Lotka-Volterra-modellen

ING2501-1 24H Matematiske Metoder 2

Adrianne Bendiksen, Brede Solberg,
Stian Loddengaard, Askil Uppstad, & Andreas Kragseth

13.oktober 2024
Cyberingeniørskolen 2024

Sammendrag

Denne oppgaven tar for seg Lotka-Volterra-modellen, en matematisk modell som beskriver dynamikken mellom to arter i et predator-byttedyr-forhold. Modellen består av to differensialligninger som uttrykker hvordan byttedyrpopulasjonen og predatorpopulasjonen påvirker hverandre over tid. Hovedfokuset i denne oppgaven er å bruke modellen til å studere forholdet mellom kanadisk gaupe og snøskohare.

I tillegg til å presentere den deterministiske modellen, som forutsetter ideelle forhold uten tilfeldige variasjoner, utvides modellen med stokastiske elementer. Dette gjør det mulig å inkludere tilfeldige faktorer som vær, sykdommer og andre naturlige forstyrrelser som påvirker populasjonene. Gjennom simuleringer sammenlignes den deterministiske og den stokastiske versjonen av modellen, og vi ser hvordan tilfeldige variasjoner kan føre til mer realistiske populasjonssvingninger.

Resultatene fra simuleringene viser at Lotka-Volterra-modellen er i stand til å fange opp de sykliske svingningene i predator- og byttedyrpopulasjoner. Inkluderingen av stokastiske elementer gjør modellen mer fleksibel, realistisk og tilater et større slingningsrom, noe som gir bedre innsikt i hvordan populasjoner kan oppføre seg i virkelige, komplekse økosystemer.

Oppgaven konkluderer med at Lotka-Volterra-modellen gir en nyttig, men forenklet, beskrivelse av populasjonsdynamikk, og at stokastiske elementer kan gi en mer nøyaktig representasjon av naturlige svingninger i populasjoner.

Innhold

1 Innledning

Lotka-Volterra-modellen er en klassisk matematisk modell som beskriver dynamikken mellom to arter i et rovdyr-byttedyr-forhold. Gjennom et system av differensialligninger kan modellen gi innsikt i hvordan populasjoner varierer over tid under ideelle betingelser, hvor predatorer avhenger av byttedyr for sin vekst. Modellen er enkel, men den stemmer godt, og brukes ofte til å forstå grunnleggende populasjonsdynamikk.

Likevel fanger den deterministiske Lotka-Volterra-modellen bare opp en forenklet versjon av virkeligheten. I naturlige systemer finnes det alltid en viss grad av tilfeldighet eller variasjon, forårsaket av faktorer som værforhold, sykdommer eller andre eksterne påvirkninger, som kan endre populasjonenes utvikling. For å inkludere slike tilfeldige faktorer, kan modellen utvides ved hjelp av stokastiske elementer, noe som gir en mer realistisk representasjon av populasjonenes utvikling og fluktuasjoner.

Denne modellen har vist seg å være svært nyttig i analysen av populasjonsdynamikken mellom kanadisk gaupe og snøskohare, som har vært observert over mange tiår i Nord-Amerika. Disse artene er kjent for å ha en tydelig syklisk populasjonsdynamikk med en periode på omtrent ti år, der veksten i snøskoharepopulasjonen fører til en tilsvarende vekst i gaupepopulasjonen. Når gaupebestanden øker, fører det til et økt predasjonspress som igjen reduserer antallet harer, noe som etter hvert også resulterer i en nedgang i gaupepopulasjonen. Denne dynamikken gjør kanadisk gaupe og snøskohare til et ideelt system for å undersøke anvendelsen og utvidelsen av Lotka-Volterra-modellen. Dette prosjektet vil fokusere på forholdet mellom kanadisk gaupe og snøskohare, og hvordan dette forholdet kan analyseres og modelleres ved hjelp av Lotka-Volterra-modellen, både i deterministisk og stokastisk form.

Prosjektets hovedproblemstilling er:

–Hvordan kan Lotka-Volterra-modellen beskrives og forstås gjennom matematisk analyse, og hvordan påvirker inkluderingen av stokastiske elementer modellens dynamikk, for å oppnå en mer realistisk beskrivelse av populasjonssvingninger i komplekse systemer?

For å besvare denne problemstillingen vil prosjektet adressere følgende underproblemstillinger:

–Hvordan kan Lotka-Volterra-modellen matematisk beskrives, og hva er de sentrale egenskapene ved løsningen av den deterministiske modellen?

–Hvordan kan stokastiske elementer inkluderes i Lotka-Volterra-modellen, og hvilke metoder kan benyttes for å analysere og simulere effektene av slike elementer?

For å besvare disse problemstillingene vil Lotka-Volterra-modellen først undersøkes gjennom en matematisk analyse, med særlig vekt på differensialligningene og deres løsninger. Deretter vil modellen utvides ved å inkludere stokastiske ledd som representerer tilfeldige variasjoner i populasjonene. Ved hjelp av numeriske simuleringer vil de to modellene sammenlignes for å undersøke hvordan stokastiske faktorer påvirker populasjonsdynamikken. Målet med prosjektet er å demonstrere forståelsen av de matematiske modellene og vise hvordan stokastisk modellering kan gi viktig innsikt i oppførselen til populasjoner i naturen.

2 Teoretisk bakgrunn

2.1 Lotka-Volterra-modellen

Lotka-Volterra-modellen er en av de mest kjente matematiske modellene som brukes til å beskrive dynamikken i et rovdyr-byttedyr-forhold. Modellen består av to sammenkoblede differensialligninger som viser hvordan populasjonsstørrelsene til en predatorart og en byttedyrart endrer seg over tid. Forholdet mellom predator (kanadisk gaupe) og byttedyr (snøskohare) kan uttrykkes ved følgende ligninger:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \delta xy \end{aligned} \tag{1}$$

Her representerer $x(t)$ populasjonsstørrelsen til byttedyret (snøskoharen) og $y(t)$ populasjonsstørrelsen til predator (kanadisk gaupe), mens t er tiden. Hvorav de ulike konstanene i ligningene har en spesifikk økologisk betydning:

α: Representerer den naturlige vekstraten til byttedyrene når det ikke er predasjon til stede. Dette betyr at snøskoharene vokser eksponentielt under ideelle forhold.

β: Predasjonskoeffisienten, som måler hvor effektiv rovdyrene (gaupe) er til å jakte på byttedyrene (hare). Dette leddet reduserer byttedyrpopulasjonen proporsjonalt med antallet rovdyr.

γ: Den naturlige dødsraten til rovdyrpopulasjonen i fravær av byttedyr, grunnet rovdyrenes fravær til næring.

