Lecture Notes: Đại số tuyến tính

Chương 1: Ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính

Biên soạn: Phan Quang Sáng- Bộ môn Toán, Đại học Phenikaa

August 2021

Mục lục

1 Nhắc lại về trường số thực, phức

1.1 Trường số thực

Tập hợp số đã được mở rộng từ tập hợp các số tự nhiên đến tập hợp các số thực

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.2 Trường số phức

Ký hiệu $\mathbb{R}^2$ là tập hợp

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b): \ a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}\}.$$

Trên $\mathbb{R}^2$ chúng ta trang bị hai phép toán:

- Phép cộng, ký hiệu (+): $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- Phép nhân, ký hiêu $(\cdot)$: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 - a_2b_1)$

Khi đó chúng ta có thể kiểm tra hai phép toán trên là giao hoán và thỏa mãn tính chất kết hợp, phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng; phần tử $(0,0)$ là phần tử không (trung hòa) đối với phép cộng và mọi phần tử đều có đối xứng qua phần tử không; phần tử $(1,0)$ là đơn vị của phép nhân và mọi phần tử khác không đều có nghịch đảo đối với phép nhân:

$$\text{nếu} \quad (a,b) \neq (o,0) \text{ thì } \quad (a,b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}).$$

Người ta nói rằng $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ như trên là một trường số phức, ký hiệu $\mathbb{C}$. Mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ lúc này có thể đồng nhất với $(x,0) \in \mathbb{C}$, do đó $\mathbb{R}$ có thể coi là trường số con của trường số phức $\mathbb{C}$.

Bên cạnh đó chúng ta có thể thấy:

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0).$$

Ký hiệu số phức $(0,1) = i$, được gọi là đơn vị ảo. Nó thỏa mãn $i^2 = (-1,0)$, cái được đồng nhất với số thực -1, và do đó $i^2 = -1$.

Khi đó mỗi số phức $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ có thể được biểu diễn như sau

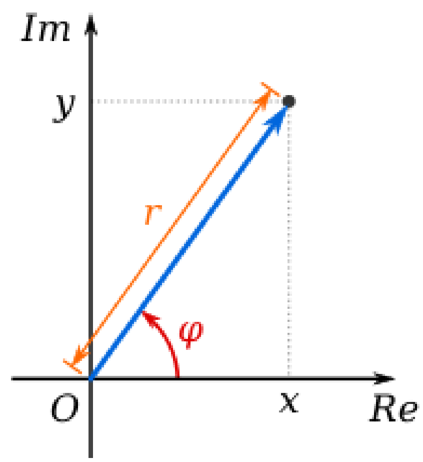
$$z = (a, b) = (a, 0) + b(0, 1) = a + bi,$$

và được goi là **dạng đại số** của số phức. Người ta cũng ký hiệu $\Re z = a$, $Imz = b$ và tương ứng gọi là phần thực và phần ảo của z. Như vậy mọi số phức $z \in \mathbb{C}$ có dạng đại số là

$$z = a + ib,$$

trong đó i ký hiệu đơn vị ảo.

Biểu diễn hình học của số phức: mỗi số phức $z = a + ib$ tương ứng với một điểm duy nhất $M(a, b)$ trên mặt phẳng tọa độ.



Dạng lượng giác của số phức: mỗi số phức $z = a + ib$ có thể viết dưới dạng

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

trong đó $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ và được goi là mô đun của z, φ là góc giữa $\overrightarrow{OM}$ với trục thực và được gọi là argument của z, ký hiệu $\varphi = Arg(z)$.

Dạng mũ của số phức: với mỗi số thực φ nếu chúng ta đặt

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

thì số phức z có thể viết dưới **dạng mũ** như sau

$$z = re^{i\varphi}.$$

2 Ma trận và các phép toán

2.1 Định nghĩa ma trận

Người ta có thể sắp xếp và ghi dữ liệu dưới dạng các bảng hình chữ được gọi là ma trận và thường sử dụng các chữ cái in hoa, như $A, B, C...$, để ký hiệu.

Ví dụ: Doanh thu bán hàng của một cửa hàng cho ba sản phẩm I, II, III vào các ngày trong tuần từ Thứ hai đến Chủ nhật cho mỗi tuần có thể được sắp xếp trong một ma trận như sau:

$$
\begin{array}{cl}
\text{Thứ} & \begin{array}{ccccccc}\text{Hai} & \text{Ba} & \text{Tư} & \text{Năm} & \text{Sáu} & \text{Bẩy} & \text{CN}\end{array} \\
\hline
\text{A=} & \begin{bmatrix} 40 & 33 & 81 & 0 & 21 & 47 & 33 \\ 0 & 12 & 78 & 50 & 50 & 96 & 90 \\ 10 & 0 & 0 & 27 & 43 & 78 & 56 \end{bmatrix} . \quad \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}
\end{array}
$$

Nếu công ty có 10 cửa hàng, chúng ta có thể thiết lập 10 ma trận như vậy, mỗi ma trận cho một cửa hàng. Khi đó, nếu cộng các phần tử tương ứng của các ma trận này, chúng ta có thể nhận được một ma trận hiển thị tổng doanh thu của từng sản phẩm trong mỗi ngày.

Định nghĩa 2.1. *Một ma trận là một bảng hình chữ nhật chứa các số (thực hoặc phức) hoặc hàm số được sắp xếp theo hàng và cột và được đặt trong dấu ngoặc vuông (hoặc tròn).*

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

Ma trận gồm m hàng và n cột như trên được gọi là có cấp $m \times n$. Các số (hoặc hàm số) a_{ij} được gọi là các phần tử của ma trận.

Ký hiệu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, hoặc đơn giản $A = [a_{ij}]$.

Nếu tất cả các phần tử a_{ij} của ma trận là các số thực (hoặc số phức) thì ma trận được gọi là ma trận thực (hoặc ma trận phức).

Ví dụ:

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}
$$

là một ma trận cấp 2×3.

Định nghĩa 2.2. *Hai ma trận $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cấp và có các phần tử tương ứng bằng nhau: $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi i, j.*

Một số dạng ma trận đặc biệt:

- Ma trận không, ký hiệu θ: là ma trận có tất cả các phần tử bằng không.

- Ma trận vuông: nếu $m = n$, ma trận còn được gọi là ma trận vuông cấp n. Khi đó các phần tử a_{ii} tạo thành đường chéo gọi là đường chéo chính.

- Ma trận tam giác trên: là ma trận vuông mà tất cả các phần tử nằm bên dưới đường chéo chính đều bằng không, $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$. Các phần tử nằm trên đường chéo có thể bằng không hoặc khác không. Ma trận tam giác dưới được định nghĩa tương tự.

Ví dụ: một số ma trận tam giác

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ (tam giác trên)}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ (tam giác dưới)}$$

- Ma trận đường chéo: là ma trận vuông mà tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng không: $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu I_n: là ma trận chéo mà mọi phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1.

Ví dụ: ma trận đơn vị cấp 2

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Véc tơ: là trường hợp đặc biệt ma trận với chỉ một hàng (gọi là véc tơ hàng) hoặc một cột (gọi là véc tơ cột). Các phần tử của nó được gọi là các thành phần của véc tơ. Véc tơ được ký hiệu bằng các chữ cái thường, như a, b, c...

Ví dụ:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$
$$b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

2.2 Các phép toán cơ bản với ma trận

2.2.1 Chuyển vị

Định nghĩa 2.3. *Chuyển vị của ma trận A cấp $m \times n$ là ma trận cấp $n \times m$, ký hiệu A^T, có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột và ngược lại.*

Nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ thì $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T.$$

Tính chất: $(A^T)^T = A$.

2.2.2 Phép cộng ma trận

Phép cộng các ma trận cùng cấp

Ví dụ: Cho các ma trận sau

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dự đoán $A + B$ là gì?

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 2.4. *Giả sử* $A = [a_{ij}]$ *và* $B = [b_{ij}]$ *là hai ma trận cấp* $m \times n$. *Khi đó* $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \\ 6 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Một số tính chất:

- $A + B = B + A$
- $A + \theta = \theta + A = A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

2.2.3 Nhân vô hướng

Ví dụ: hãy dự đoán $2C$ là gì, với $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa 2.5. *Cho* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. *Khi đó với mỗi số thực* k, *ta định nghĩa*

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}.$$

Ví dụ:

$$2 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 8 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Chúng ta dễ dàng kiểm tra được một số tính chất sau với mọi ma trận A, B và các số k, l.

- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + l)A = kA + lA$
- $k(lA) = l(kA) = lkA$
- $(kA)^T = kA^T$

2.2.4 Phép nhân ma trận

Phép nhân hai véc tơ:
Ví dụ: tích của hai véc tơ cùng độ dài $u = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ và $v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, thì $u \times v$ là giá trị cho tổng của tích các phần tử tương ứng của hai véc tơ:

$$u \times v = 2 \times 3 + (-1) \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times (-2) + 5 \times 4 = 18$$

Tổng quát: nếu $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ và $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ thì tích vô hướng của u và v, ký hiệu là $u \times v$ (hoặc $u.v$, uv) được định nghĩa là

$$uv = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + \cdots u_n \times v_n.$$

Chú ý người ta còn coi tích vô hướng của u và v như là tích của véc tơ dòng u và véc tơ cột v^T:

$$uv = u \times v^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + \cdots u_n \times v_n.$$

Phép nhân hai ma trận:
Tích vô hướng của hai véc tơ có thể được mở rộng sang tích của hai ma trận A và B bằng cách lấy tích vô hướng của từng véc tơ dòng của A với mỗi véc tơ cột của B. Ở đây chúng ta cần điều kiện số hàng của ma trận B phải bằng số cột của ma trận A và chúng ta sẽ biểu diễn các tích vô hướng nhận được thành một ma trận.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -13 & 12 \end{bmatrix}.$$

Một cách tổng quát:

Định nghĩa 2.6. *Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{n\times k}$. Khi đó tích của hai ma trận A và B là một ma trận, ký hiệu là $C = AB = [c_{ij}]_{m\times k}$ có cấp $m \times k$, với các phần tử*

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j},\ \ i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, k.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -1 & -14 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Chú ý: phần tử c_{ij} của C là tích của véc tơ hàng thứ i của ma trận A và véc tơ cột thứ j của ma trận B:

$$c_{ij} = a_i b_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Chú ý: $A\theta = \theta$, $\theta A = \theta$, $AI_n = I_n A = A$ nếu A vuông cấp n, phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.

Tính chất 2.7. *Phép nhân ma trận có các tính chất sau*

(1) $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$. *(Tính chất phân phối)*

(2) $(kA)B = k(AB) = A(kB)$, *và được viết là* kAB.

(3) $(AB)C = A(BC)$, *và được viết là* ABC. *(Tính chất kết hợp)*

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Chú ý (xử lý song song của tích trên máy tính): một cách biểu diễn khác của tích ma trận thường được sử dụng bởi các thuật toán tiêu chuẩn, ở đó người ta có thể coi tích AB như là tích của A với từng véc tơ cột của B:

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_k \end{bmatrix}$$

Ví dụ: ma trận tích

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 34 \\ -17 & 8 & 23 \end{bmatrix},$$

có các cột được tạo thành bởi

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

2.3 Một số ứng dụng của các phép toán ma trận

2.3.1 Sản xuất máy tính: ứng dụng phép nhân ma trận

Công ty Supercomp Ltd sản xuất hai mẫu máy tính PC1086 và PC1186. Ma trận A thể hiện chi phí mỗi máy tính (tính bằng nghìn đô la) và B là số liệu sản xuất của năm 2010 (theo bội số của 10.000 chiếc.) Tìm một ma trận C để hiển thị cho các cổ đông biết chi phí mỗi quý (tính bằng triệu đô la) về nguyên liệu, lao động và các khoản khác.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{PC1086} & \text{PC1186} \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 1.2 & 1.6 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Phần cứng} \\ \text{Nhân công} \\ \text{Chi phí khác} \end{array} \end{array}
\qquad
\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{Quý} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{PC1086} \\ \text{PC1186} \end{array} \end{array}$$

Giải:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \textbf{Quý} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \\ \mathbf{C} = \mathbf{AB} = & \begin{bmatrix} 13.2 & 12.8 & 13.6 & 15.6 \\ 3.3 & 3.2 & 3.4 & 3.9 \\ 5.1 & 5.2 & 5.4 & 6.3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Phần cứng} \\ \text{Nhân công} \\ \text{Chi phí khác} \end{array} \end{array}$$

2.3.2 Mật mã

Ý tưởng: tương ứng chuyển dữ liệu cần mã hóa thành một ma trận số A. Nhân bên phải (hoặc trái) ma trận A với một ma trận khả nghịch bất kỳ B (phù hợp về cấp, được gọi là chìa khóa) được một ma trận C

$$AB = C,$$

và C chính là dữ liệu đã được mã hóa.

Muốn giải mã dữ liệu ban đầu là ma trận A cần biết ma trận chìa khóa B và khi đó

$$A = CB^{-1}.$$

Ví dụ: chúng ta tương ứng mỗi chữ cái với một số tự nhiên là thứ tự của chúng trong bảng chữ cái và các ký tự trống bởi số 0. Khi đó một câu sẽ tương ứng với một dãy số, và chúng ta sẽ chia dãy số này vào các hàng khác nhau để một ma trận, các phần tử còn thiếu của ma trận chúng ta điền số 0. Khi đó ta được một ma trận chưa mã hóa, gọi là ma trận A.

3 Định thức của ma trận

3.1 Định nghĩa định thức ma trận

Một định thức cấp n tương ứng với một ma trận vuông $A = [a_{ij}]$ cấp n, ký hiệu là $det(A)$ hoặc $\mid A \mid$, được định nghĩa quy nạp theo $n = 1, 2, \ldots.$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Định thức được định nghĩa bằng quy nạp như sau.

- Khi $n = 1$, $A = [a_{11}]$ thì $D = det(A) = a_{11}$.

- Với $n \geq 2$: trước hết ta gọi định gọi định thức con tương ứng với phần tử a_{ij} là định thức cấp $(n-1)$ của ma trận con thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j, ký hiệu là M_{ij}. Khi đó, đặt

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \tag{3.1}$$

và được gọi là **phần bù đại số** (cofactor) của phần tử a_{ij} trong định thức. Định nghĩa định thức cấp n bởi

$$D = \mid A \mid = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.$$

Ví dụ: cho $A = [5]$ và $B = [-4]$ thì $det(A) = 5$, $det(B) = -4$.

Ví dụ: cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(n = 2)$ thì $det(A) = ad - bc$.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \times 4 - (-1) \times 5 = 7$.

Ví dụ:

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= (-2) \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times (-2) - 3 \times (-8) + 4 \times (-6) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Chú ý: dấu đằng trước M_{ij} của các phần bù đại số A_{ij} tuân theo bảng sau, ví dụ với $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Quy tắc tính định thức như trong định nghĩa trên được gọi là khai triển định thức theo hàng 1. Tuy vậy định thức cũng có thể được cho bởi khai triển theo một hàng hoặc một cột bất kỳ.

