**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОТОНАЛЬНОГО СИГНАЛА И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОЦЕННКИ ПАРАМЕТРОВ ЕГО ГАРМОНИК**

Омский государственный университет путей сообщения (ОмГУПС), г. Омск,   
Российская Федерация

*Выступающий: Васеева Т. В.*

*Руководитель: к.т.н. Альтман Е. А.*

|  |  |
| --- | --- |
| **ДОКЛАД** | **КОММЕНТАРИЙ** |
| **Слайд 1 – Титульный лист** | Здравствуйте. Тема диссертационных исследований – СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОТОНАЛЬНОГО СИГНАЛА И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОЦЕННКИ ПАРАМЕТРОВ ЕГО ГАРМОНИК. |
| **Слайд 2 – Цель, объект и предмет исследования.**  **Целью работы**  является совершенствование методов оценки параметров гармоник многотонального сигнала.  **Объектом исследования** являются методы оценки параметров гармоник в силовых электрических сетях.  **Предметом исследования** является точность и быстродействие численных методов оценки параметров гармоник. |  |
| **Слайд 3 – Задачи исследования.**   1. Анализ математических основ объекта исследования и формулировка математической модели многотонального сигнала. 2. Изучение и экспериментальное исследование алгоритмов оценки параметров гармоник. 3. Развитие математической модели многотональных сигналов в части расчета точности оценки амплитуды применительно к используемому при оценке параметров гармоник подходу, связанному с применением оконных функций. 4. Разработка численных методов для оценки параметров гармоник, позволяющих достичь расчетной точности для амплитуды гармоники. 5. Разработка алгоритмов для эффективного выполнения численных методов из предыдущей задачи. 6. Разработка комплекса программа для анализа и доработки алгоритмов оценки параметров гармоник многотональных сигналов. |  |
| **Слайд 4 – Научная новизна работы.**   1. Дополнена математическая модель спектра многотонального сигнала полученными и экспериментально проверенными формулами для нахождения границы Крамера-Рао при оценке амплитуды гармоники для взвешенного оконной функцией сигнала. 2. Предложен численный метод нахождения оптимальной несмещенной оценки амплитуды гармоники на основе корреляционного анализа, а также предложена его быстрая реализация на основе алгоритмов разряженного БПФ. 3. Реализован комплекс программ для экспериментальной проверки полученных в работе формул и анализа алгоритмов оценки параметров гармоник многотональных сигналов. |  |
| **Слайд 5 – Практическая значимость работы.**   1. Выведена формула для нахождения границы Крамера-Рао при применении оконной функции, которая позволяет повысить эффективность научных исследований различных алгоритмов обработки сигналов с применением оконных функций, заменив моделирование алгоритма с применением различных окон расчетом по предложенной формуле. 2. Предложенный численный метод, вместе с его быстрой реализацией, позволяют повысить точность и достоверность результатов измерительных приборов для электрических сетей. 3. Разработанный комплекс программ позволяет проводить научные исследования в области цифровой обработки сигналов и используется в учебном процессе. |  |
| **Математическая модель многотонального сигнала.**  **Слайд 6 – Ограничение ДПФ.**   |  |  | | --- | --- | | **Модель сигнала:**  . | **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\Maximum_DFT.jpg**  Рис.1 – Случай несовпадения максимума ДПФ и максимума спектра гармоник | | **ДПФ:**  . | | Математическая модель простого гармонического сигнала усложняется при применении цифровой обработки сигналов. В частности, ДПФ позволяет точно определить только частоты аналоговых сигналов, частота которых строго кратна основной гармоники. В противном случае мы получаем погрешность, которая можно видеть на рисунке 1.  Если представить аналоговый сигнал в дискретном виде, то  максимум гармоники сигнала () и максимум дискретных гармоник (.) будут не совпадать.  Есть ли условия, при которых они совпадают? Когда частота сигнала кратна частоте основной гармоники БПФ.  Данная проблема существует уже давно. Но до сих пор не существует оптимального решения.  1. На слайде представлена формула модели сигнала .  Каждая гармоника характеризуется амплитудой . Частотой и начальной фазой . Исследуемый сигнал содержит шум .  2. После Быстрого Преобразования Фурье на графике получаем дискретные гармоники , , и амплитудные гармоники , ,.  3. – разность между дискретными гармониками.  На слайде изображена проблема нахождения гармоники сигнала при амплитудной гармоники . Гармоника находится между дискретными гармониками , , .  Из-за разницы в частоте, мы получаем – разность между амплитудными гармониками. – разность между фазовыми гармониками ().  Исследуемая математическая модель сигнала показывает соотношение между реальными гармониками и теми, которые мы получаем после использования БПФ. |
