Открытая олимпиада по механике и математическому моделированию

Май, 2015 г.

Условия задач

Задача 1. Двигатель Ванкеля

Двигатель Ванкеля (рис. 1) состоит из:

1. ротора, выполненного в виде треугольника Рёло[1], насаженного на эксцентриковый вал,
2. неподвижной шестерни — статора, вокруг которого, ротор совершает планетарное движение
3. и цилиндра специального профиля, вдоль поверхности которого без отрыва скользят вершины ротора A, B, C.

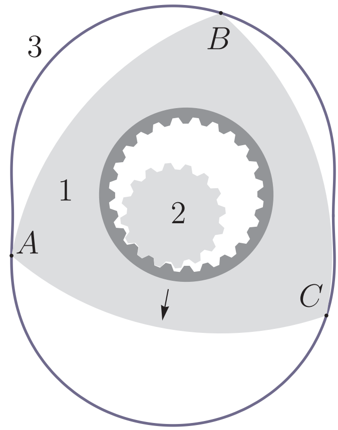

Рис. 1

Ротор отсекает от цилиндра три рабочие камеры, каждая из которых при вращении ротора претерпевает изменение объёма. Для того, чтобы эффективность двигателя была максимальна, горючая смесь в камере должна сжиматься как можно сильнее. Другими словами, отношение k наибольшего объёма рабочей камеры к её наименьшему объёму должно быть максимально.

Определите максимальное возможное значение коэффициента k в двигателе Ванкеля с погрешностью, не превышающей 1 %.

Задача 2. Космический мусор

С космодрома Байконур стартовала ракета-носитель «Союз» с космическим грузовым кораблём «Прогресс». Последняя ступень ракеты после отделения от неё космического корабля стала космическим мусором. С помощью радиолокационных средств определяются два радиус-вектора последней ступени в инерциальной системе координат с центром в центре Земли в разные моменты времени:

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 4000 \\ 3667 \\ 4529 \end{pmatrix} \text{ км}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} -3524 \\ 3549 \\ 4382 \end{pmatrix} \text{ км}.$$

1. Определите по имеющимся данным величину эксцентриситета наиболее круглой орбиты последней ступени.
2. При каких значениях эксцентриситета космический обломок будет пересекать траекторию Международной космической станции, тем самым создавая угрозу столкновения и при этом не падая на Землю?

[1] Фигуры постоянной ширины

Ответ вычислить до третьей значащей цифры. Считать, что траектории МКС и обломка лежат в одной плоскости. Поле притяжения Земли — центральное, влиянием атмосферы пренебречь, Землю считать сферой с радиусом $R = 6400$ км. Предполагать, что обломок «упал» на Землю, если его высота стала меньше $h_c = 130$ км. Орбиту МКС считать круговой с высотой $H = 350$ км.

Задача 3. Гравитационный бильярд

Материальная точка может двигаться в однородном поле тяжести внутри абсолютно упругой окружности единичного радиуса расположенной неподвижно в вертикальной плоскости. Будем называть траекторию n-периодической, если она периодическая и содержит n соударений с окружностью за период.

1. Запишите уравнения движения точки и обезразмерьте их, перейдя к переменным: $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}/\sqrt{g}$ — обезразмеренная скорость ($\boldsymbol{V}$ — скорость точки), $t = T\sqrt{g}$ — обезразмеренное время (T — время).
2. Постройте все возможные 1- и 2-периодические траектории, укажите соответствующие им начальные условия.
3. Предложите какие-нибудь траектории периода 3, 4 и 5, укажите соответствующие им начальные условия.

Приведите численные ответы с погрешностью, не превышающей 1 %.

Задача 4. Несколько цветов

Рассмотрим получение комплексного решения простого уравнения $f(z) = z^3 - 1 = 0$ итерационным методом Ньютона:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

1. Определите, к какому корню сойдётся метод, если в качестве начальной точки взять $z_0 = q_1 = 0{,}1159 + 0{,}583\, i$.
2. Определите, к какому корню сойдётся метод, если в качестве начальной точки взять $z_0 = q_2 = 0{,}1161 + 0{,}583\, i$.
3. Раскрасьте точки z комплексной плоскости в единичном квадрате $|\operatorname{Re} z| \leqslant 1$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$ в несколько цветов в зависимости от корня, к которому сходится метод, если точку z взять в качестве начального приближения. Изобразите схематично рисунок.
4. Рассмотрим луч, соответствующий отрицательным вещественным числам. Методом из предыдущего пункта, он разобьётся на разноцветные отрезки. Определите к какому числу δ будет сходиться отношение длин двух соседних отрезков (при движении к $-\infty$).

Приведите ответы с погрешностью, не превышающей 1 %.

Задача 5. Ток в квадрате

Тонкий однородный проводящий квадрат имеет удельную поверхностную проводимость[2] σ. К вершинам одной стороны подключили источник тока и начали пропускать ток I. Определите напряжение между двумя другими вершинами с погрешностью, не превышающей 1 %.

Примечание. Напряжение между двумя точками равно разности потенциалов в этих точках. Потенциал φ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sigma}\sum_j I_j \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j),$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус вектор $(x,\, y)$, I_j — ток, который втекает в точку $\boldsymbol{r}_j$, $\delta(r)$ — двумерная дельта-функция Дирака.

Задача 6. Мёбиус, остынь!

Из тонкого однородного материала с коэффициентом температуропроводности $a = 1$ сделана лента Мёбиуса, точки которой описываются в пространстве параметрическим уравнением:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} [v\cos(u/2) + 2]\cos u \\ [v\cos(u/2) + 2]\sin u \\ v\sin(u/2) \end{pmatrix}, \qquad u \in [-\pi,\, \pi], \quad v \in [-1,\, 1].$$

Лента теплоизолирована, и в начальный момент времени $t_0 = 0$ температура точек ленты равна:

$$T_0(u,\, v) = v(v^2 - 3)(u^3 + \pi^2 u^2 - 3\pi^2 u - \pi^4).$$

1. Определите температуру T_∞ листа после остывания.
2. Постройте график зависимости температуры точки $u = v = 0$ от времени и определите температуру этой точки при $t_1 = 0{,}5$.

