Открытая олимпиада по механике и математическому моделированию

Май, 2015 г.

Условия задач

Задача 1. Двигатель Ванкеля

Двигатель Ванкеля (рис. 1) состоит из:

1. ротора, выполненного в виде треугольника Рёло[1], насаженного на эксцентриковый вал,
2. неподвижной шестерни — статора, вокруг которого, ротор совершает планетарное движение
3. и цилиндра специального профиля, вдоль поверхности которого без отрыва скользят вершины ротора A, B, C.

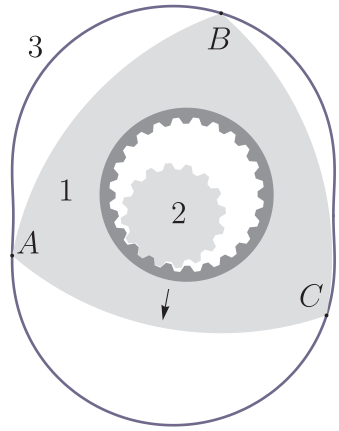

Рис. 1

Ротор отсекает от цилиндра три рабочие камеры, каждая из которых при вращении ротора претерпевает изменение объёма. Для того, чтобы эффективность двигателя была максимальна, горючая смесь в камере должна сжиматься как можно сильнее. Другими словами, отношение k наибольшего объёма рабочей камеры к её наименьшему объёму должно быть максимально.

Определите максимальное возможное значение коэффициента k в двигателе Ванкеля с погрешностью, не превышающей 1 %.

Задача 2. Космический мусор

С космодрома Байконур стартовала ракета-носитель «Союз» с космическим грузовым кораблём «Прогресс». Последняя ступень ракеты после отделения от неё космического корабля стала космическим мусором. С помощью радиолокационных средств определяются два радиус-вектора последней ступени в инерциальной системе координат с центром в центре Земли в разные моменты времени:

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 4000 \\ 3667 \\ 4529 \end{pmatrix} \text{ км}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} -3524 \\ 3549 \\ 4382 \end{pmatrix} \text{ км}.$$

1. Определите по имеющимся данным величину эксцентриситета наиболее круглой орбиты последней ступени.
2. При каких значениях эксцентриситета космический обломок будет пересекать траекторию Международной космической станции, тем самым создавая угрозу столкновения и при этом не падая на Землю?

Ответ вычислить до третьей значащей цифры. Считать, что траектории МКС и обломка лежат в одной плоскости. Поле притяжения Земли — центральное, влиянием атмосферы пренебречь, Землю считать сферой с радиусом $R = 6400$ км. Предполагать, что обломок «упал» на Землю, если его высота стала меньше $h_c = 130$ км. Орбиту МКС считать круговой с высотой $H = 350$ км.

Задача 3. Гравитационный бильярд

Материальная точка может двигаться в однородном поле тяжести внутри абсолютно упругой окружности единичного радиуса расположенной неподвижно в вертикальной плоскости. Будем называть траекторию n-периодической, если она периодическая и содержит n соударений с окружностью за период.

1. Запишите уравнения движения точки и обезразмерьте их, перейдя к переменным: $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}/\sqrt{g}$ — обезразмеренная скорость ($\boldsymbol{V}$ — скорость точки), $t = T\sqrt{g}$ — обезразмеренное время (T — время).
2. Постройте все возможные 1- и 2-периодические траектории, укажите соответствующие им начальные условия.
3. Предложите какие-нибудь траектории периода 3, 4 и 5, укажите соответствующие им начальные условия.

Приведите численные ответы с погрешностью, не превышающей 1 %.

---

[1] Фигуры постоянной ширины

Задача 4. Несколько цветов

Рассмотрим получение комплексного решения простого уравнения $f(z) = z^3 - 1 = 0$ итерационным методом Ньютона:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

1. Определите, к какому корню сойдётся метод, если в качестве начальной точки взять $z_0 = q_1 = 0{,}1159 + 0583\,i$.
2. Определите, к какому корню сойдётся метод, если в качестве начальной точки взять $z_0 = q_2 = 0{,}1161 + 0{,}583\,i$.
3. Раскрасьте точки z комплексной плоскости в единичном квадрате $|\operatorname{Re} z| \leqslant 1$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$ в несколько цветов в зависимости от корня, к которому сходится метод, если точку z взять в качестве начального приближения. Изобразите схематично рисунок.
4. Рассмотрим луч, соответствующий отрицательным вещественным числам. Методом из предыдущего пункта, он разобьётся на разноцветные отрезки. Определите к какому числу δ будет сходиться отношение длин двух соседних отрезков (при движении к $-\infty$).

Приведите ответы с погрешностью, не превышающей 1 %.

Задача 5. Ток в квадрате

Тонкий однородный проводящий квадрат имеет удельную поверхностную проводимость[2] σ. К вершинам одной стороны подключили источник тока и начали пропускать ток I. Определите напряжение между двумя другими вершинами с погрешностью, не превышающей 1 %.

Примечание. Напряжение между двумя точками равно разности потенциалов в этих точках. Потенциал φ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sigma}\sum_j I_j \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j),$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус вектор (x, y), I_j — ток, который втекает в точку $\boldsymbol{r}_j$, $\delta(r)$ — двумерная дельта-функция Дирака.

Задача 6. Мёбиус, остынь!

Из тонкого однородного материала с коэффициентом температуропроводности $a = 1$ сделана лента Мёбиуса, точки которой описываются в пространстве параметрическим уравнением:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} [v\cos(u/2) + 2]\cos u \\ [v\cos(u/2) + 2]\sin u \\ v\sin(u/2) \end{pmatrix}, \qquad u \in [-\pi,\, \pi], \quad v \in [-1,\, 1].$$

Лента теплоизолирована, и в начальный момент времени $t_0 = 0$ температура точек ленты равна:

$$T_0(u,\, v) = v(v^2 - 3)(u^3 + \pi^2 u^2 - 3\pi^2 u - \pi^4).$$

1. Определите температуру T_∞ листа после остывания.
2. Постройте график зависимости температуры точки $u = v = 0$ от времени и определите температуру этой точки при $t_1 = 0{,}5$.

Примечание. Остывание теплоизолированной ленты описывается уравнением Лапласа с неймановскими граничными условиями (поток тепла через границу равен нулю):

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \Delta T, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа, a — коэффициент температуропроводности.

[2] Если к сторонам прямоугольника с длиной l и шириной b подвести напряжение U, то сила тока составит $I = \sigma U b / l$