**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОТОНАЛЬНОГО СИГНАЛА И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОЦЕННКИ ПАРАМЕТРОВ ЕГО ГАРМОНИК**

Омский государственный университет путей сообщения (ОмГУПС), г. Омск,   
Российская Федерация

*Выступающий: Васеева Т. В.*

*Руководитель: к.т.н. Альтман Е. А.*

**Слайд 1 – Титульный лист**

Здравствуйте. Тема диссертационных исследований – СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОТОНАЛЬНОГО СИГНАЛА И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОЦЕННКИ ПАРАМЕТРОВ ЕГО ГАРМОНИК.

| **ДОКЛАД** | **КОММЕНТАРИЙ** |
| --- | --- |
| **Слайд 2 – Цель, объект и предмет исследования.**  **Целью работы**  является совершенствование методов оценки параметров гармоник многотонального сигнала.  **Объектом исследования** являются методы оценки параметров гармоник в силовых электрических сетях.  **Предметом исследования** является точность и быстродействие численных методов оценки параметров гармоник. |  |
| **Слайд 3 – Задачи исследования.**   1. Анализ математических основ объекта исследования и формулировка математической модели многотонального сигнала. 2. Изучение и экспериментальное исследование алгоритмов оценки параметров гармоник. 3. Развитие математической модели многотональных сигналов в части расчета точности оценки амплитуды применительно к используемому при оценке параметров гармоник подходу, связанному с применением оконных функций. 4. Разработка численных методов для оценки параметров гармоник, позволяющих достичь расчетной точности для амплитуды гармоники. 5. Разработка алгоритмов для эффективного выполнения численных методов из предыдущей задачи. 6. Разработка комплекса программа для анализа и доработки алгоритмов оценки параметров гармоник многотональных сигналов. |  |
| **Слайд 4 – Научная новизна работы.**   1. Дополнена математическая модель спектра многотонального сигнала полученными и экспериментально проверенными формулами для нахождения границы Крамера-Рао при оценке амплитуды гармоники для взвешенного оконной функцией сигнала. 2. Предложен численный метод нахождения оптимальной несмещенной оценки амплитуды гармоники на основе корреляционного анализа, а также предложена его быстрая реализация на основе алгоритмов разряженного БПФ. 3. Реализован комплекс программ для экспериментальной проверки полученных в работе формул и анализа алгоритмов оценки параметров гармоник многотональных сигналов. |  |
| **Слайд 5 – Практическая значимость работы.**   1. Выведена формула для нахождения границы Крамера-Рао при применении оконной функции, которая позволяет повысить эффективность научных исследований различных алгоритмов обработки сигналов с применением оконных функций, заменив моделирование алгоритма с применением различных окон расчетом по предложенной формуле. 2. Предложенный численный метод, вместе с его быстрой реализацией, позволяют повысить точность и достоверность результатов измерительных приборов для электрических сетей. 3. Разработанный комплекс программ позволяет проводить научные исследования в области цифровой обработки сигналов и используется в учебном процессе. |  |
| **Математическая модель многотонального сигнала.**  **Слайд 6 – Ограничение ДПФ**  **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\Maximum_DFT.jpg** | Рисунок, на котором показана проблема нахождения гармоники сигнала с частотой, находящейся между дискретными гармониками ДПФ.  Выражение для ДПФ ставит в соответствие отсчетам сигнала , отсчетов спектра . Выражение, описывающее ДПФ, имеет следующий вид:  БПФ является оптимальным с точки зрения быстродействия алгоритмом, реализующим ДПФ. |
| **Слайд 7 - Частота Найквиста**  **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\DFT constraint.JPG**  Гармонический сигнал может быть адекватно представлен дискретными отсчетами, если его частота не превышает половины частоты дискретизации. Эта частота называется частотой Найквиста (Nyquist frequency)  *,* | В зависимости от соотношения между частотой дискретизируемого гармонического сигнала и частотой Найквиста возможны три случая:   * Если частота гармонического сигнала меньше частоты Найквиста, то дискретные отсчеты позволяют правильно восстановить аналоговый сигнал (рисунок a). * Если частота гармонического сигнала равна частоте Найквиста, то дискретные отсчеты позволяют восстановить аналоговый сигнал с той же частотой, но амплитуда и фаза восстановленного сигнала (он показан пунктирной линией) могут быть искажены (рисунок б). * Если частота гармонического сигнала больше частоты Найквиста, восстановленный по дискретным отсчетам аналоговый сигнал (он показан пунктирной линией) будет также гармоническим, но с иной частотой (рисунок в). Данный эффект носит название появление ложных частот. (aliasing) |