| **Слайд 7 – Влияние оконной функции** | Ограничения интервала цифровой обработки сигналов с использованием оконных функций связана с невозможностью анализа информации на бесконечном интервале времени.  Если исследовать преобразование Фурье прямоугольного импульса, то мы увидим значительные боковые лепестки в спектре.  Изменяя параметр , мы можем изменять форму окна из прямоугольного (, т. е. оконное преобразование отсутствует).  Спектр сигнала без боковых лепестков с окном Кайзера, при . Низкие боковые лепестки (, как правило, между и ).  Спектр сигнала более сглаженный представлен на слайде. |
| **Слайд 8 – Методы интерполирования спектра** | Список методов интерполирования спектра: метод Якобсена, два метода Квина, два метода Маклеода, метод Грэндка, алгоритм параболической интерполяции, алгоритм интерполяции Гаусса, алгоритм, рекомендованный в ГОСТ 30804.4.7-2013, метод корреляционных функций, Модернизированный метод корреляционных функций. Распространенным методом является метод Якобсена.  Он основан на определении максимума спектра на основании трех точек БПФ.  Для всех интерполяционных методов порядковый номер максимальной частоты и частота гармоник определяются формулам:  – разность между дискретными гармониками.  – дискретная гармоника.  Частота или – это спектральный пик.  – циклическая частота.  – частота дискретизации.  – размер ДПФ. |
| **Слайд 9 – Методы экстраполирования сигнала**   |  |  | | --- | --- | | **Сигнал (частота=5.2)**  **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\signal.png** | **Спектр**  **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\spectrum.png** | | **Экстраполированный сигнал**  **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\interpolated_signal.png** | **Спектр экстр. сигнала**  **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\spectrum_of_interpolated_signal.png** | | На слайде представлено 4 графика:   1. Сигнал с частотой . 2. Сглаженный спектр сигнала без боковых лепестков. 3. Экстраполированный сигнал с добавленными нулевыми частотами. 4. Спектр экстраполированного сигнала с боковыми лепестками.   Методы экстраполяции позволяют предсказывать сигнал за пределами известного диапазона. Решение задачи экстраполяции рассмотрено на основе граничного случая, т. е. когда неизвестный отрезок находится в конце заданного интервала времени. |
| **Слайд 10 – Общая формула границы Крамера-Рао**   |  |  | | --- | --- | | **Граница Крамера-Рао:**  **(6)**  – оцениваемый параметр;  – дисперсия (variance) несмещенной оценки параметра.  **Информация Фишера:**  **(7)**  – среднее значение;  – функция правдоподобия. | **Общая оценка границы Крамера-Рао для сигналов в белом Гауссовом шуме:**  **(8)**  – **среднее значение.**  и – оцениваемые параметры;  – белый шум Гаусса;  – детерминированный сигнал.  **(9)** | | Максимально возможную точность оценки параметров спектральных составляющих можно определить с помощью неравенства Крамера-Рао. В зарубежной литературе чаще встречается термин Cramer-Rao lower bound (CRLB), что переводится как «нижняя граница Крамера-Рао». Несмещенная оценка, которая достигает нижней границей Крамера-Рао, называется эффективной. Она обеспечивает наименьшую среднеквадратичную ошибку среди несмещенных оценок и называется minimum variance unbiased (MVU) – оценкой с «минимальной несмещенной дисперсией». Алгоритмы для получения minimum variance unbiased (MVU) оценки должны оценивать параметры на основе функции максимального правдоподобия (maximum likelihood estimation, MLE).  На практике под оценкой минимальной дисперсии будем понимать дисперсию, задаваемую нижней границей Крамера-Рао (CRLB).  Общая формула Граница Крамера-Рао, которая выражается через информацию Фишера (6).  Общая оценка границы Крамера-Рао для сигналов в белом Гауссовом шуме выражается через формулу (9) |
