Linguaggi context free

Fondamenti di informatica - primo modulo
CdL in Informatica

Università di Roma “Tor Vergata

Giorgio Gambosi

Linguaggi CF

La derivazione di una stringa generata da una grammatica di tipo 2 può essere rappresentata mediante una struttura ad albero. Tali alberi vengono chiamati alberi di derivazione, o alberi sintattici.

In un albero sintattico, ad ogni nodo interno è associato un simbolo non-terminale e ad ogni foglia è associato un simbolo terminale. Per ogni produzione del tipo $S \longrightarrow aSbA$ che viene applicata nel processo di derivazione, il nodo interno etichettato con S avrà nell'albero quattro figli etichettati con a, S, b, A

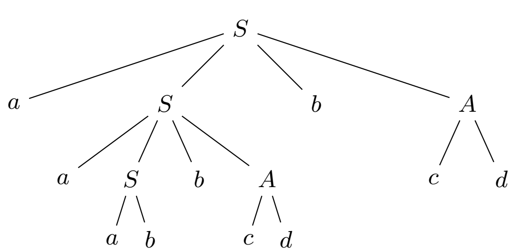
Data la grammatica $\mathcal{G}$ avente le produzioni

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & aSbA \mid ab \\ A & \longrightarrow & cAd \mid cd \end{array}$$

la stringa $aaabbcdbcd \in L(\mathcal{G})$ può essere così derivata:

$$S \Longrightarrow aSbA \Longrightarrow aaSbAbA \Longrightarrow aaabbAbA$$
$$\Longrightarrow aaabbcdbA \Longrightarrow aaabbcdbcd.$$

Albero sintattico



Albero sintattico

In questa rappresentazione non si mantiene traccia dell'ordine con cui le produzioni sono state applicate. Ad un unico albero possono corrispondere diverse derivazioni.

Vantaggio: un albero di derivazione fornisce una descrizione sintetica della struttura sintattica della stringa, indipendentemente dall'ordine con cui le produzioni sono state applicate.

Forme ridotte e forme normali

Al fine di studiare alcune proprietà dei linguaggi generati da queste grammatiche, è utile considerare grammatiche “ristrette”, comprendenti soltanto produzioni con struttura particolare.

È importante dimostrare che i linguaggi non contestuali possono essere generati mediante tali tipi di grammatiche.

Grammatica in forma ridotta

Una grammatica $\mathcal{G}$ è in forma ridotta se

1. non contiene ε-produzioni (se non, eventualmente, in corrispondenza all'assioma, ed in tal caso l'assioma non compare mai al lato destro di una produzione),
2. non contiene produzioni unitarie, cioè produzioni del tipo
$$A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \in V_N,$$
3. non contiene simboli inutili, cioè simboli che non compaiono in nessuna derivazione di una stringa di soli terminali.

Grammatica in forma ridotta

Trasformazione di una grammatica $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S\rangle$ di tipo 2 in una grammatica equivalente in forma ridotta mediante sequenza di passi.

1. A partire da $\mathcal{G}$, derivazione di $\mathcal{G}_1$ di tipo 2 senza ε-produzioni tale che $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$.
2. A partire da $\mathcal{G}_1$, derivazione di $\mathcal{G}_2$ di tipo 2 senza ε-produzioni e senza produzioni unitarie tale che $L(\mathcal{G}_2) = L(\mathcal{G}_1)$.
3. A partire da $\mathcal{G}_2$, derivazione di $\mathcal{G}_3$ di tipo 2 senza ε-produzioni, senza produzioni unitarie e senza simboli inutili tale che $L(\mathcal{G}_3) = L(\mathcal{G}_2)$.
4. La grammatica $\mathcal{G}_4$, di tipo 2, equivalente a $\mathcal{G}$ coincide con $\mathcal{G}_3$ se $\varepsilon \notin L(\mathcal{G})$; altrimenti, $\mathcal{G}_4$ è ottenuta da $\mathcal{G}_3$ introducendo un nuovo assioma ed un opportuno insieme di produzioni su tale simbolo.

Passo 1

Teorema

Data una grammatica $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S\rangle$ il cui insieme di produzioni P comprende soltanto produzioni di tipo non contestuale e produzioni vuote, esiste una grammatica non contestuale $\mathcal{G}'$ tale che $L(\mathcal{G}') = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$.

Passo 1

Determinazione dell'insieme $N \subseteq V_N$ dei simboli che si annullano, cioè i non terminali da cui è possibile derivare ε in $\mathcal{G}$.

Costruzione di una sequenza $N_0, N_1, \ldots, N_k = N$ di sottoinsiemi di V_N, con $N_0 = \{A \in V_N \mid A \longrightarrow \varepsilon \in P\}$ e N_{i+1} derivato da N_i:
$$N_{i+1} = N_i \cup \{B \in V_N \mid (B \longrightarrow \beta \in P) \wedge (\beta \in N_i^+)\}.$$
La costruzione termina quando $N_{k+1} = N_k$, $k \geq 0$.

$\varepsilon \in L(\mathcal{G})$ se e solo se $S \in N$.

Passo 1

input grammatica $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S\rangle$;
output insieme $N \subseteq V_N$ dei simboli che si annullano;
$N := \{A \in V_N \mid A \longrightarrow \varepsilon \in P\}$;
repeat
  $\widehat{N} := N$;
  $N := \widehat{N} \cup \{B \in V_N \mid (B \longrightarrow \beta \in P) \wedge (\beta \in \widehat{N}^+)\}$
until $N = \widehat{N}$

Passo 1

Costruzione dell'insieme P' delle produzioni di $\mathcal{G}'$:

- Si esamina ciascuna produzione $A \longrightarrow \alpha$ di P, con l'esclusione delle ε-produzioni
  - Se nessun simbolo di α è annullabile: $A \longrightarrow \alpha$ è inserita in P'
  - Altrimenti α contiene $k > 0$ simboli che si annullano: sono inserite in P' tutte le possibili produzioni ottenute da $A \longrightarrow \alpha$ eliminando da α uno dei sottoinsiemi di simboli che si annullano

Passo 1

input grammatica $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S\rangle$, insieme $N \subseteq V_N$ dei simboli che si annullano;
output insieme P' delle produzioni di $\mathcal{G}'$;
$P' := \emptyset$;
for each $A \longrightarrow \alpha \in P$ con $\alpha \neq \varepsilon$ **do**
  sia $\alpha = Z_1, \ldots, Z_t$;
  $J := \{i \mid Z_i \in N\}$;
  for each $J' \in 2^J$ **do**
    if $J' \neq \{1, \ldots, t\}$ **then**
      sia β la stringa ottenuta eliminando da α ogni Z_i con $i \in J'$;
      $P' := P' \cup \{A \longrightarrow \beta\}$

Passo 1

Nel caso in cui $L(\mathcal{G})$ contiene ε, si può ottenere da $\mathcal{G}'$ una grammatica equivalente a $\mathcal{G}$ tramite la semplice introduzione di una ε-produzione sull'assioma di $\mathcal{G}'$.

