5.18 已給直線 L 經過 P 點，及一圓 C(圓心 A)與 L 相切於 Q ($\neq P$)。作一圓 C_1 外切 C，且與 L 相切於 P 點。

Created by Mr. Francis Hung on 20170317 Last updated: 2023-03-19

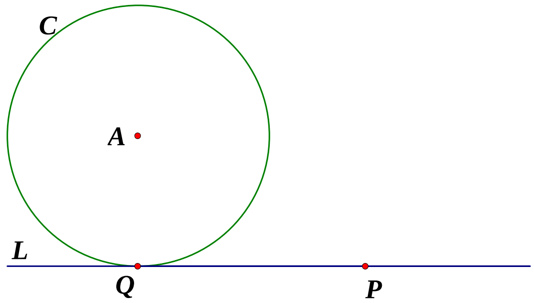

圖 1

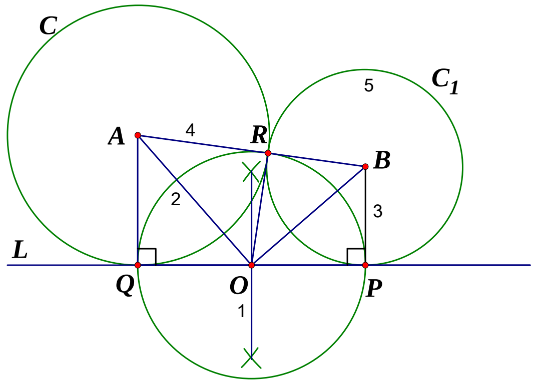

圖 2

作圖方法如下(圖 2)：

(1) 作 PQ 的垂直平分綫，O 為中點。

(2) 以 O 為圓心，OP 為半徑，作一圓，交圓 C 於 R。

(3) 過 P 作直綫 PB，垂直於 PQ。

(4) 連接並延長 AR，交 PB 於 B。

(5) 以 B 為圓心，BR 為半徑，作一圓 C_1。

C_1 便是該圓，切直綫於 P。作圖完畢，證明如下：

連接 OA、OR 及 OB。

$OP = OQ = OR$	(步驟 2 所作的圓的半徑)
$OA = OA$	(公共邊)
$AQ = AR$	(圓 C 的半徑)
$\therefore \Delta AOQ \cong \Delta AOR$	(S.S.S.)
$\angle ARO = \angle AQO$	(全等三角形的對應角)
$= 90°$	(切綫與半徑互相垂直)
$\angle BRO = 180° - \angle ARO = 90°$	(直綫上的鄰角)
$OB = OB$	(公共邊)
$\therefore \Delta BOP \cong \Delta BOR$	(R.H.S.)
$BR = BP$	(全等三角形的對應邊)
$\therefore P$ 在圓 C_1 上。	
$\because OP \perp BP$	(由步驟 3 作圖所得)
$\therefore$ 圓 C_1 切直綫於 P。	(切綫與半徑互相垂直的逆定理)

證明完畢。

如圖 3，已給兩等圓 C_1 和 C_2 相切於 R，圓心分別為 A 和 B，L 為一外公切綫，分別切 C_1 和 C_2 於 Q 和 P。試作一圓 C 外切 C_1、C_2 和 L。

