Fondamenti

a.a. 2020-2021

Corso di Fondamenti di Informatica - 1 modulo

Corso di Laurea in Informatica

Università di Roma “Tor Vergata”

Prof. Giorgio Gambosi

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

1: soluzione

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Se $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ e la proprietàă è verificata.
2. Sia n tale che $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Allora $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri dispari è pari a n^2.

2: soluzione

Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri dispari è pari a n^2.

La somma dei primi n numeri dispari è data da $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$

1. Se $n = 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = n^2$ e la proprietà è verificata.
2. Sia n tale che $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$. Allora

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Si consideri la seguente sequenza di equazioni.

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} &= 2 - \frac{1}{2} \\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= 2 - \frac{1}{4} \\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 2 - \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Dare una equazione che descrive la regola generale e dimostrarne la correttezza per induzione.

3: soluzione

Si consideri la seguente sequenza di equazioni.

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2} &= 2-\frac{1}{2} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} &= 2-\frac{1}{4} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} &= 2-\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Dare una equazione che descrive la regola generale e dimostrarne la correttezza per induzione.

La regola generale è $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

1. Se $n = 0$, $\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{2^i} = 1 = 2 - \frac{1}{2^0}$ e la proprietà è verificata.
2. Sia n tale che $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$. Allora $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, si ha che $n^2 \leq 2^n$.

4: soluzione

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, si ha che $n^2 \leq 2^n$.

Per $n = 4$ si ha che $4^2 = 2^4 = 16$.

Se assumiamo vera $n^2 \leq 2^n$, allora
$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ in quanto
$2^n > 2n + 1$ per $n > 2$

(per induzione, a sua volta:
$2^{n+1} = 2^n + 2^n > 2n + 1 + 2n + 1 > 2(n+1) + 1)$

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5: soluzione

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Se $n = 0$, $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2*0+1)}{6}$ e la proprietà è verificata.
2. Sia n tale che $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Allora $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)(n+1)}{6} =$
   $\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2) = \frac{(n+1)(2(n+1))((n+1)+1)}{6}$.

Sia data la funzione f definita ricorsivamente come

1. $f(0) = 0$
2. $f(n+1) = f(n) + n$

Determinare i valori $f(2)$ e $f(3)$. Mostrare poi che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $2f(n) = n^2 - n$

6: soluzione

Sia data la funzione f definita ricorsivamente come

1. $f(0) = 0$
2. $f(n+1) = f(n) + n$

Determinare i valori $f(2)$ e $f(3)$. Mostrare poi che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $2f(n) = n^2 - n$

$f(0) = 0; f(1) = f(0) + 0 = 0 + 0 = 0; f(2) = f(1) + 1 = 0 + 1 = 1; f(3) = f(2) + 2 = 1 + 2 = 3$

Per $n = 0$, $2f(0) = 0 = 0^2 + 0$; per $n + 1$,
$2f(n+1) = 2f(n) + 2n = n^2 - n + 2n = n^2 + n = (n+1)^2 - (n+1)$

Data la funzione fattoriale, definita ricorsivamente come

1. $0! = 0$
2. $(n+1)! = (n+1)n!$

mostrare che $n! > 2^n \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

7: soluzione

Data la funzione fattoriale, definita ricorsivamente come

1. $0! = 0$
2. $(n+1)! = (n+1)n!$

mostrare che $n! > 2^n \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

Per $n = 4$, $4! = 24 > 2^4 = 16$.

Per $n+1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

Sia $\Sigma = \{0, 1\}$: definiamo per ricorsione la funzione $\phi : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ come

1. $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $\phi(w0) = \phi(w)1$
3. $\phi(w1) = \phi(w)0$

Determinare $\phi(1011)$ e $\phi(1101)$. Dimostrare poi, per induzione su $|w|$, che $|\phi(w)| = |w|$

8: soluzione

Sia $\Sigma = \{0, 1\}$: definiamo per ricorsione la funzione $\phi : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ come

1. $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $\phi(w0) = \phi(w)1$
3. $\phi(w1) = \phi(w)0$

Determinare $\phi(1011)$ e $\phi(1101)$. Dimostrare poi, per induzione su $|w|$, che $|\phi(w)| = |w|$

$\phi(1011) = \phi(101)0 = \phi(10)00 = \phi(1)100 = \phi(\varepsilon)0100 = 0100$

$\phi(1101) = \phi(110)0 = \phi(11)10 = \phi(1)010 = \phi(\varepsilon)0010 = 0010$

Per $|w| = 0$, si ha che $w = \varepsilon$ e $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$, per cui $|\phi(\varepsilon)| = |\varepsilon| = 0$.

