Forme normali e grammatiche CF

a.a. 2020-2021

Corso di Fondamenti di Informatica - 1 modulo

Corso di Laurea in Informatica

Università di Roma "Tor Vergata"

Prof. Giorgio Gambosi

Forma normale di Chomsky

Una grammatica di tipo 2 si dice in Forma Normale di Chomsky se tutte le sue produzioni sono del tipo $A \longrightarrow BC$ o del tipo $A \longrightarrow a$, con $A, B, C \in V_N$ ed $a \in V_T$.

Forma normale di Chomsky

Teorema

Data una grammatica $\mathcal{G}$ non contestuale tale che $\varepsilon \notin L(G)$, esiste una grammatica equivalente in CNF.

Forma normale di Chomsky

Come mostrato, è possibile derivare una grammatica $\mathcal{G}'$ in forma ridotta equivalente a $\mathcal{G}$: in particolare, $\mathcal{G}'$ non ha produzioni unitarie.

Da $\mathcal{G}'$, è possibile derivare una grammatica $\mathcal{G}''$ in CNF, equivalente ad essa

Forma normale di Chomsky

Sia $A \longrightarrow \zeta_{i_1} \dots \zeta_{i_n}$ una produzione di $\mathscr{G}'$ non in CNF. Si possono verificare due casi:

- $n \geq 3$ e $\zeta_{i_j} \in V_N$, $j = 1, \dots, n$.
  In tal caso, introduciamo $n - 2$ nuovi simboli non terminali Z_1, $\dots, Z_{n-2}$ e sostituiamo la produzione $A \longrightarrow \zeta_{i_1} \dots \zeta_{i_n}$ con le produzioni

$$
\begin{array}{rcl}
A & \longrightarrow & \zeta_{i_1} Z_1 \\
Z_1 & \longrightarrow & \zeta_{i_2} Z_2 \\
 & \dots & \\
Z_{n-2} & \longrightarrow & \zeta_{i_{n-1}} \zeta_{i_n}.
\end{array}
$$

Forma normale di Chomsky

- $n \geq 2$ e $\zeta_{i_j} \in V_T$ per qualche $j \in \{1, \ldots, n\}$.
  In tal caso per ciascun $\zeta_{i_j} \in V_T$ introduciamo un nuovo non terminale $\overline{Z}_{i_j}$, sostituiamo $\overline{Z}_{i_j}$ a ζ_{i_j} nella produzione considerata e aggiungiamo la produzione $\overline{Z}_{i_j} \longrightarrow \zeta_{i_j}$. Così facendo o abbiamo messo in CNF la produzione considerata (se $n = 2$) o ci siamo ricondotti al caso precedente (se $n \geq 3$).

Forma normale di Chomsky

Si consideri la grammatica di tipo 2 che genera il linguaggio $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ con le produzioni

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aSb \\ S &\longrightarrow ab \end{aligned}$$

La grammatica è in forma ridotta.

Forma normale di Chomsky

Grammatica in CNF equivalente:

- $V_N = \{S, Z_1, \overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \overline{Z}_3, \overline{Z}_4\}$
- P:

$$
\begin{array}{rcl}
S & \longrightarrow & \overline{Z}_1 Z_1 \\
Z_1 & \longrightarrow & S\overline{Z}_2 \\
S & \longrightarrow & \overline{Z}_3\overline{Z}_4 \\
\overline{Z}_1 & \longrightarrow & a \\
\overline{Z}_2 & \longrightarrow & b \\
\overline{Z}_3 & \longrightarrow & a \\
\overline{Z}_4 & \longrightarrow & b
\end{array}
$$

Forma normale di Greibach

Una grammatica di tipo 2 si dice in Forma Normale di Greibach (GNF) se tutte le sue produzioni sono del tipo $A \longrightarrow a\beta$, con $A \in V_N$, $a \in V_T$, $\beta \in V_N^*$.

Si osservi come una grammatica di tipo 3 corrisponda al caso in cui $|\beta| \leq 1$

Lemma (Sostituzione)

Sia $\mathcal{G}$ una grammatica di tipo 2 le cui produzioni includono

$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \alpha_1 B \alpha_2 \\ B & \longrightarrow & \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n, \end{array}$$

($\alpha_1, \alpha_2 \in V^*$) e in cui non compaiono altre B-produzioni oltre a quelle indicate. La grammatica $\mathcal{G}'$ in cui la produzione $A \longrightarrow \alpha_1 B \alpha_2$ è stata sostituita dalla produzione

$$A \longrightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_1 \beta_n \alpha_2$$

è equivalente alla grammatica $\mathcal{G}$.

Trasformazione in forma normale di Greibach

Lemma (Eliminazione ricursione sinistra)

Sia data una grammatica $\mathcal{G}$ con ricursione sinistra sul non terminale A e sia

$$A \longrightarrow A\alpha_1 \mid \ldots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n,$$

l'insieme dell A-produzioni in $\mathcal{G}$, dove nessuna delle stringhe β_i inizia per A. La grammatica $\mathcal{G}'$ in cui le A-produzioni in $\mathcal{G}$ sono state sostituite dalle produzioni:

$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \beta_1 A' \mid \ldots \mid \beta_n A' \mid \beta_1 \ldots \mid \beta_n \\ A' & \longrightarrow & \alpha_1 A' \mid \ldots \mid \alpha_m A' \mid \alpha_1 \ldots \mid \alpha_m \end{array}$$

è equivalente a $\mathcal{G}$ e non presenta ricursione sinistra rispetto al non terminale A.