Esempio

Consideriamo la grammatica $\mathcal{G} = \langle\{a, b\}, \{S, A, B\}, P, S\rangle$, le cui produzioni P sono:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & A \mid SSa \\ A & \longrightarrow & B \mid Ab \mid \varepsilon \\ B & \longrightarrow & S \mid ab \mid aA. \end{array}$$

Esempio

Sequenza di insiemi di simboli annullabili:

$$\begin{array}{l} N_0 = \{A\} \\ N_1 = \{S, A\} \\ N_2 = \{S, A, B\} \\ N_3 = \{S, A, B\} = N_2 = N \end{array}$$

Esempio

Produzioni P':

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & A \mid SSa \mid Sa \mid a \mid \varepsilon \\ A & \longrightarrow & B \mid Ab \mid b \\ B & \longrightarrow & S \mid ab \mid aA \mid a. \end{array}$$

Passo 2

Teorema

Per ogni grammatica $\mathcal{G}$ di tipo 2 senza ε-produzioni, esiste sempre una grammatica $\mathcal{G}'$ di tipo 2 senza ε-produzioni, priva di produzioni unitarie ed equivalente a $\mathcal{G}$.

Passo 2

Sia, per ogni $A \in V_N$, $U(A)$, il sottoinsieme di $V_N - \{A\}$ comprendente tutti i non terminali derivabili da A applicando una sequenza di produzioni unitarie,

$$U(A) = \{B \in V_N - \{A\} \mid A \stackrel{*}{\Longrightarrow} B\}$$

Passo 2

Data la grammatica $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$, P' è costruito:

- inserendo dapprima in P' tutte le produzioni non unitarie in P
- inserendo in P', per ogni non terminale A e per ogni $B \in U(A)$, la produzione $A \longrightarrow \beta$ se e solo se in P esiste una produzione non unitaria $B \longrightarrow \beta$

Passo 2

input Grammatica CF $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ priva di ε-produzioni;
output Grammatica CF $\mathcal{G}' = \langle V_T, V_N, P', S \rangle$ priva di
  ε-produzioni e di produzioni unitarie equivalente a $\mathcal{G}$;
$P' := \{A \longrightarrow \alpha \in P \mid \alpha \notin V_N\}$;
for each $A \in V_N$ **do**
  $P' := P' \cup \{A \longrightarrow \beta \mid B \longrightarrow \beta \in P \wedge B \in U(A) \wedge \beta \notin V_N\}$

Esercizio

Costruire un algoritmo che, data una grammatica $\mathcal{G}$ di tipo 2 senza ε-produzioni e dato un non terminale A della grammatica, determini l'insieme $U(A)$

Passo iniziale: inserisci in $U(A)$ tutti i simboli B tali che $A \longrightarrow B$

Passo iterativo: per ogni simbolo $B \in U(A)$, inserisci in $U(A)$ tutti i simboli C tali che $B \longrightarrow C$; termina se nessun nuovo simbolo è stato inserito in $U(A)$

Passo 3

Teorema

Per ogni grammatica $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ di tipo 2 senza ε-produzioni e senza produzioni unitarie, esiste sempre una grammatica $\mathcal{G}'$ di tipo 2 senza ε-produzioni, priva di produzioni unitarie e di simboli inutili ed equivalente a $\mathcal{G}$.

Passo 3

Affinché un simbolo $A \in V_N$ non sia inutile, è necessario che nella grammatica $\mathcal{G}$ si abbia che:

- A sia un simbolo fecondo, vale a dire che da esso siano generabili stringhe di terminali, cioè $\exists w \in V_T^+$ tale che $A \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$;
- A sia generabile dall'assioma in produzioni che non contengano simboli non fecondi, cioè $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha A \beta$ con $\alpha, \beta \in (V_T \cup V_N)^*$ e, per ogni $B \in V_N$ in α o β, valga la proprietà precedente.

Equivalentemente, un simbolo $A \in V_N$ non è inutile se esiste una derivazione $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha A \beta \stackrel{*}{\Longrightarrow} w \in V_T^+$.

Passo 3

Un non terminale A è fecondo se e solo se vale una delle due condizioni seguenti:

1. esiste $w \in V_T^+$ tale che $A \longrightarrow w \in P$;
2. esiste $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$ tale che $A \longrightarrow \alpha \in P$ e tutti i simboli non terminali in α sono fecondi.

Passo 3

input Grammatica non contestuale $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$,
priva di ε-produzioni e di produzioni unitarie;
output Grammatica non contestuale $\widehat{\mathcal{G}} = \left\langle V_T, \widehat{V}_N, \widehat{P}, S \right\rangle$,
priva di ε-produzioni, di produzioni unitarie e di simboli
non fecondi, equivalente a $\mathcal{G}$;
$F := \emptyset$;
while $\exists A \in V_N - F$ per cui $\exists A \longrightarrow \alpha \in P$, con $\alpha \in (F \cup V_T)^*$ **do**
$F := F \cup \{A\}$;
$\widehat{P} := \{A \longrightarrow \alpha \mid A \longrightarrow \alpha \in P, A \in F, \alpha \in (F \cup V_T)^*\}$

Passo 3

È necessario verificare che i simboli rimasti siano generabili a partire dall'assioma.

Ciò può essere effettuato in modo iterativo, osservando che A è generabile a partire da S se vale una delle due condizioni seguenti:

1. esistono $\alpha, \beta \in (F \cup V_T)^*$ tali che $S \longrightarrow \alpha A \beta \in \widehat{P}$;
2. esistono $\alpha, \beta \in (F \cup V_T)^*$ e $B \in F$, generabile a partire da S, tali che $B \longrightarrow \alpha A \beta \in \widehat{P}$.

