Destination λ-calculus

Thomas Bagrel

March 20, 2024

1 Term and value syntax

var, x, y	Term-level variable name
k	Index for ranges

$\mathtt{hdn}$, $\mathtt{h}$	$::=$			Hole or destination name ($\mathbb{N}$)
	$\mid$	$\mathtt{h}+\mathtt{h}'$	M	Sum
	$\mid$	$\mathtt{max}(\mathtt{H})$	M	Maximum of a set of holes
$\mathtt{hdns}$, $\mathtt{H}$	$::=$			Set of hole names
	$\mid$	$\{\mathtt{h}_1, \ldots, \mathtt{h}_{\mathsf{k}}\}$		
	$\mid$	$\mathtt{H}_1 \cup \mathtt{H}_2$	M	Union of sets
	$\mid$	$\mathtt{H} \pm \mathtt{h}$	M	Increase all names from $\mathtt{H}$ by $\mathtt{h}$.
	$\mid$	$\mathtt{hnames}(\Gamma)$	M	Hole names of a context (requires $\mathtt{ctx\_NoVar}(\Gamma)$)
	$\mid$	$\mathtt{hnames}(\mathsf{C})$	M	Hole names of an evaluation context
term, t, u	$::=$			Term
	$\mid$	v		Value
	$\mid$	x		Variable
	$\mid$	$\mathsf{t} \succ \mathsf{u}$		Application
	$\mid$	$\mathsf{t} \,;\, \mathsf{u}$		Pattern-match on unit
	$\mid$	$\mathsf{t} \succ \mathbf{case}_{m} \{ \mathsf{Inl}\, \mathsf{x}_1 \mapsto \mathsf{u}_1 ,\ \mathsf{Inr}\, \mathsf{x}_2 \mapsto \mathsf{u}_2 \}$		Pattern-match on sum
	$\mid$	$\mathsf{t} \succ \mathbf{case}_{m} (\mathsf{x}_1 , \mathsf{x}_2) \mapsto \mathsf{u}$		Pattern-match on product
	$\mid$	$\mathsf{t} \succ \mathbf{case}_{m}\, \mathrm{E}^{n}\, \mathsf{x} \mapsto \mathsf{u}$		Pattern-match on exponential
	$\mid$	$\mathsf{t} \succ \mathbf{map}\ \mathsf{x} \mapsto \mathsf{u}$		Map over the right side of ampar t
	$\mid$	$\mathbf{to}_{\ltimes}\ \mathsf{t}$		Wrap t into a trivial ampar
	$\mid$	$\mathbf{from}_{\ltimes}\ \mathsf{t}$		Extract value from trivial ampar
	$\mid$	$\mathbf{alloc}$		Return a fresh "identity" ampar object
	$\mid$	$\mathsf{t} \triangleleft ()$		Fill destination with unit
	$\mid$	$\mathsf{t} \triangleleft \mathsf{Inl}$		Fill destination with left variant
	$\mid$	$\mathsf{t} \triangleleft \mathsf{Inr}$		Fill destination with right variant
	$\mid$	$\mathsf{t} \triangleleft \mathrm{E}^{m}$		Fill destination with exponential constructor
	$\mid$	$\mathsf{t} \triangleleft (,)$		Fill destination with product constructor
	$\mid$	$\mathsf{t} \triangleleft (\lambda \mathsf{x}\ {}_{m} \mapsto \mathsf{u})$		Fill destination with function
	$\mid$	$\mathsf{t} \triangleleft\!\bullet\, \mathsf{u}$		Fill destination with root of ampar u
	$\mid$	$\mathsf{t}[\mathsf{x} := \mathsf{v}]$	M	
val, v	$::=$			Term value
	$\mid$	$-\mathtt{h}$		Hole
	$\mid$	$+\mathtt{h}$		Destination
	$\mid$	$()$		Unit
	$\mid$	$\lambda^{\mathsf{v}} \mathsf{x}\ {}_{m} \mapsto \mathsf{t}$		Lambda abstraction
	$\mid$	$\mathsf{Inl}\, \mathsf{v}$		Left variant for sum
	$\mid$	$\mathsf{Inr}\, \mathsf{v}$		Right variant for sum
	$\mid$	$\mathrm{E}^{m}\, \mathsf{v}$		Exponential
	$\mid$	$(\mathsf{v}_1 , \mathsf{v}_2)$		Product
	$\mid$	${}_{\mathtt{H}}\langle \mathsf{v}_1 , \mathsf{v}_2 \rangle$		Ampar
	$\mid$	$\mathsf{v} \pm \mathtt{h}$	M	Rename hole names inside v by shifting them by $\mathtt{h}$

