

Automi a stati finiti

a.a. 2020-2021

Corso di Fondamenti di Informatica - 1 modulo

Corso di Laurea in Informatica

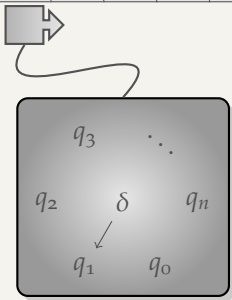
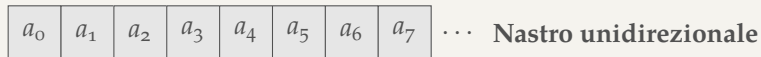
Università di Roma "Tor Vergata"

Prof. Giorgio Gambosi



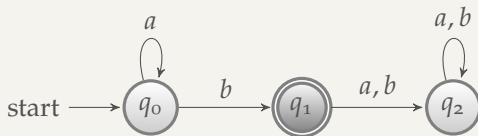
Un **automa a stati finiti deterministico** (ASFD) è una quintupla $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, dove

- $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ è l'**alfabeto** di input
- $Q = \{q_0, \dots, q_m\}$ è un insieme finito e non vuoto di **stati**
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**
- $F \subseteq Q$ è un insieme di **stati finali**
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$ è la **funzione (totale) di transizione** che ad ogni coppia $\langle \text{stato}, \text{carattere in input} \rangle$ associa uno stato successivo.



Funzione di transizione

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_2	q_2



Configurazione di un ASF

Dato un automa a stati finiti $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, una configurazione di \mathcal{A} è una coppia (q, x) , con $q \in Q$ e $x \in \Sigma^*$.

Una configurazione $\langle q, x \rangle$, $q \in Q$ ed $x \in \Sigma^*$, di \mathcal{A} , è detta:

- **iniziale** se $q = q_0$
- **finale** se $x = \varepsilon$
- **accettante** se $x = \varepsilon$ e $q \in F$

Transizioni di un ASF

Dato un ASFD $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ e due configurazioni (q, x) e (q', y) di \mathcal{A} , avremo che $(q, x) \xrightarrow[\mathcal{A}]{} (q', y)$ se e solo se valgono le due condizioni:

1. $x = ay$, per un qualche $a \in \Sigma$
2. $\delta(q, a) = q'$.

Accettazione da un ASFD

Dato un automa a stati finiti deterministico $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, una stringa $x \in \Sigma^*$ è accettata da \mathcal{A} se e solo se

$$(q_0, x) \xrightarrow[\mathcal{A}]{}^* (q, \varepsilon)$$

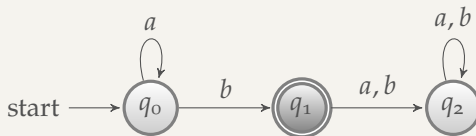
con $q \in F$

Possiamo definire il linguaggio riconosciuto da \mathcal{A} come

$$L(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \Sigma^* \mid (q_0, x) \xrightarrow[\mathcal{A}]{}^* (q, \varepsilon), q \in F \right\}.$$

Esempio

La stringa aab è accettata dall'automa a stati finiti deterministico



Infatti, a partire dalla configurazione iniziale (q_0, aab) l'automa raggiunge la configurazione di accettazione (q_1, ε) per mezzo della computazione

$$(q_0, aab) \vdash (q_0, ab) \vdash (q_0, b) \vdash (q_1, \varepsilon)$$

Funzione di transizione estesa

Dato un automa a stati finiti deterministico $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, la sua **funzione di transizione estesa**

$$\bar{\delta} : Q \times \Sigma^* \mapsto Q$$

è definita come chiusura transitiva della δ :

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(q, \varepsilon) &= q \\ \bar{\delta}(q, xa) &= \delta(\bar{\delta}(q, x), a),\end{aligned}$$

dove $a \in \Sigma, x \in \Sigma^*$.

