Automi a pila

Corso di Fondamenti di Informatica - modulo 1
Corso di Laurea in Informatica
Università di Roma "Tor Vergata"
a.a. 2020-2021

Giorgio Gambosi

Automi a pila

Un automa a pila (o automa push-down) è definito come una settupla $\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta \rangle$ dove Σ è l'alfabeto di input, Γ è l'alfabeto dei simboli della pila, $Z_0 \in \Gamma$ è il simbolo iniziale di pila, Q è un insieme finito e non vuoto di stati, $q_0 \in Q]$ è lo stato iniziale, $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali, $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma^*$ è la funzione (parziale) di transizione.

Automi a pila

L'automa introdotto non è deterministico, in quanto la presenza di ε-transizioni può comportare che esistano continuazioni diverse di una stessa computazione anche in presenza di uno stesso carattere letto.

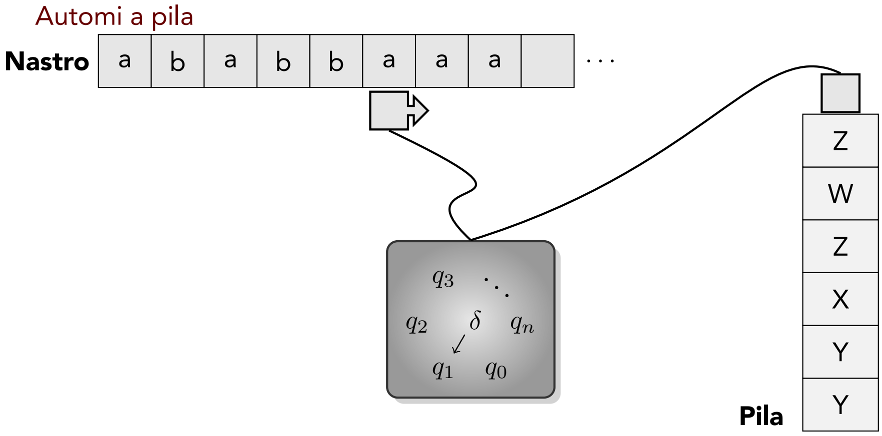
Per ottenere un comportamento deterministico dobbiamo fare l'ulteriore ipotesi che se, per una coppia $q \in Q$, $Z \in \Gamma$, è definita $\delta(q, \varepsilon, Z)$ allora la funzione di transizione $\delta(q, a, Z)$ non deve essere definita per nessun $a \in \Sigma$.

Automi a pila

Ad ogni passo l'automa, a partire dallo stato attuale, dal carattere letto sul nastro di input e dal carattere affiorante sulla pila, sostituisce il simbolo affiorante nella pila con una stringa di caratteri e si porta in un nuovo stato.

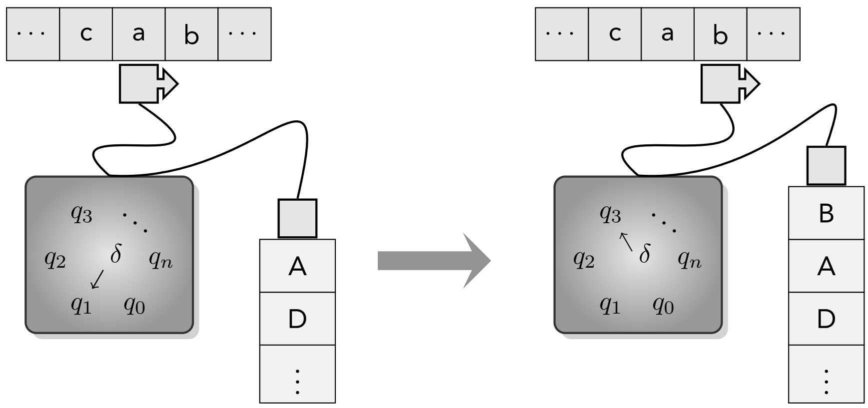
La convenzione è che il primo carattere della stringa diventi il simbolo di pila affiorante. Si noti che se la stringa che viene inserita nella pila è la stringa vuota, ciò equivale a dire che il simbolo precedente affiorante nella pila è stato cancellato.