Примечание. Остывание теплоизолированной ленты описывается уравнением Лапласа с неймановскими граничными условиями (поток тепла через границу равен нулю):

$$\frac{dT}{dt} = a^2\Delta T, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа, a — коэффициент температуропроводности.

[2] Если к сторонам прямоугольника с длиной l и шириной b подвести напряжение U, то сила тока составит $I = \sigma U b / l$

Решение задач

Задача 1. Двигатель Ванкеля

Пусть отношении радиусов шестерни статора и шестерни ротора $r : R = n : m$. Так как три точки ротора движутся по одной и той же траектории, то, следовательно, через треть полного оборота ротора система переходит сама в себя, откуда $m = 3$. А так как расстояние от оси до вершины ротора имеет два максимума и минимума за период, то $n = 2$. Таким образом, радиус шестерни статора $r = 2R/3$, а расстояние между центрами шестерён $R - r = R/3$.

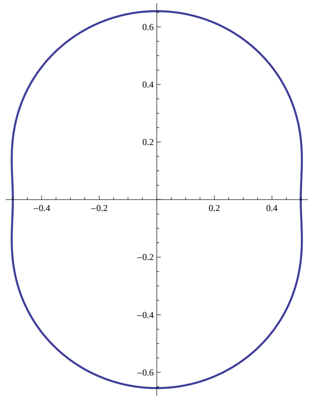

Рис. 2

Пусть ширина ротора (расстояние между вершинами) равна a, тогда расстояние от вершины ротора до его центра равно $h = a/\sqrt{3}$.

Кривая, задающая поверхность цилиндра, является гипотрохоидой[3] (рис. 2). Параметрическое уравнение гипотрохоиды:

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} (r-R)\cos\varphi + h\cos\left(\dfrac{r-R}{R}, \varphi\right) \\ (r-R)\sin\varphi - h\sin\left(\dfrac{r-R}{R}, \varphi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{3}\cos\varphi + \dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos\dfrac{\varphi}{3} \\ -\dfrac{R}{3}\sin\varphi + \dfrac{a}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\varphi}{3} \end{pmatrix}.$$

Если вершина ротора A имеет радиус-вектор $\vec{r}_A = \vec{r}(\varphi)$ то $\vec{r}_B = \vec{r}(\varphi + 2\pi)$ и $\vec{r}_C = \vec{r}(\varphi + 4\pi)$.

Максимальный объём (площадь) $S_{\max}$ камеры BC достигается при $\varphi = 3\pi/2$ (рис. 3) и равен:

$$S_{\max} = S_i - S_s - S_\triangle,$$

где S_i — площадь, которую заметает вектор $\vec{r}$ при движении вдоль гипотроходиды от B до C, S_s — площадь сегмента BCQ, $S_\triangle$ — площадь $\triangle OBC$.

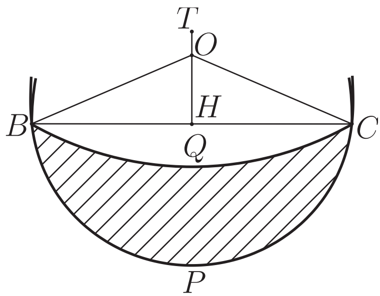

Рис. 3

[3]Гипотрохоида — плоская кривая, образуемая фиксированной точкой, находящейся на фиксированной радиальной прямой окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности.

Площадь S_i найдём как интеграл:

$$S_i = \frac{1}{2}\int\limits_B^C |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}\int\limits_{7\pi/2}^{11\pi/2} \left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| d\varphi =$$

$$= \frac{1}{54}\int\limits_{7\pi/2}^{11\pi/2} \left(3(a^2+R^2) - 4\sqrt{3}aR\cos\frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = \frac{\pi(a^2+R^2) - 3aR}{9}.$$

Площади S_s и $S_\triangle$ равны:

$$S_s = \frac{\pi}{6}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, \qquad S_\triangle = \frac{a}{2}\left(a\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{R}{3}\right).$$

Окончательно, площадь $S_{\max}$:

$$S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{18}a^2 - \frac{1}{2}aR + \frac{\pi}{9}R^2.$$

Минимальная площадь $S_{\min}$ находится аналогично. При этом пределы интегрирования в S_i от 2π до 4π. А в формуле для $S_\triangle$ длина $|OH| = a\sqrt{3}/6 + R/3$. Таким образом,

$$S_{\min} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{18}a^2 + \frac{1}{2}aR + \frac{\pi}{9}R^2.$$

Значение коэффициента k:

$$k = \frac{S_{\max}}{S_{\min}} = \frac{(3\sqrt{3}-\pi)a^2 + 9aR + 2\pi R^2}{(3\sqrt{3}-\pi)a^2 - 9aR + 2\pi R^2}$$

растёт при увеличении R и уходит на бесконечность (рис. 4), и, казалось бы, k может быть сколь угодно большим. Но при больших значениях R поверхность ротора будет при движении пересекать поверхность цилиндра. Поскольку ротор — фигура постоянной ширины a, можно потребовать, чтобы расстояние между любыми двумя точками гипотрохоиды с разностью фаз от 2π до 4π было не меньше a. Несложный анализ показывает, что ближайшие точки соответствуют углам $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 3\pi$.

