa khối cầu kim loại đồng chất, có mật độ khối lượng là $\rho(x,y,z) = 2$ và có bán kính bằng 1 (độ dài đơn vị).

i) Hãy tính thể tích cuả nửa khối cầu theo công thức tích phân bội ba.

ii) Hãy xác định trọng tâm của nửa khối cầu.

Lecture Notes: Giải tích

Chương 3: Tích phân đường, tích phân mặt

Biên soạn: Vũ Hữu Như, PHENIKAA University

Ngày 19 tháng 5 năm 2021

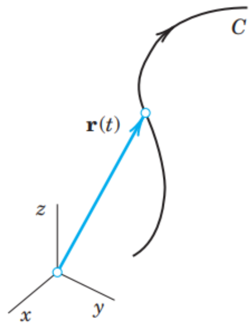
Mục lục

Chương 3

Tích phân đường và tích phân mặt

3.1 Đường cong: biểu diễn tham số, véc tơ tiếp xúc, tiếp tuyến, độ dài

- **Biểu diễn tham số của đường cong**: *Biểu diễn tham số* của đường cong C với tham số t có dạng
$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \tag{3.1}$$
ở đó $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ và $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ (xem Hình 3.1).



Hình 3.1: Biểu diễn tham số của đường cong C

- **Đường cong định hướng**: Đường cong C có thể được định hướng bằng cách chọn một điểm đầu và một điểm cuối. Chẳng hạn, trên đường cong C ta chọn điểm A là điểm đầu và điểm B là điểm cuối, khi đó ta nói đường cong C được định hướng từ A tới B và ta gọi hướng từ A tới B là *hướng dương*, ngược lại, hướng từ B tới A là *hướng âm*.

  Ta nói biểu diễn tham số (3.1) phù hợp với hướng dương của đường cong C nếu
$$\begin{cases} a \le b \\ \text{khi } t \text{ chạy từ } a \text{ tới } b \text{ thì } M(x(t), y(t), z(t)) \text{ chạy theo hướng dương của đường cong } C. \end{cases}$$

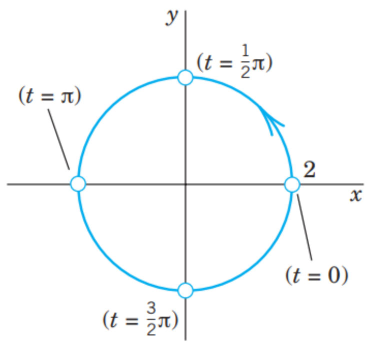
Nhận xét 3.1. *Khi đường cong C nằm trên mặp phẳng $Oxy(z = 0)$, biểu diễn tham số của C có thể được cho dưới dạng*
$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}. \tag{3.2}$$

Ví dụ 3.1. *Đường cong $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ nằm trong mặt phẳng Oxy với tâm là gốc tọa độ O và bán kính $r = 2$ có biểu diễn tham số sau*
$$\boldsymbol{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 0], \quad \textit{hay ta có thể viết gọn hơn} \quad \boldsymbol{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t]$$

với $0 \le t \le 2\pi$.

- *Với* $t = 0$, *ta có* $\boldsymbol{r}(0) = [2, 0]$.
- *Với* $t = \frac{\pi}{2}$, *ta có* $\boldsymbol{r}(0) = [0, 2]$.
- *Với* $t = \pi$, *ta có* $\boldsymbol{r}(\pi) = [-2, 0]$.
- *Với* $t = \frac{3\pi}{2}$, *ta có* $\boldsymbol{r}(3\pi/2) = [0, -2]$.

Hướng dương của đường cong C *(tương ứng với biểu diễn tham số* $\boldsymbol{r}(t)$*) là hướng ngược chiều kim đồng hồ (xem Hình 3.2).*

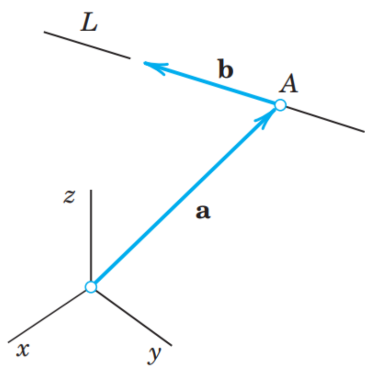


Hình 3.2: Đường tròn với hướng dương ngược chiều kim đồng hồ

Ví dụ 3.2. *Đường thẳng* L *qua điểm* $A(a_1, a_2, a_3)$ *và có véc tơ chỉ phương* $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *có phương trình tham số sau*

$$\boldsymbol{r}(t) = a + t\boldsymbol{b} = [a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3] \quad \text{với} \quad \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

(xem Hình 3.3).



Hình 3.3: Biểu diễn tham số của đường thẳng L

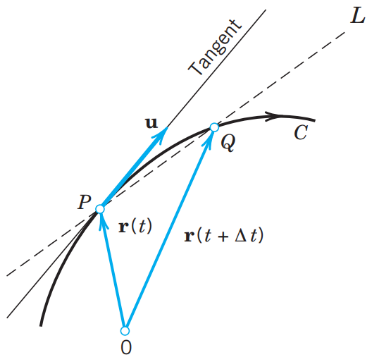
- **Tiếp tuyến của đường cong**: Cho đường cong C có biểu diễn tham số (3.1) và hai điểm $P = \mathbf{r}(t_0)$ và $Q = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$. *Véc tơ tiếp xúc* của C tại điểm P được cho bởi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t_0) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)] \\ &= [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

và *véc tơ tiếp xúc đơn vị* của C tại điểm P được cho bởi

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t_0) &= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t_0)|}\mathbf{r}'(t_0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2+(z'(t_0))^2}}[x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)]\end{aligned}$$

(xem Hình 3.4). Do đó, biểu diễn tham số của *tiếp tuyến* của đường cong C tại $P = \mathbf{r}(t_0)$



Hình 3.4: Tiếp tuyến của đường cong C

có dạng

$$\mathbf{q}(w) = \mathbf{r}(t_0) + w\mathbf{r}'(t_0) \quad (w \text{ là tham số}). \tag{3.4}$$

Ví dụ 3.3. *Viết phương trình tham số của elliptic (E) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tại $P(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.*

Giải. Biểu diễn tham số của elliptic (E) là

$$\boldsymbol{r}(t) = [2\cos t, \sin t].$$

Đạo hàm $\boldsymbol{r}'(t) = [-2\sin t, \cos t]$.

Dễ thấy $P = \boldsymbol{r}(t_0)$ với $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Do đó $\boldsymbol{r}'(\pi/4) = [-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ và biểu diễn tham số của tiếp tuyến với (E) tại P là

$$\boldsymbol{q}(w) = \boldsymbol{r}(t_0) + w\boldsymbol{r}'(t_0) = [\sqrt{2}(1-w), \frac{1}{\sqrt{2}}(1+w)].$$

- **Độ dài của một cung**. Cho cung C có biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad a \le t \le b.$$

Khi đó *độ dài* của cung C được tính bằng công thức sau

$$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t)}dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \tag{3.5}$$

3.2 Tích phân đường trong mặt phẳng và không gian, tính chất, cách tính, ứng dụng tìm công cơ học. Định lý Green trong mặt phẳng (liên hệ tích phân đường loại 2 với tích phân kép)

3.2.1 Định nghĩa và cách tính

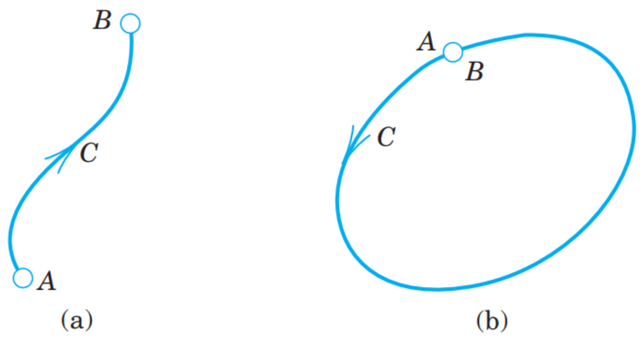
Cho đường cong C có biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b. \tag{3.6}$$

Đường cong C (xem Hình 3.5) được định hướng từ $A = \mathbf{r}(a)$ (ứng với $t = a$) đến $B = \mathbf{r}(b)$ (ứng với $t = b$). Ta gọi

- $A = \mathbf{r}(a)$ là *điểm đầu.*
- $B = \mathbf{r}(b)$ là *điểm cuối.*
- C là đường cong *kín* nếu $A \equiv B$.
- C là đường cong *trơn* nếu $\mathbf{r}'(t)$ liên tục trên $[a, b]$.
- C là đường cong *trơn từng khúc (piecewise smooth)* nếu nó là hợp của hữu hạn các đường cong trơn.

Ví dụ 3.4. *Hình chữ nhật có biên là một đường cong trơn từng khúc.*



Hình 3.5: Đường cong định hướng C. (b) - đường cong kín

Bài toán: *Xét một chất điểm M di chuyển theo một đường cong C từ điểm đầu $A = \mathbf{r}(a)$ đến điểm cuối $B = \mathbf{r}(b)$ dưới tác dụng của một lực $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Hãy tính công W của lực $\mathbf{F}$?*

Để đưa ra lời giải cho bài toán trên, người ta chia cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường cong C bằng các điểm $A_i = \mathbf{r}(t_i)$, $0 \leq i \leq n$, với

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Khi đó công W của lực $\mathbf{F}$ bằng tổng các công thực hiện ΔW_i để đưa vật từ điểm A_i tới điểm A_{i+1} và $\Delta W_i \approx \mathbf{F}(\mathbf{r})(\xi_i) \cdot \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ với $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Bằng cách thông qua giới hạn, người ta xây dựng được khái niệm *tích phân đường* $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ và giá trị của tích phân đường đó bằng đúng công W cần tính (xem Định nghĩa 3.1 và công thức (3.8)).

Giả thiết tổng quát. Trong chương này, chúng ta luôn giả thiết: C **là đường cong trơn từng khúc**.

Định nghĩa 3.1 (Tích phân đường (loại 2))**.** Cho hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), F_3(\mathbf{r}))$ xác định trên đường cong C được định hướng từ $A = \mathbf{r}(a)$ tới $B = \mathbf{r}(b)$ với $a \leq b$. Khi đó *tích phân đường* (loại 2) của hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ trên đường cong C là đại lượng được cho bởi

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}), \tag{3.7}$$

ở đó

(-) $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ hàm véc tơ dưới dấu tích phân.

(-) C *là đường lấy tích phân.*

(-) $d\mathbf{r} = [dx, dy, dz]$.

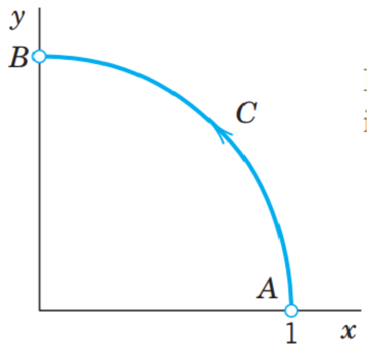
Vì $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1, F_2, F_3)$, nên ta có

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b (F_1x' + F_2y' + F_3z')dt. \tag{3.7'}$$

• Nếu C là đường cong kín, trong công thức (3.7) ta viết

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \text{thay vì} \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Ví dụ 3.5 (Tích phân đường trên mặt phẳng)**.** *Tính tích phân đường của hàm véc tơ* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [-y, -xy]$ *trên đường cong* C *với* C *là một cung tròn từ* A *đến* B *được cho trong Hình 3.6.*



Hình 3.6: Cung C cho Ví dụ 3.5

Giải. Biểu diễn tham số của $C : \boldsymbol{r}(t) = [\cos t, \sin t]$ *với* $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$*. Khi đó*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [-y, -xy] = [-\sin t, -\sin t\cos t]$$

và

$$\boldsymbol{r}'(t) = [-\sin t, \cos t].$$

Theo công thức (3.7'), ta có

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{\pi/2} (F_1x' + F_2y')dt \\ &= \int_0^{\pi/2} [(-\sin t)(-\sin t) + (-\sin t\cos t)\cos t]dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.6 (Tích phân đường trong không gian)**.** *Tính tích phân đường của hàm véc tơ* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [z, x, y]$ *trên đường xoắn ốc* C *:*

$$\boldsymbol{r}(t) = [\cos t, \sin t, 3t], \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải. Ta có

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [z, x, y] = [3t, \cos t, \sin t]$$

và

$$\boldsymbol{r}'(t) = [-\sin t, \cos t, 3].$$

Theo công thức (3.7'), ta có

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{\pi/2} (F_1x' + F_2y' + F_3z')dt \\ &= \int_0^{\pi/2} [3t(-\sin t) + \cos t\cos t + 3\sin t]dt = 7\pi.\end{aligned}$$

Nhận xét 3.2. *Từ Định nghĩa 3.1 ta thấy rằng nếu $\boldsymbol{F}$ liên tục trên đường cong trơn (hoặc trơn từng khúc) C, thì tích phân đường $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ tồn tại.*

3.2.2 Tính chất của tích phân đường

Tích phân đường có một số tích chất sau.