Automi a pila



Automi a pila

$\delta(q_1, a, A) = (q_3, BA)$



Automi a pila

Dato un automa a pila $\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta \rangle$, una *configurazione* di $\mathcal{M}$ è data dalla tripla $\langle q, x, \gamma \rangle$, dove $q \in Q$, $x \in \Sigma^*$ e $\gamma \in \Gamma^*$.

Automi a pila

Sia $\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automa a pila e siano (q, x, γ) e (q', x', γ') due configurazioni di $\mathcal{M}$: avremo allora che $(q, x, \gamma) \underset{\mathcal{M}}{\vdash} (q', x', \gamma')$ se e solo se valgono le tre condizioni:

1. esiste $a \in \Sigma$ tale che $x = ax'$;
2. esistono $Z \in \Gamma$ e $\eta, \zeta \in \Gamma^*$ tali che $\gamma = Z\eta$ e $\gamma' = \zeta\eta$;
3. $\delta(q, a, Z) = (q', \zeta)$;

oppure le tre condizioni:

1. $x = x'$;
2. esistono $Z \in \Gamma$ e $\eta, \zeta \in \Gamma^*$ tali che $\gamma = Z\eta$ e $\gamma' = \zeta\eta$;
3. $\delta(q, \epsilon, Z) = (q', \zeta)$.

Automi a pila

Una computazione è definita come una sequenza $c_0, \ldots, c_k$ di configurazioni di $\mathcal{M}$ tale che $c_i \underset{\mathcal{M}}{\vdash} c_{i+1}$.

Automi a pila: accettazione per pila vuota

Sia $\mathcal{M}$ un automa a pila. Una configurazione (q, x, γ) di $\mathcal{M}$ è di accettazione se $x = \gamma = \varepsilon$. Secondo tale definizione, una stringa x è quindi accettata da $\mathcal{M}$ se e solo se al termine della scansione della stringa la pila è vuota.

Indichiamo con $N(\mathcal{M})$ il linguaggio accettato per pila vuota dall'automa $\mathcal{M}$.

Automi a pila: accettazione per stato finale

Sia $\mathcal{M}$ un automa a pila. Una configurazione (q, x, γ) di $\mathcal{M}$ è di accettazione se $x = \varepsilon$ e $q \in F$. Secondo tale definizione, una stringa x è quindi accettata da $\mathcal{M}$ se e solo se al termine della scansione della stringa l'automa si trova in uno stato finale.

Indichiamo con $L(\mathcal{M})$ il linguaggio accettato per stato finale dall'automa

Automi a pila nondeterministici

Un automa a pila non deterministico è definito come una settupla $\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta \rangle$ dove Σ è l'alfabeto di input, Γ è l'alfabeto dei simboli della pila, $Z_0 \in \Gamma$ è il simbolo iniziale di pila, Q è un insieme finito e non vuoto di stati, $q_0 \in Q]$ è lo stato iniziale, $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali, $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \mapsto \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ è la funzione (parziale) di transizione.

Automi a pila nondeterministici

Nel caso degli automi a pila la presenza del non determinismo comporta una aumento del potere computazionale.

Mentre gli automi a pila non deterministici riconoscono la classe dei linguaggi non contestuali, gli automi a pila deterministici riconoscono un sottoinsieme proprio di tali linguaggi, la classe dei linguaggi non contestuali deterministici.

Esempio: accettazione del linguaggio non contestuale $\{w\tilde{w} \mid w \in \{a,b\}^+\}$, dove $\tilde{w}$ indica la stringa riflessa di w

Esempio di accettazione per pila vuota

Tabella di transizione dell'automa a pila che accetta per pila vuota il linguaggio $\{w\tilde{w} \mid w \in \{a,b\}^+\}$

	A		B		Z_0	
	a	b	a	b	a	b
q_0	(q_0, BA) (q_1, ε)	(q_0, BA)	(q_0, AB)	(q_0, BB) (q_1, ε)	(q_0, A)	(q_0, B)
q_1	(q_1, ε)			(q_1, ε)		

