Date ..../......./............. No ....

Chương 1. Phép tính vi phân hàm một biến và nhiều biến

1.1. Hàm khả vi và định lý giá trị trung bình.

- ~~Hàm~~ Số thực

Số tự nhiên $N = \{0, 1, 2, \dots\}$

Số nguyên $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

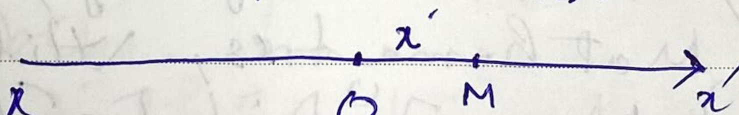
Số hữu tỷ $Q = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in Z\}$.

$= \{$số ~~hữu~~ thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn$\}$

Số thực $R = \{$số hữu tỷ + số vô tỷ$\}$

Số vô tỷ = thập phân vô hạn ko tuần hoàn, vd $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ ~ vô tỷ

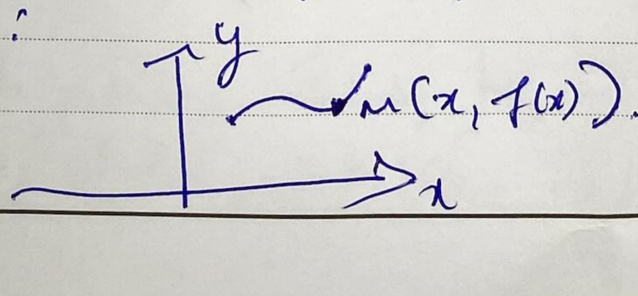
<u>NX</u>. R là 1 trường với $(+, \cdot)$ có quan hệ thứ tự toàn phần $(\leq)$ và có tính đầy đủ (độ đầy trục số) ~ song ánh với trục $x'x$

R ~ 

- ~~Ham~~ Hàm số: Cho $X, Y \subset R$,

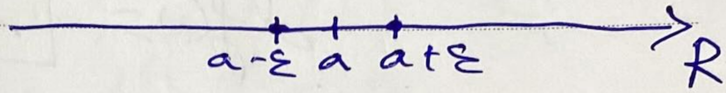
$$f: X \to Y$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

- Đồ thị:



- Lân cận: Lân cận ε của a là

$$O(a, \varepsilon) = \{x \in R \mid |x-a| < \varepsilon\}$$

$=$ 

- Liên tục: $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

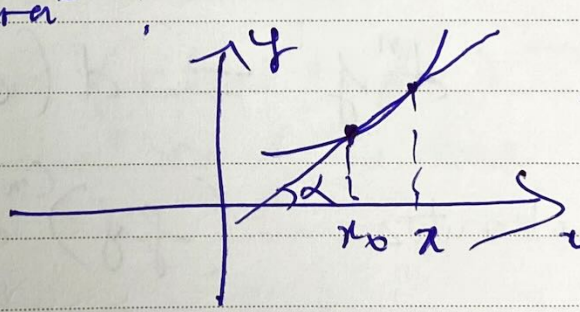
i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho, khi $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

- Đạo hàm: Đạo hàm của $f(x)$ tại $x = x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Ta nói f khả vi tại x_0 nếu $\exists f'(x_0)$

- Ý nghĩa:

a) 

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\,\alpha$$

~ hệ số góc của tt

b) $v'(t_0) = \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ ~ vận tốc

c) $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$,

(Khai triển vô cùng bé)

d) $\exists f'(x_0) \to f$ liên tục tại x_0.

Date ..../......./............ No ....

– Vi phân: Vi phân của f tại $x = x_0$ là

$$df(x_0) = [f(x) - f(x_0)]\Big|_{x \to x_0}$$
$$= f'(x_0)\,\Delta x\,\Big|_{x \to x_0}$$

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\,dx}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)}$$

– Đạo hàm và vi phân cấp cao

$$f(x)^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$
$$d^n f = d\left(d^{n-1} f\right).$$

CT Leibnitz. $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$

– Định lý Fermat: Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 và $\exists f'(x_0)$ thì $f'(x_0) = 0$.

cm. $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ | Cực tiểu.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0.$

PHENIKAA
Hiện thực hóa mọi cam kết

Date ..../......../.............. No ....

– Định lý Rolle: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) và $f(a)=f(b)$ thì $\exists x_0 \in (a,b)$ sao cho $f'(x_0)=0$.