ectx, C	::=		Evaluation context
	| $\square$		Identity
	| $\mathsf{C} \succ \mathsf{u}$		Application
	| $\mathsf{v} \succ \mathsf{C}$		Application
	| $\mathsf{C}\ ;\ \mathsf{u}$		Pattern-match on unit
	| $\mathsf{C} \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\, \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto \mathsf{u}_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto \mathsf{u}_2\, \}$		Pattern-match on sum
	| $\mathsf{C} \succ \mathbf{case}_{m}\ (x_1\ ,\ x_2) \mapsto \mathsf{u}$		Pattern-match on product
	| $\mathsf{C} \succ \mathbf{case}_{m}\ \mathrm{E}^{n}\, x \mapsto \mathsf{u}$		Pattern-match on exponential
	| $\mathsf{C} \succ \mathbf{map}\ x \mapsto \mathsf{u}$		Map over the right side of ampar
	| $\mathbf{to}_{\ltimes}\ \mathsf{C}$		Wrap into a trivial ampar
	| $\mathbf{from}_{\ltimes}\ \mathsf{C}$		Extract value from trivial ampar
	| $\mathsf{C} \triangleleft ()$		Fill destination with unit
	| $\mathsf{C} \triangleleft \mathsf{Inl}$		Fill destination with left variant
	| $\mathsf{C} \triangleleft \mathsf{Inr}$		Fill destination with right variant
	| $\mathsf{C} \triangleleft \mathrm{E}^{m}$		Fill destination with exponential constructor
	| $\mathsf{C} \triangleleft (,)$		Fill destination with product constructor
	| $\mathsf{C} \triangleleft (\lambda x\ {}_{m} \mapsto\ \mathsf{u})$		Fill destination with function
	| $\mathsf{C} \triangleleft\!\bullet\, \mathsf{u}$		Fill destination with root of ampar
	| $\mathsf{v} \triangleleft\!\bullet\, \mathsf{C}$		Fill destination with root of ampar
	| ${}^{\mathrm{op}}_{\mathtt{H}}\langle \mathsf{v}_1\ ,\ \mathsf{C}$		Open ampar. Only new addition to term shapes
	| $\mathsf{C} \circ \mathsf{C}'$	M	Compose evaluation contexts
	| $\mathsf{C}[\mathsf{h} \coloneqq_{\mathtt{H}}\ \mathsf{v}]$	M	Fill h with value v (that may contain holes)

2 Type system

type, T, U	::=		Type
	| $\mathsf{1}$		Unit
	| $\mathsf{T}_1 \oplus \mathsf{T}_2$		Sum
	| $\mathsf{T}_1 \otimes \mathsf{T}_2$		Product
	| $!^{m}\,\mathsf{T}$		Exponential
	| $\mathsf{T}_1 \ltimes \mathsf{T}_2$		Ampar type (consuming T_2 yields T_1)
	| $\mathsf{T}_1\ {}_{m_1}\!\!\to \mathsf{T}_2$		Function
	| $\lfloor \mathsf{T} \rfloor^{m}$		Destination

mode, m, n	::=		Mode (Semiring)
	| pa		Pair of a multiplicity and age
	| ☠		Error case (incompatible types, multiplicities, or ages)
	| $m_1 \cdot \ldots \cdot m_{\mathsf{k}}$	M	Semiring product

mul, p	::=		Multiplicity (first component of modality)
	| 1		Linear. Neutral element of the product
	| ω		Non-linear. Absorbing for the product
	| $p_1 . \ldots . p_{\mathsf{k}}$	M	Semiring product

age, a	::=		Age (second component of modality)
	| ν		Born now. Neutral element of the product
	| $\uparrow$		One scope older
	| ∞		Infinitely old / static. Absorbing for the product
	| $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{\mathsf{k}}$	M	Semiring product

bndr, b	::=		Type assignment to either variable, destination or hole
	| $x :_{m} \mathsf{T}$		Variable
	| $+\mathsf{h} :_{m} \lfloor \mathsf{T} \rfloor^{n}$		Destination (m is its own modality; n is the modality for values it accepts)
	| $-\mathsf{h} : \mathsf{T}^{n}$		Hole (n is the modality for values it accepts, it doesn't have a modality on its own)

ctx, Γ, Δ, Π	::=		Typing context
	| $\{\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_{\mathsf{k}}\}$		List of bindings
	| $m \cdot \Gamma$	M	Multiply each binding by m
	| $\Gamma_1 \uplus \Gamma_2$	M	Sum contexts Γ_1 and Γ_2. Duplicates/incompatible elements will give bindings with
	| $-\Gamma$	M	Transforms every dest binding into a hole binding (requires `ctx_DestOnly` Γ)

$\boxed{\Gamma \Vdash \mathsf{v} : \mathsf{T}}$ *(Typing of values (raw))*

$$\textsc{TyR-val-H}\quad \frac{}{\{-\mathtt{h} : \mathsf{T}^{1\nu}\} \Vdash -\mathtt{h} : \mathsf{T}}$$

$$\textsc{TyR-val-D}\quad \frac{\mathtt{ctx\_Compatible}\ \Gamma\ \ +\mathtt{h} :_{1\nu} \lfloor \mathsf{T} \rfloor^{n}}{\Gamma \Vdash +\mathtt{h} : \lfloor \mathsf{T} \rfloor^{n}}$$

$$\textsc{TyR-val-U}\quad \frac{}{\{\,\} \Vdash () : \mathbf{1}}$$

$$\textsc{TyR-val-F}\quad \frac{\mathtt{ctx\_DestOnly}\ \Delta \qquad \Delta \uplus \{\mathsf{x} :_{m} \mathsf{T}_1\} \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T}_2}{\Delta \Vdash \lambda^{\mathsf{v}} \mathsf{x}_{\,m} \mapsto \mathsf{t} : \mathsf{T}_1 {}_{m}\!\!\to \mathsf{T}_2}$$

$$\textsc{TyR-val-L}\quad \frac{\Gamma \Vdash \mathsf{v} : \mathsf{T}_1}{\Gamma \Vdash \mathsf{Inl}\,\mathsf{v} : \mathsf{T}_1 \oplus \mathsf{T}_2}$$

$$\textsc{TyR-val-R}\quad \frac{\Gamma \Vdash \mathsf{v} : \mathsf{T}_2}{\Gamma \Vdash \mathsf{Inr}\,\mathsf{v} : \mathsf{T}_1 \oplus \mathsf{T}_2}$$

