$$L_1 = \{a^n b^m | n \leq m\}$$

non regolare.

Per il pumping lemma: dato n, consideriamo la stringa $z = a^n b^n$. Necessariamente, per ogni u, v, w tali che $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ e $z = uvw$, deve essere $uv = a^k$ per $k \leq n$ e quindi $v = a^h$ per $1 \leq h \leq k$. Per $i = 2$, abbiamo allora che $n + h > n$ e quindi $z_2 = a^{n+h} b^n \notin L_1$.

$$L'_1 = \{a^n b^m | n < m\}$$

non regolare.

Per il pumping lemma: dato n, consideriamo la stringa $z = a^n b^{n+1}$. Necessariamente, per ogni u, v, w tali che $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ e $z = uvw$, deve essere $uv = a^k$ per $k \leq n$ e quindi $v = a^h$ per $1 \leq h \leq k$. Per $i = 2$, abbiamo allora che $n + h \geq n + 1$ e quindi $z_2 = a^{n+h} b^{n+1} \notin L'_1$.

$$L_2 = \{a^n b^m | n \geq m\}$$

non regolare.

Per il pumping lemma: dato n, consideriamo la stringa $z = a^n b^n$. Necessariamente, per ogni u, v, w tali che $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ e $z = uvw$, deve essere $uv = a^k$ per $k \leq n$ e quindi $v = a^h$ per $1 \leq h \leq k$. Per $i = 0$, abbiamo allora che $z_0 = a^{n-h} b^n \notin L_2$.

In alternativa, osserviamo che dato che L_1 non è regolare, non lo è neanche $\overline{L}_1$. Osserviamo inoltre che $\overline{L}_1 = L_2 \cup L_3$, con $\overline{L}_3 = \{a^* b^*\}$. Dato che $\overline{L}_3$ è regolare, lo è anche L_3, per cui, se L_2 fosse regolare ne risulterebbe che $\overline{L}_1$ sarebbe regolare in quanto unione di linguaggi regolari, e quindi L_1 sarebbe regolare, cosa non vera. Quindi, $L_2 = \{a^n b^m | n \geq m\}$ non è regolare.

$$L = \{a^i b^j | i - j > 4\}$$

non regolare.

Per il pumping lemma: dato n, consideriamo la stringa $z = a^n b^{n-3}$. Necessariamente, per ogni u, v, w tali che $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ e $z = uvw$, deve essere $uv = a^k$ per $k \leq n$ e quindi $v = a^h$ per $1 \leq h \leq k$. Per $i = 0$, abbiamo allora che $n - h < n < n - 3 + 4 = n + 1$ e quindi $z_0 = a^{n-h} b^{n-3} \notin L$.

$$L = \{a^i b^j | i - j < 4\}$$

non regolare.

Per il pumping lemma: dato n, consideriamo la stringa $z = a^n b^{n-3}$. Necessariamente, per ogni u, v, w tali che $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ e $z = uvw$, deve essere $uv = a^k$ per $k \leq n$ e quindi $v = a^h$ per $1 \leq h \leq k$. Per $i = 2$, abbiamo allora che $n + h > n - 3 + 4 = n + 1$ e quindi $z_0 = a^{n-h} b^{n-3} \notin L$.

$$L = \{a^i b^j | i + j > 4\}$$

regolare. Si può definire un ASFD che lo riconosce.

$$L = \{a^i b^j | i + j < 4\}$$

regolare. Si tratta in effetti di un linguaggio finito.