Esempio di accettazione per stato finale

Tabella di transizione dell'automa a pila che accetta per stato finale il linguaggio $\{w\tilde{w} \mid w \in \{a,b\}^+\}$, con $q_F = q_2$

	A		B		Z_0		
	a	b	a	b	a	b	ε
q_0	(q_0, AA) (q_1, ε)	(q_0, BA)	(q_0, AB)	(q_0, BB) (q_1, ε)	(q_0, AZ_0)	(q_0, BZ_0)	
q_1	(q_1, ε)			(q_1, ε)			(q_2, ε)

Equivalenza tra condizioni di accettazione

Teorema 1. *Dato un automa a pila non deterministico $\mathcal{M}$ che accetta un linguaggio per stato finale, esiste un automa a pila non deterministico $\mathcal{M}'$ che accetta lo stesso linguaggio per pila vuota, vale a dire tale che $L(\mathcal{M}) = N(\mathcal{M}')$.*

Equivalenza tra condizioni di accettazione

Teorema 2. *Dato un automa a pila non deterministico $\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta \rangle$ che accetta un linguaggio per stato finale, esiste un automa a pila non deterministico $\mathcal{M}' = \langle \Sigma', \Gamma', Z_0', Q', q_0', \emptyset, \delta' \rangle$ che accetta lo stesso linguaggio per pila vuota, vale a dire tale che $L(\mathcal{M}) = N(\mathcal{M}')$.*

Equivalenza tra condizioni di accettazione

$\mathcal{M}'$ opera in modo simile a $\mathcal{M}$, secondo lo schema:

1. All'inizio $\mathcal{M}'$ ha nella pila un simbolo speciale X non appartenente a Γ ed inserisce al di sopra di X il simbolo Z_0;

2. Quindi, $\mathcal{M}'$ esegue gli stessi passi di $\mathcal{M}$. Si noti che nel corso di tale fase la pila di $\mathcal{M}'$ non sarà mai vuota;

3. Se, alla fine della stringa di input, $\mathcal{M}$ raggiunge uno stato finale, $\mathcal{M}'$ provvede ad eliminare tutti i simboli presenti in pila, incluso X.

Equivalenza tra condizioni di accettazione

Ne deriva $\Sigma' = \Sigma$, $\Gamma' = \Gamma \cup \{X\}$ (X non in Γ), $Z_0' = X$, $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\}$ (q_0' e q_f non in Q) e, per quanto riguarda la funzione di transizione δ':

1. $\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma$, $\forall Z \in \Gamma$, $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$;

2. $\forall q \in Q - F$, $\forall Z \in \Gamma$ $\delta'(q, \varepsilon, Z) = \delta(q, \varepsilon, Z)$;

3. $\forall q \in F$, $\forall Z \in \Gamma$ $\delta'(q, \varepsilon, Z) = \delta(q, \varepsilon, Z) \cup \{(q_f, \varepsilon)\}$;

4. $\delta'(q_0', \varepsilon, X) = \{(q_0, Z_0X)\}$;

5. $\forall Z \in \Gamma'$, $\delta'(q_f, \varepsilon, Z) = \{(q_f, \varepsilon)\}$.

Equivalenza tra condizioni di accettazione

- Per effetto di 1-2 $\mathcal{M}'$ simula perfettamente $\mathcal{M}$ se questo non si trova in una stato finale.
- Per effetto di 1-3 $\mathcal{M}'$ in uno stato finale può eseguire tutte le transizioni definite per $\mathcal{M}$ con l'ulteriore possibilità di effettuare una ε-transizione verso il suo stato q_f lasciando la pila immutata.
- La condizione 4 fa sì che il simbolo X rimanga in fondo alla pila mentre l'automa $\mathcal{M}'$ effettua la simulazione di $\mathcal{M}$
- La condizione 5 assicura lo svuotamento della pila di $\mathcal{M}'$ nel caso in cui $\mathcal{M}$ raggiunga uno stato finale.

