

最短距離(二)

Created by Mr. Francis Hung

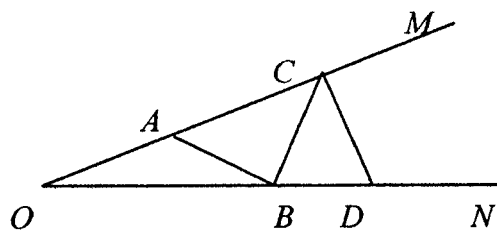
Last updated: 2023-07-03

如圖一，已給 $\angle MON(< 60^\circ)$ ， A 在 OM 上， D 在 ON 上，在 ON 上找出 B 點、在 OM 上找出 C 點，使得 $AB + BC + CD$ 為最短。¹

作圖方法如下(圖二)：

- (1) 將 $\triangle MON$ 沿 OM 反射，得 $\triangle MON_1$ ， D_1 為 D 的反射點。
- (2) 將 $\triangle MON_1$ 沿 ON_1 反射，得 $\triangle M_2ON_1$ ， A_2 為 A 的反射點。
- (3) 連接 A_2D ，交 ON_1 於 B_1 ，交 OM 於 C 。
- (4) 將 B_1 沿 OM 反射，得 B 。

作圖完畢。



圖一

證明如下：

由反射所得， $\triangle AB_1C \cong \triangle ABC$ ， $\triangle B_1CD_1 \cong \triangle BCD$ ，

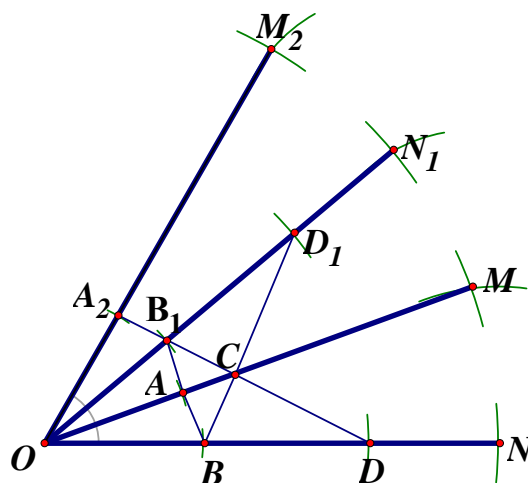
$\triangle A_2OB_1 \cong \triangle AOB_1$

$\ell = AB + BC + CD = AB_1 + B_1C + CD$

$\ell = A_2B_1 + B_1C + CD$

當 A_2 、 B_1 、 C 、 D 共線時， ℓ 為最短。

證明完畢。



圖二

註一：為能確保可作一直線 A_2D ，橫過 OM 及 ON_1 ，

$3 \times \angle MON < 180^\circ$ ，即 $\angle MON < 60^\circ$

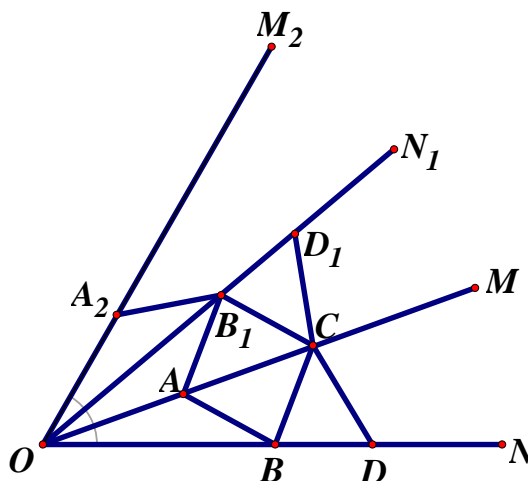
註二：若 A_2 、 B_1 、 C 、 D 不成一直線時(如圖三)， ℓ 較長。

練習題：

試將以下題目改寫，並以尺規作圖找出答案。

HKMO 2007 初賽團體項目第 9 題

在座標平面上，點 $A = (-6, 2)$ 、 $B = (-3, 3)$ 、 $C = (0, n)$ 及 $D = (m, 0)$ 組成一個四邊形 $ABCD$ 。求 n 的值使得該四邊形 $ABCD$ 的周界為最短。



圖三

¹此題是由 HKMO 1999 初賽團體項目第 9 題轉化出來的。

原題目為：

在圖中， $\angle MON = 20^\circ$ ， A 為 OM 上的一點， $OA = 4\sqrt{3}$ ， D 為 ON 上的一點， $OD = 8\sqrt{3}$ ， C 為 AM 上的任意一點， B 為 OD 上的任意一點。若 $\ell = AB + BC + CD$ ，求 ℓ 的最小值。