

ELEC-H-311 - Systèmes et Signaux de  
Télécommunications

---

Implémentation d'une chaîne de  
communication FM

---

BA3 - ÉLECTRONIQUE ET TÉLÉCOMMUNICATIONS

Théo LEPOUTTE  
Mathias WEIL

20 décembre 2019

# Table des matières

1	Introduction . . . . .	1
2	Implémentation de l'émetteur FM . . . . .	1
2.1	Modulation FM . . . . .	1
2.2	Calcul des densités spectrales de puissance . . . . .	2
2.3	Calcul de la bande passante . . . . .	2
2.4	Variation de la sélectivité fréquentielle et de la fréquence symbole	3
3	Implémentation du récepteur FM . . . . .	3
3.1	Modélisation du bruit . . . . .	3
3.2	Filtrage du signal . . . . .	4
3.3	Démodulation analogique . . . . .	6
3.4	Récupération de la séquence binaire . . . . .	7
3.5	Efficacité du démodulateur FM . . . . .	8
4	Transmission simultanée de plusieurs messages via une porteuse audio . .	10
5	Implémentation du récepteur FSK . . . . .	11
5.1	Démodulation FSK . . . . .	11
5.2	Efficacité du démodulateur FSK et comparaison avec le démodulateur FM . . . . .	12

# 1 Introduction

Dans le cadre du cours de Signaux et Systèmes de Télécommunications, il est demandé aux étudiants de réaliser une simulation de chaîne de communication à modulation de fréquence (FM) par l'intermédiaire de MatLab. Cette simulation permet de mettre en pratique les grands principes vus au cours tels que la densité spectrale de puissance, la modulation de fréquence, la démodulation FSK ou encore le bruit blanc additif Gaussien.

## 2 Implémentation de l'émetteur FM

### 2.1 Modulation FM

Pour transmettre une séquence binaire de  $N$  bits via une chaîne de communication FM, il faut tout d'abord former un message analogique correspondant à ce signal. Afin d'avoir une enveloppe complexe symétrique, on fait correspondre la valeur  $-1$  aux bits nuls du signal. Chaque bit doit ensuite être émis pendant une durée  $T = \frac{1}{F} = 0.002s$  où  $F = 500Hz$  est la fréquence symbole. Etant donné qu'il s'agit d'une simulation et que notre message est discret, un échantillonnage à une fréquence  $F_s = 20kHz$  est réalisé. Cet échantillonnage du message analogique revient donc, pour le signal discret, à sur-échantillonner chaque bit d'un facteur  $OSF^1 = \frac{F_s}{F} = 40$ . Le cahier des charges proposant un nombre de bits à envoyer  $N = 1000$ , le message contient alors  $N \cdot OSF = 40000$  échantillons.

Après avoir généré le message, l'enveloppe complexe correspondante<sup>2</sup> est calculée. Celle-ci est définie par :

$$e_s(t) = \exp(j2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau) \quad (1)$$

où  $k_f$  correspond à la sélectivité fréquentielle. Ce paramètre fixe la variation en fréquence par rapport à la fréquence porteuse<sup>3</sup> ( $f = f_c \pm k_f \cdot A_m$ ) : pour  $A_m = 1$ , lorsque le message vaut  $-1$ , la fréquence correspondante sera de  $f = f_c - k_f$  et lorsqu'il vaudra  $+1$ , elle sera de  $f = f_c + k_f$ . Dans le cadre du projet, la sélectivité fréquentielle est fixée à  $500Hz$  mais son influence est discutée dans la suite du rapport.

Le signal en bande passante<sup>4</sup> est ensuite généré à partir de cette enveloppe complexe :

- 
1.  $OSF = \text{oversampling factor}$
  2.  $e_s = \text{envelope of the sent signal}$
  3.  $f_c = \text{carrier frequency}$
  4. Également appelé signal Radio-Fréquence (RF)

$$s(t) = \Re[e_s(t)] \cos(2\pi f_c t) - \Im[e_s(t)] \sin(2\pi f_c t) \quad (2)$$

où la fréquence porteuse est fixée à 6000Hz.

## 2.2 Calcul des densités spectrales de puissance

Afin de bien comprendre les manipulations faites dans la section 2.1, les densités spectrales de puissance (PSD)<sup>5</sup> des signaux sont calculées et portées en graphique. Pour calculer les PSD, la méthode de Welch est utilisée.