– Định lý Lagrange: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b); thì $\exists x_0 \in (a,b)$ sao cho:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

– Định lý Cauchy: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b), thì $\exists x_0 \in (a,b)$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

1.2 Công thức (khai triển) Taylor:

Nếu $f(x)$ khả vi liên tục đến cấp $n+1$ trong (a,b), thì $\forall x_0 \in (a,b)$ có

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

với c nào đó $\in$ ~~(a,b)~~ (x, x_0)

Date ..../......./............. No ....

NA 1) Khai triển Mac Laurin: $x_0 = 0$

2) Khi $x \to x_0$, số hạng:

$$O\left((x-x_0)^n\right) \equiv \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

là vô cùng bé bậc n.

VD. 1) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$

$+ x^m$

2) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^n)$

3) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}$

$+ O(x^n)$

4) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)$

5) $\sin(x) = ?$, $\cos(x) = ?$

AD. Tính $\lim \left(2^x + 3^x - 5^x\right)^{(2^x+3^x-2.5^x)^{-1}}$

$$\ln A = \frac{\ln(2^x+3^x-5^x)}{2^x+3^x-2\times 5^x}$$

$$= \frac{\ln(1 + x\ln 6/5)}{x \ln 6/25} = \frac{\ln 6/5}{\ln 6/25}$$

VD. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b}\right)$

□ ĐL De L'Hospital: f, g khả vi tại lân cận $x = x_0$, có thể trừ x_0. Nếu $\lim_{x\to x_0} f = \lim_{x\to x_0} g = 0$ thì

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'}{g'}$$

NX. Định lý vẫn đúng khi $x_0 \to \infty$ hoặc tỷ số $= \frac{\infty}{\infty}$.

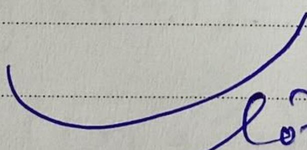
□ Khảo sát hàm số.

Nx 1. f khả vi liên tục trên $[a,b]$

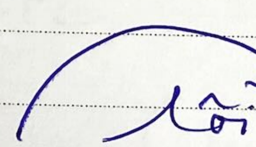
a) Nếu $f'(x) > 0$ (<0) $\forall x \in (a,b)$ thì $f(x)$ tăng (giảm) trên (a,b)

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi $x = x_0$ thì x_0 là cực trị.

c)



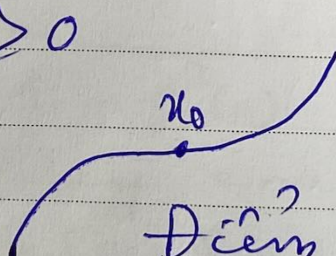
lõm



lồi

$f''(x) \geq 0$ $f''(x) < 0$

d)



Điểm uốn

$f''(x)$ đổi dấu tại x_0

Date ..../......../.............. No ....

NX2 . Sơ đồ KS.

1) MXĐ
2) Chiều biến thiên
3) Cực trị
4) Lồi, Lõm, điểm uốn
5) Tiệm cận.
6) Bảng biến thiên
7) Đồ thị.

Date ..../......./............. No ....

BT

1) Tìm miền xác định

a) $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

b) $y = \lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

d) $y = \sqrt[4]{\lg(x-1)}$

2) Tìm miền giá trị

a) $y = \sqrt{2+x-x^2}$

b) $y = \lg(1-2\cos x)$

c) $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$

3) Tìm $f(x)$ biết

a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

b) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ $(|x| \geq 2)$

c) $x = \sqrt{1-f^2(x)}$

4) Tìm chu kỳ của

a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$

b) $f(x) = \sin^2 x.$

Date ..../......./............ No ....

5) Tính

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

6) Xét tính liên tục

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 4)/(x-2), & x \neq 2 \\ A, & x = 2 \end{cases}$

7) Tính y', biết

a) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

b) $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

c) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

d) $y = x^{1/x}$

e) $y = e^{x^x}$

f) $y = e^x \ln \sin x$

Date ..../......./............. No ....