$$\textsc{TyR-val-P}\quad \frac{\Gamma_1 \Vdash \mathsf{v}_1 : \mathsf{T}_1 \qquad \Gamma_2 \Vdash \mathsf{v}_2 : \mathsf{T}_2}{\Gamma_1 \uplus \Gamma_2 \Vdash (\mathsf{v}_1\,,\,\mathsf{v}_2) : \mathsf{T}_1 \otimes \mathsf{T}_2}$$

$$\textsc{TyR-val-E}\quad \frac{\Gamma \Vdash \mathsf{v} : \mathsf{T}}{n \cdot \Gamma \Vdash \mathrm{E}^{n}\,\mathsf{v} : !^{n}\,\mathsf{T}}$$

$$\textsc{TyR-val-A}\quad \frac{\begin{array}{c}\mathtt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1\\ \mathtt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2\\ \mathtt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_3\\ \mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2\\ \mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_3\\ \mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_2\ \Delta_3\\ \Delta_1 \uplus (-\Delta_3) \Vdash \mathsf{v}_1 : \mathsf{T}_1\\ \Delta_2 \uplus \Delta_3 \Vdash \mathsf{v}_2 : \mathsf{T}_2\end{array}}{\Delta_1 \uplus \Delta_2 \Vdash {}_{\mathtt{hnames}(-\Delta_3)}\langle \mathsf{v}_1 \,,\, \mathsf{v}_2 \rangle : \mathsf{T}_1 \ltimes \mathsf{T}_2}$$

$\boxed{\Pi \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T}}$ *(Typing of terms)*

$$\textsc{Ty-term-Val}\quad \frac{\mathtt{ctx\_DestOnly}\ \Delta \qquad \Delta \Vdash \mathsf{v} : \mathsf{T}}{\Delta \vdash \mathsf{v} : \mathsf{T}}$$

$$\textsc{Ty-term-Var}\quad \frac{\mathtt{ctx\_Compatible}\ \Pi\ \ \mathsf{x} :_{1\nu} \mathsf{T}}{\Pi \vdash \mathsf{x} : \mathsf{T}}$$

$$\textsc{Ty-term-App}\quad \frac{\Pi_1 \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T}_1 \qquad \Pi_2 \vdash \mathsf{u} : \mathsf{T}_1 {}_{m}\!\!\to \mathsf{T}_2}{m \cdot \Pi_1 \uplus \Pi_2 \vdash \mathsf{t} \succ \mathsf{u} : \mathsf{T}_2}$$

$$\textsc{Ty-term-PatU}\quad \frac{\Pi_1 \vdash \mathsf{t} : \mathbf{1} \qquad \Pi_2 \vdash \mathsf{u} : \mathsf{U}}{\Pi_1 \uplus \Pi_2 \vdash \mathsf{t}\ ;\ \mathsf{u} : \mathsf{U}}$$

$$\textsc{Ty-term-PatS}\quad \frac{\begin{array}{c}\mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Pi_2\ \{\mathsf{x}_1 :_{m} \mathsf{T}_1\}\\ \mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Pi_2\ \{\mathsf{x}_2 :_{m} \mathsf{T}_2\}\\ \Pi_1 \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T}_1 \oplus \mathsf{T}_2\\ \Pi_2 \uplus \{\mathsf{x}_1 :_{m} \mathsf{T}_1\} \vdash \mathsf{u}_1 : \mathsf{U}\\ \Pi_2 \uplus \{\mathsf{x}_2 :_{m} \mathsf{T}_2\} \vdash \mathsf{u}_2 : \mathsf{U}\end{array}}{m \cdot \Pi_1 \uplus \Pi_2 \vdash \mathsf{t} \succ \mathsf{case}_{m}\,\{\,\mathsf{Inl}\,\mathsf{x}_1 \mapsto \mathsf{u}_1\,,\ \mathsf{Inr}\,\mathsf{x}_2 \mapsto \mathsf{u}_2\,\} : \mathsf{U}}$$

$$\textsc{Ty-term-PatP}\quad \frac{\begin{array}{c}\mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Pi_2\ \{\mathsf{x}_1 :_{m} \mathsf{T}_1\}\\ \mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Pi_2\ \{\mathsf{x}_2 :_{m} \mathsf{T}_2\}\\ \mathtt{ctx\_Disjoint}\ \{\mathsf{x}_1 :_{m} \mathsf{T}_1\}\ \{\mathsf{x}_2 :_{m} \mathsf{T}_2\}\\ \Pi_1 \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T}_1 \otimes \mathsf{T}_2\\ \Pi_2 \uplus \{\mathsf{x}_1 :_{m} \mathsf{T}_1, \mathsf{x}_2 :_{m} \mathsf{T}_2\} \vdash \mathsf{u} : \mathsf{U}\end{array}}{m \cdot \Pi_1 \uplus \Pi_2 \vdash \mathsf{t} \succ \mathsf{case}_{m}\,(\mathsf{x}_1\,,\,\mathsf{x}_2) \mapsto \mathsf{u} : \mathsf{U}}$$

$$\textsc{Ty-term-PatE}\quad \frac{\begin{array}{c}\mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Pi_2\ \{\mathsf{x} :_{m \cdot n} \mathsf{T}\}\\ \Pi_1 \vdash \mathsf{t} : !^{n}\,\mathsf{T}\\ \Pi_2 \uplus \{\mathsf{x} :_{m \cdot n} \mathsf{T}\} \vdash \mathsf{u} : \mathsf{U}\end{array}}{m \cdot \Pi_1 \uplus \Pi_2 \vdash \mathsf{t} \succ \mathsf{case}_{m}\,\mathrm{E}^{n}\,\mathsf{x} \mapsto \mathsf{u} : \mathsf{U}}$$

