

# Hong Kong Mathematics Olympiad 2009-2010

## Heat Event (Individual)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

1. 把 8 個完全相同的球放入三個不同的盒中，使得每個盒內至少有球一個，問共有多少個不同的分配方法？

In how many possible ways can 8 identical balls be distributed to 3 distinct boxes so that every box contains at least one ball?

2. 若  $\alpha$  及  $\beta$  為二次方程  $x^2 - x - 1 = 0$  的兩個實根，求  $\alpha^6 + 8\beta$  的值。

If  $\alpha$  and  $\beta$  are the two real roots of the quadratic equation  $x^2 - x - 1 = 0$ , find the value of  $\alpha^6 + 8\beta$ .

3. 若  $a = \frac{1}{5 \times 10} + \frac{1}{10 \times 15} + \frac{1}{15 \times 20} + \cdots + \frac{1}{100 \times 105}$ ，求  $a$  的值。

If  $a = \frac{1}{5 \times 10} + \frac{1}{10 \times 15} + \frac{1}{15 \times 20} + \cdots + \frac{1}{100 \times 105}$ , find the value of  $a$ .

4. 已知  $x + y + z = 3$  及  $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ ，且  $x, y, z$  為整數。若  $x < 0$ ，求  $y$  的值。

Given that  $x + y + z = 3$  and  $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ , where  $x, y, z$  are integers. If  $x < 0$ , find the value of  $y$ .

5. 已知  $a, b, c, d$  為正整數，且滿足  $\log_a b = \frac{1}{2}$  及  $\log_c d = \frac{3}{4}$ 。若  $a - c = 9$ ，求  $b - d$  的值。

Given that  $a, b, c, d$  are positive integers satisfying  $\log_a b = \frac{1}{2}$  and  $\log_c d = \frac{3}{4}$ .

If  $a - c = 9$ , find the value of  $b - d$ .

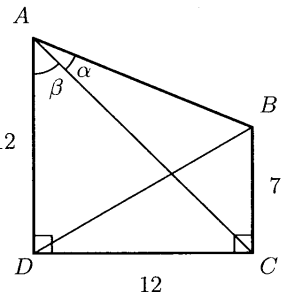
6. 若  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ ，其中  $0 \leq x, y \leq 1$ ，求  $x^2 + y^2$  的值。

If  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ , where  $0 \leq x, y \leq 1$ , find the value of  $x^2 + y^2$ .

7. 在圖一中， $ABCD$  是一梯形。 $AD$ 、 $BC$  和  $DC$  的長分別為 12、

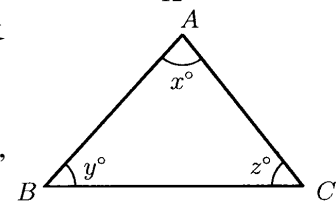
7 和 12。若  $DC$  分別垂直於  $AD$  及  $BC$ ，求  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  的值。

In figure 1,  $ABCD$  is a trapezium. The lengths of segments  $AD$ ,  $BC$  and  $DC$  are 12, 7 and 12 respectively. If segments  $AD$  and  $BC$  are both perpendicular to  $DC$ , find the value of  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .



8. 在圖二中， $\triangle ABC$  滿足： $x \geq y \geq z$  及  $4x = 7z$ 。若  $x$  的最大值是  $m$ ， $x$  的最小值是  $n$ ，求  $m + n$  的值。

In Figure 2,  $ABC$  is a triangle satisfying  $x \geq y \geq z$  and  $4x = 7z$ . If the maximum value of  $x$  is  $m$  and the minimum value of  $x$  is  $n$ , find the value of  $m + n$ .



9. 把  $1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 3$ ) 作環形排列，使得每兩個相鄰的數字相差為 1 或 2。求有多少個此類的環形排列。

Arrange the numbers  $1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 3$ ) in a circle so that adjacent numbers always differ by 1 or 2. Find the number of possible such circular arrangements.

10. 若  $\lfloor x \rfloor$  為最大的整數小於或等於  $x$ ，求以下 2010 個數中共有多少個不同的值：

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2010} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2010} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2010^2}{2010} \right\rfloor.$$

If  $\lfloor x \rfloor$  is the largest integer less than or equal to  $x$ , find the number of distinct values in the

following 2010 numbers:  $\left\lfloor \frac{1^2}{2010} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2010} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2010^2}{2010} \right\rfloor$ .

\*\*\* 試卷完 End of Paper \*\*\*

# Hong Kong Mathematics Olympiad 2009-2010

## Heat Event (Individual) — Spare

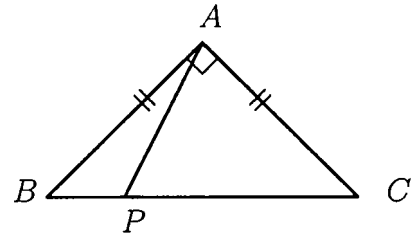
除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark.