Passo 3

input Grammatica non contestuale $\widehat{\mathcal{G}} = \left\langle V_T, F, \widehat{P}, S \right\rangle$ priva
di ε-produzioni, di produzioni unitarie e di simboli
non fecondi;
output Grammatica non contestuale $\mathcal{G}' = \langle V_T, V_N', P', S \rangle$ priva
di ε-produzioni, produzioni unitarie, simboli non fecondi,
simboli non generabili da S, equivalente a $\widehat{\mathcal{G}}$;
$NG := F - \{S\}$;
for each $A \in F - NG$ **do**
for each $\alpha \in (V_T \cup F)^*$ tale che $A \longrightarrow \alpha \in \widehat{P}$ **do**
for each $B \in NG$ che appare in α **do**
$NG := NG - \{B\}$;
$V_N' := F - NG$;
$P' := \{A \longrightarrow \alpha \mid A \longrightarrow \alpha \in \widehat{P}, A \in V_N', \alpha \in (V_N' \cup V_T)^*\}$

Passo 3

Al fine di eliminare i simboli inutili (non fecondi e non generabili da S) è necessario applicare i due algoritmi nell'ordine dato: eliminare prima i simboli non generabili e poi quelli non fecondi può far sì che non tutti i simboli inutili vengano rimossi dalla grammatica.

Infatti, si consideri la grammatica

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & AB \mid a \\ A & \longrightarrow & a. \end{array}$$

Passo 3

Procedendo prima all'eliminazione dei simboli non derivabili dall'assioma e poi all'eliminazione di quelli non fecondi, otterremmo le seguenti grammatiche:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & AB \mid a \\ A & \longrightarrow & a \end{array} \quad \text{e successivamente} \quad \begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & a \\ A & \longrightarrow & a. \end{array}$$

che non è in forma ridotta.

Passo 3

Se invece si procede come indicato sopra si ottengono le due grammatiche

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & a \\ A & \longrightarrow & a \end{array} \quad \text{e successivamente} \quad S \longrightarrow a.$$

Passo 4

Una grammatica $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S\rangle$ può essere estesa in una grammatica $\mathcal{G}' = \langle V_T, V_N', P', S'\rangle$ che generi anche la stringa vuota ε nel modo seguente:

1. $V_N' = V_N \cup \{T\}$, dove $T \notin V_N$;
2. $P' = P \cup \{T \longrightarrow \varepsilon\} \cup \{T \longrightarrow \alpha \mid S \longrightarrow \alpha \in P\}$;
3. $S' = T$.

Esempio

$$\begin{array}{clcl} 1 & S & \longrightarrow & aUVb \mid TZ \\ 2 & Z & \longrightarrow & aZ \\ 3 & U & \longrightarrow & bU \mid b \\ 4 & V & \longrightarrow & W \\ 5 & V & \longrightarrow & aY \\ 6 & Y & \longrightarrow & bY \mid b \\ 7 & W & \longrightarrow & cWd \mid cd \\ 8 & T & \longrightarrow & tT \mid tz. \end{array}$$

Esempio

- L'eliminazione delle produzioni unitarie porta ad escludere la produzione 4 e ad aggiungere una terza produzione alla 1.
- L'eliminazione di simboli non fecondi porta ad escludere la produzione 2 e la seconda produzione della 1.
- L'eliminazione dei simboli non raggiungibili porta infine ad escludere la produzione 8.

Esempio

Si ottiene quindi la grammatica

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & aUVb \mid aUWb \\ U & \longrightarrow & bU \mid b \\ V & \longrightarrow & aY \\ Y & \longrightarrow & bY \mid b \\ W & \longrightarrow & cWd \mid cd. \end{array}$$

Esercizio

Trasformare la grammatica seguente in una grammatica equivalente in forma ridotta.

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & H \mid Z \\ H & \longrightarrow & A \mid \varepsilon \\ Z & \longrightarrow & bZb \\ A & \longrightarrow & bbABa \mid a \\ B & \longrightarrow & cB \mid BZY \mid \varepsilon \\ Y & \longrightarrow & Yb \mid b. \end{array}$$

Forma normale di Chomsky

Una grammatica di tipo 2 si dice in Forma Normale di Chomsky se tutte le sue produzioni sono del tipo $A \longrightarrow BC$ o del tipo $A \longrightarrow a$, con $A, B, C \in V_N$ ed $a \in V_T$.

Forma normale di Chomsky

Teorema

Data una grammatica $\mathcal{G}$ non contestuale tale che $\varepsilon \notin L(G)$, esiste una grammatica equivalente in CNF.

Forma normale di Chomsky

Come mostrato, è possibile derivare una grammatica $\mathcal{G}'$ in forma ridotta equivalente a $\mathcal{G}$: in particolare, $\mathcal{G}'$ non ha produzioni unitarie.

Da $\mathcal{G}'$, è possibile derivare una grammatica $\mathcal{G}''$ in CNF, equivalente ad essa

Forma normale di Chomsky

Sia $A \longrightarrow \zeta_{i_1} \dots \zeta_{i_n}$ una produzione di $\mathcal{G}'$ non in CNF. Si possono verificare due casi:

- $n \geq 3$ e $\zeta_{i_j} \in V_N$, $j = 1, \dots, n$.

  In tal caso, introduciamo $n-2$ nuovi simboli non terminali $Z_1, \dots, Z_{n-2}$ e sostituiamo la produzione $A \longrightarrow \zeta_{i_1} \dots \zeta_{i_n}$ con le produzioni

$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \zeta_{i_1} Z_1 \\ Z_1 & \longrightarrow & \zeta_{i_2} Z_2 \\ & \dots & \\ Z_{n-2} & \longrightarrow & \zeta_{i_{n-1}} \zeta_{i_n}. \end{array}$$

Forma normale di Chomsky

- $n \geq 2$ e $\zeta_{i_j} \in V_T$ per qualche $j \in \{1, \dots, n\}$.

  In tal caso per ciascun $\zeta_{i_j} \in V_T$ introduciamo un nuovo non terminale $\overline{Z}_{i_j}$, sostituiamo $\overline{Z}_{i_j}$ a ζ_{i_j} nella produzione considerata e aggiungiamo la produzione $\overline{Z}_{i_j} \longrightarrow \zeta_{i_j}$. Così facendo o abbiamo messo in CNF la produzione considerata (se $n = 2$) o ci siamo ricondotti al caso precedente (se $n \geq 3$).

Forma normale di Chomsky

Si consideri la grammatica di tipo 2 che genera il linguaggio $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ con le produzioni

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & aSb \\ S & \longrightarrow & ab \end{array}$$

La grammatica è in forma ridotta.