(i) $\int_C k\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = k \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ với k là hằng số.

(ii) $\int_C [\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \mathbf{G}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$.

(iii) Nếu C chia thành hai đường cong C_1 và C_2 có hướng cùng hướng với C, thì

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

(iv) Nếu đổi hướng dương của cung C thì tích phân (3.7) đổi dấu.

(v) Tích phân đường (3.7) không phụ thuộc vào cách biểu diễn tham số của C, có nghĩa là, nếu C có hai cách biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad a \le t \le b$$

và

$$\mathbf{r}^*(t^*) = [x^*(t^*), y^*(t^*), z^*(t^*)], \quad a^* \le t^* \le b^*,$$

thì

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}^*) \cdot d\mathbf{r}^*.$$

(vi) Trong trường hợp tổng quát thì tích phân đường (3.7) phụ thuộc vào hàm véc tơ $\mathbf{F}$, điểm đầu A, điểm cuối B và đường cong C điểm A tới điểm B.

3.2.3 Ứng dụng: Tìm công cơ học

Công của lực $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ để di chuyển một chất điểm M dọc theo một cung C từ A đến B được tính bởi

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \tag{3.8}$$

Ví dụ 3.7 (Công bằng độ biến thiên của động năng)**.** *Xét một vật M có khối lượng m chuyển động dọc theo cung $C : \boldsymbol{r}(t)$ (với t là thời gian) dưới tác động của một lực $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Khi đó* vận tốc *$\boldsymbol{v}$ của vật M được cho bởi*

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

Từ công thức (3.8), ta có

$$W = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{v}(t) dt. \tag{3.9}$$

Theo định luật 2 Newton, ta có

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\boldsymbol{r}''(t) = m\boldsymbol{v}'(t).$$

Thay biểu thức trên vào (3.9) thu được

$$W = \int_a^b m\boldsymbol{v}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) dt = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2\Big|_{t=a}^{t=b}.$$

Trong vế phải của biểu thức trên, $\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2$ chính là động năng của vật M. Vì vậy, công thực hiện chính bằng độ biến thiên của động năng.

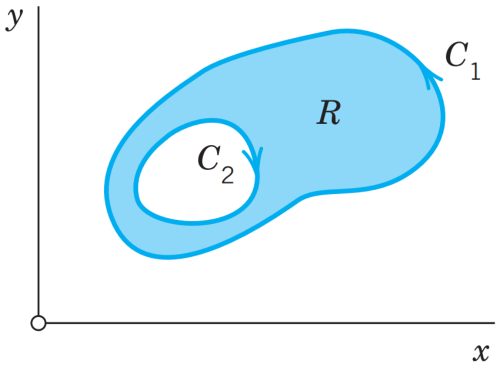
3.2.4 Công thức Green trong mặt phẳng

Công thức Green trong mặt phẳng giúp chúng ta biến đổi giữa tích phân kép trên một miền $R \subset \mathbb{R}^2$ sang tích phân đường và ngược lại.

Định lý 3.1 (Công thức Green trong mặt phẳng)**.** *Cho R là miền đóng và bị chặn trong mặt phẳng Oxy với biên C là đường cong trơn từng khúc. Giả sử $F_1(x,y)$ và $F_2(x,y)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ và $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ liên tục trên một miền chứa R. Khi đó,*

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)\,. \tag{3.10}$$

Ở đây, biên C của R được định hướng dương sao cho miền R luôn nằm bên trái C nếu ta di chuyển trên C theo hướng dương đó (xem Hình 3.7).



Hình 3.7: Miền R với biên C gồm hai phần C_1 và C_2. C_1 được định hướng ngược chiều kim đồng hồ và C_2 được định hướng cùng chiều kim đồng hồ.

Nhận xét 3.3. *Công thức Green* (3.10) *có thể được viết dưới dạng sau*

$$\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_R \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} dxdy. \tag{3.11}$$

Ví dụ 3.8. *Kiểm chứng công thức Green* (3.10) *với $F_1 = y^2 - 7y$, $F_2 = 2xy + 2x$ và đường cong C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.*

Giải. Miền R là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$. Vế trái của (3.10) *là*

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R [(2y+2) - (2y-7)]dxdy = 9 \iint_R dxdy = 9S(R) = 9\pi,$$

với $S(R)$ là diện tích của miền R.

Theo Định lý 3.1, hướng dương của đường cong C phải là hướng ngược chiều kim đồng hồ. Do đó, ta có biểu diễn tham số của C

$$\boldsymbol{r}(t) = [x, y] = [\cos t, \sin t], \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nên

$$F_1 = y^2 - 7y = \sin^2 t - 7\sin t, \quad F_2 = 2xy + 2x = 2\cos t \sin t + 2\cos t.$$

Vì vậy, vế phải của (3.10) *là*

$$\begin{aligned} \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) &= \int_0^{2\pi} [(\sin^2 t - 7\sin t)(-\sin t) + (2\cos t \sin t + 2\cos t)\cos t]dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin^3 t + 7\sin^2 t + 2\cos^2 t \sin t + 2\cos^2 t]dt \\ &= 9\pi. \end{aligned}$$

Vậy, ta có

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) \,.$$

3.3 Mặt trong không gian 3 chiều: biểu diễn tham số, véc tơ pháp tuyến, mặt định hướng được

• **Biểu diễn của mặt trong hệ tọa độ** $Oxyz$. Phương trình của mặt cong S trong hệ tọa độ $Oxyz$ được cho bởi

$$z = f(x, y) \quad \text{hoặc} \quad g(x, y, z) = 0. \tag{3.12}$$

Ví dụ 3.9. *Nửa mặt cầu phía trên mặt Oxy với tâm $O(0,0,0)$ và bán kính $r = a$ có phương trình*

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

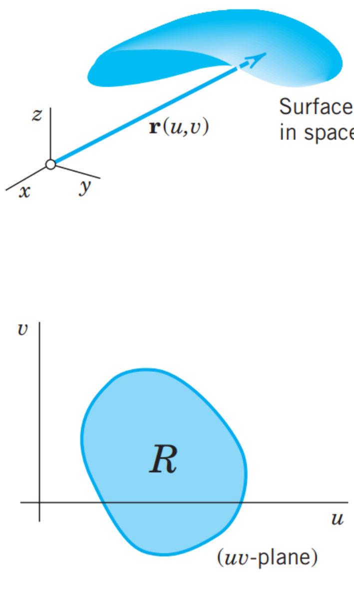
hoặc

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (z \geq 0).$$

• **Biểu diễn tham số của mặt**. Biểu diễn tham số của mặt S có dạng

$$\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.13}$$

ở đó u và v là các tham số (xem Hình 3.8).



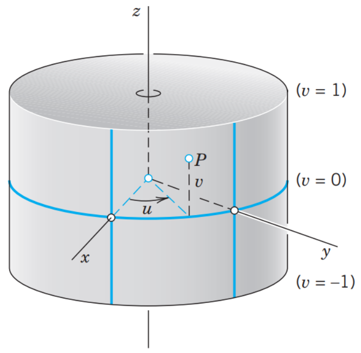
Hình 3.8: Biểu diễn tham số của mặt cong

Ví dụ 3.10 (Biểu diễn tham số của một mặt trụ)**.** *Mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$, $-1 \leq z \leq 1$ có bán kính đáy a, chiều cao bằng 2 và đường sinh song song với Oz. Một biểu diễn tham số của mặt trụ có dạng*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [a\cos u, a\sin u, v] = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}, \tag{3.14}$$

với tham số $(u, v) \in R$ (xem Hình 3.9). Trong đó, miền R là hình chữ nhật

$$R := \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1\}.$$



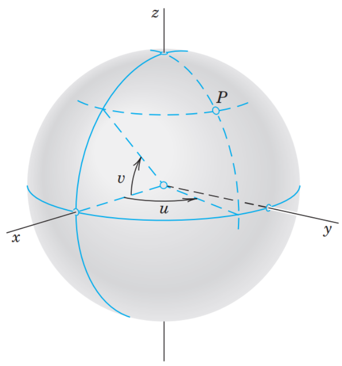
Hình 3.9: Biểu diễn tham số của mặt trụ

Ví dụ 3.11 (Biểu diễn tham số của một mặt cầu). *Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ có một biểu diễn tham số dạng*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v], \tag{3.15}$$

với tham số $(u, v) \in R$ (xem Hình 3.10). Trong đó, miền R là hình chữ nhật

$$R := \left\{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$



Hình 3.10: Biểu diễn tham số của mặt cầu

Ví dụ 3.12 (Biểu diễn tham số của một mặt nón). *Mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq H$ có một biểu diễn tham số dạng*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u], \tag{3.16}$$

với tham số $(u, v) \in R$. Trong đó, miền R là hình chữ nhật

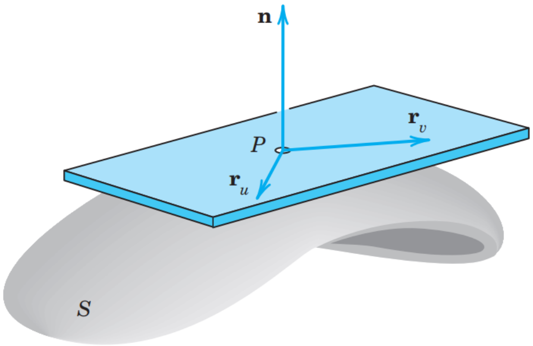
$$R := \{(u, v) : 0 \leq u \leq H, 0 \leq v \leq 2\pi\}.$$

- **Mặt phẳng tiếp xúc và véc tơ pháp tuyến.**

Định nghĩa 3.2. Cho mặt cong S và điểm $P \in S$. Khi đó, ta gọi:

(i) một véc tơ tiếp xúc với một đường cong tùy ý nằm trong S tại điểm P là *véc tơ tiếp xúc* của S tại P;

(ii) tập tất cả véc tơ tiếp xúc với S tại điểm P là *mặt phẳng tiếp xúc* của S tại P;



Hình 3.11: Véc tơ pháp tuyến và mặt phẳng tiếp xúc của S tại P

(iii) một véc tơ vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc của S tại P là *véc tơ pháp tuyến* của S tại P

(xem mặt phẳng tiếp xúc và véc tơ pháp tuyến trong Hình 3.11).

Giả sử mặt cong S có biểu diễn tham số $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ trong (3.13) và điểm $P = \mathbf{r}(u_0, v_0) \in S$. Khi đó các đạo hàm riêng $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ và $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ là các véc tơ tiếp xúc với S tại P. Giả sử hai véc tơ tiếp xúc này độc lập tuyến tính, khi đó một véc tơ pháp tuyến của S tại P là

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \neq \mathbf{0} = (0, 0, 0). \tag{3.17}$$

Ở đây, với $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, kí hiệu

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

là *tích ngoài (tích có hướng)* của hai véc vơ $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$.

Véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại P là

$$\mathbf{n}(u_0, v_0) = \frac{1}{|\mathbf{N}(u_0, v_0)|} \mathbf{N}(u_0, v_0). \tag{3.19}$$

Nhận xét 3.4. *Nếu S được cho bởi phương trình*

$$g(x, y, z) = 0,$$

khi đó, véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại $P(x_0, y_0, z_0)$ được cho bởi

$$\boldsymbol{n}(P) = \frac{1}{|\text{grad } g(P)|} \text{grad } g(P), \tag{3.20}$$

với grad $g = \nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$.

Ví dụ 3.13. *Mặt cầu $S : g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ có véc tơ pháp tuyến đơn vị tại điểm $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ là*

$$\boldsymbol{n}(P) = \left[\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{a}, \frac{z_0}{a} \right].$$

Ví dụ 3.14. *Cho mặt nón $S : g(x, y, z) = -z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ và điểm $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ và P không phải là đỉnh của hình nón. Khi đó véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại P là*

$$\boldsymbol{n}(P) = \left[\frac{x_0}{\sqrt{2(x_0^2 + y_0^2)}}, \frac{y_0}{\sqrt{2(x_0^2 + y_0^2)}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right].$$

• **Mặt trơn và mặt trơn từng mảnh**.