1. 在圖三中， $ABC$  為一等腰三角形及  $P$  為  $BC$  上的一點。若  $BP^2 + CP^2 : AP^2 = k : 1$ ，求  $k$  的值。

In Figure 3,  $ABC$  is an isosceles triangle and  $P$  is a point on  $BC$ . If  $BP^2 + CP^2 : AP^2 = k : 1$ , find the value of  $k$ .



圖三

Figure 3

# Hong Kong Mathematics Olympiad 2009-2010

## Heat Event (Group)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

1. 已知六位數  $503xyz$  可以被 7, 9, 11 整除。求三位數  $xyz$  的最小值。

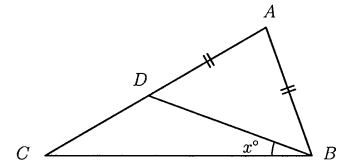
Given that the six-digit number  $503xyz$  is divisible by 7, 9, 11. Find the minimum value of the three-digit number  $xyz$ .

2. 求最小的正整數  $n$  使得  $\underbrace{20092009\cdots 2009}_{n\text{個}2009}$  能被 11 整除。

Find the smallest positive integer  $n$  so that  $\underbrace{20092009\cdots 2009}_{n\text{ copies of }2009}$  is divisible by 11.

3. 在圖一中， $ABC$  是一三角形。 $D$  是  $AC$  上的一點，使得  $AB = AD$ 。若  $\angle ABC - \angle ACB = 40^\circ$ ，求  $x$  的值。

In figure 1,  $ABC$  is a triangle.  $D$  is a point on  $AC$  such that  $AB = AD$ . If  $\angle ABC - \angle ACB = 40^\circ$ , find the value of  $x$ .



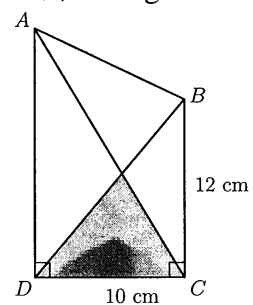
圖一 Figure 1

4. 在圖二中，已知陰影部分的面積是  $35 \text{ cm}^2$ 。

若梯形  $ABCD$  的面積是  $z \text{ cm}^2$ ，求  $z$  的值。

In figure 2, given that the area of the shaded region is  $35 \text{ cm}^2$ .

If the area of the trapezium  $ABCD$  is  $z \text{ cm}^2$ , find the value of  $z$ .



圖二 Figure 2

5. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6 中抽取三個號碼。求抽得的號碼中包含最少兩個連續數的概率。

Three numbers are drawn from 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Find the probability that the numbers drawn contain at least two consecutive numbers.

6. 求以下函數的最小值： $f(x) = |x-1| + |x-2| + \dots + |x-1000|$ ，其中  $x$  是一實數。

Find the minimum value of the following function:  $f(x) = |x-1| + |x-2| + \dots + |x-1000|$ , where  $x$  is a real number.

7. 設  $m, n$  為正整數使得  $\frac{1}{2010} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2009}$ 。求  $n$  的最小值。

Let  $m, n$  be positive integers such that  $\frac{1}{2010} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2009}$ . Find the minimum value of  $n$ .

8. 如果正整數  $a$  的各數位之和等於 7，則  $a$  稱為「幸運數」。例如 7, 61, 12310 都是「幸運數」。將所有「幸運數」從小到大排成一列  $a_1, a_2, a_3, \dots$ 。若  $a_n = 1600$ ，求  $a_{2n}$  的值。

Let  $a$  be a positive integer. If the sum of all digits of  $a$  is equal to 7, then  $a$  is called a "lucky number". For example, 7, 61, 12310 are lucky numbers.

List all lucky numbers in ascending order  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . If  $a_n = 1600$ , find the value of  $a_{2n}$ .

9. 若  $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$ ，求  $|x| - |y|$  的最小值。

If  $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$ , find the minimum value of  $|x| - |y|$ .

10. 在圖三中， $\triangle ABC$  滿足  $AB = AC$  且  $x \leq 45$ 。

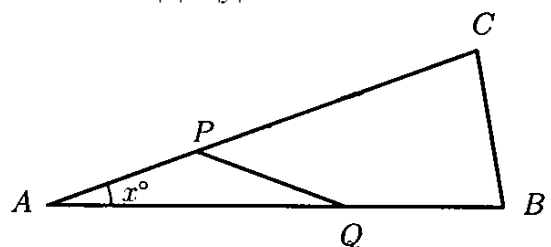
若  $P$  和  $Q$  分別是  $AC$  及  $AB$  上的兩點，

且  $AP = PQ = QB = BC \leq AQ$ ，求  $x$  的值。

In Figure 3, in  $\triangle ABC$ ,  $AB = AC$ ,  $x \leq 45$ . If  $P$  and

$Q$  are two points on  $AC$  and  $AB$  respectively, and

$AP = PQ = QB = BC \leq AQ$ , find the value of  $x$ .