δ: Vekstfaktoren til rodyrpopulasjonen som følge av tilgang på byttedyr. Dette leddet representerer hvordan gaupene drar nytte av harene som næring, noe som bidrar til vekst i gaupepopulasjonen.

Disse to ligningene beskriver en syklisk interaksjon mellom byttedyr og rodyr, der populasjonen til hver art påvirker den andre på en dynamisk måte.

2.1.1 Fastpunkter

For å forstå den langsiktige oppførselen til Lotka-Volterra-modellen, er det viktig å analysere fastpunktene i systemet. Fastpunkter er tilstander der både rovdyr- og byttedyrpopulasjonene forblir konstante over tid, altså der det ikke er noen netto vekst eller reduksjon i en av populasjonene.

For å finne fastpunktene settes begge differensialligningene lik null:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Dette gir oss følgende system av ligninger som skal løses:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x - \beta xy \\ -\gamma y + \delta xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ y(\delta x - \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha - \beta y \\ \delta x - \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \beta y \\ \delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{\gamma}{\delta} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Som gir oss løsningen:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} \right\} \tag{5}$$

Disse to fastpunktene har ulik biologisk betydning. Fastpunktet $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kalles en triviell løsning, og representerer en tilstand der begge populasjonene er utryddet. Dette er imidlertid ikke en stabil tilstand for et dynamisk økosystem siden selv små introduksjoner av individer utenifra vil føre til en økning i populasjonen.

Fastpunktet $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}$ kalles en ikke-triviell løsning, og representerer en balanse mellom rovdyr- og byttedyrpopulasjonene. I denne tilstanden er veksten av begge populasjonene i balanse, noe som fører til stabile populasjonsstørrelser der begge artene sameksisterer.

2.1.2 Eliminering av t

Utfra Formel 1 kan vi eliminere t ved å sette opp denne likningen:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{x(\alpha - \beta y)}{y(\delta x - \gamma)} \tag{6}$$

Utfra denne likninen får vi:

$$\begin{aligned} y(\delta x - \gamma)dx &= x(\alpha - \beta y)dy \\ \Rightarrow \frac{\alpha - \beta y}{y}dy - \frac{\delta x - \gamma}{x}dx &= 0 \\ \Rightarrow \int \frac{\delta x - \gamma}{x}dx - \int \frac{\alpha - \beta y}{y}dy & \\ = \int \frac{\delta x - \gamma}{x}dx + \int \frac{\beta y - \alpha}{y}dy & \\ = \delta \int \frac{x}{x}dx - \gamma \int \frac{1}{x}dx + \beta \int \frac{y}{y}dy - \alpha \int \frac{1}{y}dy & \\ = \delta x - \gamma \ln|x| + \beta y - \alpha \ln|y| + C &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Siden Lotka-Volterra beskriver bestander, kan ikke x og y være negative:

$$(x, y) \in (0, \infty) \Rightarrow \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y) = K \tag{8}$$

Der K er en konstant som vil være lik initialtilstanden ved $t = 0$, altså:

$$K = \delta x_0 - \gamma \ln(x_0) + \beta y_0 - \alpha \ln(y_0) \tag{9}$$

$$V(x, y) = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y) \tag{10}$$

Denne formelen gir et uttrykk for forholdet mellom x og y uavhengig av tiden. Vi eliminerer t for å kunne analysere forholdet mellom byttedyr- og rovdyrpopulasjonene direkte, uten å måtte løse tidsavhengige differensialligninger. Dette forenkler analysen og lar oss fokusere på faseplanet, hvor vi kan studere stabile og sykliske interaksjoner mellom bestandene. Det gir også et uttrykk for en bevart kvantitet som beskriver systemets dynamikk.

2.1.3 Bevegelsen i faserommet går mot klokka

Ligningen som beskriver bevegelsen til partikkelbanen er:

$$\dot{r} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x - \beta x y \\ -\gamma y + \delta x y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta x\left(y - \frac{\alpha}{\beta}\right) \\ \delta y\left(x - \frac{\gamma}{\delta}\right) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$\dot{x}(t)$ representerer endringen i x (byttedyrpopulasjonen) over tid. Dette leddet er negativt proposjonalt med både x og y, noe som betyr at når y (rovdyrpopulasjonen) er større enn $\frac{\alpha}{\beta}$, vil x begynne å minke. Verdien $\frac{\alpha}{\beta}$ kan tolkes som den maksimae vekstraten for byttedyrene α delt på effekten rovdyrene har på byttedyrets dødelighet β. Med andre ord er $\frac{\alpha}{\beta}$ en kritisk terskel for når byttedyrene kan vokse uten for stor innvirkning fra rovdyr.

$\dot{y}(t)$ representerer endringen i rovdyrpopulasjonen y over tid. Dette leddet er positivt proposjonalt med både y og x, noe som betyr at rovdyrene øker i antall når det er rikelig med byttedyr til stede. Omvendt, når det er få byttedyr, vil rovdyrpopulasjonen begynne å synke. Forholdet $\frac{\gamma}{\delta}$ representerer dødsraten til rovdyrene γ delt på effekten byttedyrene har på vekstraten til rovdyrene δ.

Når rovdyrene (y) er få, vil byttedyrpopulasjonen (x) øke fordi de har mindre predasjon å bekymre seg for. Dette resulterer i en bevegelse mot høyre i faseplanet. Når byttedyrpopulasjonen (x) er høy, vil rovdyrpopulasjonen (y) begynne å vokse fordi det er rikelig med mat. Etter hvert som rovdyrene spiser mer og mer byttedyr, vil byttedyree begynne å avta i antall. Dette fører etter en stund til at rovdyrene også begynner å synke, ettersom maten blir knapp.

Bevegelsen i faseplanet er derfor gitt av en en syklus med de 4 følgene fasene:

1. x stiger når $y < \frac{\alpha}{\beta}$
2. y stiger når $x > \frac{\gamma}{\delta}$
3. x minker når $y > \frac{\alpha}{\beta}$
4. y minker når $x < \frac{\gamma}{\delta}$

Gitt av disse fire syklyssene kan vi nå se at enhver funksjon som følge av funksjonssettet vil så bevege seg i mot klokken. Byttedyrene øker først raskt før de begynner å synke, og rovdyrene følger etter med en tidsforsinkelse. Dette skaper en stabil syklisk bane som i faseplanet ser ut som en bevegelse mot klokken rundt likevektspunktet $\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}$.

