

In [1]:

```
%pylab inline

import pandas
import scipy.stats as sps
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

size = 100
grid = np.arange(1, size + 1)
gamma = 0.95
```

Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib

In [2]:

```
s = sps.norm.rvs(size=100)
```

In [3]:

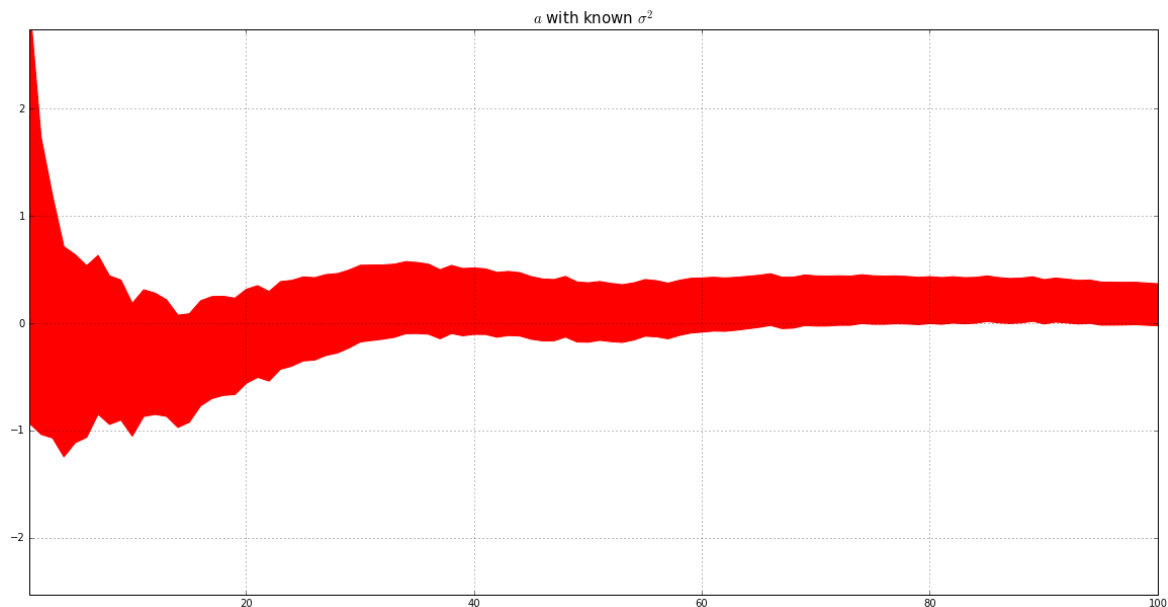
```
# функция для построения графика
def build_graph(down, up, title):
    fig = plt.figure(figsize=(20, 10))
    plt.grid(True)
    plt.title(title, fontsize=15)
    ax = fig.gca()
    plt.fill_between(grid, down, up, color='red')
    ax.set_xlim(1, size)
    ax.set_ylim(down.mean() - 3, up.mean() + 3)
    plt.show()
```

**$\alpha$  при известном  $\sigma^2$**

Доверительный интервал:  $\left( \bar{X} - \frac{\tau_{1-\frac{\gamma}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\tau_{1-\frac{\gamma}{2}} \sigma}{\sqrt{n}} \right)$ , где  $\tau_{1-\frac{\gamma}{2}}$  - квантиль уровня  $(1 - \frac{\gamma}{2})$  стандартного нормального распределения

```
average = s.cumsum() / np.arange(1, size + 1)
tau = sps.norm.ppf(0.5 - gamma / 2)

build_graph(average - tau / (np.arange(1, size + 1)**0.5),
            average + tau / (np.arange(1, size + 1)**0.5),
            '$a$ with known $\sigma^2$')
```