Định lý 3.1. *Ta có thể khai triển một định thức theo một hàng hoặc một cột bất kỳ,*

$$D = \mid A \mid = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \ (\textit{khai triển theo hàng } i)$$

$$D = \mid A \mid = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \ (\textit{khai triển theo cột } j)$$

Chứng minh. Chứng minh định lý này tham khảo phụ lục A-81 trang 1221. □

Nhận xét: nếu ma trận có một hàng hoặc một cột toàn số không thì định thức của nó bằng không.

3.2 Các tính chất chung về định thức

Định lý 3.2. *Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận ban đầu:*

$$| A^T |=| A | .$$

⇒ Do đó một tính chất nào đó về định thức đúng theo hàng thì cũng đúng theo cột.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh định lý bằng quy nạp.

Rõ rành khẳng định của định lý đúng với $n = 1$ và $n = 2$:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \text{ và } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Giả sử giả thiết quy nạp khẳng định đúng với các định thức đến cấp $(n - 1)$. Khi đó chúng ta dễ dàng thấy khẳng định của định lý cũng đúng với định thức cấp n vì khai triển của $| A |$ theo hàng i (bất kỳ) và khai triển của $| A^T |$ theo cột i sẽ dẫn đến các định thức con cấp $(n - 1)$ của các ma trận con là chuyển vị của nhau nên bằng nhau theo giả thiết quy nạp.

□

Từ định nghĩa định thức, Định lý 3.1 và Định lý 3.2 chúng ta có ngay các tính chất sau (bằng cách khai triển theo hàng hoặc cột được xét).

Tính chất 3.3. *Nhân một hàng (hoặc một cột) với một hằng số k thì giá trị định thức cũng được nhân với k.*

⇒ Có thể đưa nhân tử chung của một hàng hoặc một cột ra ngoài định thức.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Tính chất 3.4. *Nếu một hàng (hoặc một cột) của định thức là tổng của hai hàng (hoặc hai cột) thì định thức bằng tổng của hai định thức tương ứng với mỗi hàng* *(cột) đó. (Chú thích: các hàng hoặc cột khác giữ nguyên)*

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k^{(1)} + A_k^{(2)} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k^{(1)} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k^{(2)} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix},$$

với A_i ký hiệu các hàng của định thức.

Định lý 3.5. *Với định thức cấp lớn hơn hoặc bằng 2, nếu đổi chỗ hai dòng hoặc hai cột thì định thức đổi dấu.*

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh định lý bằng quy nạp.

Rõ rành khẳng định của định lý đúng với $n = 2$, vì

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \text{ còn } \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad.$$

Giả sử giả thiết quy nạp khẳng định đúng với các định thức đến cấp $(n-1)$, ta sẽ chứng tỏ khẳng định cũng đúng với định thức cấp n.

Cho D là một định thức cấp n của ma trận A và E là thu được từ D bằng cách đổi chỗ hai hàng nào đó, ví dụ k và l. Khai triển D và E theo một hàng khác hai hàng đó, giả sử đó là hàng i, với $i \neq k$ và $i \neq k$, ta được

$$D = \mid A \mid = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad E = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} N_{ij}.$$

Chúng ta chú ý rằng các định thức con N_{ij} có cấp $(n-1)$, thu được từ M_{ij} bằng cách đổi chỗ hai hàng như ở trên (chúng phải chứa hai hàng đó vì chúng ta vừa khai triển định thức theo một hàng khác). Theo giả thiết quy nạp ta có $N_{ij} = -M_{ij}$ và từ đó suy ra ngay $E = -D$. □

Từ định lý trên, kết hợp với các Tính chất 3.3 và 3.4, chúng ta có ngay các hệ quả sau.

Hệ quả 3.6. *Định thức có hai hàng hoặc hai cột giống hệt nhau thì bằng* 0.

Hệ quả 3.7. *Định thức có hai hàng hoặc hai cột tỷ lệ thì bằng* 0.

Hệ quả 3.8. *Định thức không thay đổi khi cộng vào một hàng (hoặc cột) bội số của các hàng (hoặc cột) khác.*

Định lý 3.9. *Định thức của tích các ma trận bằng tích các định thức:*

$$det(AB) = det(A)det(B),$$

với A và B là các ma trận vuông cấp n.

Một số chú ý:

(1) Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính, đặc biệt $\mid I_n \mid = 1$. (khai triển liên tiếp theo cột 1 hoặc dòng cuối)

(2) Do việc tính định thức theo định nghĩa thường khá dài nên người ta có thể sử dụng các phép biến đổi cơ bản như trong Định lý 3.5, Tính chất 3.3, và Hệ quả 3.8 để biến đổi về định thức của ma trận tam giác (hoặc thậm chí ma trận chéo):

   (a) Đổi chỗ hai hàng hoặc hai cột của định thức;

   (b) Nhân một hàng hoặc một cột với một số khác 0; hoặc tương tự đưa nhân tử chung của một hàng hoặc một cột ra ngoài định thức;

   (c) Cộng vào một hàng (cột) bội số của một hàng (cột) khác.

Ví dụ: tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

4 Hạng của ma trận

Định nghĩa 4.1. *Cho A là ma trận cấp $m \times n$. Hạng của ma trận A là cấp cao nhất (có thể) của một định thức vuông con khác không của A, ký hiệu là $r(A)$.*

Như vậy nếu $r(A) = r$ thì A có ít nhất một định thức con cấp r khác không và mọi định thức con cấp lớn hơn r của A (nếu có) đều bằng không.

Ví dụ: hạng của ma trận sau bằng 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

vì có ít nhất một định thức con cấp 2 khác 0, giả sử $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, và hơn nữa mọi định thức con cấp 3 đều bằng 0 (với chú ý hàng 3 bằng tổng của hai hàng trên).

Chú ý:

(1) Từ định nghĩa trên ta thấy ngay nếu ma trận A vuông cấp n thì $r(A) = n$ khi và chỉ khi $det(A) \neq 0$.

(2) Từ định nghĩa của hạng và Định lý 3.5 ta thấy ngay $r(A^T) = r(A)$.

Định nghĩa 4.2 (Ma trận bậc thang)**.** *Trước hết chúng ta goi một dòng của ma trận A được gọi là hàng không nếu nó chỉ gồm những phần tử 0. Ngược lại, nếu hàng của ma trận A có ít nhất một phần tử khác 0 thì nó được gọi là hàng khác không.*

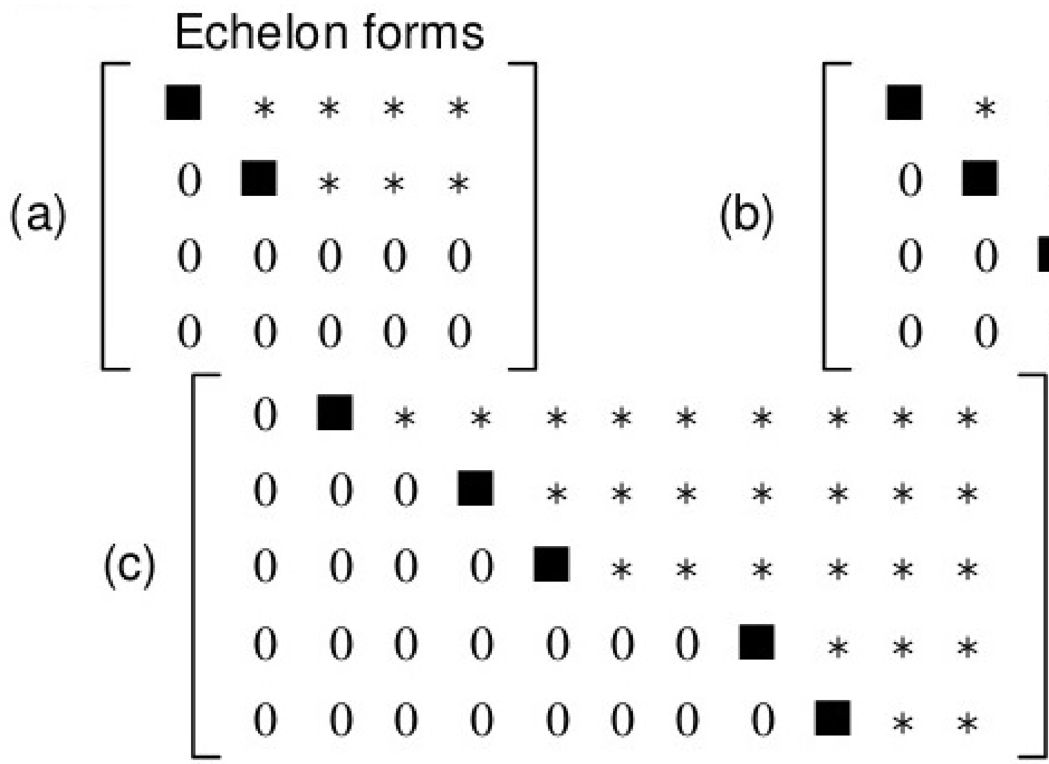
Ma trận A khác không cấp $m \times n$ được gọi là ma trận bậc thang (row-echelon matrix), nếu nó có các đặc điểm sau đây:

- Hoặc ma trận không có hàng không hoặc các hàng không luôn nằm phía dưới các hàng khác không.

- Nếu ma trận có ít nhất hai hàng khác không thì đối với hai hàng khác không bất kỳ của nó, phần tử khác không đầu tiên của hàng dưới luôn nằm ở bên phải cột chứa phần tử cơ sở của hàng trên.

Ví dụ: các ma trận sau là các ma trận dạng bậc thang:

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 0 & -14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Chú ý: hạng ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó. Ở đây chúng ta quy ước một hàng của ma trận được gọi là bằng không nếu mọi phần tử của hàng đó đều bằng 0. Chúng ta có thể lấy ma trận con có cỡ lớn nhất có địnhthức khác không gồm các phần tử nằm trên đường chéo chính là các phần tử khác không đầu tiên của các hàng khác không đó.

Do các phép biến đổi cơ bản trên hàng (hoặc cột) không làm thay đổi tính bằng không hay khác không của một định thức nên chúng ta có ngay kết quả sau:

Định lý 4.3. *Các phép biến đổi cơ bản trên hàng (hoặc cột) không làm thay đổi hạng của ma trận.*

Thông thường việc kiểm tra các định thức con để tìm hạng có thể rất dài. Tuy vậy với chú ý và định lý ở trên, để tìm hạng của ma trận chúng ta có thể thực hiện các phép đổi sơ cấp trên hàng (hoặc cột) của ma trận để đưa nó về dạng bậc thang mà không làm thay đổi hạng.

Ví dụ: tìm hạng của ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải: ta sẽ biến đổi ma trận trên về dạng bậc thang như sau.
Thực hiện phép toán trên hàng 2H1+H2, -3H1+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -8 & -10 \end{bmatrix},$$

và sau đó H2+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó hạng của ma trận trên bằng 2.

Ví dụ: tìm hạng của các ma trận sau bằng

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & -5 \\ -3 & 5 & 4 & 6 & -3 \\ 4 & -9 & -17 & -8 & 32 \end{bmatrix}$$

5 Ma trận nghịch đảo

Trong phần này chúng ta chỉ xét các ma trận vuông.

Định nghĩa 5.1. *Ma trận A vuông cấp n được gọi là có nghịch đảo (hoặc khả nghịch, hoặc không suy biến) nếu có một ma trận B vuông cấp n sao cho*

$$AB = BA = I_n,$$

trong đó I_n là ma trận đơn vị cấp n. Khi đó ma trận B như trên là duy nhất và được gọi là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu là $B = A^{-1}$.

Chú ý: chứng minh tính duy nhất của ma trận nghịch đảo coi như một bài tập.

Ví dụ: tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Giải: Theo định nghĩa, chúng ta tìm ma trận $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sao cho $AB = BA = I_2$ nên

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Đẳng thức trên dẫn đến hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + 5c & = 1 \\ 1a + 3c & = 0 \\ 2b + 5d & = 0 \\ 1b + 3d & = 1 \end{cases}$$

và tìm được $a = 3, c = -1, b = -5, d = 2$.

Từ đó ma trận nghịch đảo của A là $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}$. (chúng ta có thể kiểm lại rằng $AB = BA = I$)

Một vài tính chất: (chứng minh coi như bài tập)

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(iii) Nếu A và B khả nghịch thì $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Người ta định nghĩa ma trận phụ hợp của ma trận vuông $A = [a_{ij}]$, ký hiệu là A^*, là ma trận chuyển vị của ma trận các phần bù đại số của các phân tử của A:

$$A^* = [A_{ij}]^T,$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}, đã được định nghĩa ở (3.1).

Định lý 5.2. *Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $det(A) \neq 0$. Khi đó*

(1)
$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

(2) Ma trận nghịch đảo A^{-1} cho bởi công thức
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*. \tag{5.2}$$

Đặc biệt, nghich đảo của ma trận cấp 2
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ là ma trận } A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Ký hiệu vế phải của 5.2 bởi B. Ta sẽ chứng tỏ $BA := G = I_n$. Thật vậy các phần tử của G là
$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{ki}}{det(A)} a_{kj} = \frac{1}{det(A)} (a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni}).$$

Với $i = j$ thì phần trong ngoăc của đẳng thức trên chính là khai triển định thức của A theo cột thứ i, do đó $g_{ii} = 1$.

Với $i \neq j$ thì phần trong ngoăc của đẳng thức trên bằng không vì nó chính là khai triển định thức theo cột thứ i của ma trận có hai cột giống hệt nhau: ma trận có được từ A bằng cách theo cột thứ i của A bằng cột thứ j. Từ đó $g_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$.

□

Ví dụ 1: tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

Giải: Do $det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 3 \neq 0$ nên ma trận A khả nghịch. Ma trận nghịch đảo của A là
$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & -5/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2: tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Giải: Do $det(B) = 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-1) = 0$ nên ma trận B không khả nghịch.

Ví dụ 3: tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Giải:

$det(A) = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 2 + 2 \times 5 + 2 \times 1 = 10 \neq 0$, nên ma trận A khả nghịch.

Các phần bù đại số của các phần tử của A là:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10, A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Ma trận phụ hợp của A là

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 12 & -4 \\ -5 & -10 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Từ đó, ma trận nghich đảo của A là

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^* = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 12 & -4 \\ -5 & -10 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/5 & 6/5 & -2/5 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/10 & -2/5 & 3/10 \end{bmatrix}.$$

6 Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ: hệ hai phương trình tuyến tính của ba ẩn số

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = -3 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = 12 \end{cases}$$

Nếu thay $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$ vào hai phương trình trên thì thỏa mãn và do đó người ta gọi $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$ hoặc bộ ba số $(1, 1, 2)$ là một nghiệm của phương trình.

Một cách tổng quát, một hệ gồm m phương trình tuyến tính của n ẩn số $x_1, x_2, \cdots, x_n$ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}, \tag{6.3}$$

trong đó a_{ij} là các hằng số cho trước được gọi là các hệ số của hệ, các b_i ở vế phải của các phương trình cũng là các hằng số và được gọi là các hằng số tự do.