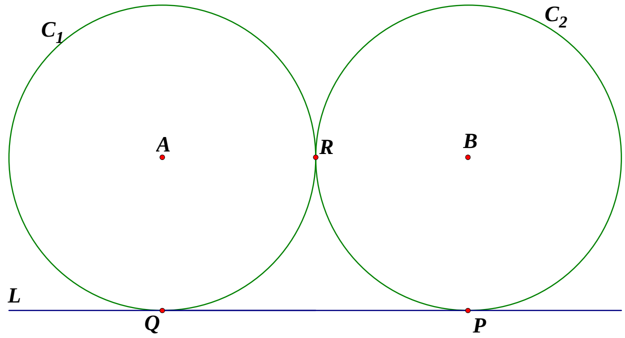

圖 3

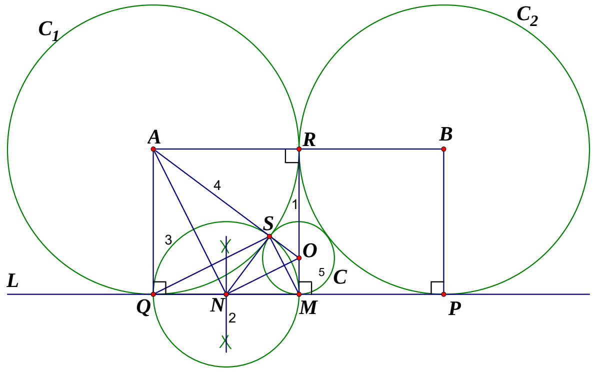

圖 4

作圖方法如下(圖 4)：

(1) 過 R 作 2 圓 C_1 及 C_2 的公切綫 RM，交 PQ 於 M。

(2) 作 MQ 的垂直平分綫，N 為中點。

(3) 以 N 為圓心，NQ 為半徑，作一圓，交圓 C_1 於 S。

(4) 連接並延長 AS，交 RM 於 O。

(5) 以 O 為圓心，OS 為半徑，作一圓 C。

C 便是該圓，外切 C_1、C_2 和切直綫 L 於 M。作圖完畢，證明如下：

連接 AQ、AN、NS、NO、QS 及 MS。

$AQ \perp PQ$、$BP \perp PQ$ 及 $AR \perp RM$	(切綫與半徑互相垂直)
$AQ \,//\, BP$	(內角互補)
$AQ = BP$	(C_1 及 C_2 為兩等圓的半徑)
$ABPQ$ 為一長方形	(對邊平行且相等)
$\therefore AB \,//\, QP$	(長方形對邊平行)
$RM \perp PQ \cdots\cdots (*)$	($AB \,//\, QP$ 的內角)
$AQ = AN = AS$	(圓 C_1 的半徑)
$AN = AN$	(公共邊)
$NQ = NS = NM$	(步驟 3 所作的圓的半徑)
$\therefore \Delta ANQ \cong \Delta ANS$	(S.S.S.)
$\angle ASN = \angle AQN$	(全等三角形的對應角)
$= 90^\circ$	(切綫與半徑互相垂直)
$\angle OSN = 180^\circ - \angle ASN = 90^\circ$	(直綫上的鄰角)
$\therefore NS$ 為圓 C_1 及圓 C 的內公切綫	(切綫與半徑互相垂直的逆定理)
$\therefore$ 圓 C_1 及圓 C 外切於 S	
$ON = ON$	(公共邊)
$\therefore \Delta SON \cong \Delta MON$	(R.H.S.)
$OM = OS$	(全等三角形的對應邊)
$\therefore M$ 在圓 C 上。	
$\because OM \perp PQ$	(由(*)所得)
$\therefore$ 圓 C 切直綫 L 於 M。	(切綫與半徑互相垂直的逆定理)
$OR = OR$	(公共邊)
$AR = BR$	(C_1 及 C_2 為兩等圓的半徑)
$AR \perp RO$ 及 $BR \perp RO$	(由步驟 1 作圖所得)
$\therefore \Delta ARO \cong \Delta BRO$	(S.A.S.)
$BO = AO = AS + SO$	(全等三角形的對應邊)

$\therefore C$ 外切 C_2，證明完畢。

圖 5，已給兩不等圓 C_1 和 C_2 互切於 R，圓心分別為 A 和 B，半徑分別為 a 和 b ($a > b$)。 L 為一外公切綫，分別切 C_1 和 C_2 於 Q 和 P。試作二圓 C 外切 C_1、C_2 和 L。