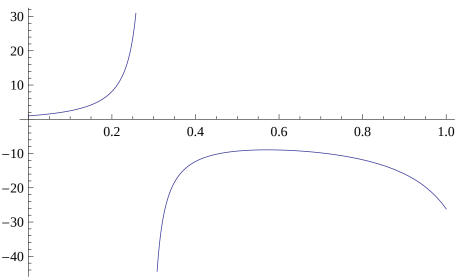

Рис. 4

$$|\vec{r}(0) - \vec{r}(3\pi)| = 2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{R}{3}\right) \geqslant a, \qquad \text{откуда} \qquad R \leqslant \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)a.$$

Окончательно:
$$k_{\max} = \frac{27 - 24\sqrt{3} + (12\sqrt{3} - 19)\pi}{12\sqrt{3} - 27 + (12\sqrt{3} - 19)\pi} \approx 14{,}72.$$

Задача 2. Космический мусор

В центральном гравитационном поле движение тел является плоским, а траектории в полярной системе координат описываются уравнением кривых второго порядка.
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$
где r — модуль радиус-вектора, p — параметр орбиты, e — эксцентриситет орбиты, θ — угол между направлением на пассивно гравитирующее тело и направлением на перицентр.

Так как имеется два значения радиус-векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, то можно записать следующую систему:
$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$
$$, \quad r_2 = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \alpha)}$$
Здесь α — угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, $\alpha = \arccos(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$.

Избавляясь в системе уравнений от θ, находим:
$$e^2 = \left(\frac{p}{r_1} - 1\right)^2 + \left(\frac{p(r_1 - r_2\cos\alpha)}{r_1 r_2 \sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}\right)^2. \tag{1}$$

В данном уравнении p параметризует различные орбиты, проходящие через $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Для нахождения наикруглейшей орбиты решим уравнение $\dfrac{d(e^2)}{dp} = 0$.

В результате получим
$$p_{min} = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_{12}^2}(1 - \cos\alpha)$$
где $r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha$. При этом
$$e(p_{min}) = \frac{|r_1 - r_2|}{r_{12}}.$$

В условиях задачи $r_1 = 7068$ км, $r_2 = 6650$ км, $\alpha = 1{,}16$. Тогда $p_{min} = 6838$ км, $e_{min} = 0{,}0556$.

В условиях задачи обломок пересекает траекторию МКС всегда, так как $r_1 = 7068$ км, что выше орбиты МКС, а $r_2 = 6650$ км, что ниже орбиты МКС.

Нужно найти такие значения эксцентриситета, когда обломок не упадет на Землю:

$$r_{min} = p_\pi = \frac{p}{1+e} \geqslant 130\text{км} \tag{2}$$

Будем изменять значение параметра и вычислять значение эксцентриситета согласно формуле (1) и проверять условие (2).

Из графика видно, что обломок не будет падать при значениях эксцентриситета $e \in [0{,}0567; 0{,}351]$ (рис. 5).

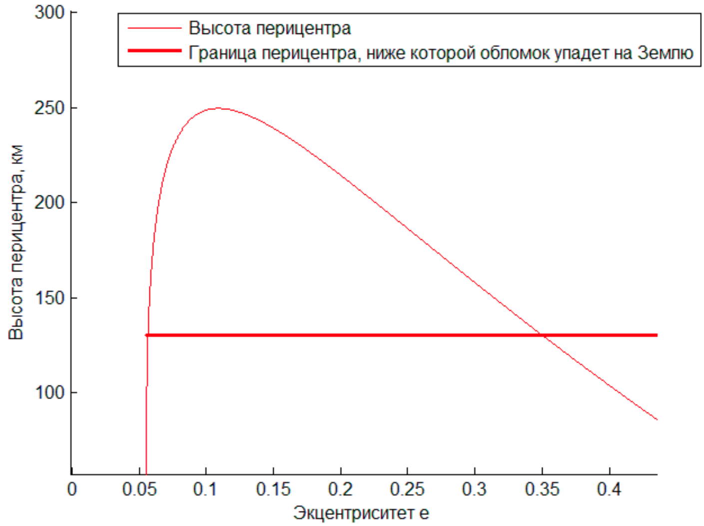

Рис. 5

Задача 3. Гравитационный бильярд

Выберем декартову систему координат, начало которой совпадает с центром окружности, ось y направлена вверх, ось x — вправо. Динамика системы описывается двумя векторными уравнениями, выражающими второй закон Ньютона и закон удара:

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dT^2} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{V}_+ = \boldsymbol{V}_- - 2(\boldsymbol{V}_- \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$$

где $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения, $\boldsymbol{V}_-$ — скорость точки до удара, $\boldsymbol{V}_+$ — скорость точки после удара, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали, направленный к центру окружности. Система консервативна, следовательно можно записать интеграл энергии:

$$\frac{m\boldsymbol{V}^2}{2} + mgy = H_0,$$

где m — масса точки, y — ордината точки, H_0 — интеграл энергии. Используя приведённые в указании формулы перейдём к безразмерным уравнениям:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -1, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}_+ = \boldsymbol{v}_- - 2(\boldsymbol{v}_- \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, \tag{4}$$

$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + y = h_0, \tag{5}$$

где $h_0 = \dfrac{H_0}{mg}$.

1. Очевидно, существует только одно семейство 1-периодических траекторий: это траектории лежащие на отрезке $-1 \leq y < 1$, причем $x \equiv 0$. Второе неравенство строгое, так как 1-периодическая траектория предполагает только один удар за период движения точки. Семейству таких траекторий соответствуют следующие начальные условия:

$$x_0 = 0, \quad v_{x0} = 0, \quad -1 < h_0 < 1.$$

2. Необходимым условием 2-периодической траектории является ее симметричность относительно оси ординат. Следовательно, координаты точек удара должны удовлетворять уравнениям:

$$x_0 = -x_1, \quad y_0 = y_1, \tag{6}$$

где индексами 0 и 1 обозначены первый и второй удар точки. В силу уравнений (3), траекторией движения между ударами является парабола (не считая вырожденных случаев):

$$x = x_0 + v_{x0}t, \quad y = y_0 + v_{y0}t - \frac{t^2}{2}, \tag{7}$$

где x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0} — начальные координаты и проекции начальной скорости точки. Отсюда следует, что возможны два невырожденных семейства 2-периодических траекторий: первое семейство представляет из себя параболу, по которой движется точка между ударами, а второе — две параболы, причем в одну сторону точка движется по одной параболе, а в другую (после удара) — по другой. Получим соответствующие начальные условия.