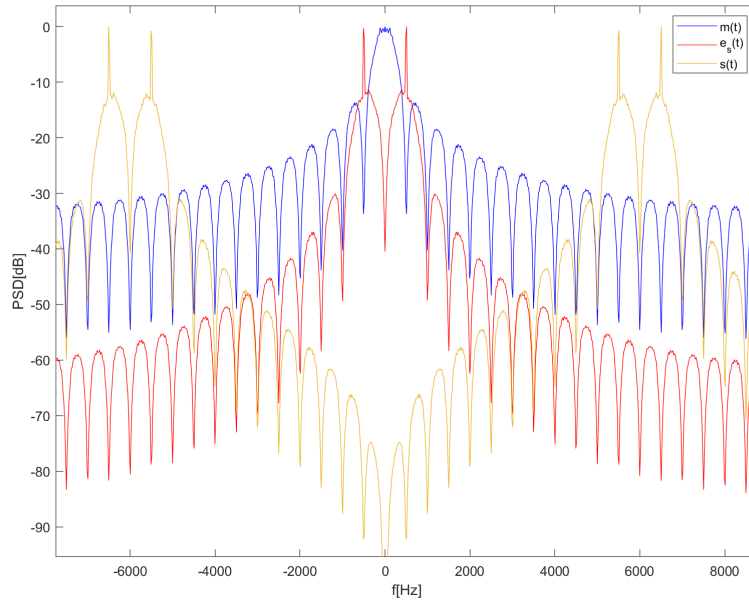


FIGURE 1 – PSD des signaux calculés en section 2.1

Le calcul de l'enveloppe complexe permet d'obtenir un signal dont les pics de la PSD sont centrés autour de la sélectivité fréquentielle et dont la largeur de bande positive est égale à deux fois la fréquence symbole. Le signal RF correspond quant à lui à un signal en bande passante dont la PSD est centrée autour de la fréquence porteuse.

## 2.3 Calcul de la bande passante

La Figure 1 permet de visualiser la bande passante du signal RF. Celle-ci est cependant facilement calculable grâce à la règle de Carson :

$$B_T = 2 \cdot (A_m \cdot k_f + F) \quad (3)$$

---

5. PSD = *power spectral density*

L'amplitude  $A_m$  valant 1, on trouve une largeur de bande  $B_T = 2\text{kHz}$  pour le signal en bande passante. Il est important de noter qu'étant donné les valeurs de  $2\text{kHz}$  pour la bande passante et de  $6\text{kHz}$  pour la fréquence porteuse, la fréquence utile maximale vaut  $7\text{kHz}$ . Afin de respecter la règle de Nyquist et d'éviter le repliement spectral, la fréquence d'échantillonnage doit donc valoir au moins  $2 \cdot 7\text{kHz} = 14\text{kHz}$ . La fréquence d'échantillonnage de  $20\text{kHz}$  proposée dans l'énoncé du projet est donc idéale.

## 2.4 Variation de la sélectivité fréquentielle et de la fréquence symbole

Pour bien visualiser les variations causées par la modification des valeurs de la sélectivité fréquentielle et de la fréquence symbole, des graphes comparatifs ont été réalisés. Tel qu'expliqué dans la section 2.2, l'enveloppe complexe a un pic centré autour de la sélectivité fréquentielle et a une bande passante positive valant deux fois la fréquence symbole, tandis que le signal en bande de base a des pics centrés en  $f_c - k_f$  et  $f_c + k_f$  et a une bande passante calculable avec l'équation 3.

