Suport Proiect 1

- Demonstrator bazat pe rezolutie -

FND si FNC

- Un literal este o variabila sau negatia unei variabile.
- O forma normala disjunctiva (FND) este o disjunctie de conjunctii de literali.
- O forma normala conjuctiva (FNC) este o conjunctie de disjunctii de literali.

Teorema

Pentru orice formula φ exista o FND θ_1 si o FNC θ_2 astfel incat

$$\models \varphi \leftrightarrow \theta_1 \text{ si } \models \varphi \leftrightarrow \theta_2$$

FNC

Orice formula poate fi adusa la FNC prin urmatoarele transformari:

1. inlocuirea implicatiilor si echivalentelor

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

2. regulile De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$$

3. principiului dublei negatii

$$\neg\neg\psi \sim \psi$$

4. distributivitatea

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$
$$(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \sim (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$$

Exemple

1. Determinati FNC pentru formula $(\neg p \to \neg q) \to (p \to q)$:

   $(\neg p \to \neg q) \to (p \to q)$
   $\sim \neg(\neg p \to \neg q) \vee (p \to q)$
   $\sim \neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)$
   $\sim (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$
   $\sim (\neg p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q)$

2. Determinati FNC pentru formula $\neg((p \wedge q) \to q)$:

   $\neg((p \wedge q) \to q)$
   $\sim \neg(\neg(p \wedge q) \vee q)$
   $\sim p \wedge q \wedge \neg q$

Rezolutia

- Rezolutia propozitionala este o regula de deductie pentru calculul propozitional clasic.
- Multe demonstratoare automate si SAT-solvere au la baza rezolutia.
- Utilizand rezolutia se poate construi un demonstrator automat corect si complet pentru calculul propozitional, fara alte teoreme si reguli de deductie.
- Limbajul PROLOG este fundamentat de rezolutie.

Rezolutia folosește formule in forma clauzală.

Clauze

- Un literal este o variabila sau negatia unei variabile.
- O clauza este o multime finita de literali:

$$C = \{L_1, \ldots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \ldots, L_n \text{ sunt literali.}$$

- Clauza vida va fi notată $\square := \{\}$ (disjunctie indexata de $\emptyset$).
- Clauza $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ o identificăm cu $L_1 \vee \ldots \vee L_n$.
- O mulțime de clauze $\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ o identificăm cu $C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$.

clauza = disjunctie de literali

multime de clauze = FNC

Forma clauzala

Definitie

Fie φ o formula si $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ o FNC astfel incat $\models \varphi \leftrightarrow C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$. Spunem ca multimea de clauze $\{C_1, \cdots, C_n\}$ este **forma clauzala** a lui φ.

Definitie

Daca $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ este o multime de formule atunci o forma clauzala pentru Γ este $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_n$ unde $\mathcal{S}_i$ este forma clauzala pentru γ_i oricare i.

Derivarea prin rezoluție

Regula Rezolutiei

$$Rez \ \ \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$ si $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$.

Definitie

Fie $\mathcal{S}$ o multime de clauze. O *derivare prin rezolutie* din $\mathcal{S}$ este o secventa finita de clauze astfel incat fiecare clauza este din $\mathcal{S}$ sau rezulta din clauze anterioare prin rezolutie.

Derivare prin rezolutie

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg r, s\}, \{p\}, \{r\}, \{\neg s\}\}$

O derivare prin rezolutie pentru $\square$ din $\mathcal{S}$ este:

$C_1 = \{\neg s\}$ $(\in \mathcal{S})$
$C_2 = \{\neg q, \neg r, s\}$ $(\in \mathcal{S})$
$C_3 = \{\neg q, \neg r\}$ $(C_1,\ C_2,\ Rez)$
$C_4 = \{r\}$ $(\in \mathcal{S})$
$C_5 = \{\neg q\}$ $(C_3,\ C_4,\ Rez)$
$C_6 = \{\neg p, q\}$ $(\in \mathcal{S})$
$C_7 = \{\neg p\}$ $(C_5,\ C_6,\ Rez)$
$C_8 = \{p\}$ $(\in \mathcal{S})$
$C_9 = \square$ $(C_7,\ C_8,\ Rez)$

Demonstratii prin rezolutie

Teorema

Fie Γ o multime finita de formule, φ o formula si $\mathcal{S}$ o forma clauzala pentru $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Sunt echivalente:

- $\Gamma \models \varphi$,
- exista o derivare prin rezolutie a clauzei vide $\square$ din $\mathcal{S}$.

Algoritmul Davis-Putnam

Algoritmul DP cu intrarea $\mathcal{S}$ se termina cu $\{\square\}$ daca si numai daca exista o derivare prin rezolutie a clauzei vide $\square$ din $\mathcal{S}$.

Fie C clauza si $\mathcal{S}$ multime de clauze

- $Var(C) = \{p \in Var | p \in C \text{ sau } \neg p \in C\}$,
- $Var(\mathcal{S}) = \bigcup \{Var(C) | C \in \mathcal{S}\}$.

O clauza C este triviala daca exista $p \in Var$ a.i. $p, \neg p \in C$.

