Esercizi linguaggi regolari

a.a. 2021-2022

Corso di Fondamenti di Informatica - 1 modulo

Corso di Laurea in Informatica

Università di Roma “Tor Vergata”

Prof. Giorgio Gambosi

(Esame 5-7-2017)
Definire un automa a stati finiti deterministico che riconosce il linguaggio $L \subset \{0, 1\}^*$ composto da tutte le stringhe che non contengono la sequenza 111.

1: soluzione

(Esame 5-7-2017)
Definire un automa a stati finiti deterministico che riconosce il linguaggio $L \subset \{0, 1\}^*$ composto da tutte le stringhe che non contengono la sequenza 111.

(Esame 5-7-2017)
Si consideri il linguaggio

$$L = \{a^i b^j c^k | i + j \geq 3, k \bmod 3 = 0\}$$

Il linguaggio è regolare o context free? Dimostrare quale delle due affermazioni è vera. Si definisca inoltre una grammatica (di tipo 3 o di tipo 2, rispettivamente) che generi tutte e sole le stringhe del linguaggio.

2: soluzione

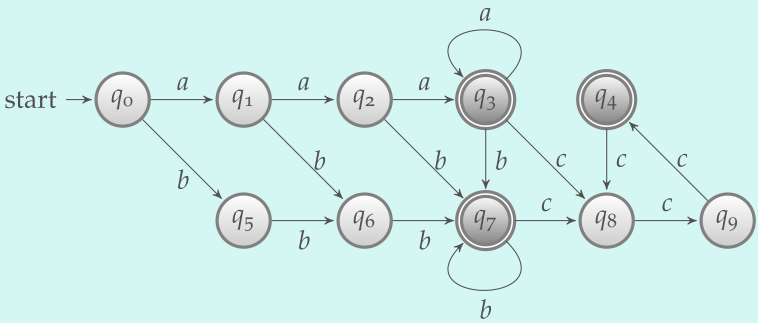
(Esame 5-7-2017)
Si consideri il linguaggio

$$L = \{a^i b^j c^k | i + j \geq 3, k \bmod 3 = 0\}$$

Il linguaggio è regolare o context free? Dimostrare quale delle due affermazioni è vera. Si definisca inoltre una grammatica (di tipo 3 o di tipo 2, rispettivamente) che generi tutte e sole le stringhe del linguaggio.

Il linguaggio è regolare. Per dimostrare ciò, mostriamo un ASFD che lo riconosce.

2: soluzione

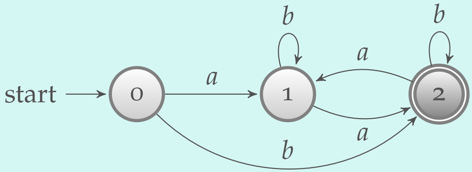


2: soluzione

La grammatica corrispondente sarà

$$
\begin{array}{rcl}
S & \longrightarrow & aA_1|bA_5 \\
A_1 & \longrightarrow & aA_2|bA_6 \\
A_2 & \longrightarrow & aA_3|bA_7|a|b \\
A_3 & \longrightarrow & aA_3|bA_7|cA_8|a \\
A_4 & \longrightarrow & cA_8 \\
A_5 & \longrightarrow & bA_6 \\
A_6 & \longrightarrow & bA_7|b \\
A_7 & \longrightarrow & bA_7|cA_8|b \\
A_8 & \longrightarrow & cA_9 \\
A_9 & \longrightarrow & cA_4|c
\end{array}
$$

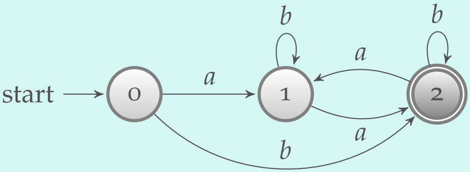
(Esame 5-7-2017)
Sia dato l'ASFD seguente



Si mostri come sia possibile ricavare una espressione regolare che descriva il linguaggio riconosciuto dall'automa.

3: soluzione

(Esame 5-7-2017)
Sia dato l'ASFD seguente



Si mostri come sia possibile ricavare una espressione regolare che descriva il linguaggio riconosciuto dall'automa.

(Esame 5-7-2017)
Sia dato l'ASFD definito come $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, con

1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
3. $q_0 = 1$
4. $F = \{2, 4\}$

e funzione di transizione δ:

	a	b
1	3	8
2	3	1
3	8	2
4	5	6
5	6	2
6	7	8
7	6	4
8	5	8

4: soluzione

(Esame 5-7-2017)
Sia dato l'ASFD definito come $\mathscr{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$, con

1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
3. $q_0 = 1$
4. $F = \{2, 4\}$

e funzione di transizione δ:

	a	b
1	3	8
2	3	1
3	8	2
4	5	6
5	6	2
6	7	8
7	6	4
8	5	8

4: soluzione

Applicando l'algoritmo di derivazione dell'automa minimo risulta $1 \equiv 6 \equiv 8$, $2 \equiv 4$ e $3 \equiv 5 \equiv 7$.