Una stringa $x \in \Sigma^*$ è accettata da $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ se e solo se $\bar{\delta}(q_0, x) \in F$

Il **linguaggio riconosciuto** da un automa a stati finiti deterministico \mathcal{A} è l'insieme

$$L(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \Sigma^* \mid \bar{\delta}(q_0, x) \in F \right\}.$$

Al fine di verificare che la stringa aab è accettata dall'ASFD precedente, deriviamo il valore di $\delta(q_0, aab)$ nel modo seguente:

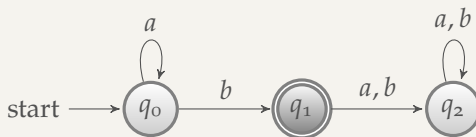
$$\begin{aligned}\bar{\delta}(q_0, aab) &= \delta \left(\bar{\delta}(q_0, aa), b \right) \\ &= \delta \left(\delta \left(\bar{\delta}(q_0, a), a \right), b \right) \\ &= \delta \left(\delta \left(\delta \left(\bar{\delta}(q_0, \varepsilon), a \right), a \right), b \right) \\ &= \delta \left(\delta \left(\delta(q_0, a), a \right), b \right) \\ &= \delta \left(\delta(q_0, a), b \right) \\ &= \delta(q_0, b) \\ &= q_1\end{aligned}$$

Esercizio

Si consideri il linguaggio $L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$. Questo linguaggio è generato dalla grammatica \mathcal{G} le cui produzioni sono:

$$S \longrightarrow aS \mid b.$$

Si dimostri che il linguaggio L è il linguaggio riconosciuto dall'automa



Esempio

Il linguaggio delle parole sull'alfabeto $\{a, b\}$ che contengono un numero pari di a o un numero pari di b è riconosciuto dall'automa $\mathcal{A} = \langle \{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\} \rangle$, con funzione di transizione

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_3
q_2	q_3	q_0
q_3	q_2	q_1

Definire un ASFD che riconosce le stringhe su $\{a, b\}$ caratterizzate dal fatto che il secondo carattere è b .

Definire un ASFD che riconosce le stringhe su $\{a, b\}$ caratterizzate dal fatto che il penultimo carattere è b .

Funzione di transizione parziale

La funzione di transizione δ è stata definita come totale.

Ogni ASFD $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ con funzione di transizione δ non totale può essere trasformato in un ASFD $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', \delta', q_0, F \rangle$ con funzione di transizione totale ed equivalente, ponendo $Q' = Q \cup \{\bar{q}\}$ e δ' tale che come:

1. Se $\delta(q, a), q \in Q$ è definito allora $\delta'(q, a) = \delta(q, a)$
2. Se $\delta(q, a), q \in Q$ non è definito allora $\delta'(q, a) = \bar{q}$
3. $\delta'(\bar{q}, a) = \bar{q}$ per ogni $a \in \Sigma$

Linguaggi decisi da ASFD

Insieme \mathcal{R} dei linguaggi decisi da automi a stati finiti deterministici:

$$\mathcal{R} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ AFSD } \mathcal{A} \text{ tale che } L = L(\mathcal{A})\}$$

Questa classe di linguaggi coincide con quella dei linguaggi generati dalle grammatiche di tipo 3 e con quella dei linguaggi definiti da espressioni regolari

Un **automa a stati finiti non deterministico** è una quintupla $\mathcal{A}_N = \langle \Sigma, Q, \delta_N, q_0, F \rangle$, in cui

- $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ è l'**alfabeto di input**
- $Q = \{q_0, \dots, q_m\}$ è un insieme finito e non vuoto di **stati**
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli **stati finali**
- $\delta_N : Q \times \Sigma \mapsto \mathcal{P}(Q)$ è una funzione (parziale), detta **funzione di transizione**, che ad ogni coppia $\langle \text{stato}, \text{carattere} \rangle$ su cui è definita associa un sottoinsieme di Q (eventualmente vuoto)

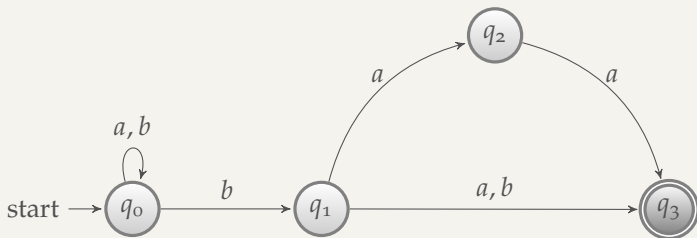
Esempio

Funzione di transizione di un automa a stati finiti non deterministico:

δ_N	a	b
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_3\}$	\emptyset
q_3	\emptyset	\emptyset

Esempio

Un automa a stati finiti non deterministico può essere anch'esso descritto, così come un ASFD, per mezzo di un grafo di transizione



Computazioni di un AFSND

Un automa a stati finiti non deterministico definisce, data una stringa in input, un insieme di computazioni.

Alternativamente, possiamo considerare che l'automata esegua una sola **computazione non deterministica** nel corso della quale, per ogni carattere letto, assume non uno solo, ma un insieme di stati attuali e transita, ad ogni nuovo carattere, non da stato a stato ma da un insieme di stati ad un insieme di stati.