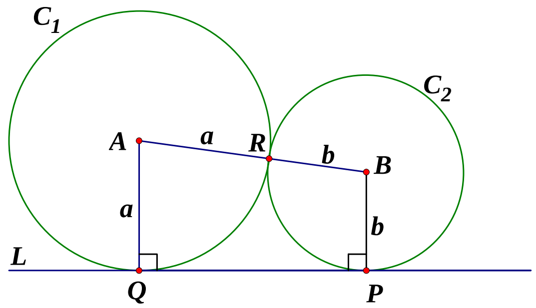

圖 5

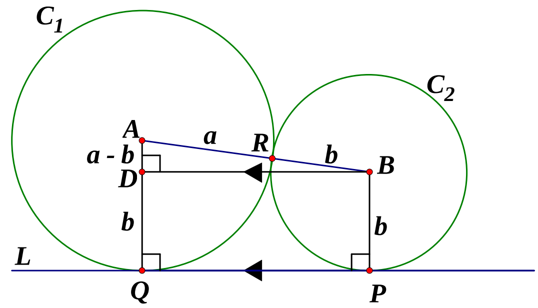

圖 6

理論：首先，我們找出 PQ 的長度；然後，我們找出公切圓 C 的半徑；最後，我們找出公切圓 C 與 L 的切點的位置。

如圖 6，過 B 作一綫段 $BD // PQ$，交 AQ 於 D。

$AD \perp BD$	($BD // PQ$ 的對應角)
$AB = a + b$	(兩圓 C_1 和 C_2 互切於 R)
$BPQD$ 為一長方形	(它擁有三隻直角)
$DQ = BP = b$	(長方形的對邊)
$AD = AD - DQ = a - b$	(等量代換)
$AD^2 + BD^2 = AB^2$	(畢氏定理)
$(a - b)^2 + BD^2 = (a + b)^2$	
$BD = 2\sqrt{ab}$	
$PQ = BD = 2\sqrt{ab}$ …… (**)	(長方形的對邊)

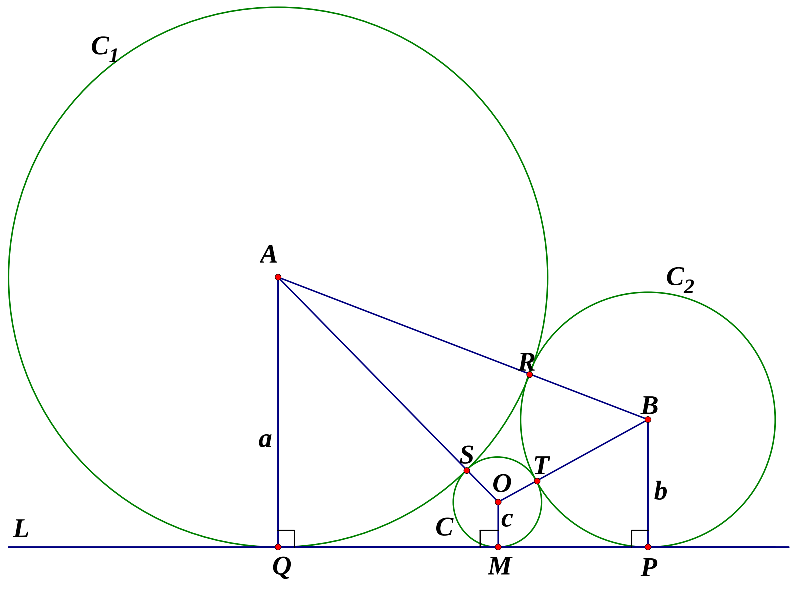

圖 7

假設圓 C 的圓心為 O，半徑為 c；分別切圓 C_1、圓 C_2 及 L 於 S、T 及 M。

$OM \perp PQ$ (切綫與半徑互相垂直)

利用(**)的結果，$QM = 2\sqrt{ac}$ ，$PM = 2\sqrt{bc}$

$\therefore QM : MP = 2\sqrt{ac} : 2\sqrt{bc} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$