Nếu tất cả các b_i đều bằng không thì hệ phương trình được gọi là thuần nhất, ngược lại nếu ít nhất một trong các hệ số tự do $b_i \neq 0$ thì hệ được gọi là hệ không thuần nhất.

Một nghiệm của hệ (6.3) là một tập các số $x_1, x_2, \cdots, x_n$ thỏa mãn m phương trình của hệ. Một véc tơ nghiệm của hệ là một véc tơ x mà các thành phần của nó tạo thành một nghiệm của hệ:

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính:

Đặt $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và được gọi là ma trận hệ số của hệ, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Khi đó hệ phương trình (6.3) được viết bởi chỉ một phương trình véc tơ dạng ma trận

$$Ax = b.$$

Người ta cũng ký hiệu $A^{bs} = [A \mid b]$ và gọi là ma trận bổ sung của hệ phương trình (6.3).

Ví dụ: hệ phương trình trong ví dụ trên được biểu diễn dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

6.1 Hệ Cramer

Hệ Cramer: hệ (6.3) gọi là hệ Cramer nếu A là ma trận vuông ($m = n$) và $det(A) \neq 0$. Khi đó hệ Cramer có nghiệm duy nhất

$$x = A^{-1}b.$$

Hơn nữa

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}, j = 1, 2, \cdots, n,$$

trong đó A_j là ma trận có được từ A bằng cách thay cột thứ j bằng cột vế phải.

Ví dụ 1: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y & = -3 \\ 5x + 7y & = 6 \end{cases}$$

Định thức của ma trận hệ số là

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

nên hệ phương trình là một hệ Cramer.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -27, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 27.$$

Do đó nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x & = \frac{-27}{9} = -3 \\ y & = \frac{27}{9} = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 2: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 1 \\ x + 2y + z &= 8 \\ 3x - y - z &= -2 \end{cases}$$

Định thức của ma trận hệ số là $\det(A) = 9$ và các định thức $\det(A_1) = 9$, $\det(A_2) = 9$, $\det(A_3) = 27$. Từ đó nghiệm của hệ phương trình là $x = 1$, $y = 1$ và $z = 3$.

6.2 Phương pháp khử Gauss

Chúng ta xét hệ phương trình tuyến tính dạng tổng quát dạng (6.3).

Chúng ta có nhận xét rằng các phép biến đổi "sơ cấp" sau với hàng là các phép biến đổi tương đương hệ phương trình:

- Đổi chỗ hai hàng;
- Nhân, hoặc chia một hàng với một số khác không;
- Nhân một hàng với 1 số rồi cộng vào một hàng khác.

Chúng ta lấy ví dụ xét một hệ phương trình đơn giản

$$\begin{cases} 2x + y &= -3 \\ 5x + 7y &= 6 \end{cases}.$$

Chúng ta sẽ sử dụng các phép biến đổi trên để đưa ra một phương trình hệ quả chỉ chứa một biến, ví dụ thực hiện phép toán -5 PT (1) + 2 PT (2) ta được:

$$9y = 27.$$

Từ đó hệ ban đầu tương đương với hệ

$$\begin{cases} 2x + y &= -3 \\ \quad\;\; 9y &= 27, \end{cases}$$

mà từ phương trình thứ hai chúng ta có thể tìm được ngay $y = 3$. Từ đó thay giá trị $y = 3$ vào phương trình đầu ta tìm được $x = -3$.

Việc biến đổi hệ phương trình như trên chính là chúng ta đã sử dụng phương pháp khử và việc biến đổi thực chất xảy ra đối với các hệ số của các biến và các giá trị ở vế phải. Trong ví dụ trên ma trận tương ứng với hệ phương trình sau khi biến đổi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 27 \end{bmatrix},$$

là một ma trận dạng bậc thang.

Phương pháp khử Gauss: xét hệ phương trình (6.3). Đặt $A^{bs} = [A \mid b]$, gọi là ma trận bổ sung của hệ. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss chính là biến đổi tương đương hệ phương trình bằng cách sử dụng các phép biến đổi sơ cấp với hàng để đưa ma trận A^{bs} về một ma trận dạng bậc thang.

Định lý 6.1. *Hệ phương trình* (6.3) *có nghiệm khi và chỉ khi*

$$r(A) = r(A^{bs}) := r.$$

Hơn nữa:

(1) Nếu $r =$ số ẩn $= n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

(2) Nếu $r <$ số ẩn $= n$ thì hệ có vô số nghiệm: ta có thể chọn r ẩn chính và biểu diễn chúng theo $n - r$ ẩn (phụ) nhận giá trị bất kỳ còn lại.

Chú ý: hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = r < n$.

Ví dụ 1: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 4 \\ -2x + y + z & = 0 \\ 3x - 2y + 5z & = 6 \end{cases}$$

Giải: Ma trận bổ sung của hệ phương trình là

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ta sẽ đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang như sau.

- Thực hiện phép toán 2H1+H2, -3H1+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

- Thực hiện phép toán 5H2+3H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 22 & 22 \end{bmatrix}$$

Do đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 4 \\ \quad 3y + 5z & = 8 \\ \qquad 22z & = 22 \end{cases}$$

Từ đó dễ dàng tìm được nghiệm của hệ phương trình là $z = 1$, $y = 1$ và $x = 1$.

Ví dụ 2: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 4 \\ -2x + y + z & = 0 \\ x + 4y + 7z & = 12 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 3t & = 4, \\ -2x + 3y - z + 2t & = 2, \\ 3x - 5y + 3z + t & = 2. \end{cases}$$

Giải: Ma trận bổ sung của hệ phương trình là

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta sẽ đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang như sau.

- Thực hiện phép toán2H1+H2, -3H1+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

- Thực hiện phép toán H2+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ trở thành

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 3t & = 4 \\ -y + 3z + 8t & = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y & = 4 - 2z - 3t \\ y & = 3z + 8t - 10 \end{cases}$$

Từ đó giải ra

$$\begin{cases} x & = 4z + 13t - 16 \\ y & = 3z + 8t - 10 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm dạng

$$\begin{cases} x & = 4z + 13t - 16, \\ y & = 3z + 8t - 10 \\ y, z \in \mathbb{R} & \text{tùy ý.} \end{cases}$$

6.3 Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss- Jordan

Việc tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận A vuông cấp n khả nghịch chính là tìm một ma trận vuông X cấp n sao cho $AX = I_n$.

Điều đó cũng đồng nghĩa với việc giải đồng thời n hệ phương trình tuyến tính có dạng

$$AX_i = e_i, i = 1, 2, \cdots n,$$

trong đó X_i ký hiệu các cột của X, e_i ký hiệu các cột của ma trận đơn vị I_n. Từ đó chúng ta có thể áp dụng phương pháp khử Gauss để giải các hệ phương trình trên. Tuy nhiên do các hệ này có cùng ma trận hệ số là A nên chúng ta có thể tiến hành phương pháp khử cho đồng thời n hệ phương trình này để đưa ma trận hệ số về dạng ma trận đơn vị,

$$\begin{aligned} & [A \quad | \quad I_n] \\ \Rightarrow & [I_n \quad | \quad K] \end{aligned}$$

Khi đó ma trận K ở bên vế phải như trên là ma trận nghiệm X và do đó chính là ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Ví dụ, p.303: sử dụng phương pháp Gauss- Jordan tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Đầu tiên thực hiện khử Gauss đối với ma trận $[A \mid I]$:

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Row 2} + 3\ \text{Row 1} \\ \text{Row 3} - \text{Row 1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{Row 3} - \text{Row 2} \end{array}$$

Tiếp túc biến đổi Gauss–Jordan để đưa các phần tử nằm phía trên đường chéo chính của ma trận phía bên trái về các số 0:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\text{Row } 1 \\ 0.5 \text{ Row } 2 \\ -0.2 \text{ Row } 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Row } 1 + 2 \text{ Row } 3 \\ \text{Row } 2 - 3.5 \text{ Row } 3 \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Row } 1 + \text{Row } 2 \\ \\ \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,2 & 0,3 \\ -1,3 & -0,2 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}.$$

Chúng ta có thể kiểm tra lại:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7 Giới thiệu phần mềm tính toán

Giới thiệu một số ứng dụng từ các phần mềm tính toán như Mathematica, Maple... để thực hiện các phép toán với ma trận, giải hệ phương trình tuyến tính.

Tài liệu

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, (10th Edition, 2011), Nhà xuất bản Wiley, p. 256-309.

[2] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp Tập I* (2014), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[3] Strang Gilbert, *Introduction to Linear Algebra* (5th Edition, 2016), Wellesley-Cambridge Press.

Chương 2. Không gian vectơ và ánh xạ tuyến tính

Bộ môn Toán- Khoa KHCB- PKA

Ngày 25 tháng 11 năm 2020

Tóm tắt nội dung

Chương 2 trình bày các khái niệm cơ bản về không gian véc tơ, giới thiệu sơ lược về ánh xạ tuyến tính, không gian Ơclit và không gian Unita.

Mục lục

1 Định nghĩa và ví dụ về không gian véc tơ

Định nghĩa 1.1. *Một tập hợp $E \neq \emptyset$ cùng với hai phép toán trên E: phép cộng, ký hiệu $(+)$, và nhân vô hướng, ký hiệu là $(.)$, được gọi là một không gian véc tơ thực trên $\mathbb{R}$ (hoặc phức trên $\mathbb{C}$) nếu các tiên đề sau được thỏa mãn:*

- *Đối với phép cộng: với mọi phần tử* $u, v, w \in E$

  (1) $u + v \in E$*;*

  (2) Tính giao hoán: $u + v = v + u$*;*

  (3) Tính kết hợp: $(u + v) + w = u + (v + w)$*;*

  (4) Có phần tử không: có một phần tử $\theta \in E$ *sao cho* $u + \theta = \theta + u = u$*;*

  (5) Có đối xứng: có $u' \in E$ *sao cho* $u + u' = u' + u = \theta$*,* u' *được ký hiệu là* $-u$*;*

- *Đối với phép nhân vô hướng: với mọi số* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(hoặc* $\mathbb{C}$*)*

  (1') $\alpha u \in E$*;*

  (2') Tính phân phối: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$*;*

  (3') Tính phân phối: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$*;*

  (4') Tính kết hợp: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$*;*

  (5') $1u = u$*;*

Khi đó mỗi phần tử của E *còn được gọi là một véc tơ.*

Chú ý: các nội dung trong phần này được trình bày cho trường hợp không gian véc tơ thực, nhưng cũng dễ dàng được mở rộng tương tự cho không gian véc tơ phức.

Một số ví dụ về KGVT

(1) Không gian véc tơ thực : với mỗi số n nguyên dương, ta định nghĩa tập hợp

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) |\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Tập $\mathbb{R}^n$ được trang bị phép cộng hai bộ số và nhân vô hướng bởi một số thực thông thường là một không gian véc tơ thực. Khi đó mỗi véc tơ của $\mathbb{R}^n$ là một bộ số $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ và nó có thể được biểu diễn dưới dạng véc tơ dòng hoặc véc tơ cột tùy theo hoàn cảnh.

Ví dụ: cho các véc tơ

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(2) Không gian véc tơ các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$, ký hiệu $Mat_{(m,n)}(\mathbb{R})$, được trang bị phép cộng hai ma trận và phép nhân vô hướng với ma trận.

(3) Không gian véc tơ các đa thức bậc không quá n, ký hiệu $P_n[x]$, được trang bị phép cộng hai đa thức và phép nhân vô hướng (một số) với một đa thức thông thường.

Tương tự thì tập tất cả các đa thức (bậc tùy ý) $P[x]$ cũng là một không gian véc tơ.

Một số tính chất

1) Véc tơ không và véc tơ đối là duy nhất

2) $0u = \theta$ với mọi u

3) $\alpha\theta = \theta$ với mọi α

4) $(-1)u = -u$

5) Nếu $\alpha u = \theta$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \theta$. Từ đó,

nếu $\alpha u = \beta u$, $u \neq \theta$ thì $\alpha = \beta$,

nếu $\alpha u = \alpha v$, $\alpha \neq 0$ thì $u = \theta$.

2 Độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ véc tơ

2.1 Định nghĩa

Giả sử $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một hệ véc tơ của không gian véc tơ E. Ta gọi một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của U là một véc tơ dạng

$$u = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n,$$

trong đó k_i là các hằng số.

Định nghĩa 2.1. *Hệ véc tơ* $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *được gọi là độc lập tuyến tính nếu giả sử*

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n = \theta, \text{ với các } k_i \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

thì

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

Hệ không độc lập tuyến tính được gọi là phụ thuộc tuyến tính và khi đó phương trình (2.1) đúng với ít nhất một trong các hệ số $k_i \neq 0$.

Ví dụ 1: hệ ba véc tơ

$$u_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$u_2 = \begin{bmatrix} -6 & 42 & 24 & 54 \end{bmatrix}$$
$$u_3 = \begin{bmatrix} 21 & -21 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

là phụ thuộc tuyến tính vì $6u_1 - \dfrac{1}{2}u_2 - u_3 = 0$.

Ví dụ 2: Hệ hai véc tơ $\{((1,2), (-3,4)\}$ là độc lập tuyến tính.

Thật vậy: giả sử $k_1(1,2) + k_2(-3,4) = \theta$ thì

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Phương trình trên dẫn đến hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 - 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $k_1 = k_2 = 0$ vì là hệ Cramer thuần nhất có định thức $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$.

Ví dụ 2: Hệ hai véc tơ $\{((1,2), (-3,4)\}$ là độc lập tuyến tính.

Một số tính chất:

(1) Mọi hệ con của một hệ véc tơ độc lập tuyến tính đều độc lập tuyến tính. Từ đó, mọi hệ chứa một hệ con phụ thuộc tuyến tính cũng phụ thuộc tuyến tính. Đặc biệt mọi hệ chứa véc tơ θ đều phụ thuộc tuyến tính.

(2) Theo định nghĩa trên nếu hệ độc lập thì giữa các véc tơ không có quan hệ tuyến tính. Ngược lại, hệ U phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có ít nhất một véc tơ của hệ được biểu diễn tuyến tính theo các véc tơ khác.

→ ít nhất .....

Thật vậy, giả sử phương trình (2.1) đúng với $k_1 \neq 0$, khi đó

gsử $k_1 \neq 0$

$$k_1u_1 = -k_2u_2 - \cdots - k_nu_n \Rightarrow u_1 = -\frac{k_2}{k_1}u_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_1}u_n.$$

(3) Một véc tơ biểu diễn tuyến tính theo một hệ độc lập tuyến tính thì cách biểu diễn là duy nhất. Điều đó có nghĩa là nếu hệ U như trên là độc lập tuyến tính và giả sử $u = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu$ thì các hệ số k_i là duy nhất.

2.2 Hạng của hệ véc tơ

Định lý 2.2. *Cho $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là hai hệ độc lập tuyến tính của E. Nếu mọi véc tơ của hệ U đều biểu thị tuyến tính theo các véc tơ của hệ V thì $n \leq m$.*

Phần chứng minh định lý trên được đưa ra ở cuối mục này.