L'automa precedente definisce, in corrispondenza alla stringa in input bba , le tre computazioni:

- $(q_0, bba) \vdash (q_0, ba) \vdash (q_0, a) \vdash (q_0, \varepsilon);$
- $(q_0, bba) \vdash (q_0, ba) \vdash (q_1, a) \vdash (q_2, \varepsilon);$
- $(q_0, bba) \vdash (q_0, ba) \vdash (q_1, a) \vdash (q_3, \varepsilon).$

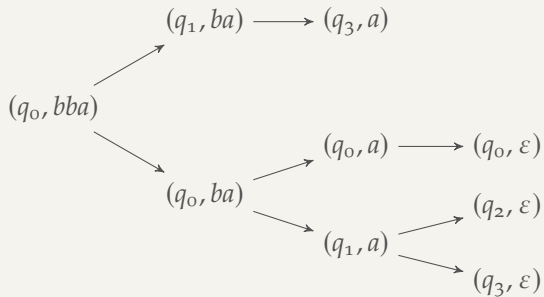
Il prefisso bb della stringa di input dà luogo anche alla computazione:

- $(q_0, bb) \vdash (q_1, b) \vdash (q_3, \varepsilon);$

la quale però non presenta continuazioni possibili.

Esempio

Albero di computazione corrispondente



Alternativamente, possiamo considerare che l'automa definisca la computazione non deterministica:

$$(\{q_0\}, bba) \vdash (\{q_0, q_1\}, ba) \vdash (\{q_0, q_1, q_3\}, a) \vdash (\{q_0, q_2, q_3\}, \varepsilon)$$

Una stringa x viene accettata da un automa a stati finiti non deterministico se almeno una delle computazioni definite per la stringa stessa è di accettazione, quindi se

$$(\{q_0\}, x) \xrightarrow{*} (\mathbb{Q}, \varepsilon) \quad \text{con} \quad \mathbb{Q} \subseteq Q$$

e

$$\mathbb{Q} \cap F \neq \emptyset$$

Funzione di transizione estesa di un ASFND

Dato un ASFND, la **funzione di transizione estesa** è la funzione $\bar{\delta}_N : Q \times \Sigma^* \mapsto \mathcal{P}(Q)$, definita nel seguente modo

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_N(q, \varepsilon) &= \{q\} \\ \bar{\delta}_N(q, xa) &= \bigcup_{p \in \bar{\delta}_N(q, x)} \delta_N(p, a)\end{aligned}$$

dove $a \in \Sigma, x \in \Sigma^*, p \in Q$.

Dato uno stato q ed una stringa x in input, $q' \in \bar{\delta}_N(q, x)$ se e solo se esiste una computazione dell'automa la quale, a partire da q ed in conseguenza della lettura della stringa x , conduce allo stato q'

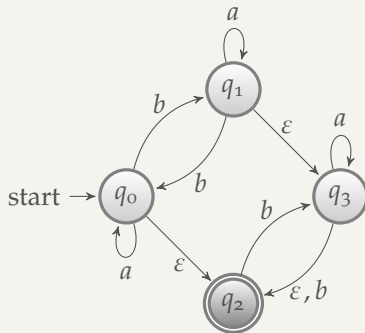
Il linguaggio $L(\mathcal{A})$ accettato da un ASFND \mathcal{A} è definito come:

$$L(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \Sigma^* \mid (\{q_o\}, x) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbb{Q}, \varepsilon), \mathbb{Q} \cap F \neq \emptyset \right\}.$$

o anche come

$$L(\mathcal{A}_N) = \left\{ x \in \Sigma^* \mid \bar{\delta}_N(q_o, x) \cap F \neq \emptyset \right\}.$$

Un ε -ASFND è un ASFND con $\delta_N : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q)$, nella quale sono quindi ammesse ε -transizioni.



Non determinismo e ε -transizioni

La presenza di ε transizioni in un ASF rende di per sé l'automa non deterministico

La singola ε -transizione, potendo aver luogo o meno, è inerentemente non deterministica

Dato uno stato q dell'automa, la sua ε -chiusura è l'insieme $\varepsilon(q)$ degli stati raggiungibili da q mediante una sequenza (anche nulla) di ε -transizioni.