Định nghĩa 3.3. (i) Mặt cong S được gọi là mặt *trơn* nếu hai véc tơ tiếp xúc $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ tại điểm P bất kỳ là độc lập tuyến tính và véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}$ phụ thuộc liên tục vào điểm P.

(ii) Mặt cong S được gọi là *trơn từng mảnh* nếu nó là hợp của hữu hạn các mặt trơn không dẫm lên nhau.

Ví dụ 3.15. ∘ *Mặt cầu là mặt trơn.*

∘ *Mặt là biên của hình hộp chữ nhật là mặt trơn từng mảnh.*

• **Sự định hướng của mặt trơn và mặt trơn từng mảnh**.

∘ Cho mặt **trơn** S. Tại mỗi điểm P của mặt S có hai véc tơ pháp tuyến là $\widetilde{\mathbf{n}}$ và $\mathbf{n}' = -\widetilde{\mathbf{n}}$. Nếu ta chọn một hướng của pháp tuyến là *hướng dương*, thì hướng ngược lại là *hướng âm.*

Chẳng hạn, ta chọn hướng của $\widetilde{\mathbf{n}}$ là hướng dương, thì hướng $\mathbf{n}' = -\widetilde{\mathbf{n}}$ là hướng âm.

∘ Cho mặt **trơn** S có biên là đường cong C. Giả sử S được định hướng dương bởi hướng của véc tơ pháp tuyến $\widetilde{\mathbf{n}}$. Ta nói *hướng dương của biên C phù hợp với sự định hướng dương của mặt S* nếu một người đứng thẳng theo hướng pháp tuyến $\widetilde{\mathbf{n}}$ và đi dọc theo chiều dương của biên C thì miền S sẽ nằm bên trái của người đó (xem Hình 3.12 (a)).

∘ Cho mặt cong S là mặt **trơn từng mảnh** có các mặt trơn thành phần là $S_1, S_2, ..., S_k$. Ta có thể định hướng dương mặt S thông qua sự định hướng dương của từng mặt S_i sao cho biên chung C^* của hai mặt tiếp giáp bất kỳ, chẳng hạn S_1 và S_2, thỏa mãn tích chất sau: các hướng dương của C^* phù hợp với sự định hướng dương của S_1 và của S_2 là ngược hướng nhau (xem Hình 3.12 (b)).

3.4 Tích phân mặt loại 2: định nghĩa, cách tính; ứng tính thông lượng của một trường véc tơ qua một mặt (tùy chọn)

3.4.1 Định nghĩa và cách tính

• **Biểu diễn tham số phù hợp với sự định hướng của mặt**. Cho mặt trơn S được định hướng dương bởi một véc tơ pháp tuyến $\widetilde{\mathbf{n}}$. Xét một biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2. \quad (3.21)$$

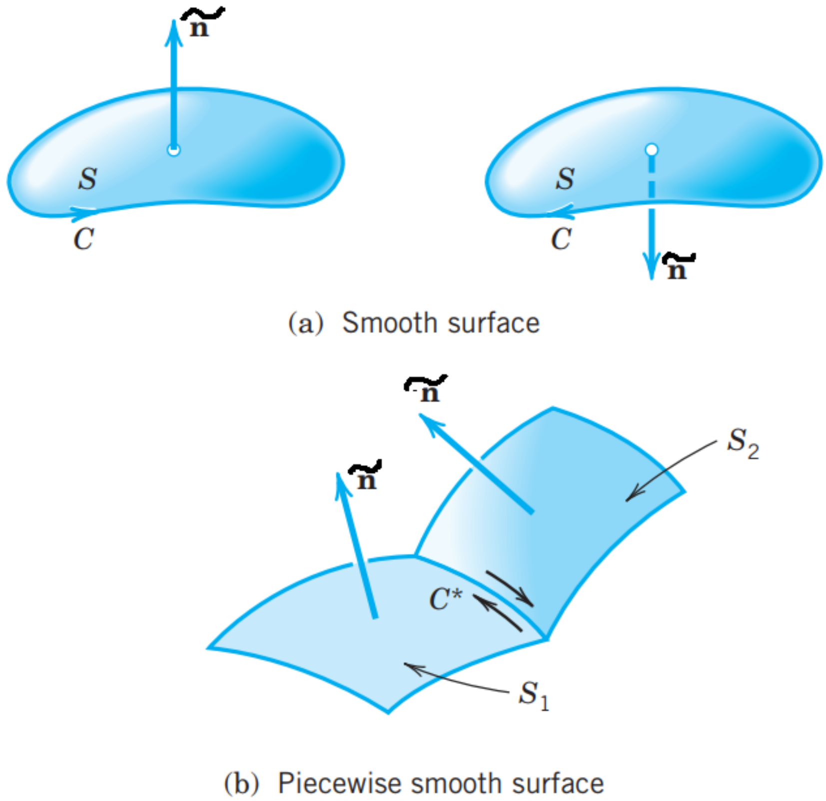
Khi đó một véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ tại điểm $P = \mathbf{r}(u,v)$ tùy ý, được tính bởi công thức (3.17),

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) \neq \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Ta nói rằng $\mathbf{N}$ *phù hợp với hướng dương của S* nếu $\mathbf{N}$ cùng hướng với $\widetilde{\mathbf{n}}$.

Định nghĩa 3.4 (Tích phân mặt loại 2)**.** Giả sử véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ được cho bởi công thức (3.22) phù hợp với hướng dương của mặt định hướng S. Khi đó *tích phân mặt (loại 2)* của hàm véc tơ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ trên mặt cong định hướng S được ký hiệu là

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.23)$$



Hình 3.12: (a) sự định hướng của mặt trơn; (b) sự định hướng của mặt trơn từng mảnh

và có giá trị bằng

$$\iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{N}(u,v)dudv, \tag{3.24}$$

ở đó

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N} \text{ là véc tơ pháp tuyến đơn vị cùng hướng với } \mathbf{N}$$

và

$$\mathbf{n}dA = \mathbf{N}dudv \quad \text{với } dA \text{ là yếu tố diện tích trên mặt } S.$$

- **Cách tính tích phân mặt**. Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3],\\
&\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3] = \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right],\\
&\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1),
\end{aligned}$$

với α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi $\mathbf{n}$ và tia Ox, Oy, Oz (*chúng ta gọi* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *là các cosin chỉ hướng của véc tơ pháp tuyến đơn vị* $\boldsymbol{n}$). Từ công thức (3.24), ta thu được

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA &= \iint_S (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma)dA\\
&= \iint_R (F_1N_1 + F_2N_2 + F_3N_3)dudv.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Nhận xét 3.5. *(i) Trong công thức (3.25), ta có*

$$\cos\alpha dA = dydz, \quad \cos\beta dA = dzdx, \quad \cos\gamma dA = dxdy.$$

Vì vậy, ta thu được công thức sau

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA = \iint_S (F_1dydz + F_2dzdx + F_3dxdy). \tag{3.26}$$

*Do đó, tích phân mặt (loại 2) của hàm **F** trên mặt định hướng S cũng được **ký hiệu** là*

$$\iint_S (F_1dydz + F_2dzdx + F_3dxdy). \tag{3.27}$$

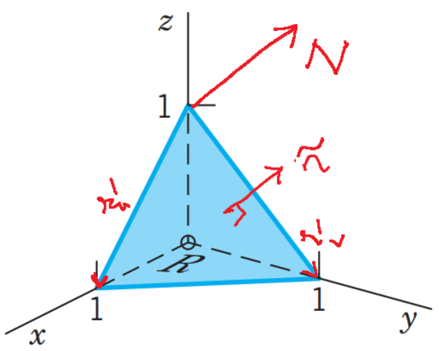
Tuy nhiên, khi sử dụng ký hiệu trên, chúng ta phải chú ý đến hướng của mặt cong S.

(ii) Từ công thức (3.25), ta thấy:

- *Nếu hàm véc tơ **F** liên tục trên mặt cong trơn (hoặc trơn từng mảnh) S thì tích phân mặt loại 2 (3.23) tồn tại.*
- *Nếu chúng ta đổi hướng mặt S, thì tích phân mặt loại 2 (3.24) đổi dấu.*
- *Tích phân mặt loại 2 có các tính chất tương tự như tích phân kép.*

Ví dụ 3.16. *Tính tích phân mặt của hàm véc tơ $\boldsymbol{F} = [x^2, 0, 3y^2]$ trên mặt S. Trong đó S là phía trên phần giới hạn của mặt phẳng $x + y + z = 1$ trong góc phần tám thứ nhất (xem Hình 3.13).*

$N = \nabla g = (1,1,1)$



Hình 3.13: Véc tơ chỉ phương $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ và véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ của mặt S

Giải. *Đặt $x = u, y = v$, ta có $z = 1 - u - v$. Do đó chúng ta có thể biểu diễn tham số mặt S bởi*

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [u, v, 1-u-v], \quad (u,v) \in R$$

với R là tam giác có các đỉnh $(0,0,0), (1,0,0)$ và $(0,1,0)$ trên mặt Oxy. Các véc tơ chỉ phương của S là

$$\boldsymbol{r}'_u = (1,0,-1), \quad \boldsymbol{r}'_v = (0,1,-1).$$

Do đó, véc tơ pháp tuyến $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = (1,1,1)$.

*Theo giả thiết S là phần phía trên của mặt $x + y + z = 1$ giới hạn trong góc phần tám thứ nhất, nên S được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến $\tilde{\boldsymbol{n}}$ hướng lên trên. Dễ thấy **N** cùng hướng với $\tilde{\boldsymbol{n}}$ và vì vậy **N** phù hợp với hướng dương của S.*

Dễ thấy $\boldsymbol{F} = [u^2, 0, 3v^2]$. Theo định nghĩa, ta có

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA &= \iint_R \boldsymbol{F(r)}\cdot\boldsymbol{N}dudv\\ &= \iint_R \left[u^2.1+0.1+3v^2.1\right]dudv\\ &= \iint_R (u^2+3v^2)dudv.\end{aligned}$$

Hơn nữa, R có thể biểu diễn dưới dạng sau

$$R = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le v\le 1, 0\le u\le 1-v\right\}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA &= \int_0^1 dv\int_0^{1-v}(u^2+3v^2)du\\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-v)^3+3v^2(1-v)dv = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nhận xét 3.6. *Khi biểu diễn tham số $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ có véc tơ pháp tuyến $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$* ***không phù hợp với hướng dương của*** *S, ta có thể đổi thứ tự u và v cho nhau để thu được một biểu diễn tham số khác của S,*

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(u,v)=\boldsymbol{r}(v,u),$$

có véc tơ pháp tuyến

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}=\tilde{\boldsymbol{r}}'_u\times\tilde{\boldsymbol{r}}'_v=-\boldsymbol{N}$$

phù hợp với hướng dương của S.

3.4.2 Ứng dụng tính thông lượng của một trường véc tơ (tùy chọn)

Giả sử ta nhúng một màng cong S trong môi trường chất lỏng có mật độ khối lượng ρ và đang chảy với vận tốc $\mathbf{v}$ không phụ thuộc vào thời gian. Khi đó *thông lượng* Φ của trường véc tơ

$$\mathbf{F}=\rho\mathbf{v}$$

biểu thị khối lượng của chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian.

Người ta đã chứng minh được rằng, thông lượng Φ chính là tích phân mặt loại 2 của hàm véc tơ $\mathbf{F}$ trên mặt cong định hướng S,

$$\Phi=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA. \tag{3.28}$$

Hơn nữa thông lượng Φ là một đại lượng đại số, có nghĩa là, nếu ta coi lượng chất lỏng chảy qua mặt S theo hướng của véc tơ pháp tuyến là dương thì lượng chất lỏng chảy qua S theo hướng ngược lại là âm.