2.1.4 Jacobmatrisen

Jacobimatrisen er en matrise som representerer alle de partiellderiverte til en vektorfunksjon $\boldsymbol{f}$. Denne matrisen brukes for å analysere hvordan små endringer i variablene x og y påvirker endringsratene i systemet. Jacobimatrisen kan formelt uttrykkes som:

$$\boldsymbol{j_f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla^T f_1 \\ \vdots \\ \nabla^T f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Denne matrisen inneholder alle de partielle derivatene av funksjonene i systemet, noe som gjør det mulig å forstå hvordan endringer i hver variabel påvirker hele systemet. Jacobimatrisen er et verktøy som hjelper oss med å bestemme stabiliteten til fastpunktene ved å se på hvordan vekstratene endrer seg rundt disse punktene.

For å finne Jacobimatrisen for Lotka-Volterra-likningssettet, definerer vi først vektorfunksjonen $f(x, y)$ som inneholder uttrykkene for endringsratene for både byttedyr- og rodyrpopulasjonene:

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ y(\delta x - \gamma) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Denne funksjonen representerer vekstratene for begge populasjonene som er avhengige av både egne populasjonsstørrelser og interaksjonen mellom byttedyr og rovdyr.

For å finne Jacobimatrisen $\boldsymbol{j_f}$, beregner vi de partielle derivatene av funksjonen f(x,y) med hensyn til x og y. Vi setter inn f(x,y) i Jacobimatrisen og beregner de partiellderiverte:

$$\boldsymbol{j_f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\alpha - \beta y)}{\partial x} & \frac{\partial x(\alpha - \beta y)}{\partial y} \\ \frac{\partial y(\delta x - \gamma)}{\partial x} & \frac{\partial y(\delta x - \gamma)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix} \tag{14}$$

Dette resulterer i en Jacobimatrise som gir oss informasjon om hvordan endringer i populasjonsstørrelsene x og y påvirker vekstratene til begge artene. Denne matrisen kan videre brukes til å analysere stabiliteten til fastpunktene i systemet ved å se på egenverdiene.

Om vi beskriver egenverdiene til jacobmatrisen i standardform for komplekse tall: $\lambda = a + bi$ kan vi bruke hver del for å analysere bevegelsen til

Den reelle delen a forteller om stabiliteten i systemet. Om $a < 0$ vil systemet konvergere mot likevektspunktet, om $a > 0$ vil systemet divergere fra likevektspunktet. Dersom $a = 0$ vil systemet verken konvergere eller divergere. Dersom én av egenverdiene er positiv mens en annen er negativ, vil det si at punktet er et ustabilt salpunkt.

Den komplekse delen b påvirker ikke stabiliteten til systemet, men forteller om vinkelfrekvensen til svingningene.

[1]

2.1.4.1 Jacobmatrisen i fastpunkt

Om man bruker jacobmatrisen vist i Formel 14, kan man finne jacobmatrisen i fastpunktene og analysere dem for å finne egenverdier.

For fastpunktet $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ får man jacobmatrisen

$$\boldsymbol{j_f}(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \tag{15}$$

For å analysere stabiliteten til fastpunktet, finner vi egenverdiene til matrisen $\boldsymbol{j_f}(0,0)$. Vi gjør dette ved å løse karakteristisk polynom gitt av determinanten av $\boldsymbol{j_f} - (\gamma I)$.

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} \alpha - \lambda & 0 \\ 0 & -\gamma - \lambda \end{bmatrix}\right) &= (\alpha - \lambda)(-\gamma - \lambda) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda + \gamma)(\lambda - \alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = -\gamma \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

Egenverdier har motsatt fortegn som vil si at fastpunktet er et ustabilt salpunkt

For fastpunkt $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}$

$$
j_f\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} & -\beta \cdot \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \cdot \frac{\alpha}{\beta} & \delta \cdot \frac{\gamma}{\delta} - \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{bmatrix} \tag{17}
$$

Deretter finner vi de komplekse egenverdiene:

$$
\begin{gathered} \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \alpha\gamma = 0 \\ \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\alpha\gamma} \end{gathered} \tag{18}
$$

Siden egenverdiene er rene imaginære tall. Dette betyr at systemet vil oscillere rundt fastpunktet, altså vil både byttedyr- og predatorpopulasjonene svinge i faste sykluser.

Det faktum at egenverdiene er rent imaginære uten noen reell komponent $(a = 0)$ betyr at systemet er nøytralt stabilt. Med andre ord vil populasjonene svinge rundt likevektspunktet uten å øke eller minke i amplitude over tid, noe som betyr at de sykliske mønstrene fortsetter uendret.

Som nevnt tidligere, forteller den imaginære delen om vinkelfrekvensen til svingningen, så utifra Formel 18 kan man få:

$$
\omega = \sqrt{\alpha\gamma} \tag{19}
$$

Dette uttrykket beskriver hvor raskt populasjonene svinger i faseplanet. Jo større verdiene for α (vekstrate for byttedyr) og γ (dødsrate for predatorer) er, jo høyere blir frekvensen til svingningene. Dette betyr at dynamikken i systemet blir mer intens når vekst- og dødsratene er store.

Dette betyr at perioden T kan skrives:

$$
T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\gamma}} \tag{20}
$$

Siden egenverdiene i punkt $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ ikke har noen reelle verdier, kan vi konkludere med at systemet er stabilt rundt fastpunktet.

2.2 Stokastisk modellering

Lotka-Volterra-modellen i sin opprinnelige form tar ikke hensyn til tilfeldige faktorer som kan påvirke populasjonsdynamikken, som for eksempel værforhold, sykdommer eller plutselige endringer i habitatet. For å få en mer realistisk beskrivelse av systemet, kan vi inkludere stokastiske elementer som simulerer tilfeldighetene som påvirker populasjonene.

2.2.1 Stokastisk prosess

En stokastisk prosess er en modell som beskriver en sekvens av tilfeldige variabler som utvikler seg over tid. En stokastisk prosess kan være diskre eller kontinuerlig. I denne sammenhengen er det en kontinuerlig stokastisk prosess som benyttes, ettersom populasjonsdynamikkene i naturen utvikler seg kontinuerlig. [2]

2.2.2 Wienerprosess

En Wienerprosess er en kontinuerlig stokastisk prosess oppkalt etter den amerikanske matematikeren Norbert Wiener for hans arbeid på endimensjonal Borwnsk bevegelse[1]. Wienerprosessen kan representeres som grensen av en tilfeldig bevegelsessti:

[1]Tilfeldige bevegelser, originalt brukt for å beskrive bevegelsen til små partikler i en væske eller gass

$$W_{n(t)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1 \le k \le |nt|} \xi_k, t \in [0, 1] \quad (21)$$

[3]

Der $\xi_1, \xi_2 ... \xi_n$ er uavhengige **gaussiske variabler**[2].