Con riferimento all'automa precedente:

q	$\varepsilon(q)$
q_0	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{q_1, q_2, q_3\}$
q_2	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_2, q_3\}$

Funzione di transizione estesa

La **funzione di transizione estesa** $\hat{\delta}$ è definita come:

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \varepsilon(q)$
2. Per ogni $x \in \Sigma^*$ e per ogni $a \in \Sigma$, $\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in P} \varepsilon(p)$, dove $P = \{p \mid \exists r \in \hat{\delta}(q, x) \text{ tale che } p \in \delta(r, a)\}$; vale a dire l'unione delle ε -chiusure di tutti gli stati raggiungibili da un qualche stato in $\hat{\delta}(q, x)$, avendo in input il carattere a

Dato $P \subseteq Q$, $\varepsilon(P)$ è l'unione delle ε -chiusure di tutti gli stati in P :
 $\varepsilon(P) = \bigcup_{p \in P} \varepsilon(p)$.

Per l'automa precedente,

$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \varepsilon(q_0) = \{q_0, q_2\}$, e quindi $\hat{\delta}(q_0, a) = \varepsilon(P)$, dove
 $P = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a) = \{q_0\}$, per cui $\hat{\delta}(q_0, a) = \varepsilon(q_0) = \{q_0, q_2\}$

$\hat{\delta}(q_0, ab) = \varepsilon(P)$, con $P = \delta(q_0, b) \cup \delta(q_2, b) = \{q_1, q_3\}$, per cui
 $\hat{\delta}(q_0, ab) = \varepsilon(q_1) \cup \varepsilon(q_3) = \{q_1, q_2, q_3\}$

Equivalenza ASFND e ε -ASFND

Dato un ASFND che riconosce un linguaggio L , esiste corrispondentemente un ε -ASFND che riconosce lo stesso linguaggio L ; viceversa, dato un ε -ASFND che riconosce un linguaggio L' , esiste un ASFND che riconosce lo stesso linguaggio L' .

La prima implicazione è evidente, in quanto un ASFND è un caso particolare di ε -ASFND

Equivalenza ASFND e ε -ASFND

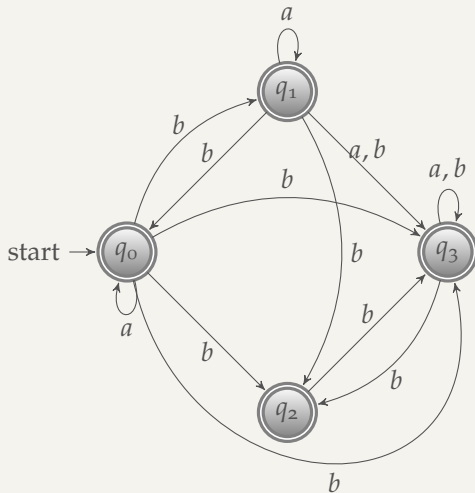
Per l'implicazione inversa, definiamo una procedura algoritmica che deriva una ASFND equivalente da un ε -ASFND dato.

1. per ogni $q \in Q$ e per ogni $a \in \Sigma$, $\delta_N(q, a) = \hat{\delta}(q, a)$
2. $q'_0 = q_0$
3. $F' = \{q \in Q \mid \varepsilon(q) \cap F \neq \emptyset\}$

Problema: mostrare che i due automi sono equivalenti.

Equivalenza ASFND e ε -ASFND

Per l'automa precedente, si ottiene



Definiamo come ε -ASFD un automa a stati finiti deterministico esteso da un insieme di ε -transizioni.

Mostrare l'equivalenza tra ε -ASFD e ASFND.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dato un ASFD che riconosce un linguaggio L , esiste corrispondentemente un ASFND che riconosce lo stesso linguaggio L ; viceversa, dato un ASFND che riconosce un linguaggio L' , esiste un ASFD che riconosce lo stesso linguaggio L' .

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dato un ASFD $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, un ASFND equivalente $\mathcal{A}_N = \langle \Sigma, Q', \delta_N, q'_0, F' \rangle$ è derivabile immediatamente ponendo

- $Q' = Q$
- $q'_0 = q_0$
- $F' = F$
- δ_N tale che $\forall a \in \Sigma, q \in Q, \delta_N(q, a) = \{q'\}$ se e solo se $\delta(q, a) = q'$

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dato un ASFND $\mathcal{A}_N = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, un ASFD equivalente $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', \delta', q'_0, F' \rangle$ è derivabile nel modo seguente:

L'insieme Q' è in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{P}(Q)$ (quindi $|Q'| = 2^{|Q|}$).

Indichiamo come $[q_{i_1}, \dots, q_{i_k}] \in Q'$ lo stato corrispondente all'insieme $\{q_{i_1}, \dots, q_{i_k}\} \subseteq Q$: i nomi degli stati di Q sono ordinati lessicograficamente.