Forma normale di Chomsky

Grammatica in CNF equivalente:

- $V_N = \{S, Z_1, \overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \overline{Z}_3, \overline{Z}_4\}$
- P:

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \overline{Z}_1 Z_1 \\ Z_1 & \longrightarrow & S\overline{Z}_2 \\ S & \longrightarrow & \overline{Z}_3\overline{Z}_4 \\ \overline{Z}_1 & \longrightarrow & a \\ \overline{Z}_2 & \longrightarrow & b \\ \overline{Z}_3 & \longrightarrow & a \\ \overline{Z}_4 & \longrightarrow & b \end{array}$$

Forma normale di Greibach

Una grammatica di tipo 2 si dice in Forma Normale di Greibach (GNF) se tutte le sue produzioni sono del tipo $A \longrightarrow a\beta$, con $A \in V_N$, $a \in V_T, \beta \in V_N^*$.

Si osservi come una grammatica di tipo 3 corrisponda al caso in cui $|\beta| \leq 1$

Trasformazione in forma normale di Greibach

Lemma (Sostituzione)

Sia $\mathcal{G}$ una grammatica di tipo 2 le cui produzioni includono

$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \alpha_1 B \alpha_2 \\ B & \longrightarrow & \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n, \end{array}$$

($\alpha_1, \alpha_2 \in V^*$) e in cui non compaiono altre B-produzioni oltre a quelle indicate. La grammatica $\mathcal{G}'$ in cui la produzione $A \longrightarrow \alpha_1 B \alpha_2$ è stata sostituita dalla produzione

$$A \quad \longrightarrow \quad \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_1 \beta_n \alpha_2$$

è equivalente alla grammatica $\mathcal{G}$.

Trasformazione in forma normale di Greibach

Lemma (Eliminazione ricursione sinistra)

Sia data una grammatica $\mathcal{G}$ con ricursione sinistra sul non terminale A e sia

$$A \longrightarrow A\alpha_1 \mid \ldots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n,$$

l'insieme dell A-produzioni in $\mathcal{G}$, dove nessuna delle stringhe β_i inizia per A. La grammatica $\mathcal{G}'$ in cui le A-produzioni in $\mathcal{G}$ sono state sostituite dalle produzioni:

$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \beta_1 A' \mid \ldots \mid \beta_n A' \mid \beta_1 \ldots \mid \beta_n \\ A' & \longrightarrow & \alpha_1 A' \mid \ldots \mid \alpha_m A' \mid \alpha_1 \ldots \mid \alpha_m \end{array}$$

è equivalente a $\mathcal{G}$ e non presenta ricursione sinistra rispetto al non terminale A.

Trasformazione in forma normale di Greibach

Teorema

Ogni linguaggio non contestuale L tale che $\varepsilon \notin L$ può essere generato da una grammatica di tipo 2 in GNF.

Trasformazione in forma normale di Greibach

Si assuma che $\mathcal{G}$ sia una grammatica CF in CNF che generai L.

La derivazione di $\mathcal{G}'$ da $\mathcal{G}$ avviene applicando iterativamente i due lemmi precedenti, a partire da un ordinamento arbitrario $A_1, \ldots, A_n$ tra i non terminali di $\mathcal{G}$.

Trasformazione in forma normale di Greibach

Fase 1

- per k da 2 a n
  - per j da 1 a $k-1$
    - Applica il Lemma di sostituzione ad ogni produzione del tipo $A_k \longrightarrow A_j\alpha$
    - Applica il Lemma di eliminazione della ricursione sinistra ad ogni produzione del tipo $A_k \longrightarrow A_k\alpha$

Trasformazione in forma normale di Greibach

Siano $B_1 \ldots, B_l$ i non terminali aggiunti. A questo punto le produzioni sono tutte di uno tra i tipi:

- (a) $A_k \longrightarrow A_j\gamma$ con $j > k, \gamma \in (V_N \cup \{B_1, \ldots, B_l\})^*$
- (b) $A_k \longrightarrow a\gamma$ con $a \in V_T, \gamma \in (V_N \cup \{B_1, \ldots, B_l\})^*$
- (c) $B_k \longrightarrow \gamma$ con $\gamma \in V_N \cdot (V_N \cup \{B_1, \ldots, B_l\})^*$

Inoltre, le A_k-produzioni sono:

- se $k = n$ tutte del tipo (b)
- se $k < n$ del tipo (b) o del tipo (a), con $j \leq n$

Trasformazione in forma normale di Greibach

Fase 2

- per h da $n-1$ a 1
  - per j da n a h
    - Applica il Lemma di sostituzione ad ogni produzione del tipo $A_h \longrightarrow A_j\gamma$

A questo punto le produzioni sono tutte del tipo (b) o (c)

Trasformazione in forma normale di Greibach

Fase 3

- per i da 1 a l
  - per j da 1 a m
    - Applica il Lemma di sostituzione ad ogni produzione del tipo $B_i \longrightarrow A_j\gamma$

A questo punto le produzioni sono tutte del tipo (b)

Esempio

Data una grammatica avente le produzioni

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \mid b \\ A &\longrightarrow b \mid BS \\ B &\longrightarrow a \mid BA \mid AS, \end{aligned}$$

consideriamo in modo arbitrario l'ordinamento S, A, B tra i non terminali

Esempio

Fase 1.

Sostituiamo alla produzione $B \longrightarrow AS$ la coppia di produzioni $B \longrightarrow bS \mid BSS$:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \mid b \\ A &\longrightarrow b \mid BS \\ B &\longrightarrow a \mid bS \mid BA \mid BSS \end{aligned}$$

Esempio

Fase 1.

Eliminiamo la ricursione sinistra nelle B-produzioni, ottenendo

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \mid b \\ A &\longrightarrow b \mid BS \\ B &\longrightarrow a \mid bS \mid aB' \mid bSB' \\ B' &\longrightarrow A \mid SS \mid AB' \mid SSB'. \end{aligned}$$

Esempio

Fase 2.

Sostituiamo alla produzione $A \longrightarrow BS$ le produzioni $A \longrightarrow aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S$ ottenendo

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \mid b \\ A &\longrightarrow b \mid aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S \\ B &\longrightarrow a \mid bS \mid aB' \mid bSB' \\ B' &\longrightarrow A \mid SS \mid AB' \mid SSB'. \end{aligned}$$

Esempio

Fase 2.

Sostituiamo alla produzione $S \longrightarrow AB$ le produzioni $S \longrightarrow aSB \mid bSSB \mid aB'SB \mid bSB'SB \mid bB$ ottenendo

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aSB \mid bSSB \mid aB'SB \mid bSB'SB \mid bB \mid b \\ A &\longrightarrow b \mid aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S \\ B &\longrightarrow a \mid bS \mid aB' \mid bSB' \\ B' &\longrightarrow A \mid SS \mid AB' \mid SSB'. \end{aligned}$$

Esempio

Fase 3.