Denne ligningen beskriver hvordan Wienerprosessen er en sum av tilfeldige små endringer, som gjør den velegnet til å representere støy i en stokastisk modell.

2.2.3 Stokastisk differensiallikning

En stokastisk differensiallikning er en differensiallikning som inneholder én eller flere stokastiske prosesser. Stokastiske differensiallikninger er ofte formulert via sine integraler siden den vanligste støyen er Brownsk bevegelse, som ikke er deriverbar. En typisk likning skrives derfor på formen:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad (22)$$

[4]

Der W beskriver en Wienerprosess. For finne et uttrykk for dW

Variansen og standardavvik til W_t defineres som følgende[3]

$$\begin{gathered} \mathrm{Var}(W_t) = t \Rightarrow \mathrm{Var}(dW) = dt \\ \mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \Rightarrow \mathrm{SD}(dW) = \sqrt{\mathrm{Var}(dW)} = \sqrt{dt} \end{gathered} \quad (23)$$

dW_t kan uttrykkes som:

$$dW_t = \xi\sqrt{dt} \quad (24)$$

Der ξ er en gaussisk variabel. Utifra dette kan vi omskrive Formel 22

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)\xi\sqrt{dt} \quad (25)$$

[3]

2.2.4 Stokastisk representasjon av Lotka-Volterra-modellen

For å modellere tilfeldighet i Lotka-Volterra-modellen, setter vi inn x og y inn i standardformen for stokastiske differensiallikninger vist i Formel 22.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x(\alpha - \beta y)dt + x\sigma_x dW_x \\ y(\delta x - \gamma)dt + y\sigma_y dW_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x(\alpha - \beta y)dt + x\sigma_x \xi_x \sqrt{dt} \\ y(\delta x - \gamma)dt + y\sigma_y \xi_y \sqrt{dt} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

σ_x og σ_y er konstante skalarer som bestemmer intensiteten av støyet skapt av W_x og W_y

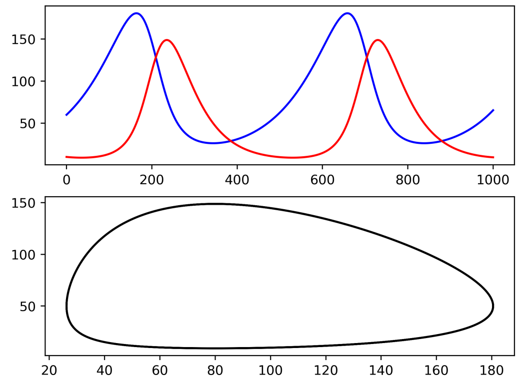
ξ_x og ξ_y er uavhengige gaussiske variabler

Under er to grafer som viser et eksempel på denne nye modellen. Figur 1 viser grafen til en ren Lotka-Volterra-modell med verdier $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.001$, $\gamma = 0.2$ og $\delta = 0.0025$ og med startverdier $x = 60$ og $y = 10$.

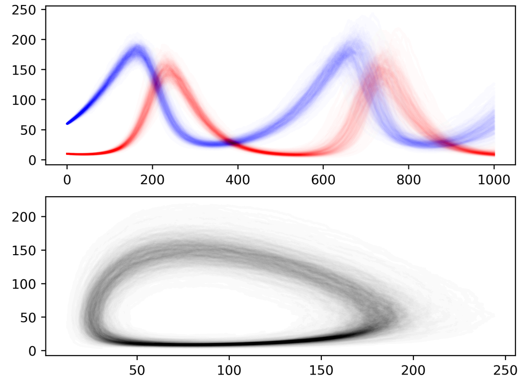
[2] En standardfordelt stokastisk variabel fordelt $\mathcal{N}(0, 1)$

[3] Antar at leser har en forståelse for normalfordeling, standardavvik og varians

Figur 2 viser vår stokastiske modell med de samme veridene, men med stokastiske ledd der $\sigma_x = \sigma_y = 0.05$



Figur 1: ikke-stokastisk eksempel



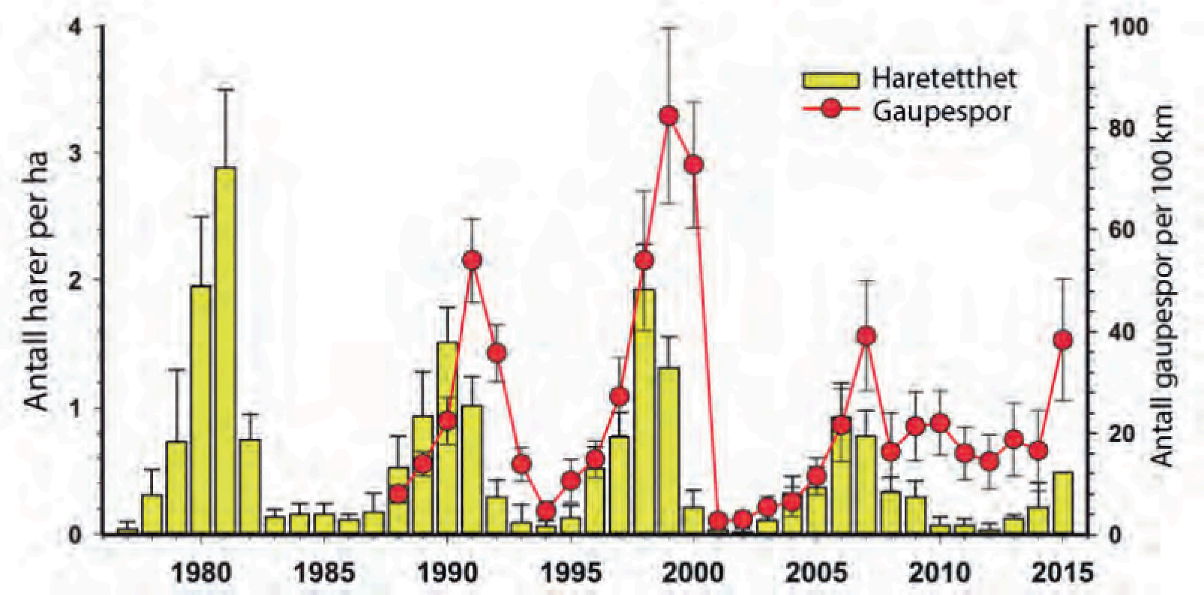
Figur 2: stokastisk eksempel

Det stokastiske eksempelet har en veldig lav verdi for σ_x og σ_y siden større og mer realistiske verdier ville skapt veldig store variasjoner som gjør det vanskeligere å se mønstrene i modellen.