| **Слайд 8 – Теорема Котельникова.**  Любой сигнал , спектр которого не содержит составляющих с частотами выше некоторого значения , может быть без потерь информации представлен своими дискретными отсчетами , взятыми с интервалом , удовлетворяющим следующему неравенству:  .  .  *.* | Данная теорема называется теоремой Котельникова (в зарубежных источниках – теоремой Найквиста, или теоремой дискретизации (sampling theorem)).  Восстановление исходного непрерывного сигнала по набору его дискретных отсчетов производится по следующей формуле  Данная формула представляет собой разложение сигнала в ряд по системе функций , называемой базисом Котельникова:  *.* |
| **Слайд 9 –** Наложение окна на спектр сигнала  **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\Signal_noise.pngC:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\Spectrum with Rectangular Window.png**  **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\Kaiser window.png** | Рисунок, показывающий, что происходит со спектром гармоники при наложении на него окна. Лучше в двух частях **–** с прямоугольным окном и окном Кайзера.  Окно Кайзера (=14):  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.  .  *.*  *.*  Прямоугольное окно:  .  .  *.*  *.* |
| **Слайд 10 – Граница Крамера-Рао (CRLB – Cramer-Rao lower bound).**  Максимально возможную точность оценки параметров спектральных составляющих можно определить с помощью неравенства Крамера-Рао. В зарубежной литературе чаще встречается термин Cramer-Rao lower bound (CRLB), что переводится как «нижняя граница Крамера-Рао». Несмещенная оценка, которая достигает нижней границей Крамера-Рао, называется эффективной. Она обеспечивает наименьшую среднеквадратичную ошибку среди несмещенных оценок и называется minimum variance unbiased (MVU) – оценкой с «минимальной несмещенной дисперсией». Алгоритмы для получения minimum variance unbiased (MVU) оценки должны оценивать параметры на основе функции максимального правдоподобия (maximum likelihood estimation, MLE).  На практике под оценкой минимальной дисперсии будем понимать дисперсию, задаваемую нижней границей Крамера-Рао (CRLB).  В общем случае граница Крамера-Рао определяется формулой (1).  где– оцениваемый параметр, – дисперсия (variance) несмещенной оценки параметра, – среднее значение, – функция правдоподобия.  Формулу (1) можно записать через информацию Фишера, получим формулу (2):  где – количество информации по Фишеру, получаемой в результате наблюдения. | **Диспе́рсия** случайной величины **–** мера разброса значений случайной величины относительно еe математического ожидания.  **Математи́ческое ожида́ние –** одно из важнейших понятий в теории вероятностей, означающее среднее значение случайной величины.  **Смещенная оценка** показателя заранее говорит о тенденции к ошибке.  Рассмотрим оценку параметра . Оптимальная оценка определяется, каксреднее значение равно оценке параметра и сводится кминимуму дисперсии. Эта оценка называется несмещенной оценкой минимальной дисперсии (MVU).   |  |  | | --- | --- | | , | (1) |  |  |  | | --- | --- | | , | (2) | |
| **Слайд 11 – Частная формула Границы Крамера-Рао (CRLB)**  При наблюдении за дискретным сигналом, на который накладывается аддитивный белый гауссовский шум (AWGN), формула (1) может быть записана в виде формулы (3):  где – среднее квадратичное отклонение шума,  – номер отчета,  – число отсчетов в дискретном сигнале,   – наблюдаемый сигнал. | |  |  | | --- | --- | | , | (3) |   AWGN – additive white Gaussian noise.  Аддитивный белый гауссовский шум (AWGN)) – вид мешающего воздействия в канале передачи информации. Характеризуется равномерной, то есть одинаковой на всех частотах, спектральной плотностью мощности, нормально распределенными временными значениями и аддитивным способом воздействия на сигнал. Наиболее распространенный вид шума, используемый для расчета и моделирования систем радиосвязи. |
| **Слайд 12 – Формула исходного сигнала и дисперсии оценки амплитуды гармоники.**  В нашем случае наблюдаемый сигнал описывается формулой (4):  где – амплитуда сигнала, – частота, – фаза, – белый гауссовский шум.  Этот сигнал содержит три неизвестных параметра (амплитуду, частоту и фазу).  Если пренебречь неопределенностью частоты и фазы получим формулу (5) для дисперсии оценки амплитуды гармоники в аддитивном белом гауссовском шуме: | |  |  | | --- | --- | |  | (4) |  |  |  | | --- | --- | | . | (5) | |
| **Слайд 13 – Влияние оконной функции на точность оценки.**  После применения оконной функции исследуемый сигнал будет записан в виде формулы (6):  где – оконная функция.  Рассмотрим слагаемые в формуле (6) по отдельности. Слагаемое будет представлять собой нормально распределенную случайную величину с нулевым математическим ожиданием.  Для всех отклонение от нуля будет нормально распределено со средним отклонением равным . Среднее квадратичное отклонение в каждой точке будет равно . Усредняя по всем получаем, что дисперсия случайной величины будет равна формуле (7): | |  |  | | --- | --- | |  | (6) |  |  |  | | --- | --- | | . | (7) | |