Sostituiamo nelle B'-produzioni ottenendo

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & aSB \mid bSSB \mid aB'SB \mid bSB'SB \mid bB \mid b \\ A & \longrightarrow & b \mid aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S \\ B & \longrightarrow & a \mid bS \mid aB' \mid bSB' \\ B' & \longrightarrow & aS \mid bSS \mid aB'S \mid bSB'S \mid b \\ & & asBS \mid bSSBS \mid aB'SBS \mid bSB'SBS \mid bSB \mid bS \mid \\ & & aSB' \mid bSSB' \mid aB'SB' \mid bSB'SB' \mid bB' \mid \\ & & aSBSB' \mid bSSBSB' \mid aB'SBSB' \mid \\ & & bSB'SBSB' \mid bBSB' \mid bSB'. \end{array}$$

Esercizio

Sia data la seguente grammatica:

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & AbA \mid b \\ A & \longrightarrow & SaS \mid a. \end{array}$$

Derivare una grammatica in GNF equivalente ad essa.

1 Non contestualità

Pumping lemma

Teorema

Sia $L \subseteq V_T^*$ un linguaggio non contestuale. Esiste allora una costante n tale che se $z \in L$ e $\mid z \mid \geq n$ allora esistono 5 stringhe $u, v, w, x, y \in V_T^*$ tali che

$$\begin{array}{ll} i) & uvwxy = z \\ ii) & \mid vx \mid \geq 1 \\ iii) & \mid vwx \mid \leq n \\ iv) & \forall i \geq 0 \; uv^i wx^i y \in L. \end{array}$$

Pumping lemma: interpretazione come gioco a due

Se L è context free, Alice vince sempre questo gioco con Bob:

1. Alice fissa un intero $n > 0$ opportuno
2. Bob sceglie una stringa $z \in L$ con $\mid z \mid > n$
3. Alice divide z in cinque parti $uvwxy$ con $\mid vwx \mid \leq n$ e $\mid vx \mid \geq 1$
4. Bob sceglie un intero $i \geq 0$
5. Alice mostra a Bob che $uv^i wx^i y \in L$

Dimostrazione

Grammatica $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ in CNF che genera $L = L(\mathcal{G})$ e sia $k = \mid V_N \mid$ il numero di simboli non terminali in $\mathcal{G}$.

Qualunque albero sintattico $A(\sigma)$ relativo ad una stringa $\sigma \in V_T^*$ derivata in $\mathcal{G}$ sarà tale da avere tutti i nodi interni (corrispondenti a simboli non terminali) di grado 2, eccetto quelli aventi foglie dell'albero come figli, che hanno grado 1.

Dimostrazione

- Se h è l'altezza di A (numero massimo di archi, e anche numero massimo di nodi interni, in un cammino dalla radice ad una foglia), il massimo numero di foglie $l(h)$ è dato dal caso in cui l'albero è completo (i nodi interni hanno due figli, eccetto i padri di foglie, che ne hanno uno). Si può facilmente verificare che in tal caso abbiamo $l(h) = 2^{h-1}$, in quanto $l(1) = 1 = 2^0$ e $l(h+1) = 2 \cdot L(h) = 2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$
- Se l'albero sintattico $A(\sigma)$ relativo alla stringa $\sigma \in L$ ha altezza $h(\sigma)$, la lunghezza di σ è allora $|\sigma| \leq 2^{h(\sigma)-1}$, e quindi $h(\sigma) \geq 1 + \log_2 |\sigma|$
- Se σ è una stringa sufficientemente lunga (in questo caso, $|\sigma| > 2^{|V_N|-1}$), ne risulta che $h(\sigma) \geq 1+\log_2 |\sigma| > |V_N|$
- Quindi, se $|\sigma| > 2^{|V_N|-1}$ esiste almeno un cammino c dalla radice ad una foglia di $A(\sigma)$ che attraversa almeno $|V_N| + 1$ nodi interni

Dimostrazione

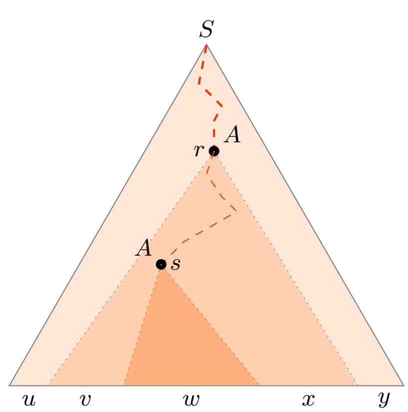
- I nodi interni di $A(\sigma)$ sono etichettati da simboli non terminali (le parti sinistre della produzioni nella derivazione di σ)
- Dato che i simboli non terminali sono $|V_N|$ mentre i nodi interni in c sono più di $|V_N|$, deve esistere (per il pigeonhole principle) un simbolo non terminale A che compare in due diversi nodi di c
- Di questi due nodi, indichiamo con r il nodo più vicino alla radice e con s il nodo associato ad A più vicino alla foglia
- Indichiamo con $r(\sigma)$ e $s(\sigma)$ le sottostringhe di σ corrispondenti alle foglie dei due sottoalberi $R(\sigma), S(\sigma)$ di $A(\sigma)$ aventi radice r e s
- Dato che s è un discendente di r, necessariamente $s(\sigma)$ è una sottostringa di $r(\sigma)$, per cui esistono due sottostringhe di v, x di σ tali che $r(\sigma) = v \cdot s(sigma) \cdot x$

Dimostrazione

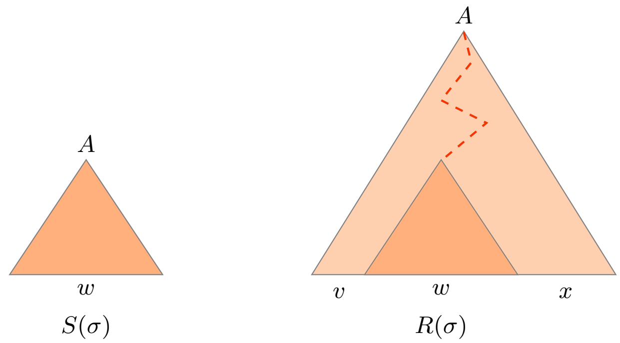
- La grammatica considerata è in CNF, per cui non sono presenti produzioni unitarie (a parte quelle relative alle foglie): di conseguenza, non può essere $s(\sigma) = r(\sigma)$, e quindi $|vx| > 1$
- Senza perdere generalità, possiamo assumere che $r(\sigma)$ sia il nodo in c più vicino alle foglie per il quale c'è un nodo sottostante $s(\sigma)$ associato allo stesso non terminale: quindi, il cammino più lungo da $r(\sigma)$ ad una foglia attraversa al più $|V_N| + 1$ nodi interni (esso stesso incluso) .
- Dalle osservazioni precedenti, ne deriva che $r(\sigma)$ ha lunghezza al più $2^{|V_N|+1-1} = 2^{|V_N|}$

Dimostrazione

Poniamo $s(\sigma) = w$ e quindi $r(\sigma) = vwx$.