Пусть в начальный момент точка имеет координаты x_0, y_0 и проекции скорости v_{x0}, v_{y0}. В силу уравнений (7), в момент удара проекции скорости равны v_{x0} и $-v_{y0}$. В соответствии с (4), учитывая что $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix}$, получим:

$$\begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x0} \\ -v_{y0} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{bmatrix} (v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0),$$

где v_{x1} и v_{y1} — проекции скорости точки сразу после удара. Подставим граничные условия (6) в уравнения (7):

$$2x_0 = -v_{x0}t, \quad v_{y0} - \frac{t}{2} = 0,$$

откуда $x_0 = -v_{x0}v_{y0}$. Аналогично $-x_1 = x_0 = v_{x1}v_{y1}$. Раскроем это равенство учитывая выражения для v_{x1} и v_{y1}:

$$\begin{gathered}
x_0 = v_{x1}v_{y1} = (v_{x0} - 2x_0(v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0))\,(-v_{y0} + 2y_0(v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0)) = \\
= -v_{x0}v_{y0} + 2y_0v_{x0}(v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0) + 2v_{y0}x_0(v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0) - \\
-4x_0y_0(v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0)^2, \\
y_0v_{x0}(v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0) + v_{y0}x_0(v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0) - 2x_0y_0(v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0)^2 = 0.
\end{gathered}$$

Сокращая на $v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0 \neq 0$, получим:

$$y_0v_{x0} + v_{y0}x_0 - 2x_0y_0(v_{x0}x_0 + v_{y0}y_0) = 0.$$

Подставим $v_{x0} = -\dfrac{x_0}{v_{y0}}$:

$$\begin{gathered}
-\frac{x_0y_0}{v_{y0}} + v_{y0}x_0 - 2x_0y_0\left(-\frac{x_0^2}{v_{y0}} + v_{y0}y_0\right) = 0, \\
(1 - 2y_0^2)v_{y0}^2 = y_0(1 - 2x_0^2).
\end{gathered}$$

Будем выбирать начальные координаты точки на окружности, в таком случае их можно задать через угол α_0 — острый угол образуемый вертикалью и радиусом, проведенным в начальную точку: $x_0 = \sin\alpha_0$, $y_0 = -\cos\alpha_0$. Тогда

$$(v_{y0}^2 - \cos\alpha_0)\cos 2\alpha_0 = 0.$$

Полученное уравнение выполняется в двух случаях.

Пусть сначала $\cos 2\alpha_0 \neq 0$. Тогда $v_{y0} = \sqrt{\cos\alpha_0}$ и $v_{x0} = -\dfrac{\sin\alpha_0}{\sqrt{\cos\alpha_0}}$. Получаем следующие начальные условия выраженные через угол α_0:

$$x_0 = \sin\alpha_0, \quad v_{x0} = -\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{\cos\alpha_0}}, \quad y_0 = -\cos\alpha_0, \quad v_{y0} = \sqrt{\cos\alpha_0}.$$

Семейство траекторий соответствующее выписанным начальным условиям назовем *параболой*. На рисунке 6 приведен экземпляр из этого семейства, при этом $\alpha_0 = -\pi/3$.

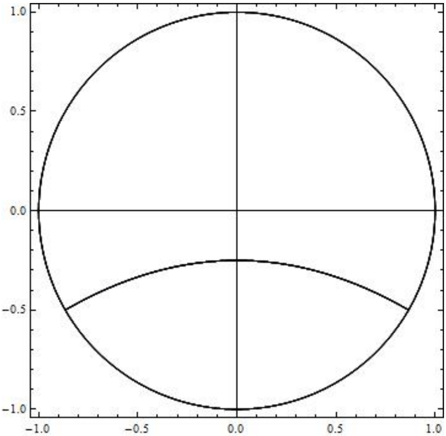

Рис. 6. Траектория из семейства парабол

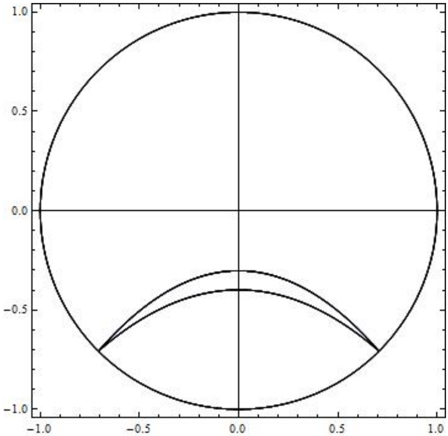

Рис. 7. Траектория из семейства параболических полумесяцев

Пусть теперь $\cos 2\alpha_0 = 0$, что эквивалентно значениям $\alpha_0 = \pm\dfrac{\pi}{4}$. Одна из проекций (пусть v_{y0}) скорости может при этом варьироваться. Границы v_{y0} можно определить из интеграла энергии (5). Энергия в начальной точке

$$h_0 = \frac{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}{2} - \cos\alpha_0.$$

В силу симметричности параболы, значению $x = 0$ соответствует $v_y = 0$. Верхняя граница v_{y0} находится из условия достижения точкой ординаты $y = 1$:

$$h_0 = \frac{v_{x0}^2}{2} + 1.$$

Нижняя граница v_{y0} равна нулю, что соответствует значению v_{x0} равному бесконечности:

$$h_0 = \frac{v_{x0}^2}{2} - \cos\alpha_0.$$

Начальные условия:

$$x_0 = \sin\alpha_0, \quad v_{x0} = -\frac{\sin\alpha_0}{v_{y0}} \quad y_0 = -\cos\alpha_0, \quad 0 < v_{y0} \le \sqrt{2 + 2\cos\alpha_0},$$

где $\alpha_0 = \pm\dfrac{\pi}{4}$. Траекторию из семейства, соответствующего выписанным начальным условиям, назовем *параболическим полумесяцем*. На рисунке 7 представлен экземпляр семейства, причем $v_{y0} = 0.9$.