Quindi Q' risulta definito come:

$$Q' = \{[q_{i_1}, \dots, q_{i_k}] \mid \{q_{i_1}, \dots, q_{i_k}\} \in \mathcal{P}(Q)\}.$$

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Lo stato iniziale è $q'_0 = [q_0]$.

Gli stati finali F' corrispondono ai sottoinsiemi di Q che contengono almeno un elemento di F :

$$F' = \{[q_{i_1}, \dots, q_{i_k}] \mid \{q_{i_1}, \dots, q_{i_k}\} \in \mathcal{P}(Q) \wedge \{q_{i_1}, \dots, q_{i_k}\} \cap F \neq \emptyset\}.$$

Equivalenza tra ASFD e ASFND

δ' è definita nel seguente modo:

$$\forall q_{i_1}, \dots, q_{i_k} \in Q, \forall a \in \Sigma, \delta'([q_{i_1}, \dots, q_{i_k}], a) = [q_{j_1}, \dots, q_{j_h}],$$

se e solo se

$$\delta_N(q_{i_1}, a) \cup \dots \cup \delta_N(q_{i_k}, a) = \{q_{j_1}, \dots, q_{j_h}\}$$

con $k > 0$ e $h \geq 0$.

Inoltre, si assume che per ogni $a \in \Sigma$ sia $\delta'([], a) = []$.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Come mostrare che \mathcal{A}_N e \mathcal{A} sono equivalenti?

È necessario mostrare che, per ogni $x \in \Sigma^*$, se x è accettata da \mathcal{A}_N allora è accettata da \mathcal{A} . Inoltre, se è accettata da \mathcal{A} allora è accettata anche da \mathcal{A}_N .

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dimostrazione “più forte”, che ad ogni computazione effettuata dall'automa \mathcal{A} ne corrisponde una equivalente dell'automa \mathcal{A}_N e viceversa. Cioè che $\forall x \in \Sigma^*$,

$$\overline{\delta}'([q_0], x) = [q_{j_1}, \dots, q_{j_h}] \iff \overline{\delta}_N(q_0, x) = \{q_{j_1}, \dots, q_{j_h}\}.$$

Se questo è vero, ne deriva che ogni stringa x o è accettata da sia da \mathcal{A} che da \mathcal{A}_N , o non è accettata da nessuno dei due automi.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Dimostrazione per induzione su $|x|$.

Passo base: ($|x| = 0$). In questo caso vale necessariamente $x = \varepsilon$, per cui abbiamo $\bar{\delta}_N(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$ e $\bar{\delta}'([q_0], \varepsilon) = [q_0]$.

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Passo induttivo: ($|x| > 0$). Supponiamo che la proprietà sia vera per $|x| = m$ e dimostriamo che esso continua a valere per $|x| = m + 1$.

Poniamo $x = x'a$, con $|x'| = m$. Per $\bar{\delta}_N$ abbiamo:

$$\bar{\delta}_N(q_0, x'a) = \bigcup_{p \in \bar{\delta}_N(q_0, x')} \delta_N(p, a).$$

Supponendo che $\bar{\delta}_N(q_0, x') = \{q_{i_1}, \dots, q_{i_k}\}$ e che $\delta_N(q_{i_1}, a) \cup \dots \cup \delta_N(q_{i_k}, a) = \{q_{j_1}, \dots, q_{j_h}\}$ otteniamo

$$\bar{\delta}_N(q_0, x'a) = \{q_{j_1}, \dots, q_{j_h}\}.$$

Equivalenza tra ASFD e ASFND

Per $\bar{\delta}'$ vale:

$$\bar{\delta}'(q_0, x'a) = \delta'(\bar{\delta}'([q_0], x'), a).$$

Essendo $|x'| = m$ possiamo sfruttare l'ipotesi induttiva, e quindi:

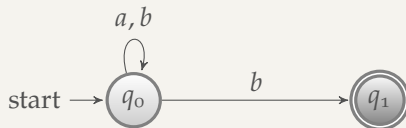
$$\delta'(\bar{\delta}'([q_0], x'), a) = \delta'([q_{i_1}, \dots, q_{i_k}], a),$$

che, per costruzione, vale proprio $[q_{j_1}, \dots, q_{j_h}]$.

La dimostrazione è completata osservando che $\overline{\delta}'([q_0], x) \in F'$ esattamente quando $\delta_N(q_0, x)$ contiene uno stato di Q che è in F .

