Richiami matematici

a.a. 2021-2022

Corso di Fondamenti di Informatica - 1 modulo

Corso di Laurea in Informatica

Università di Roma “Tor Vergata”

Prof. Giorgio Gambosi

Insiemi di particolare interesse

simbolo	descrizione
$\mathbb{N}$	naturali
$\mathbb{N}^+$	naturali positivi
$\mathbb{Z}$	interi
$\mathbb{Z}^+$	interi positivi (coincide con $\mathbb{N}^+$)
$\mathbb{Z}^-$	interi negativi
$\mathbb{Q}$	razionali
$\mathbb{Q}^+$	razionali positivi
$\mathbb{Q}^-$	razionali negativi
$\mathbb{R}$	reali
$\mathbb{R}^+$	reali positivi
$\mathbb{R}^-$	reali negativi

Sintassi del calcolo proposizionale

- Insieme non vuoto di elementi denominati *simboli proposizionali* $\mathscr{A} = \{A, B, C, \ldots\}$.
- Costanti proposizionali $\top$ e $\bot$. Per contrapposizione, i simboli proposizionali sono anche denominati *variabili proposizionali*.
- *Connettivi logici* $\neg$, $\vee$ e $\wedge$.
- *Separatori* '(' e ')'.

Proposizioni

- se a è una variabile o costante proposizionale allora a è una proposizione;
- se α è una proposizione allora $(\neg\alpha)$ è una proposizione;
- se α e β sono proposizioni allora $(\alpha \vee \beta)$ e $(\alpha \wedge \beta)$ sono proposizioni;
- tutte le proposizioni sono ottenute mediante le regole descritte.

Esempi di proposizioni e non

- $((\neg\bot) \vee ((A \vee B) \wedge C))$ è una proposizione.
- $A \vee B$ non è una proposizione
- $(A \wedge B)A\top B$ non è una proposizione

Semantica del calcolo proposizionale

- Dominio: insieme $\mathscr{B} = \{0, 1\}$, in cui 0 è associato al valore di verità FALSO e 1 al valore VERO
- Insieme di operatori $\mathscr{O} = \{o_\neg, o_\vee, o_\wedge\}$, contiene un elemento per ciascuno dei connettivi logici del calcolo proposizionale

Negazione logica (*not*)

$o_\neg : \mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}$, tale che $o_\neg(0) = 1$ e $o_\neg(1) = 0$

a	$\neg a$
0	1
1	0

Congiunzione logica (*and*)

$o_\wedge : \mathscr{B} \times \mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}$

Definito dalla seguente tabella di verità

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disgiunzione logica (*or*)

$o_\vee : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$

Definito dalla seguente tabella di verità

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Assegnazione booleana $\mathscr{V}$

Funzione $\mathscr{V} : \mathscr{A} \mapsto \mathscr{B}$: un'assegnazione booleana alle variabili proposizionali altro non è che una associazione di valori di verità alle variabili stesse.

Valutazione booleana

$\textsc{Prop}$ insieme delle proposizioni, $\mathscr{V}$ assegnazione booleana su $\mathscr{A}$.

- se $A \in \mathscr{A}$, $\mathscr{I}_{\mathscr{V}}(A) = \mathscr{V}(A)$
- $\mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\top) = 1$
- $\mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\bot) = 0$
- se $\alpha \in \textsc{Prop}$, $\mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\neg\alpha) = o_{\neg}(\mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\alpha))$
- se $\alpha, \beta \in \textsc{Prop}$, $\mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\alpha \vee \beta) = o_{\vee}(\mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\alpha), \mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\beta))$
- se $\alpha, \beta \in \textsc{Prop}$, $\mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\alpha \wedge \beta) = o_{\wedge}(\mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\alpha), \mathscr{I}_{\mathscr{V}}(\beta))$

Soddisfacibilità

Una formula proposizionale α viene detta:

- *soddisfatta* da una valutazione booleana $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$ se $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}(\alpha) = 1$.
- *soddisfacibile* se è soddisfatta da almeno una valutazione booleana
- *tautologia* se è soddisfatta da ogni valutazione booleana
- *contraddizione* se non è soddisfatta da nessuna valutazione booleana

Implicazione

$o_{\rightarrow} : \mathscr{B} \times \mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}$

Definito dalla seguente tabella di verità

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$a \rightarrow b$ equivalente a $\neg a \vee b$

Equivalenza

$o_{\leftrightarrow} : \mathscr{B} \times \mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}$

Definito dalla seguente tabella di verità

a	b	$a \leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$a \leftrightarrow b$ equivalente a $(a \leftrightarrow b) \wedge (b \leftrightarrow a)$

Operatori k-ari

Dato k, esistono 2^{2^k} operatori differenti $\mathscr{B}^k \mapsto \mathscr{B}$.