Dimostrazione



Dimostrazione

- Gli alberi $R(\sigma)$ e $S(\sigma)$ possono essere sostituiti (avendo radice corrispondente allo stesso non terminale) l'uno all'altro all'interno di un qualunque albero sintattico
- Quindi, anche la stringa uwy è generata dalla grammatica (sostituendo, in $A(\sigma)$, $S(\sigma)$ a $R(\sigma)$
- Mediante la sostituzione opposta, anche la stringa $uvvwxxy$ risulta generabile.

Pumping lemma

La proprietà mostrata fornisce soltanto una condizione necessaria di un linguaggio context free: non può essere utilizzata per mostrare la contestualità di un linguaggio, ma solo per dimostrarne la non contestualità.

$$L \text{ contestuale} \implies \text{pumping lemma verificato}$$
$$\text{pumping lemma non verificato} \implies L \text{ non contestuale}$$

Pumping lemma: utilizzo come gioco a due

Se Alice vince sempre questo gioco con Bob, allora L non è CF

1. Bob sceglie un intero $n > 0$
2. Alice sceglie una stringa $z \in L$ con $\mid z \mid > n$
3. Bob divide z in cinque parti $uvwxy$ con $\mid vwx \mid \leq n$ e $\mid vx \mid \geq 1$
4. Alice sceglie un intero $i \geq 0$
5. Alice mostra a Bob che $uv^iwx^iy \notin L$

Esempio

$L = \{a^kb^kc^k | k > 0\}$ non è CF

1. Bob sceglie un intero $n > 0$
2. Alice sceglie la stringa $a^nb^nc^n \in L$
3. Bob divide z in cinque parti $uvwxy$ con $\mid vwx \mid \leq n$ e $\mid vx \mid \geq 1$. vwx o è una sequenza di occorrenze dello stesso simbolo (ad esempio a^h, $h > 0$) o è composta di due sottosequenze di stessi simboli (ad esempio a^rb^s, $r, s > 0$). Quindi, almeno uno dei simboli a, b, c non compare in vwx e quindi né in v né in x
4. Alice sceglie $i = 2$
5. Alice mostra a Bob che $uv^2wx^2y \notin L$ in quanto almeno un simbolo ha aumentato il numero di occorrenze ed almeno un altro simbolo ha un numero di occorrenze invariato

2 Proprietà dei linguaggi context free

Chiusura dei linguaggi CF: intersezione
Il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ non è context free.

Del resto, $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\}$ e $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1\}$ sono contestuali

Ma $L = L_1 \cap L_2$, da cui deriva che la classe dei linguaggi CF non è chiusa rispetto all'intersezione

Chiusura dei linguaggi CF: unione
Dati due linguaggi context free $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ e $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, siano $\mathcal{G}_1 = \langle \Sigma_1, V_{N1}, P_1, S_1 \rangle$ e $\mathcal{G}_2 = \langle \Sigma_2, V_{N2}, P_2, S_2 \rangle$ due grammatiche di tipo 2 tali che $L_1 = L(\mathcal{G}_1)$ e $L_2 = L(\mathcal{G}_2)$.

Il linguaggio $L = L_1 \cup L_2$ potrà allora essere generato dalla grammatica di tipo 2 $\mathcal{G} = \langle \Sigma_1 \cup \Sigma_2, V_{N1} \cup V_{N2} \cup \{S\}, P, S \rangle$, dove $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \longrightarrow S_1 \mid S_2\}$.

Chiusura dei linguaggi CF: concatenazione
Dati due linguaggi context free $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ e $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, siano $\mathcal{G}_1 = \langle \Sigma_1, V_{N1}, P_1, S_1 \rangle$ e $\mathcal{G}_2 = \langle \Sigma_2, V_{N2}, P_2, S_2 \rangle$ due grammatiche di tipo 2 tali che $L_1 = L(\mathcal{G}_1)$ e $L_2 = L(\mathcal{G}_2)$.

Mostriamo che il linguaggio $L = L_1 \circ L_2$ è generato dalla grammatica di tipo 2 definita come $\mathcal{G} = \langle \Sigma_1 \cup \Sigma_2, V_{N1} \cup V_{N2} \cup \{S\}, P, S \rangle$, dove $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \longrightarrow S_1 S_2\}$.

Chiusura dei linguaggi CF: iterazione
Dato un linguaggio context free $L \subseteq \Sigma^*$, sia $\mathcal{G} = \langle \Sigma, V_N, P, S \rangle$ una grammatica di tipo 2 tale che $L = L(\mathcal{G})$.

Il linguaggio $L' = L^*$ è allora generato dalla grammatica di tipo 2 $\mathcal{G}' = \langle \Sigma, V_N \cup \{S'\}, P', S' \rangle$, dove $P' = P \cup \{S' \longrightarrow SS' \mid \varepsilon\}$.

Chiusura dei linguaggi CF: complemento
La classe dei linguaggi CF non è chiusa rispetto al complemento.

Infatti, se cosìfosse, avremmo che dati due qualunque linguaggi CF L_1, L_2, il linguaggio $L = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ sarebbe CF anch'esso. Ma $L = L_1 \cap L_2$ e quindi ne risulterebbe la chiusura rispetto all'intersezione, che non sussiste.

Decidibilità di predicati su linguaggi CF
Data una grammatica $\mathcal{G}$ di tipo 2 è decidibile stabilire se $L(G) = \emptyset$.

Assumiamo che $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$ sia in CNF.