Định nghĩa 2.3. *Hạng của một hệ véc tơ $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ trong không gian véc tơ E là số véc tơ độc lập tuyến tính tối đại có trong U, ký hiệu là $r(U)$.*

Chú ý:

1) Giả sử U_1 là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của U, khi đó mọi véc tơ trong U biểu diễn tuyến tính theo U_1.

2) Từ chú ý 1) và định lý 2.2 ở trên chúng ta chứng minh được mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của U đều có cùng số véc tơ và do đó khái niệm hạng của hệ véc tơ U không phụ thuộc vào hệ con độc lập tuyến tính tối đại của U.

3) Hiển nhiên từ định nghĩa thì hệ U gồm n véc tơ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $r(U) = n$.

Ví dụ: tìm hạng của các hệ véc tơ sau

$$U = \{(0,1), (1,0), (-1,2)\}$$

$$V = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,1,2),(2,1,3)\}$$

$$W = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,2,2),(1,1,1)\}$$

Đáp số: $r(U) = 2$, $r(V) = 3$, $r(W) = 2$.

Chứng minh. (Chứng minh định lý 2.2) Giả sử phản chứng $n > m$.

Do giả thiết các véc tơ của hệ U đều biểu thị tuyến tính theo các véc tơ của hệ V nên $u_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i,\ j = \overline{1,n}$.

Do hệ U độc lập tuyến tính nên giả sử

$$\sum_{j=1}^{n} k_j u_j = \theta \Rightarrow \forall k_j = 0.$$

Thay các biểu diễn tuyến tính của các véc tơ u_i vào phương trình trên ta được

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = \theta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j) v_i = \theta.$$

Mặt khác do hệ V cũng độc lập tuyến tính nên từ phương trình trên phải suy ra

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j = 0,\ i = \overline{1,m}$$

Đó là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm m phương trình và n ẩn số nên nếu giả thiết phản chứng $m < n$ thì hệ phương trình trên có nghiệm không tầm thường, tức là tồn tại ít nhất một $k_j \neq 0$ thỏa mãn. Như vậy dẫn đến mâu thuẫn và do đó $n \leq m$. □

3 Không gian véc tơ con

Định nghĩa 3.1. *Cho E là một không gian véc tơ. Một tập con $S \neq \emptyset$ được gọi là không gian véc tơ con của E nếu S cùng với hai phép toán cộng và nhân vô hướng của E cũng lập thành một không gian véc tơ.*

Ví dụ : E, $\{\theta\}$ là các không gian véc tơ con (tầm thường) của E.

Chú ý: mọi không gian véc tơ con đều phải chứa véc tơ không.

Định lý 3.2. *Tập con $S \neq \emptyset$ là không gian véc tơ con của không gian véc tơ thực (phức) E khi và chỉ khi:*

(1) $u + v \in S$ với mọi $u, v \in S$

(2) $ku \in S$ với mọi $u \in S$ và mọi $k \in \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$).

Từ định lý trên suy ra để chứng minh một tập hợp là không gian véc tơ con của một không gian véc tơ chúng ta chỉ cần chứng minh nó khác rỗng (tức là chứa ít nhất một véc tơ, ví dụ phải chứa véc tơ không) và đóng kín với hai phép toán cộng véc tơ và nhân vô hướng.

Một số ví dụ

1) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

2) $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | -3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$ là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

3) Tập hợp các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $Ax = 0$.

Định lý 3.3. *(Tùy chọn) Giả sử S_1 và S_2 là hai không gian véc tơ con của không gian véc tơ E. Khi đó giao $S_1 \cap S_2$ và tổng $S_1 + S_2$ cũng là các không gian véc tơ con của E. Ở đây tổng $S_1 + S_2$ được định nghĩa bởi*

$$S_1 + S_2 = \{u + v \mid u \in S_1, v \in S_2\}.$$

Hơn nữa nếu $S_1 \cap S_2 = \{\theta\}$ thì tổng của S_1 và S_2 được gọi là tổng trực tiếp và được ký hiệu là $S_1 \oplus S_2$.

Chú ý:

1) $S_1 \cup S_2$ nói chung không phải không gian véc tơ con.

2) Chúng ta có thể chứng minh được $S_1 + S_2$ là không gian véc tơ con nhỏ nhất chứa cả S_1 và S_2, tức là chứa $S_1 \cup S_2$.

Không gian véc tơ con sinh bởi một hệ véc tơ

Định nghĩa 3.4. *Cho $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là một hệ véc tơ của không gian véc tơ E. Không gian véc tơ con sinh bởi hệ U được định nghĩa là không gian véc tơ con nhỏ nhất của E chứa mọi véc tơ của U, ký hiệu là $L(U)$ hoặc $Span(U)$.*

Hơn nữa có thể chứng minh không gian sinh này là tập hợp các tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của U nên nó còn được gọi là bao tuyến tính của U:

$$L(U) = \{k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_mu_m \mid k_i \in \mathbb{R}\}.$$

Nếu một không gian véc tơ con $S = L(U)$ thì người ta cũng nói rằng U là một hệ sinh của S.

Chú ý: thực tế $S = L(U)$ được sinh bởi một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của U (sau này gọi nó là một cơ sở của S).

4 Cơ sở và số chiều của không gian véc tơ

Định nghĩa 4.1. *Giả sử cho E là một không gian véc tơ. Một hệ $\mathcal{B}$ các véc tơ của E được gọi là một cơ sở của E nếu hệ $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính và mọi véc tơ của E đều có thể biểu diễn tuyến tính theo các véc tơ của hệ $\mathcal{B}$.*

Như vậy E được sinh bởi $\mathcal{B}$: $E = L(\mathcal{B})$. CM

Định nghĩa 4.2. *Nếu không gian véc tơ E có một cơ sở gồm n véc tơ thì mọi cơ sở khác của E cũng có n véc tơ. Số n được gọi là số chiều của E, ký hiệu $dim(E) = n$, và ta nói E là không gian véc tơ (hữu hạn) n chiều.*

Một số ví dụ:

1) $\mathbb{R}^n$ là không gian véc tơ n chiều. Nó có một cơ sở gồm n véc tơ được gọi là cơ sơ chính tắc, ví dụ với $n = 3$:

$$e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1).$$

2) $P_n[x]$ là không gian véc tơ $n + 1$ chiều.

3) $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ là không gian véc tơ $m \times n$ chiều.

Chú ý: nếu một không gian véc tơ E có một cơ sở gồm vô số véc tơ thì nó được gọi là không gian véc tơ vô hạn chiều. Ví dụ không gian véc tơ các đa thức $P[x]$ là không gian véc tơ vô hạn chiều, nó có một cơ sở chính tắc gồm vô hạn các véc tơ:

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}.$$

Mệnh đề 4.3. *Giả sử E là một không gian véc tơ n chiều. Khi đó:*

1) Mọi hệ có nhiều hơn $n+1$ véc tơ đều phụ thuộc tuyến tính. (Nói cách khác không gian véc tơ n chiều có tối đa n véc tơ độc lập tuyến tính).

2) Mọi hệ gồm n véc tơ độc lập tuyến tính là cơ sở của E (và ngược lại).

Ví dụ: chứng minh

1) $U = \{(-1,2),(2,3)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

2) $V = \{(-1,2,1),(2,3,1),(1,0,1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Mệnh đề 4.4. *Giả sử hệ U của không gian véc tơ E có m véc tơ và $S = L(U)$ là không gian con sinh bởi U. Khi đó nếu $r(U) = r$ $(r \leq m)$ thì*

(1) S là không gian véc tơ r chiều và một hệ con r véc tơ độc lập tuyến tính (tối đại) của U là một cơ sở của S.

(2) Mọi hệ sinh của S phải có tối thiểu r véc tơ.

Chú ý:

1) Nếu E là không gian véc tơ n chiều và $r(U) = n$ thì $E = L(U)$.

2) Có thể bổ sung vào một hệ véc tơ độc lập tuyến tính các véc tơ khác để được một cơ sở của không gian véc tơ. Như vậy một không gian véc tơ hữu hạn chiều luôn có cơ sở.

5 Tọa độ của véc tơ

5.1 Định nghĩa

Giả sử E là không gian véc tơ n chiều và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở. Khi đó mọi $u \in E$ được biểu diễn tuyến tính duy nhất theo các véc tơ của $\mathcal{B}$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n.$$

Khi đó bộ số và được ký hiệu $u_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$ được gọi là tọa độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Người ta cũng gọi ma trận cột, ký hiệu $[u]_{\mathcal{B}}$,

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

là tọa độ cột của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Một số ví dụ

(1) Tọa độ của véc tơ $u = (-1, 2, 4)$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

(2) Tìm tọa độ của $u = (-3, 4)$ trong cơ sở $U = \{(-1, 2), (2, 3)\}$.

(3) Tìm tọa độ $u = (3, 1, 2)$ trong cơ sở $V = \{(-1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, 0, 1)\}$.

5.2 Liên hệ giữa hạng của hệ véc tơ và hạng của ma trận

Giả sử E là không gian véc tơ n chiều và $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là một hệ véc tơ trong E.

Định lý 5.1. *Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở tùy ý của E. Lập ma trận A tạo bởi các tọa độ cột của các véc tơ của U trong cơ sở $\mathcal{B}$,*

$$A = ([u_1]_{\mathcal{B}}\ [u_2]_{\mathcal{B}} \cdots [u_m]_{\mathcal{B}}).$$

Khi đó ta có kết quả

$$r(U) = r(A).$$

Chú ý:

(1) Từ định lý trên để tìm hạng của hệ véc tơ U chúng ta có thể áp dụng phương pháp tìm hạng của ma trận đã biêt trước đây. Chúng ta nhắc lại rằng có thể sử dụng các phép biến đổi cơ bản trên hàng (hoặc cột) của A để đưa nó về ma trận dạng bậc thang.

(2) Nếu U gồm các véc tơ của $\mathbb{R}^n$ thì tọa độ của các véc tơ của U trong cơ sở chính tắc chính là các thành phần của các véc tơ, do đó chúng ta lập ma trận A gồm các cột là các tọa độ cột của các véc tơ của U. Hơn nữa do $r(A^T) = r(A)$ nên chúng ta có thể thao tác tính hạng đối với ma trận gồm các tọa độ cột hoặc dòng của U.

(3) Ngược lại, hạng của một ma trận A cũng chính là hạng của hệ véc tơ dòng hoặc hệ véc tơ cột của nó.

Ví dụ: tìm hạng của các hệ véc tơ sau

1) $U = \{(0,1),(1,0),(-1,2)\}$

2) $V = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,1,2),(2,1,3)\}$

3) $W = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,2,2),(1,1,1)\}$

5.3 Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở của một không gian véc tơ n chiều E. Cho $u \in E$ và giả sử u tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Hãy tìm mối liên hệ giữa tọa độ của u trong cơ sở cũ $[u]_{\mathcal{B}}$ và tọa độ trong cơ sở mới $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Chúng ta định nghĩa *ma trận chuyển cơ sở* từ $\mathcal{B}$ (cũ) sang cơ sở $\mathcal{B}'$ (mới) là ma trận có các cột là các tọa độ cột của các véc tơ của cơ sở (cũ) $\mathcal{B}$ trong cơ sở (mới) $\mathcal{B}'$,

$$P = ([u_1]_{\mathcal{B}'} \ [u_2]_{\mathcal{B}'} \cdots [u_n]_{\mathcal{B}'}).$$

Khi đó ta có liên hệ

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P[u]_{\mathcal{B}},$$

và ngược lại

$$[u]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[u]_{\mathcal{B}'}$$

với chú ý rằng ma trận chuyển cơ sở P là khả nghịch vì $r(P) = r(\mathcal{B}) = n$.

Bên cạnh đó, P^{-1} chính là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$.

Một số ví dụ tìm tọa độ của véc tơ

1) $u = (-3,4)$ trong cơ sở chính tắc và trong cơ sở $U = \{(-1,2),(2,3)\}$.

2) Tìm tọa độ của $u = (-3,1,2)$ trong các cơ sở sau

$$U = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\},$$
$$V = \{(-1,2,1),(2,3,1),(1,-1,1)\}.$$

3) Chứng minh hệ các ma trận sau là một cơ sở của $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm tọa độ của $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ trong cơ sở trên.

6 Giới thiệu về ánh xạ tuyến tính

6.1 Định nghĩa

Định nghĩa 6.1. *Cho E và F là hai không gian véc tơ thực (hoặc phức). Một ánh xạ $f : E \to F$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn:*

(1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in E$;

(2) $f(ku) = kf(u)$ với mọi $u \in E$ và mọi $k \in \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$).

Một số ví dụ: kiểm tra các ánh xạ sau có phải là ánh xạ tuyến tính hay không?

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, -3x)$.

2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x+y, 2x-3y)$.

3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = (2x+y+1, x-3y)$.

4) $s : \mathbb{R}^2 \to Mat_{(2,2)}(\mathbb{R})$, $s(x,y) = \begin{bmatrix} x-y & x+2y \\ 3y & -2x+4y \end{bmatrix}$.

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ cấp 3×2.

Khi đó ánh xạ, cũng ký hiệu bởi $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto y = A(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \mapsto y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}$

Một cách tổng quát, cho A là một ma trận cấp $m \times n$, khi đó ánh xạ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cho bởi

$$x \mapsto y = A(x) = Ax$$

là một ánh xạ tuyến tính và được gọi là ánh xạ tuyến tính tương ứng với ma trận A.

Tính chất 6.2. *Giả sử $f : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó,*

(1) Ánh xạ tuyến tính biến véc tơ không thành véc tơ không: $f(\theta_E) = \theta_F$.

(2) $f(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(u_i)$ với mọi số x_i và $u_i \in E$.

Ví dụ: $f(2u - 3v + 5w) = f(2u - 3v) + f(5w) = f(2u) + f(-3v) + 5f(w) = 2f(u) - 3f(v) + 5f(w)$.

Định lý 6.3. *Ánh xạ tuyến tính $f : E \to F$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của E.*

6.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho $f : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả sử $Dim(E) = n$, $Dim(F) = m$, và giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của E, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một cơ sở của F.

Định nghĩa 6.4. *Ma trận cấp $m \times n$ gồm các cột là tọa độ cột của các véc tơ $f(u_i)$ (ảnh của cơ sở $\mathcal{B}$ của E) trong cơ sở $\mathcal{V}$ của F,*

$$A = [\ [f(u_1)]_{\mathcal{V}}\ [f(u_2)]_{\mathcal{V}} \cdots [f(u_n)]_{\mathcal{V}}\ ],$$

được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong các cơ sở $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$.

Khi đó nếu véc tơ $u \in E$ có tọa độ cột trong cơ sở $\mathcal{B}$ là $x = [u]_{\mathcal{B}}$ thì $f(u)$ có tọa độ cột trong cơ sở $\mathcal{V}$ là

$$y = [f(u)]_{\mathcal{V}} = Ax.$$

Chú ý : Nếu $F \equiv E$ và $\mathcal{V} \equiv \mathcal{B}$ thì ta nói A là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Ví dụ: Xác định ma trận của các ánh xạ tuyến tính

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$ trong các cơ sở chính tắc.