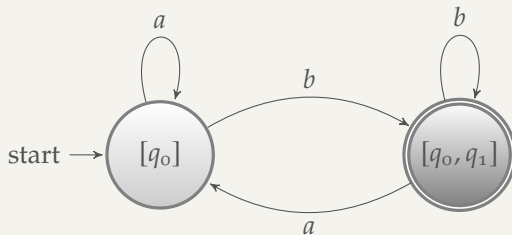
Esempio

ASFND che riconosce le stringhe in $\{a, b\}^*$ terminanti con b



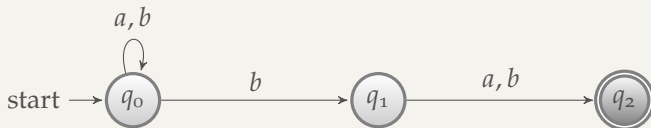
Esempio

ASFD che riconosce le stringhe in $\{a, b\}^*$ terminanti con b



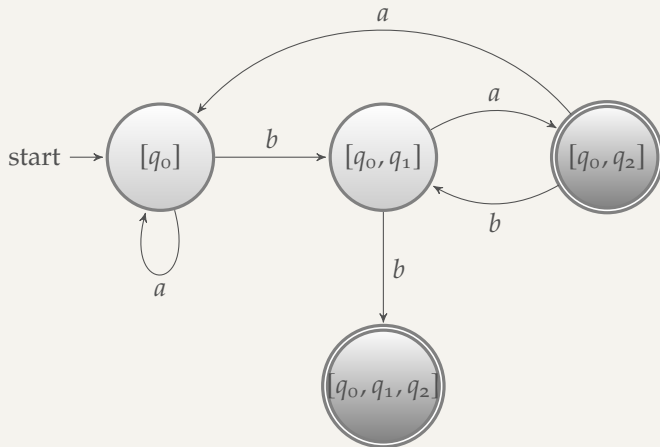
Esempio

ASFND che riconosce le stringhe in $(a + b)^*b(a + b)$



Esempio

ASFD che riconosce le stringhe in $(a + b)^*b(a + b)$



Costruire l'ASFND e l'ASFD che riconoscono le stringhe $(a + b)^*b(a + b)^k$, per $k = 2, 3$ e 4 e valutare come cresce la dimensione dei due automi al crescere di k .

Data una stringa $x = a_1 \cdots a_r$ definiamo stringa **riflessa** di x la stringa $\tilde{x} = a_r \cdots a_1$.

Dimostrare che se un linguaggio L è riconosciuto da un ASF, allora esiste un ASF che riconosce il linguaggio $\{\tilde{x} \mid x \in L\}$.

Minimizzazione di automi a stati finiti

L'ASFD con minimo numero di stati che riconosce un dato linguaggio L può essere derivato partizionando l'insieme Q degli stati di un automa che riconosce L in classi di equivalenza rispetto alla relazione

$$q_i \equiv q_j \iff (\forall x \in \Sigma^* \ \bar{\delta}(q_i, x) \in F \iff \bar{\delta}(q_j, x) \in F).$$

Quindi, $q_i \equiv q_j$ se e solo se ogni stringa che porta da q_i ad uno stato finale porta anche da q_j ad uno stato finale (e vice versa).

Minimizzazione di automi a stati finiti

\equiv è una relazione di equivalenza.

Se $q_i \equiv q_j$ i due stati sono detti **indistinguibili**

Se esiste una stringa $x \in \Sigma^*$ per cui $\bar{\delta}(q_i, x) \in F$ e $\bar{\delta}(q_j, x) \in Q - F$ (o viceversa) diremo che q_i e q_j sono **distinguibili** tramite x .

La costruzione è basata sul teorema di Myhill-Nerode.

Teorema (Myhill-Nerode)

Dato un linguaggio L definiamo la relazione di equivalenza R_L su Σ^ come:*

$$xR_Ly \iff (\forall z \in \Sigma^* \ xz \in L \iff yz \in L).$$

Un linguaggio $L \subseteq \Sigma^$ è regolare se e solo se R_L partiziona Σ^* in un numero finito di classi di equivalenza.*

Minimizzazione di automi a stati finiti

Dato un linguaggio regolare L , definiamo un ASF

$\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', \delta', q'_0, F' \rangle$, dove:

1. Q' associa a ogni classe $[x]$ di Σ^* uno stato $q_{[x]}$
2. $q'_0 = q_{[\varepsilon]}$
3. $F' = \{q_{[x]} | x \in L\}$
4. $\delta'(q_{[x]}, a) = q_{[xa]} \quad \forall a \in \Sigma$