Третьему, и последнему, семейству 2-периодических траекторий соответствует вырожденный случай: движение точки по оси ординат с попеременным ударом в точках $x = 0$, $y = \pm 1$. Такому семейству соответствуют начальные условия:

$$x_0 = 0, \quad v_{x0} = 0, \quad h_0 > 1.$$

3. Найдем начальные условия, задающие семейство 4-периодических траекторий, которое будем называть *чайка*. Установим следующие краевые условия:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -1,$$

где индекс 1 соответствует точке первого удара. Подставляя эти условия в уравнения (7), получим:

$$t = -\frac{x_0}{v_{x0}}, \quad -1 = y_0 + v_{y0}t - \frac{t^2}{2}.$$

Исключая t и предполагая, что в начальный момент времени скорость направлена по радиусу окружности, то есть $\dfrac{v_{y0}}{v_{x0}} = \operatorname{ctg}|\alpha_0|$, получим выражение для v_{x0}:

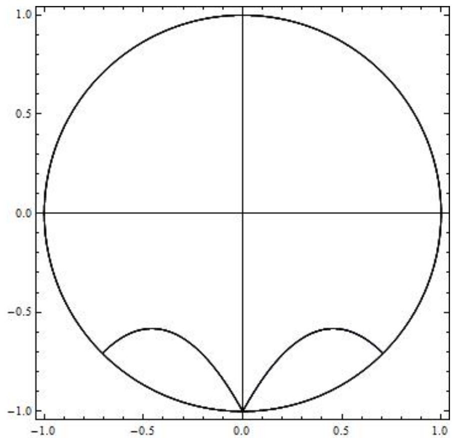

Рис. 8. Траектория из семейства чайка

$$-1 = y_0 - v_{y0}\frac{x_0}{v_{x0}} - \frac{x_0^2}{2v_{x0}^2} = y_0 - x_0 \operatorname{ctg}|\alpha_0| - \frac{x_0^2}{2v_{x0}^2},$$

$$v_{x0} = -\frac{x_0}{\sqrt{2(1 + y_0 - x_0 \operatorname{ctg}|\alpha_0|)}} = -\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{2(1 + \cos\alpha_0 - \cos\alpha_0)}} = -\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{2}}.$$

Семейству траекторий типа чайка соответствуют начальные условия

$$x_0 = \sin\alpha_0, \quad v_{x0} = -\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{2}}, \quad y_0 = -\cos\alpha_0, \quad v_{y0} = \frac{\cos\alpha_0}{\sqrt{2}}.$$

Одна из траекторий семейства представлена на рисунке 8, при этом $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Подобным (а может быть и совсем иным) образом можно составить еще множество семейств траекторий. Ниже приведены (без доказательства и пояснений) некоторые найденные замкнутые 3- 4- и 5-периодические траектории движения точки.

3-периодической траектории (рис. 9a) соответствуют начальные условия:

$$x_0 = 0, \quad v_{x0} = 0.1548, \quad y_0 = -1, \quad v_{y0} = \sqrt{1 - v_{x0}}.$$

5-периодической траектории (рис. 9b) отвечают начальные условия:

$$x_0 = 0, \quad v_{x0} = 0.509, \quad y_0 = -1, \quad v_{y0} = \sqrt{1 - v_{x0}}.$$

4-периодической траектории (рис. 9c) соответствуют начальные условия:

$$x_0 = 0, \quad v_{x0} = 1{,}00912971, \quad y_0 = -0{,}00528, \quad v_{y0} = 0.$$