(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x-y, x+y-3z)$ trong các cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ và $\mathcal{V} = \{(1, 1), (1, 2)\}$. Cho $u = (-1, 0, 3)$, xác định tọa độ của $f(u)$ trong cơ sở $\mathcal{V}$. **(Gợi ý** $u = 2u_1 - 3u_2 + u_3$**)**

(3) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (2x+z, x-y, 2x+y+z)$ trong cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

7 Giới thiệu về không gian Ơclit và không gian Unita

Chúng ta nhắc lại rằng nếu u và v là hai véc tơ của $\mathbb{R}^n$, khi đó tích vô hướng (hoặc còn được goi là tích trong) của hai véc tơ u và v, được ký hiệu là $u \bullet v$ hoặc (u, v), và được cho bởi

$$(u, v) = u \bullet v = uv^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Khái niệm trên có thể được mở rộng cho các không gian véc tơ thực (hoặc phức).

Định nghĩa 7.1. *Một không gian véc tơ thực E được trang bị một tích vô hướng được gọi là không gian Ơclit (hay không gian thực tiền Hilber). Ở đây chúng ta định nghĩa tích vô hướng giữa hai véc tơ bấy kỳ u và v của E là một số thực duy nhất, ký hiệu là (u, v), thỏa mãn các tiên đề sau:*

(1) Tính đối xứng: với mọi véc tơ $u, v \in E$,

$$(u, v) = (v, u);$$

(2) Tính tuyến tính: với mọi số thực k_1, k_2 và mọi véc tơ $u, w, v \in E$,

$$(k_1 u + k_2 w, v) = k_1(u, v) + k_2(w, v);$$

(3) Tính xác định dương: với mọi véc tơ $u \in E$,

$$(u, u) \geq 0,$$

$$(u, u) = 0 \quad \textit{khi và chỉ khi} \quad u = 0.$$

Hai véc tơ trong không gian Ơclit được gọi là vuông góc (hoặc trực giao) nếu tích vô hướng của chúng $(u, v) = 0$.

Người ta cũng định nghĩa độ dài, hay còn gọi là chuẩn của một véc tơ của E bởi

$$\| u \| = \sqrt{(u, u)}.$$

Chú ý: nếu E là không gian véc tơ phức và tích vô hướng của hai véc tơ u và v của E được định nghĩa là một số phức $(u, v) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn các tiên đề (2), (3) như trong định nghĩa trên với mọi véc tơ của E và với mọi số phức k_1, k_2; chỉ thay tiên đề (1) bởi tiên đề

$$(u, v) = \overline{(v, u)}, \text{ (số phức liên hợp)}$$

thì E được gọi là không gian Unita.

Một số ví dụ: xem trang 313 trong giáo trình

8 Giới thiệu phần mềm tính toán

Giới thiệu một số ứng dụng phần mềm Mathematica với véc tơ.

Tài liệu

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, (10th Edition, 2011), Nhà xuất bản Wiley, p. 256-309.

[2] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp Tập I* (2014), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[3] Strang Gilbert, *Introduction to Linear Algebra* (5th Edition, 2016), Wellesley-Cambridge Press.

Chương 3. Vấn đề giá trị riêng và chéo hóa ma trận

Bộ môn Toán- Khoa KHCB- PKA

Ngày 11 tháng 1 năm 2021

Tóm tắt nội dung

Chương 3 trình bày các khái niệm về bài toán giá trị riêng, một số tính chất cơ bản của một số ma trận thực và phức đặc biệt (ma trận đối xứng và phản đối xứng; ma trận Hermit và phản Hermit; ma trận trực giao và Unita), bài toán chéo hóa ma trận.

Mục lục

1 Bài toán giá trị riêng

Bài toán giá trị riêng của ma trận nghiên cứu phương trình vectơ

$$Ax = \lambda x,$$

trong đó A là một ma trận vuông, λ là một hằng số chưa biết và x cũng là một véc tơ chưa biết.

Hiển nhiên $x = \theta$ (véc tơ không) luôn luôn là một nghiệm của phương trình trên và do đó không phải là mục tiêu của bài toán giá trị riêng, mà ở đây bài toán mong muốn tìm véc tơ $x \neq \theta$.

Phương trình trên có vẻ đơn giản nhưng lại nảy sinh trong rất nhiều vấn đề lý thuyết, có rất nhiều ứng dụng và xuất hiện thường xuyên trong kỹ thuật, vật lý, hình học, số học, toán lý thuyết, sinh học...

1.1 Giá trị riêng, véc tơ riêng

Ví dụ: xét phép nhân một véc tơ khác không bởi một ma trận

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Chúng ta hãy xem phép nhân ma trận đã cho có ảnh hưởng như thế nào đến các vectơ. Trong trường hợp đầu tiên, chúng ta nhận được một vectơ hoàn toàn mới có hướng khác và độ dài khác so với vectơ ban đầu. Điều này là bình thường và không được quan tâm. Tuy nhiên, trong trường hợp thứ hai, phép nhân tạo ra một vectơ mới có cùng hướng với vectơ ban đầu, chúng tỷ lệ với nhau với hằng số tỷ lệ là 10.

Định nghĩa 1.1. *Cho A là một ma trận vuông cấp n khác không. Số λ (thực hoặc phức) được gọi là một giá trị riêng của ma trận A nếu có một véc tơ $x \neq \theta$ (của $\mathbb{R}^n$ hoặc $\mathbb{C}^n$) sao cho*

$$Ax = \lambda x.$$

Lúc đó x được gọi một véc tơ riêng (hoặc véc tơ đặc trưng) của A tương ứng với giá trị riêng λ.

Bài toán tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng được gọi là bài toán giá trị riêng.

Tập hợp tất cả các giá trị riêng của A được gọi là phổ của A và được ký hiệu là $\sigma(A)$. Giá trị lớn nhất trong các giá trị tuyệt đối (hoặc modul) của các giá trị riêng của A được gọi là bán kính phổ của A.

Về mặt hình học, chúng ta đang tìm kiếm các vectơ x mà phép nhân bởi ma trận A có cùng tác động khi nhân bởi một lượng vô hướng λ. Nói cách khác, Ax tỷ lệ với x; chúng có cùng hướng hoặc ngược hướng.

Cách tìm giá trị riêng, véc tơ riêng

Chúng ta sẽ minh họa phương pháp tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của một ma trận thông qua ví dụ sau.

Ví dụ: tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Chúng ta cần tìm véc tơ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \theta$ và số λ sao cho

$$Ax = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Phương trình trên được chuyển về hệ phương trình

$$\begin{cases} (-5-\lambda)x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 & = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

hoặc được viết dưới dạng ma trận $(A - \lambda I_n)x = \theta$.

Chúng ta chú ý từ quy tắc Cramer rằng, nếu định thức của ma trận hệ số $(A - \lambda I_n) \neq 0$ thì hệ trên chỉ có nghiệm duy nhất là $(0, 0)$. Từ đó để ma trận A có véc tơ riêng thì hệ phương trình trên phải có nghiệm không tầm thường $x \neq 0$, điều này chỉ xảy khi nếu định thức

$$D(\lambda) := det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0.$$

Từ đó A có hai giá trị riêng thực là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -6$.

Chúng ta sẽ tìm các véc tơ riêng tương ứng với các giá trị riêng.

(a) Với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$: các véc tơ riêng là nghiệm khác không của hệ phương trình (1.1) khi thay $\lambda = \lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} (-5-\lambda)x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 & = 0 \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm dạng $x_2 = 2x_1$ và không gian riêng tương ứng với $\lambda_1 = -1$ là một không gian véc tơ con 1 chiều của không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^2$ sinh ra bởi véc tơ cơ sở $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Trong trường hợp này các véc tơ riêng có dạng

$$k_1 u_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ với } k_1 \neq 0.$$

(b) Với giá trị riêng $\lambda_2 = -6$: hoàn toàn tương tự như trường hợp trên, không gian riêng tương tương ứng với $\lambda_2 = -6$ là một không gian véc tơ con 1 chiều của không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^2$ sinh bởi véc tơ cơ sở $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Các véc tơ riêng tương ứng có dạng

$$k_2 u_2 = k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ với } k_2 \neq 0.$$

Một cách tổng quát

Phương trình $Ax = \lambda x$ tương đương với dạng ma trận

$$(A - \lambda I_n)x = \theta. \tag{1.2}$$

Từ quy tắc Cramer chúng ta suy ra, để ma trận A có véc tơ riêng thì hệ phương trình trên phải có nghiệm không tầm thường $x \neq 0$, điều này chỉ xảy khi nếu định thức

$$D(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0. \tag{1.3}$$

Phương trình (1.3) được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận A và định thức $D(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ cũng được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A.

Một số chú ý:

(1) Như vậy các giá trị riêng của ma trận A phải là nghiệm của đa thức đặc trưng, cho bởi phương trình đặc trưng (1.3). Đa thức đặc trưng có bậc n và từ một định lý cơ bản của đại số, nếu nói chung các giá trị riêng cả thực hoặc phức thì ma trận A có ít nhất một giá trị riêng và tối đa n giá trị riêng phân biệt.

(2) Các véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ là nghiệm khác không được xác định từ hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1.2). Chúng ta biết rằng các véc tơ riêng đó, cùng với véc tơ không θ lập thành một không gian véc tơ con (của $\mathbb{R}^n$ hoặc $\mathbb{C}^n$), và được gọi là **không gian riêng** của A tương ứng với giá trị riêng λ, ký hiệu là $N(\lambda)$. Một cơ sở hữu hạn cho không gian riêng có thể được lựa chọn.

Một số ví dụ: tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng của các ma trận sau đây:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Định lý 1.2. *Chúng ta có các kết quả sau:*

(1) Ma trận A và A^T có cùng các giá trị riêng.

(2) Các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt là độc lập tuyến tính.

Chú ý: số bội của giá trị riêng λ trong đa thức đặc trưng được gọi là bội đại số của λ, ký hiệu là M_λ; số chiều của không gian riêng $N(\lambda)$ tương ứng với λ được gọi là bậc hình học của λ, ký hiệu là m_λ. Nói chung, chúng ta có thể chứng minh $m_\lambda \leq M_\lambda$.

1.2 Một số ứng dụng của bài toán giá trị riêng

Mục 8.2, trang 329-333 trong GT

2 Ma trận đối xứng, phản đối xứng

Định nghĩa 2.1 (Ma trận đối xứng và phản đối xứng)**.** *Ma trận thực vuông A được gọi là:*

(1) đối xứng nếu $A^T = A$, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j.

(2) phản đối xứng nếu $A^T = -A$, tức là $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi i, j.

Như vậy trong ma trận đối xứng (tương ứng phản đối xứng) các phần tử đối xứng qua đường chéo chính bằng nhau (tương ứng là đối của nhau).

Một số ví dụ:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Chú ý: một ma trận vuông A bất kỳ có thể được viết thành tổng của một ma trận đối xứng và một ma trận phản đối xứng

$$A = R + S, \quad \text{với } R = \frac{1}{2}(A + A^T),\ S = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Định lý 2.2. *(Giá trị riêng của ma trận đối xứng và phản đối xứng)*

(1) Các giá trị riêng của ma trận đối xứng luôn là số thực và tính cả bội thì ma trận A cấp n có đủ n giá trị riêng.

(2) Các giá trị riêng của ma trận phản đối xứng luôn là số thuần ảo hoặc bằng không.

Kết quả của định lý trên cho ma trận ma trận đối xứng và phản đối xứng là trường hợp đặc biệt của ma trận Hermit và phản Hermit được trình bày ở phần tiếp theo.

Một số tính chất cơ bản (tùy chọn)

(1) Tổng và hiệu của hai ma trận đối xứng (phản đối xứng) là đối xứng (phản đối xứng).

(2) Bội vô hướng kA của ma trận đối xứng (phản đối xứng) là đối xứng (phản đối xứng).

(3) Nếu A và B là đối xứng, kho đó AB đối xứng khi và chỉ khi A và B giao hoán, tức là $AB = BA$.

(4) Nếu A là ma trận đối xứng thì A^n cũng là ma trận đối xứng với mọi số nguyên dương n.

(5) Nếu A khả nghịch thì A^{-1} đối xứng (phản đối xứng) khi và chỉ khi A đối xứng (phản đối xứng).

(6) Định thức của ma trận phản đối xứng luôn không âm.

(7) Nếu A là ma trận phản đối xứng thì $A + I$ là ma trận khả nghịch.

(8) Nếu A là ma trận phản đối xứng thì A^2 là ma trận đối xứng.

Định lý 2.3. *Trang bị cho $\mathbb{R}^n$ một tích vô hướng $(\cdot,\cdot)$. Khi đó*

(1) Ma trận A đối xứng khi và chỉ khi $(Ax, y) = (x, Ay)$ với mọi véc tơ $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) Ma trận A phản đối xứng khi và chỉ khi $(Ax, y) = -(x, Ay)$ với mọi véc tơ $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3 Ma trận Hermit, phản Hermit

Nhắc lại: nếu số phức $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, thì số phức liên hợp của z là $\overline{z} = x - iy$.

Định nghĩa 3.1. *Cho $A = [a_{ij}]$, khi đó định nghĩa ma trận liên hợp của A, ký hiệu là $\overline{A}$, bởi $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$, trong đó $\overline{a_{ij}}$ là phức liên hợp của a_{ij}.*

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 4+2i & 2-i & -2 \\ 1-3i & 4 & -2+5i \end{bmatrix}, \text{ thì } \begin{bmatrix} 4-2i & 2+i & -2 \\ 1+3i & 4 & -2-5i \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 3.2 (Ma trận Hermit và phản Hermit)**.** *Ma trận phức vuông A được gọi là:*

(1) Hermit nếu $\overline{A}^T = A$, tức là $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$ với mọi i, j.

(2) phản Hermit nếu $\overline{A}^T = -A$, tức là $\overline{a_{ij}} = -a_{ji}$ với mọi i, j.

Chú ý:

(1) Hiển nhiên ma trận đối xứng (phản đối xứng) là trường hợp đặc biệt của ma trận Hermit (phản Hermit).

(2) Các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận Hermit phải là số thực, trong khi các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận phản Hermit phải là số thuần ảo (tức là có phần thực bằng 0).

Một số ví dụ: ma trận A dưới đây là Hermit, B dưới đây là phản Hermit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2i & 3-2i \\ -3-2i & -5i \end{bmatrix}$$

Chúng ta có chú ý rằng $det(\overline{A}) = \overline{det(A)}$ và do đó nếu λ là một giá trị riêng của A thì $\overline{\lambda}$ sẽ là một giá trị riêng của $\overline{A}$. Từ đó chúng ta dễ dàng chứng minh được định lý sau.