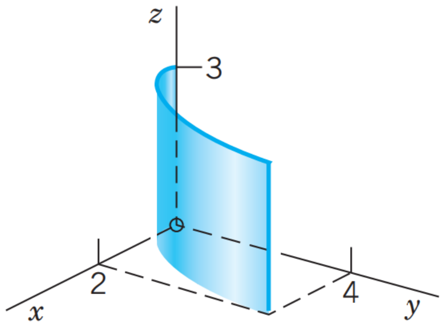
Ví dụ 3.17. *Tính thông lượng của dòng nước chảy qua mặt trụ-parabolic $S: y=x^2, 0\le x\le 2, 0\le z\le 3$ (xem Hình 3.14) nếu vận tốc của dòng nước là $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}=[3z^2,6,6xz](m/s)$. (Mật độ khối lượng hay khối lượng riêng của nước $\rho=1g/cm^3=1ton/m^3$.)*

Giải. Đặt $x=u, z=v$, ta có $y=u^2$. Khi đó mặt cong S được biểu diễn dưới dạng

$$S:\boldsymbol{r}=[u,u^2,v],\quad 0\le u\le 2, 0\le v\le 3.$$

Véc tơ pháp tuyến của S là

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v=[1,2u,0]\times[0,0,1]=[2u,-1,0].$$



Hình 3.14: Mặt cong S trong Ví dụ 3.17

Dễ thấy

$$\boldsymbol{F} = [3z^2, 6, 6xz] = [3v^2, 6, 6uv] \implies \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} = 6uv^2 - 6.$$

Do đó, lưu lượng nước chảy qua mặt S là

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA = \iint_R \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dudv \\ &= \int_0^2 du \int_0^3 (6uv^2 - 6)dv = 72\,[m^3/s].\end{aligned}$$

Vậy lưu lượng nước chảy qua mặt S là 72 lít/giây.

3.5 Tích phân mặt loại 1: định nghĩa, cách tính; ứng dụng (tính diện tích mặt, khối lượng mặt, trọng tâm, mô men quán tính) (tùy chọn)

3.5.1 Định nghĩa và cách tính

Định nghĩa 3.5 (Tích phân mặt loại 1)**.** Cho hàm $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ liên tục và mặt cong trơn (hoặc trơn từng mảnh) S được cho bởi biểu diễn tham số (3.13). Khi đó *tích phân mặt loại 1* của hàm G trên mặt cong S được ký hiệu là

$$\iint_S G(\mathbf{r})dA \tag{3.29}$$

và có giá trị bằng

$$\iint_R G(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{N}(u,v)|dudv. \tag{3.30}$$

Ở đó

$$dA = |\mathbf{N}|dudv = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv \quad \text{là yếu tố diện tích của mặt } S.$$

Nhận xét 3.7. *Trong định nghĩa trên của tích phân mặt loại 1, chúng ta không cần chú ý tới sự định hướng của mặt cong S.*

• **Ứng dụng: Tính khối lượng mặt cong** S. Nếu $G(\mathbf{r})$ là mật độ khối lượng (khối lượng trên một đơn vị diện tích) của S, thì khối lượng của mặt cong S là

$$m(S) = \iint_S G(\mathbf{r})dA. \tag{3.31}$$

• **Ứng dụng: Tính diện tích mặt cong** S. Nếu $G \equiv 1$, thì tích phân mặt loại 1 của G trên mặt S chính là diện tích mặt S. Vì vậy,

$$A(s) = \iint_S dA = \iint_R |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv. \tag{3.32}$$

Ví dụ 3.18 (Diện tích mặt cầu). *Tính diện tích mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.
Giải. Biểu diễn tham số của mặt cầu S là

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [a\cos v \cos u, a\cos v \sin u, a \sin v], \quad 0 \le u \le 2\pi, \frac{-\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}.$$

(xem Ví dụ 3.11). Bởi tính toán đơn giản, ta thu được

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = [a^2\cos^2 v \cos u, a^2 \cos^2 v \sin u, a^2 \cos v \sin v]$$

và

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| &= a^2\sqrt{(\cos^2 v \cos u)^2 + (\cos^2 v \sin u)^2 + (\cos v \sin v)^2} \\ &= a^2 |\cos v| \\ &= a^2 \cos v \quad \text{do } v \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{aligned}$$

Vậy diện tích mặt cầu S là

$$A(S) = \int_0^{2\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos v dv = 4\pi a^2.$$

3.5.2 Xét trường hợp mặt cong S được cho bởi $z = f(x, y)$

Khi đó, đặt $x = u, y = v$, ta có $z = f(u, v)$ và biểu diễn tham số của S là

$$\mathbf{r}(u, v) = [u, v, f(u, v)].$$

Dễ thấy,

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}'_u = [1, 0, f'_u], \quad \mathbf{r}'_v = [0, 1, f'_v], \\ &\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = [-f'_u, -f'_v, 1], \quad |\mathbf{N}| = \sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}. \end{aligned}$$

Vì vậy, từ công thức (3.29)–(3.30), ta có

$$\iint_S G(\mathbf{r}) dA = \iint_{R^*} G(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dxdy, \tag{3.33}$$

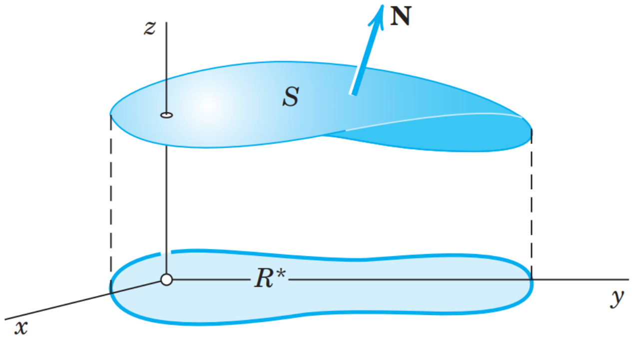
ở đó R^* là hình chiếu của mặt cong S trên mặt Oxy và véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ của S hướng lên (xem Hình 3.15). Nếu $\mathbf{N}$ hướng xuống dưới, ta thêm dấu " $-$ " vào vế phải của công thức (3.33).

• **Áp dụng tính diện tích mặt cong**. Cho $G = 1$, ta thu được công thức tính diện tích mặt cong S như sau:

$$A(S) = \iint_{R^*} G(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dxdy. \tag{3.34}$$

3.6 Công thức Gauss–Ostrogradsky (liên hệ giữa tích phân mặt loại 2 và tích phân bội 3)

Mối liên hệ giữa tích phân mặt loại 2 và tích phân bội 3 được thể hiện qua Định lý Gauss–Ostrogradsky dưới đây (Định lý 3.2). Định lý này sẽ giúp thiết lập những phương trình cơ bản trong sự dịch chuyển của chất lỏng, sự truyền nhiệt,...



Hình 3.15: Mặt cong S và hình chiếu R^* trên mặt Oxy

Toán tử *div* hay *toán tử phân kỳ* áp dụng trên hàm véc tơ $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$ và được cho bởi công thức

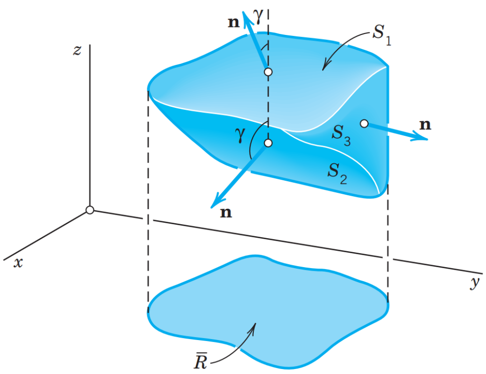
$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{3.35}$$

Định lý 3.2 (Công thức Gauss–Ostrogradsky)**.** *Cho T là miền đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ với biên S là mặt cong trơn (hoặc trơn từng mảnh) được định hướng dương theo hướng pháp tuyến ngoài $\boldsymbol{n}$ (xem Hình 3.16). Giả sử $\boldsymbol{F}$ là hàm véc tơ có các đạo hàm riêng liên tục trên miền chứa T. Khi đó*

$$\iiint_T \text{div } F dV = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA. \tag{3.36}$$

Công thức (3.36) *còn được viết dưới dạng sau: Với $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$ và véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài $\boldsymbol{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ với $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\boldsymbol{n}$, khi đó công thức* (3.36) *trở thành*

$$\begin{aligned}\iiint_T \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right] dxdydz &= \iint_S (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma) dA \\ &= \iint_S (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy).\end{aligned} \tag{3.36*}$$

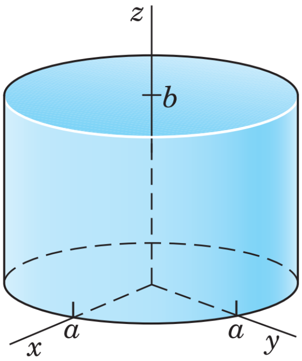


Hình 3.16: Biên S của miền T và véc tơ pháp tuyến ngoài **n**

Ví dụ 3.19. *Tính*

$$I = \iint_S (x^3 dydz + x^2 y dzdx + x^2 z dxdy)$$

với S là phía ngoài của mặt đóng kín gồm phần hình trụ $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ 0 \le z \le b \end{cases}$ *và hai đáy nằm trên các mặt $z=0$ (đáy dưới) và $z=b$ (đáy trên) (xem Hình 3.17).*



Hình 3.17: Mặt S trong Ví dụ 3.19

Giải. Ta có $F_1 = x^3, F_2 = x^2y, F_3 = x^2z$. *Do đó* $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$. *Theo công thức Gauss-Ostrogradsky* (3.36), *ta có*

$$I = \iint_S (x^3dydz + x^2ydzdx + x^2zdxdy) = \iiint_T \operatorname{div} F dxdydz = \iiint_T 5x^2dxdydz.$$

Ở đây T là khối trụ với biên S và $\boldsymbol{n}$ là véc tơ pháp tuyến ngoài của S.

Xét phép biến đổi sang tọa độ trụ (r,θ,z):

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

ta có

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

và

$$(x,y,z) \in T \quad \Leftrightarrow \quad (0 \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le b).$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T 5x^2dxdydz = \int_0^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (5r^2\cos^2\theta)rdr \\ &= 5\int_0^b dz \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4}\cos^2\theta d\theta = \frac{5\pi}{4}a^4b. \end{aligned}$$

3.7 Định lý Stokes (liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân mặt loại 2)

Công thức Stokes trong Định lý 3.3 thể hiện mối liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân mặt loại 2 và nó là sự mở rộng của Công thức Green (3.10).

Cho hàm véc tơ $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$, *curl* (*độ xoáy*) của trường véc tơ $\mathbf{F}$ được cho bởi

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]. \tag{3.37}$$

Định lý 3.3 (Định lý Stokes)**.** *Cho S là mặt cong trơn từng mảnh và được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị $\boldsymbol{n}$. Giả sử C là biên của S được định hướng dương phù hợp với hướng của S (xem Hình 3.18). Cho $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$ là hàm véc tơ có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền chứa S. Khi đó, ta có*

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy\right] = \oint_C (F_1dx + F_2dy + F_3dz). \tag{3.38}$$

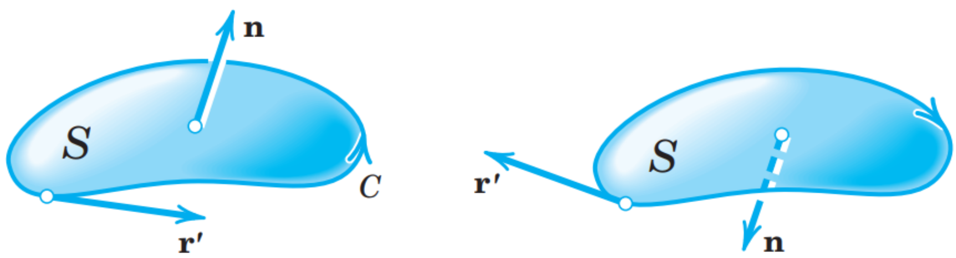
Nếu mặt cong S được tham số hóa bởi

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.39}$$

sao cho véc tơ pháp tuyến $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = [N_1, N_2, N_3]$ có hướng phù hợp với hướng của S, thì công thức (3.38) *được viết dưới dạng*

$$\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'(s) ds, \tag{3.38*}$$

ở đó $\boldsymbol{r}'(s) = \frac{\partial r}{ds}$ là véc tơ tiếp xúc đơn vị của đường C và s là (tham số) độ dài cung C. Trong đó $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$, $\boldsymbol{n}dA = \boldsymbol{N}dudv$ và $\boldsymbol{r}'ds = [dx, dy, dz]$.



Hình 3.18: Biên C của mặt cong S

Ví dụ 3.20. *Kiểm chứng Định lý Stokes với $\boldsymbol{F} = [y, z, x]$ và S là phía ngoài mặt paraboloid tròn xoay*

$$z = f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 0$$

(xem Hình 3.19).

