Dimostrazione che la grammatica $\mathcal{G}$ con produzioni

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & a \mid aa \mid IaF \\ aF & \longrightarrow & Maa \mid MaaF \\ aM & \longrightarrow & Maa \\ IM & \longrightarrow & Ia \mid aa \end{array}$$

genera il linguaggio $\left\{a^{2^n} \mid n \geq 0\right\}$.

Alcune osservazioni preliminari:

1. ogni derivazione da S, a parte quelle banali che generano a e aa, comprende la forma di frase IaF
2. a partire da una stringa Ia^kF, con $k > 0$, è possibile derivare in $k+1$ passi le stringhe $Ia^{2k+1}F$, Ia^{2k+1}, $a^{2(k+1)}F$, $a^{2(k+1)}$. Infatti, si hanno le derivazioni:

   (a) $Ia^kF \Rightarrow Ia^{k-1}Ma^2F \overset{j-1}{\Rightarrow} Ia^{k-j}Ma^{2j}F \overset{k-j}{\Rightarrow} IMa^{2k}F \Rightarrow Ia^{2k+1}F$

   (b) $Ia^kF \Rightarrow Ia^{k-1}Ma^2 \overset{j-1}{\Rightarrow} Ia^{k-j}Ma^{2j} \overset{k-j}{\Rightarrow} IMa^{2k} \Rightarrow Ia^{2k+1}$

   (c) $Ia^kF \Rightarrow Ia^{k-1}Ma^2F \overset{j-1}{\Rightarrow} Ia^{k-j}Ma^{2j}F \overset{k-j}{\Rightarrow} IMa^{2k}F \Rightarrow a^{2(k+1)}F$

   (d) $Ia^kF \Rightarrow Ia^{k-1}Ma^2 \overset{j-1}{\Rightarrow} Ia^{k-j}Ma^{2j} \overset{k-j}{\Rightarrow} IMa^{2k} \Rightarrow a^{2k+2}$

   Si noti che a partire dalle stringhe ottenute nei casi (b) e (c) non possono essere derivate stringhe di terminali, per cui gli unici casi interessanti sono (a) e (d).

$\mathcal{G}$ genera tutte le stringhe a^{2^n}. I casi $n = 0, 1$ sono immediati. I seguenti sono dimostrati per induzione:

- Passo iniziale ($n = 2$): la stringa a^4 può essere ottenuta come

$$S \Rightarrow IaF \overset{(d)}{\Rightarrow} a^{2(1+1)} = a^4$$

- Passo induttivo: assumendo che a^{2^n} sia ottenuta dalla grammatica, la corrispondente derivazione avrà la forma

$$S \overset{*}{\Rightarrow} Ia^{2^{n-1}-1}F \overset{(d)}{\Rightarrow} a^{2^n}$$

  $a^{2^{n+1}}$ può essere allora ottenuta mediante la derivazione

$$S \overset{*}{\Rightarrow} Ia^{2^{n-1}-1}F \overset{(a)}{\Rightarrow} Ia^{2^n-1}F \overset{(d)}{\Rightarrow} a^{2^{n+1}}$$

Tutte le stringhe generate da $\mathcal{G}$ sono del tipo a^{2^n}. Consideriamo una qualunque derivazione di un stringa: tale derivazione o è relativa alle stringhe a e aa (che sono del tipo a^{2^n}) o presenta necessariamente un passo iniziale del tipo $S \longrightarrow IaF$, uno finale del tipo $IM \longrightarrow aa$, e una serie di passi intermedi che coinvolgono simboli M.

Indichiamo con j il numero di simboli M introdotti in fondo alla frase durante la derivazione (corrispondente al numero di applicazioni delle produzioni $aF \longrightarrow MaaF$ e $aF \longrightarrow Maa$), e osserviamo che ognuno di tali simboli:

1. viene introdotto in fondo alla forma di frase (come detto, da una produzione $aF \longrightarrow Maa$ o $aF \longrightarrow MaaF$)
2. per essere eliminato, al fine per ottenere una stringa di terminali, deve necessariamente transitare dal fondo all'inizio della frase per mezzo di una sequenza di applicazioni della produzione $aM \longrightarrow Maa$
3. giunto all'inizio, subito dopo il simbolo I, deve essere eliminato mediante la produzione $IM \longrightarrow Ia$ (o $IM \longrightarrow aa$ nel solo caso in cui sia l'ultimo passo della derivazione)

Questo processo, per ognuno di tali simboli, comporta che il numero di caratteri a della frase passa da k a $2k+1$ ($2k+2$ se il transito corrisponde al caso (d), e quindi alla produzione di una stringa di terminali).

Quindi, la presenza di j simboli M che vengono prodotti, transitano e vengono eliminati comporta che il numero di caratteri passa man mano da k a $2k+1 = 2(k+1)-1$, $2(2k+1)-1 = 4(k+1)-1$, $8(k+1)-1$, $\ldots$, $2^j(k+1)-1$, più uno se il risultato è una stringa di terminali. Se consideriamo che all'inizio di qualunque derivazione di una stringa di terminali vale $k=1$ in quanto $S \Rightarrow IaF$, abbiamo che il numero di caratteri a dopo il passaggio di j simboli M è pari a $2^{j+1}-1$ più uno, nel caso in cui il risultato della derivazione sia una stringa di terminali.

In definitiva, la derivazione di una qualunque stringa di terminali, deve avvenire in corrispondenza al transito da fine a inizio frase di un certo numero j di caratteri M e, come osservato, una derivazione con j transiti di questo tipo termina in una sequenza di $2^{j+1}-1+1 = 2^{j+1}$ caratteri.