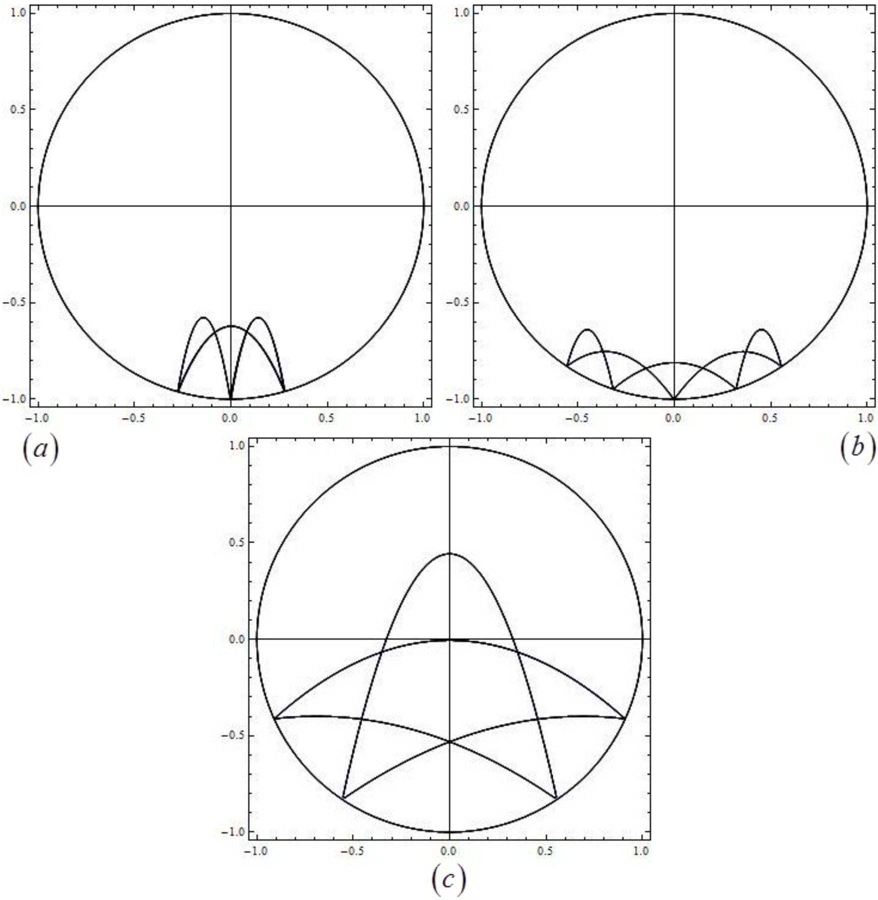

Рис. 9. Примеры траекторий: a) 3-периодическая, b) 5-периодическая, c) 4-периодическая

Задача 4. Несколько цветов

Имеем отображение

$$f(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2},$$

которое может сходиться к одному из трёх корней:

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad p_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что отображение из точки q_1 сходится к корню p_3, а из точки q_2 — к p_1.

Раскрасим карту областей притяжения корней $p_{1,2,3}$ красным, зелёным и жёлтыми цветами соответственно (рис. 10). Граница между областями представляет собой фрактал, подобные фракталы известны как «бассейны Ньютона». Отметим одну интересную фрактальную особенность «бассейнов»: в любой окрестности, в которой присутствуют два цвета, обязательно будет присутствовать и третий. На увеличенном рисунке видно, что хотя точки q_1 и q_2 находятся очень близко, они лежат в разных областях притяжения, и в их окрестности присутствуют все три цвета (рис. 11).

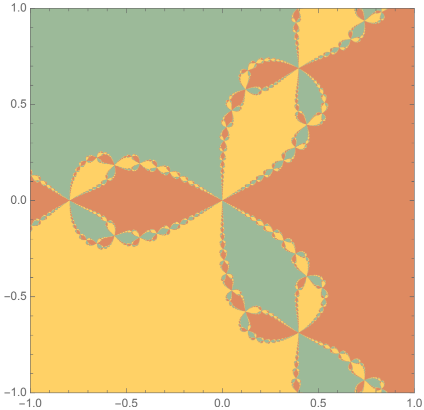

Рис. 10

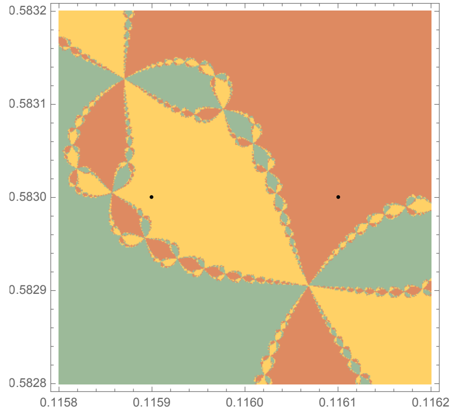

Рис. 11

Чтобы ответить на последний вопрос, заметим, что отображение f переводит действительные числа в действительные. Однако, часть точек, лежащих на действительной оси не притягиваются к корню p_1, а за конечное число шагов отображаются в ноль (функция f в нуле не определена). Таким образом, луч отрицательных чисел разбивается такими точками на интервалы, отношение длин которых при движении к $-\infty$ и требуется определить.

Поскольку нас интересуют большие по модулю z, пренебрежём единицей в функции f:

$$f(z) \approx z - \frac{z^3}{3z^2} = \frac{2}{3}z.$$

Таким образом, координаты соседних разбивающих точек относятся как 3 к 2, а значит длины самих интервалов относятся так же. Окончательно, $\delta = 3/2$.

Задача 5. Ток в квадрате

Поскольку сопротивление квадрата не зависит от длины его стороны, то можно считать квадрат единичным. Пусть ток выходит из точки (0, 0), а входит в точку (1, 0). Тогда уравнение для потенциала запишется в виде:

$$\Delta\varphi = \frac{4I}{\sigma}\Big(\delta(1-x,\, y) - \delta(x,\, y)\Big).$$

Четвёрка в этом выражении появляется потому, что интеграл дельта-функции $\delta(x{,}y)$ по квадрату $[0,\,1]\times[0,\,1]$ равен $1/4$. Обезразмерим потенциал, «забыв» про I/σ. Рассмотрим неоднородную задачу Неймана на квадрате:

$$\Delta\varphi = 4(\delta(1-x,\, y) - \delta(x,\, y)),$$
$$\varphi_x(0,\, y) = \varphi_x(1,\, y) = \varphi_y(x,\, 0) = \varphi_y(x,\, 1) = 0.$$

Решение найдём как суперпозицию функции $\psi(x,\, y)$, которая удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\psi = 4(\delta(1-x,\, y) - \delta(x,\, y)) \tag{8}$$

на всей плоскости, и функции $u(x,\, y)$, которая является решением однородной задачи Неймана:

$$\Delta u = 0, \tag{9}$$
$$u_x(0,\, y) = -\psi_x(0,\, y), \qquad u_x(1,\, y) = -\psi_x(1,\, y), \tag{10}$$
$$u_y(x,\, 0) = -\psi_y(x,\, 0), \qquad u_y(x,\, 1) = -\psi_y(x,\, 1). \tag{11}$$

Решение уравнения (8) находится достаточно легко, так как функция Грина для двумерного уравнения Пуассона хорошо известна:

$$G(x,\, y) = \frac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2). \tag{12}$$

Таким образом,

$$\psi(x,\, y) = 4G(1-x,\, y) - 4G(x,\, y) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\ln\Big((1-x)^2+y^2\Big) - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]. \tag{13}$$

Забудем пока для удобства про множитель $2/\pi$ и восстановим его в конце.

