

Esercizi linguaggi regolari

a.a. 2020-2021

Corso di Fondamenti di Informatica - 1 modulo

Corso di Laurea in Informatica

Università di Roma "Tor Vergata"

Prof. Giorgio Gambosi



(Esame 5-7-2017)

Definire un automa a stati finiti deterministico che riconosce il linguaggio $L \subset \{0, 1\}^*$ composto da tutte le stringhe che non contengono la sequenza 111.

1: soluzione

(Esame 5-7-2017)

Definire un automa a stati finiti deterministico che riconosce il linguaggio $L \subset \{0, 1\}^*$ composto da tutte le stringhe che non contengono la sequenza 111.

(Esame 5-7-2017)

Si consideri il linguaggio

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i + j \geq 3, k \bmod 3 = 0\}$$

Il linguaggio è regolare o context free? Dimostrare quale delle due affermazioni è vera. Si definisca inoltre una grammatica (di tipo 3 o di tipo 2, rispettivamente) che generi tutte e sole le stringhe del linguaggio.

2: soluzione

(Esame 5-7-2017)

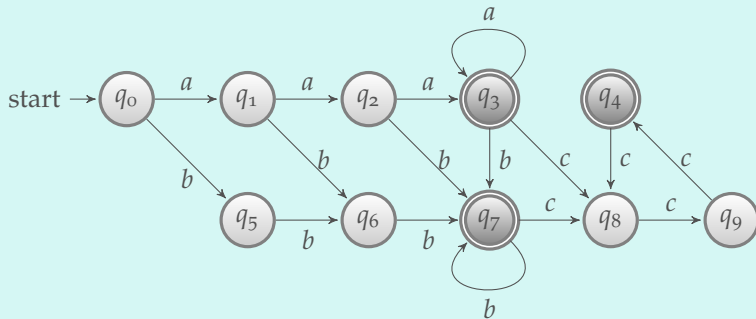
Si consideri il linguaggio

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i + j \geq 3, k \bmod 3 = 0\}$$

Il linguaggio è regolare o context free? Dimostrare quale delle due affermazioni è vera. Si definisca inoltre una grammatica (di tipo 3 o di tipo 2, rispettivamente) che generi tutte e sole le stringhe del linguaggio.

Il linguaggio è regolare. Per dimostrare ciò, mostriamo un ASFD che lo riconosce.

2: soluzione



2: soluzione

La grammatica corrispondente sarà

$$S \rightarrow aA_1|bA_5$$

$$A_1 \rightarrow aA_2|bA_6$$

$$A_2 \rightarrow aA_3|bA_7|a|b$$

$$A_3 \rightarrow aA_3|bA_7|cA_8|a$$

$$A_4 \rightarrow cA_8$$

$$A_5 \rightarrow bA_6$$

$$A_6 \rightarrow bA_7|b$$

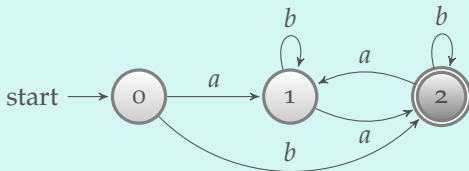
$$A_7 \rightarrow bA_7|cA_8|b$$

$$A_8 \rightarrow cA_9$$

$$A_9 \rightarrow cA_4|c$$

(Esame 5-7-2017)

Sia dato l'ASFD seguente

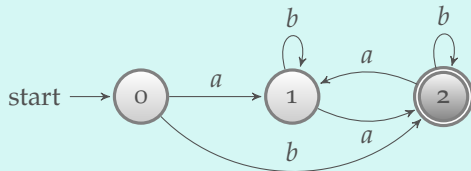


Si mostri come sia possibile ricavare una espressione regolare che descriva il linguaggio riconosciuto dall'automa.

3: soluzione

(Esame 5-7-2017)

Sia dato l'ASFD seguente



Si mostri come sia possibile ricavare una espressione regolare che descriva il linguaggio riconosciuto dall'automa.

(Esame 5-7-2017)

Sia dato l'ASFD definito come $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, con

1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
3. $q_0 = 1$
4. $F = \{2, 4\}$

e funzione di transizione δ :

	a	b
1	3	8
2	3	1
3	8	2
4	5	6
5	6	2
6	7	8
7	6	4
8	5	8

4: soluzione

(Esame 5-7-2017)

Sia dato l'ASFD definito come $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, con

1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
3. $q_0 = 1$
4. $F = \{2, 4\}$

e funzione di transizione δ :

	a	b
1	3	8
2	3	1
3	8	2
4	5	6
5	6	2
6	7	8
7	6	4
8	5	8

4: soluzione

Applicando l'algoritmo di derivazione dell'automa minimo risulta $1 \equiv 6 \equiv 8, 2 \equiv 4$ e $3 \equiv 5 \equiv 7$.