Mantenendo gli stati $1, 2, 3$ come rappresentanti delle classi di equivalenza, risulta l'automa minimo con stato finale 2 e funzione di transizione:

	a	b
1	3	1
2	3	1
3	1	2

4: soluzione

Da cui la grammatica, con $S = A_1$,

$$
\begin{aligned}
A_1 &\longrightarrow aA_3|bA_1 \\
A_2 &\longrightarrow aA_3|bA_1 \\
A_3 &\longrightarrow aA_1|bA_2|b
\end{aligned}
$$

(Esame 6-9-2018)
Data l'espressione regolare $E = a^*b^* + b^*a^*$, derivare un DFA minimo che riconosca il linguaggio definito da E.

5: soluzione

(Esame 6-9-2018)
Data l'espressione regolare $E = a^*b^* + b^*a^*$, derivare un DFA minimo che riconosca il linguaggio definito da E.

(Esame 6-9-2018)
Si definisca un DFA che accetta il linguaggio su $\Sigma = \{0, 1\}$ comprendente tutte e sole le stringhe che non contengono sottostringhe 0^k con $k \geq 3$.

6: soluzione

(Esame 6-9-2018)
Si definisca un DFA che accetta il linguaggio su $\Sigma = \{0, 1\}$ comprendente tutte e sole le stringhe che non contengono sottostringhe 0^k con $k \geq 3$.

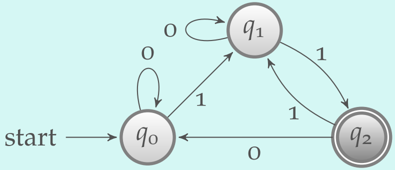
(Esame 6-9-2018)
Si considerino i linguaggi $L_1 = \{b^n a^{3m} | n, m \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^n b^{3n} | n \geq 0\}$.
Per ognuno dei due, mostrare se il linguaggio è regolare o strettamente context-free.

7: soluzione

(Esame 6-9-2018)
Si considerino i linguaggi $L_1 = \{b^n a^{3m} | n, m \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^n b^{3n} | n \geq 0\}$.
Per ognuno dei due, mostrare se il linguaggio è regolare o strettamente context-free.

(Esame 9-2-2018)

Sia L il linguaggio riconosciuto dal seguente ASFD,

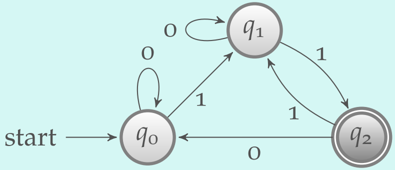


derivare una espressione regolare che descriva L.

8: soluzione

(Esame 9-2-2018)

Sia L il linguaggio riconosciuto dal seguente ASFD,



derivare una espressione regolare che descriva L.

Una possibile soluzione prevede la derivazione della grammatica regolare equivalente

$$
\begin{aligned}
A_0 &\longrightarrow 0A_0|1A_1 \\
A_1 &\longrightarrow 0A_1|1A_2|1 \\
A_2 &\longrightarrow 0A_0|1A_1
\end{aligned}
$$

8: soluzione

E da questa, manipolando il sistema di espressioni corrispondente, l'espressione regolare cercata.

$$\begin{cases} A_0 = 0A_0 + 1A_1 \\ A_1 = 0A_1 + 1A_2 + 1 \\ A_2 = 0A_0 + 1A_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0A_0 + 1A_1 \\ A_1 = 0A_1 + 1A_0 + 1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

8: soluzione

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1A_1 \\ A_1 = 0A_1 + 10^*1A_1 + 1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1A_1 \\ A_1 = (0 + 10^*1)A_1 + 1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1A_1 \\ A_1 = (0 + 10^*1)^*1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

8: soluzione

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1(0 + 10^*1)^*1 \\ A_1 = (0 + 10^*1)^*1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

L è descritto dall'espressione associata all'assioma, e quindi da $0^*1(0 + 10^*1)^*1$.

(Esame 6-9-2018)
Si consideri il linguaggio $L = \{a^*b^nc^*a^nb^*|n \geq 4\}$. L è regolare? Motivare la risposta.