Per $|w| = k + 1$, si ha che esiste un carattere a tale che $w = w'a$ con $|w'| = k$. Senza perdita di generalità, assumiamo $a = 0$: per l'ipotesi induttiva, $|\phi(w')| = |w'| = k$, da cui deriva $|\phi(w)| = |\phi(w'0)| = |\phi(w')1| = |\phi(w')| + 1 = |w'| + 1 = |w|$

Sia $\Sigma = \{0, 1\}$: definiamo per ricorsione la funzione di inversione $r : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ come

1. $r(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $r(aw) = r(w)a$

Dimostrare, per induzione su $|u|$, che $r(uv) = r(v)r(u)$ e, per induzione su n, che $r(x^n) = (r(x))^n$

9: soluzione

Sia $\Sigma = \{0, 1\}$: definiamo per ricorsione la funzione di inversione $r : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ come

1. $r(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $r(aw) = r(w)a$

Dimostrare, per induzione su $|u|$, che $r(uv) = r(v)r(u)$ e, per induzione su n, che $r(x^n) = (r(x))^n$

Data una stringa w, la sua stringa rovesciata $\tilde{w}$ è definita come:

1. Se $w = \varepsilon$ allora $\tilde{w} = \varepsilon$
2. Se $w = ua$, dove $u \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$, allora $\tilde{w} = a\tilde{u}$

Dimostrare per induzione che se $w = bv$, dove $u \in \Sigma^*$ e $b \in \Sigma$, allora $\tilde{w} = \tilde{v}b$

10: soluzione

Data una stringa w, la sua stringa rovesciata $\tilde{w}$ è definita come:

1. Se $w = \varepsilon$ allora $\tilde{w} = \varepsilon$
2. Se $w = ua$, dove $u \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$, allora $\tilde{w} = a\tilde{u}$

Dimostrare per induzione che se $w = bv$, dove $u \in \Sigma^*$ e $b \in \Sigma$, allora $\tilde{w} = \tilde{v}b$

Mostrare che l'insieme $X = \{4n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$ è numerabile fornendo, in accordo alla definizione, una funzione 1-1 $f : X \mapsto \mathbb{N}$.

11: soluzione

Mostrare che l'insieme $X = \{4n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$ è numerabile fornendo, in accordo alla definizione, una funzione 1-1 $f : X \mapsto \mathbb{N}$.

La funzione $f : X \mapsto \mathbb{N}$ definita come $f(n) = 4n + 1$ è 1-1, in quanto

1. per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un solo $x \in X$ dato da $x = 4n + 1$
2. per ogni $x \in X$ esiste un solo $n \in \mathbb{N}$ dato da $n = \frac{x-1}{4}$: $n \in \mathbb{N}$ per definizione di X
3. la funzione è suriettiva in quanto definita per ogni $n \in \mathbb{N}$

L'insieme $X = \{0, 1, 2\} \cup \{n | n \in \mathbb{N} \land n > 10\}$ è numerabile?

12: soluzione

L'insieme $X = \{0, 1, 2\} \cup \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n > 10\}$ è numerabile?

Sì, è un sottoinsieme (infinito) di $\mathbb{N}$. La biiezione $f : X \mapsto \mathbb{N}$ richiesta può essere $f(x) = x$ per $x \in \{0, 1, 2\}$; $f(x) = x - 7$ altrimenti

L'insieme $X = \{n | n \in \mathbb{N} \land n < 100\}$ è numerabile?

13: soluzione

L'insieme $X = \{n | n \in \mathbb{N} \land n < 100\}$ è numerabile?

L'insieme ha cardinalità finita. È contabile.