8) Tính dy, biết

a) $y = \frac{1}{x}$

b) $y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, $a \neq 0$

c) $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$

d) $y = \arcsin\frac{x}{a}$.

e) $y = xe^{x}$

f) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

BT9. Cho   tính

$y = \frac{x^2}{1-x}$ $y^{(8)}$

$y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ $y^{(100)}$

$y = x^2 \sin 2x$ $y^{(50)}$

BT10. Tính

a) $\int x^2(5-x)^4\,dx$

b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$.

c) $\int \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$.

Date ..../......../............. No ....

BT11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) $y = x^2$ $(x \geq 0)$ và $x = 0, y = 4$

b) $y = x^2 + 4$ và $x - y + 4 = 0$

BT12. Tìm thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi:

1) $y^2 + x - 4 = 0$, $x = 0$, khi quay quanh Oy

2) $y = x^2$, $y = 4$ khi quay quanh $x = -2$.

1.3. Chuỗi số, hàm

A. Chuỗi số

1) **ĐN** Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

gọi là chuỗi số.

NX 1) Nếu $\exists S$, chuỗi hội tụ, ngược lại phân kỳ

2) $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ gọi là tổng riêng

2) **ĐL**: Nếu S hội tụ $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

D $u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$ khi $n \to \infty$.

NX. Ngược lại chưa chắc:

xét $u_n = \frac{1}{n}$. Dễ dãy $u_n \to 0$

tuy nhiên $S_{2n} - S_n = \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n}$

$$> \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

o hội tụ.

3) Tiêu chuẩn Cauchy: Điều kiện cần và đủ để S hội tụ là

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ sao cho:

$|S_p - S_q| < \varepsilon$ với $p, q \geq n_0$.

4) <u>TC</u>. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} cU_n = c\sum_{n=1}^{\infty} U_n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n + V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n + \sum_{n=1}^{\infty} V_n$

3) Cho $0 < U_n \leq V_n \quad \forall n \geq n_0$.
Nếu $\sum U_n$ phân kỳ thì $\sum V_n$ phân kỳ. Nếu $\sum V_n$ hội tụ, thì $\sum U_n$ hội tụ.

4) Cho $U_n, V_n > 0 \quad \forall n \geq n_0$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = k > 0$, thì 2 chuỗi cùng hội tụ hay phân kỳ.

5) QTắc D'Alembert: Cho chuỗi dương $\sum U_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l < 1$, thì hội tụ, ngược lại $l > 1$ phân kỳ.

6) QTắc Newton: Cho chuỗi dương $\sum U_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l < 1$ thì hội tụ, $l > 1$ phân kỳ.

Date ..../......./............. No ....

7) Hội tụ tuyệt đối: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ hội tụ, thì $\sum U_n$ hội tụ.

8) Chuỗi đan dấu: Nếu dãy $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ giảm đến 0 khi $n \to \infty$ thì $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots$ hội tụ và tổng $< U_1$.

B. Chuỗi hàm

1) Dãy hàm $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ gọi là hội tụ đến $f(x)$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, sao cho $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

NX: mỗi dãy n_0 phụ $\in \varepsilon$ và x, nếu $n_0 \notin x \in X$, thì $\{f_n(x)\}$ hội tụ đều trên X.

2) Nếu $\{f_n(x)\}$ liên tục và hội tụ đều trên X, thì:

a) $f(x)$ liên tục

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

3) Chuỗi hàm: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gọi là hội tụ trên X, nếu $S_n \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ hội tụ trên X.

4) Nếu $\forall n \in N, x \in X$ và $|f_n(x)| \leq a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

Date ..../......../............. No ....

thì $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên X

5) TC. $\int_a^b \sum f_n(x)\,dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx$

$$\left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x).$$

6) Chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

có bán kính hội tụ R, nghĩa là hội tụ tuyệt đối khi $|x|<R$, và phân kỳ khi $|x|>R$. Tại $|x|=R$ có thể hội tụ hoặc không.

NX. Nếu $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|_{n\to\infty} = \rho$ or $\sqrt[n]{|a_n|}\Big|_{n\to\infty} = \rho$, thì $R = \frac{1}{\rho}$.

7) Khai triển hàm số (Taylor or MacLaurin)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in I.$$

VD. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

8) Chuỗi Fourier

Nếu $f(x) : R \to R$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, khả tích trên $[-\pi, \pi]$, thì

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

trong đó: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

gọi là hệ số khai triển Fourier.

9) TLC a) Nếu f đơn điệu từng khúc và bị chặn thì chuỗi Fourier hội tụ tại mọi điểm và bằng $\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$.