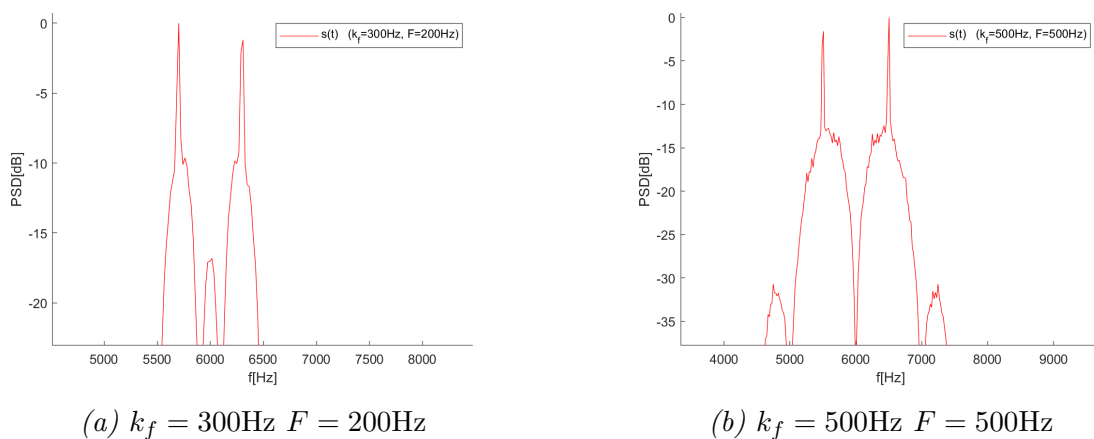


FIGURE 2 – Impact de  $k_f$  et de  $F$  sur la PSD du signal RF

## 3 Implémentation du récepteur FM

### 3.1 Modélisation du bruit

Afin de simuler au mieux la transmission du message, un bruit blanc additif Gaussien (BBAG) est ajouté au signal en bande passante. La puissance de ce bruit est calculée à partir du rapport entre l'énergie par bit et la densité spectrale de puissance du bruit  $\frac{E_b}{N_0}$ . Sachant que la puissance d'un signal est calculée avec

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt \quad (4)$$

on trouve une puissance moyenne pour le signal en bande passante discret :

$$P_{s,in} = \frac{\sum_{n=1}^{N \cdot OSF} |s(n)|^2}{N \cdot OSF} \quad (5)$$

L'énergie d'un bit correspond donc logiquement à cette puissance multipliée par la durée d'un bit, soit le rapport entre la puissance et la fréquence symbole :

$$E_b = \frac{P_{s,in}}{F} \quad (6)$$

La densité spectrale de bruit peut donc être calculée en faisant attention de convertir les valeurs exprimées en décibels en fractions rationnelles.

La puissance moyenne de ce bruit <sup>6</sup> est logiquement calculée en multipliant la densité spectrale de bruit par la fréquence maximale du signal, le tout divisé par deux étant donné la symétrie de la densité spectrale par rapport à l'ordonnée :

$$P_{n,in} = \frac{N_0 \cdot F_s}{2} \quad (7)$$

Le signal de bruit est ensuite calculé en multipliant la racine carrée de la puissance moyenne du bruit par une liste de valeurs aléatoires comprises entre -1 et 1 de longueur égale au signal en bande passante. Le signal bruité <sup>7</sup> correspond à la somme du signal en bande passante et du signal de bruit  $r(t) = s(t) + n(t)$ .

### 3.2 Filtrage du signal

Afin de filtrer plus facilement le bruit acquis durant la transmission, le signal est repassé en bande de base et un filtre passe-bas lui est ajouté. Pour cela, les parties réelle et imaginaire de l'enveloppe complexe sont calculées :

$$\begin{cases} e_{r,real}(t) = r(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \\ e_{r,imag}(t) = r(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \end{cases} \quad (8)$$

Étant donné que la bande passante du signal RF est de 2kHz, la fréquence utile maximale en bande de base est de  $\frac{2\text{kHz}}{2} = 1\text{kHz}$ . Une valeur légèrement plus élevée pour la fréquence de coupure du filtre passe-bas est donc choisie. Le filtre est ensuite appliqué

---

6.  $P_n$  = power of noise

7.  $r(t)$  = received signal

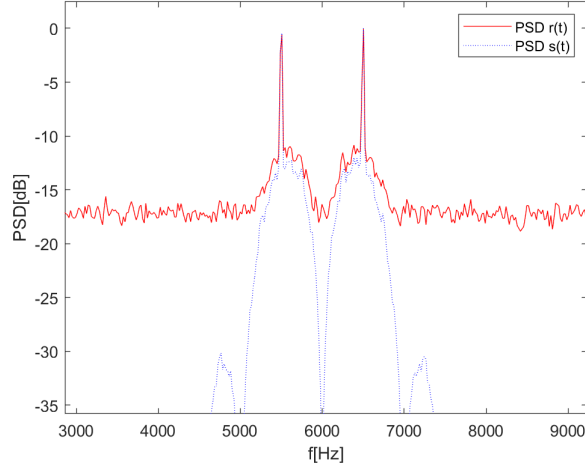


FIGURE 3 – *PSD des signaux  $r(t)$  et  $s(t)$*

en effectuant un produit de convolution entre la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du filtre et les parties réelle et imaginaire de l'enveloppe complexe. Le produit de convolution étant réalisé entre des signaux discrets, un nombre d'échantillons plus élevé dépendant de l'ordre du filtre  $O_f$  est obtenu. Les parties réelle et imaginaire filtrées sont donc tronquées :

$$\begin{cases} e_{r,real,f}(n) = e_{r,real}(n) * h(n) & n \in [\frac{O_f}{2} + 1, OSF \cdot N + \frac{O_f}{2}] \\ e_{r,imag,f}(n) = e_{r,imag}(n) * h(n) \end{cases} \quad (9)$$