Giải. Biên C của S được định hướng như Hình 3.19 phù hợp với hướng dương của S. Khi đó, C có biểu diễn tham số

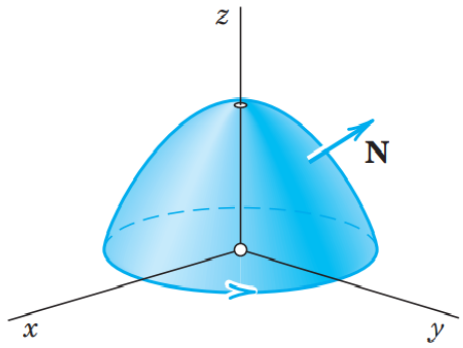
$$\boldsymbol{r}(s) = [\cos s, \sin s, 0], \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Véc tơ tiếp xúc đơn vị của C là $\boldsymbol{r}'(s) = [-\sin s, \cos s, 0]$. Hàm véc tơ $\boldsymbol{F}$ hạn chế trên C là

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})(s) = [\sin s, 0, \cos s].$$

Vậy

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})(s) \cdot \boldsymbol{r}' ds = \int_0^{2\pi} [\sin s(-\sin s) + 0.\cos s + 0.\cos s] ds = -\pi.$$



Hình 3.19: Mặt cong S trong Ví dụ 3.20

Tiếp theo, ta sẽ tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA$. *Ta có* $F_1 = y, F_2 = z, F_3 = x$ *và*

$$\text{curl } \boldsymbol{F} = [-1, -1, -1].$$

Véc tơ pháp tuyến của S *là*

$$\boldsymbol{N} = \text{grad } g(x, y, z) = [2x, 2y, 1]$$

với $g(x, y, z) = z - f(x, y) = (x^2 + y^2) + z - 1$. *Dễ thấy* $\boldsymbol{N}$ *có hướng phù hợp với hướng dương của* S. *Nên*

$$\begin{aligned}\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA &= \iint_R (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N} dxdy \quad (u = x, v = y) \\ &= \iint_R (-2x - 2y - 1) dxdy.\end{aligned}$$

Ở đó R *là hình tròn đơn vị trong mặt phẳng* Oxy. *Bằng phép đổi biến sang hệ tọa độ cực,* $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, *khi đó*

$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Nên ta thu được

$$\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-2r\cos\theta - 2r\sin\theta - 1) r dr = -\pi.$$

Vậy, ta kiểm chứng được công thức Stoke:

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA.$$

Ví dụ 3.21. *Tính* $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ *ở đó* C *là đường tròn* $x^2 + y^2 = 4; z = -3$, *được định hướng dương ngược chiều kim đồng hồ và*

$$\boldsymbol{F} = [y, xz^3, -zy^3].$$

Giải. C *là biên của đĩa* $S : x^2 + y^2 \le 4$ *nằm trong mặt phẳng* $z = -3$ *và hướng dương của* S *là hướng pháp tuyến* $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$. *Dễ thấy hướng của biên* C *phù hợp với hướng dương của* S. *Với* $z = -3$, *ta có*

$$F_1 = y, F_2 = -27x, F_3 = 3y^3$$

và

$$(\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28.$$

Theo công thức Stokes, ta có

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \iint_S (-28) dA = -28 \times 4\pi = -112\pi.$$

Bài tập

Bài 3.1. Tìm biểu diễn tham số của đường tròn là giao của mặt phẳng $z = 1$ với mặt cầu (S). Ở đó (S) có tâm $(3, 2, 1)$ và đi qua gốc tọa độ.

Bài 3.2. Biểu diễn tham số đường thẳng đi qua $(2, 1, 3)$ và có véc tơ chỉ phương $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Bài 3.3. Viết biểu diễn tham số của đường Helix có phương trình $x^2+y^2 = 25$, $z = 2\arctan\frac{y}{x}$.

Bài 3.4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong C tại điểm P với

(a) $C : \mathbf{r}(t) = [t, t^2/2, 1]$; $P(2, 2, 1)$.

(b) $C : \mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, 9t]$; $P(1, 0, 18\pi)$.

Bài 3.5. Tìm độ dài của các cung sau:

(a) (Circular helix) $C : \mathbf{r}(t) = [4\cos t, 4\sin t, 5t]$ từ $(4, 0, 0)$ đến $(4, 0, 10\pi)$.

(b) (Hypocycloid) $C : \mathbf{r}(t) = [a\cos^3 t, a\sin^3 t]$.

Bài 3.6. Tính tích phân đường $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, trong đó:

(a) $C : y = 4x^2$ từ $(0, 0)$ tới $(1, 4)$ và $\mathbf{F} = [y^2, -x^2]$.

(b) C là một phần tư đường tròn tâm $(0, 0)$ từ $(2, 0)$ tới $(0, 2)$ và $\mathbf{F} = [xy, x^2y^2]$.

(c) $C : \mathbf{r} = [2\cos t, t, 2\sin t]$ từ $(2, 0, 0)$ tới $(2, 2\pi, 0)$ và $\mathbf{F} = [x - y, y - z, z - x]$.

Bài 3.7. Tính công W của lực $\mathbf{F}$ thực hiện dọc theo đường cong C trong các trường hợp sau:

(a) $C : \mathbf{r} = [2t, 5t, t]$ từ $t = 0$ tới $t = 1$ và $\mathbf{F} = [x + y, y + z, z + x]$.

(b) C là đường thẳng từ $(0, 0, 0)$ tới $(1, 1, 0)$ và $\mathbf{F} = [x, -z, 2y]$.

(c) $C : \mathbf{r} = [t, t^2, t]$ từ $(0, 0, 0)$ tới $(2, 4, 2)$ và $\mathbf{F} = [e^{-x}, e^{-y}, e^{-z}]$.

Bài 3.8. Tính tích phân đường $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ với C là biên của miền R và được định hướng ngược chiều kim đồng hồ, trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [y, -x]$; $C : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

(b) $\mathbf{F} = [x^2e^y, y^2e^x]$; C là hình chữ nhật với các đỉnh $(0, 0), (2, 0), (2, 3), (0, 3)$.

(c) $\mathbf{F} = [x^2 + y^2, x^2 - y^2]$; $R : 1 \leq y \leq 2 - x^2$.

(d) $\mathbf{F} = [x^2y^2, \frac{-x}{y^2}]$; $R : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq x$.

Bài 3.9. Tìm véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt cong $S : \mathbf{r}(u, v)$ tại điểm $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ trong các trường hợp sau:

(a) hình nón $\mathbf{r}(u, v) = [u\cos v, u\sin v, cu]$, $c > 0$;

(b) ellipsoid $\mathbf{r}(u, v) = [a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v]$, $a, b, c > 0$.

Bài 3.10. Tìm một véc tơ pháp tuyến (tại điểm P tùy ý) và viết một biểu diễn tham số của các mặt cong sau:

(a) Mặt phẳng $4x + 3y + 2z = 12$;

(b) Hình trụ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$;

(c) Hình nón elliptic $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

Bài 3.11. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA$, với $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ phù hợp với hướng dương của S trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [-x^2, y^2, 0]$, $\quad S : \mathbf{r} = [u, v, 3u - 2v]$, $\quad 0 \leq u \leq \frac{3}{2}, -2 \leq v \leq 2$;

(b) $\mathbf{F} = [x, y, z]$, $\quad S : \mathbf{r} = [u \cos v, u \sin v, u^2]$, $\quad 0 \leq u \leq 4, -\pi \leq v \leq \pi$.

Bài 3.12. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [e^y, e^x, 1]$ và S là phía trên của mặt $x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (hướng dương của S được định hướng bởi véc tơ pháp tuyến hướng lên trên);

(b) $\mathbf{F} = [0, x, 0]$ và S là phần phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất;

(c) $\mathbf{F} = [0, \sin y, \cos z]$ và S là phần mặt trụ $x = y^2$ với $0 \leq y \leq \pi/4$, $0 \leq z \leq y$ và hướng dương của S có hướng từ phải qua trái.

Bài 3.13. Tính tích phân mặt loại 1, $\iint_S G(\mathbf{r}) dA$, trong các trường hợp sau:

(a) $G = \cos x + \sin x$ và S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất;

(b) $G = x + y + z$ và mặt S được giới hạn bởi $z = x + 2y$ với $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq x$;

(c) $G = z$ và S là phần mặt cầu đơn vị nằm trong góc phần tám thứ nhất;

Bài 3.14. Mô-ment quán tính I của mặt cong S đối với trục L được cho bởi công thức sau:

$$I = \iint_S \rho D^2 dA \tag{3.40}$$

trong đó

- $\rho = \rho(x, y, z)$ là mật độ khối lượng (khối lượng trên một đơn vị diện tích) của mặt S,
- $D = D(x, y, z)$ là khoảng cách từ điểm (x, y, z) tới L.

Hãy tính mô-ment quán tính I của mặt cong S đối với trục L trong các trường hợp sau:

(a) $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, S là mặt đồng chất (ρ là hằng số) có khối lượng M và L là trục Oz;

(b) $S : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2$ và L là đường thẳng $z = 1$ trong mặt phẳng Ozx;

(c) $S : x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$ và L là trục Oz.

Bài 3.15. Cho S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ được định hướng bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ hướng ra ngoài mặt cầu. Tính

$$I = \iint_S (7x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dA$$

$F = (7x, 0, -z)$

bằng hai cách:

(a) bởi công thức Gauss–Ostrogradsky;

(b) bởi cách tính trực tiếp bằng định nghĩa của tích phân mặt loại 2 (xem Định nghĩa 3.4).

Bài 3.16. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$, bằng công thức Gauss-Ostrogradsky với:

(a) $\mathbf{F} = [x^2, 0, z^2]$, S là phía ngoài của mặt của hộp $|x| \leq 1, |y| \leq 3, 0 \leq z \leq 2$. Kiểm tra lại kết quả tính $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ bằng cách tính trực tiếp từ định nghĩa;

(b) $\mathbf{F} = [e^x, e^y, e^z]$, S là phía ngoài của mặt của khối lập phương $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$;

(c) $\mathbf{F} = [x^3 - y^3, y^3 - z^3, z^3 - x^3]$, S là phía ngoài của mặt của khối $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 0$.

Bài 3.17. Tính tích phân $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA$ với:

(a) $\mathbf{F} = [z^2, -x^2, 0]$, S là phía trên của hình chữ nhật với 4 đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,4,4)$, $(1,4,4)$;

(b) $\mathbf{F} = [e^{-z}, e^{-z} \cos y, e^{-z} \sin y]$, $S : z = y^2/2, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}$ sao cho $\mathbf{n}$ tạo với tia Oz một góc nhọn.

(c) $\mathbf{F} = [z^2, 3x/2, 0]$, $S : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, z = 1$ được định hướng dương bởi tia Oz.

(d) $\mathbf{F} = [y^3, -x^3, 0]$, $S : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ được định hướng dương bởi tia Oz.

Bài 3.18. Tính tích phân $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds$ bằng công thức Stokes với:

(a) $\mathbf{F} = [-5y, 4x, z]$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 16, z = 4$ có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ;

(b) $\mathbf{F} = [z^3, x^3, y^3]$, C là đường tròn $y^2 + z^2 = 9, x = 2$ có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ;

(c) $\mathbf{F} = [y^2, x^2, z + x]$, C là tam giác ABC với $A(0,0,0), B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$ được định hướng dương từ $A \to B \to C \to A$.

Tài liệu tham khảo

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Nhà xuất bản Wiley (10th Edition, 2011) (Chương 9 & 10).

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, tập III, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (2014) (Chương 3).

Chương 4. Phương trình vi phân cấp một

Ngày 10/5/2021

Biên soạn: Phan Quang Sáng

Khoa Khoa học cơ bản, Đại học Phenikaa

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Erwin Kreyszig (10th Edition, 2011), Advanced Engineering Mathematics, NXB Wiley.

[2] Neyhauser, C. (2010). Calculus for Biology and Medicine (3rd Edition), Pearson.

[3] Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals (8rd Edition), Brooks Cole.

CHƯƠNG 4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Một đại lượng biến thiên (liên tục) được biểu diễn như là một hàm số, trong khi tốc độ thay đổi của đại lượng đó được biểu thị qua các đạo hàm của hàm số đó; chúng có mối liên hệ với nhau, và phương trình vi phân thể hiện mối liên hệ đó. Các mối liên hệ như vậy xuất hiện rất phổ biến, do vậy phương trình vi phân nảy sinh và đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau như kỹ thuật, vật lý, sinh học, kinh tế…

Mở đầu: Phương trình chuyển động

Một phương trình nổi tiếng mà chúng ta phần lớn đều đã biết đó là phương trình định luật 2 của Newton về chuyển động. Phương trình này chính là một dạng phương trình vi phân.