Se $k = 2$:

a	b	zero	and ($\wedge$)	n-implicazione ($\nrightarrow$)	operando-1	n-implicato ($\nleftarrow$)	operando-2	ex-or ($\oplus$)	or ($\vee$)	nor ($\dot{\vee}$)	equivalenza ($\leftrightarrow$)	n-operando-2	implicato ($\leftarrow$)	n-operando-1	implicazione ($\rightarrow$)	nand ($\dot{\wedge}$)	uno
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Completezza di $\{\neg, \vee, \wedge\}$

Ogni operatore binario è equivalente ad una opportuna composizione degli operatori $\{\neg, \vee, \wedge\}$

Proprietà degli operatori 1

idempotenza	$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$ $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
associatività	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ $\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma) \equiv (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma$
commutatività	$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \beta \leftrightarrow \alpha$
distributività	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Proprietà degli operatori 2

assorbimento	$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$ $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
doppia negazione	$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
leggi di De Morgan	$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
terzo escluso	$\alpha \vee \neg\alpha \equiv \top$
contrapposizione	$\alpha \longrightarrow \beta \equiv \neg\beta \longrightarrow \neg\alpha$
contraddizione	$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv \bot$

Quantificatori

Calcolo dei predicati

- *quantificatore universale*, indicato con il simbolo $\forall$
  $\forall x P(x)$, P è vero per qualunque valore di x
- *quantificatore esistenziale*, indicato con il simbolo $\exists$
  $\exists x P(x)$, P è vero per almeno un valore di x

Relazioni

- Prodotto cartesiano di A e B, denotato con $C = A \times B$

$$C = \left\{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \;\; \wedge y \in B \right\},$$

- A^n indica il prodotto cartesiano di A con se stesso, ripetuto n volte

$$\underbrace{A \times \cdots \times A.}_{n \text{ volte}}$$

- Relazione n-aria R su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n.$$

Relazione d'ordine

Una relazione $R \subseteq A^2$ si dice relazione d'ordine se per ogni $x, y, z \in A$ valgono le seguenti proprietà

1. $\langle x, x \rangle \in R$ (riflessività),
2. $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \iff x = y$ (antisimmetria),
3. $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \iff \langle x, z \rangle \in R$ (transitività).

Relazione d'equivalenza

Una relazione $R \subseteq A^2$ si dice relazione d'equivalenza se, per ogni $x, y, z \in A$, valgono le seguenti proprietà

1. $\langle x, x \rangle \in R$ (riflessività),
2. $\langle x, y \rangle \in R \iff \langle y, x \rangle \in R$ (simmetria),
3. $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \iff \langle x, z \rangle \in R$ (transitività).

Relazione d'equivalenza

- Un insieme A su cui sia definita una relazione d'equivalenza R si può partizionare in sottoinsiemi, detti classi d'equivalenza, ciascuno dei quali è un sottoinsieme massimale che contiene solo elementi tra loro equivalenti.
- Dati un insieme A ed una relazione d'equivalenza R su A^2, l'insieme delle classi d'equivalenza di A rispetto a R è detto insieme quoziente $A/_R$.
- I suoi elementi vengono denotati con $[a]$, dove $a \in A$ è un "rappresentante" della classe d'equivalenza: $[a]$ indica cioè l'insieme degli elementi equivalenti ad a.

Operazioni tra relazioni

- Unione: $R_1 \cup R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R_1 \vee \langle x, y \rangle \in R_2$
- Intersezione: $R_1 \cup R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle x, y \rangle \in R_2$
- Complementazione: $\overline{R} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R\}$
- Chiusura transitiva:

$$\begin{aligned} R^+ =&\{\langle x, y \rangle \mid \exists y_1, \ldots, y_n \in A, n \geq 2, y_1 = x, y_n = y, \\ &\langle y_i, y_{i+1} \rangle \in R, i = 1, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

- Chiusura transitiva e riflessiva: $R^* = R^+ \cup \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$

Funzioni

$R \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$ ($n \geq 2$) è una relazione funzionale tra una $(n-1)$-pla di elementi e l'n-esimo elemento, se $\forall \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \in X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$ esiste al più un elemento $x_n \in X_n$ tale che $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R$

$$f : X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \mapsto X_n.$$

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n.$$

Funzioni

- $X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$, dominio della funzione, $\mathrm{dom}(f)$
- X_n, codominio $\mathrm{cod}(f)$
- dominio di definizione:

$$\mathrm{def}(f) = \{\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle \in \mathrm{dom}(f) \mid \\ \exists x_n \in \mathrm{cod}(f) : f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n\}$$

- immagine $\mathrm{imm}(f)$:

$$\mathrm{imm}(f) = \{x_n \in \mathrm{cod}(f) \mid \\ \exists \langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle \in \mathrm{dom}(f) : f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n\}$$

Funzioni

- f totale se $\mathrm{def}(f) = \mathrm{dom}(f)$, parziale altrimenti
- f suriettiva se $\mathrm{imm}(f) = \mathrm{cod}(f)$
- f iniettiva o uno-ad-uno (1:1) se

$$\forall \langle x'_1, \ldots, x'_{n-1} \rangle, \langle x''_1, \ldots, x''_{n-1} \rangle \in X_1 \times \ldots \times X_{n-1},$$
$$\langle x'_1, \ldots, x'_{n-1} \rangle \neq \langle x''_1, \ldots, x''_{n-1} \rangle \Longleftrightarrow$$
$$f(x'_1, \ldots, x'_{n-1}) \neq f(x''_1, \ldots, x''_{n-1})$$

- f biiettiva se suriettiva e iniettiva

Pigeonhole principle

Dati due insiemi finiti A e B, tali che

$$0 < |B| < |A|,$$

non esiste alcuna funzione iniettiva totale $f : A \mapsto B$

Strutture algebriche

Dato un insieme non vuoto $S \subseteq U$, si definisce operazione binaria $\circ$ su S una funzione $\circ : S \times S \mapsto U$.