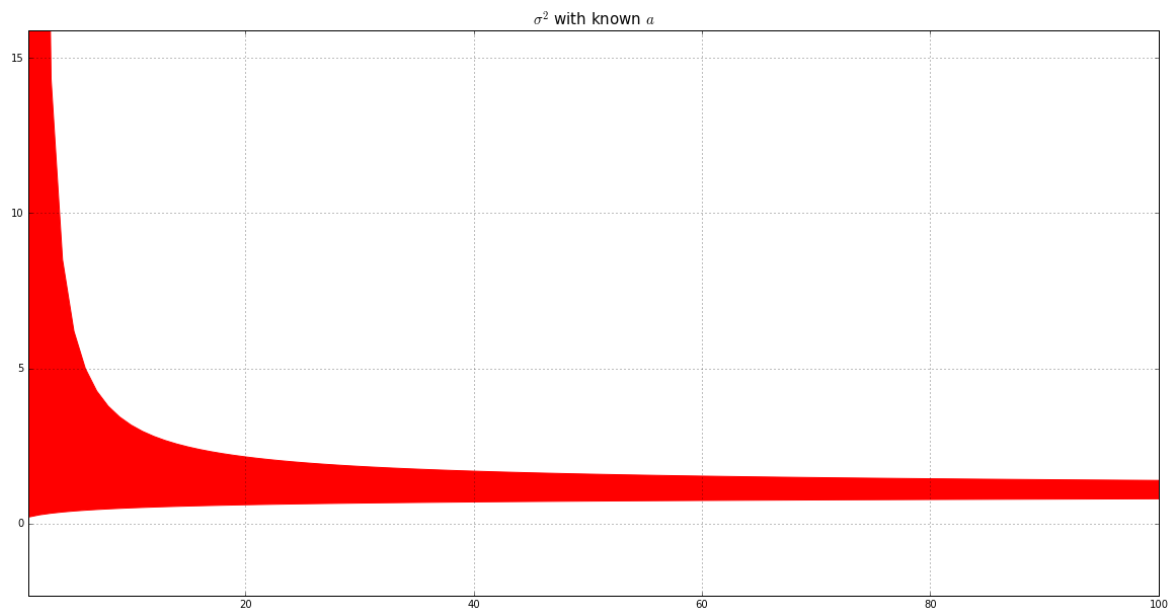


Доверительный интервал:  $\left( \frac{\overline{N(X-a)^2}}{\chi^2_{\left(\frac{1+\gamma}{2}, N\right)}}, \frac{\overline{N(X-a)^2}}{\chi^2_{\left(\frac{1-\gamma}{2}, N\right)}} \right)$ , где  $\chi^2_{(p, N)}$  - квантиль уровня  $p$  распределения хи-квадрат с  $N$  степенью свободы

In [5]:

```
chi1 = sps.chi2(np.arange(1, size + 1)).ppf(0.5 + gamma/2)
chi2 = sps.chi2(np.arange(1, size + 1)).ppf(0.5 - gamma/2)
mean = np.mean(s*s)

build_graph(np.arange(1, size+1) * mean / chi1,
            np.arange(1, size+1) * mean / chi2,
            '$\sigma^2$ with known $a$')
```

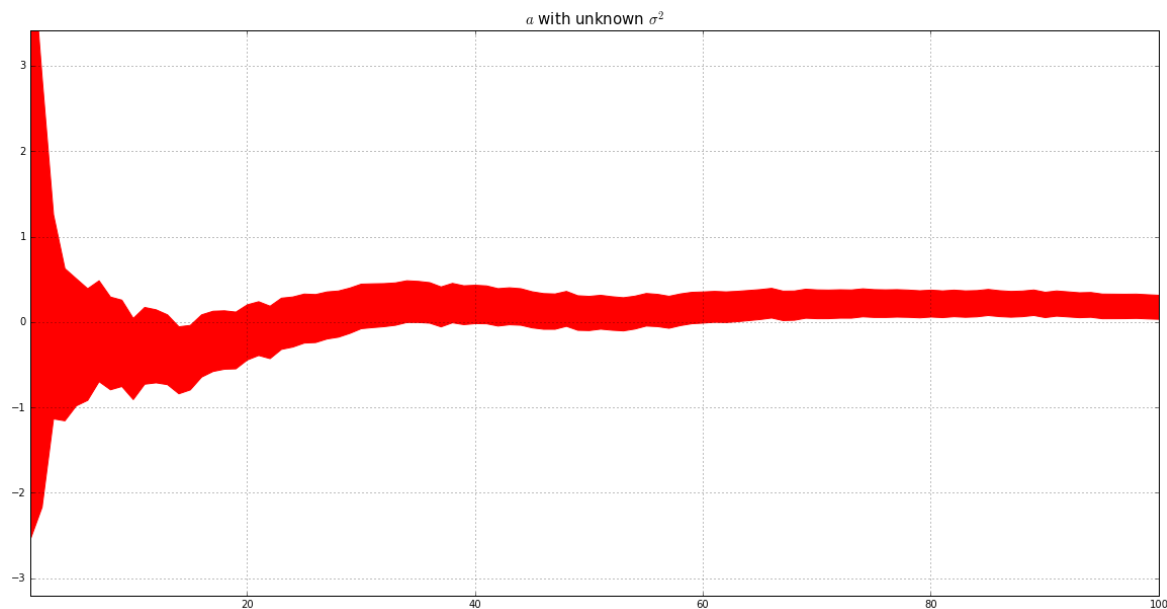


**$a|$  при известном  $\sigma^2|$**

Доверительный интервал:  $\left( \bar{X} - \frac{\tau_{(\frac{\gamma+1}{2}, N-1)} S}{\sqrt{N}}, \bar{X} + \frac{\tau_{(\frac{\gamma+1}{2}, N-1)} S}{\sqrt{N}} \right)$ , где  $\tau_{p, N-1}$  - квантиль уровня  $p$  распределения t-Стюдента с  $N - 1$  степенью свободы

```
tau = sqrt(sps.t(np.arange(1, size + 1) - 1).ppf(0.5 + gamma / 2))
tau[0] = tau[1] # при нулевой степени свободы нельзя посчитать квантиль
s_ = sqrt(np.mean(s * s) - np.mean(s) ** 2)

build_graph(average - tau * s_ / (np.arange(1, size + 1) ** 0.5),
            average + tau * s_ / (np.arange(1, size + 1) ** 0.5),
            '$a$ with unknown $\sigma^2$')
```

