

In [1]:

```
%pylab inline

import scipy.stats as sps
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

size = 100
grid = np.arange(1, size+1)
```

Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib

In [2]:

```
#Генерируем выборку
s = sps.norm.rvs(size=size, loc=0, scale=1)
```

Оценка максимального правдоподобия для θ в $N(\theta, 1) | - \bar{X}$

Сопряженное априорное распределение - $N(\mu_0, \sigma_0^2)$

\Rightarrow апостериорное распределение $- p(\theta | X) \sim N\left(\frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}, \sigma_1^2\right)$

\Rightarrow байесовская оценка $- \hat{\theta} = E(\theta|X) = \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}$

$\sigma^2 = 1 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \sum_{i=1}^n X_i}{\frac{1}{\sigma_0^2} + n}$

In [3]:

```
#Считаем оценки
MLE_est = s.cumsum() / np.arange(1, size + 1)

params = [[0., 1.], [0., 100.], [10., 1.], [10., 100.]]
bayes_est = np.zeros(4*size).reshape(4, size)
for i in range(4):
    bayes_est[i] = (params[i][0] / params[i][1] + s.cumsum()) / (1 / params[i]
```

In [4]:

```

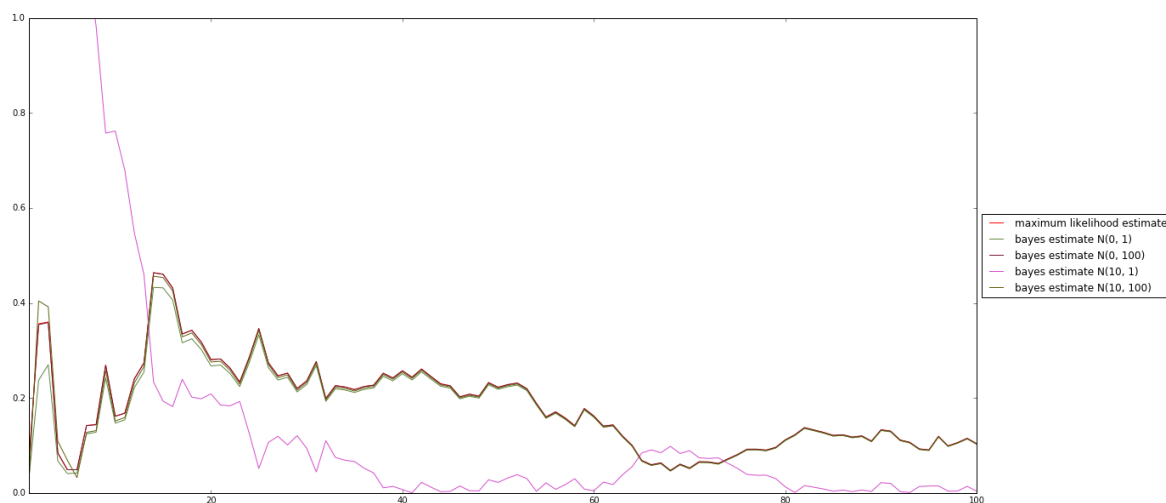
#Строим графики
plt.figure(figsize=(20,10))
plt.ylim((0, 1))
plt.xlim((1, 100))

plt.plot(grid, abs(MLE_est), color='red', label='maximum likelihood estimate')

for i in range(4):
    plt.plot(grid, abs(bayes_est[i]), color=random.rand(3,1), label='bayes est
        + str(int(params[i][0])) + ', ' + str(int(params[i][1])) + ')')

plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
plt.show()

```



Лучшая оценка - байесовская с априорным $N(10, 1)$

Оценка максимального правдоподобия для θ в $N(0, \theta) - \overline{X^2}$

Сопряженное априорное распределение - $\text{Inv-Gamma}(\alpha, \beta)$

\Rightarrow апостериорное распределение $- p(\theta | X) \sim \text{Inv-Gamma}(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2})$

\Rightarrow байесовская оценка $- \hat{\theta} = E(\theta|X) = \frac{\beta'}{\alpha'-1} = \frac{\beta + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2}}{\alpha + \frac{n}{2} - 1}$

$\mu = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2\beta + \sum_{i=1}^n x_i^2}{2\alpha + n - 2}$

In [5]:

```
#Считаем оценки
MLE_est = (s*s).cumsum() / np.arange(1, size + 1)

params = [[1., 1.], [1., 100.], [10., 1.], [10., 100.]]
bayes_est = np.zeros(4*size).reshape(4, size)
for i in range(4):
    bayes_est[i] = (2*params[i][1] + (s*s).cumsum()) / (2*params[i][0] + np.ar
```

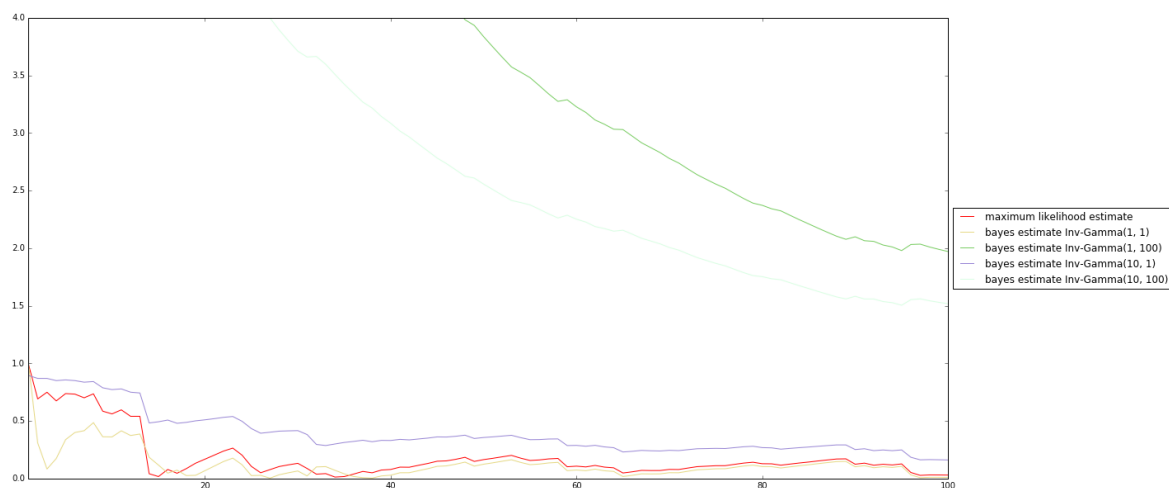
In [6]:

```
#Строим графики
plt.figure(figsize=(20,10))
plt.ylim((0, 4))
plt.xlim((1, 100))

plt.plot(grid, abs(MLE_est - 1), color='red', label='maximum likelihood estima

for i in range(4):
    plt.plot(grid, abs(bayes_est[i] - 1), color=random.rand(3,1), label='bayes
            + str(int(params[i][0])) + ', ' + str(int(params[i][1])) + '))

plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
plt.show()
```



Вывод: лучшие оценки - оценка максимального правдоподобия и байесовская оценка с априорным распределением $\text{Inv-Gamma}(1, 1)$