Un insieme non vuoto S si dice chiuso rispetto ad una operazione binaria $\circ$ su S se $\mathrm{imm}(\circ) \subseteq S$.

Strutture algebriche

Dato un insieme S chiuso rispetto ad un'operazione binaria $\circ$.

La coppia $\langle S, \circ \rangle$ viene denominata semigruppo se l'operazione binaria $\circ$ soddisfa la proprietà associativa:

$$\forall x \forall y \forall z \in S \;\; (x \circ (y \circ z)) = (x \circ y) \circ z).$$

Se inoltre vale la proprietà commutativa:

$$\forall x \forall y \in S \;\; (x \circ y) = (y \circ x)$$

il semigruppo è detto commutativo.

La coppia $\langle \mathbb{N}, + \rangle$, dove $+$ è l'usuale operazione di somma, è un semigruppo commutativo, La terna $\langle S, \circ, e \rangle$ viene detta monoide se $\langle S, \circ \rangle$ è un semigruppo, e se $e \in S$ è tale che:

$$\forall x \in S \ \ (e \circ x) = (x \circ e) = x$$

L'elemento e viene detto elemento neutro o unità del monoide. Se $\circ$ è anche commutativa, il monoide viene detto commutativo.

Le terne $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbb{N}, *, 1 \rangle$, dove $+$ e $*$ sono le usuali operazioni di somma e prodotto, sono monoidi commutativi.

Strutture algebriche

Dati un insieme S ed una operazione associativa $\circ$, definiamo semigruppo libero sulla coppia $\langle S, \circ \rangle$ il semigruppo $\langle S^+, \circ^+ \rangle$, dove:

1. S^+ è l'insieme di tutte le espressioni $x = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$, per ogni $n \geq 1$, con $x_1, \ldots, x_n \in S$;
2. l'operazione $\circ^+$ è definita nel modo seguente: se $x = x_1 \circ \ldots \circ x_n$ e $y = y_1 \circ \ldots \circ y_n$, allora $x \circ^+ y = x_1 \circ \ldots \circ x_n \circ y_1 \circ \ldots \circ y_n$.

Se estendiamo S^+ introducendo un elemento aggiuntivo ε, detto parola vuota, possiamo definire sull'insieme risultante $S^* = S^+ \cup \{\varepsilon\}$ l'operazione $\circ^*$, estensione di $\circ^+$, tale che, $\forall x, y \in S^+ \; x \circ^* y = x \circ^+ y$ e $\forall x \in S^* \; (\varepsilon \circ^* x = x \circ^* \varepsilon = x)$.

La terna $\langle S^*, \circ^*, \varepsilon \rangle$ è allora un monoide e viene detto monoide libero.

Strutture algebriche

La terna $\langle S, \circ, e \rangle$ viene detta gruppo se $\langle S, \circ, e \rangle$ è un monoide ed inoltre l'operazione $\circ$ ammette inverso, cioè se

$$\forall x \in S\ \exists y \in S\ \ (x \circ y) = (y \circ x) = e.$$

L'elemento y viene detto inverso di x, e si denota come x^{-1}.

Se il monoide $\langle S, \circ, e \rangle$ è commutativo il gruppo viene detto commutativo (o abeliano).

Le terne $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbb{N}, *, 1 \rangle$ non sono gruppi, in quanto l'insieme $\mathbb{N}$ non è chiuso rispetto all'inverso di $+$ e di $*$. Al contrario, le terne $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbb{Q}, *, 1 \rangle$ sono gruppi abeliani.

Dato un semigruppo $\langle S, \circ \rangle$, una congruenza $\equiv$ è una relazione d'equivalenza su S che soddisfa la seguente proprietà:

$$\forall x, y \in S \quad x \equiv y \Longleftrightarrow \forall z \in S \ \big((x \circ z \equiv y \circ z) \wedge (z \circ x \equiv z \circ y)\big).$$

La relazione d'equivalenza $\equiv_k$ delle classi resto rispetto alla divisione per k è una congruenza rispetto al semigruppo commutativo $\langle \mathbb{N}, + \rangle$: infatti, se $n \equiv_k m$, abbiamo che $\forall l \ (n + l \equiv_k m + l)$ e, chiaramente, anche $l + n \equiv_k l + m$. Viceversa, se $\forall l \ (n + l \equiv_k m + l)$ allora abbiamo, nel caso particolare $l = 0$, $n \equiv_k m$