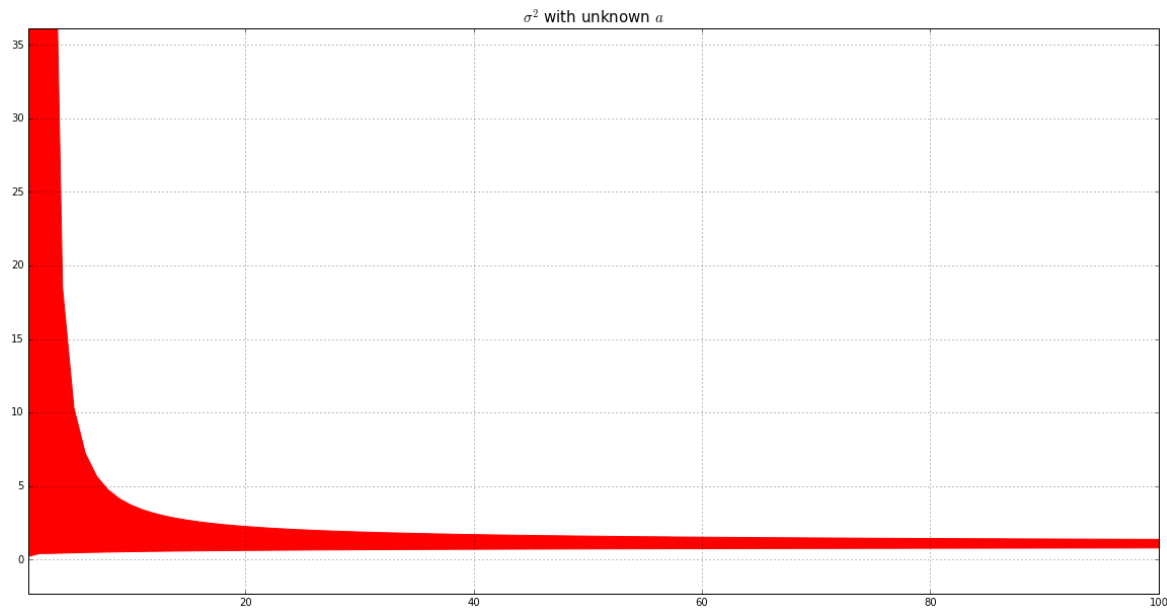


Доверительный интервал:  $\left( \frac{(N-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, N-1}}, \frac{(N-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, N-1}} \right)$

```
In [7]:
```

```
s_sq = s_**2
chi1 = sps.chi2(np.arange(1, size+1) - 1).ppf(0.5 + gamma/2)
chi1[0] = chi1[1]
chi2 = sps.chi2(np.arange(1, size+1) - 1).ppf(0.5 - gamma/2)
chi2[0] = chi2[1]

build_graph(np.arange(1, size + 1) * s_sq / chi1,
            np.arange(1, size + 1) * s_sq / chi2,
            '$\sigma^2$ with unknown $a$')
```



### Доверительная область для $(a, \sigma^2)$

Доверительная область:  $(\bar{X} - \sqrt{\frac{s^2 z_1}{z_2}}, \bar{X} + \sqrt{\frac{s^2 z_1}{z_2}}) \times (0, \frac{Ns^2}{z_2})$ , где  $z_1$  - квантиль уровня  $\sqrt{\alpha}$  распределения  $\chi^2(1)$ ,  $z_2$  - квантиль уровня  $1 - \sqrt{\alpha}$  распределения  $\chi^2(N - 1)$

Построим только для  $N=100$

In [18]:

```
down_a = np.mean(s) - sqrt(s_sq * sps.chi(1).ppf(sqrt(gamma)) / sps.chi(size - 1))
up_a = np.mean(s) + sqrt(s_sq * sps.chi(1).ppf(sqrt(gamma)) / sps.chi(size - 1))
down_sigma = np.zeros(size)
up_sigma = [size*s_sq / sps.chi(size - 1).ppf(1 - sqrt(gamma)) for x in grid]
plt.fill_between(np.linspace(down_a, up_a, size), down_sigma, up_sigma, color='red')
plt.xlim((-0.75, 1))
plt.ylim((-1, 13))
plt.title('trust gap for ($a, \sigma^2$)')
plt.show()
```