3 Metode

3.1 Simulering

For å simulere en lotka-volterra modell ut ifra populasjonen av snøhare og gaupe måtte vi først finne data. Problemet med dette var kvaliteten på dataen. Det var mye forskjellig data, men det meste var basert på lite pålitelig funn, som spor og pels funnet i området, men for å kunne simulere valgte vi å bruke data basert på denne grafen:



Figur 3: Hare- og gaupedynamikken på våren i Kluane-område i det nordvestlige Canada. (figur fra Boonstra mfl. 2016)

[5]

For å gjøre dataen om til en lotka-volterra modell måtte vi gjøre en del avrundinger og antakelser. Det første var å gjøre forholdet mellom de to artene mer realistisk, ved å gange harepopulasjonen med hundre. Det neste vi måtte gjøre var å finne verdier for α (alpha), β (beta), γ (gamma), δ (delta), x_0 og y_0.

For å finne x_0 og y_0 måtte vi se på det første året, og ser at x_0 og y_0 begge er rundt 20.

α beskriver vekstraten til harene i fravær av predasjon. For å estimere denne verdien undersøkte vi perioder der harepopulasjonen vokste samtidig som gaupebestanden var lav. Basert på dette anslo vi at $\alpha = 0.5$.

β angir hvor sterkt gaupebestanden påvirker harepopulasjonen gjennom predasjon. For å finne en passende verdi for dette parameteret, analyserte vi hvor mye harebestanden minker når gaupene er tallrike. Vi kom fram til at $\beta = 0.025$.

γ representerer den naturlige dødeligheten til gaupene når harene er få eller fraværende. For å beregne denne verdien, så vi på hvor raskt gaupepopulasjonen reduseres når harebestanden er liten. Ut fra dette satte vi $\gamma = 0.6$.

δ måler hvor effektivt gaupene omgjør harebestand til økning i sin egen populasjon. For å fastsette denne parameteren, studerte vi hvor raskt gaupebestanden vokser i takt med økende harebestander. Vi kom til at $\delta = 0.01$

Verdiene vi nå har samlet er ikke nøyaktige, samt at antallet av de to artene heller ikke er nøyaktige, grunnet lite nøyaktig data, men for å kunne fremstille en simulasjon måtte vi gjøre noen antakelser og avrundinger. Vi testet også flere forskjellige verdier for α, β, γ og δ, for å finne hva som passet best.

Med disse verdiene nå samlet kunne vi skrive et python-program som brukte lotka-volterra likningene til å presentere to figurer for populasjonene til haren og gaupen.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def lotka_volterra_extended(populations, t, alpha, beta, gamma, delta):
    x, y = populations  # x: hare population, y: lynx population

    dxdt = x * (alpha - beta * y)
    dydt = -y * (gamma - delta * x)

    return [dxdt, dydt]

t = np.linspace(0, 50, 1000)  # 50 time units, 1000 points

alpha = 0.5  # Growth rate of hares
beta = 0.025  # Rate at which hares are preyed upon
gamma = 0.6  # Natural death rate of lynxes
delta = 0.01  # Rate at which lynxes grow by consuming hares

x0 = 20.0  # Initial hare population
y0 = 20.0   # Initial lynx population

populations = odeint(lotka_volterra_extended, [x0, y0], t, args=(alpha, beta,
gamma, delta))
hare_population = populations[:, 0]
lynx_population = populations[:, 1]

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t, hare_population, 'b-', label='Hare Population', linewidth=2)
plt.plot(t, lynx_population, 'r-', label='Lynx Population', linewidth=2)
plt.title('Population of Hares and Lynxes Over Time')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Population')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(hare_population, lynx_population, 'g-', linewidth=2)
plt.title('Lotka-Volterra Phase Plot (Hares vs. Lynxes)')
plt.xlabel('Hare Population')
plt.ylabel('Lynx Population')
plt.grid(True)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

3.1.1 Stokastisk simulering

For å simulere den stokastiske modellen, ble Formel 26 brukt

```
def lotka_volterra_ipdate(x, y, dt, sigma_x, sigma_y):
    ALPHA = 0.5
    BETA = 0.025
    GAMMA = 0.6
    DELTA = 0.01

    x += x*(ALPHA - BETA*y)*dt + x*sigma_x*np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
    y += y*(DELTA*x - GAMMA)*dt + y*sigma_y*np.random.normal(0, np.sqrt(dt))

    return (x, y)
```

Bruk av stokastisk simulering vil være viktig for vår simulasjon grunnet mangelen på eksakt informasjon og bruken av antakelser og avrundinger.

4 Resultater

4.1 Observasjoner

En liten endring under likevektspunktet kan føre til en betydelig større respons over likevektspunktet på grunn av asymmetri i systemet, hvorav bevegelser under likevekten utløser dynamikker som forsterkes når de overskrider dette nivået. I stokastiske systemer, som er følsomme for tilfeldige svingninger, vil slike små endringer under likevektsnivået ofte resultere i større variasjoner, mens tilsvarende endringer over likevekten har en tendens til å stabilisere seg raskere. Dette fører til at en stokastisk representasjon av systemet ofte vil akkumulere verdier på lavere nivåer, ettersom små forstyrrelser under likevektsnivået har en forsterkende effekt, mens forstyrrelser over likevekten blir dempet. Dermed vil lavere verdier være overrepresentert i den stokastiske modellen.

4.2 Simulasjon

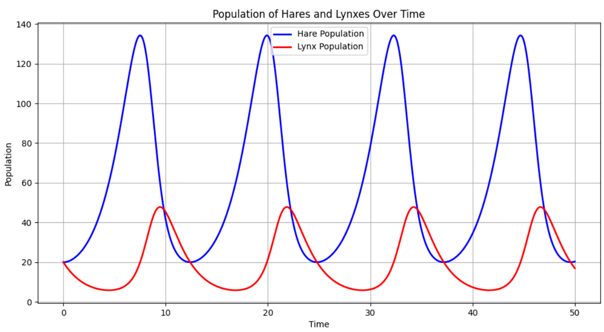
Ut ifra dataen hentet fra 3.1 , tilnærmet vi oss verdier for α, β, γ og δ:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5 \\ \beta &= 0.025 \\ \gamma &= 0.6 \\ \delta &= 0.01 \end{aligned} \tag{27}$$

