Fondamenti dell'Informatica		1 modulo
	Test sui fondamenti matematici	
Prof. Giorgio Gambosi		*a.a. 2021-2022*

Problema 1: Definire i termini seguenti.

1. Insieme $A = \{x, y\}$, sottoinsieme $B \subseteq A$, sottoinsieme proprio $B \subset A$, multinsieme $\{x, y, y\}$, insieme potenza $\mathcal{P}(A)$, cardinalità $|A|$, insieme infinito, numeri naturali $\mathbb{N}$, numeri interi $\mathbb{Z}$, insieme vuoto $\emptyset$, unione $A \cup B$, intersezione $A \cap B$, prodotto cartesiano $A \times B$, complemento $\overline{A}$, sequenza $\langle x, y, z\rangle$, k-pla $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$.
2. Relazione $R = \{(d_1, r_1), (d_2, r_2), \ldots, (d_i, r_i)\}$, relazione riflessiva, relazione simmetrica, relazione transitiva, relazione di equivalenza.
3. Funzione $f : D \mapsto R$, dominio D, codominio R, funzione iniettiva, funzione suriettiva, funzione $1 - 1$.
4. Grafo $G = (V, E)$, grado, cammino, cammino semplice, ciclo, grafo connesso, grafo fortemente connesso.
5. Alfabeto, stringa, lunghezza di una stringa, stringa vuota, sottostringa, concatenazione, ordinamento lessicografico, linguaggio.
6. Logica booleana, operatori $\wedge$ $\vee$ $\neg$ $\oplus$, implicazione, equivalenza logica.
7. Teorema, lemma, corollario, dimostrazione, induzione.

Logica

Problema 2: Siano p, q, r le seguenti proposizioni:

- p: 'sta piovendo'
- q: 'splende il sole'
- r: 'è nuvoloso'

Si traducano le proposizioni seguenti in formule logiche, utilizzando p, q, r e i connettivi logici $\vee$, $\wedge$, $\neg$.

1. 'Sta piovendo e splende il sole'
2. 'Sta piovendo ed è nuvoloso'
3. 'Non sta piovendo, non splende il sole ed è nuvoloso'
4. 'Il sole splende se e solo se non sta piovendo'
5. 'Se non è nuvoloso allora splende il sole'

Problema 3: Siano p, q, r le seguenti proposizioni:

- p: 'sta piovendo'
- q: 'splende il sole'
- r: 'è nuvoloso'

Si traducano le formule logiche seguenti in proposizioni in italiano.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
2. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$
3. $\neg p \Leftrightarrow (q \vee r)$
4. $\neg(p \Leftrightarrow (q \vee r))$
5. $\neg(p \vee q) \wedge r$

Problema 4: Per tutte le formule logiche del problema precedente, fornire le corrispondenti tabelle di verità.

Problema 5: Quale delle formule seguenti è logicamente equivalente a $p \Rightarrow q$?

1. $\neg p \Rightarrow \neg q$
2. $q \Rightarrow p$
3. $\neg q \Rightarrow \neg p$
4. $\neg q \vee p$
5. $\neg p \vee q$
6. $p \wedge \neg q$
7. $q \wedge \neg p$

Problema 6: Costruire le tabelle di verità per le seguenti formule

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee \neg q) \Rightarrow (p \vee q))$
2. $((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$
3. $((p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (\neg q \wedge p)$

Problema 7: Dati i due universi

- $0, 1) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$
- $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$

si determini se le proposizioni seguenti sono vere o false in ognuno dei due universi

1. $\forall x \exists y : x > y$
2. $\forall x \exists y : x \geq y$
3. $\exists x \forall y : x > y$
4. $\exists x \forall y : x \geq y$

Problema 8: Costruire tabelle di verità per ognuna delle formule seguenti. Inoltre, per ogni coppia di formule, dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- Le formule sono equivalenti,
- Le formule non sono equivalenti, ma una implica l'altra (dire quale),
- Nessuna delle due precedenti.