L'enveloppe complexe du signal reçu après filtrage est donc :

$$e_r(t) = e_{r,real,f}(n) + j \cdot e_{r,imag,f}(n) \quad (10)$$

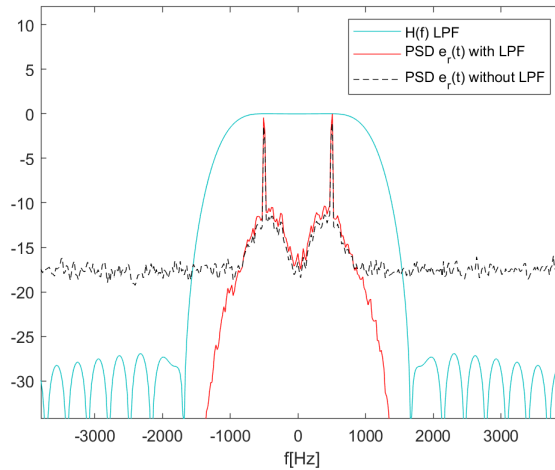


FIGURE 4 – *Comparaison de  $e_r(t)$  avant et après filtrage*

### 3.3 Démodulation analogique

La section 2.1 indique que le signal en bande de base s'exprime sous la forme :

$$e_r(t) = A_c \exp(j2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau) \quad (11)$$

avec  $A_c = 1$ .

Pour pouvoir récupérer le message à partir du signal en bande de base, un discriminateur de fréquences est implémenté par l'intermédiaire d'un double circuit à pente. Les bits 0 et 1 ayant été convertis respectivement en -1 et +1 avant la formation de l'enveloppe complexe, ceux-ci correspondent donc aux fréquences  $-500\text{Hz}$  et  $+500\text{Hz}$  en bande de base. Le calcul de la pente permet ainsi d'isoler chacune des parties du signal correspondant à ces fréquences. On simule l'effet de ce discriminateur sur MatLab grâce aux équations :

$$\begin{cases} s_1(t) = a \left[ \frac{de_r}{dt}(t) + j\pi B_T e_r(t) \right] \\ s_2(t) = -a \left[ \frac{de_r}{dt}(t) - j\pi B_T e_r(t) \right] \end{cases} \quad (12)$$

où  $a$  est le facteur de normalisation.

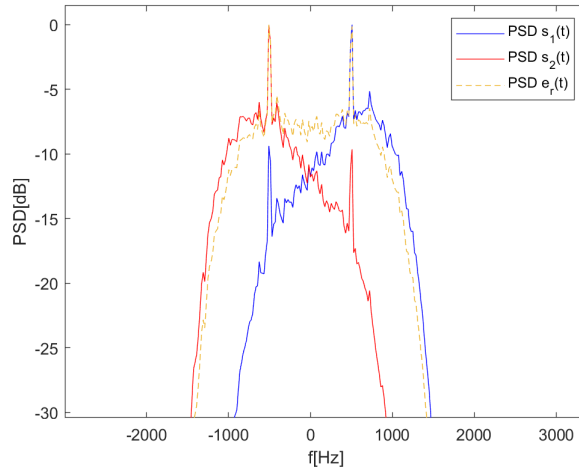


FIGURE 5 – Comparaison des PSD des signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$

Le message est ensuite récupéré en faisant la différence des modules de la partie correspondant aux bits +1 et de la partie correspondant aux bits -1 :

$$m_r(t) = |s_1(t)| - |s_2(t)| \quad (13)$$



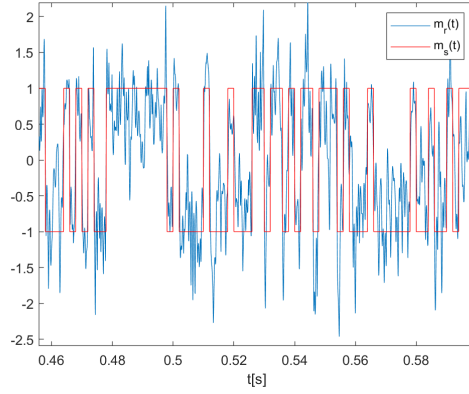


FIGURE 6 – *Comparaison des messages envoyé et reçu*

### 3.4 Récupération de la séquence binaire

Le message ayant été suréchantillonné avant la transmission, il est nécessaire d'interpréter le signal reçu afin de récupérer la séquence binaire. De plus, comme on peut le voir sur la figure 6, le bruit a une grosse influence sur le signal.

