Non contestualità

Corso di Fondamenti di Informatica - modulo 1
Corso di Laurea in Informatica
Università di Roma "Tor Vergata"
a.a. 2020-2021

Giorgio Gambosi

Pumping lemma

Teorema 1. *Sia* $L \subseteq V_T^*$ *un linguaggio non contestuale. Esiste allora una costante* n *tale che se* $z \in L$ *e* $|\, z \,| \geq n$ *allora esistono 5 stringhe* $u, v, w, x, y \in V_T^*$ *tali che*

$i)$ $uvwxy = z$
$ii)$ $|\, vx \,| \geq 1$
$iii)$ $|\, vwx \,| \leq n$
$iv)$ $\forall i \geq 0 \; uv^i wx^i y \in L.$

Pumping lemma: interpretazione come gioco a due

Se L è context free, Alice vince sempre questo gioco con Bob:

1. Alice fissa un intero $n > 0$ opportuno
2. Bob sceglie una stringa $z \in L$ con $|\, z \,| > n$
3. Alice divide z in cinque parti $uvwxy$ con $|\, vwx \,| \leq n$ e $|\, vx \,| \geq 1$
4. Bob sceglie un intero $i \geq 0$
5. Alice mostra a Bob che $uv^i wx^i y \in L$

Dimostrazione

Grammatica $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ in CNF che genera $L = L(\mathcal{G})$ e sia $k = |\, V_N \,|$ il numero di simboli non terminali in $\mathcal{G}$.

Qualunque albero sintattico $A(x)$ relativo ad una stringa $x \in V_T^*$ derivata in $\mathcal{G}$ sarà tale da avere tutti i nodi interni (corrispondenti a simboli non terminali) di grado 2, eccetto quelli aventi foglie dell'albero come figli, che hanno grado 1.

Dimostrazione

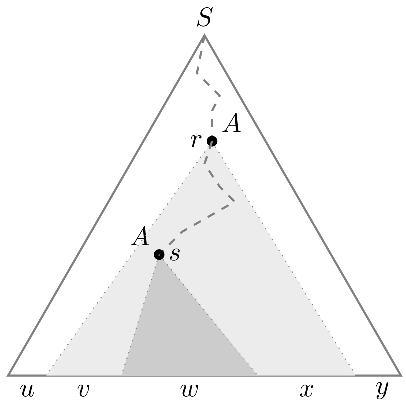
Se $h(x)$ è l'altezza di $A(x)$ (numero massimo di archi in un cammino dalla radice ad una foglia), abbiamo $|\, x \,| \leq 2^{h(x)}$

Quindi, se $|\, x \,| > 2^{|V_N|}$ allora $h(x) > |\, V_N \,|$: di conseguenza, deve esistere un cammino dalla radice ad una foglia che attraversa almeno $|\, V_N \,| + 1$ nodi interni.

Per il pigeonhole principle, (almeno) due di questi nodi sono associati ad uno stesso non terminale, ad esempio A.

Dimostrazione

Indichiamo con r il nodo più vicino alla radice associato al simbolo A, e con s il nodo associato ad A più vicino alla foglia



Dimostrazione

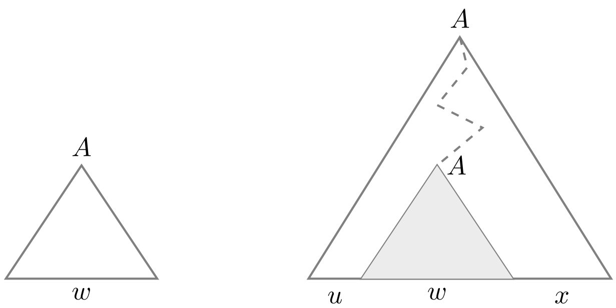
Dalle due occorrenze di A in r ed s derivano stringhe diverse (vwx e w), di cui una è sottostringa dell'altra.

Sul cammino da r ad s c'è almeno un nodo, necessariamente di grado 2, quindi $|vx| \geq 1$

Dimostrazione

Gli alberi sottostanti possono essere sostituiti l'uno all'altro all'interno di un qualunque albero sintattico: quindi, anche la stringa uwy è generata dalla grammatica (sostituendo, nell'albero precedente, l'albero di sinistra con quello di destra). Mediante la sostituzione opposta, anche la stringa $uvvwxxy$ risulta generabile.

Dimostrazione



Pumping lemma

Fornisce soltanto una condizione necessaria perché un linguaggio sia context free: non può essere utilizzato per mostrare la non contestualità di un linguaggio, ma solo per dimostrarne la contestualità.

L non contestuale $\Longrightarrow$ pumping lemma verificato

pumping lemma non verificato $\Longrightarrow$ L non contestuale

Pumping lemma: utilizzo come gioco a due

Se Alice vince sempre questo gioco con Bob, allora L non è CF

1. Bob sceglie un intero $n > 0$
2. Alice sceglie una stringa $z \in L$ con $| z |> n$
3. Bob divide z in cinque parti $uvwxy$ con $| vwx |\leq n$ e $| vx |\geq 1$
4. Alice sceglie un intero $i \geq 0$
5. Alice mostra a Bob che $uv^iwx^iy \notin L$

Esempio

$L = \{a^kb^kc^k|k > 0\}$ non è CF

1. Bob sceglie un intero $n > 0$
2. Alice sceglie la stringa $a^n b^n c^n \in L$
3. Bob divide z in cinque parti $uvwxy$ con $| vwx | \leq n$ e $| vx | \geq 1$. vwx o è una sequenza di occorrenze dello stesso simbolo (ad esempio a^h, $h > 0$) o è composta di due sottosequenze di stessi simboli (ad esempio $a^r b^s$, $r, s > 0$). Quindi, almeno uno dei simboli a, b, c non compare in vwx e quindi né in v né in x
4. Alice sceglie $i = 2$
5. Alice mostra a Bob che $uv^2wx^2y \notin L$ in quanto almeno un simbolo ha aumentato il numero di occorrenze ed almeno un altro simbolo ha un numero di occorrenze invariato