$$\textsc{Ty-term-Map}\quad \frac{\begin{array}{c}\mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Pi_2\ \{\mathsf{x} :_{1\nu} \mathsf{T}_2\}\\ \Pi_1 \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T}_1 \ltimes \mathsf{T}_2\\ 1\!\uparrow \cdot \Pi_2 \uplus \{\mathsf{x} :_{1\nu} \mathsf{T}_2\} \vdash \mathsf{u} : \mathsf{U}\end{array}}{\Pi_1 \uplus \Pi_2 \vdash \mathsf{t} \succ \mathsf{map}\ \mathsf{x} \mapsto \mathsf{u} : \mathsf{T}_1 \ltimes \mathsf{U}}$$

$$\textsc{Ty-term-ToA}\quad \frac{\Pi \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T}}{\Pi \vdash \mathsf{to}_{\ltimes}\,\mathsf{t} : \mathsf{T} \ltimes \mathbf{1}}$$

$$\textsc{Ty-term-FromA}\quad \frac{\Pi \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T} \ltimes \mathbf{1}}{\Pi \vdash \mathsf{from}_{\ltimes}\,\mathsf{t} : \mathsf{T}}$$

$$\textsc{Ty-term-Alloc}\quad \frac{}{\{\,\} \vdash \mathsf{alloc} : \mathsf{T} \ltimes \lfloor \mathsf{T} \rfloor^{1\nu}}$$

$$\textsc{Ty-term-FillU}\quad \frac{\Pi \vdash \mathsf{t} : \lfloor \mathbf{1} \rfloor^{n}}{\Pi \vdash \mathsf{t} \triangleleft () : \mathbf{1}}$$

$$\textsc{Ty-term-FillL}\quad \frac{\Pi \vdash \mathsf{t} : \lfloor \mathsf{T}_1 \oplus \mathsf{T}_2 \rfloor^{n}}{\Pi \vdash \mathsf{t} \triangleleft \mathsf{Inl} : \lfloor \mathsf{T}_1 \rfloor^{n}}$$

$$\textsc{Ty-term-FillR}\quad \frac{\Pi \vdash \mathsf{t} : \lfloor \mathsf{T}_1 \oplus \mathsf{T}_2 \rfloor^{n}}{\Pi \vdash \mathsf{t} \triangleleft \mathsf{Inr} : \lfloor \mathsf{T}_2 \rfloor^{n}}$$

$$\textsc{Ty-term-FillP}\quad \frac{\Pi \vdash \mathsf{t} : \lfloor \mathsf{T}_1 \otimes \mathsf{T}_2 \rfloor^{n}}{\Pi \vdash \mathsf{t} \triangleleft (,) : \lfloor \mathsf{T}_1 \rfloor^{n} \otimes \lfloor \mathsf{T}_2 \rfloor^{n}}$$

$$\textsc{Ty-term-FillE}\quad \frac{\Pi \vdash \mathsf{t} : \lfloor !^{n'}\,\mathsf{T} \rfloor^{n}}{\Pi \vdash \mathsf{t} \triangleleft \mathrm{E}^{n'} : \lfloor \mathsf{T} \rfloor^{n' \cdot n}}$$

$$\textsc{Ty-term-FillF}\quad \frac{\begin{array}{c}\mathtt{ctx\_Disjoint}\ \Pi_2\ \{\mathsf{x} :_{m} \mathsf{T}_1\}\\ \Pi_1 \vdash \mathsf{t} : \lfloor \mathsf{T}_1 {}_{m}\!\!\to \mathsf{T}_2 \rfloor^{n}\\ \Pi_2 \uplus \{\mathsf{x} :_{m} \mathsf{T}_1\} \vdash \mathsf{u} : \mathsf{T}_2\end{array}}{\Pi_1 \uplus (1\!\uparrow \cdot n) \cdot \Pi_2 \vdash \mathsf{t} \triangleleft (\lambda \mathsf{x}_{\,m} \mapsto \mathsf{u}) : \mathbf{1}}$$

$$\textsc{Ty-term-FillC}\quad \frac{\Pi_1 \vdash \mathsf{t} : \lfloor \mathsf{T}_1 \rfloor^{n} \qquad \Pi_2 \vdash \mathsf{u} : \mathsf{T}_1 \ltimes \mathsf{T}_2}{\Pi_1 \uplus (1\!\uparrow \cdot n) \cdot \Pi_2 \vdash \mathsf{t} \triangleleft\!\bullet\, \mathsf{u} : \mathsf{T}_2}$$

$\boxed{\Delta \dashv \mathsf{C} : \mathsf{T}_1 \rightarrowtail \mathsf{T}_2}$ *(Typing of evaluation contexts)*