L'interprétation du message se fait donc en sommant un nombre de valeurs successives correspondant au facteur de suréchantillonnage OSF et en divisant cette somme par ce même facteur afin de faire une moyenne. Les valeurs sont ensuite arrondies à 0 et 1 pour récupérer un signal binaire.

$$m(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{OSF} \cdot \sum_{k=(n-1) \cdot OSF+1}^{OSF \cdot n} m_r(k) \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (14)$$

Les erreurs pouvant se glisser dans la séquence binaire dépendent de la puissance du bruit, et donc du facteur  $\frac{E_b}{N_0}$ .

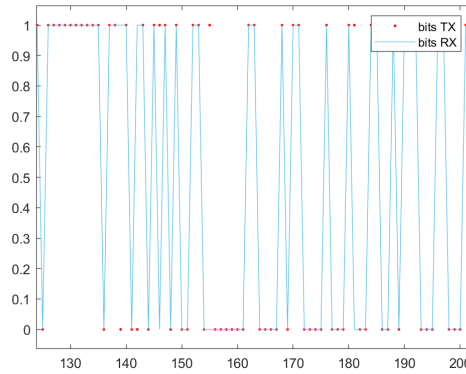


FIGURE 7 – *Comparaison des séquences binaires envoyée et reçue*

### 3.5 Efficacité du démodulateur FM

#### Facteur de mérite

Pour pouvoir mesurer l'efficacité du démodulateur quant à la réduction de l'impact du bruit, les rapports signal sur bruit (SNR)<sup>8</sup> en entrée et sortie du démodulateur sont calculés. La puissance du signal en entrée et la densité spectrale de bruit ayant déjà été calculées en section 3.1, le SNR en entrée peut être calculé (en décibels) :

$$SNR_{in} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_{s,in}}{N_0 \cdot B_T} \right) \text{ [dB]} \quad (15)$$

La puissance du bruit en entrée est calculée uniquement sur la bande passante du signal.

Pour calculer la puissance du bruit en sortie, étant donné que le démodulateur n'est pas linéaire, il faut récupérer le signal de bruit en sortie  $m_n(t)$  en soustrayant le signal sans bruit en sortie  $m_{r,pure}(t)$  au signal bruité en sortie  $m_r(t)$ . Le signal sans bruit est calculé en effectuant une démodulation du signal  $s(t)$  calculé en section 2.1 avec l'équation 13.

$$m_n(t) = m_r(t) - m_{r,pure}(t) \quad (16)$$

Les puissances sont ensuite calculées de la même façon que dans la section 3.1.

$$\begin{cases} P_{s,out} = \frac{\sum_{n=1}^{N \cdot OSF} |m_r(n)|^2}{N \cdot OSF} \\ P_{n,out} = \frac{\sum_{n=1}^{N \cdot OSF} |m_n(n)|^2}{N \cdot OSF} \end{cases} \quad (17)$$

Le SNR en sortie est obtenu avec :

$$SNR_{out} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_{s,out}}{P_{n,out}} \right) \text{ [dB]} \quad (18)$$

Le SNR permet de comprendre l'impact du bruit sur le signal. Plus celui-ci est élevé, plus le bruit est négligeable. L'efficacité du démodulateur vis à vis de la réduction du bruit est évaluée en calculant le facteur de mérite ( $FoM$ )<sup>9</sup> :

$$FoM = SNR_{out} - SNR_{in} \text{ [dB]} \quad (19)$$

Plus la  $FoM$  est élevée, plus le récepteur est capable de réduire l'impact de bruit. Le graphe de la  $FoM$  en fonction du rapport  $\frac{E_b}{N_0}$  (Figure 8a) permet en effet de vérifier

---

8. SNR = *signal to noise ratio*

9.  $FoM$  = *figure of merit*

qu'au-delà de 9dB, l'impact du bruit devient de plus en plus négligeable et la  $FoM$  augmente. En deçà de 9dB, le bruit étant trop important, les valeurs de la  $FoM$  ne sont pas pertinentes.

Il est également intéressant de vérifier l'impact qu'a la sélectivité fréquentielle sur le facteur de mérite. On voit ainsi sur la Figure 8b que plus la sélectivité fréquentielle est élevée, plus l'impact du bruit est négligeable lorsque la puissance de celui-ci augmente. Cela est dû au fait qu'une sélectivité fréquentielle élevée diminue les risques de chevauchement des deux pics de fréquence de la PSD du signal, tel qu'illustré en section 2.4.