Date ..../......./............. No ....

b) T/c Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

c) Dạng phức của chuỗi Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx.$$

1.4. Hàm nhiều biến

A. Khái niệm

- Xét không gian Euclide n chiều:

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n \text{ lần}}$$

- $x \in R^n \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

  $D \subset R^n$ là 1 miền trong R^n

- Ánh xạ ~ hàm số n biến

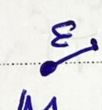
$$f : D \to R$$
$$x \longmapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Khoảng cách

  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$MN = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

- Lân cận ε của M



$$O(M, \varepsilon) = \{ M' \mid MM' < \varepsilon \}.$$

- $D \subset R^n$: x là điểm trong của D nếu $\exists\, O(x, \varepsilon) \subset D \Longrightarrow D$ gọi là mở nếu $\forall x \in D$ là điểm trong.

- y gọi là điểm biên của D nếu $\forall\, O(y, \varepsilon)$ đều chứa điểm $\in D$ và $\in \overline{D} = R^n \setminus D$. y có thể $\notin D$.

$\Longrightarrow$ D gọi là đóng nếu nó chứa mọi điểm biên của nó.

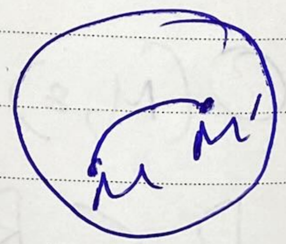
<u>VD</u> 1) $O(M, r) = \{M' \mid MM' < r\}$ là mở (quả cầu mở)

2) Biên là M' sao cho: $MM' = r$.

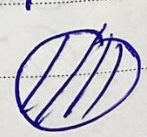
3/ $C(M, r) = \{M' \mid MM' \leq r\}$ gọi là đóng (quả cầu đóng).

— D gọi là bị chặn nếu $\exists\, O(M_0, r) \supset D$.

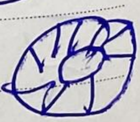
— D gọi là liên thông nếu 2 điểm bất kỳ $M, M' \in D$ đều có thể nối với nhau bởi 1 đường liên tục $\subset D$.



+) D đơn liên nếu ko thủng



+) D đa liên nếu thủng



Date ..../......../.............. No ....

VD 1) MXĐ $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ~ hình tròn

2) $z = \ln(x + y - 1)$ ~ nửa mp.

— Giới hạn

1) $\lim_{M \to M_0} f(M) = L$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, sao cho $|f(M) - L| < \varepsilon$ với $MM_0 < \delta$.

2) $\forall$ dãy điểm $M_n \to M_0$ thì $f(M_n) \to L$, ngược lại phân kỳ.

VD 1) $A = \lim_{(x,y) \to 0} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = ?$ | xét $x = ky$. $\nexists$

2) $B = \lim_{(x,y) \to 0} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \min\{|x|, |y|\} \to B \to 0$. ~~Hội~~ tụ

— Liên tục: 1) f liên tục tại M_0 nếu $\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, liên tục trên D nếu liên tục tại $\forall M_0 \in D$.

2) f liên tục đều trên D nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$ với $MM_0 < \delta$, $\forall M, M_0 \in D$ (δ độc lập M, M_0)

3) f liên tục trên miền đóng D bị chặn, thì $\exists$ min và max f và hữu hạn.

PHENIKAA
Hiện thực hóa mọi cam kết

VD . $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

f liên tục tại $\forall (x,y) \neq 0$. Xét $(x,y) = 0$, $f(x,y) \leq \frac{1}{2^\alpha}(x^2+y^2)^{\alpha-1}$

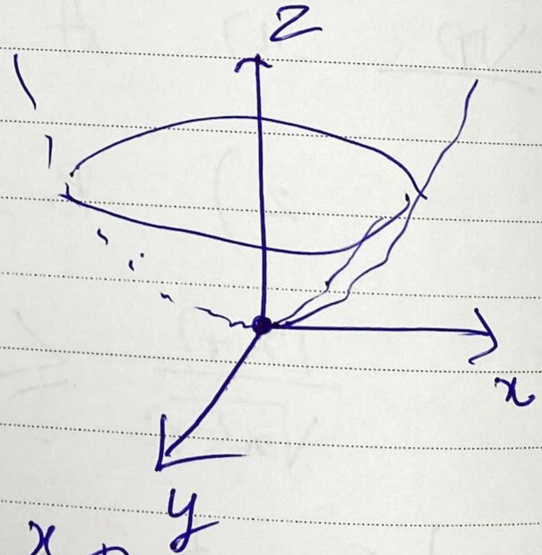
- $\alpha > 1 \to$ liên tục
- $\alpha \leq 1 \to f(x,y)\Big|_{x=y} = \dfrac{x^{2\alpha}}{2x^2} = \dfrac{1}{2x^{2(1-\alpha)}}$

  ⇒ không liên tục.