圖三 Figure 3

\*\*\* 試卷完 End of Paper \*\*\*

# Hong Kong Mathematics Olympiad 2009-2010

## Heat Event (Group) — Spare

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

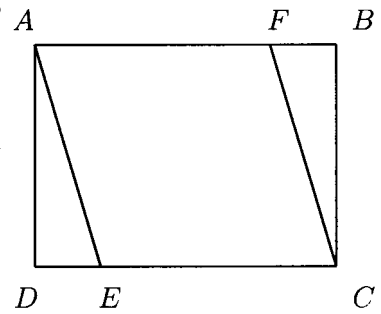
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark.

1. 在圖四中， $ABCD$  為一矩形。設  $E$  及  $F$  分別為  $DC$  及  $AB$  上的點，並使得  $AFCE$  為一菱形。若  $AB = 16$  及  $BC = 12$ ，求  $EF$  的值。

In Figure 4,  $ABCD$  is a rectangle. Let  $E$  and  $F$  be two points on  $DC$  and  $AB$  respectively, so that  $AFCE$  is a rhombus.

If  $AB = 16$  and  $BC = 12$ , find the value of  $EF$ .



圖四

Figure 4

**Hong Kong Mathematics Olympiad 2009 – 2010**  
**Heat Event (Geometric Construction)**  
**香港數學競賽 2009 – 2010**  
**初賽(幾何作圖)**

每隊必須列出詳細所有步驟(包括作圖步驟)。

時限：15 分鐘

All working (including geometric drawing) must be clearly shown.

此部份不計分。This part does not carries any marks.

Time allowed: 15 minutes

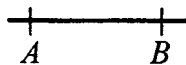
School Code: \_\_\_\_\_

School Name: \_\_\_\_\_

第一題 Question No. 1

圖一所示為長度 1 單位的綫段  $AB$ 。試構作一長度為  $\sqrt{7}$  單位的綫段。

Figure 1 shows a line segment  $AB$  of length 1 unit. Construct a line segment of length  $\sqrt{7}$  units.



**Hong Kong Mathematics Olympiad 2009 – 2010**  
**Heat Event (Geometric Construction)**  
**香港數學競賽 2009 – 2010**  
**初賽(幾何作圖)**

每隊必須列出詳細所有步驟(包括作圖步驟)。

時限：15 分鐘

All working (including geometric drawing) must be clearly shown.

此部份不計分。This part does not carries any marks.

Time allowed: 15 minutes

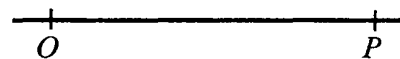
School Code: \_\_\_\_\_

School Name: \_\_\_\_\_

**第二題 Question No. 2**

已知  $\triangle ABC$  是等邊三角形。 $P$ 、 $Q$  及  $R$  為分別位於綫段  $AB$ 、 $BC$  及  $CA$  上的相異點，  
且  $OP \perp AB$ ， $OQ \perp BC$ ， $OR \perp CA$  及  $OP = OQ = OR$ 。圖二展示綫段  $OP$ 。試構作  $\triangle ABC$ 。

Given that  $\triangle ABC$  is equilateral.  $P$ ,  $Q$  and  $R$  are distinct points lying on the lines  $AB$ ,  $BC$  and  $CA$  such that  $OP \perp AB$ ,  $OQ \perp BC$ ,  $OR \perp CA$  and  $OP = OQ = OR$ . Figure 2 shows the line segment  $OP$ . Construct  $\triangle ABC$ .



**Hong Kong Mathematics Olympiad 2009 – 2010**  
**Heat Event (Geometric Construction)**  
**香港數學競賽 2009 – 2010**  
**初賽(幾何作圖)**

每隊必須列出詳細所有步驟(包括作圖步驟)。

時限：15 分鐘

All working (including geometric drawing) must be clearly shown.

此部份不計分。This part does not carries any marks.

Time allowed: 15 minutes

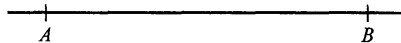
School Code: \_\_\_\_\_

School Name: \_\_\_\_\_

第三題 Question No. 3

圖三所示為一綫段  $AB$ 。試構作三角形  $ABC$  使  $AC:BC=3:2$  及  $\angle ACB=60^\circ$ 。

Figure 3 shows a line segment  $AB$ . Construct a triangle  $ABC$  such that  $AC:BC=3:2$  and  $\angle ACB=60^\circ$



\*\*\* 試卷完 End of Paper \*\*\*