Định lý 3.3. *(Giá trị riêng của ma trận Hermit và phản Hermit)*

(1) Các giá trị riêng của một ma trận Hermit cấp n (và do đó của ma trận đối xứng) luôn là số thực và tính cả bội thì nó có đủ n giá trị riêng.

(2) Các giá trị riêng của ma trận phản Hermit (và do đó của ma trận phản đối xứng) luôn là số thuần ảo hoặc bằng không.

Ví dụ: tìm các giá trị riêng của các ma trận A và B trong ví dụ phía trên
Phương trình đặc trưng của các ma trận A và B tương ứng là

$$D_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \{0, 7\}$$

$$D_B(\lambda) = \lambda^2 + 3i\lambda + 23 = 0 \Rightarrow \sigma(B) = \{(-3 - \sqrt{101})i, (-3 + \sqrt{101})i\}$$

Một số tính chất (tùy chọn)

(1) Tổng và hiệu của hai ma trận Hermit (phản Hermit) là Hermit (phản Hermit).

(2) Bội vô hướng kA của ma trận Hermit (phản Hermit) là Hermit (phản Hermit).

(3) Nếu A và B là Hermit, kho đó AB Hermit khi và chỉ khi A và B giao hoán, tức là $AB = BA$.

(4) A là ma trận phản Hermit khi và chỉ khi iA là Hermit.

(5) nếu A là ma trận phản Hermit thì A^n là ma trận Hermit nếu n là số chẵn, phản Hermit nếu n là số lẻ.

Định lý 3.4. *Trang bị cho $\mathbb{C}^n$ một tích vô hướng $(\cdot,\cdot)$. Khi đó*

(1) Ma trận A Hermit khi và chỉ khi $(Ax, y) = (x, Ay)$ với mọi véc tơ $x, y \in \mathbb{C}^n$.

(2) Ma trận A phản Hermit khi và chỉ khi $(Ax, y) = -(x, Ay)$ với mọi véc tơ $x, y \in \mathbb{C}^n$.

4 Ma trận trực giao

Định nghĩa 4.1 (Ma trận trực giao)**.** *Ma trận thực vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu*

$$A^T = A^{-1}.$$

Ánh xạ tuyến tính tương ứng với ma trận trực giao cho bởi $y = Ax$ được gọi là biến đổi trực giao.

Ví dụ: ma trận sau là ma trận trực giao

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Nhận xét:

(1) Nếu ma trận A là ma trận trực giao thì ma trận chuyển vị A^T và ma trận nghịch đảo của nó A^{-1} cũng là các ma trận trực giao.

(2) Định thức của ma trận trực giao luôn bằng 1 hoặc -1.

Ví dụ: phép quay trong $\mathbb{R}^2$ bởi một góc θ là một biến đổi trực giao tương ứng với ma trận trực giao

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Ví dụ phép quay ngược chiều kim đồng hồ một góc 30 độ cho bởi ma trận $R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

Định lý 4.2. *Biến đổi trực giao bảo toàn tích vô hướng thông thường của các véc tơ trong* $\mathbb{R}^n$, *tức là*

$$(Au, Av) = (u, v), \text{ với mọi véc tơ } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Từ đó biến đổi trực giao cũng bảo toàn độ dài (hay chuẩn) của các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$*:*

$$\|Au\| = \|u\| \text{ với mọi véc tơ } u \in \mathbb{R}^n.$$

Định lý 4.3. *Ma trận thực vuông A là ma trận trực giao khi và chỉ khi các véc tơ cột* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *(hoặc các véc tơ hàng) của nó lập thành một cơ sở trực chuẩn của* $\mathbb{R}^n$, *tức là một cơ sở thỏa mãn*

$$(A_i, A_j) = A_i^T A_j = \delta_{ij},$$

trong đó

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}.$$

Chứng minh. (1) Nếu A là ma trận trực giao thì theo định nghĩa ta có $A^{-1}A = A^T A = I_n$. Biểu diễn tích này dưới dạng các véc tơ cột ta được

$$A^T A = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{bmatrix} [A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n] = \begin{bmatrix} A_1^T A_1 & A_1^T A_2 & \cdots & A_1^T A_n \\ A_2^T A_1 & A_2^T A_2 & \cdots & A_2^T A_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n^T A_1 & A_n^T A_2 & \cdots & A_n^T A_n \end{bmatrix} = I_n.$$

Chú ý rằng các phần tử trong ma trận tích như trên chính là các tích vô hướng của các véc tơ cột và do đó chúng ta có ngay điều cần chứng minh $(A_i, A_j) = A_i^T A_j = \delta_{ij}$.

Từ nhận xét nếu ma trận A là ma trận trực giao thì ma trận chuyển vị A^T cũng là các ma trận trực giao nên các véc tơ dòng cũng lập thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$.

(2) Ngược lại nếu véc tơ cột $A_1, A_2, \cdots, A_n$ của A làm thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ thì ma trận tích $A^T A$ như trên phải là ma trận đơn vị. Vì vậy ma trận A khả nghịch và $A^{-1} = A^T$ nên A là ma trận trực giao.

Chứng minh tương tự nếu các véc tơ hàng của A lập thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$

$\square$

Từ tính chất bảo toàn chuẩn của ma trận trực giao, chúng ta có thể chứng minh được định lý sau.

Định lý 4.4. *Các giá trị riêng của ma trận trực giao là các số thực hoặc cặp số phức liên hợp và có môđun bằng 1.*

Ví dụ: phương trình đặc trưng của ma trận trực giao A trong ví dụ trên là

$$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0.$$

Từ đó tìm được các giá trị riêng của A là $-1, \frac{5+i\sqrt{11}}{6}, \frac{5-i\sqrt{11}}{6}$, chúng đều có môđun bằng 1.

5 Ma trận Unita (tùy chọn)

Khái niệm mở rộng của ma trực giao sang ma trận phức là ma trận Unita. Ma trận Unita cũng có các tính chất tương tự như với ma trận trực giao.

Định nghĩa 5.1 (Ma trận Unita)**.** *Ma trận phức vuông A được gọi là ma trận Unita nếu*

$$\overline{A}^T = A^{-1}.$$

Ánh xạ tuyến tính tương ứng với ma trận Unita cho bởi $y = Ax$ được gọi là biến đổi Unita.

Chú ý: định thức của ma trận Unita luôn có môđun bằng 1: $|det(A)| = 1$.
Ví dụ: ma trận A dưới đây là Unita

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}.$$

Mở rộng tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$, chúng ta có thể định nghĩa một tích vô hướng của các véc tơ trong $\mathbb{C}^n$ cho bởi

$$(u, v) = \overline{u}^T v.$$

Định lý 5.2. *Biến đổi Unita bảo toàn tích vô hướng và từ đó bảo toàn chuẩn của các véc tơ trong* $\mathbb{C}^n$.

Từ tính chất bảo toàn tích vô hướng của ma trận Unita, chúng ta có thể chứng minh được định lý sau.

Định lý 5.3. *Các giá trị riêng của ma trận Unita (và do đó của ma trận trực giao) có môđun bằng 1. Các không gian riêng trực giao với nhau.*

Định nghĩa 5.4. *Một hệ các véc tơ phức trong* $\mathbb{C}^n$ *được gọi là hệ Unita nếu tích vô hướng của các véc tơ đó thỏa mãn tính chất*

$$(u_i, u_j) = \overline{u}_i^T u_j = \delta_{ij}.$$

Định lý 5.5. *Ma trận phức vuông* A *là ma trận Unita khi và chỉ khi các véc tơ cột* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *(hoặc các véc tơ dòng) của nó lập thành một cơ sở Unita của* $\mathbb{C}^n$.

6 Vấn đề chéo hóa ma trận

Trong phần này chúng ta chỉ làm việc với các ma trận thực.

6.1 Ma trận đồng dạng

Định nghĩa 6.1. *Ma trận vuông cấp* n $\widehat{A}$ *được gọi là đồng dạng với ma trận vuông cấp* n A *nếu có một ma trận khả nghịch* P *sao cho* $\widehat{A} = P^{-1}AP$.

Một tính chất quan trọng của biến đổi đồng dạng đó là bảo toàn các giá trị riêng.

Định lý 6.2. *Hai ma trận đồng dạng có cùng các giá trị riêng. Hơn nữa nếu* x *là một véc tơ riêng của* A *thì* $y = P^{-1}x$ *là một véc tơ riêng của* $\widehat{A}$.

Chứng minh. Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng nên từ đó hai ma trận đồng dạng có cùng các giá trị riêng:

$$det(\widehat{A} - \lambda I) = det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = det(A - \lambda I).$$

Hơn nữa nếu $Ax = \lambda x$, khi đó với $y = P^{-1}x$:

$$\widehat{A}y = \widehat{A}P^{-1}x = P^{-1}APP^{-1}x = P^{-1}Ax = P^{-1}(\lambda x) = \lambda P^{-1}x = \lambda y,$$

nên $y = P^{-1}x$ là véc tơ riêng của của $\widehat{A}$. Chú ý rằng biểu diễn trên cũng chứng tỏ rằng λ cũng là một giá trị riêng của $\widehat{A}$ nếu λ là một giá trị riêng của A. $\square$

Ví dụ: xét các ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ và } P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

khi đó

$$\widehat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Chúng ta có thể kiểm tra đa thức đặc trưng của A là $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ và từ đó A có hai giá trị riêng là 2 và 3 như của $\widehat{A}$.

6.2 Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa 6.3. *Ma trận vuông A được gọi là chéo hóa được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo $\widehat{A}$, tức là có một ma trận khả nghịch P sao cho $\widehat{A} = P^{-1}AP$ là ma trận chéo.*

Bài toán xem xét ma trận vuông A có chéo hóa được hay không và tìm một ma trận khả nghịch P sao cho $\widehat{A} = P^{-1}AP$ là ma trận chéo được gọi là chéo hóa ma trận A, P còn được gọi là ma trận làm chéo hóa A.

Một số ví dụ

1) Ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ đồng dạng với ma trận chéo $\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, với ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Ma trận $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ đồng dạng với ma trận chéo $\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, với ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Định lý 6.4. *Ma trận A vuông cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi A có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$, tức là $\mathbb{R}^n$ có một cơ sở gồm toàn các véc tơ riêng của A.*

Chú ý: điều kiện chéo hóa được trong định lý trên cũng tương đương với điều kiện tổng các bội hình học của các giá trị riêng phải bằng n.

Chứng minh. Nếu ma trận vuông A chéo hóa được thì $\widehat{A} = P^{-1}AP$ là ma trận chéo. Khi đó các véc tơ e_i trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ là các véc tơ riêng của $\widehat{A}$. Từ đó theo theo định lý (6.2), Pe_i sẽ là các véc tơ riêng của A, và hơn nữa n véc tơ này độc lập tuyến tính.

Ngược lại giả sử A có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$, khi đó lập ma trận khả nghịch P với các cột là tọa độ cột của các véc tơ riêng đó (P cũng chính là một ma trận chuyển cơ sở). Khi đó ma trận $\widehat{A} = P^{-1}AP$ sẽ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính cũng là các giá trị riêng của A. □

Chú ý: từ chứng minh của định lý trên chúng ta thấy rằng một ma trận P làm chéo hóa A có thể được chọn gồm các véc tơ riêng như là các véc tơ cột. Khi đó ma trận chéo $\widehat{A} = P^{-1}AP$ có các phần tử trên đường chéo chính cũng là các giá trị riêng của A.

Hệ quả 6.5. *Nếu ma trận A vuông cấp n có n giá trị riêng phân biệt thì $\mathbb{R}^n$ có một cơ sở của gồm toàn các véc tơ riêng của A và do đó A chéo hóa được.*

Chứng minh. Giả sử A có n giá trị riêng phân biệt. Khi đó ứng với mỗi giá trị riêng ta lấy một véc tơ riêng thì các véc tơ này phải độc lập tuyến tính theo định lý (1.2), nên chúng lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Vì thế ma trận A chéo hóa được theo định lý trên. □

Một số ví dụ: ma trận có chéo hóa được không? Tìm ma trận P làm chéo hóa (nếu có)

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7,3 & 0,2 & -3,7 \\ -11,5 & 1,0 & 5,5 \\ 17,7 & 1,8 & -9,3 \end{bmatrix}.$$

6.3 Chéo hóa ma trận đối xứng

Định lý 6.6. *Ma trận đối xứng A cấp n luôn có một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ gồm toàn các véc tơ riêng và do đó chéo hóa được bởi một ma trận trực giao: tồn tại một ma trận trực giao P sao cho $\widehat{A} = P^T AP$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng thực của nó.*

6.4 Chéo hóa ma trận Hermit (tùy chọn)

Tương tự như đối với ma trận đối xưng, chúng ta cũng có có kết quả sau. Ma trận Hermit cấp n luôn có một cơ sở trực chuẩn (Unita) của $\mathbb{C}^n$ gồm các véc tơ riêng và do đó luôn chéo hóa được bởi một ma trận Unita đến một ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng thực của nó.

7 Giới thiệu phần mềm tính toán

Giới thiệu một số ứng dụng phần mềm Mathematica: tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của ma trận, chéo hóa ma trận

8 Bài tập tham khảo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

gtr= -2; 2; 3

VTR: 1, -1, 4; -1, 0, 1; -1, 1, 1;

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

VTR: -1, 1, 0; 0, 0; 1;

1, 1; 0

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

gtr= 2 bội 2; 1

VTR: 2,- 1, 0; -1, 1, 0;

-1, 3, 3;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

gtr= 2 bội -2; 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

gtr= 1; 2; 8

VTR: -1, -1, 1;

-3, 0, 1;

3,3, 4;

Tài liệu

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, (10th Edition, 2011), Nhà xuất bản Wiley, p. 256-309.

[2] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp Tập I* (2014), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[3] Strang Gilbert, *Introduction to Linear Algebra* (5th Edition, 2016), Wellesley-Cambridge Press.

Chương 4. Giải tích véc tơ

Bộ môn Toán- Khoa KHCB- PKA

Ngày 6 tháng 3 năm 2021

Tóm tắt nội dung

Chương 4 nhắc lại về tích vô hướng, tích chéo của véc tơ và ứng dụng; đưa ra một số phép tính vi phân đối với các hàm vô hướng và hàm véc tơ, định nghĩa một số toán tử vi phân đặc biệt

Mục lục

1 Véc tơ trong không gian 2 và 3 chiều

Trong kỹ thuật, vật lý, toán học và các lĩnh vực khác, chúng ta thường gặp hai loại đại lượng là vô hướng và vectơ. Đại lượng vô hướng là một đại lượng được xác định bởi độ lớn của nó. Nó nhận các giá trị số, tức là một số. Ví dụ về đại lượng vô hướng như thời gian, nhiệt độ, độ dài, khoảng cách, tốc độ, mật độ, năng lượng và điện áp

Ngược lại, vectơ là đại lượng vừa có độ lớn vừa có hướng. Chúng ta ký hiệu một vectơ như là một mũi tên hoặc một đoạn thẳng có hướng. Ví dụ, một vectơ vận tốc có chiều dài hoặc độ lớn, chính là tốc độ và hướng, nó cho biết hướng của chuyển động.