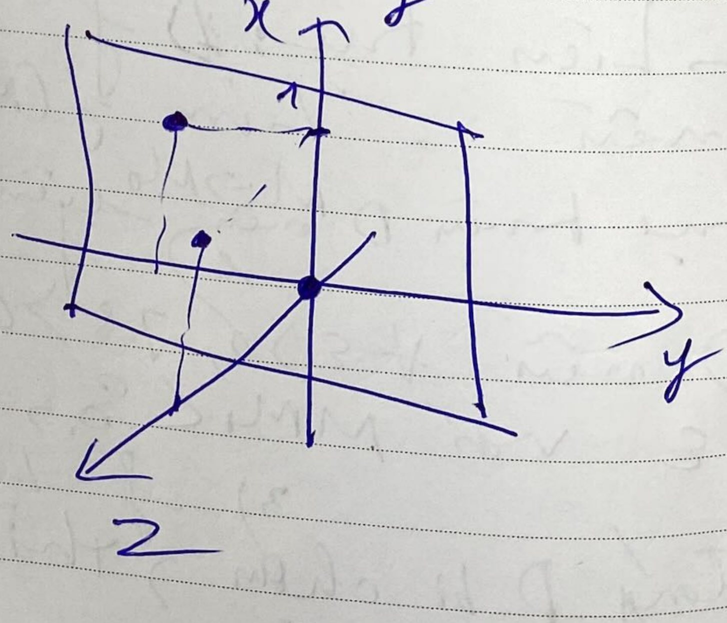
— Đồ thị.

- $z = x^2+y^2$

  elipsoid



- $z = x+y$.



Date ..../......./............. No ....

B. Đạo hàm và vi phân.

– Đạo hàm riêng: Cho hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Cho $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Hàm số $f(x_1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)$ có đạo hàm theo x_1 tại $x_1 = x_1^0$, gọi là đạo hàm riêng của f theo x_1 tại $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \quad , \quad f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f(M_0)}{\Delta x_1}.$$

Tương tự cho: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

VD. 1) $z = xy + x^2 + y^2 - 2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ? \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

2) $z = x^y$, $x \geq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

– Vi phân toàn phần: Δf tại M_0 là: $\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Nếu $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \cdots + A_n \Delta x_n$

Date ..../......../.............. No ....

trong đó $A_{1,2,\ldots,n}$ chỉ phụ $\in M_0$ ta
nói Δf là vi phân toàn phần
df và f khả vi tại M_0. Nếu
f khả vi tại $M_0 \to$ liên tục tại M_0.

– Nếu f khả vi liên tục theo từng biến ($\exists$ có đạo hàm riêng và chúng liên tục), thì f khả vi tại M_0 và

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ độc lập $\to \Delta x_i = dx_i$
và

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

– Hệ quả:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0 + \cdots + x_n^0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\Delta x_i$$

– Đạo hàm hàm hợp:

$$f : P \to R^m,\quad g : R^m \to R$$

$$\Leftrightarrow \quad gf : D \to R.$$

Nếu $f(u,v)$ khả vi liên tục theo $\{u, v\}$ và u, v khả vi liên tục theo x, y, trong đó $u(x,y)$ và $v(x,y)$, thì

PHENIKAA
Hiện thực hóa mọi cam kết

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\text{Jacobi}}$$

<u>VD</u>. Cho $z = e^u \ln v$ và

$u = xy$, $v = x^2 + y^2$.

a) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ?$

\- <u>NX</u>. 1) Nếu $z = f(x,y)$, $y = y(x)$

$\rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$.

2) Nếu $z = f(x,y)$, $x = x(t)$ và $y = y(t)$ thì:

$\rightarrow \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x} x'_t + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'_t$.