Trasformazione in forma normale di Greibach

Teorema

Ogni linguaggio non contestuale L tale che $\varepsilon \notin L$ può essere generato da una grammatica di tipo 2 in GNF.

Trasformazione in forma normale di Greibach

Si assuma che $\mathcal{G}$ sia una grammatica CF in CNF che generai L.

La derivazione di $\mathcal{G}'$ da $\mathcal{G}$ avviene applicando iterativamente i due lemmi precedenti, a partire da un ordinamento arbitrario $A_1, \ldots, A_n$ tra i non terminali di $\mathcal{G}$.

Trasformazione in forma normale di Greibach

Fase 1

- per k da 2 a n
  - per j da 1 a $k-1$
    - Applica il Lemma di sostituzione ad ogni produzione del tipo $A_k \longrightarrow A_j\alpha$
    - Applica il Lemma di eliminazione della ricursione sinistra ad ogni produzione del tipo $A_k \longrightarrow A_k\alpha$

Trasformazione in forma normale di Greibach

Siano $B_1 \ldots, B_l$ i non terminali aggiunti. A questo punto le produzioni sono tutte di uno tra i tipi:

- (a) $A_k \longrightarrow A_j\gamma$ con $j > k, \gamma \in (V_N \cup \{B_1, \ldots, B_l\})^*$
- (b) $A_k \longrightarrow a\gamma$ con $a \in V_T, \gamma \in (V_N \cup \{B_1, \ldots, B_l\})^*$
- (c) $B_k \longrightarrow \gamma$ con $\gamma \in V_N \cdot (V_N \cup \{B_1, \ldots, B_l\})^*$

Inoltre, le A_k-produzioni sono:

- se $k = n$ tutte del tipo (b)
- se $k < n$ del tipo (b) o del tipo (a), con $j \leq n$

Trasformazione in forma normale di Greibach

Fase 2

- per h da $n-1$ a 1
  - per j da n a h
    - Applica il Lemma di sostituzione ad ogni produzione del tipo $A_h \longrightarrow A_j\gamma$

A questo punto le produzioni sono tutte del tipo (b) o (c)

Trasformazione in forma normale di Greibach

Fase 3

- per i da 1 a l
  - per j da 1 a m
    - Applica il Lemma di sostituzione ad ogni produzione del tipo $B_i \longrightarrow A_j\gamma$

A questo punto le produzioni sono tutte del tipo (b)

Esempio

Data una grammatica avente le produzioni

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \mid b \\ A &\longrightarrow b \mid BS \\ B &\longrightarrow a \mid BA \mid AS, \end{aligned}$$

consideriamo in modo arbitrario l'ordinamento S, A, B tra i non terminali

Esempio

Fase 1.

Sostituiamo alla produzione $B \longrightarrow AS$ la coppia di produzioni $B \longrightarrow bS \mid BSS$:

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & AB \mid b \\ A & \longrightarrow & b \mid BS \\ B & \longrightarrow & a \mid bS \mid BA \mid BSS \end{array}$$

Esempio

Fase 1.

Eliminiamo la ricursione sinistra nelle B-produzioni, ottenendo

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \mid b \\ A &\longrightarrow b \mid BS \\ B &\longrightarrow a \mid bS \mid aB' \mid bSB' \\ B' &\longrightarrow A \mid SS \mid AB' \mid SSB'. \end{aligned}$$

Esempio

Fase 2.

Sostituiamo alla produzione $A \longrightarrow BS$ le produzioni $A \longrightarrow aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S$ ottenendo

$$
\begin{array}{rcl}
S & \longrightarrow & AB \mid b \\
A & \longrightarrow & b \mid aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S \\
B & \longrightarrow & a \mid bS \mid aB' \mid bSB' \\
B' & \longrightarrow & A \mid SS \mid AB' \mid SSB'.
\end{array}
$$

Esempio

Fase 2.

Sostituiamo alla produzione $S \longrightarrow AB$ le produzioni $S \longrightarrow aSB \mid bSSB \mid aB'SB \mid bSB'SB \mid bB$ ottenendo

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow aSB \mid bSSB \mid aB'SB \mid bSB'SB \mid bB \mid b \\
A &\longrightarrow b \mid aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S \\
B &\longrightarrow a \mid bS \mid aB' \mid bSB' \\
B' &\longrightarrow A \mid SS \mid AB' \mid SSB'.
\end{aligned}
$$

Esempio

Fase 3.

Sostituiamo nelle B'-produzioni ottenendo

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow aSB \mid bSSB \mid aB'SB \mid bSB'SB \mid bB \mid b \\
A &\longrightarrow b \mid aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S \\
B &\longrightarrow a \mid bS \mid aB' \mid bSB' \\
B' &\longrightarrow aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S \mid b \\
&\quad\;\; asBS \mid bSSBS \mid aB'SBS \mid bSB'SBS \mid bSB \mid bS \mid \\
&\quad\;\; aSB' \mid bSSB' \mid aB'SB' \mid bSB'SB' \mid bB' \mid \\
&\quad\;\; aSBSB' \mid bSSBSB' \mid aB'SBSB' \mid \\
&\quad\;\; bSB'SBSB' \mid bBSB' \mid bSB'.
\end{aligned}
$$

Esercizio

Sia data la seguente grammatica:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AbA \mid b \\ A &\longrightarrow SaS \mid a. \end{aligned}$$

Derivare una grammatica in GNF equivalente ad essa.