Per il pumping lemma, se esiste una stringa $z = uvwxy \in L(\mathcal{G})$ con $\mid z \mid \geq 2^{|V_N|}$, allora esiste una stringa $z' = uwy \in L(\mathcal{G})$ con $\mid z' \mid < 2^{|V_N|}$. Quindi, se il linguaggio non è vuoto, esiste una stringa in esso di lunghezza minore di $2^{|V_N|}$

Decidibilità di predicati su linguaggi CF
In una grammatica in CNF ogni applicazione di una produzione o incrementa di uno la lunghezza della forma di frase (se la produzione è del tipo $A \longrightarrow BC$) o sostituisce un terminale a un non terminale (se è del tipo $A \longrightarrow a$). Quindi, una stringa di lunghezza 2^k è generata da una derivazione di lunghezza $2^{k+1} - 1$

Per verificare se esiste una stringa di lunghezza minore di $2^{|V_N|}$ generabile, è sufficiente considerare tutte le derivazioni di lunghezza minore di $2^{|V_N|+1} - 1$ che sono, al più

$$\sum_{k=1}^{2^{|V_N|+1}-2} \mid P \mid^k = \frac{|P|^{2^{|V_N|+1}-1} - 1}{|P| - 1} = O(2^{2^{|V_N|+1}})$$

Decidibilità di predicati su linguaggi CF

Un metodo più efficiente consiste nel portare la grammatica in forma ridotta, verificando se esistono simboli fecondi. Condizione necessaria e sufficiente affinchè il linguaggio sia vuoto è che la grammatica non abbia simboli fecondi.

Decidibilità di predicati su linguaggi CF

Data una grammatica $\mathcal{G}$ di tipo 2 è decidibile stabilire se $L(G)$ è infinito.

Assumiamo che $\mathcal{G} = \langle V_T, V_N, P, S\rangle$ sia in CNF.

Per il pumping lemma, se esiste una stringa $z = uvwxy \in L(\mathcal{G})$ con $\mid z \mid \geq 2^{|V_N|}$, allora esistono infinite stringhe $z_i = uv^iwx^iy \in L(\mathcal{G})$, con $i \geq 0$, e almeno una di queste ha lunghezza $\mid z' \mid < 2^{|V_N|+1}$

Quindi, se il linguaggio è infinito, esiste una stringa in esso di lunghezza $z \in [2^{|V_N|}, 2^{|V_N|+1} - 1]$, che sarà derivata (in una grammatica in CNF) da una derivazione di lunghezza compresa tra $2^{|V_N|+1} - 1$ e $2^{|V_N|+2} - 3$

Decidibilità di predicati su linguaggi CF

È possibile allora considerare tutte le derivazioni di lunghezza compresa tra $2^{|V_N|+1} - 1$ e $2^{|V_N|+2} - 3$ che sono al più

$$\sum_{k=2^{|V_N|+1}-1}^{2^{|V_N|+2}-3} |P|^k = \frac{|P|^{2^{|V_N|+2}-2} - |P|^{2^{|V_N|+1}-1}}{|P|-1} = O(2^{2^{|V_N|+2}})$$

e verificare se qualcuna di esse dà origine ad una stringa di terminali.

Metodo più efficiente: verificare la ciclicità del grafo orientato $G = (N, A)$ derivato dalla grammatica in CNF che genera L, ponendo $N = V_N$ e introducendo, per ogni produzione $B \longrightarrow CD$, gli archi $< B, C >$ e $< B, D >$

Ambiguità

Una grammatica $\mathcal{G}$ si dice ambigua se esiste una stringa x in $L(\mathcal{G})$ derivabile con due diversi alberi sintattici.

L'albero sintattico di una stringa corrisponde in qualche modo al significato della stringa stessa, quindi l'univocità di questo albero è importante per comprendere senza ambiguità tale significato

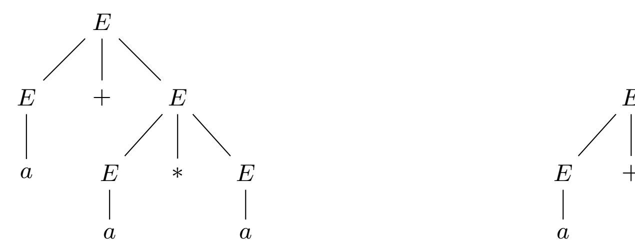
Ambiguità

Si consideri la grammatica

$$E \longrightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E/E \mid (E) \mid a.$$

Essa genera tutte le espressioni aritmetiche sulla variabile a, ma come si vede facilmente la stessa espressione può essere derivata con alberi di derivazione diversi.

Ambiguità



Ad esempio la stringa $a+a*a$ può venire derivata mediante due diversi alberi.

Ambiguità

Si consideri la grammatica

$$E \longrightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E/E \mid (E) \mid a.$$

Essa genera tutte le espressioni aritmetiche sulla variabile a, ma come si vede facilmente la stessa espressione può essere derivata con alberi di derivazione diversi.

Ambiguità

Eliminazione dell'ambiguità:

- Introduzione di parentesi
- Precedenza tra operatori

Ambiguità

Parentesi:

$$E \longrightarrow (E+E) \mid (E-E) \mid (E*E) \mid (E/E) \mid (E) \mid a.$$

I due diversi alberi di derivazione che davano origine alla stessa stringa, danno ora origine alle due stringhe

$$(a+(a*a))$$
$$((a+a)*a).$$

Ambiguità

Precedenza tra operatori:

$$\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & E+T \mid E-T \mid T \\ T & \longrightarrow & T*F \mid T/F \mid F \\ F & \longrightarrow & (E) \mid a \end{array}$$

La grammatica rappresenta nella sua struttura le relazioni di precedenza definite tra gli operatori (nell'ordine non decrescente +,-,*,/) e in tal modo consente di utilizzare le parentesi soltanto quando strettamente necessario.

Ambiguità

Riconoscimento: Data una grammatica $\mathcal{G}$ non contestuale, $\mathcal{G}$ è ambigua?

Il problema è indecidibile nel caso di CFG: non esiste quindi nessun algoritmo di decisione che, data una CFG, restituisca T se la grammatica è ambigua e F altrimenti.

Riduzioni

Indecidibilità dimostrata mediante riduzione da un altro problema di decisione $\mathcal{P}$, che si sa essere indecidibile.