Equivalenza tra condizioni di accettazione

Teorema 3. *Dato un automa a pila non deterministico* $\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta \rangle$ *che accetta un linguaggio per pila vuota, esiste un automa a pila non deterministico* $\mathcal{M}' = \langle \Sigma', \Gamma', Z_0', Q', q_0', \emptyset, \delta' \rangle$ *che accetta lo stesso linguaggio per stato finale, vale a dire tale che* $N(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$.

Equivalenza tra condizioni di accettazione

$\mathcal{M}'$ opera similmente a $\mathcal{M}$, secondo lo schema:

1. All'inizio $\mathcal{M}'$ ha nella pila un simbolo speciale X non appartenente a Γ ed inserisce Z_0 al di sopra di X;
2. Quindi, $\mathcal{M}'$ esegue gli stessi passi di $\mathcal{M}$. Si noti che nel corso di tale fase la pila di $\mathcal{M}'$ non sarà mai vuota;
3. Se, alla fine della stringa di input, $\mathcal{M}$ raggiunge la condizione di pila vuota, $\mathcal{M}'$ entra nello stato finale q_f.

Equivalenza tra condizioni di accettazione

Ne deriva $\Sigma' = \Sigma$, $\Gamma' = \Gamma \cup \{X\}$ (X non in Γ), $Z_0' = X$, $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\}$ (q_0' e q_f non in Q) e, per quanto riguarda la funzione di transizione δ':

1. $\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\forall Z \in \Gamma$, $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$;
2. $\forall q \in Q$, $\delta'(q, \varepsilon, X) = \{(q_f, X)\}$;
3. $\delta'(q_0', \varepsilon, X) = \{(q_0, Z_0X)\}$.

Equivalenza tra condizioni di accettazione

- Per effetto di 1 $\mathcal{M}'$ simula perfettamente $\mathcal{M}$ se la pila di questo non è vuota
- Per effetto di 2 $\mathcal{M}'$, se la pila di $\mathcal{M}$ è vuota (e quindi la propria contiene solo X), può effettuare una ε-transizione verso il suo stato finale q_f lasciando la pila immutata
- La 3 fa sì che il simbolo X rimanga in fondo alla pila mentre l'automa $\mathcal{M}'$ effettua la simulazione di $\mathcal{M}$.

Equivalenza CFG-NPDA

Se un linguaggio è generato da una grammatica $\mathcal{G}$ non contestuale, esiste un automa a pila $\mathcal{M}$ tale che $L(\mathcal{G}) = \mathcal{N}(\mathcal{M})$.

La dimostrazione è costruttiva: a partire da $\mathcal{G}$ deriviamo $\mathcal{M}$ e mostriamo poi l'equivalenza.

Equivalenza CFG-NPDA

Consideriamo dapprima il caso in cui $\varepsilon \notin L(\mathcal{G})$. A partire da $\mathcal{G}$, costruiamo una grammatica $\mathcal{G}' = \langle \Sigma, V'_N, P', S' \rangle$ equivalente a $\mathcal{G}$, ma in Forma Normale di Greibach.

Per l'automa, poniamo $\Gamma = V'_N$, $Q = \{q_0\}$, $Z_0 = S'$.

Funzione di transizione: per ogni produzione $A \longrightarrow a\gamma$, $\gamma \in (V'_N)^*$ introduciamo la regola $\delta(q_0, a, A) = (q_0, \gamma)$.

Equivalenza CFG-NPDA

L'equivalenza deriva dalla dimostrazione che

$$(q, x, S') \overset{*}{\longmapsto} (q, \varepsilon, \alpha)$$

se e solo se $S' \overset{*}{\Longrightarrow} x\alpha$, dove $q \in Q$, $x \in (\Sigma')^*$ e $\alpha \in (V'_N)^*$

Equivalenza CFG-NPDA

In due passi:

1. Dimostrazione, per induzione su i (numero di passi della computazione), che

$$\text{se } (q, x, S') \overset{i}{\longmapsto} (q, \varepsilon, \alpha) \quad \text{allora} \quad S' \overset{*}{\Longrightarrow} x\alpha.$$