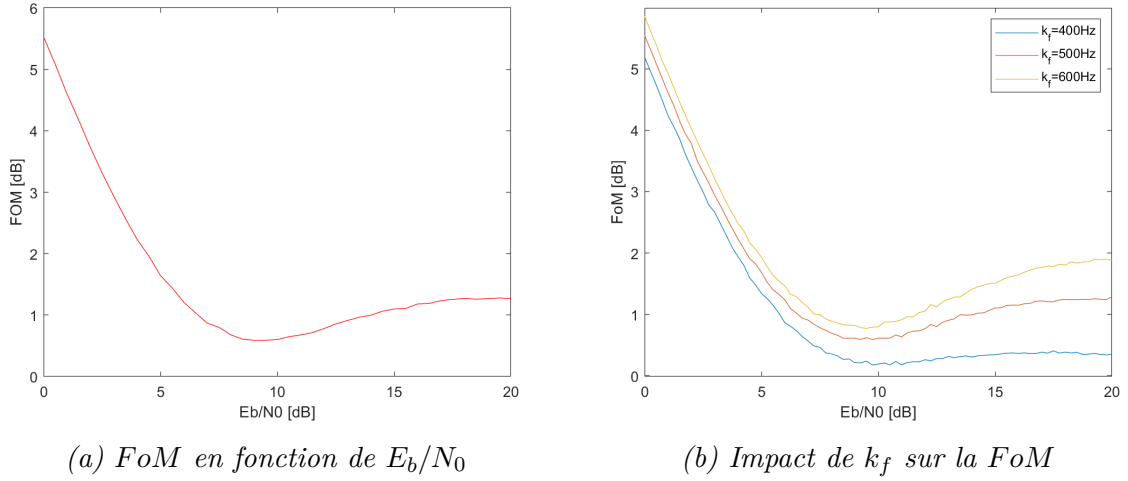


FIGURE 8

## Bit Error Rate

Le facteur de mérite permet d'évaluer l'impact du bruit sur le signal, cependant il est également possible d'évaluer l'impact du bruit sur la séquence binaire grâce au Bit Error Rate (BER)<sup>10</sup>. Pour cela, on compare chacun des bits reçus après démodulation au bit correspondant du signal binaire initial. Le BER correspond au nombre d'erreurs divisé par le nombre total de bits.

$$BER = \frac{\sum_{n=1}^N |m_{b,i}(n) - m_{b,f}(n)|}{N} \quad (20)$$

Le bruit étant généré aléatoirement, il faut répéter l'opération plusieurs fois pour chaque valeur de  $\frac{E_b}{N_0}$  et moyenner les différentes valeurs de BER obtenues. La Figure 9a obtenue après cette étape permet d'observer qu'une diminution du bruit implique donc une diminution du taux d'erreur.

10. Egalement appelé "Taux d'erreur" en français

Tout comme pour le facteur de mérite, il est intéressant de vérifier quel est l'impact de la sélectivité fréquentielle sur le BER. La Figure 9b indique donc clairement que le BER tend à diminuer en fonction de la valeur de la sélectivité fréquentielle, jusqu'à se stabiliser. Si le rapport  $\frac{E_b}{N_0}$  est en dessous de 10dB, il est impossible d'obtenir un BER nul même en augmentant la sélectivité fréquentielle.

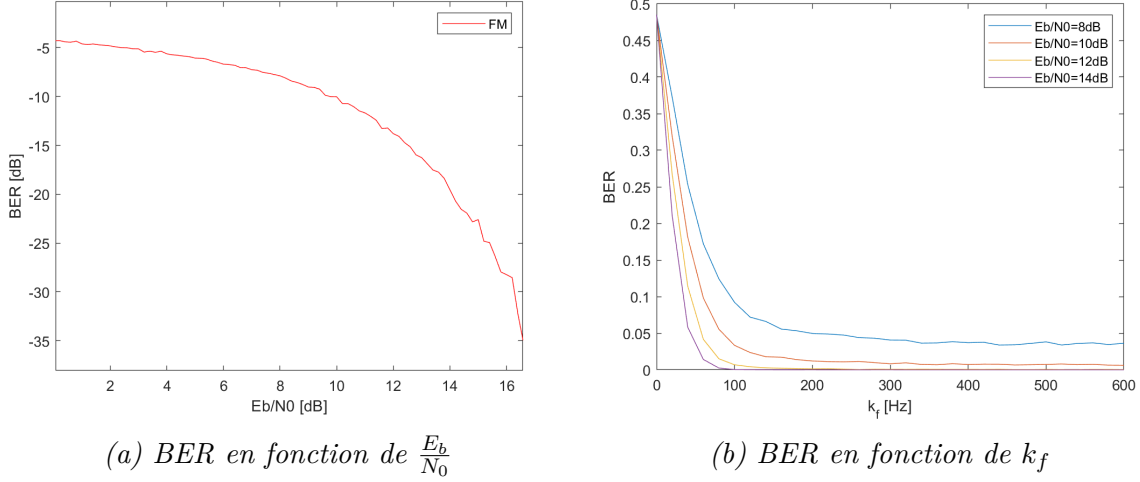


FIGURE 9 – Impact de  $k_f$  et  $\frac{E_b}{N_0}$  sur le BER de la démodulation analogique