Nếu một vật thể có khối lượng m đang chuyển động có gia tốc a dưới tác động của một lực F thì theo định luật 2 Newton

$$F = ma$$

Tại thời điểm t vật thể có vị trí, giả sử là một hàm theo thời gian $u = u(t)$, thì vận tốc và gia tốc tức thời của nó lúc đó lần lượt là

$$v = v(t) = u'(t),\ a = v'(\mathrm{t}) = u''(t) \qquad (4.1)$$

Chúng ta cũng chú ý rằng lực F cũng có thể là một hàm của thời gian, vận tốc, và/ hoặc của vị trí. Vì thế ta có thể viết phương trình định luật 2 Newton dưới các dạng sau

$$mv'(\mathrm{t}) = F\left(t, v\right) \qquad (4.2)$$

hoặc

$$mu''(\mathrm{t}) = F\left(t, u, u'(t)\right). \qquad (4.3)$$

Đó chính là các phương trình vi phân đầu tiên chúng ta gặp.

Như vậy Định luật 2 Newton về chuyển động *dưới dạng một phương trình vi phân* cho phép xác định vị trí của một vật dựa vào vận tốc, gia tốc, và lực tác động lên vật đó được biểu diễn dưới dạng hàm vi phân theo thời gian.

4. 1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.2.1 Định nghĩa phương trình vi phân

Một cách khái quát, phương trình vi phân là một phương trình toán học biểu diễn mối quan hệ giữa một hàm số (chưa biết) và các đạo hàm (với cấp khác nhau) của nó. Một phương trình như vậy có chứa biến số độc lập, một hàm số phải tìm và các đạo hàm (hoặc vi phân) của hàm số đó.

Một cách cụ thể, phương trình vi phân là một phương trình có dạng toán học

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0\,, \qquad (4.4)$$

trong đó F là một hàm số, x là biến số độc lập thuộc một miền I nào đó của $\mathbb{R}$, $y = y(x)$ là hàm số chưa biết, và $y', y'', \dots, y^{(n)}$ là các đạo hàm các cấp của y.

Người ta gọi cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình. Về mặt hình thức ta thấy phương trình vi phân (4.7) trên có cấp n.

Ví dụ 1: $y' = f(x)$ là một phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 2: $xy' + \dfrac{y^3}{\ln x} = \ln^2 x$ là một phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 3: $y'' + x^2(y')^3 - 2y^4 = \sin x$ là một phương trình vi phân cấp 2.

Phương trình vi phân cấp một

Chúng ta nhắc lại rằng phương trình vi phân cấp một là phương trình dạng

$$F(x, y, y') = 0 \text{ hoặc } F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0\,, \qquad (4.5)$$

do đạo hàm $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Một dạng đặc biệt của (4.8) là phương trình vi phân (cấp một) đã giải ra đạo hàm

$$y' = f(x, y) \text{ hoặc } \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

hoặc

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \qquad (4.6)$$

- Trong chương trình chúng ta chủ yếu xét các phương trình vi phân cấp một đã giải ra đạo hàm.
- Trong phương trình (4.9) ta cũng có thể coi x là hàm của biến số y.

4.2.2 Nghiệm của phương trình vi phân cấp một

Nghiệm của phương trình vi phân là một hàm số $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình đó. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ: xét phương trình vi phân cấp 1

$$y' = 3x^2 + \sin x.$$

Rõ ràng hàm số y cần tìm phải là một nguyên hàm của $3x^2 + \sin x$, do đó mọi nghiệm của phương trình có dạng

$$y = x^3 - \cos x + C,$$

với C là một hằng số thực tùy ý. Chẳng hạn $C = 1$ ta được một nghiệm $y = x^3 - \cos x + 1$.

Qua ví dụ trên ta thấy, nói chung, phương trình vi phân cấp 1 có nghiệm với một hằng số tùy ý…Chúng được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân. Từ đó ta có định nghĩa:

Định nghĩa*:* một hàm số dạng tổng quát

$$y = \varphi(x, C) \tag{4.7}$$

là nghiệm của phương trình vi phân (4.8) với các hằng số thực tùy ý C được gọi là *nghiệm tổng quát*.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát **(4.7)** khi C là một giá trị số cụ thể.

Khi giải phương trình vi phân (4.8) nhiều khi dẫn đến phương trình dạng ("không còn đạo hàm")

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{4.8}$$

trong đó C là một hằng số tùy ý. Khi đó **(4.8)** được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân. Khi $C = C_0$ là một số cụ thể thì **(4.8)** được gọi là một *tích phân riêng* của phương trình vi phân.

Về mặt hình học mỗi nghiệm hoặc tích phân riêng của phương trình vi phân biểu diễn một đường cong trên mặt phẳng tọa độ Oxy, và được gọi là một *đường cong tích phân*. Như vậy nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát tương ứng với một họ các đường cong tích phân. Giải phương trình vi phân cũng chính là đi tìm các đường cong tích phân.

4.2.3 Điều kiện ban đầu

Giá trị của một đại lượng tại một thời điểm nào đó, được chỉ định là thời gian ban đầu (thường biểu thị $t = 0$), gọi là giá trị ban đầu. Một cách tổng quát điều kiện ban đầu cho biết trạng thái ban đầu (độ lớn, tốc độ biến thiên..) của một đại lượng tại một thời điểm chỉ định. Trạng thái ban đầu hoàn toàn có thể quy định đến trạng thái của đại lượng đó ở các thời điểm trước hoặc sau thời điểm chỉ định.

Một cách toán học, điều kiện ban đầu là một điều kiện đối với nghiệm của phương trình vi phân (4.8) dạng

$$y(x_0) = y_0, \tag{4.9}$$

trong đó x_0, y_0 là các giá trị cho trước. Bài toán giải phương trình vi phân cùng với điều kiện ban đầu được gọi là **bài toán Cauchy**, hay bài toán giá trị ban đầu.

Nhận xét:

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không chịu bất kỳ một điều kiện ban đầu nào.
- Khi cho nghiệm tổng quát (4.7) thỏa mãn điều kiện ban đầu **(4.9)** ta sẽ tìm được giá trị cụ thể của hằng số C, lúc này nghiệm tương ứng sẽ là nghiệm riêng.

Định lý (Peano-Cauchy-Picard): *Xét bài toán Cauchy* (4.8) *với điều kiện ban đầu* $y(x_0) = y_0$. *Nếu hàm hai biến* $f(x, y)$ *liên tục trong một lân cận của điểm* (x_0, y_0) *thì của bài toán Cauchy có ít nhất một nghiệm* $y = y(x)$ *với* x *trong một lân cận của* x_0. *Hơn nữa nếu* f *có đạo hàm riêng* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *liên tục trong một lân cận của* (x_0, y_0) *thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất.*

Trường hợp duy nhất nghiệm cũng có nghĩa là qua điểm (x_0, y_0) cho trước có duy nhất một đường cong tích phân của phương trình (4.8) mà hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong tại điểm đó là $f(x_0, y_0)$.

4. 2 MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

4.3.1 Phương trình vi phân với biến số phân ly

Phương trình vi phân với biến số phân ly là phương trình có dạng

$$N(y)\, y' = M(x) \tag{4.10}$$

hoặc dạng tương đương, $$N(y)\, dy = M(x)\, dx \tag{4.11}$$

trong đó M, N là các hàm số một biến, được giả sử liên tục trong một miền nào đó.

Để giải phương trình với biến số phân ly **(4.11)** ta chỉ việc lấy tích phân hai vế phương trình:

$$\int N(y)\, dy = \int M(x)\, dx + C, \text{ với } C \text{ là hằng số thực bất kỳ.}$$

Sau khi tính các tích phân ở hai vế của phương trình trên chúng ta sẽ nhận tích phân tổng quát của phương trình vi phân.

Thật vậy, nếu đạo hàm hai vế của phương trình trên theo biến số x ta sẽ được (4.10).

Ví dụ 1: Phương trình $y' = f(x)$ với f là một hàm số giả sử liên tục trên một miền $I \subset \mathbb{R}$.

Đây chính là một phương trình dạng biến số phân ly (khuyết y). Rõ ràng y phải là một nguyên hàm của f, hoặc áp dụng phương pháp giải ở trên cho ta nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \int f(x)\, dx + C, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}.$$

* Bài toán tương tự với phương trinh vi phân khuyết x dạng $y' = g(\text{y})$.

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân $(x+1)y' = 2y^2x^2$.

Giải: Trước hết chúng ta thấy rằng phương trình trên chưa phải là dạng biên số phân ly (x và y còn ở cùng một chỗ). Tuy nhiên chúng ta có thể chuyển phương trình về dạng biến số phân ly nếu chia cả hai vế của phương trình cho y^2 và $x+1$ nếu nó khác không.

Ta có $\quad y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

Trước hết kiểm tra xem $y = 0$ có phải là nghiệm của phương trình hay không? Thay trực tiếp $y = 0$ vào phương trình ta được

$$(x+1).\, 0' = 2.\, 0^2 x^2$$

hay $\quad 0 = 0.$

Như vậy rõ ràng hàm số $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Bây giờ ta đi tìm các nghiệm $y \neq 0.$ Chia hai vế phương trình ban đầu cho $y^2 \neq 0$ và $x+1$(với $x \neq -1$) ta được dạng biến số phân ly như sau

$$\frac{y'}{y^2} = 2\frac{x^2}{x+1}, \, x \neq -1 \text{ hay,}$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2\frac{x^2}{x+1}dx, \, x \neq -1$$

Tích phân hai vế phương trình ta được

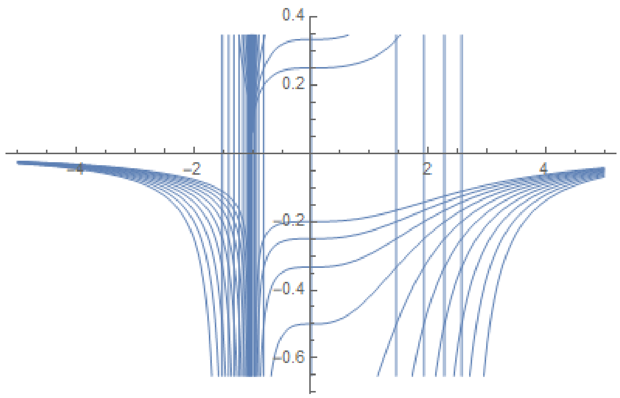
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2\frac{x^2}{x+1}dx + C, \, x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx + C, \, x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right) + C, \, x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = -2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right) + C,\ x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow y\left(x^2 - 2x + 2\ln|x+1|\right) + 1 = Cy,\ x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$



Như vậy phương trình có tích tích phân tổng quát cho bởi biểu diễn $(*)$ và $y = 0$.

4.3.2 Phương trình vi phân đẳng cấp

Một số phương trình vi phân không phân ly được biến số nhưng có thể được chuyển về dạng biến số phân ly bằng cách đổi biến.

Định nghĩa: Hàm hai biến số $f = f(x, y)$ được gọi là hàm đẳng cấp bậc k (k là số tự nhiên hoặc thậm chí là số thực) nếu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \text{ với mọi } \lambda, \text{và với mọi } x,\ y. \qquad (4.12)$$

Ví dụ: Kiểm tra các hàm đẳng cấp

(a) Hàm $f(x, y) = x^3 - x^2y + 2xy^2 + y^3$ là một hàm đẳng cấp bậc 3 vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - (\lambda x)^2(\lambda y) + 2(\lambda x)(\lambda y)^2 + (\lambda y)^3$$

$$= \lambda^3x^3 - \lambda^3x^2y + \lambda^3 2xy^2 + \lambda^3y^3 = \lambda^3(x^3 - x^2y + 2xy^2 + y^3) = \lambda^3 f(x, y).$$

(b) Hàm $f(x, y) = x^2y - 2y^2$ không phải là một hàm đẳng cấp vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2(\lambda y) - 2(\lambda y)^2 = \lambda^3x^2y - 2\lambda^2y^2 = \lambda^2\left(\lambda x^2y - 2y^2\right) \neq \lambda^n\left(x^2y - 2y^2\right)$$

(ví dụ chọn $\lambda = -1,\ x = 1,\ y = 1$).

Ngoài ra chúng ta có thể nhận ra hàm f không phải là một hàm đẳng cấp vì số hạng thứ nhất x^2y có bậc 3 trong khi số hạng thứ hai $-2y^2$ có bậc 2.

Định nghĩa: Phương trình vi phân đẳng cấp là phương trình có dạng

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{4.13}$$

trong đó M và N là các hàm đẳng cấp có cùng bậc.