3) $dz = \dfrac{\partial z}{\partial u} du + \dfrac{\partial z}{\partial v} dv$

$= \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$

~ bất biến, như hàm 1 biến

4) $d(f+g) = df + dg$

$d(fg) = f\,dg + g\,df$,

$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$

– Đạo hàm và vi phân cấp cao:

+) $f \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Đạo hàm riêng cấp 2, tương tự đo 3, 4, ...

+) ĐL Schwarz: Nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ tồn tại và liên tục, thì bằng nhau

Date ..../......./............. No ....

+) $f \to df = f'_x dx + f'_y dy$

$\to d^2 f = d(df)$

$= (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx$

$+ (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy$

$= f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy$

$+ f''_{y^2} dy^2.$

$\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f.$

Tương tự: $d^n f = (\qquad\qquad)^n f.$

Công thức trên o đúng cho hàm hợp.

— Hàm thuần nhất

+) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ thuần nhất bậc k

nếu $f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n)$

+) Lấy đạo hàm theo t và cho $t = 1$.

$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$. ct Euler.

— Đạo hàm theo hướng – Gradient

$M_0 \xrightarrow{\vec{l}} M$ $\qquad \vec{l} \equiv \frac{\overrightarrow{M_0M}}{M_0M}$ ~ vectơ đơn vị.

Date ..../......./............. No ....

Đạo hàm của f tại M_0 theo hướng $\overrightarrow{M_0M}$ ~~là~~ hay $\vec{l}$ là:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) \equiv \lim_{\substack{M \to M_0 \\ \text{theo } \vec{l}}} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0}$$

NX 1) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}_x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$

$= \dfrac{\partial f}{\partial x} \to$ đạo hàm riêng

2) Nếu f khả vi tại M_0 thì có đạo hàm theo ∀ hướng và

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

với α, β, γ là các (góc) thành phần của $\vec{l}$.

ĐN. $\text{Grad} f \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{i}_y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{i}_z$

$\Leftrightarrow \text{Grad} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i}_x + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{i}_y + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{i}_z$

$\equiv \nabla$ – Nabla.

ĐL. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \vec{l} \cdot \nabla f$ lớn nhất khi l đồng hướng với ∇f or Grad f.

Date ..../......./............ No ....

VD. $f = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ tính

∇f và $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ biết $M_0(1,2,-1)$ và $M(2,0,1)$.

□ $\nabla f = 3(-\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k})$

$\overrightarrow{M_0M} = (1,-2,2)$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = -\frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}.$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = (-3)\frac{1}{3} + 9\left(-\frac{2}{3}\right) + 9\left(\frac{2}{3}\right)$

$= -1.$

- Công thức Taylor: Nếu f có đạo hàm riêng đến cấp $n+1$, liên tục trong lân cận của M_0. Với $M \in$ lân cận của M_0, có:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0,y_0) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!} d^n f(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1.$$

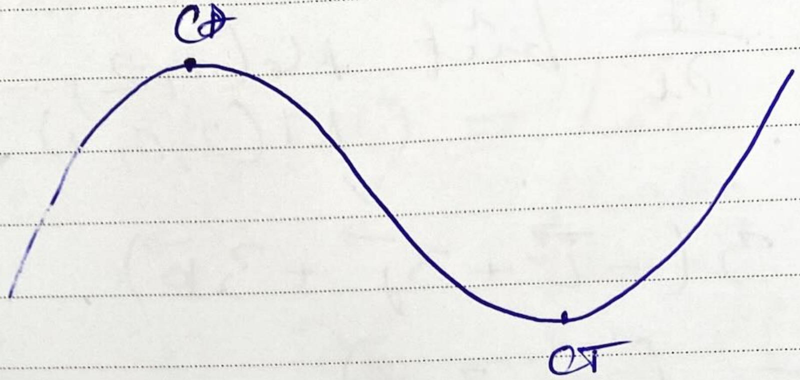
Ở đây: $d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n$.

PHENIKAA Hiện thực hóa mọi cam kết

VD. $\sin x \sin y = xy - \frac{1}{6}x^3 y - \frac{1}{6}xy^3 + \dots$

Date ..../......../.............. No ....