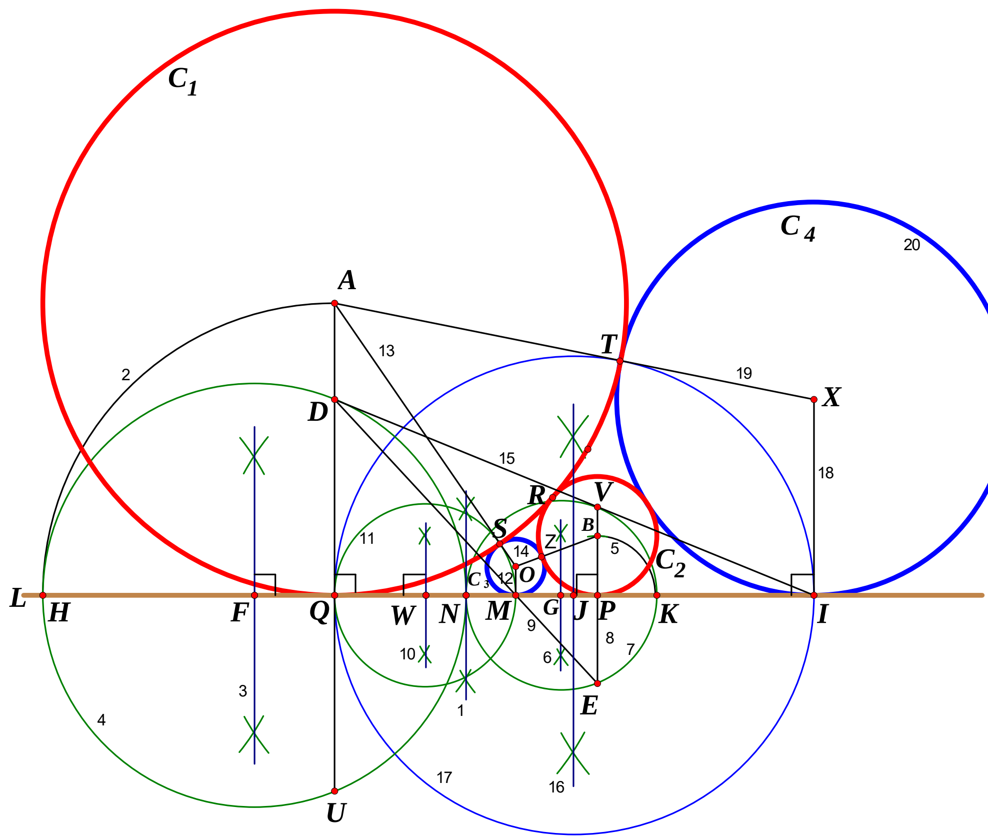

圖 8

作圖方法如下(圖 8)：

(1) 作 PQ 的垂直平分綫，N 為中點。
(2) 以 Q 為圓心，QA 為半徑，作一弧，交 L 於 H。
(3) 作 NH 的垂直平分綫，F 為中點。
(4) 以 F 為圓心，FH 為半徑，作一圓，交 AQ 於 D。
(5) 以 P 為圓心，PB 為半徑，作一弧，交 L 於 K。
(6) 作 NK 的垂直平分綫，G 為中點。
(7) 以 G 為圓心，GK 為半徑，作一圓。
(8) 延長 PB，交步驟(7)的圓形於 V、E。
(9) 連接 DE，交 L 於 M。
(10) 作 QM 的垂直平分綫，W 為中點。
(11) 以 W 為圓心，WQ 為半徑，作一圓，交圓 C_1 於 S。
(12) 過 M 作直綫 MO，垂直於 PQ。
(13) 連接並延長 AS，交 MO 於 O。
(14) 以 O 為圓心，OS 為半徑，作一圓 C_3。
(15) 連接並延長 DV，交 L 於 I。
(16) 作 IQ 的垂直平分綫，J 為中點。
(17) 以 J 為圓心，JQ 為半徑，作一圓，交圓 C_1 於 T。
(18) 過 I 作直綫 IX，垂直於 L。
(19) 連接並延長 AT，交 IX 於 X。
(20) 以 X 為圓心，XI 為半徑，作一圓 C_4。