## 4 Transmission simultanée de plusieurs messages via une porteuse audio

Afin de transmettre plusieurs messages dans un même signal, leurs signaux en bande passante sont générés à des fréquences porteuses différentes avant d'être additionnés. Les fréquences porteuses sont choisies de sorte à ce que les messages interfèrent le moins entre eux. Idéalement, l'écart entre celles-ci doit donc être tel que  $f_{c1} - f_{c2} - 2k_f - 2F > 0$  pour  $f_{c1} > f_{c2}$ . Le signal est ensuite transmis par l'intermédiaire d'ondes acoustiques d'un ordinateur à un autre.

$$\begin{cases} s_{text}(t) = \Re[e_{s,text}] \cos(2\pi f_{c1}t) + \Im[e_{s,text}] \sin(2\pi f_{c1}t) \\ s_{image}(t) = \Re[e_{s,image}] \cos(2\pi f_{c2}t) + \Im[e_{s,image}] \sin(2\pi f_{c2}t) \\ s(t) = s_{text}(t) + s_{image}(t) \end{cases} \quad (21)$$

À la réception du signal audio, celui-ci est échantillonné puis synchronisé avec le signal émis. Pour cela, la puissance du signal est analysée et celui-ci est tronqué aux alentours de l'échantillon situé dans le coin de la pente. Le signal est ensuite passé en bande de base séparément pour chaque message. La méthode vue en sections 3.2 et 3.3 est donc utilisée

avec les fréquences porteuses correspondantes. Autant de passages en bande de base sont nécessaires que de nombre de messages transmis aux différentes fréquences porteuses  $f_{ci}$ . Le passage en bande de base permet de filtrer facilement chaque enveloppe avec le même filtre passe-bas pour atténuer les fréquences inutiles.

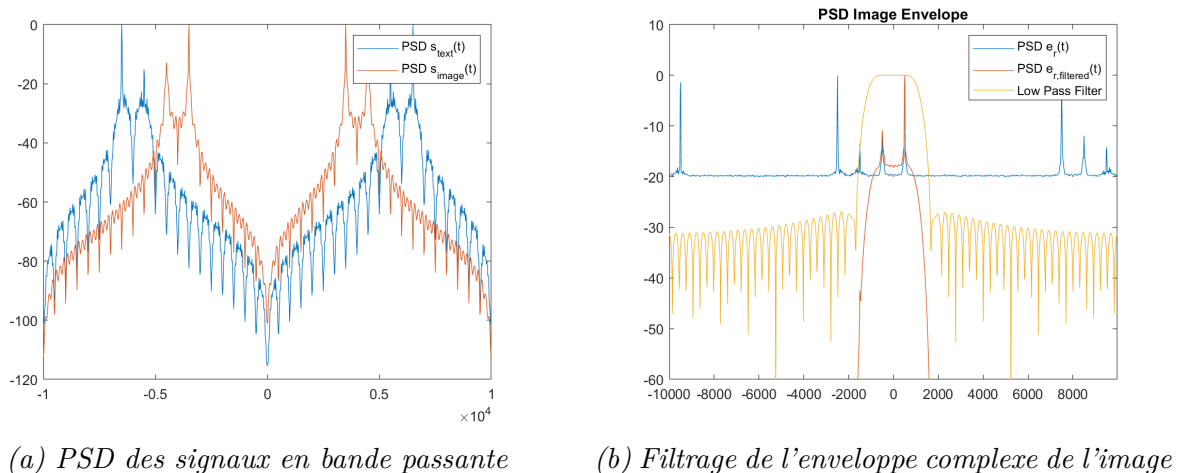


FIGURE 10

Une fois l'enveloppe complexe du signal reçu établie, le message correspondant peut être retrouvé au moyen de la démodulation analogique, mais bruité en raison du bruit ambiant qui interfère avec le signal lors de sa transmission. La séquence binaire initiale est alors approchée grâce à la méthode vue en section 3.4 et le message peut-être retrouvé.

