Dato un alfabeto Σ e un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$, $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ è una relazione tra stringhe in Σ^* in cui due stringhe x, y sono in relazione se e solo se ogni loro possibile continuazione z produce stringhe in L o non in L allo stesso modo, sia se applicata a x che se applicata a y.

$$xR_Ly \text{ se e solo se, per ogni } z \in \Sigma^*\text{, } xz \in L \text{ se e solo se } yz \in L$$

La relazione R_L è una relazione di equivalenza, in quanto:

- xR_Lx per ogni x
- Per ogni x, y, se xR_Ly allora yR_Lx
- Per ogni x, y, z, se xR_Ly e yR_Lz, allora xR_Lz

Quindi, R_L decompone Σ^* in un insieme di classi di equivalenza: indichiamo il numero di tali classi come *indice* della relazione, $i(R_L)$.

Theorem (Myhill-Nerode)**.** *L è regolare se e solo se $i(R_L)$ è finito.*

Dimostrazione. Per mostrare che L regolare implica che $i(R_L)$ sia finito, supponiamo che L sia regolare, e consideriamo un qualunque ASFD $\mathcal{A} =< \Sigma, Q, \delta, q_0, F >$ che lo riconosce: assumiamo, senza perdita di generalità, che $\mathcal{A}$ abbia un solo stato finale, e quindi che $F = \{q_F\}$. L'automa $\mathcal{A}$ permette di definire una nuova relazione R_A tra stringhe in Σ^*, in cui due stringhe x, y sono in relazione se e solo se la loro lettura porta l'automa da q_0 in uno stesso stato.

$$xR_Ay \text{ se e solo se } \overline{\delta}(q_0, x) = \overline{\delta}(q_0, y)$$

Anche R_A è una chiaramente relazione di equivalenza, con un numero di classi al più pari al numero di stati di $\mathcal{A}$: quindi $i(R_A) \leq |Q|$.

Inoltre, si ha anche che se x e y portano l'automa in uno stesso stato q, ogni loro continuazione z porta $\mathcal{A}$ in uno stesso stato $\overline{\delta}(q, z)$. Ne deriva che se xR_Ay allora xzR_Ayz per ogni $z \in \Sigma^*$.

Osserviamo ora che se xR_Ay, e quindi x e y portano l'automa nello stesso stato q, allora, se $q = q_F$ le due stringhe vengono entrambe accettate, altrimenti vengono entrambe rifiutate. Quindi, se xR_Ay allora $x \in L$ se e solo se $y \in L$, e quindi xR_Ay implica xR_Ly (ma non il vice versa). Ne deriva che se x e y sono nella stessa classe di equivalenza in R_A sono nella stessa classe di equivalenza anche in R_L, per cui in R_A ci sono almeno tante classi quante ce ne sono in R_L, e quindi $i(R_A) \geq i(R_L)$.

Dato che $i(R_A)$ è finito (e pari a $|Q|$) abbiamo allora che anche $i(R_L)$ è finito.

Per mostrare l'implicazione inversa, che se $i(R_L)$ è finito allora L è regolare, definiamo a partire dall'insieme delle classi di equivalenza di R_L un ASFD $\mathcal{A} =< \Sigma, Q, \delta, q_0, F >$ che riconosce L. La definizione è la seguente:

- per ognuna delle classi di equivalenza $[x]$ di R_L, definiamo uno stato $q_{[x]} \in Q$
- lo stato iniziale è associato alla classe di equivalenza della stringa vuota $q_0 = q_{[\varepsilon]}$
- uno stato è finale se è associato alla classe di equivalenza di stringhe in L: $F = \{q_{[z]} : z \in L\}$
- per ogni stato $q_{[x]}$ e ogni carattere a, la funzione di transizione porta nello stato corrispondente alla classe di equivalenza associata alla stringa xa, quindi $\delta(q_{[x]}, a) = q_{[xa]}$

$\square$

Il teorema di Myhill-Nerode ha una importante applicazione. Esso può essere utilizzato per minimizzare un dato ASFD $\mathcal{A}$, vale a dire per costruire l'automa equivalente avente il minimo numero di stati: l'automa $\mathcal{A}'$ introdotto nella dimostrazione del teorema gode infatti di tale proprietà, valendo le seguenti disuguaglianze:

$$|Q| \;\geq\; \mathsf{ind}(R_{\mathcal{A}}) \;\geq\; \mathsf{ind}(R_L) = |Q'|,$$

il che mostra che $\mathcal{A}$ non può avere un numero di stati inferiore a quello degli stati di $\mathcal{A}'$. Tale automa $\mathcal{A}'$ gode inoltre della ulteriore proprietà di essere unico (a meno di una ridenominazione degli stati), proprietà che tuttavia non proveremo in questa sede.