2. Dimostrazione, per induzione su i numero di passi della derivazione), che

$$\text{se } S' \overset{i}{\Longrightarrow} x\alpha \quad \text{allora} \quad (q, x, S') \overset{*}{\longmapsto} (q, \varepsilon, \alpha).$$

Equivalenza CFG-NPDA

Se $\varepsilon \in L(\mathcal{G})$ possiamo costruire una grammatica $\mathcal{G}'$ in GNF che genera il linguaggio $L(\mathcal{G}') = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$ e quindi applicare la procedura descritta per ottenere un automa a pila $\langle \Sigma, \Gamma, Z_0, \delta, \{q_0\}, \emptyset \rangle$ che riconosce $L(\mathcal{G}')$.

Un automa che riconosce $L(\mathcal{G})$ può essere ottenuto aggiungendo uno nuovo stato iniziale q'_0 e la transizione $\delta(q'_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q'_0, \varepsilon), (q_0, Z_0)\}$.

Equivalenza NPDA-CFG

Sia L un linguaggio accettato mediante pila vuota da un automa a pila $\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, Z_0, q_0, \emptyset \rangle$, allora esiste una grammatica non contestuale $\mathcal{G}$ che lo genera, cioè $L = N(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

La dimostrazione è costruttiva: a partire da $\mathcal{M}$ deriviamo $\mathcal{G}$ e mostriamo poi l'equivalenza.

Equivalenza NPDA-CFG

Definiamo

$$V_N = \big\{[q, A, p] \mid \text{ per ogni } q, p \in Q, A \in \Gamma\big\} \cup \{S\}.$$

dove S è l'assioma.

Equivalenza NPDA-CFG

Definiamo le produzioni P come

1. per ogni $q \in Q$: $S \longrightarrow [q_0, Z_0, q]$
2. per ogni $q \in Q$, $A \in \Gamma$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
   (a) per ogni $(q', \varepsilon) \in \delta(q, a, A)$: $[q, A, q'] \longrightarrow a$
   (b) per ogni $(q', B_1 \ldots B_m) \in \delta(q, a, A)$, con $m > 0$:
   - per ogni sequenza $q_1, \ldots, q_m$ di m stati in Q: $[q, A, q_m] \longrightarrow a[q' B_1 q_1][q_1 B_2 q_2] \ldots [q_{m-1} B_m q_m]$

Equivalenza NPDA-CFG

Consideriamo l'automa a pila avente la funzione di transizione

$$\begin{aligned}
&\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}\\
&\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}\\
&\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}\\
&\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}\\
&\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}\\
&\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Equivalenza NPDA-CFG

$S \longrightarrow [q_0 Z_0 q_0]$ (non feconda)

$S \longrightarrow [q_0 Z_0 q_1]$

Equivalenza NPDA-CFG
Da $\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$:

$[q_0 Z_0 q_0] \longrightarrow 0[q_0 X q_0][q_0 Z_0 q_0]$ (non feconda)

$[q_0 Z_0 q_0] \longrightarrow 0[q_0 X q_1][q_1 Z_0 q_0]$ (non feconda)

$[q_0 Z_0 q_1] \longrightarrow 0[q_0 X q_0][q_0 Z_0 q_1]$ (non feconda)

$[q_0 Z_0 q_1] \longrightarrow 0[q_0 X q_1][q_1 Z_0 q_1]$

Equivalenza NPDA-CFG
Da $\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$:

$[q_0 X q_0] \longrightarrow 0[q_0 X q_0][q_0 X q_0]$ (non feconda)

$[q_0 X q_0] \longrightarrow 0[q_0 X q_1][q_1 X q_0]$ (non feconda)

$[q_0 X q_1] \longrightarrow 0[q_0 X q_0][q_0 X q_1]$ (non feconda)