C. Cực trị



ĐN $f: D \to R$, $M_0 \in D \subset R^n$

$M_0 \sim$ CĐ : $\exists\, O(M_0, \varepsilon)$, $f(M) < f(M_0)$ $\forall\, MM_0 < \varepsilon$, đủ M

$M_0 \sim$ CT : $\exists\, O(M_0, \varepsilon)$, $f(M) > f(M_0)$ $\forall\, MM_0 < \varepsilon$, đủ M

ĐL Nếu f đạt cực trị tại M_0 với $\exists\, f'_{x,y}(M_0)$, thì

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$$

ĐL Nếu f khả vi liên tục đến cấp II và tại M_0: $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$.
Trong $O(M_0, \varepsilon)$ có:

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = a\Delta x^2 + 2b\Delta x\Delta y + c\Delta y^2$$

với $M \in O(M_0, \varepsilon)$, $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)$

$c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)$, Nếu $b^2 - ac < 0$ → f đạt cực trị:

| a > 0 → CT
| a < 0 → CĐ.

Nếu $b^2 - ac > 0$, f k° đạt cực trị

Nếu $b^2 - ac = 0$, chưa khẳng định được.

VD. $f = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 \Rightarrow x = \pm 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - 6 \Rightarrow y = \pm 1$.

Có 4 đ² M₀. $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ $(-1,-1)$

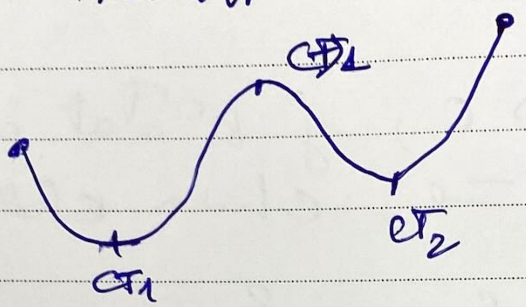
Tại $M_0(1,1)$ $\begin{cases} a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 \\ b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\ c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12 \end{cases}$ $b^2 - ac < 0$ CT

Tại $M_0(-1,-1)$ → $\begin{cases} a = -6 \\ b = 0 \\ c = -12 \end{cases}$ $b^2 - ac < 0$ CĐ

Tại $M_0(1,-1)$ và $M_0(-1,1)$ ko có ct vì $b^2 - ac > 0$.

Date ..../......./............. No ....

ĐL: Hàm số liên tục trên miền đóng bị chặn D đều ∃ giá trị lớn nhất và bé nhất.



Max = Max{ $f_{CĐ}$, $f_{\text{biên}}$ }

Min = Min{ f_{CT}, $f_{\text{biên}}$ }

VD. Tìm Max Min trên miền

$$f = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$$

$$D: \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x(1 - 2x^2 - y^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0$$

M_0 : $(0, 0)$, $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$f(M_0)$: 0 $\quad \frac{1}{4}$ $\quad 1$

Biên:

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$f(M) = x^2(1 - x^2), \quad |x| \leq 1.$$

$$0 \leq f \leq \frac{1}{4}.$$

Min = 0, Max = 1.

PHENIKAA
Hiện thực hóa mọi cam kết

Date ..../......./............. No ....

D. Hàm ẩn, ánh xạ ngược, cực trị điều kiện.

ĐN. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ cho ra x_i theo các biến còn lại, đó là
$$x_i = g(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ... x_n)$$ gọi là hàm ẩn.

ĐN $f: D \to D'$, $D \in R^n$, $D' \in R^n$

Nếu f là song ánh, $\Rightarrow \exists$
$$f^{-1}: D' \to D$$
sao cho: $f f^{-1} = f^{-1} f = 1$.

ĐL 1) Cực trị của $f(x,y)$ trong đó $g(x,y) = 0$ gọi là cực trị có ĐK

2) Giả sử f, g khả vi liên tục và g'_x, g'_y không đồng thời $= 1$, thì cực trị thoả mãn:
$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0.$$

VD. Tìm cực trị của $f = x^2 + y^2$ biết $ax + by + c = 0$.
$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow M_0\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2}\right)$$

BT 1) Tìm miền xác định

a) $z = \ln xy$ b) $z = \sqrt{4-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-1}$

c) $z = \dfrac{1}{y-x^2}$, d) $y = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$

BT2 Tìm giới hạn khi $(x,y) \to (0,0)$

a) $f = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ b) $f = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

BT3. Đạo hàm riêng

a) $z = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ b) $z = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

c) $z = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$ d) $z = x^{y^3}$

e) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ f) $z = e^{xyz} \sin \dfrac{y}{x}$

BT4. Xét tính liên tục

a) $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$