| **Слайд 11 – Неравенство Крамера-Рао для амплитуды, частоты и фазы гармоник.**  **Матрица Фишера:**  **(10)**  **(11)**  **(12)**  **(13)** | Формула границы Крамера-Рао демонстрирует зависимость от оцениваемого параметра .  Частная формула Границы Крамера-Рао для параметров гармоник сигнала неравенство Крамера-Рао выглядит следующим образом (11-13), где .  Неравенство Крамера-Рао уменьшается для частоты сигнала по мере увеличения отношения сигнала к шуму, граница уменьшается . |
| **Слайд 12 – Нахождения дисперсии результата оценки амплитуды** | Теперь, для нахождения дисперсии результата оценки амплитуды, мы можем воспользоваться формулой  ,  (9) и подставить в нее новую дисперсию шума, где .  Рассмотрим знаменатель правой части формулы. Для упрощения выкладок воспользуемся трансформацией параметра при определении границы Крамера-Рао. Если величина, которую нужно оценить, связана с величиной, для которой известна граница Крамера-Рао, соотношением, то границу Крамера-Рао для величины можно найти по формуле (8).   |  |  | | --- | --- | | , | (8) |   Умножение сигнала на оконную функцию приводит к сворачиванию каждой гармоники сигнала со спектром оконной функции. В случае единственной гармоники ее амплитуда умножается на нулевую гармонику спектра оконной функции. Нулевая гармоника сигнала это постоянная составляющая, ее значение для оконной функции можно найти по формуле (верхняя формула, слева):  Далее рассмотрим формулу справа.  где – амплитуда гармоники, полученная в результате оценки умноженного на оконную функцию сигнала, – нулевая гармоника сигнала,  – амплитуда гармоники исходного сигнала.  В нашем случае величина с известной границей Крамера-Рао это , величина с неизвестной границей это |
| **Слайд 13 – Математическая модель для оценки точности нахождения амплитуды гармоники**   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  | | --- | --- | | . | **(19)** |   где – среднее квадратичное отклонение шума;  – номер отчета;  – число отсчетов в дискретном сигнале,   – наблюдаемый сигнал.  – амплитуда гармоники, полученная в результате оценки умноженного на оконную функцию сигнала | **Введем обозначение коэффициента окна:**   |  |  | | --- | --- | |  | **(20)** |   – оконная функция  Данный коэффициент показывает, во сколько раз ухудшится точность оценки амплитуды гармоники при использовании окна. | | В ряде экспериментов, проводимых в публикациях точность оценки амплитуды гармоник сигналов при использовании оконных функций, была ниже теоретической, определяемая как граница Крамера-Рао.  Из итоговой формулы выделим вторую часть и введем новое обозначение «коэффициент окна». |
| **Слайд 14 – Практическая точность методов**   |  |  | | --- | --- | | Рис.2 – Дисперсия при оценке основной частоты напряжения | Рис.3 – Графики зависимостей смещения основной частоты от уровня шума | | На графике справа – зависимость смещения оценки основной частоты от уровня шума. На  графике справа не отражен диапазон от минус 30 дБ до минус 10 дБ, где интерполяционные методы имеют значительное смещение и не вписываются в данный график, в отличие от метода корреляционных функций.  На графике слева представлена зависимость дисперсии при оценке основной частоты от уровня шума. Представлены методы: граница Крамера-Рао, метод корреляционных функций, второй метод Квина, метод Маклеода (5 точек).  При повышении уровня шума погрешность интерполяционных методов возрастает и методы перестают работать. Хорошие результаты у второго метода Квина и метода Маклеода по пяти точкам. Преимущество метода Маклеода является более простая реализация алгоритма, в отличие от метода Квина. |
| **Слайд 15 – Оценка дисперсии амплитуды гармоники**   * Оценку точности результатов для данных, которые сами по себе являются оценкой точности, выполнить на прямую довольно затруднительно. Во всех трех экспериментах с увеличением числа опытов экспериментальные кривые сглаживались и становились визуально не отличимые от расчетных данных. * Эксперименты были проведены при различных входных параметрах (число точек, амплитуда, частота и фаза сигналов, дисперсия шума или коэффициент окна). Ни в одном случае не было зафиксировано отклонение результатов эксперимента от результатов, полученных по предложенной формуле. * Таким образом, результаты моделирования алгоритма оценки амплитуды гармоники в условиях шума при наложении оконной функции подтверждают полученные соотношения для оценки дисперсии оценки амплитуды. |  |