$[q_0 X q_1] \longrightarrow 0[q_0 X q_1][q_1 X q_1]$

Equivalenza NPDA-CFG

$[q_0 X q_1] \longrightarrow 1$

$[q_1 X q_1] \longrightarrow 1$

$[q_1 X q_1] \longrightarrow \varepsilon$

$[q_1 Z_0 q_1] \longrightarrow \varepsilon$

Equivalenza NPDA-CFG
L'equivalenza deriva dalla dimostrazione che

$$[q, A, q'] \overset{*}{\Longrightarrow} x \quad \text{se e solo se} \quad (q, x, A) \overset{*}{\longmapsto} (q', \varepsilon, \varepsilon)$$

da cui otteniamo come caso particolare, che $[q_0, Z_0, q'] \overset{*}{\Longrightarrow} x$ se e solo se $(q_0, x, Z_0) \overset{*}{\longmapsto} (q', \varepsilon, \varepsilon)$ per qualche q', cioè se e solo se l'automa accetta la stringa x per pila vuota.
Equivalenza NPDA-CFG
Accettazione della stringa 00011

stato	caratteri letti	caratteri da leggere	pila
q_0		0	Z_0
q_0	0	0	XZ_0
q_0	00	0	XXZ_0
q_0	000	1	$XXXZ_0$
q_1	0001	1	XXZ_0
q_1	00011	ε	XZ_0
q_1	00011	ε	Z_0
q_1	00011	ε	ε

Equivalenza NPDA-CFG

Derivazione della stringa 00011

$$\begin{array}{rcl} & & S \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & [q_0Xq_1][q_1Z_0q_1] \\ 00 & \ldots\ldots & [q_0Xq_1][q_1Xq_1][q_1Z_0q_1] \\ 000 & \ldots & [q_0Xq_1][q_1Xq_1][q_1Xq_1][q_1Z_0q_1] \\ 0001 & \ldots\ldots & [q_1Xq_1][q_1Xq_1][q_1Z_0q_1] \\ 00011 & \ldots\ldots\ldots & [q_1Xq_1][q_1Z_0q_1] \\ 00011 & \ldots\ldots\ldots\ldots & [q_1Z_0q_1] \\ 00011 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \varepsilon \end{array}$$

Equivalenza NPDA-CFG

Esercizio

Definire un automa a pila non deterministico che riconosca il linguaggio $\left\{w\tilde{w} \mid w \in \{a,b\}^*\right\}$ e costruire la grammatica che lo genera in base al metodo indicato nel teorema precedente.

Automi a pila deterministici

Un automa a pila deterministico è un automa a pila $\mathcal{M} = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta \rangle$ tale che, $\forall a \in \Sigma$, $\forall Z \in \Gamma$, $\forall q \in Q$

$$\mid \delta(q,a,Z) \mid + \mid \delta(q,\varepsilon,Z) \mid \leq 1$$

Una stringa è accettata da un automa a pila deterministico se e solo se essa dà luogo ad una computazione che termina in una configurazione $\langle q, \varepsilon, w \rangle$, con $q \in F$ e $w \in \Gamma^*$

Automi a pila deterministici

1. La definizione di automa a pila deterministico è una specializzazione della definizione di automa a pila non deterministico, quindi la classe dei linguaggi accettati da automi a pila non deterministici include quella dei linguaggi accettati da automi a pila deterministici.
2. La classe dei linguaggi di tipo 2, vale a dire dei linguaggi accettati da automi a pila non deterministici, non è chiusa rispetto alla complementazione.
3. Per ogni automa a pila deterministico $\mathcal{M}$, è possibile costruirne uno che accetta il linguaggio $\Sigma^* - L(\mathcal{M})$: quindi classe dei linguaggi accettati da automi a pila deterministici è chiusa rispetto alla complementazione
4. Quindi, la classe dei linguaggi accettati da automi a pila deterministici dunque non coincide con quella dei linguaggi di tipo 2.

Automi a pila deterministici

Intuitivamente, un linguaggio separatore è dato da $L = \{w\tilde{w} \mid w \in \{a,b\}^+\}$.

Il linguaggio, di tipo 2, non può essere accettato da alcun automa a pila deterministico. Infatti, intuitivamente, durante la scansione dell'input, non è possibile individuare a priori, in maniera deterministica, dove termina la stringa w ed inizia $\tilde{w}$.