TyR-ectx-Id
$$\frac{}{\{\} \dashv \square : \mathsf{U}_0 \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-AppFoc1
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ m\cdot\Delta_1 \uplus \Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{T}_2 \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_2 \vdash \mathsf{u} : \mathsf{T}_1\ {}_m\!\!\to \mathsf{T}_2\end{array}}{\Delta_1 \dashv \mathsf{C} \circ (\square \succ \mathsf{u}) : \mathsf{T}_1 \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-AppFoc2
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ m\cdot\Delta_1 \uplus \Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{T}_2 \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_1 \vdash \mathsf{v} : \mathsf{T}_1\end{array}}{\Delta_2 \dashv \mathsf{C} \circ (\mathsf{v} \succ \square) : (\mathsf{T}_1\ {}_m\!\!\to \mathsf{T}_2) \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-PatUFoc
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ \Delta_1 \uplus \Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{U} \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_2 \vdash \mathsf{u} : \mathsf{U}\end{array}}{\Delta_1 \dashv \mathsf{C} \circ (\square\ ;\ \mathsf{u}) : \mathsf{1} \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-PatSFoc
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1\ \texttt{/\textbackslash}\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ m\cdot\Delta_1 \uplus \Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{U} \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_2 \uplus \{x_1 :_m \mathsf{T}_1\} \vdash \mathsf{u}_1 : \mathsf{U} \\ \Delta_2 \uplus \{x_2 :_m \mathsf{T}_2\} \vdash \mathsf{u}_2 : \mathsf{U}\end{array}}{\Delta_1 \dashv \mathsf{C} \circ (\square \succ \mathbf{case}_m \{\mathbf{Inl}\, x_1 \mapsto \mathsf{u}_1\ ,\ \mathbf{Inr}\, x_2 \mapsto \mathsf{u}_2\}) : (\mathsf{T}_1 \oplus \mathsf{T}_2) \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-PatPFoc
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1\ \texttt{/\textbackslash}\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_Disjoint}\ \{x_1 :_m \mathsf{T}_1\}\ \{x_2 :_m \mathsf{T}_2\} \\ m\cdot\Delta_1 \uplus \Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{U} \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_2 \uplus \{x_1 :_m \mathsf{T}_1, x_2 :_m \mathsf{T}_2\} \vdash \mathsf{u} : \mathsf{U}\end{array}}{\Delta_1 \dashv \mathsf{C} \circ (\square \succ \mathbf{case}_m\, (x_1\ ,\ x_2) \mapsto \mathsf{u}) : (\mathsf{T}_1 \otimes \mathsf{T}_2) \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-PatEFoc
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ m\cdot\Delta_1 \uplus \Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{U} \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_2 \uplus \{x :_{m\cdot m'} \mathsf{T}\} \vdash \mathsf{u} : \mathsf{U}\end{array}}{\Delta_1 \dashv \mathsf{C} \circ (\square \succ \mathbf{case}_m\, \mathrm{E}^{m'}\, x \mapsto \mathsf{u}) : !^{m'}\, \mathsf{T} \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-MapFoc
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ \Delta_1 \uplus \Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{U} \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ 1\!\uparrow\cdot\Delta_2 \uplus \{x :_{1\nu} \mathsf{T}_2\} \vdash \mathsf{u} : \mathsf{U}\end{array}}{\Delta_1 \dashv \mathsf{C} \circ (\square \succ \mathbf{map}\ x \mapsto \mathsf{u}) : (\mathsf{T}_1 \ltimes \mathsf{T}_2) \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-ToAFoc
$$\frac{\Delta \dashv \mathsf{C} : (\mathsf{T} \ltimes \mathsf{1}) \rightarrowtail \mathsf{U}_0}{\Delta \dashv \mathsf{C} \circ (\mathbf{to}_{\ltimes}\, \square) : \mathsf{T} \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-FromAFoc
$$\frac{\Delta \dashv \mathsf{C} : \mathsf{T} \rightarrowtail \mathsf{U}_0}{\Delta \dashv \mathsf{C} \circ (\mathbf{from}_{\ltimes}\, \square) : (\mathsf{T} \ltimes \mathsf{1}) \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-FillUFoc
$$\frac{\Delta \dashv \mathsf{C} : \mathsf{1} \rightarrowtail \mathsf{U}_0}{\Delta \dashv \mathsf{C} \circ (\square \triangleleft ()) : \lfloor \mathsf{1} \rfloor^n \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-FillLFoc
$$\frac{\Delta \dashv \mathsf{C} : \lfloor \mathsf{T}_1 \rfloor^n \rightarrowtail \mathsf{U}_0}{\Delta \dashv \mathsf{C} \circ (\square \triangleleft \mathbf{Inl}) : \lfloor \mathsf{T}_1 \oplus \mathsf{T}_2 \rfloor^n \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-FillRFoc
$$\frac{\Delta \dashv \mathsf{C} : \lfloor \mathsf{T}_2 \rfloor^n \rightarrowtail \mathsf{U}_0}{\Delta \dashv \mathsf{C} \circ (\square \triangleleft \mathbf{Inr}) : \lfloor \mathsf{T}_1 \oplus \mathsf{T}_2 \rfloor^n \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-FillPFoc
$$\frac{\Delta \dashv \mathsf{C} : (\lfloor \mathsf{T}_1 \rfloor^n \otimes \lfloor \mathsf{T}_2 \rfloor^n) \rightarrowtail \mathsf{U}_0}{\Delta \dashv \mathsf{C} \circ (\square \triangleleft (,)) : \lfloor \mathsf{T}_1 \otimes \mathsf{T}_2 \rfloor^n \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-FillEFoc
$$\frac{\Delta \dashv \mathsf{C} : \lfloor \mathsf{T} \rfloor^{m\cdot n} \rightarrowtail \mathsf{U}_0}{\Delta \dashv \mathsf{C} \circ (\square \triangleleft \mathrm{E}^m) : \lfloor !^m\, \mathsf{T} \rfloor^n \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-FillFFoc
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ \Delta_1 \uplus (1\!\uparrow\cdot n)\cdot\Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{1} \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_2 \uplus \{x :_m \mathsf{T}_1\} \vdash \mathsf{u} : \mathsf{T}_2\end{array}}{\Delta_1 \dashv \mathsf{C} \circ (\square \triangleleft (\lambda x\ {}_m \mapsto \mathsf{u})) : \lfloor \mathsf{T}_1\ {}_m\!\!\to \mathsf{T}_2 \rfloor^n \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-FillCFoc1
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ \Delta_1 \uplus (1\!\uparrow\cdot n)\cdot\Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{T}_2 \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_2 \vdash \mathsf{u} : \mathsf{T}_1 \ltimes \mathsf{T}_2\end{array}}{\Delta_1 \dashv \mathsf{C} \circ (\square \triangleleft\!\bullet\, \mathsf{u}) : \lfloor \mathsf{T}_1 \rfloor^n \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-FillCFoc2
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ \Delta_1 \uplus (1\!\uparrow\cdot n)\cdot\Delta_2 \dashv \mathsf{C} : \mathsf{T}_2 \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_1 \vdash \mathsf{v} : \lfloor \mathsf{T}_1 \rfloor^n\end{array}}{\Delta_2 \dashv \mathsf{C} \circ (\mathsf{v} \triangleleft\!\bullet\, \square) : \mathsf{T}_1 \ltimes \mathsf{T}_2 \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