Определим граничные условия для функции u, подставив (13) в (10-11):

$$u_x(0,\, y) = -\psi_x(0,\, y) = \frac{1}{1+y^2}, \tag{14}$$

$$u_x(1,\, y) = -\psi_x(1,\, y) = \frac{1}{1+y^2}, \tag{15}$$

$$u_y(x,\, 0) = -\psi_y(x,\, 0) = 0, \tag{16}$$

$$u_y(x,\, 1) = -\psi_y(x,\, 1) = \frac{1-2x}{(1+x^2)(2-2x+x^2)}. \tag{17}$$

Рассмотрим задачу Неймана с ненулевыми граничными условиями только по одной координате:

$$\Delta v = 0, \tag{18}$$

$$v_x(0,\, y) = v_x(1,\, y) = \frac{1}{1+y^2}, \tag{19}$$

$$v_y(x,\, 0) = v_y(x,\, 1) = 0. \tag{20}$$

Будем искать решение методом разделения переменных $v(x,\, y) = f(x)g(y)$:

$$\Delta v = f''g + fg'' = 0, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = \lambda = \text{const}\,.$$

Если $\lambda = -p^2 < 0$, то

$$f(x) = F_1 \cos px + F_2 \sin px, \qquad g(y) = G_1 e^{py} + G_2 e^{-py}$$

Пытаясь выполнить (20), получаем $G_1 = G_2 = 0$, что противоречит условию (19). Следовательно $\lambda = p^2$, и

$$f(x) = F_1 e^{px} + F_2 e^{-px}, \qquad g(y) = G_1 \cos py + G_2 \sin py.$$

Условия (20) тогда запишутся как

$$g'(0) = G_2 = 0, \qquad g'(1) = -G_1 \sin p + G_2 \cos p = 0,$$

Откуда находим, что $p = n\pi$, и тогда функция v (с учётом тривиального решения для $p = 0$) будет иметь вид

$$v(x,\, y) = A_0 x + \sum_n \left(A_n e^{n\pi x} + B_n e^{-n\pi x} \right) \cos n\pi y.$$

Граничное условие (19) даст:

$$A_0 + \sum_n n\pi (A_n - B_n) \cos n\pi y = \frac{1}{1+y^2},$$

$$A_0 + \sum_n n\pi (A_n e^{n\pi} - B_n e^{-n\pi}) \cos n\pi y = \frac{1}{1+y^2}.$$

Представляя правую часть в виде гармонического ряда Фурье

$$\frac{1}{1+y^2} = \sum_n \eta_n \cos n\pi y, \qquad \eta_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \eta_n = 2 \int_0^1 \frac{\cos n\pi t}{1+t^2} dt,$$

найдём

$$A_0 = \eta_0, \qquad B_n = -A_n e^{n\pi} = \frac{\eta_n}{n\pi}\,\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1},$$

и окончательно

$$v(x,\,y) = \frac{\pi}{4}x + \sum_n \frac{\eta_n}{n\pi}\,\frac{e^{n\pi x} - e^{n\pi(1-x)}}{e^{n\pi}+1}\cos n\pi y =$$

$$= \frac{\pi}{4}x + \sum_n \frac{\eta_n}{n\pi}\,\frac{\operatorname{sh} n\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{n\pi}{2}}\cos n\pi y.$$

Аналогично решим задачу Неймана для условий по другой координате:

$$w_y(x,\,0) = 0, \qquad w_y(x,\,1) = \frac{1-2x}{(1+x^2)(2-2x+x^2)}, \qquad w_x(0,\,y) = w_x(1,\,y) = 0.$$

$$w(x,\,y) = C_0 y + \sum_m \left(C_m e^{m\pi y} + D_m e^{-m\pi y}\right)\cos m\pi x.$$

$$C_0 + \sum_m m\pi(C_m - D_m)\cos m\pi x = 0,$$

$$C_0 + \sum_m m\pi(C_m e^{m\pi} - D_m e^{-m\pi})\cos m\pi x = \frac{1-2x}{(1+x^2)(2-2x+x^2)}.$$

$$\frac{1-2x}{(1+x^2)(2-2x+x^2)} = \sum_m \xi_m \cos m\pi x,$$

$$\xi_0 = \int_0^1 \frac{(1-2t)dt}{(1-t^2)(2-2t+t^2)} = 0,$$

$$\xi_m = 2\int_0^1 \frac{(1-2t)\cos m\pi t}{(1-t^2)(2-2t+t^2)}dt = 2\big((-1)^m - 1\big)\int_0^1 \frac{\cos m\pi t}{1+t^2}dt,$$

Так как функция (17) нечётная относительно $x = 1/2$, а при $m = 2k$ гармоника $\cos m\pi t$ чётная относительно $x = 1/2$, то интеграл ξ_m будет равен нулю, и в сумму войдут только нечётные слагаемые.

$$C_0 = 0, \qquad C_m = D_m = \frac{\xi_m}{m\pi}\,\frac{1}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}},$$

$$w(x,\,y) = \sum_m \frac{\xi_m}{m\pi}\,\frac{e^{m\pi y} - e^{-m\pi y}}{e^{m\pi} + e^{-m\pi}}\cos m\pi x = \sum_m \frac{\xi_m}{m\pi}\,\frac{\operatorname{ch} m\pi y}{\operatorname{sh} m\pi}\cos m\pi x.$$

Решение однородной задачи Неймана (9-11) представится, как сумма $u = v + w$. Таким образом, решение исходной задачи:

$$\varphi(x,\, y) = \psi(x,\, y) + v(x,\, y) + w(x,\, y).$$

На рисунке 12 показаны эквипотенциальные линии и линии токов.