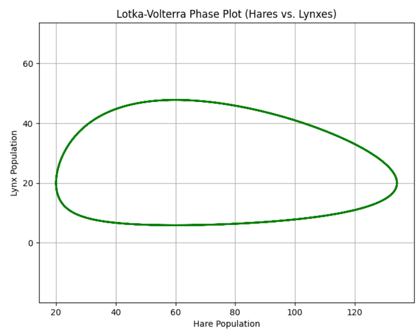
Med startverdiene:

$$\begin{aligned} x_0 &= 20 \\ y_0 &= 20 \end{aligned} \tag{28}$$

Ved hjelp av disse verdiene skrev vi et python program som vist ovenfor, som presenterte to figurer for oss:



Figur 4: Graf med tid



Figur 5:

De to figurene viser hvordan predator-prey syklusen fungerer. Gaupepopulasjonen og harepopulasjonen er avhengig av hverandre. Når harepopulasjonen er høy, vil gaupene ha mer mat og derfor øker gaupepopulasjonen. Når gaupepopulasjonen øker, vil harene bli færre. Når harene er få, vil gaupene ha mindre mat, og derfor vil populasjonen synke. Til slutt vil harepopulasjonen bli større ettersom det er mindre rovdyr. Sånn vil syklusen fortsette. Ut ifra figurene kan vi også se hvordan toppunktene har ca 12 års mellomrom.

4.3 $V(x, y)$ for modellen

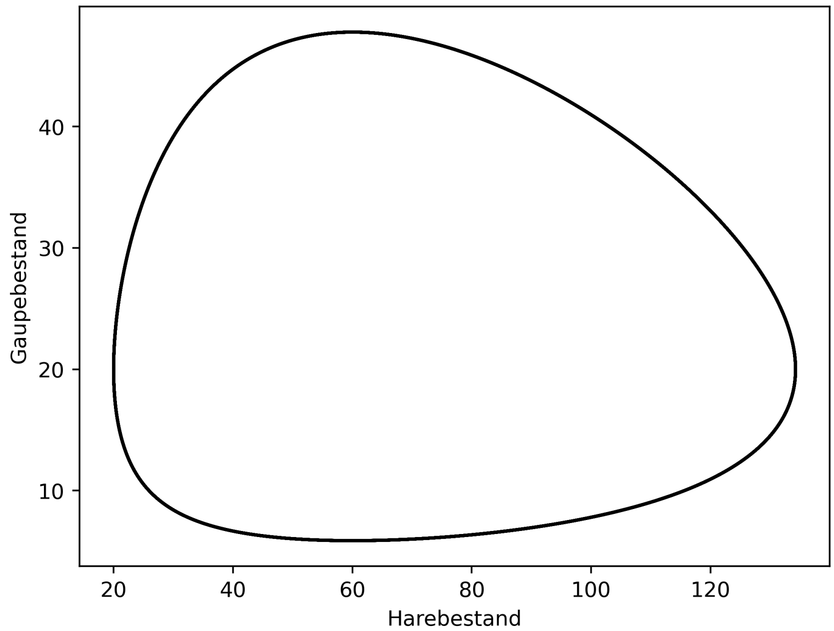
For å finne konstanten K for vår modell, bruker vi Formel 9:

$$K = 0.01 \cdot 20 - 0.6 \ln(20) + 0.025 \cdot 20 - 0.5 \ln(20) = 0.7 - 1.1 \ln(20) \tag{29}$$

Deretter bruker vi Formel 10 og setter opp følgende likning

$$\delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y) = 0.7 - 1.1 \ln(20) \tag{30}$$

Denne linkingen gir grafen V:



Figur 6: Kurve V for modellen

4.4 Fastpunkter

For å finne fastpunktet til modellen som er fremarbeidet i oppgaven bruker vi Formel 5:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} \right\} \tag{31}$$

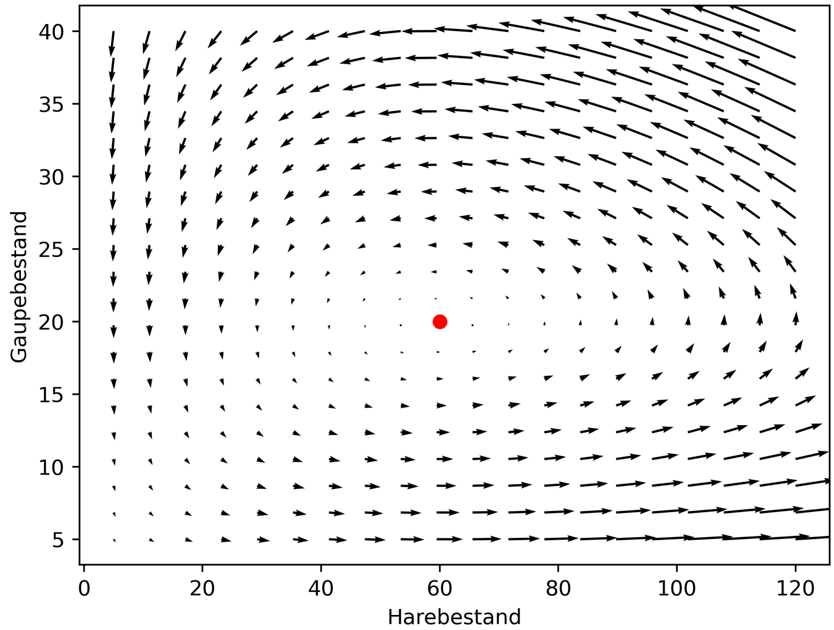
Utifra dette får vi fastpunkter:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \end{bmatrix} \right\} \tag{32}$$

Fastpunkter i Lotka-Volterra-modellen er en type sentrum for modellen hvor populasjonene står stille og kan ikke endre på seg. Et fastpunkt er rent teoretisk og kan ikke oppstå. I dette fastpunktet vil gaupepopulasjonen og harepopulasjonen være i balanse, dette er ikke mulig siden dyrene vil ikke dø samtidig og like mye som det kommer nye dyr.