Mantenendo gli stati 1, 2, 3 come rappresentanti delle classi di equivalenza, risulta l'automa minimo con stato finale 2 e funzione di transizione:

	a	b
1	3	1
2	3	1
3	1	2

4: soluzione

Da cui la grammatica, con $S = A_1$,

$$A_1 \rightarrow aA_3|bA_1$$

$$A_2 \rightarrow aA_3|bA_1$$

$$A_3 \rightarrow aA_1|bA_2|b$$

(Esame 6-9-2018)

Data l'espressione regolare $E = a^*b^* + b^*a^*$, derivare un DFA minimo che riconosca il linguaggio definito da E .

5: soluzione

(Esame 6-9-2018)

Data l'espressione regolare $E = a^*b^* + b^*a^*$, derivare un DFA minimo che riconosca il linguaggio definito da E .

(Esame 6-9-2018)

Si definisca un DFA che accetta il linguaggio su $\Sigma = \{0, 1\}$ comprendente tutte e sole le stringhe che non contengono sottostringhe 0^k con $k \geq 3$.

(Esame 6-9-2018)

Si definisca un DFA che accetta il linguaggio su $\Sigma = \{0, 1\}$ comprendente tutte e sole le stringhe che non contengono sottostringhe 0^k con $k \geq 3$.

(Esame 6-9-2018)

Si considerino i linguaggi $L_1 = \{b^n a^{3m} | n, m \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^n b^{3n} | n \geq 0\}$.

Per ognuno dei due, mostrare se il linguaggio è regolare o strettamente context-free.

7: soluzione

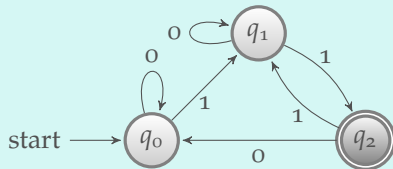
(Esame 6-9-2018)

Si considerino i linguaggi $L_1 = \{b^n a^{3m} \mid n, m \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^n b^{3n} \mid n \geq 0\}$.

Per ognuno dei due, mostrare se il linguaggio è regolare o strettamente context-free.

(Esame 9-2-2018)

Sia L il linguaggio riconosciuto dal seguente ASFD,

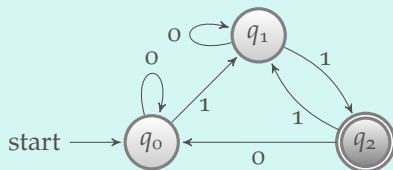


derivare una espressione regolare che descriva L .

8: soluzione

(Esame 9-2-2018)

Sia L il linguaggio riconosciuto dal seguente ASFD,



derivare una espressione regolare che descriva L .

Una possibile soluzione prevede la derivazione della grammatica regolare equivalente

$$A_0 \rightarrow 0A_0|1A_1$$

$$A_1 \rightarrow 0A_1|1A_2|1$$

$$A_2 \rightarrow 0A_0|1A_1$$

8: soluzione

E da questa, manipolando il sistema di espressioni corrispondente, l'espressione regolare cercata.

$$\begin{cases} A_0 = 0A_0 + 1A_1 \\ A_1 = 0A_1 + 1A_2 + 1 \\ A_2 = 0A_0 + 1A_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0A_0 + 1A_1 \\ A_1 = 0A_1 + 1A_0 + 1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

8: soluzione

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1A_1 \\ A_1 = 0A_1 + 10^*1A_1 + 1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1A_1 \\ A_1 = (0 + 10^*1)A_1 + 1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1A_1 \\ A_1 = (0 + 10^*1)^*1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1(0 + 10^*1)^*1 \\ A_1 = (0 + 10^*1)^*1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

L è descritto dall'espressione associata all'assioma, e quindi da $0^*1(0 + 10^*1)^*1$.

(Esame 6-9-2018)

Si consideri il linguaggio $L = \{a^*b^nc^*a^nb^* | n \geq 4\}$. L è regolare?

Motivare la risposta.

(Esame 6-9-2018)

Si consideri il linguaggio $L = \{a^*b^nc^*a^nb^* | n \geq 4\}$. L è regolare?

Motivare la risposta.