Minimizzazione di automi a stati finiti

Si può notare che $\forall z \in [x] : \bar{\delta}'(q'_0, z) = q_{[x]}$. Quindi:

- l'insieme delle stringhe che portano l'automa dallo stato iniziale allo stato $q_{[x]}$ corrisponde all'insieme delle stringhe (equivalenti secondo R_L) in $[x]$. dalla definizione di F' , ne consegue immediatamente che \mathcal{A}' riconosce L .
- Q' , pari al numero di classi di equivalenza di R_L è il minimo numero di classi in cui è possibile partizionare Σ^* in modo tale che valga la proprietà $\forall z \in \Sigma^* \quad xz \in L \iff yz \in L \text{ se } x R_L y$

Q' è minimo.

Se così non fosse, esisterebbero due stringhe x, y non equivalenti rispetto a R_L e per cui $\bar{\delta}'(q'_0, x) = \bar{\delta}'(q'_0, y) = q$. Ma allora ne seguirebbe che $\forall z \in \Sigma^* : \bar{\delta}'(q'_0, xz) = \bar{\delta}'(q'_0, yz)$, il che comporterebbe allora che $x R_L y$, contrariamente all'ipotesi.

Minimizzazione di automi a stati finiti

Minimizzazione di un ASFD:

- individuazione di tutte le coppie di stati indistinguibili (mediante un algoritmo di marcatura delle coppie distinguibili)
- unificazione degli stati equivalenti, eliminando quelli non raggiungibili e modificando opportunamente la funzione di transizione.

Ipotesi:

tutti gli stati di \mathcal{A} sono raggiungibili dallo stato iniziale, altrimenti è necessario un passo preliminare di eliminazione degli stati irraggiungibili.

Minimizzazione di automi a stati finiti

- Per marcare le coppie di stati distinguibili si utilizza una tabella contenente una casella per ciascuna coppia (non ordinata) di stati di Q
- Le caselle vengono usate per marcare le coppie di stati distinguibili e per elencare, in una lista associata, tutte le coppie che dovranno essere marcate qualora la coppia a cui è associata la casella venga marcata.

Minimizzazione di automi a stati finiti

- La procedura inizia con la marcatura delle coppie distinguibili tramite la stringa ε (tutte e sole le coppie costituite da uno stato finale e da uno non finale)
- Per ogni coppia (p, q) non ancora marcata, si considerano, per ogni $a \in \Sigma$, tutte le coppie (r, s) , con $r = \delta(p, a)$ e $s = \delta(q, a)$.
 - Se nessuna delle coppie (r, s) è marcata come distinguibile allora si inserisce (p, q) nella lista associata ad ognuna di esse
 - Altrimenti p e q vengono riconosciuti distinguibili e la corrispondente casella viene marcata; qualora questa contenga una lista di coppie si procede (ricorsivamente) con la marcatura delle relative caselle

Minimizzazione di automi a stati finiti

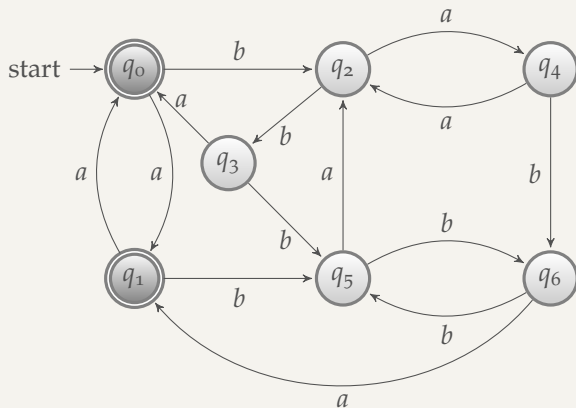
```
input automa a stati finiti  $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ ;  
output coppie di stati distinguibili di  $Q$ ;  
begin  
  for  $p \in F$  and  $q \in Q - F$  do  
    marca  $(p, q)$  e  $(q, p)$ ;  
  for each coppia non marcata di stati distinti do  
    if  $\exists a \in \Sigma : (\delta(p, a), \delta(q, a))$  distinguibili then  
      begin  
        marca  $(p, q)$ ;  
        marca ricorsivamente tutte le coppie non ancora marcate  
          sulla lista di  $(p, q)$  e su quelle delle coppie marcate  
          a questo passo  
      end  
    else  
      for  $a \in \Sigma$  do  
        if  $\delta(p, a) \neq \delta(q, a)$  and  $(p, q) \neq (\delta(p, a), \delta(q, a))$  then  
          aggiungi  $(p, q)$  alla lista di  $(\delta(p, a), \delta(q, a))$ 
```