TyR-ectx-AOpenFoc
$$\frac{\begin{array}{c}\texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_Disjoint}\ \Delta_1\ \Delta_3 \\ \texttt{hdns\_Disjoint}\ \texttt{hnames}(\mathsf{C})\ \texttt{hnames}(-\Delta_3) \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_1 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_2 \\ \texttt{ctx\_DestOnly}\ \Delta_3 \\ \Delta_1 \uplus \Delta_2 \dashv \mathsf{C} : (\mathsf{T}_1 \ltimes \mathsf{U}) \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \\ \Delta_1 \uplus -\Delta_3 \Vdash \mathsf{v}_1 : \mathsf{T}_1\end{array}}{1\!\uparrow\cdot\Delta_2 \uplus \Delta_3 \dashv \mathsf{C} \circ ({}^{\mathrm{op}}_{\texttt{hnames}(-\Delta_3)}\langle \mathsf{v}_1\, ,\, \square) : \mathsf{U} \rightarrowtail \mathsf{U}_0}$$

$\boxed{\vdash \mathsf{C}[\mathsf{t}] : \mathsf{T}}$ *(Typing of extended terms (pair of evaluation context and term))*

Ty-eterm-ClosedEterm
$$\frac{\Gamma \dashv \mathsf{C} : \mathsf{T} \rightarrowtail \mathsf{U}_0 \qquad \Gamma \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T}}{\vdash \mathsf{C}[\mathsf{t}] : \mathsf{U}_0}$$

3 Small-step semantics

$\boxed{C[t] \longrightarrow C'[t']}$ *(Small-step evaluation of terms using evaluation contexts)*

Sem-eterm-AppFoc1
$$\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ t}{C[t \succ u] \longrightarrow (C \circ (\Box \succ u))[t]}$$

Sem-eterm-AppUnfoc1
$$\frac{}{(C \circ (\Box \succ u))[v] \longrightarrow C[v \succ u]}$$

Sem-eterm-AppFoc2
$$\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ u}{C[v \succ u] \longrightarrow (C \circ (v \succ \Box))[u]}$$

Sem-eterm-AppUnfoc2
$$\frac{}{(C \circ (v \succ \Box))[v'] \longrightarrow C[v \succ v']}$$

Sem-eterm-AppRed
$$\frac{}{C[v \succ (\lambda^{v} x_{m} \mapsto t)] \longrightarrow C[t[x := v]]}$$

Sem-eterm-PatUFoc
$$\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ t}{C[t\ ;\ u] \longrightarrow (C \circ (\Box\ ;\ u))[t]}$$

Sem-eterm-PatUUnfoc
$$\frac{}{(C \circ (\Box\ ;\ u))[v] \longrightarrow C[v\ ;\ u]}$$

Sem-eterm-PatURed
$$\frac{}{C[()\ ;\ u] \longrightarrow C[u]}$$

Sem-eterm-PatLFoc
$$\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ t}{C[t \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}] \longrightarrow (C \circ (\Box \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}))[t]}$$

Sem-eterm-PatLUnfoc
$$\frac{}{(C \circ (\Box \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}))[v] \longrightarrow C[v \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}]}$$

Sem-eterm-PatLRed
$$\frac{}{C[(\mathsf{Inl}\, v) \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}] \longrightarrow C[u_1[x := v]]}$$

Sem-eterm-PatRFoc
$$\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ t}{C[t \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}] \longrightarrow (C \circ (\Box \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}))[t]}$$

Sem-eterm-PatRUnfoc
$$\frac{}{(C \circ (\Box \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}))[v] \longrightarrow C[v \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}]}$$

Sem-eterm-PatRRed
$$\frac{}{C[(\mathsf{Inr}\, v) \succ \mathbf{case}_{m}\ \{\ \mathsf{Inl}\, x_1 \mapsto u_1\ ,\ \mathsf{Inr}\, x_2 \mapsto u_2\ \}] \longrightarrow C[u_2[x := v]]}$$

Sem-eterm-PatPFoc
$$\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ t}{C[t \succ \mathbf{case}_{m}\ (x_1\ ,\ x_2) \mapsto u] \longrightarrow (C \circ (\Box \succ \mathbf{case}_{m}\ (x_1\ ,\ x_2) \mapsto u))[t]}$$