Một dạng đặc biệt của phương trình vi phân đẳng cấp (4.13) là

$$y' = f(x,y), \tag{4.14}$$

trong đó f là một hàm đẳng cấp bậc không.

Giải thích: nếu $N \neq 0$ phương trình (4.13) dẫn đến $y' = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, hàm $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ là một hàm đẳng cấp bậc không.

Khi đó nếu chọn $\lambda = \dfrac{1}{x}$ thì ta có thể viết hàm f dưới dạng một hàm của $\dfrac{y}{x}$:

$$f(x,y) = \lambda^0 f(1,\frac{y}{x}) = f(1,\frac{y}{x}).$$

Mệnh đề: bằng phép đổi biến $y = xu(x)$ chúng ta có thể chuyển phương trình vi phân đẳng cấp (4.13) (hoặc (4.14)) về dạng biến số phân ly.

Chú ý rằng lúc đó $y' = u + xu'$ và $dy = udx + xdu$.

Chúng ta không chứng minh mệnh đề trên mà minh họa cách giải phương trình vi phân đẳng cấp thông qua các các ví dụ dưới đây.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$\left(x^2 + y^2\right)dx - \left(x^2 + xy\right)dy = 0. \tag{4.15}$$

Giải:

Phương trình (4.15) là một vi phân đẳng cấp vì $\left(x^2 + y^2\right)$ và $\left(x^2 + xy\right)$ là các hàm đẳng cấp cùng bậc 2.

Đặt $y = xu(x)$ rồi vào phương trình (4.15) ta

$$\left(x^2 + (ux)^2\right)dx - \left(x^2 + xux\right)\left(udx + xdu\right) = 0$$

$$\left(x^2 - x^2u\right)dx - \left(x^3 + x^3u\right)du = 0$$

$$x^2\left(1-u\right)dx = x^3\left(1+u\right)du$$

Chia hai vế của phương trình trên cho x^2 (với $x \neq 0$) ta được

$$\left(1-u\right)dx = x\left(1+u\right)du \tag{4.16}$$

Ta có $\quad 1-u=0 \Leftrightarrow u=1$.

Trường hợp 1: rõ ràng $u=1$ là của phương trình (4.16) nên $y=x$ là một nghiệm của phương trình (4.15).

Trường hợp 2: khi $u \neq 1$. Đưa (4.16) về dạng biến số phân ly rồi lấy tích phân hai vế ta được

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+u}{1-u}du$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+u}{1-u}du.$$

$$\ln|x| = -u - \ln|u-1| + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$ vào phương trình trên ta được:

$$\ln|x| = -\frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| + C \text{, hay}$$

$$\ln e^{\frac{y}{x}}|y-x| = C,\ \ C \in \mathbb{R},\ \ \text{hay}$$

$$e^{\frac{y}{x}}(y-x) = M,\ \ M \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Công thức (4.17) chính là tích phân tổng quát của phương trình (4.15).

4.3.3 Phương trình vi phân tuyến tính

Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4.18}$$

trong đó p và q là các hàm số một biến của x, giả sử liên tục trên một miền $I \subseteq \mathbb{R}$ nào đó.

- Nếu $q=0$ thì (4.18) trở thành phương trình được gọi là phương trình thuần nhất

$$y' + p(x)y = 0 \tag{4.19}$$

- Nếu $q \neq 0$ thì (4.18) gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất. Phương trình (4.19) gọi là phương trình thuần nhất tương ứng với (4.18).

Nhận xét: phương trình (4.18) là phương trình bậc 1 đối với y và y'.

Cách giải phương trình (4.18):

Nhận xét: nếu $v \neq 0$ là một hàm số nào đó sao cho $v(x) \neq 0, x \in I$ thì ta luôn có thể viết y dưới dạng tích của v và một hàm số khác: $y = uv$. (thật vậy lấy $u(x) = \dfrac{y(x)}{v(x)},\ x \in I$)

Ta tìm nghiệm của phương trình (4.18) dạng

$$y = uv,$$

trong đó $u = u(x)$ là hàm số của x, và $v = v(x)$ là một hàm khác không mà ta sẽ chọn một cách phù hợp.

Thay $y = uv$ vào (4.18) ta được

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \text{hay}$$

$$u'v + u\left[v' + p(x)v\right] = q(x). \tag{4.20}$$

Chọn một hàm số $v \neq 0$ sao cho $v' + p(x)v = 0$. (4.21)

Phương trình (4.21) tương đương với dạng biến số phân ly

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -p(x)dx \Leftrightarrow \ln|v| = \int -p(x)dx,$$

và ta có thể chọn $v = e^{-\int p(x)dx}$. Lúc này phương trình (4.20) trở thành:

$$u'\text{v} = q(x),$$

$$u' = \frac{q(x)}{v(x)},$$

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C, \text{với } C \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Với u và v như trên, $y = uv = \left[\int \dfrac{q(x)}{v(x)}dx + C\right]e^{-\int p(x)dx}$ là nghiệm tổng quát của (4.18).

Tóm tắt cách giải phương trình tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$
$y = uv$ $v' + p(x)v = 0$, $u'v = q(x)$

Chú ý: *có nhiều phương pháp khác nhau để giải phương trình vi phân tuyến tính như phương pháp Lagrange (phương pháp biến thiên hằng số), phương pháp thừa số tích phân... Phương pháp mà chúng ta vừa trình bày gọi là phương pháp Bernoulli.*

Ví dụ: Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x \tag{4.22}$$

Giải:

Với điều kiện $x \neq 0$, đặt $y = uv$, rồi thay vào phương trình ta được

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x^2 \cos x, \text{ hay}$$

$$u'v + u\left[v' - \frac{2}{x}v\right] = x^2 \cos x. \tag{4.23}$$

Chọn một hàm số $v \neq 0$ sao cho

$$v' - \frac{2}{x}v = 0, \text{ hay } \frac{v'}{v} = \frac{2}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x},$$

$$\ln|v| = 2\ln|x| + M,\ M \in \mathbb{R}.$$

Chọn $M = 0$ ta được $\ln|v| = 2\ln|x|$, hay $|v| = e^{2\ln|x|} = |x|^2$. Ta chọn $v = x^2,\ x \neq 0.$

Lúc đó phương trình (4.23) trở thành

$$u'x^2 = x^2 \cos x,\ x \neq 0.$$

$$u' = \cos x,$$

$$u = \int \cos x\, dx = \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = uv = x^2(\sin x + C),\ x \neq 0,\ C \in \mathbb{R}.$$

4.3.4 Phương trình vi phân Bernoulli

Phương trình Bernoulli, đặt theo tên James Bernoulli (1654-1705), là một phương trình phi tuyến nổi tiếng có thể chuyển về dạng tuyến tính bằng một phép thế thích hợp.

Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \tag{4.24}$$

trong đó p và q là các hàm số một biến của x, giả sử liên tục trên một miền $I \subseteq \mathbb{R}$ nào đó, và hằng số $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

Chú ý:

- Nếu $\alpha = 0$ thì (4.24) trở thành phương trình tuyến tính mà chúng ta đã nghiên cứu ở phần trước.
- Nếu $\alpha = 1$ thì (4.24) có thể đưa về phương trình với biến số phân đã biết cách giải

$$y' = (p(x) - q(x))y.$$

Nhận xét: phương trình Bernoulli (4.24) có dạng gần giống phương trình tuyến tính (4.18), bằng cách đổi hàm chúng ta sẽ chuyển phương trình Bernoulli về dạng tuyến tính.

Cách giải phương trình (4.24):

Trước hết ta thấy nếu $\alpha < 0$ thì $y \neq 0$, còn nếu $\alpha > 0$ thì hàm số $y = 0$ là một nghiệm của phương trình(4.24).

Ta đi tìm các nghiệm khác không của phương trình. Chia hai vế của phương trình (4.24) cho $y^{\alpha} \neq 0$ ta được

$$y^{-\alpha} y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x) \tag{4.25}$$

Đặt hàm $z = y^{1-\alpha}$ (cũng coi z là hàm của biến x). Lúc đó ta có đạo hàm của z theo x là

$$z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y' \Leftrightarrow y^{-\alpha} y' = \frac{1}{1-\alpha} z'.$$

Do đó phương trình (4.25) trở thành:

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + p(x) z = q(x), \text{ hay}$$

$$z' + (1-\alpha) p(x) z = (1-\alpha) q(x).$$

Phương trình cuối cùng có dạng phương trình vi phân tuyến tính mà chúng ta đã biết cách giải ở mục 4.3.3.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân Bernoulli

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{y^3}{x^2}. \tag{4.26}$$

Giải: điều kiện $x \neq 0$.

Trước hết do $\alpha = 3 > 0$ nên dễ thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình (4.26) .

Ta đi tìm các nghiệm khác không của phương trình. Chia hai vế của phương trình (4.26) cho $y^3 \neq 0$ ta được

$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \qquad (4.27)$$

Đặt hàm $z = \frac{1}{y^2}$. Lúc đó đạo hàm của z theo x là

$$z' = -2y^{-3}y' \Leftrightarrow y^{-3}y' = -\frac{1}{2}z'.$$

Do đó phương trình (4.27) trở thành $-\frac{1}{2}z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$ hay

$$z' - \frac{4}{x}z = -\frac{2}{x^2}. \qquad (4.28)$$

Phương trình (4.28) là một phương trình vi phân tuyến tính.

Với điều kiện $x \neq 0$, đặt $z = uv$, rồi thay vào phương trình ta được

$$\mathrm{vu}' + \mathrm{u}\left[v' - \frac{4}{x}v\right] = -\frac{2}{x^2}. \qquad (4.29)$$

Chọn $v \neq 0$ là nghiệm phương trình

$$v' - \frac{4}{x}v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = 4\ln|x| + C_1.$$

Chọn $C_1 = 0$ và $v = x^4, x \neq 0.$

Lúc đó phương trình (4.29) trở thành

$$\mathrm{x}^4\mathrm{u}' = -\frac{2}{x^2}, \text{hay } \mathrm{u}' = -\frac{2}{x^6},$$

$$u = \int -\frac{2}{x^6}\,dx = -2\int x^{-6}\,dx = -2\frac{x^{-5}}{-5} + C = \frac{2}{5x^5} + C, C \in \mathbb{R}..$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (4.28) là

$$z = uv = \left(\frac{2}{5x^5} + C \right) x^4 = \frac{2}{5x} + Cx^4,\ x \neq 0, C \in \mathbb{R}.$$

Thay $z = \dfrac{1}{y^2}$ vào công thức trên ta được tích phân tổng quát của (4.26) là

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2}{5x} + Cx^4,\ x \neq 0, C \in \mathbb{R}. \tag{4.30}$$

Như vậy phương trình (4.26) có họ tích phân tổng quát (4.30) và nghiệm $y = 0$ (với $x \neq 0$).

4.3.5 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{4.31}$$

trong đó M, N là các hàm số hai biến liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một miền $D \subseteq \mathbb{R}^2$ thỏa mãn

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ trên } D. \tag{4.32}$$

Người ta chứng minh được, với điều kiện (4.32) khi đó tồn tại một hàm số hai biến $F = F(x, y)$ trên D khả vi và có các đạo hàm riêng hỗn hợp đến cấp 2 liên tục sao cho M và N lần lượt là các đạo hàm riêng của F, tức là

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \frac{\partial F}{\partial y} = N. \tag{4.33}$$

Chúng ta cũng chú ý rằng nếu tồn tại một hàm F như thế, theo định lý Schwart thì

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$ và từ (4.33) suy ra điều kiện (4.32) là cần thiết.

Khi đó vế trái của phương trình (4.31) là vi phân toàn phần của hàm F,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = M\ dx + N\ dy.$$

Do đó phương trình (4.31) có thể viết dưới dạng

$$dF = 0.$$

Từ đó tích phân tổng quát của phương trình (4.31) là

$$F = C, C \in \mathbb{R}.$$

Ta sử dụng công thức sau

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} \mathrm{N}(x,y)dy = C, C\in\mathbb{R}, \tag{4.34}$$

với (x_0, y_0) là một điểm chọn tùy ý trong miền D.

Chú ý: khi ta thay đổi điểm $(x_0, y_0)\in D$ thì chỉ có thể làm thay đổi hằng số tùy ý $C\in\mathbb{R}$.

Ví dụ: giải phương trình vi phân

$$(x+y^2)dx+(2xy+y)\,dy=0$$

Giải: đặt $M = x+y^2, N=2xy+y$.