(Esame 9-2-2018)

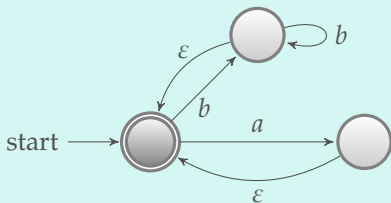
Si consideri l'espressione regolare $r = a(bb^* + a)^*ab$. Derivare un ASFD che riconosce $L(r)$.

(Esame 9-2-2018)

Si consideri l'espressione regolare $r = a(bb^* + a)^*ab$. Derivare un ASFD che riconosce $L(r)$.

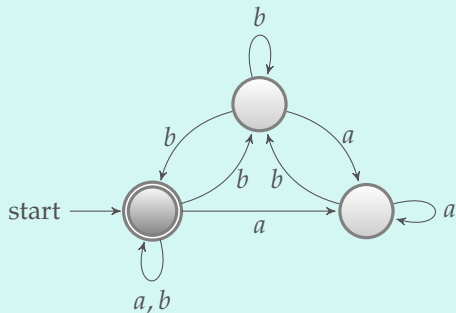
10: soluzione

Deriviamo da r un ASFND con ε -transizioni che riconosca $L(r)$.
Possiamo osservare che la sotto-espressione regolare $(bb^* + a)^*$ è accettata per costruzione dall'ASFND con ε -transizioni



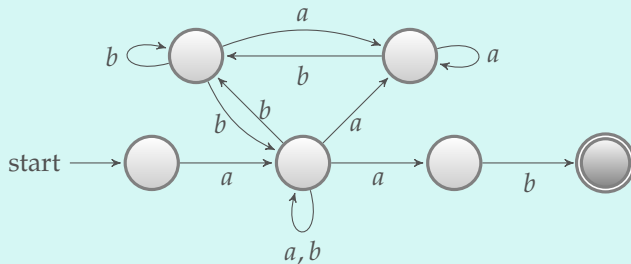
10: soluzione

Eliminando le ε -transizioni, si ottiene l'ASFND



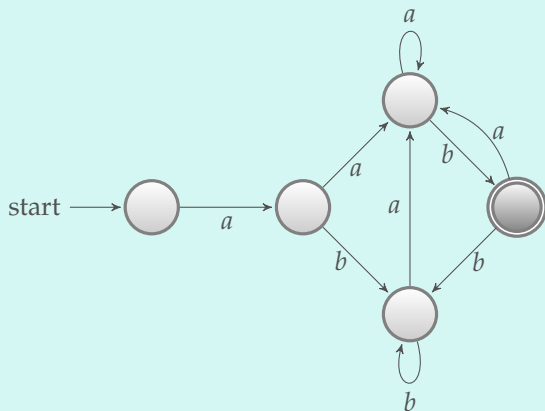
10: soluzione

Da cui immediatamente l'ASFND per $L(r)$



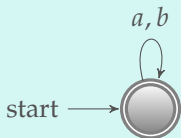
10: soluzione

e da questo l'ASFD

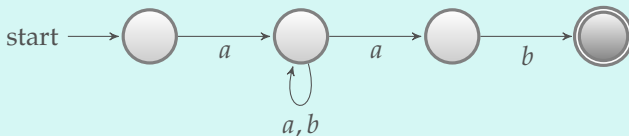


10: soluzione

In alternativa, si potrebbe osservare che $(bb^* + a)^*$ comprende tutte le stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$, che sono riconosciute da

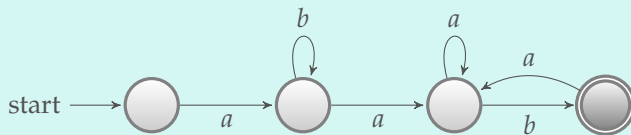


Da cui l'ASFND per $L(r)$



10: soluzione

e da questo l'ASFD



(Esame 6-9-2018)

Definire una grammatica CF che generi il linguaggio

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contiene almeno } 4b\}$

11: soluzione

(Esame 6-9-2018)

Definire una grammatica CF che generi il linguaggio

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contiene almeno } 4b\}$$

Osserviamo che possiamo risolvere il problema derivando una grammatica regolare che generi L . A tal fine, definiamo un ASFD che riconosca L .

11: soluzione

	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_3
q_3	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4

con $F = \{q_4\}$.

La grammatica deriva immediatamente come

$$A_0 \rightarrow aA_0 \mid bA_1$$

$$A_1 \rightarrow aA_1 \mid bA_2$$

$$A_2 \rightarrow aA_2 \mid bA_3$$

$$A_3 \rightarrow aA_3 \mid bA_4 \mid b$$

$$A_4 \rightarrow aA_4 \mid bA_4 \mid a \mid b$$

(Esame 20-9-2018)

Definire un DFA sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ che accetti il linguaggio L di tutte le stringhe che contengono due 0 a distanza tre tra loro (con tre caratteri tra i due). Ad esempio, $1101010 \in L$, $0001000 \in L$, $0110110 \notin L$, $10001 \notin L$.