Sem-eterm-PatPUnfoc
$$\frac{}{(C \circ (\Box \succ \mathbf{case}_{m}\ (x_1\ ,\ x_2) \mapsto u))[v] \longrightarrow C[v \succ \mathbf{case}_{m}\ (x_1\ ,\ x_2) \mapsto u]}$$

Sem-eterm-PatPRed
$$\frac{}{C[(v_1\ ,\ v_2) \succ \mathbf{case}_{m}\ (x_1\ ,\ x_2) \mapsto u] \longrightarrow C[u[x_1 := v_1][x_2 := v_2]]}$$

Sem-eterm-PatEFoc
$$\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ t}{C[t \succ \mathbf{case}_{m}\ \mathrm{E}^{n}\, x \mapsto u] \longrightarrow (C \circ (\Box \succ \mathbf{case}_{m}\ \mathrm{E}^{n}\, x \mapsto u))[t]}$$

Sem-eterm-PatEUnfoc
$$\frac{}{(C \circ (\Box \succ \mathbf{case}_{m}\ \mathrm{E}^{n}\, x \mapsto u))[v] \longrightarrow C[v \succ \mathbf{case}_{m}\ \mathrm{E}^{n}\, x \mapsto u]}$$

Sem-eterm-PatERed
$$\frac{}{C[\mathrm{E}^{n}\, v \succ \mathbf{case}_{m}\ \mathrm{E}^{n}\, x \mapsto u] \longrightarrow C[u[x := v]]}$$

Sem-eterm-MapFoc
$$\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ t}{C[t \succ \mathbf{map}\ x \mapsto u] \longrightarrow (C \circ (\Box \succ \mathbf{map}\ x \mapsto u))[t]}$$

Sem-eterm-MapUnfoc
$$\frac{}{(C \circ (\Box \succ \mathbf{map}\ x \mapsto u))[v] \longrightarrow C[v \succ \mathbf{map}\ x \mapsto u]}$$

Sem-eterm-MapRedAOpenFoc
$$\frac{h' = \mathtt{max}(\mathtt{hnames}(C))}{C[{}_{\mathtt{H}}\langle v_1\ ,\ v_2\rangle \succ \mathbf{map}\ x \mapsto u] \longrightarrow (C \circ ({}^{\mathrm{op}}_{\mathtt{H} \pm h'}\langle v_1 {\pm} h'\ ,\ \Box\rangle))[u[x := v_2 {\pm} h']]}$$

Sem-eterm-AOpenUnfoc
$$\frac{}{(C \circ {}^{\mathrm{op}}_{\mathtt{H}}\langle v_1\ ,\ \Box\rangle)[v_2] \longrightarrow C[{}_{\mathtt{H}}\langle v_1\ ,\ v_2\rangle]}$$

Sem-eterm-AllocRed
$$\frac{}{C[\mathbf{alloc}] \longrightarrow C[{}_{\{1\}}\langle +1\ ,\ -1\rangle]}$$

Sem-eterm-ToAFoc
$$\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ t}{C[\mathbf{to}_{\ltimes}\ t] \longrightarrow (C \circ (\mathbf{to}_{\ltimes}\ \Box))[t]}$$