Algoritmul Davis-Putnam(DP)

Intrare: $\mathcal{S}$ multime nevida de clauze netriviale.
$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$; $i := 1$;

P1. $v_i \in Var(\mathcal{C}_i)$;

$\mathcal{T}_i^1 := \{C \in \mathcal{S}_i | v_i \in C\}$;
$\mathcal{T}_i^0 := \{C \in \mathcal{S}_i | \neg v_i \in C\}$;
$\mathcal{T}_i := \mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1$;
$\mathcal{U}_i := \emptyset$;

P2. if $\mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset$ and $\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset$ then

$\mathcal{U}_i := \{C_1 \setminus \{v_i\} \cup C_0 \setminus \{\neg v_i\} | C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}$;

P3. $\mathcal{S}_{i+1} = (\mathcal{S}_i \setminus \mathcal{T}_i) \cup \mathcal{U}_i$; $\mathcal{S}_{i+1} = \mathcal{S}_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}_{i+1} | C \text{ triviala}\}$;

P4. if $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$ then *NU*

else if $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$ then *DA*

else $\{i := i + 1$; go to P1$\}$.

Run DP

Exemplul 1

$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S} = \{\{\neg p, q, \neg s\}, \{\neg r, \neg q\}, \{p, r\}, \{p\}, \{r\}, \{s\}\}$

$v_1 := p;\ T_1^1 := \{\{p, r\}, \{p\}\};\ T_1^0 := \{\{\neg p, q, \neg s\}\};$
$U_1 := \{\{r, q, \neg s\}, \{q, \neg s\}\};$
$\mathcal{S}_2 := \{\{\neg r, \neg q\}, \{r\}, \{s\}, \{r, q, \neg s\}, \{q, \neg s\}\};\ i := 2;$

$v_2 := q;\ T_2^1 := \{\{r, q, \neg s\}, \{q, \neg s\}\};\ T_2^0 := \{\{\neg r, \neg q\}\};$
$U_2 := \{\{r, q, \neg r\}, \{\neg s, \neg r\}\};$
$\mathcal{S}_3 := \{\{r\}, \{s\}, \{\neg s, \neg r\}\};\ i := 3;$

$v_3 := r;\ T_3^1 := \{\{r\}\};\ T_3^0 := \{\{\neg s, \neg r\}\};\ U_3 := \{\{\neg s\}\};$
$\mathcal{S}_4 := \{\{s\}, \{\neg s\}\};\ i := 4;$

$v_4 := s;\ T_4^1 := \{\{s\}\};\ T_4^0 := \{\{\neg s\}\};\ U_4 := \{\square\};$
$\mathcal{S}_5 := \{\square\}\ DA$

Exemplul 2

$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S} = \{\{p, \neg r\}, \{q, p\}, \{q, \neg p, r\}\}$

$v_1 := r;\ T_1^1 := \{\{q, \neg p, r\}\};\ T_1^0 := \{\{p, \neg r\}\};$
$U_1 := \{\{q, \neg p, p\}\};$
$\mathcal{S}_2 := \{\{q, p\}\};\ i := 2;$

$v_2 := q;\ T_2^1 := \{\{q, p\}\};\ T_2^0 := \emptyset;$
$U_2 := \emptyset;$
$\mathcal{S}_3 := \emptyset\ NU$

Exemplul 3

Demonstrați că $\models p \to (q \to p)$.

Pentru aceasta determinăm o formă clauzală pentru $\neg(p \to (q \to p))$ si aplicăm DP.

Determinam FNC pentru $\neg(p \to (q \to p))$:
$\neg(p \to (q \to p)) \sim \neg(\neg p \vee \neg q \vee p) \sim p \wedge q \wedge \neg p$
Forma clauzala este $\mathcal{S} = \{\{p\}, \{q\}, \{\neg p\}\}$.

Aplicam DP:
$\{\{p\}, \{q\}, \{\neg p\}\}$
$\{\{p\}, \{\neg p\}\}$
$\{\square\}$ *DA*

Exista o derivare prin rezolutie a clauzei vide din $\mathcal{S}$. In consecinta, $\models p \to (q \to p)$.

Exemplul 4

Cercetati daca $\{p \vee q\} \models p \wedge q$.

Pentru aceasta, determinăm o formă clauzală a mulțimii $\Delta = \{p \vee q, \neg(p \wedge q)\}$ și aplicăm DP.

O forma clauzala pentru $p \vee q$ este $\{\{p, q\}\}$. O forma clauzala pentru $\neg(p \wedge q)$ este $\{\{\neg p, \neg q\}\}$.
Forma clauzala pentru Δ este $\mathcal{S} = \{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

Aplicam DP:
$\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$
$\{\{q, \neg q\}\}$
$\{\}$ (multimea vida) *NU*

In acest caz, $\{p \vee q\} \not\models p \wedge q$.

Exemplul 5

Cercetati daca $\{p, p \to (q \vee r)\} \models \neg p \to (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$.

Determinam forma clauzala pentru
$\{p, p \to (q \vee r), \neg(\neg p \to (\neg p \wedge q \wedge \neg r))\}$.

Forma clauzala a lui p este $\{\{p\}\}$.

$p \to (q \vee r) \sim \neg p \vee q \vee r$ (FNC)
Forma clauzala a lui $p \to (q \vee r)$ este $\{\{\neg p, q, r\}\}$.

$\neg(\neg p \to (\neg p \wedge q \wedge \neg r)) \sim \neg(p \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)) \sim \neg p \wedge (p \vee \neg q \vee r))$
Forma clauzala a lui $\neg(\neg p \to (\neg p \wedge q \wedge \neg r))$ este $\{\{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$.

Aplicam DP:
$\{\{p\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$
$\{\{q, r\}, \square, \{\neg q, r\}\}$
$\{\{r\}, \square\}$
$\{\square\}$ *DA*
Este adevarat ca $\{p, p \to (q \vee r)\} \models \neg p \to (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

Vezi cerinta Proiect 2!