C_3 及 C_4 便是該兩圓，外切 C_1、C_2 和切直綫 L 於 M，作圖完畢。

證明如下：
連接 OB、交圓 C_2 於 Z。

$DQ = QU$	(圓心至弦綫的垂直綫平分弦)
$DQ\times QU = HQ\times NQ$	(於步驟(4)的圓應用相交弦定理)
$DQ^2 = AQ\times QN$	(由步驟(2)所得，$AQ = HQ$)
$DQ = \sqrt{a}\cdot\sqrt{QN}$ …… (1)	
$VP = EP$	(圓心至弦綫的垂直綫平分弦)
$VP\times EP = KP\times PN$	(於步驟(7)的圓應用相交弦定理)
$EP^2 = BP\times PN$	(由步驟(5)所得，$BP = KP$)
$EP = \sqrt{b}\cdot\sqrt{PN}$ …… (2)	
$\angle DQM = 90^\circ$, $\angle EPM = 90^\circ$	(切綫與半徑互相垂直，直綫上的鄰角)
$\angle DMQ = \angle EMP$	(對頂角)
$\Delta DQM \sim \Delta EPM$	(等角)
$\dfrac{QM}{PM} = \dfrac{DQ}{EP}$	(相似三角形的對應邊)
$\dfrac{QM}{PM} = \dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{QN}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{PN}}$	(由(1)及(2)的結果)
$\dfrac{QM}{PM} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	(由步驟(1)，N 為 PQ 的中點)

步驟(10)至(14)與第 1 頁的 5 個步驟相同。
由第 1 頁的結果，圓 C_3 與圓 C_1 外切，並與 L 相切。
由第 3 頁的結果，圓 C_3 與圓 C_2 外切。
至於圓 C_4 與與圓 C_1 及圓 C_2 外切，並與 L 相切的證明，留待讀者自行推敲。
證明完畢。

圖 9，已給兩不等圓 C_5 和 C_6 外切於 V，圓心分別為 T 和 U。C_5 和 C_6 分別內切一大圓 C_4(圓心為 C)於 I 和 J。試作一圓 C_7 外切 C_5、C_6 和內切 C_4。