Ta thấy $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nên phương trình trên là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $x_0=0, y_0=0$. Sử dụng công thức (4.34), tích phân tổng quát của phương trình là

$$F(x,y)=\int_0^x M(x,0)dx+\int_0^y N(x,y)dy=C, C\in\mathbb{R}, \text{ hay}$$

$$\int_0^x x\,dx+\int_0^y (2x+y)dy=C, C\in\mathbb{R},$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(2x+1)y^2}{2}=C, C\in\mathbb{R},$$

$$x^2+(2x+1)y^2=K, K\in\mathbb{R}.$$

Chú ý: chúng ta trình bày một cách khác để tìm hàm F như sau.

Hàm F cần tìm phải thỏa mãn điều kiện (4.33):

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M=x+y^2, \frac{\partial F}{\partial y}=N=2xy+y.$$

Do $\dfrac{\partial F}{\partial x}=x+y^2$ nên $F(x,y)=\int\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+G(y)$, với $G=G(y)$ là một hàm số của y (không phụ thuộc vào x),

$$F(x,y)=\int(x+y^2)dx+G(y)=\frac{x^2}{2}+y^2x+G(y). \tag{4.35}$$

Tiếp theo do điều kiện $\frac{\partial F}{\partial y} = N = 2xy + y$ nên với F như ở (4.35) thì

$$2yx + G'(y) = 2xy + y,$$

$$G'(y) = y,$$

$$G(y) = \int y\, dy + C = \frac{y^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Từ đó thay G vừa tìm được vào (4.35) ta thu được kết quả như trong ví dụ trên

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 x + \frac{y^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{(2x+1)y^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

4.4 ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRONG MÔ HÌNH HÓA

Ngoài các mô hình đã được đưa ra, trong mục này chúng tôi giới thiệu thêm một số mô hình đơn giản trong các lĩnh vực khác nhau dẫn đến phương trình vi phân.

4.4.1 Định luật giảm nhiệt độ của Newton

Định luật giảm nhiệt độ của Newton nói rằng tốc độ thay đổi nhiệt độ của một vật tỷ lệ thuận với sự chênh lệch nhiệt độ của nó và môi trường xung quanh (với điều kiện sự chênh lệch nhiệt độ là nhỏ và bản chất của bề mặt bức xạ không thay đổi).

Gọi $y = y(t)$ là nhiệt độ của vật theo thời gian đặt trong môi trường có nhiệt độ là một hằng số M. Chúng ta biết rằng tốc độ thay đổ của vật là $\frac{dy}{dt}$ nên định luật giảm nhiệt độ của Newton được biểu diễn dưới dạng

$$\frac{dy}{dt} = -k\left(y - M\right) \tag{4.36}$$

trong đó $k > 0$ là hằng số tỷ lệ tùy thuộc vào từng vật thể (hệ số truyền nhiệt) và được giả sử không thay đổi theo thời gian. Đó là một phương trình vi phân cấp một dạng biến số phân ly và chúng ta có thể tìm được nghiệm tổng quát

$$y = Ce^{-kt} + M, C \in \mathbb{R}. \tag{4.37}$$

Ví dụ: Một cốc nước sôi đặt trong một phòng có nhiệt độ được giữ cố định là 25°C. Giả sử cốc nước giảm nhiệt độ từ 100°C xuống còn 90°C trong vòng 5 phút. Hỏi sau bao nhiêu lâu thì cốc nước giảm nhiệt độ xuống còn 50°C.

Giải: gọi $y = y(t)$ là nhiệt độ của cốc nước theo thời gian, nó tuân theo định luật giảm nhiệt của Newton (4.36) nên có biểu thức dạng (4.37):

$$y = Ce^{-kt} + M, C \in \mathbb{R}.$$

Với dữ kiện của đề bài thì $M = 25,\ y(0) = 100,\ y(5) = 90.$ Từ đó ta có

$$C + 25 = 100 \Leftrightarrow C = 75.$$

$$75e^{-5k} + 25 = 90 \Leftrightarrow e^{-5k} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}\ln\frac{13}{15} \approx 0,0286.$$

Do đó $y = 75e^{-0,0286t} + 25.$

Nhiệt độ của cốc nước còn 50° C thì

$$75e^{-0,0286t} + 25 = 50 \Leftrightarrow e^{-0,0286t} = \frac{1}{3}$$

$$-0,0286t = \ln\frac{1}{3}$$

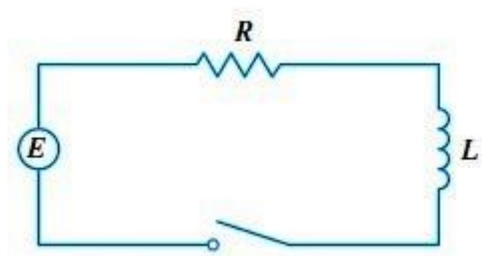
$$0,0286t = \ln 3$$

$$t \approx 38,41 \text{ (phút)}.$$

Vậy sau khoảng 38,41 phút thì nhiệt độ của cốc nước còn 50° C.

4.4.2 Mô hình mạch điện

Chúng ta xét một mạch điện như trong hình vẽ 4.6 gồm một nguồn phát điện E (có thể là pin hoặc máy phát điện) với đơn vị Vol (V), một điện trở R với đơn vị ôm (Ω) và một cuộn cảm với độ tự cảm (hay từ dung) L có đơn vị Henry (H).



Hình 4.6

Giả sử nguồn phát E hàm phụ thuộc vào thời gian t và gọi cường độ dòng điện trong mạch là $I = I(t)$, với đơn vị Ampe (A). Theo định luật cảm ứng Faraday, khi có dòng điện chạy qua cuộn cảm sẽ sinh ra một từ trường biến thiên theo thời gian và tạo ra một hiệu điện thế là $L\dfrac{dI}{dt}$. Theo một định luật của Kirchhoff thì tổng các hiệu điện thế qua điện trở R và qua cuộn cảm L phải bằng hiệu điện thế của nguồn phát E. Từ đó một mô hình cho cường độ dòng điện I được cho bởi phương trình vi phân bậc một:

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t). \tag{4.38}$$

Ví dụ: Giả sử một mạch điện như trên với $R=8$ (V), $L=4$ (H) và nguồn phát không đổi $E=32$ (V). Hãy tìm biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch theo thời gian kể từ lúc đóng mạch điện.

Giải: Cường độ dòng điện trong mạch được cho bởi phương trình

$$4\frac{dI}{dt}+8I=32.$$

Chúng ta cũng chú ý rằng khi chưa đóng mạch điện thì chưa có dòng điện, do đó ta có điều kiện ban đầu $I(0)=0$. Phương trình trên có thể đưa về dạng phân ly biến số

$$\frac{dI}{I-4}=-2dt.$$

Tích phân hai vế phương trình trên ta được

$$\ln|I-4|=-2t+C, C\in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $|I-4|=e^{-2t+C}, C\in\mathbb{R}$ và do đó $I-4=\pm e^{C}e^{-2t}$. Đặt $M=\pm e^{C}$, $M\neq 0$ ta nhận được

$$I=4+Me^{-2t}.$$

Điều kiện ban đầu $I(0)=0$ dẫn đến $M=-4$.

Vậy biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch là

$$I(t)=4-4e^{-2t}.$$

Ngoài ra chúng ta cũng có thể thấy rằng $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)=4$ nên cường độ dòng điện trong mạch tiệm cận đến 4 (A) sau khi thời gian t đủ lớn.

Tóm tắt các dạng phương trình vi phân cấp một

1. Phương trình với biến số phân ly
2. Phương trình đẳng cấp
3. Phương trình tuyến tính
4. Phương trình Bernoiulli
5. Phương trình vi phân toàn phần

BÀI TẬP CHƯƠNG 4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Các bài từ 4.1-4.5, kiểm tra hàm số cho trước có phải là nghiệm của phương trình vi phân?

	Nghiệm	**Phương trình vi phân**
4. 1.	$N = Ce^{kt}$	$\frac{dN}{dt} = k\ N(t)$
4. 2.	$y = \frac{1}{1+Ce^{-t}}$	$\frac{dy}{dx} = ky(1-y)$
4. 3.	$y = C\sqrt{x^2+4}$	$\left(x^2+4\right)\frac{dy}{dx} = xy$
4. 4.	$N = 100e^{2t}$	$\frac{dN}{Ndt} = 2,\ N(0) = 100$
4. 5.	$y^2 = Cx^3$	$2xy' - 3y = 0$

Các bài tập từ 4.6-4.9, giải các phương trình vi phân với điều kiện ban đầu

	Phương trình vi phân	**Điều kiện ban đầu**
4. 6.	$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2\sin x,$	sao cho $y_0 = 1$ khi $x_0 = 0.$
4. 7.	$\frac{ds}{dt} = 2e^{-3t},$	biết $s(0) = 2.$
4. 8.	$\frac{dy}{dx} = 2y,$	sao cho $y_0 = -2$ khi $x_0 = 0.$
4. 9.	$\frac{dN}{dt} = 2(3-N),$	biết $N(0) = 10.$

Các bài 4.10-4.14, giải các phương trình vi phân sau

4. 10. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

4. 11. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

4. 12. $ydx - (2x+1)dy = 0$

4. 13. $xy' + y = 0$

4. 14. $xy' = (y+1)$

Các bài *4.15-4.20*, giải các phương trình vi phân đẳng cấp

4. 15. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$

4. 16. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$

4. 17. $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

4. 18. $y'+\dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$

4. 19. $\left(x^3-xy^2\right)dx+\left(xy^2-y^3\right)dy=0$

4. 20. $\left(x^2+y^2\right)dx+3xydy=0$

Các bài 4.21-4.27, giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một

4. 21. $y'-y=4$

4. 22. $y'+2xy=4x$

4. 23. $y'-\dfrac{y}{x}=x^2$

4. 24. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x$

4. 25. $y'-\dfrac{1}{x}y=\dfrac{3}{x^2}.$

4. 26. $y'+\dfrac{2y}{x+3}=\dfrac{1}{x^2}$

4. 27. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2+1}$

Các bài 4.28-4.32, giải các phương trình Bernoulli

4. 28. $y'+y=xy^2$

4. 29. $y'+3xy=x^2y^3$

4. 30. $y'+xy=\dfrac{x}{y}$

4. 31. $y'+\dfrac{y}{x}=xy^2$

4. 32. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{y^3}{x^2}$

Giải các phương trình vi phân cấp một sau bằng một phương pháp thích hợp

4. 33. $(x^2+9)y'=xy$

4. 34. $y'x=y\ln y$

4. 35. $x\sqrt{y}dx-y(x+1)dy=0$

4. 36. $y'+2xy=xy^2$

4. 37. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{x\left(x+y\right)}$

4. 38. $\left(y^2+2\right)y'=3x^2y\left(1+\dfrac{1}{x^3+1}\right)$

4. 39. $xy'=y-x\cos^2\dfrac{y}{x}$

4. 40. $y'-y\sin x=\sin 2x$

4. 41. $y'+4x^3y=x^3$

4. 42. $\dfrac{dy}{dx}-2\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2}$

Bài tập ứng dụng phương trình vi phân

Các bài tập từ 4.43-4.44 liên quan đến mô hình giảm nhiệt độ

4. 43. Giả sử nhiệt độ của một vật, ký hiệu là $y = y(t)$, biến đổi theo phương trình

$$\frac{dy}{dt} = -2\left(y - 10\right) \text{ với } y(0) = 30.$$

Tìm $y(t)$ và nhiệt độ của vật khi $t = 4$.

4. 44. Một cốc cà phê được mang ra cho khách hàng. Giả sử cốc cà phê có nhiệt độ 95°C và nhiệt độ của môi trường là 28°C. Sau 5 phút thì thấy nhiệt độ của cốc cà phê còn 90°C. Hỏi sau 10 phút thì nhiệt độ của cốc cà phê là bao nhiêu.

Phân rã chất phóng xạ. Giả sử khối lượng của một chất phóng xạ theo thời gian ký hiệu là $m(t)$. Dựa trên giả thuyết tốc độ phóng xạ tỷ lệ thuận với lượng chất phóng xạ, quá trình phóng xạ được mô hình bởi phương trình

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m(t) \text{, với } m(0) = m_0, \quad (4.39)$$

trong đó λ là một hằng số dương, được gọi là *hằng số phóng xạ*.

4. 45. Radium có chu kỳ bán rã là 1599 năm. Giả sử ban đầu có 10 gam Radium. Hỏi sau sau 600 năm thì khối lượng Radium còn bao nhiêu?