(i) $p \oplus (q \Rightarrow \neg p)$

(ii) $(q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$

(iii) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

(iv) $p \wedge \neg p \wedge (p \Rightarrow q)$

Problema 9: Scrivere le negazioni delle proposizioni seguenti

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{x}$
2. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$
3. $\forall x \in \mathbb{R} : (x > 3) \Rightarrow (x^2 > 9)$

Problema 10: Si considerino le due proposizioni

1. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x < y$
2. $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x < y$

Determinare se le proposizioni sono vere (nessuna, entrambe, o una soltanto).

Insiemi

Problema 11: Si scrivano i seguenti insiemi in forma enumerata:

1. L'insieme delle vocali
2. $\{x \in \mathbb{N} | 10 \leq x \leq 20$ e x è divisibile per 3$\}$
3. L'insieme di tutti i numeri naturali cha danno resto 1 se divisi per 5

Problema 12: Si descrivano i seguenti insiemi mediante un predicato che li definisca:

1. $\{4, 8, 12, 16, 20\}$
2. $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
3. $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

Problema 13: Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi. Descrivere, nel modo più semplice possibile, i seguenti insiemi.

1. $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\{4n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{4n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{n \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$
4. $\{n \mid \forall k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$
5. $\{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}/\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Problema 14: Elencare tutti gli elementi dei seguenti insiemi.

1. $2^{\emptyset}$
2. $2^{\{a,b\}}/\{\{a, b\}, \{a\}\}$
3. $\{a, b\} \times \{c\}$
4. $\{a, b\} \times \{\{c\}\}$
5. $\{a, b\} \cup (\{b, c\} \cap \{a, c\})$
6. $(\{a, b\} \cup \{b, c\}) \cap \{a, c\}$

Problema 15: Sia $A = \{a, b, c\}$ e sia $B = \{p, q\}$. Si scrivano gli insiemi seguenti in forma enumerativa: $A \times B$, A^2, B^3

Problema 16: Sia $A = \{1, \{1\}, \{2\}, 3\}$. Si determini per ognuna delle seguenti proposizioni se è vera o falsa.

1. $\emptyset \in A$; $\emptyset \subseteq A$
2. $1 \in A$; $1 \subseteq A$
3. $\{1\} \in A$; $\{1\} \subseteq A$
4. $\{\{1\}\} \subseteq A$
5. $2 \in A$
6. $\{2\} \in A$; $\{2\} \subseteq A$
7. $\{3\} \in A$; $\{3\} \subseteq A$

Problema 17: Dato l'universo $\{x \in \mathbb{N} | x \leq 12\}$, siano dati i tre insiemi $A = \{x | x$ è dispari$\}$, $B = \{x | x > 7\}$, $C = \{x | x$ è divisibile per $3\}$. Scrivere gli insiemi seguenti in forma enumerata:

1. $A \cap B$
2. $B \cup C$
3. $\overline{A}$
4. $(A \cup \overline{B}) \cap C$
5. $\overline{A \cup C} \cup \overline{C}$

Problema 18: Dimostrare che $\overline{\overline{A} \cap B} = A \cup \overline{B}$

Problema 19: Dimostrare che la differenza di insiemi non è commutativa, cioè che non è vero che per ogni A, B, vale $A - B = B - A$

Problema 20: Dimostrare che la differenza di insiemi non è associativa, cioè che non è vero che per ogni A, B, C, vale $A - (B - C) = (A - B) - C$

Problema 21: Determinare se le seguenti proposizioni sono vere

1. $\{a, b\} \subseteq 2^{\{a,b,\{a,b\}\}}$
2. $\{a, b, \{a, b\}\} - \{a, b\} = \{a, b\}$
3. $\emptyset \in \emptyset$