9: soluzione

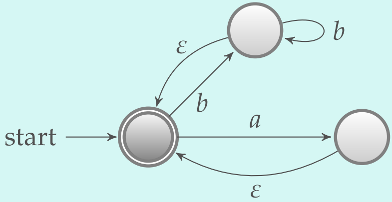
(Esame 6-9-2018)
Si consideri il linguaggio $L = \{a^* b^n c^* a^n b^* | n \geq 4\}$. L è regolare? Motivare la risposta.

(Esame 9-2-2018)
Si consideri l'espressione regolare $r = a(bb^* + a)^*ab$. Derivare un ASFD che riconosce $L(r)$.

10: soluzione

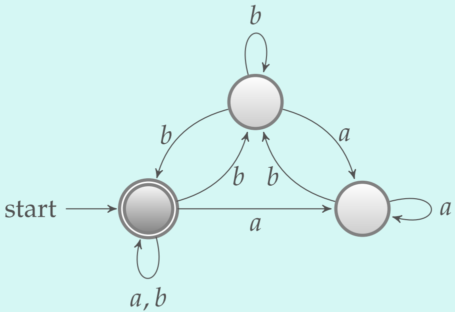
(Esame 9-2-2018)
Si consideri l'espressione regolare $r = a(bb^* + a)^*ab$. Derivare un ASFD che riconosce $L(r)$.

Deriviamo da r un ASFND con ε-transizioni che riconosca $L(r)$.
Possiamo osservare che la sotto-espressione regolare $(bb^* + a)^*$ è accettata per costruzione dall'ASFND con ε-transizioni



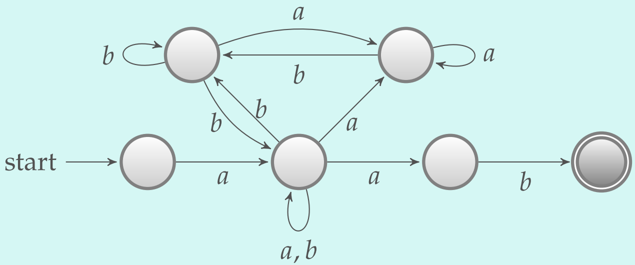
10: soluzione

Eliminando le ε-transizioni, si ottiene l'ASFND



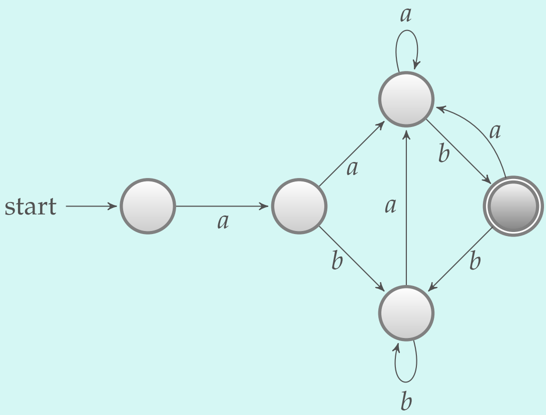
10: soluzione

Da cui immediatamente l'ASFND per $L(r)$



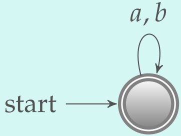
10: soluzione

e da questo l'ASFD

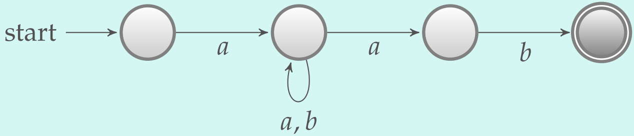


10: soluzione

In alternativa, si potrebbe osservare che $(bb^* + a)^*$ comprende tutte le stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$, che sono riconosciute da

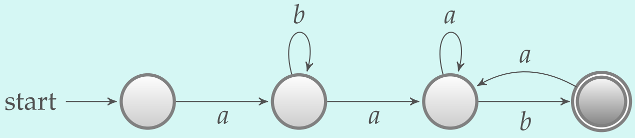


Da cui l'ASFND per $L(r)$



10: soluzione

e da questo l'ASFD



(Esame 6-9-2018)

Definire una grammatica CF che generi il linguaggio

$L = \{w \in \{a, b\} | w \text{ contiene almeno } 4b\}$

11: soluzione

(Esame 6-9-2018)
Definire una grammatica CF che generi il linguaggio
$L = \{w \in \{a, b\} | w$ contiene almeno $4b\}$

Osserviamo che possiamo risolvere il problema derivando una grammatica regolare che generi L. A tal fine, definiamo un ASFD che riconosca L.

11: soluzione

	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_3
q_3	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4

con $F = \{q_4\}$.