| **Слайд 16 – Экспериментальная проверка формулы для оценки дисперсии**   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Рис. 1. Изменение дисперсии шума после наложении на него окна   |  |  | | --- | --- | | . | **(21)** | | Рис. 2. Зависимость дисперсии оценки амплитуды от параметра окна   |  |  | | --- | --- | | . | **(22)** | | | Рис. 3. Зависимость дисперсии оценки амплитуды от дисперсии шума   |  |  | | --- | --- | | . | **(23)** | | | | Далее представлены результаты моделирования.  **1.**Для проверки правильности рассмотренных выкладок мы промоделировали измерение амплитуды гармоник в одно тональном сигнале, т. е на входе присутствует один синусоидальный сигнал.  На графике показано изменение дисперсии шума после наложении на него окна Кайзера с параметром kaiser\_beta=5. Сплошной линией отображены результаты моделирования, штриховой – результаты расчета по формуле (21), представленной на слайде.  Из графика видно, что линии дисперсий практически совпадают.  **2.** На слайде видим формулу (22) для дисперсии оценки амплитуды гармоники при использовании оконной функции:  Сплошной линией показаны результаты расчеты по формуле (22), штриховой – результаты моделирования. При увеличении числа тестов линии становятся все более похожими. Результаты моделирования приведены на рисунке 2.  **3.** На слайде видим формулу (23) для дисперсии оценки амплитуды гармоники при использовании оконной функции:  Сплошной линией приведены результаты расчетов по формуле (23), штриховой – результаты моделирования, линия из точек – граница Крамера-Рао. |
| **Слайд 17 – Дополненная математическая модель многотонального сигнала** |  |
| **Слайд 18 – Интерполирование спектра**  (24)  (25)   |  |  | | --- | --- | |  | **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\set_of_standards.jpg** | | Для того чтобы сформировать набор эталонов необходимо определить базовую точку, вокруг которой будут создаваться эталоны (обозначим ее через ). Эта точка выбирается из ближайших целых значений основной частоты измеряемого напряжения. Также необходимо определить шаг, с которым будут формироваться эталоны (обозначим его через ). Затем на промежутке необходимо произвести формирование эталонов. Для этого спектр оконной функции необходимо сдвигать вправо и влево с шагом в пределе заданного промежутка и определять точек вокруг пика.  На рисунке справа показан пример построения наборов эталонов (здесь представлено три набора). Первый набор не имеет смещения относительно базовой точки. Второй набор смещен влево относительно базовой точки на величину шага формирования эталона . Третий набор смещен вправо относительно базовой точки на величину шага формирования эталона . Также для первого набора эталона определены его отсчеты БПФ.  На рисунке справа изображен метод Якобсена. |
| **Слайд 19 – Двойное интерполирование сигнала и спектра** | **Двойное интерполирование сигнала и спектра:**   1. Сигнал с частотой . 2. Сглаженный спектр сигнала без боковых лепестков. 3. Экстраполированный сигнал с добавленными нулевыми частотами ().   , – коэффициенты интерполирования.   1. Спектр с двойной интерполяцией () сигнала с боковыми лепестками. |
| **Слайд 20 – Алгоритм поиска гармоник**    Рис. 9 – ГСА алгоритма поиска гармоник. | В результате анализа был предложен метод нахождения параметров всех гармоник многотонального сигнала в соответствии с моделью сигнала в первой главе. Алгоритм поиска гармоник представлен на рисунке: 9. На основании алгоритма зарегистрирована программа для расчета гармоник и интергармоник тока и напряжения электрической сети прямым корреляционным методом с использованием быстрых алгоритмов обработки сигналов.  Основные три части программы **–** это блок поиска гармоник, блок оценки параметров гармоник и блок моделирования алгоритмов поиска и оценки параметров.  Блок поиска гармоник находит частоты гармоник исходя из заданных коэффициентов определяющих минимальные уровень гармоник и расстояние между гармониками. Эти коэффициенты могут определяться в процессе моделирования.  Блок оценки параметров используют алгоритмы, описанные во второй и третьей главах.  Предложенная программа была проверена на данных измерений сигналов в электрических сетях, полученных другими исследователями и показала свою работоспособность. |
| |  |  | | --- | --- | | **C:\Users\sun\Documents\ДИССЕРТАЦИЯ\МОЯ ДИССЕРТАЦИЯ\Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\Presentation\images\Computer_program.jpg** |  |   **Слайд 21 – Расчет гармоник и интергармоник.** | На слайде представлено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Функционал в зарегистрированной программе состоит из алгоритма нахождения гармоник и расчета параметров гармоник. |