Problema 22: Dimostrare che le seguenti proprietà valgono per tutti gli insiemi A, B, C

1. $A - B = A \cap \overline{B}$
2. $A \subseteq B$ se e solo se $A - B = \emptyset$
3. $A - (A - B) = A \cap B$
4. $A \cap B \subseteq (A \cap B) \cup (B \cap \overline{C})$
5. $(A \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) \subseteq A \cup B$
6. $A \subseteq B$ se e solo se $\overline{B} \subseteq \overline{A}$
7. $(A \cup B) - (A \cup C) \subseteq B - C$
8. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
9. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

Problema 23: Dati gli insiemi $A = \{1, 3, 5, 15\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 10\}$, $D = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Descrivere $A \cap B \cap C \cap D$
2. Descrivere $(A \cup B) - C$
3. Descrivere $\overline{B} \wedge \overline{C}$ (Il complemento è preso rispetto a $\mathbb{N}$)
4. Quante coppie di insiemi disgiunti esistono tra A, B, C, D?

Relazioni e funzioni

Problema 24: Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi. Sia R la relazione binaria su $\mathbb{Z}$ tale che $\{a, b\} \in R$ se e solo se $ab \geq 0$.

(a) R è riflessiva? Motivare il perché.
(b) R è simmetrica? Motivare il perché.
(c) R è transitiva? Motivare il perché.
(d) Definire una relazione $R_1 \subseteq R$ riflessiva e simmetrica ma non transitiva.
(e) Definire una relazione $R_2 \subseteq R$ riflessiva e transitiva ma non simmetrica.
(f) Definire una relazione $R_3 \subseteq R$ simmetrica e transitiva ma non riflessiva.
(g) Definire una relazione $R_4 \subseteq R$ che sia una relazione di equivalenza.

Problema 25: Determinare quali delle seguenti relazioni sono riflessive, simmetriche, antisimmetriche, transitive.

1. 'parente di' sull'insieme di tutte le persone
2. 'figlio di' sull'insieme di tutte le persone
3. 'maggiore di' sull'insieme dei numeri reali
4. 'ha la stessa parte intera di' sull'insieme dei numeri reali

5. 'è multiplo di' sull'insieme dei numeri reali
6. la relazione R sui numeri reali definita come $(x, y) \in R$ se e solo se $x^2 = y^2$

Problema 26: Per tutte le relazioni di equivalenza del problema precedente, definire le classi di equivalenza.

Problema 27: Sia $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ una relazione sui numeri interi tale che $(x, y) \in R$ se e solo se $x - y$ è divisibile per 4. Mostrare che R è una relazione di equivalenza e descrivere le relative classi di equivalenza.

Problema 28: Dato un insieme S, la relazione di inclusione $\subseteq$ è definita su $\mathcal{P}(S)^2$, dove $\mathcal{P}(S)$ è l'insieme potenza di S. Elencare tutti gli elementi della relazione assumendo che $S = \{1, 2, 3\}$.

Problema 29: Dato l'insieme $S = \{0, 1, 2, 3\}$, elencare tutti gli elementi di ognuna delle seguenti relazioni su S^2.

1. $(s, y \in R_1)$ se e solo se $x + y = 3$
2. $(s, y \in R_2)$ se e solo se $x \leq y$
3. $(s, y \in R_3)$ se e solo se $\max(x, y) = 3$
4. $(s, y \in R_4)$ se e solo se $x - y$ è pari
5. $(s, y \in R_5)$ se e solo se $x + y \leq 4$

Determinare quali tra queste relazioni sono riflessive, simmetriche, antisimmetriche e transitive.

Problema 30: Un grafo non orientato è detto connesso se ogni coppia di nodi è collegata da un cammino (sequenza di archi). Dimostrare che un grafo connesso di n nodi ha almeno $n - 1$ archi.