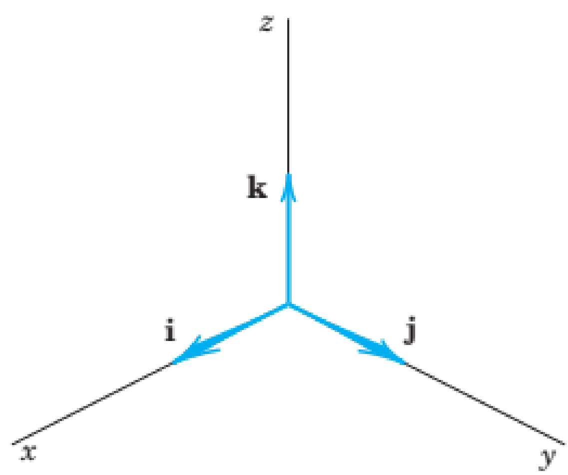
Các ví dụ điển hình của vectơ là độ dời, vận tốc và lực.

Các vectơ được ký hiệu bằng các chữ cái như $a, b, ..$ hoặc đôi khi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}...$ và được biểu diễn bởi một mũi tên có điểm đầu và điểm cuối.

Véc tơ đơn vị là véc tơ có độ dài bằng 1.

Chúng ta nhắc lại rằng hai véc tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và độ lớn.

Như thường lệ, chúng ta có thể sử dụng hệ trục tọa độ Decart để biểu thị các véc tơ. Trong $\mathbb{R}^3$ người ta thường ký hiệu hệ trực chuẩn gồm 3 véc tơ đơn vị trên 3 trục là i, j, k.



Hệ trục tọa độ Decart

1.1 Nhắc lại về tích vô hướng của các véc tơ

Như chúng ta đã biết $\mathbb{R}^n$ với các cộng các véc tơ thông thường và nhân vô hướng là một không gian véc tơ có số chiều n.

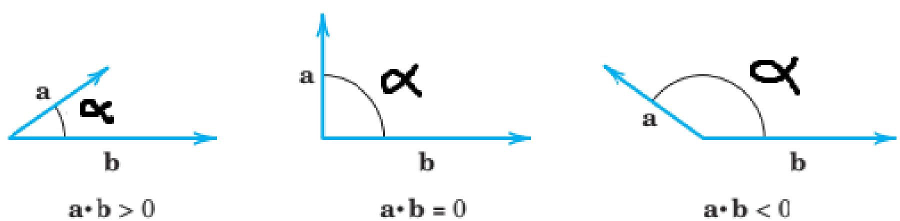
Bên cạnh đó chúng ta cũng đã biết rằng $\mathbb{R}^n$ là một không gian Euclid với tích vô hướng hay tích trong thông thường của hai véc tơ trong $\mathbb{R}^n$.

Nếu α là góc giữa hai véc tơ a và b, khi đó

$$a \cdot b = | a | \, | b | \cos \alpha$$

và do đó góc giữa hai véc tơ khác không thỏa mãn

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{| a | \, | b |}$$



Góc giữa hai véc tơ

Một số tính chất quan trọng của tích vô hướng:

(1) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (Tính chất phân phối).

(2) $| a \cdot b | \leq | a | \, | b |$ (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).

(3) $| a + b | \leq | a | + | b |$ (Bất đẳng thức tam giác).

(4) $| a + b |^2 + | a - b |^2 = 2(| a |^2 + | b |^2)$ (Đẳng thức hình bình hành).

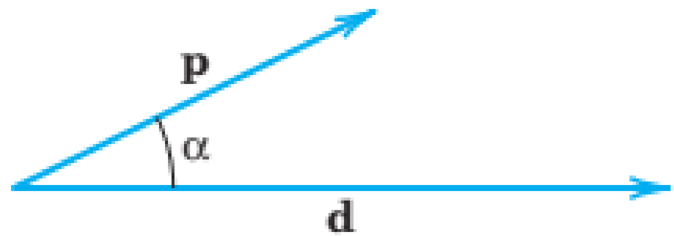
Ứng dụng của tích vô hướng

Ví dụ: **Công thực hiện của một lực được biểu thị như một tích vô hướng**

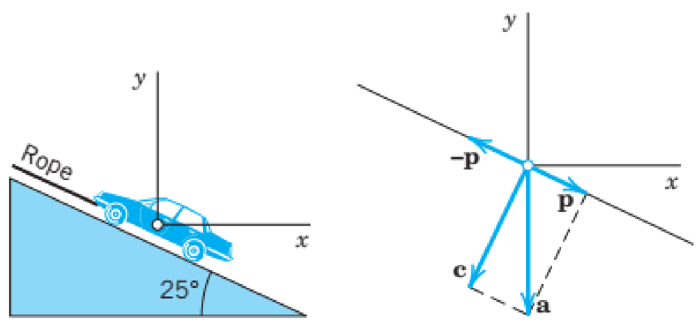
Công thực hiện bởi một lực, biểu diễn bằng một véc tơ p, khiến một vật dịch chuyển một véc tơ d thì công sinh ra được tính bởi

$$W = | p | \, | d | \ \cos \alpha = p \cdot d$$

Ví dụ: **Thành phần của một lực theo một hướng nhất định**



Công thực hiện bởi một lực



Tính độ lớn lực của sợi dây giữ một ô tô có khối lượng 5000 ở trạng thái cân bằng nếu đoạn đường lên dốc tạo một góc 25 độ so với phương ngang?

Ví dụ trên là một ví dụ của về phép chiếu của vectơ a theo hướng của một vectơ b. Nếu chúng ta ký hiệu p thì độ lớn của hình chiếu vuông góc của a trên đường thẳng $l$song song với b thì

$$p = \mid a \mid \cos\alpha,$$

trong đó α là góc giữa a và b.

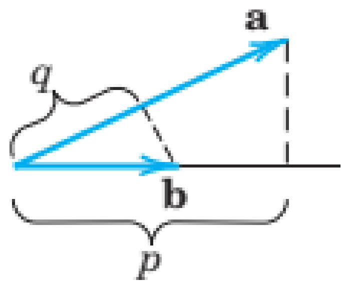
Ví dụ: **Tìm véc tơ pháp tuyến của một mặt phẳng** (Ex p. 366)

Tìm một vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt phẳng $4x + 2y + 4z = -7$.

1.2 Tích trong của véc tơ

Trong không gian 3 chiều, chúng ta sẽ định nghĩa một dạng của phép nhân các vectơ, gọi là tích chéo (tích ngoài) của hai véc tơ, mà kết quả sẽ là một vectơ.

Hai véc tơ được biểu diễn như là hai cạnh của một hình bình hành trong một mặt phẳng, khi đó chúng ta muốn định nghĩa một véc tơ vuông góc với hai véc

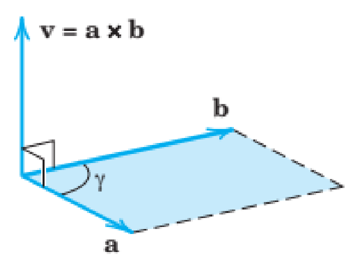


Hình chiếu của a trên b

tơ đó (cũng là vuông góc với mặt phẳng chứa hình bình hành) với độ dài bằng diện tích của hình bình hành.

Định nghĩa 1.1 (Tích chéo (hay tích ngoài) của hai véc tơ)**.** *Trong* $\mathbb{R}^3$*, cho hai véc tơ* $a = (a_1, a_2, a_3)$ *và* $b = (b_1, b_2, b_3)$*. Khi đó ta định nghĩa tích chéo (hay tích ngoài) của hai véc tơ* a *và* b *là một véc tơ, ký hiệu là* $a \times b$*, có 3 thành phần lần lượt như sau:*

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_3b_3 - a_3b_2, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

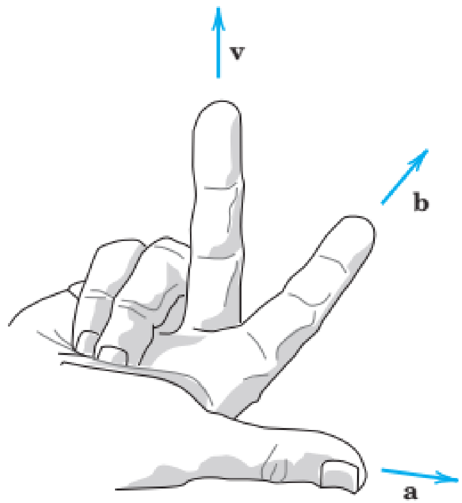


Tích chéo của hai véc tơ

Ví dụ: tìm tích chéo của hai véc tơ $a = (-2, 3, 1)$ và $b = (1, 4, 5)$.

Chú ý: bộ 3 véc tơ $a, b, a \times b$ tuân theo quy tắc bàn tay phải.

Một cách khác để ghi nhớ cách tìm tính chéo của hai véc tơ như sau: gọi i, j, k là 3 véc tơ trong cơ sở trực chuẩn chính tắc của $\mathbb{R}^3$, khi đó tích chéo $a \times b$ như là khai triển hình thức của định thức sau theo hàng 1:



Quy tắc bàn tay phải

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Tính chất 1.2 (Tính chất cơ bản của tích chéo). *(1) Nếu α là góc giữa hai véc tơ u và v, khi đó*

$$| a \times v |=| a | | v | \sin \alpha.$$

(2) Với mọi số k, khi đó

$$(ka) \times b = ka \times v = a \times (kb).$$

(3) Tính phân phối: với ba véc tơ bất kỳ

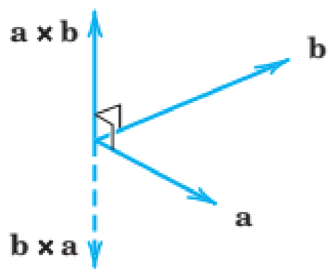
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$

và

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

(4) Tích chéo là phản giao hoán

$$a \times b = -b \times a.$$



Phản giao hoán của tích chéo

Chú ý: tích chéo không có tính chất kết hợp, tức là nói chung

$$a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c.$$

Ứng dụng điển hình của tích chéo

Ví dụ: mô men của một lực

Trong cơ học, mô men m của một lực $\mathbf{p}$ đối với một điểm Q được xác định là tích $m = \mid \mathbf{p} \mid d$, trong đó d là khoảng cách (vuông góc) giữa Q và đường thẳng L giá của lực $\mathbf{p}$ (xem Hình). Nếu lấy $\mathbf{r}$ là vectơ từ Q đến bất kỳ một điểm A trên L thì

$$m = \mid \mathbf{r} \mid \mid \mathbf{p} \mid \ \sin \gamma,$$

với γ là góc giữa r và p.

Từ đó ta có $m = \mid \mathbf{r} \times \mathbf{p} \mid$. Véc tơ

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

được gọi là véc tơ mô men hoặc mô men véc tơ của của $\mathbf{p}$ đối với Q. Độ lớn của nó là m. Nếu $\mathbf{m} \neq 0$, hướng của nó là của trục quay về quanh Q mà $\mathbf{p}$ có xu hướng sinh ra. Trục này vuông góc với cả hai véc tơ $\mathbf{r}$ và $\mathbf{p}$.

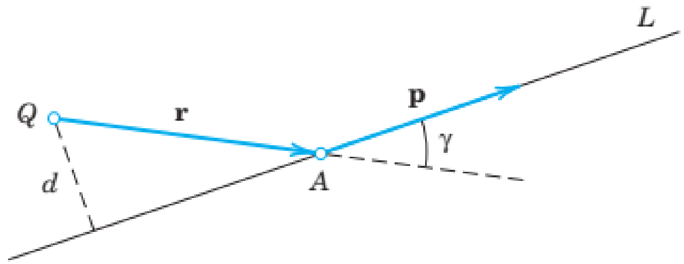
Ví dụ: tìm mô men của một lực $\mathbf{p}$ đối với tâm Q của một bánh xe, như hình vẽ

Đưa vào hệ tọa độ như trong Hình vẽ,, chúng ta có

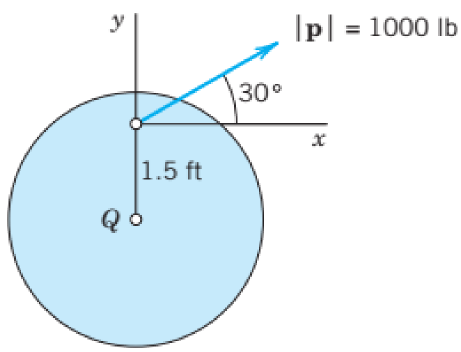
$$\mathbf{p} = [1000 \cos 30, 1000 \sin 30, 0] = [866, 500, 0], \ \ \mathbf{r} = [0, 1.5, 0].$$

Từ đó tính được véc tơ mô men $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = [0, 0, -1299].$$



Mô men của lực **p**



Mô men của lực **p** đối với tâm bánh xe

Vectơ mô men **m** này là véc tơ pháp tuyến, nó vuông góc với mặt phẳng của bánh xe. Do đó nó có hướng của trục của phép trục quay đối tâm Q của bánh xe mà lực **p** có xu hướng sinh ra. Vectơ mô men **m** chỉ theo hướng z âm, đây là hướng mà đinh ốc xoắn phải sẽ tiến lên nếu quay theo cách đó.

Ví dụ: **Vận tốc của một vật quay**, p. 372

Chuyển động quay của một vật thể cứng B trong không gian có thể được mô tả đơn giản và duy nhất bằng vectơ **w** như sau.

Các hướng của **w** là của trục quay và sao cho chuyển động quay xuất hiện theo chiều kim đồng hồ nếu người ta nhìn từ điểm ban đầu của **w** đến điểm cuối của nó.

Chiều dài của **w** bằng tốc độ góc của chuyển động quay, nghĩa là, tốc độ tuyến tính (hoặc tiếp tuyến) của một điểm B chia cho khoảng cách của nó từ trục quay. Gọi P là điểm bất kỳ thuộc B và d là khoảng cách của nó đến trục.

Khi đó P có tốc độ d. Gọi $\mathbf{r}$ là vectơ vị trí của P quy về một hệ tọa độ có gốc 0 trên trục quay.

Sau đó, đâu là góc giữa $\mathbf{w}$ và $\mathbf{r}$.

1.3 Tích bộ ba vô hướng (tích hỗn hợp)

Định nghĩa 1.3 (Tích bộ ba vô hướng)**.** *Tích bộ ba vô hướng hay tích hỗn hợp của ba véc tơ a, b, c, ký hiệu là (a, b, c), được định nghĩa bởi*

$$(a, b, c) = a \bullet (b \times c).$$

Cụ thể hơn, nếu $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ và $c = (c_1, c_2, c_3)$ thì

$$(a, b, c) = a \bullet (b \times c) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

Chú ý rằng tổng trên có thể xem là khai triển của một định thức cấp 3, từ đó chúng ta có công thức

$$(a, b, c) = a \bullet (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

Từ công thức trên (1.2), chúng ta có thể chứng minh dễ dàng các tính chất sau đây của tích hỗn hợp.