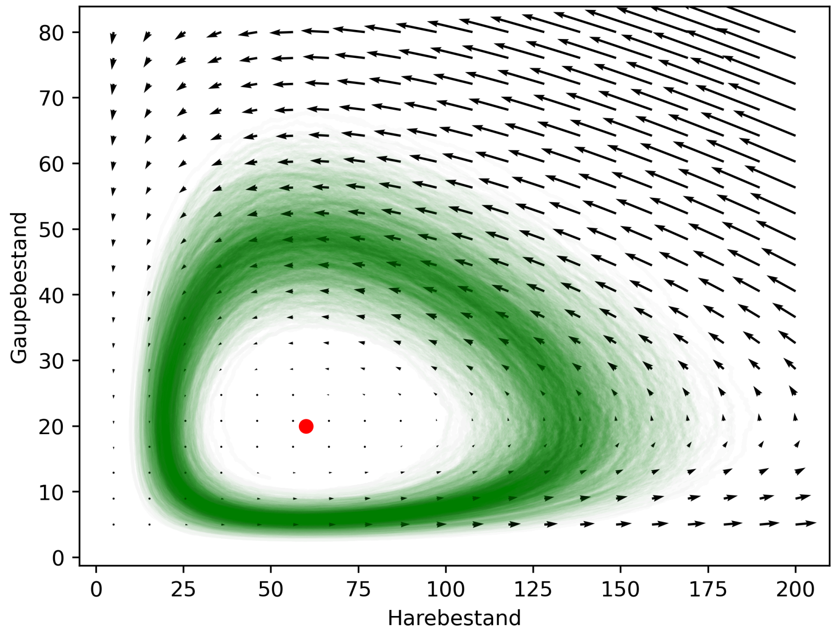
5 Diskusjon

5.1 Analyse



Figur 7: Vektorfelt for hare- og gaupebestand med fastpunkt markert

Vektorfeltet i Figur 7 beskriver proposjonal bestandendringen til Lotka-Volterra-systemet med verdiene som ble funnet i oppgaven. Her kan man se hastigheten $V(x,t)$ endrer seg med i hvert punkt.



Figur 8: Vektorfelt for hare- og gaupebestand med fastpunkt markert og 200 stokastiske simuleringer

Figuren viser hvordan 200 stokastiske simuleringer vil kunne gi relativt store tilfeldige forskjeller i Lotka-Volterra-modellen.

5.1.1 Fastpunkt

Som vist i Formel 16 er egenverdiene til jacobmatrisen i punkt $(0, 0)$ lik $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ -\gamma\end{bmatrix}$ mens egenverdiene til jacobmatrisen i $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ er $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i\sqrt{\alpha\gamma}\\ -i\sqrt{\alpha\gamma}\end{bmatrix}$

Om begge bestandene i et område er 0 og noe skjer slik at det kommer noen harer, vil dette medføre en eksponensiell vekst i harebestanden. Om det deretter kommer gaupe i området, vil det skape en periodisk svingning som følge Lotka-Volterra-modellen med store utslag. Dette kan man se på vektofreltet i Figur 7; verdiene nær 0 vil skape store baner mens verdier nær det andre fastpunktet har mindre baner. Det er dette som menes med at punkt $(0, 0)$ er ustabilt.

Om vi setter inn verdiene fra Formel 28 inn i Formel 20 får vi:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\gamma}} = \frac{2\pi}{\sqrt{0.5 \cdot 0.6}} = 11.47 \tag{33}$$

Altså vil bestandsvingningene i denne modellen ha en periode på 11.47 år.

5.2 Nøyaktighet i data

Som nevnt tidligere er et av de største problemene med simulasjonen vår, nøyaktighet av data. Vi har derfor valgt å løse denne unøyaktigheten med å inkludere stoakistiske elementer. Dette gjør ikke funksjonene noe mer nøyaktige men det viser mye bedre hvilken grad av unøyaktighet vi har. Gitt mer nøyaktige tall så ville ikke bare fått en tilnermet mer riktig funksjon men vi hadde også ikke hatt et like stort behov for å inkludere stoakastiske element.

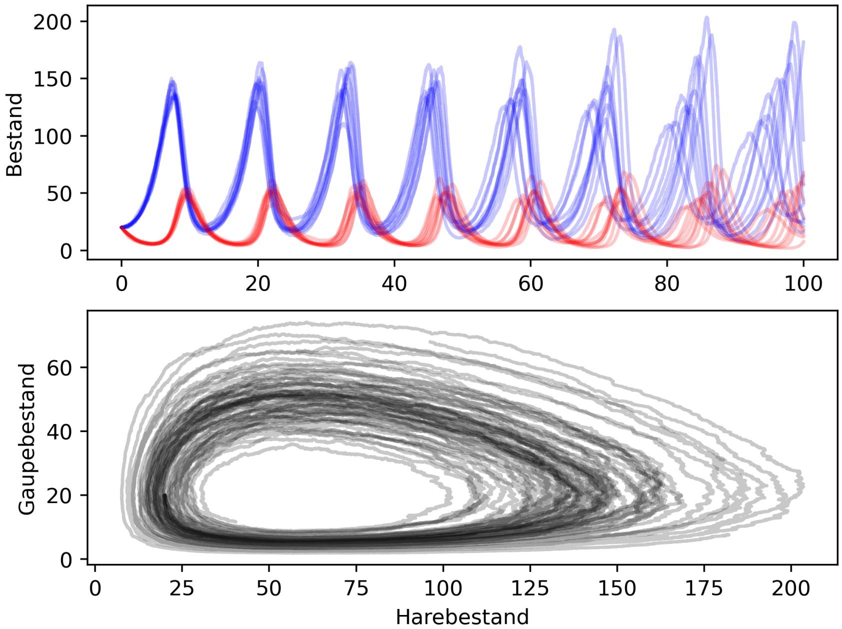
5.3 Modellens begrensninger

Den rene Lotka-Volterra-modellen forutsetter ideelle forhold. I naturen er økosystemer ofte mer komplekse, og artene har flere forskjelligge faktorer som modellen ikke tar hensyn til. Disse faktorene inkluderer ting som ressurser, klimaendringer, sykdommer og konkurranse mellom andre arter. Bruk av stokastiske elementer kan hjelpe å inkludere en form for tilfeldighet i modellen, men det vil fortsatt være mye en ikke kan forutse. Modellen tar heller ikke hensyn til naturlige dødsårsaker for byttedyr.

5.4 Stokastiske elementer

Inkluderingen av stokastiske elementer skaper en form for støy som kan gi en mer tilfeldig variasjon i modellen. Dette modellerer mer realistiske og uforutsigbare svingninger som skjer i den virkelige verden grunnet eksempelvis sykdomsutbrudd og værendringer. Større verdier for de stokastiske leddene σ_y og σ_x vil resultere i mer variasjon mellom de predikerte størrelsene Disse verdiene vil være viktige å endre på basert på hvor mange andre eksterne faktorer som er forventet.

Med den stokastiske modellen som ble utarbeidet i denne oppgaven, er det ingen måte å endre perioden på, men i dataen ser man en liten variasjon i periode. Selv om modellen ikke permanent kan endre perioden siden den er bestemt av konstantene α, β, γ og δ, kan fasen endres av det stokastiske elementet. Se for deg at både gaupe- og harebestandene er på vei opp, men de stokastiske leddene blir negative. I dette tilfellet vil fasen forskyves mot høyre, siden tilstanden tildels går "tilbake i tid", mens i andre tilfeller kan fasen forskyves motsatt vei. Denne faseendringen frem og tilbake vil over tid skape en "varierende periode".