Problema 31: Sia data la funzione $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 10 \\ 2 & x = 10 \\ 2x + 1 & x > 10 \end{cases}$$

Questa funzione è totale? 1-1? Suriettiva?

Problema 32: Determinare quali tra le seguenti funzioni sono iniettive e quali sono suriettive:

1. $f : S \mapsto S$, dove S è un insieme non vuoto di stringhe e $f(s)$ restituisce la stringa s rovesciata
2. $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tale che $g(x, y) = x + y$
3. $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ tale che $s(n) = n + 1$
4. h : {parole in italiano} $\mapsto$ {lettere dell'alfabeto} tale che $h(w)$ restituisce la lettera iniziale di w
5. Dato un insieme finito A, $|\cdot| : \mathcal{P}(A) \mapsto \mathbb{N}$, tale che $|X|$ è la cardinalità dell'insieme $X \subseteq A$.

Problema 33: Date le seguenti funzioni, determinare se sono iniettive e/o suriettive

1. $i(n) = n$
2. $f(n) = 3n$
3. $g(n) = n + (-1)^n$
4. $h(n) = \min(n, 100)$
5. $k(n) = \max(0, n - 5)$

Dimostrazioni, induzione

Problema 34: Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha che

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Problema 35: Dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 12$, esistono due interi a, b tali che $n = 3a + 7b$.

Problema 36: Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $n^3 - n$ è divisibile per 6.

Problema 37: Dimostrare per assurdo che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ è divisibile per 6.

Problema 38: Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Problema 39: Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri dispari è pari a n^2.

Problema 40: Si consideri la seguente sequenza di equazioni.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} &= 2 - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= 2 - \frac{1}{4} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Dare una equazione che descrive la regola generale e dimostrarne la correttezza per induzione.

Problema 41: Trovare una formula per la somma dei primi n numeri pari. Dimostrarne la correttezza per induzione.

Problema 42: Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, si ha che $n^2 \leq 2^n$.

Problema 43: Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Problema 44: Sia data la funzione f definita ricorsivamente come

1. $f(0) = 0$
2. $f(n+1) = f(n) + n$

Determinare i valori $f(2)$ e $f(3)$. Mostrare poi che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $2f(n) = n^2 - n$

Problema 45: Data la funzione fattoriale, definita ricorsivamente come

1. $0! = 0$
2. $(n+1)! = (n+1)n!$

mostrare che $n! > 2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$

Problema 46: Sia $\Sigma = \{0, 1\}$: definiamo per ricorsione la funzione $\phi : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ come

1. $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $\phi(w0) = \phi(w)1$
3. $\phi(w1) = \phi(w)0$

Determinare $\phi(1011)$ e $\phi(1101)$. Dimostrare poi, per induzione su $|w|$, che $|\phi(w)| = |w|$

Problema 47: Sia $\Sigma = \{0, 1\}$: definiamo per ricorsione la funzione di inversione $r : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ come

1. $r(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $r(aw) = r(w)a$

Dimostrare, per induzione su $|u|$, che $r(uv) = r(v)r(u)$ e, per induzione su n, che $r(x^n) = (r(x))^n$

Problema 48: Data una stringa w, la sua stringa rovesciata $\tilde{w}$ è definita come:

1. Se $w = \varepsilon$ allora $\tilde{w} = \varepsilon$
2. Se $w = ua$, dove $u \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$, allora $\tilde{w} = a\tilde{u}$

Dimostrare per induzione che se $w = bv$, dove $u \in \Sigma^*$ e $b \in \Sigma$, allora $\tilde{w} = \tilde{v}b$

Insiemi numerabili e non numerabili

Problema 49: Mostrare che l'insieme $X = \{4n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ è numerabile fornendo, in accordo alla definizione, una funzione 1-1 $f : X \mapsto \mathbb{N}$.

Problema 50: L'insieme $X = \{0, 1, 2\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 10\}$ è numerabile?

Problema 51: L'insieme $X = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 100\}$ è numerabile?