Minimizzazione di automi a stati finiti

Una volta identificate le coppie di stati indistinguibili, ricordando che la relazione di indistinguibilità è una relazione di equivalenza, l'automata equivalente con il minimo numero di stati è dato evidentemente da $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', \delta', q'_0, F' \rangle$, in cui:

1. Q' è costruito selezionando, per ogni insieme di stati indistinguibili, uno ed un solo stato di Q (rappresentante);
2. F' è costituito da tutti i rappresentanti appartenenti ad F ;
3. δ' è ottenuta da δ mediante restrizione al dominio $Q' \times \Sigma$ ed inoltre, per ogni $\delta(q_i, a) = q_j$, con $q_i \in Q'$ e $q_j \in Q$, poniamo $\delta'(q_i, a) = q_k$, dove $q_k \in Q'$ è il rappresentante dell'insieme di stati indistinguibili che include q_j (chiaramente, se $q_j \in Q'$ allora è esso stesso un rappresentante e dunque $q_k = q_j$).

Minimizzazione di automi a stati finiti



Minimizzazione di automi a stati finiti

Passo iniziale: q_0 e q_1 , finali, distinguibili da tutti gli altri

1						
2	x	x				
3	x	x				
4	x	x				
5	x	x				
6	x	x				
	0	1	2	3	4	5

Minimizzazione di automi a stati finiti

Consideriamo le coppie di stati scandendo le celle da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso.

(q_0, q_1) distinguibile se lo è (q_2, q_5) , in quanto $\delta(q_0, b) = q_2$ e $\delta(q_1, b) = q_5$: quindi, $(0, 1)$ inserito nella lista associata a $(2, 5)$

1						
2	x	x				
3	x	x				
4	x	x				
5	x	x	(0,1)			
6	x	x				

Minimizzazione di automi a stati finiti

(q_2, q_3) distinguibile in quanto $\delta(q_2, a) = q_4$, $\delta(q_3, a) = q_0$, e la coppia (q_0, q_4) è distinguibile, (la cella $(0, 4)$ è marcata): quindi viene marcata anche la cella $(2, 3)$

1						
2	x	x				
3	x	x	x			
4	x	x				
5	x	x	(0,1)			
6	x	x				
	0	1	2	3	4	5

Minimizzazione di automi a stati finiti

Proseguendo, l'algoritmo determina che:

- la coppia (q_2, q_4) è distinguibile se lo è la coppia (q_3, q_6) : $(2, 4)$ è inserito nella lista della cella $(3, 6)$;
- la coppia (q_3, q_4) è distinguibile: la cella viene marcata;
- la coppia (q_2, q_5) è distinguibile se lo sono le coppie (q_2, q_4) e (q_3, q_6) : $(2, 5)$ è inserito nelle liste delle celle $(2, 4)$ e $(3, 6)$;
- la coppia (q_3, q_5) è distinguibile: la cella viene marcata;
- la coppia (q_4, q_5) non è distinguibile;
- la coppia (q_2, q_6) è distinguibile: la cella viene marcata;
- la coppia (q_3, q_6) è distinguibile se lo è la coppia (q_0, q_1) : $(3, 6)$ è inserito nella lista della cella $(0, 1)$;
- la coppia (q_4, q_6) è distinguibile: la cella viene marcata;
- la coppia (q_5, q_6) è distinguibile: la cella viene marcata;

Minimizzazione di automi a stati finiti

1	(3,6)					
2	x	x				
3	x	x	x			
4	x	x	(2,5)	x		
5	x	x	(0,1)	x		
6	x	x	x	(2,4) (2,5)	x	x
	0	1	2	3	4	5

Minimizzazione di automi a stati finiti

Mantenendo le sole indicazioni di coppie distinguibili e non.

1						
2	x	x				
3	x	x	x			
4	x	x		x		
5	x	x		x		
6	x	x	x		x	x
	0	1	2	3	4	5

Minimizzazione di automi a stati finiti

Dalla tabella, risulta che gli insiemi di stati indistinguibili sono:

q_0, q_1

q_3, q_6

q_2, q_4, q_5

Minimizzazione di automi a stati finiti

L'automa equivalente col minimo numero di stati risultante dal procedimento è mostrato sotto: o stato q_0 corrisponde alla classe d'equivalenza $\{q_0, q_1\}$, lo stato q_1 corrisponde alla classe $\{q_3, q_6\}$ e lo stato q_2 , infine, corrisponde alla classe $\{q_2, q_4, q_5\}$.