(Esame 20-9-2018)

Definire un DFA sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ che accetti il linguaggio L di tutte le stringhe che contengono due 0 a distanza tre tra loro (con tre caratteri tra i due). Ad esempio, $1101010 \in L$, $0001000 \in L$, $0110110 \notin L$, $10001 \notin L$.

(Esame 21-1-2019)

Si consideri il linguaggio $L \subseteq \{a, b\}^*$ definito come l'insieme delle stringhe σ tali $|\sigma| \geq 4$, i primi due caratteri di σ sono diversi tra loro e anche gli ultimi due caratteri sono diversi tra loro. Ad esempio:
 $abaabbab \in L, ababa \in L, babbabab \in L$.

Si definiscano:

- una espressione regolare che descriva L
- un DFA che lo riconosca

13: soluzione

(Esame 21-1-2019)

Si consideri il linguaggio $L \subseteq \{a, b\}^*$ definito come l'insieme delle stringhe σ tali $|\sigma| \geq 4$, i primi due caratteri di σ sono diversi tra loro e anche gli ultimi due caratteri sono diversi tra loro. Ad esempio:

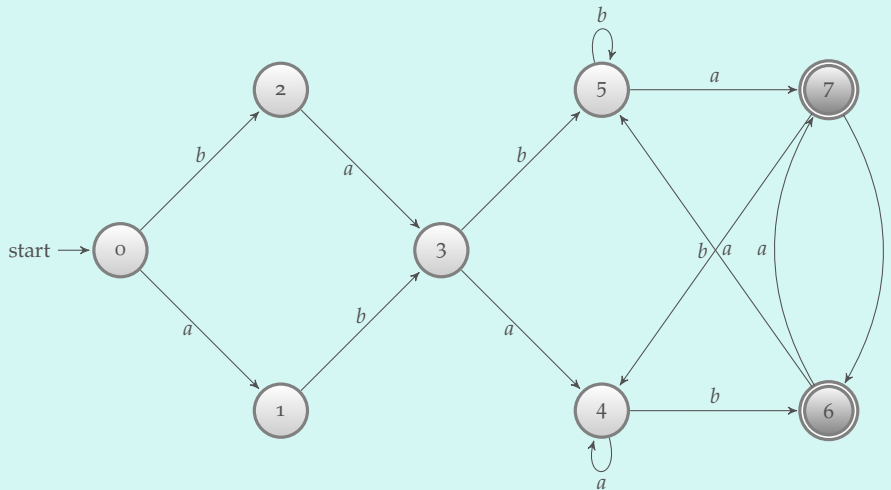
$abaabbab \in L, ababa \in L, babbabab \in L$.

Si definiscano:

- una espressione regolare che descriva L
- un DFA che lo riconosca

13: soluzione

$$(ab + ba)(a + b)^*(ab + ba)$$



(Esame 21-1-2019)

Sia dato il linguaggio $L = \{(ab)^k c^j (ab)^{2k} \mid j, k \geq 0\}$. L è regolare?

Dimostrare la risposta data.

14: soluzione

(Esame 21-1-2019)

Sia dato il linguaggio $L = \{(ab)^k c^j (ab)^{2k} \mid j, k \geq 0\}$. L è regolare?

Dimostrare la risposta data.

14: soluzione

Il linguaggio non è regolare. Si può dimostrare ciò utilizzando il pumping lemma.

Bob: sceglie n

Alice: sceglie la stringa $\sigma = (ab)^n c (ab)^{2n}$

Bob: sceglie uv , prefisso di σ di lunghezza al più n .

Necessariamente, quindi, uv è sottostringa di $(ab)^n$. Due casi sono possibili:

1. $|v|$ è dispari, per cui inizia e termina per lo stesso carattere, ad es. $v = bzb$
2. $|v|$ è pari, per cui inizia e termina con caratteri diversi, ad es. $v = azb$

Alice: pone $i = 2$ e:

1. se $|v|$ è dispari, ottiene una stringa in cui compaiono, nella prima parte, due caratteri successivi uguali, ad es. $uv^2w = ubzbbzbw \notin L$,
2. se $|v|$ è pari, ottiene una stringa $(ab)^{n+|v|/2}c(ab)^{2n} \notin L$