Sem-eterm-ToAUnfoc
$$\frac{}{(C \circ (\mathbf{to}_{\ltimes}\ \Box))[v] \longrightarrow C[\mathbf{to}_{\ltimes}\ v]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-ToARed}\;\frac{}{\mathsf{C}[\mathbf{to}_{\ltimes}\ \mathsf{v}] \longrightarrow \mathsf{C}[_{\{\,\}}\langle \mathsf{v} , ()\rangle]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FromAFoc}\;\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ \mathsf{t}}{\mathsf{C}[\mathbf{from}_{\ltimes}\ \mathsf{t}] \longrightarrow (\mathsf{C}\circ(\mathbf{from}_{\ltimes}\ \square))[\mathsf{t}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FromAUnfoc}\;\frac{}{(\mathsf{C}\circ(\mathbf{from}_{\ltimes}\ \square))[\mathsf{v}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathbf{from}_{\ltimes}\ \mathsf{v}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FromARed}\;\frac{}{\mathsf{C}[\mathbf{from}_{\ltimes}\ _{\{\,\}}\langle \mathsf{v} , ()\rangle] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{v}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillUFoc}\;\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ \mathsf{t}}{\mathsf{C}[\mathsf{t}\lhd ()] \longrightarrow (\mathsf{C}\circ(\square\lhd ()))[\mathsf{t}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillUUnfoc}\;\frac{}{(\mathsf{C}\circ(\square\lhd ()))[\mathsf{v}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{v}\lhd ()]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillURed}\;\frac{}{\mathsf{C}[+\mathtt{h}\lhd ()] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathtt{h}\coloneqq_{\{\,\}}\ ()][()]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillLFoc}\;\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ \mathsf{t}}{\mathsf{C}[\mathsf{t}\lhd \mathsf{Inl}] \longrightarrow (\mathsf{C}\circ(\square\lhd \mathsf{Inl}))[\mathsf{t}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillLUnfoc}\;\frac{}{(\mathsf{C}\circ(\square\lhd \mathsf{Inl}))[\mathsf{v}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{v}\lhd \mathsf{Inl}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillLRed}\;\frac{\mathtt{h}' = \mathtt{max}(\mathtt{hnames}(\mathsf{C})\cup\{\mathtt{h}\})}{\mathsf{C}[+\mathtt{h}\lhd \mathsf{Inl}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathtt{h}\coloneqq_{\{\mathtt{h}'+1\}}\ \mathsf{Inl}\ -(\mathtt{h}'+1)][+(\mathtt{h}'+1)]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillRFoc}\;\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ \mathsf{t}}{\mathsf{C}[\mathsf{t}\lhd \mathsf{Inr}] \longrightarrow (\mathsf{C}\circ(\square\lhd \mathsf{Inr}))[\mathsf{t}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillRUnfoc}\;\frac{}{(\mathsf{C}\circ(\square\lhd \mathsf{Inr}))[\mathsf{v}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{v}\lhd \mathsf{Inr}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillRRed}\;\frac{\mathtt{h}' = \mathtt{max}(\mathtt{hnames}(\mathsf{C})\cup\{\mathtt{h}\})}{\mathsf{C}[+\mathtt{h}\lhd \mathsf{Inr}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathtt{h}\coloneqq_{\{\mathtt{h}'+1\}}\ \mathsf{Inr}\ -(\mathtt{h}'+1)][+(\mathtt{h}'+1)]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillEFoc}\;\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ \mathsf{t}}{\mathsf{C}[\mathsf{t}\lhd \mathrm{E}^{m}] \longrightarrow (\mathsf{C}\circ(\square\lhd \mathrm{E}^{m}))[\mathsf{t}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillEUnfoc}\;\frac{}{(\mathsf{C}\circ(\square\lhd \mathrm{E}^{m}))[\mathsf{v}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{v}\lhd \mathrm{E}^{m}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillERed}\;\frac{\mathtt{h}' = \mathtt{max}(\mathtt{hnames}(\mathsf{C})\cup\{\mathtt{h}\})}{\mathsf{C}[+\mathtt{h}\lhd \mathrm{E}^{m}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathtt{h}\coloneqq_{\{\mathtt{h}'+1\}}\ \mathrm{E}^{m}\ -(\mathtt{h}'+1)][+(\mathtt{h}'+1)]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillPFoc}\;\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ \mathsf{t}}{\mathsf{C}[\mathsf{t}\lhd (,)] \longrightarrow (\mathsf{C}\circ(\square\lhd (,)))[\mathsf{t}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillPUnfoc}\;\frac{}{(\mathsf{C}\circ(\square\lhd (,)))[\mathsf{v}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{v}\lhd (,)]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillPRed}\;\frac{\mathtt{h}' = \mathtt{max}(\mathtt{hnames}(\mathsf{C})\cup\{\mathtt{h}\})}{\mathsf{C}[+\mathtt{h}\lhd (,)] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathtt{h}\coloneqq_{\{\mathtt{h}'+1,\mathtt{h}'+2\}}\ (-(\mathtt{h}'+1) , -(\mathtt{h}'+2))][(+(\mathtt{h}'+1) , +(\mathtt{h}'+2))]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillFFoc}\;\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ \mathsf{t}}{\mathsf{C}[\mathsf{t}\lhd (\lambda \mathsf{x}_{m} \mapsto \mathsf{u})] \longrightarrow (\mathsf{C}\circ(\square\lhd (\lambda \mathsf{x}_{m} \mapsto \mathsf{u})))[\mathsf{t}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillFUnfoc}\;\frac{}{(\mathsf{C}\circ(\square\lhd (\lambda \mathsf{x}_{m} \mapsto \mathsf{u})))[\mathsf{v}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{v}\lhd (\lambda \mathsf{x}_{m} \mapsto \mathsf{u})]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillFRed}\;\frac{}{\mathsf{C}[+\mathtt{h}\lhd (\lambda \mathsf{x}_{m} \mapsto \mathsf{u})] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathtt{h}\coloneqq_{\{\,\}}\ \lambda^{\mathsf{v}} \mathsf{x}_{m} \mapsto \mathsf{u}][()]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillCFoc1}\;\frac{\mathtt{term\_NotVal}\ \mathsf{t}}{\mathsf{C}[\mathsf{t}\lhd\!\bullet\, \mathsf{u}] \longrightarrow (\mathsf{C}\circ(\square\lhd\!\bullet\, \mathsf{u}))[\mathsf{t}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillCUnfoc1}\;\frac{}{(\mathsf{C}\circ(\square\lhd\!\bullet\, \mathsf{u}))[\mathsf{v}] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{v}\lhd\!\bullet\, \mathsf{u}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillCFoc2}\;\frac{}{\mathsf{C}[\mathsf{v}\lhd\!\bullet\, \mathsf{u}] \longrightarrow (\mathsf{C}\circ(\mathsf{v}\lhd\!\bullet\, \square))[\mathsf{u}]}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillCUnfoc2}\;\frac{}{(\mathsf{C}\circ(\mathsf{v}\lhd\!\bullet\, \square))[\mathsf{v}'] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{v}\lhd\!\bullet\, \mathsf{v}']}$$

$$\textsc{Sem-eterm-FillCRed}\;\frac{\mathtt{h}' = \mathtt{max}(\mathtt{hnames}(\mathsf{C})\cup\{\mathtt{h}\})}{\mathsf{C}[+\mathtt{h}\lhd\!\bullet\,_{\mathtt{H}}\langle \mathsf{v}_1 , \mathsf{v}_2\rangle] \longrightarrow \mathsf{C}[\mathtt{h}\coloneqq_{(\mathtt{H}\pm\mathtt{h}')}\ \mathsf{v}_1 \pm \mathtt{h}'][\mathsf{v}_2 \pm \mathtt{h}']}$$