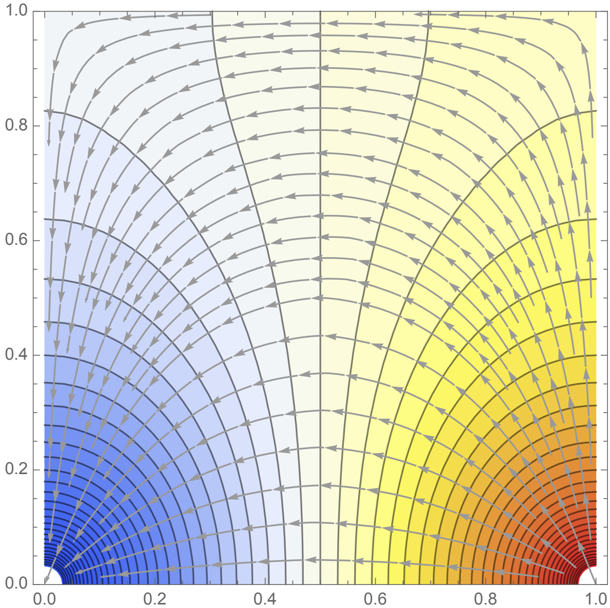

Рис. 12

Искомое напряжение $U = \varphi(0,\, 1) - \varphi(1,\, 1) = \delta\varphi = \delta\psi + \delta v + \delta w$.

$$\delta\psi = \ln 2, \qquad \delta v + \delta w = -\frac{\pi}{4} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{th}\frac{n\pi}{2} + ((-1)^n - 1)\operatorname{cth} n\pi}{n\pi} \int\limits_0^1 \frac{\cos n\pi t}{1+t^2} dt.$$

Нетрудно видеть[4], что $\delta v + \delta w = -\ln\sqrt{2}$. Вспомнив про все забытые вначале множители, окончательно получим:

$$U = \frac{\ln 2}{\pi}\frac{I}{\sigma} = 0{,}2206\frac{I}{\sigma}.$$

[4]На самом деле авторы затрудняются доказать верность этого равенства, хотя и уверены в нём, и будут благодарны, если читатель сможет доказать это утверждение и пришлёт доказательство по адресу `mipt.mmm@gmail.com`.

Отметим, что в задаче не требовалось аналитическое решение и допускался численный расчёт двумерного уравнения Пуассона. При использовании простейшей пятиточечной схемы «крест» задача сводится к расчёту токов в квадратной проволочной сетке. При уменьшении размера ячейки сетки ответ, полученный численным расчётом, будет стремиться к ответу аналитического решения.

Задача 6. Мёбиус, остынь!

1. Нам заданы криволинейные координаты: $(u^1, u^2) = (u, v)$. Определим метрический тензор:

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j}\right) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где } g = \frac{v^2}{2}\cos u + 4v\cos\frac{u}{2} + \frac{3}{4}v^2 + 4 = \det g_{ij}.$$

Элемент площади в такой метрике: $dS = \sqrt{g}\, du\, dv$.

По условию задачи лист однороден и теплоизолирован, тогда при его остывании $\int T\, dS = \text{const}$.

$$T_\infty = \frac{\int T_0(u, v)\sqrt{g}\, du\, dv}{\int \sqrt{g}\, du\, dv} = \frac{495{,}384}{25{,}413} = 19{,}493.$$

2. Как известно, лапласиан в криволинейных координатах записывается следующим образом:

$$\Delta T = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g} g^{ik}\frac{\partial T}{\partial u^k}\right).$$

Отметим, что после подстановки метрики, в выражении лапласиана помимо вторых производных T_{uu} и T_{vv} будут присутстовать первые: T_u и T_v, а смешанная производная — не будет.

Граничные условия вдоль границы листа $v = \pm 1$ соответствуют условиям Неймана:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial v}\right|_{v=-1} = \left.\frac{\partial T}{\partial v}\right|_{v=1} = 0.$$

Граничные условия вдоль $u = \pm\pi$ являются периодическими и «перевёрнутыми»:

$$T(-\pi, v) = T(\pi, -v).$$

Если программировать решение уравнения теплопроводности самостоятельно, то такие «перевёрнутые» периодические граничные условия легко учесть. В подавляющем большинстве математических пакетов такие условия напрямую задать нельзя. Однако, есть способ привести их к обычным, «неперевёрнутым». Для этого «обойдём» ленту ещё раз ($\pi \leqslant u \leqslant 3\pi$), тогда периодические условия «перевернутся» ещё раз и станут обычными:

$$T(-\pi, v) = T(3\pi, v).$$

Начальные условия:

$$T_0(u,\, v) = \begin{cases} T_0(u,\, v), & \text{если } -\pi < u \leqslant \pi, \\ T_0(u - 2\pi,\, -v), & \text{если } \pi < u \leqslant 3\pi. \end{cases}$$

Конечно, в этом случае количество вычислений будет удвоено, зато они могут быть проведены стандартными методами математических пакетов.

Приведём требуемый график (рис. 13) и определим температуру $T_{0,5}(0,\, 0) = 29{,}1943$.

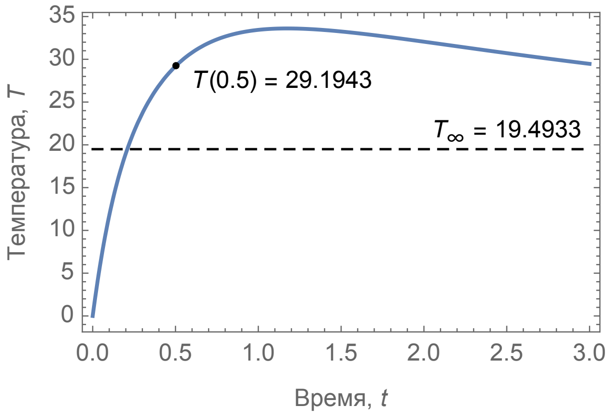

Рис. 13