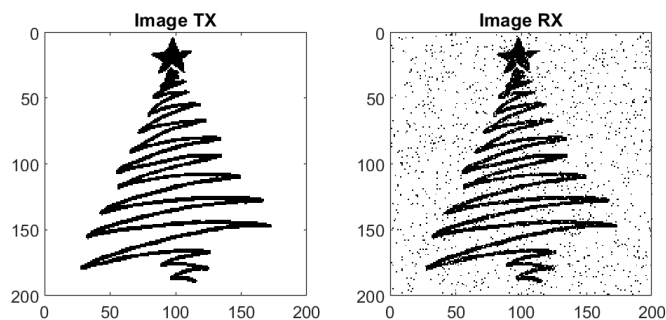


FIGURE 11 – Comparaison des images envoyée et reçue

## 5 Implémentation du récepteur FSK

### 5.1 Démodulation FSK

Un démodulateur FSK est implémenté à la place du démodulateur analogique, cette étape fait donc directement suite à la section 3.2. L'idée du filtre FSK est de corrélér

l'enveloppe complexe reçue par les deux hypothèses correspondant aux bits 0 et 1 :

$$\begin{cases} e_{s0}(n) = \exp(-j2\pi k_f n / F_s) \\ e_{s1}(n) = \exp(+j2\pi k_f n / F_s) \end{cases} \quad (22)$$

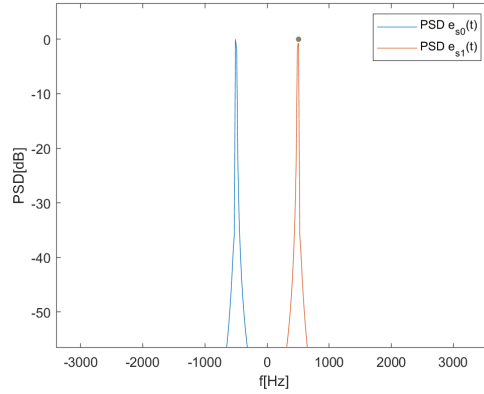


FIGURE 12 – PSD des deux hypothèses

Les sommes des corrélations sont ensuite comparées le long d'une période symbole afin de trouver le bit majoritaire :

$$m(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sum_{k=(n-1) \cdot OSF+1}^{OSF \cdot n} |e_r(k)e_{s0}(k)| > \sum_{k=(n-1) \cdot OSF+1}^{OSF \cdot n} |e_r(k)e_{s1}(k)| \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (23)$$

## 5.2 Efficacité du démodulateur FSK et comparaison avec le démodulateur FM

Le démodulateur implémenté en section 5.1 est non-cohérent, c'est-à-dire qu'il ne prend pas en compte le déphasage possible entre les fréquences porteuses de l'émetteur et du récepteur. Ce type de démodulateur est plus facile à implémenter étant donné qu'il n'est pas nécessaire de posséder une réplique de l'onde porteuse de même fréquence et de même phase au niveau du récepteur. Une manière de diminuer l'impact du bruit sur le démodulateur est de prendre la partie réelle de la corrélation plutôt que le module. Cette méthode peut cependant causer une perte d'informations dans le cas où un déphasage est présent entre les fréquences porteuses de l'émetteur et du récepteur.

Comme cela a été fait en section 3.5 pour le démodulateur analogique, le Bit Error Rate du démodulateur FSK est calculé afin de mesurer son efficacité. Les BER des modulations analogique, FSK non-cohérent et FSK cohérent sont ensuite comparés. Le

démodulateur FSK cohérent apparaît donc clairement comme étant le plus efficace.

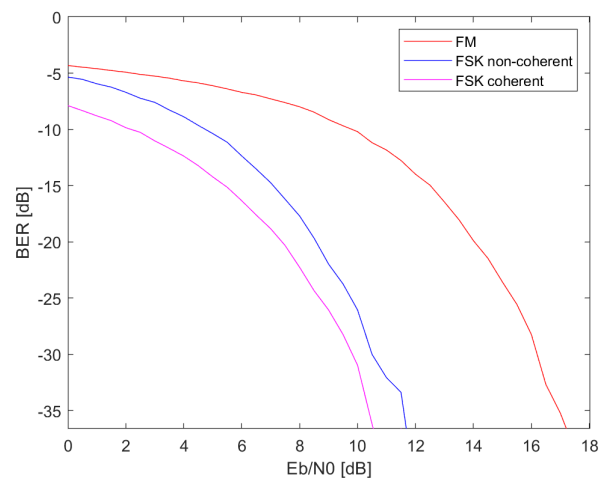


FIGURE 13 – *Comparaison des BER des démodulateurs FM, FSK non-cohérent et FSK cohérent*