Figur 9: 10 stokastiske simulasjoner med $\sigma_x = \sigma_y = 0.03$

Figur 9 viser 10 simulasjoner av den stokastiske modellen i et tidsrom på 100 år. Om man ser på den øverste grafen, kan man se at periodene og fasene ikke er helt like i alle simulasjoner, men det skapes små variasjoner i faser, som også medbringer små variasjoner i perioder.

5.5 Problemstillingens Svar

-Hvordan kan Lotka-Volterra-modellen matematisk beskrives, og hva er de sentrale egenskapene ved løsningen av den deterministiske modellen?

Lotka-Volterra-modellen er to sammenkoblede differenialligninger som beskriver forholdet mellom et rovdyr og et byttedyr. Horav α beskriver vekstraten til byttedyret som øker uten predasjon, β representerer hvor mye rovdyrpopulasjonen påvirker byttedyrpopulasjonen. γ representerer naturlig dødsrate til byttedyret, og δ representerer hvor effektivt predatoren konverterer byttedyret til nye rovdyr, og øker eller synker basert på byttedyrpopulasjonen.

Den deterministiske modellen presenterer sykliske svingninger mellom byttedyr- og rovdyrpopulasjonene. Når byttedyrpopulasjonen øker, vokser også rovdyrene, noe som igjen fører til at byttedyrene minker, etterfulgt av at rovdyrene minker. Denne syklusen gjentar seg.

-Hvordan kan stokastiske elementer inkluderes i Lotka-Volterra-modellen, og hvilke metoder kan benyttes for å analysere og simulere effektene av slike elementer?

Stokastiske elementer kan inkluderes i Lotka-Volterra-modellen ved å legge til tilfeldige variasjoner i differensialligningene. De stokastiske leddene simulerer uforutsigbare faktorer som miljøforhold, sykdommer, ressurser og andre arter. som kan påvirke populasjonene på uventede måter. For å simulere effekten av disse elementene, har vi brukt Monte Carlo-simuleringer, hvor mange stokastiske simuleringer kjøres for å se hvordan tilfeldige variasjoner påvirker populasjonene over tid. Med stokastiske elementer inkludert i Lotka-Volterra-modellen vil den gi en mer realistisk modell i et dynamisk miljø.

-Hvordan kan Lotka-Volterra-modellen beskrives og forstås gjennom matematisk analyse, og hvordan påvirker inkluderingen av stokastiske elementer modellens dynamikk, for å oppnå en mer realistisk beskrivelse av populasjonssvingninger i komplekse systemer?

Lotka-Volterra-modellen kan beskrives matematisk gjennom to sammenkoblede differensialligninger som viser forholdet mellom et rovdyr og et byttedyr. Modellen forutsetter at byttedyrpopulasjonen vokser eksponentielt i fravær av rovdyr, og at rovdyrene reduserer denne veksten gjennom predasjon. På den andre siden forutsetter modellen at rovdyrpopulasjonen vokser i takt med tilgjengeligheten av byttedyr, men minker i fravær av dem. Når stokastiske elementer inkluderes, legges tilfeldige variasjoner til modellen for å simulere naturlige faktorer som sykdommer, andre arter og andre uforutsette faktorer. Dette gjør at modellen blir mer realistisk ved å inkludere uforutsigbare variasjoner i populasjonene.

Stokastiske elementer fører til at populasjonssvingningene blir mer uregelmessige, noe som gjenspeiler virkeligheten bedre enn den deterministiske modellen, som har perfekte sykluser. Ved å simulere flere stokastiske scenarioer kan vi analysere hvordan tilfeldige variasjoner kan påvirke dynamikken i komplekse systemer og gi en mer nøyaktig beskrivelse av populasjonssvingningene.

6 Konklusjon

Denne oppgaven har vist hvordan Lotka-Volterra-modellen, både i deterministisk og stokastisk form, kan brukes til å beskrive dynamikken i predator-byttedyr-forhold, spesielt mellom kanadisk gaupe og snøskohare. Gjennom numeriske simuleringer har vi sett at modellen effektivt fanger opp de sykliske svingningene mellom populasjonene. Den stokastiske versjonen av modellen har tilført en større realisme ved å inkludere tilfeldige faktorer som påvirker populasjonene, og dermed skape en mer variert og fleksibel forståelse av populasjonsdynamikken.

Inkluderingen av stokastiske elementer har vist hvordan små, tilfeldige variasjoner kan ha store innvirkninger på populasjonene, noe som er viktig for å forstå virkelige økosystemer, hvor slike variasjoner ofte forekommer. Dette gjør den stokastiske modellen mer anvendelig enn den deterministiske, da den bedre reflekterer de uforutsigbare forholdene som finnes i naturen.

Til tross for modellens anvendelighet, har vi identifisert noen begrensninger. Lotka-Volterra-modellen er en forenklet representasjon som ikke tar hensyn til andre viktige faktorer som ressurstilgang, konkurranse med andre arter og miljøforhold. Selv om stokastiske elementer delvis adresserer dette, vil videre utvikling av modellen som inkluderer flere biologiske faktorer kunne gi en enda mer nøyaktig beskrivelse av komplekse økosystemer. Dersom vi skulle ha videreutviklet prosjektet, kunne vi ha valgt andre dyr for å utforske hvordan modellen reagerer på forskjellige typer predator-byttedyr-forhold. Vi kunne også ha utvidet rapporten til å ta for seg nyere tall og data i forskningen på forholdene mellom kanadisk gaupe og snøskohare. Vi kunne samt utvidet raporten til å inkludere Arditi–Ginzburg ligningene.

Samlet sett har oppgaven demonstrert Lotka-Volterra-modellens styrke som et verktøy for å forstå grunnleggende populasjonsdynamikk. Videre forskning kan bygge på dette arbeidet ved å utvide modellen med flere miljøfaktorer, noe som vil forbedre modellens anvendelse i både økologisk forskning og bevaring av truede arter.

Referanser

[1] "Jacobian matrix and determinant." [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant

[2] C. Lee, "17. Stochastic Process II." [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=PPl-7_RL0Ko

[3] Wikipedia, "Wiener process." [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_process

[4] Wikipedia, "Stochastic differential equation." [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_differential_equation

[5] R. Boonstra *et al.*, "Why Do the Boreal Forest Ecosystems of Northwestern Europe Differ from Those of Western North America?." [Online]. Available: https://academic.oup.com/bioscience/article/66/9/722/1753636