| **Слайд 14 – Нахождения дисперсии результата оценки амплитуды.**  Теперь, для нахождения дисперсии результата оценки амплитуды, мы можем воспользоваться формулой (3) и подставить в нее новую дисперсию шума.  Рассмотрим знаменатель правой части формулы. Для упрощения выкладок воспользуемся трансформацией параметра при определении границы Крамера-Рао. Если величина, которую нужно оценить, связана с величиной, для которой известна граница Крамера-Рао, соотношением, то границу Крамера-Рао для величины можно найти по формуле (8): | |  |  | | --- | --- | | , | (3) |  |  |  | | --- | --- | | , | (3) |  |  |  | | --- | --- | | , | (8) | |
| **Слайд 15 –** **Значение нулевой гармоники сигнала для оконной функции.**  Умножение сигнала на оконную функцию приводит к сворачиванию каждой гармоники сигнала со спектром оконной функции. В случае единственной гармоники ее амплитуда умножается на нулевую гармонику спектра оконной функции. Нулевая гармоника сигнала это постоянная составляющая, ее значение для оконной функции можно найти по формуле (верхняя формула, слева):  Далее рассмотрим формулу справа.  где – амплитуда гармоники, полученная в результате оценки умноженного на оконную функцию сигнала, – нулевая гармоника сигнала,  – амплитуда гармоники исходного сигнала.  В нашем случае величина  с известной границей Крамера-Рао это , величина  с неизвестной границей это | .  . |
| **Слайд 16 –** **Математическая модель для оценки точности нахождения амплитуды гармоники.**  Собирая все полученные соотношения вместе, получим формулу для дисперсии оценки амплитуды гармоники при использовании оконной функции (9): | |  |  | | --- | --- | | . | (9) |   В ряде экспериментов, проводимых в публикациях точность оценки амплитуды гармоник сигналов при использовании оконных функций была ниже теоретической, определяемая как граница Крамера-Рао. |
| **Слайд 17 – Коэффициент окна.**  Из итоговой (9) формулы на предыдущем слайде выделим вторую часть. Введем обозначение «коэффициент окна»:  Данный коэффициент показывает, во сколько раз ухудшится точность оценки амплитуды гармоники при использовании окна. | |  |  | | --- | --- | |  | (10) |   – оконная функция |
| **C:\Users\sun\Downloads\Cramer_Rao.png** | Рисунки по точности методов с границей. Где-то строили такие графики. Можно взять у Димы |
| **Слайд 18 – Изменение дисперсии шума после наложении на него окна**  Далее представлены результаты моделирования.  Для проверки правильности рассмотренных выкладок мы промоделировали измерение амплитуды гармоник в однотональном сигнале, т. е на входе присутствует один синусоидальный сигнал.  На графике показано изменение дисперсии шума после наложении на него окна Кайзера с параметром kaiser\_beta=5. Сплошной линией отображены результаты моделирования, штриховой – результаты расчета по формуле (7), представленной на слайде.  Из графика видно, что линии дисперсий практически совпадают. | |  |  | | --- | --- | | . | (7) |     Рис. 1.  Изменение дисперсии шума после наложении на него окна |
| **Слайд 19 – Зависимость дисперсии оценки амплитуды от параметра окна.**  На слайде видим формулу (9) для дисперсии оценки амплитуды гармоники при использовании оконной функции:  Сплошной линией показаны результаты расчеты по формуле (9), штриховой – результаты моделирования. При увеличении числа тестов линии становятся все более похожими. Результаты моделирования приведены на рисунке 2. | |  |  | | --- | --- | | . | (9) |     Рис. 2. Зависимость дисперсии оценки амплитуды от параметра окна |
| **Слайд 20 – Зависимость дисперсии оценки амплитуды от дисперсии шума.**  На слайде видим формулу (9) для дисперсии оценки амплитуды гармоники при использовании оконной функции:  Сплошной линией приведены результаты расчетов по формуле (9), штриховой – результаты моделирования, линия из точек – граница Крамера-Рао. | |  |  | | --- | --- | | . | (9) |     Рис. 3. Зависимость дисперсии оценки амплитуды от дисперсии шума |
| **Слайд & – Вывод**  Оценку точности результатов для данных, которые сами по себе являются оценкой точности, выполнить на прямую довольно затруднительно. Во всех трех экспериментах с увеличением числа опытов экспериментальные кривые сглаживались и становились визуально не отличимые от расчетных данных.  Эксперименты были проведены при различных входных параметрах (число точек, амплитуда, частота и фаза сигналов, дисперсия шума или коэффициент окна). Ни в одном случае не было зафиксировано отклонение результатов эксперимента от результатов, полученных по предложенной формуле.  Таким образом, результаты моделирования алгоритма оценки амплитуды гармоники в условиях шума при наложении оконной функции подтверждают полученные соотношения для оценки дисперсии оценки амплитуды. |  |

**Васеева** Татьяна Валериевна, аспирант, [tvvaseeva@gmail.com](mailto:tvvaseeva@gmail.com)

**Альтман** Евгений Анатольевич, к.т.н., доцент, [AltmanEA@gmail.com](mailto:AltmanEA@gmail.com)