11: soluzione

La grammatica deriva immediatamente come

$$
\begin{array}{lcl}
A_0 & \longrightarrow & aA_0 \mid bA_1 \\
A_1 & \longrightarrow & aA_1 \mid bA_2 \\
A_2 & \longrightarrow & aA_2 \mid bA_3 \\
A_3 & \longrightarrow & aA_3 \mid bA_4 \mid b \\
A_4 & \longrightarrow & aA_4 \mid bA_4 \mid a \mid b
\end{array}
$$

(Esame 20-9-2018)
Definire un DFA sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ che accetti il linguaggio L di tutte le stringhe che contengono due 0 a distanza tre tra loro (con tre caratteri tra i due). Ad esempio, $1101010 \in L$, $0001000 \in L$, $0110110 \notin L$, $10001 \notin L$.

12: soluzione

(Esame 20-9-2018)

Definire un DFA sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ che accetti il linguaggio L di tutte le stringhe che contengono due 0 a distanza tre tra loro (con tre caratteri tra i due). Ad esempio, $1101010 \in L$, $0001000 \in L$, $0110110 \notin L$, $10001 \notin L$.

(Esame 21-1-2019)
Si consideri il linguaggio $L \subseteq \{a, b\}^*$ definito come l'insieme delle stringhe σ tali $|\sigma| \geq 4$, i primi due caratteri di σ sono diversi tra loro e anche gli ultimi due caratteri sono diversi tra loro. Ad esempio: $abaabbab \in L$, $ababa \in L$, $babbabab \in L$.

Si definiscano:

- una espressione regolare che descriva L
- un DFA che lo riconosca

13: soluzione

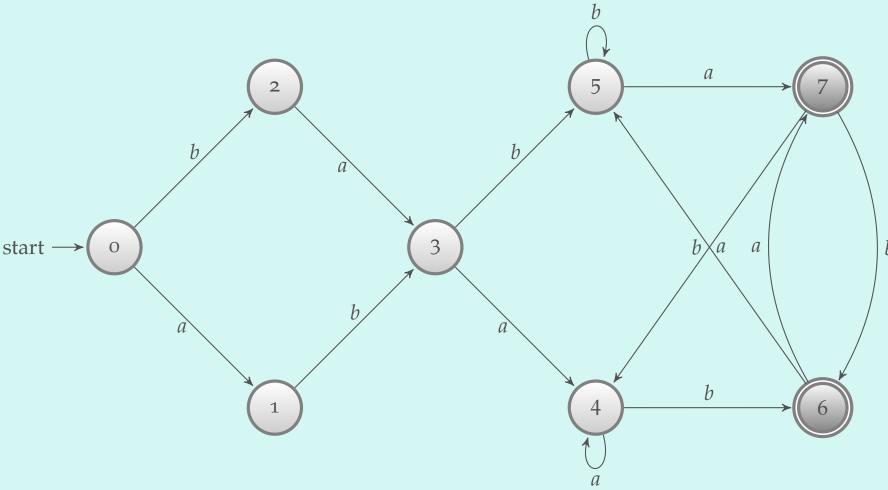
(Esame 21-1-2019)
Si consideri il linguaggio $L \subseteq \{a, b\}^*$ definito come l'insieme delle stringhe σ tali $|\sigma| \geq 4$, i primi due caratteri di σ sono diversi tra loro e anche gli ultimi due caratteri sono diversi tra loro. Ad esempio: $abaabbab \in L$, $ababa \in L$, $babbabab \in L$.

Si definiscano:

- una espressione regolare che descriva L
- un DFA che lo riconosca

13: soluzione

$(ab + ba)(a + b)^*(ab + ba)$



(Esame 21-1-2019)
Sia dato il linguaggio $L = \{(ab)^k c^j (ab)^{2k} | j, k > 0\}$. L è regolare? Dimostrare la risposta data.

14: soluzione

(Esame 21-1-2019)
Sia dato il linguaggio $L = \{(ab)^k c^j (ab)^{2k} | j, k > 0\}$. L è regolare?
Dimostrare la risposta data.

14: soluzione

Il linguaggio non è regolare. Si può dimostrare ciò utilizzando il pumping lemma.

Bob: sceglie n

Alice: sceglie la stringa $\sigma = (ab)^n c(ab)^{2n}$

Bob: sceglie uv, prefisso di σ di lunghezza al più n. Necessariamente, quindi, uv è sottostringa di $(ab)^n$. Due casi sono possibili:

1. $|v|$ è dispari, per cui inizia e termina per lo stesso carattere, ad es. $v = bzb$
2. $|v|$ è pari, per cui inizia e termina con caratteri diversi, ad es. $v = azb$

Alice: pone $i = 2$ e:

1. se $|v|$ è dispari, ottiene una stringa in cui compaiono, nella prima parte, due caratteri successivi uguali, ad es. $uvvw = ubzbbzbw \notin L$,
2. se $|v|$ è pari, ottiene una stringa $(ab)^{n+|v|/2}c(ab)^{2n} \notin L$