Schema generale di dimostrazione:

- si vuole mostrare che il problema $\mathcal{P}_1$ è indecidibile
- si individua un altro problema $\mathcal{P}_0$ che si sa essere indecidibile
- si definisce un algoritmo $\mathcal{A}$ che trasforma ogni istanza I_0 di $\mathcal{P}_0$ in una istanza $I_1 = \mathcal{A}(I_0)$ di $\mathcal{P}_1$
- si mostra che l'istanza I_1 è positiva per $\mathcal{P}_1$ se e solo I_0 è positiva per $\mathcal{P}_0$
- si conclude che $\mathcal{P}_1$ è indecidibile: se così non fosse avremmo una algoritmo che decide $\mathcal{P}_0$, in quanto potremmo trasformare, per mezzo di $\mathcal{A}$, ogni sua istanza in una istanza corrispondente di $\mathcal{P}_1$ che potremmo, per ipotesi, risolvere

Ambiguità

Nel nostro caso:

- $\mathcal{P}_1$ è il problema di determinare, data una grammatica CF (istanza del problema), se essa è ambigua
- $\mathcal{P}_0$ è PCP (Problema delle Corrispondenze di Post):
  - data una istanza del problema, composta da:
    - un alfabeto Σ
    - due sequenze di k parole $X = x_1, \ldots, x_k$ e $Y = y_1, \ldots, y_k$ costruite su Σ

– ci si chiede se esiste una sequenza di $m \geq 1$ interi $i_1, i_2, \ldots, i_m$ in $[1, \ldots, k]$ tale che risulti

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_m}$$

Esempio di PCP

- Consideriamo le due sequenze $1, 10111, 10$ e $111, 10, 0$ costruite sull'alfabeto $\{0, 1\}$
- si può verificare che la sequenza di interi $2, 1, 1, 3$ costituisce una soluzione alla istanza di PCP considerata.
- infatti, si ottiene in un caso la sequenza $10111 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 = 101111110$ e nell'altro la stessa sequenza $10 \cdot 111 \cdot 111 \cdot 0 = 101111110$

PCP è indecidibile (dimostrazione per riduzione dal Problema della fermata)

Riduzione

- Sia $A = x_1, \ldots, x_k$ e $B = y_1, \ldots, y_k$ una istanza (generica) di PCP su un alfabeto Σ
- Consideriamo
  - l'alfabeto $\Sigma \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, con $a_i \notin \Sigma$, $i = 1, \ldots, k$
  - il linguaggio $L' = L_A \cup L_B$ definito su Σ, in cui:
    - $L_A = \{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} a_{i_m} a_{i_{m-1}} \cdots a_{i_1} \mid m \geq 1\}$
    - $L_B = \{y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_m} a_{i_m} a_{i_{m-1}} \cdots a_{i_1} \mid m \geq 1\}$.
  - la relativa grammatica CF
    $$\mathcal{G}' = \langle \{S, S_A, S_B\}, \Sigma \cup \{a_1, \ldots, a_k\}, P, S \rangle,$$
    con produzioni P, per $i = 1, \ldots, k$:
    $$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & S_A \mid S_B \\ S_A & \longrightarrow & x_1 S_A a_1 \mid \cdots \mid x_k S_A a_k \mid x_1 a_1 \mid \cdots \mid x_k a_k \\ S_B & \longrightarrow & y_1 S_B a_1 \mid \cdots \mid y_k S_B a_k \mid y_1 a_1 \mid \cdots \mid y_k a_k \end{array}$$

Esempio

Data l'istanza $([1, 10111, 10], [111, 10, 0])$, la corrispondente grammatica sarà data da:

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & A \mid B \\ A & \longrightarrow & 1Aa \mid 10111Ab \mid 10Ac \mid 1a \mid 10111b \mid 10c \\ B & \longrightarrow & 111Ba \mid 10Bb \mid 0Bc \mid 111a \mid 10b \mid 0c \end{array}$$

Equivalenza tra istanze

Se l'istanza (A, B) di PCP ha soluzione allora $\mathcal{G}'$ è ambigua.

- Sia $i_1, \ldots, i_m$ una soluzione di PCP, tale che quindi $x_{i_1} \cdots x_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1} = y_{i_1} \cdots x_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1} = \sigma$.
- La stringa σ appartiene a L' e ammette due distinti alberi sintattici, corrispondi il primo alla derivazione
  $$S \Longrightarrow S_A \Longrightarrow x_{i_1} S_A a_{i_1} \Longrightarrow x_{i_1} x_{i_2} S_A a_{i_2} a_{i_1} \stackrel{*}{\Longrightarrow} x_{i_1} \cdots x_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1},$$
  e il secondo alla derivazione
  $$S \Longrightarrow S_B \Longrightarrow y_{i_1} S_B a_{i_1} \stackrel{*}{\Longrightarrow} y_{i_1} \cdots y_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1} = x_{i_1} \cdots x_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1}.$$

- $\mathcal{G}'$ risulta dunque ambigua

Equivalenza tra istanze

Se $\mathcal{G}'$ è ambigua allora l'istanza (A, B) di PCP ha soluzione.

- Sia z una stringa di L' che ammette due distinti alberi sintattici
- Per definizione di L', deve essere $z = wa_{i_m} \cdots a_{i_1}$ per un qualche $m \geq 1$
- Inoltre, per definizione di L', z deve appartenere ad almeno uno tra L_A e L_B: assumiamo, senza perdere generalità, che $z \in L_A$
- Allora, deve essere $w = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$, e la produzione iniziale della derivazione deve essere $S \to S_A$
- Ma per definizione di $\mathcal{G}'$, l'altro modo di derivare z non può che prevedere come prima produzione $S \to S_B$, per cui $w = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$
- Ne deriva che $i_1, \ldots, i_m$ è una soluzione dell'istanza (A, B) di PCP

Esempio

Come osservato, la sequenza 2,1,1,3 costituisce una soluzione dell'istanza (positiva, quindi) di PCP.

Corrispondentemente, la stringa 101111110$caab$ può essere ottenuta dalle due derivazioni:

$$S \longrightarrow 10111Ab \longrightarrow 101111Aab \longrightarrow 1011111Aaab \longrightarrow 101111110caab$$
$$S \longrightarrow 10Bb \longrightarrow 10111Babb \longrightarrow 10111111Baab \longrightarrow 101111110caab$$

Indecidibilità

- La trasformazione definita deriva quindi da una istanza di PCP una grammatica CF che è ambigua se e solo se l'istanza ha soluzione
- Se avessimo un algoritmo che determina se una grammatica CF è ambigua, allora potremmo determinare se una istanza di PCP ha soluzione
- Ma un algoritmo che determina se una istanza di PCP ha soluzione non esiste
- Quindi, non esiste un algoritmo che determina se una grammatica CF è ambigua

Ambiguità

Esistenza di grammatica equivalente non ambigua: Un linguaggio di tipo 2 si dice inerentemente ambiguo se tutte le grammatiche che lo generano sono ambigue.

Anche il problema dell'inerente ambiguità di un linguaggio è indecidibile.