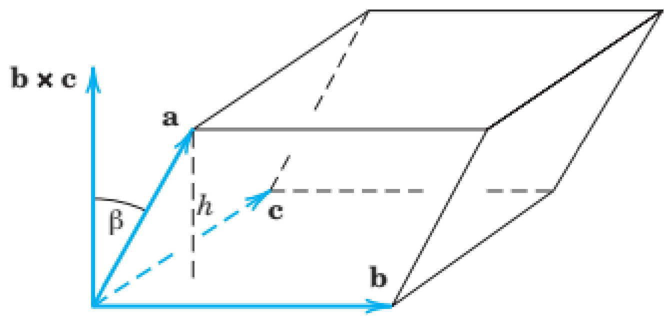
Tính chất 1.4 (Tính chất cơ bản của tích hỗn hợp)**.** *(1) Trong tích hỗn hợp, dấu $\bullet$ và dấu $\times$ có thể đổi chỗ cho nhau:*

$$(a, b, c) = a \bullet (b \times c) = (a \times b) \bullet c$$

(2) Với mọi số k, khi đó

$$(ku) \times v = ku \times v = u \times (kv).$$

*(3) **Ý nghĩa hình học**: giá trị tuyệt đối của tích hỗn hợp $\mid (a, b, c) \mid$ là thể tích của hình hộp xiên với ba cạnh cơ sở là ba véc tơ a, b, c.*



(4) Ba véc tơ trong $\mathbb{R}^3$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tích hỗn hợp của chúng là khác không.

Chứng minh. Ở đây chỉ đưa ra chứng minh cho tính chất (3), các tính chất khác dễ dàng chứng minh được.

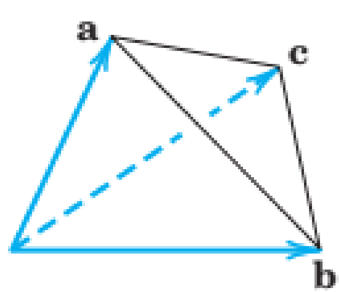
Chiều cao của hình hộp từ đỉnh A đến đáy là $h = \mid \mathbf{a} \mid \mid \cos\beta \mid$. Diện tích đáy là diện tích hình bình hành với hai cạnh là $\mathbf{b}$ và $\mathbf{c}$ cho bởi $\mid \mathbf{b} \times \mathbf{c} \mid$. Từ đó thể tích của hình hộp bằng chiều cao nhân với diện tích đáy là

$$V = \mid \mathbf{a} \mid \mid \mathbf{b} \times \mathbf{c} \mid \mid \cos\beta \mid = \mid a \bullet (b \times c) \mid = \mid (a, b, c) \mid .$$

□

Ví dụ: **Thể tích tứ diện**

Một tứ diện được xác định bởi ba vectơ cạnh $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ như Hình vẽ. Tìm thể tích của khối tứ diện với $\mathbf{a} = [2, 0, 3], \mathbf{b} = [0, 4, 1], \mathbf{c} = [5, 6, 0]$.



Giải: thể tích V của hình hộp xiên với ba cạnh cơ sở là ba véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ cho bởi giá trị tuyệt đối của tích hỗn hợp $\mid (a, b, c) \mid$.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -72.$$

Từ đó $V = 72$. Thể tích của khối tứ diện với 3 cạnh cơ sở là $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bằng 1/6 thể tích của hình hộp xiên. Do đó thể tích của khối tứ diện cần tính là 12.

2 Hàm vô hướng, hàm véc tơ và trường

2.1 Định nghĩa

Chú ý: các khái niệm trong phần này được trình bày với $\mathbb{R}^3$ nhưng hoàn toàn có thể mở rộng tương tự cho trường hợp $\mathbb{R}^n$, với n nguyên dương bất kỳ.

Xét D là một miền nào đó trong $\mathbb{R}^3$, tức là một tâp con của $\mathbb{R}^3$. Miền D điển hình trong các ứng dụng thường là một miền 3 chiều, một mặt hoặc đường cong trong không gian.

Khi đó với mỗi điểm $P \in D$ chúng ta định nghĩa một số $f(P)$ (thực hoặc phức),

$$f = f(P),$$

thì hàm f được gọi là một hàm vô hướng (hay hàm số).

Chúng ta cũng nói rằng một hàm vô hướng xác định một trường vô hướng trên miền xác định D (tức là trong miền 3 chiều hoặc trên một mặt hoặc đường cong trong không gian).

Hai ví dụ tiêu biểu về tính vô hướng trường là trường nhiệt độ của vật thể và trường áp suất của không khí trong khí quyển của trái đất.

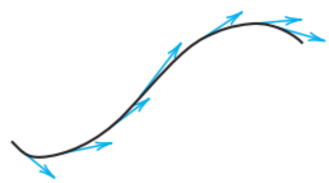
Chúng ta cũng định nghĩa một hàm vectơ, ứng với mỗi điểm $P \in D$ một véc tơ $v = v(P) \in \mathbb{R}^m$, $m = 3$:

$$v = v(P) = [v_1(P), v_2(P), v_3(P)].$$

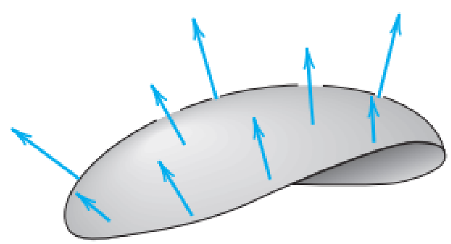
Chúng ta cũng nói rằng một hàm vectơ xác định một trường vectơ trong miền xác định D. Một số ví dụ về trường vectơ là như trường vectơ tiếp tuyến của một đường cong (Hình), vectơ pháp tuyến của một mặt (Hình), và trường vận tốc của một vật thể quay (Hình).

Khái niệm hàm véc tơ được định nghĩa với $\mathbb{R}^3$, nhưng hoàn toàn có thể mở rộng tương tự cho trường hợp $\mathbb{R}^m$, với m là số nguyên dương bất kỳ. Hàm vô hướng là trường hợp đặc biệt của hàm véc tơ với $m = 1$.

Chúng ta cũng lưu ý rằng các hàm vô hướng và các hàm véc tơ cũng có thể phụ thuộc vào một số tham số khác như thời gian t.



Trường véc tơ tiếp tuyến của đường cong



Trường véc tơ pháp tuyến của mặt cong

Nếu chúng ta đưa vào tọa độ Decart và P có tọa độ $P = (x, y, z)$, khi đó

$$v = v(P) = [v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)].$$

2.2 Một số ví dụ về trường véc tơ, trường vô hướng

Ví dụ: (hàm vô hướng) hàm khoảng cách Euclid trong không gian
Ví dụ: trường vận tốc là hàm véc tơ
Ví dụ: Trường vectơ (Trường lực, Trường hấp dẫn)

3 Đạo hàm của hàm vô hướng, hàm véc tơ

3.1 Đạo hàm của hàm véc tơ một biến

Giử sử hàm véc tơ v chỉ phụ thuộc vào một biến độc lập $t \in D$:

$$v = v(t) = [v_1(t), v_2(t), v_3(t)].$$

Khi đó nếu các hàm thành phần $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ khả vi tại $t \in D$ thì ta nói v khả vi tại t và định nghĩa đạo hàm của hàm véc tơ v, ký hiệu là $v'(t)$, bởi

$$v'(t) = [v_1'(t), v_2'(t), v_3'(t)].$$

Nếu chúng ta biểu diễn $v(t) = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}$ thì

$$v'(t) = v_1'(t)\mathbf{i} + v_2'(t)\mathbf{j} + v_3'(t)\mathbf{k}.$$

Chú ý: đạo hàm của hàm véc tơ cũng có các tính chất như của đạo hàm hàm một biến số. Hơn nữa nó thỏa mãn các tính chất sau:

(1) $(u \bullet v)' = u' \bullet v + u \bullet v'$.

(2) $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

(3) $(u, v, w)' = (u', v, w) + (u, v', w) + (u, v, w')$.

3.2 Đạo hàm riêng

Ví dụ: xét một hàm số phụ thuộc vào hai biến độc lập $z = z(x, y) = x^3y^2 + 3x + 2y - 1$.

Nếu chúng ta coi y là hằng số thì z được xem là hàm số một biến của x, khi đó chúng ta có thể xét đạo hàm của hàm số này theo biến x, ký hiệu z_x. Cụ thể

$$z_x = 3x^2y^2 + 3.$$

Nó được gọi là đạo hàm riêng của z theo biến x.

Tương tự đạo hàm riêng của z theo y sẽ là

$$z_y = 2x^3y + 2.$$

Một cách tổng quát chúng ta cũng hoàn toàn định nghĩa được các đạo hàm riêng của một hàm phụ thuộc nhiều biến số.

Giả sử xét hàm hai biến số $z = z(x, y)$ và (x_0, y_0) là một điểm cố định.

Khi đó định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số $z = z(x, y)$ theo biến x tại điểm (x_0, y_0) chính là đạo hàm (nếu có) của hàm số một biến $z(x, y_0)$ (tức là khi cho $y = y_0$) tại điểm x_0, ký hiệu là $z_x(x_0, y_0)$, và cho bởi,

$$z_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} z(x, y_0) \mid_{x=x_0} .$$

Bên cạnh đó người ta còn ký hiệu

$$z_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Đạo hàm riêng của hàm số z theo biến y tại điểm (x_0, y_0) được định nghĩa hoàn toàn tương tự và được ký hiệu là

$$z_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Về mặt ý nghĩa, đạo hàm riêng thể hiện tốc độ thay đổi của hàm số theo một biến khi cho cố định các biến số khác. Ví dụ z_x thể hiện tốc độ thay đổi của z theo x thay đổi khi cho cố định $y = y_0$.

Chú ý: chúng ta hoàn toàn có thể mở rộng khái niệm đạo hàm riêng cho hàm của nhiều hơn 2 biến số một cách tương tự.

Ví dụ: cho hàm $u = u(x, y, z) = x^2 y^5 z^7$ thì

$$u_x = 2x2y^5 z^7,\ u_y = 5x^2 y^4 z^7,\ u_z = 7x^2 y^5 z^6.$$

Các đạo hàm riêng như trên được gọi là các đạo hàm riêng cấp 1. Bên cạnh đó nếu tiếp tục tính các đạo riêng của các đạo hàm riêng cấp 1 thì chúng ta sẽ được các đạo hàm riêng cấp 2...

Các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm hai biến $z = z(x, y)$ được ký hiệu như sau:

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Ví dụ đối với hàm z trong ví dụ ở đầu phần này thì

$$z_{xx} = 6xy^2, z_{yy} = 2x^3,$$

$$z_{xy} = 6x^2 y, z_{yx} = 6x^2 y,$$

$$z_{xxx} = 6y^2, z_{xxy} = 12xy, ...$$

3.3 Đạo hàm riêng của hàm véc tơ

Mở rộng khái niệm đạo hàm riêng của hàm số như trên chúng ta cũng định nghĩa đạo hàm riêng của hàm véc tơ theo một biến nào đó bởi đạo hàm riêng của từng hàm thành phần theo biến đó.

Ví dụ giả sử $v = [v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)]$, khi đó đạo hàm riêng cấp 1 của v theo x là

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = [\frac{\partial v_1}{\partial x},\ \frac{\partial v_2}{\partial x},\ \frac{\partial v_3}{\partial x}],$$

hoặc có thể biểu diễn

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\mathbf{k}.$$

Các đạo hàm riêng v_y, v_z được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Các đạo hàm riêng cấp cao hơn của v cũng được mở rộng tương tự.

Ví dụ đạo hàm riêng cấp 2 của v theo x, y là

$$v_{xy} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = [\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y}].$$

4 Gradient của trường vô hướng, đạo hàm theo hướng

Giả sử hàm ba biến số $f = f(x,y,z)$ được định nghĩa và khả vi trong một miền $D \subset \mathbb{R}^3$. Khi đó ta định nghĩa gradient của f, ký hiệu bởi $grad\ f$, hoặc ∇f, được định nghĩa là hàm véc tơ có các thành phần là các đạo hàm riêng của nó,

$$grad\ f = \nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}] = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \ \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \ \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Toán tử vi phân napla ∇ định nghĩa bởi

$$\nabla = [\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}] = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \ \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \ \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Định nghĩa 4.1. *Cho hàm số $f = f(x,y,z)$ và $v \in \mathbb{R}^3$ là một véc tơ đơn vị. Khi đó định nghĩa đạo hàm theo hướng của véc tơ v, ký hiệu là $D_v f$, tại điểm một điểm cố định $P \in \mathbb{R}^3$ bởi*

$$D_v f(P) = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s},$$

với Q là một điểm thay đổi nằm trên đường thẳng L đi qua P theo phương của véc tơ v và | s | là khoảng cách giữa Q và P.

Chúng ta cũng có

$$D_v f(P) = \lim_{s\to 0} \frac{f(P+sv) - f(P)}{s},$$

Đạo hàm theo hướng như trên thể hiện tốc độ thay đổi của hàm f theo hướng của véc tơ v.

Nếu chúng ta đưa vào hệ tọa độ Decart và $P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, và $v = (v_1, v_2, v_3)$. Khi đó

$$D_v f(P) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + sv_1, y_0 + sv_2, z_0 + sv_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{s}$$

$$D_v f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P)v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(P)v_3 = grad\ f(P) \bullet v$$

Như vậy nếu v là một véc tơ đơn vị chúng ta có công thức

$$D_v f = grad\ f \bullet v$$

Chú ý: nếu v là một véc tơ bất kỳ khác 0 thì

$$D_v f = \frac{1}{|\ v\ |} grad\ f \bullet v$$

Ví dụ: tìm đạo hàm theo hướng của hàm $f = 2x^3 + 2xy^2 - z^2 + 1$ tại điểm $P(1, -1, 2)$ theo hướng của véc tơ $v = (1, 0, -1)$.

5 Divergence và độ xoắn của trường véc tơ

Giả sử $v = [v_1, v_2, v_3] = [v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)]$ là một hàm véc tơ khả vi. Khi đó ta định nghĩa Divergence của v, ký hiệu là $Divv$, bởi

$$Div\ v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \ \frac{\partial v_2}{\partial y},\ \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Ví dụ: cho $v = [3xz, 2xy, -yz^2]$ thì $Div\ v = 3z + 2x - 2yz$.

Độ xoắn curl của v, ký hiệu $curl\ v$, cho bởi khai triển hình thức định thức sau

$$curl\ v = \nabla \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{5.3}$$

$$curl\ v = (\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y})\mathbf{k}$$

6 Giới thiệu phần mềm tính toán

Giới thiệu một số ứng dụng phần mềm Mathematica thực hiện các phép nhân véc tơ và vi phân hàm số, hàm véc tơ.

Tài liệu

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, (10th Edition, 2011), Nhà xuất bản Wiley, p. 256-309.

[2] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp Tập I* (2014), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[3] Strang Gilbert, *Introduction to Linear Algebra* (5th Edition, 2016), Wellesley-Cambridge Press.