| **Слайд 22 – Метод нахождения параметров гармоник.** | Методы, основанные на интерполировании смежных гармоник, позволяют достичь высокой точности. Однако они не позволяют достичь точности оптимальной несмещенной оценки.  Оценка параметров гармоник прямым корреляционным методом подразумевает вычисление корреляций сигнала с гармоническим сигналом различной частоты. Расстояние между частот эталонных гармоник и количество вычисляемых корреляций можно определить с помощью границы Крамера-Рао. |
| **Слайд 23 – Использование корреляции** | Для нахождения параметров промежуточных гармоник с помощью быстрых алгоритмов корреляции используется формула (28).  На рисунке 7 показано использование корреляции. Из-за диапазона в частотах гармоник ДПФ и , мы получаем дополнительные амплитудные гармоники , которые показаны на рисунке синей пунктирной линией со звездочками. |
| **Слайд 24 – Pruned FFT** | Применение алгоритмов БПФ началось после публикации работы Кули и Тьюки в 1965 году. Для вычисления БПФ используют алгоритм Кули-Тьюки в котором умножаются поворачивающие множители и вычисляются строки БПФ.  Рассмотрим матрицу с шириной столбцов и высотой столбцов . Алгоритм Pruned FFT (усеченное БПФ) – не требует 1-й стадии вычислений, сложность алгоритма составляет , сложность алгоритма растет линейно с ростом . Наиболее распространенный случай, когда используется Pruned FFT – это свертки с нулевым заполнением, 50% равны нулю. |
| **Слайд – Анализ быстродействия**   |  |  | | --- | --- | | **1.Быстрая корреляция**    Высокое быстродействие при малом коэффициенте интерполирования | **2. Прямой метод**    Не подходит для встроенных систем | | **3. Pruned БПФ**    Относительно высокое быстродействие, слабо зависит от коэффициента интерполирования | **4.Sparse FFT**    Не работает с интерполированными сигналами | | **1.** **Быстрая корреляция**  Высокое быстродействие при малом коэффициенте интерполирования .  Расчет корреляции можно ускорить, используя теорему о корреляции:  – обратное дискретное преобразование Фурье. Если число членов велико, данный метод БПФ дает результат быстрее, чем непосредственный расчет взаимной корреляции.  **2.** **Прямой метод**  CUDA (Compute Unified Device Architecture) – программно-аппаратная архитектура параллельных вычислений, которая позволяет существенно увеличить вычислительную производительность благодаря использованию графических процессоров фирмы NVIDIA.  Интерес представляет реализация вычисления БПФ с ее использованием, анализ путей повышения эффективности вычислений. Не подходит для встроенных систем (встроенная система является электронным устройством, которое включает в своей реализации компьютер). Для программирования в технологии CUDA используется синтаксис языков Си, C++ и Фортран, выполнимые на графических процессорах NVIDIA.  **3. Pruned БПФ**  Рассматривали на предыдущем слайде.  Относительно высокое быстродействие, слабо зависит от коэффициента интерполирования .  **4. Sparse FFT**  Алгоритм Sparse FFT (разряженное БПФ) показывает высокое быстродействие, время работы меньше, чем при использовании интерполяционных методов. Неработоспособность в сочетании с методом дополнения исходного сигнала, основная идея алгоритма – поиск наибольших гармоник.  Не работает с интерполированными сигналами. |
| **Слайд 26 – Список опубликованных работ** |  |
| **Слайд 30 – Основные положения, выносимые на защиту**   1. Дополнение к математической модели многотонального сигнала в виде формулы, позволяющей определить дисперсию оценки амплитуды гармоники, отличающемуся от известной границы Крамера-Рао учетом изменения дисперсии после применения оконных функций. 2. Основанный на корреляционном анализе численный метод, позволяющий определить параметры гармоник сигналов с точностью, определяемой уточненной границей Крамера-Рао, включающий в себя вычислительно-эффективную схему расчета корреляций и отличающийся от известных методов отсутствием потерь в точности результатов при интерполировании параметров гармоник. 3. Комплекс программ для анализа и построения алгоритмов оценки параметров многотональных сигналов. |  |

**Васеева** Татьяна Валериевна, аспирант, [tvvaseeva@gmail.com](mailto:tvvaseeva@gmail.com)

**Альтман** Евгений Анатольевич, к.т.н., доцент, [AltmanEA@gmail.com](mailto:AltmanEA@gmail.com)