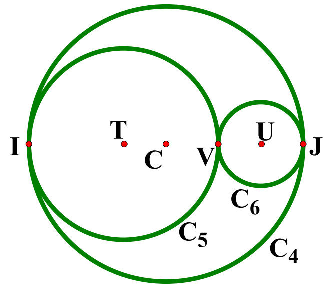

圖 9

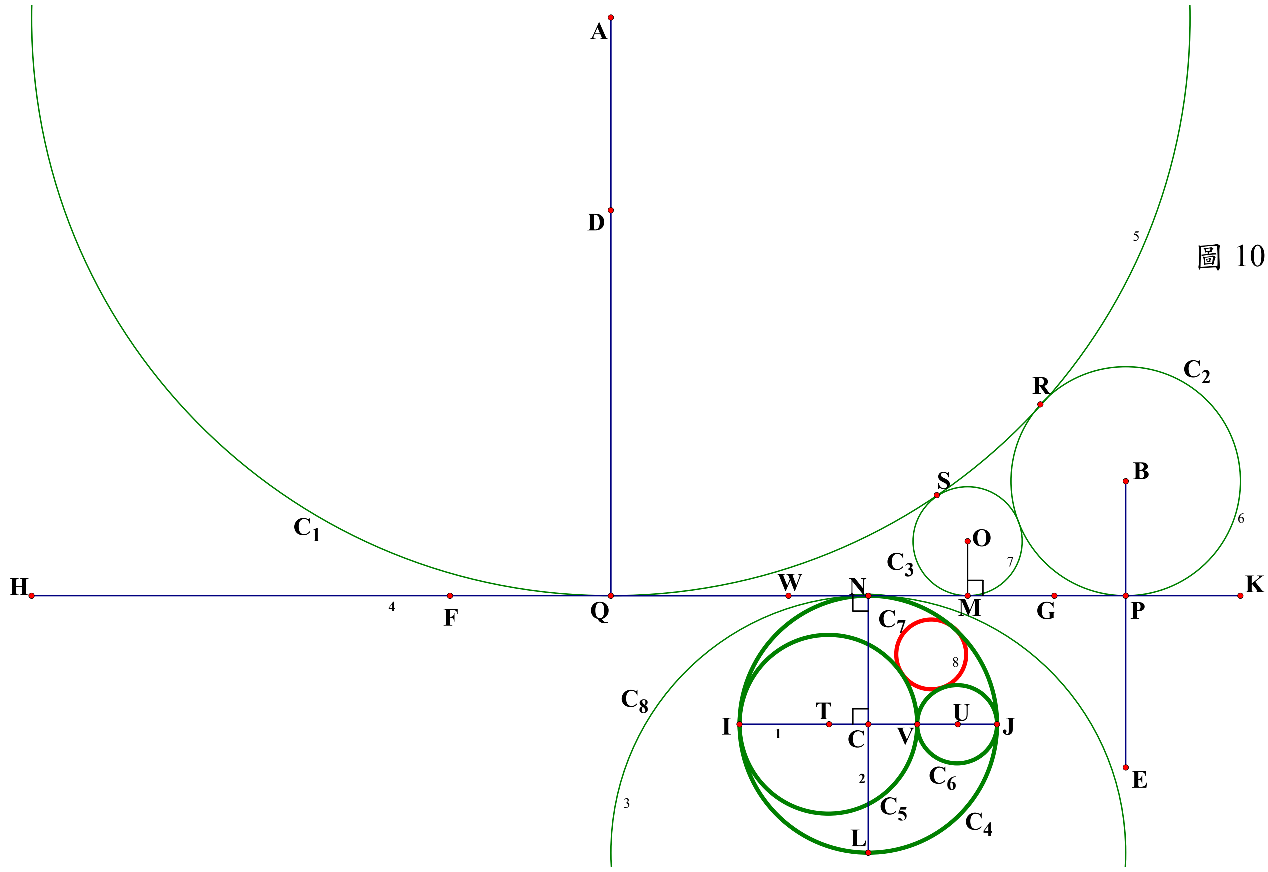

圖 10

作圖方法如下(圖 10)：

(1) 連接直綫 $ITCVUJ$，IJ 為大圓 C_4 的直徑、IV 為圓 C_5 的直徑、JV 為圓 C_6 的直徑。

(2) 過 C 作一綫段 NL 與 IJ 垂直，NL 為大圓 C_4 的直徑。

(3) 以 L 為圓心，LN 為半徑，作一圓 C_8，切 C_4 於 N。

(4) 以 L 為中心，作 C_4 關於圓 C_8 的反演(circle of inversion)，其影像為直綫 HK。

(5) 以 L 為中心，作 C_5 關於圓 C_8 的反演，其影像為圓 C_1(圓心 A，切 HK 於 Q)。

(6) 以 L 為中心，作 C_6 關於圓 C_8 的反演圓 C_2(圓心 B，切 HK 於 P，且外切 C_1 於 R)。

(7) 根據第 4 頁的步驟，作圓 C_3 外切 C_1、C_2 和切直綫 HK 於 M。

(8) 以 L 為中心，作 C_3 關於圓 C_8 的反演圓 C_7。

作圖完畢。證明從略。

圖 11，已給三個不等圓 C_1、C_2 和 C_3 兩兩外切，圓心分別為 A、B 和 C。試作二圓 C_9 外切 C_1、C_2 和 C_3 及 C_{10} 內切 C_1、C_2 和 C_3。

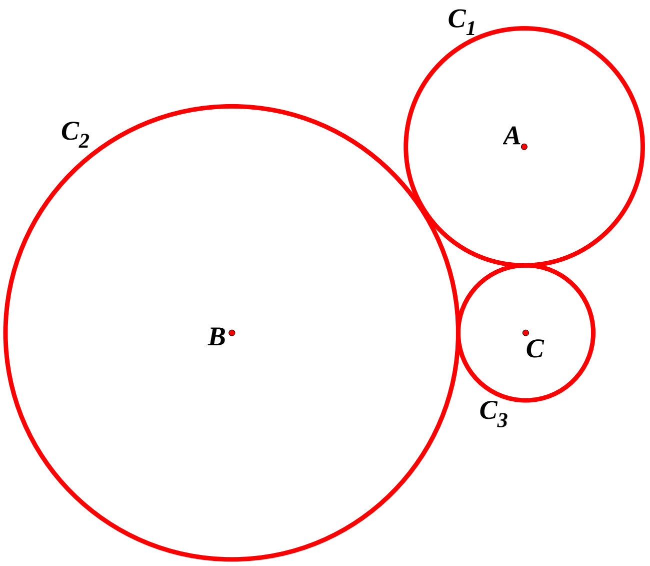

圖 11

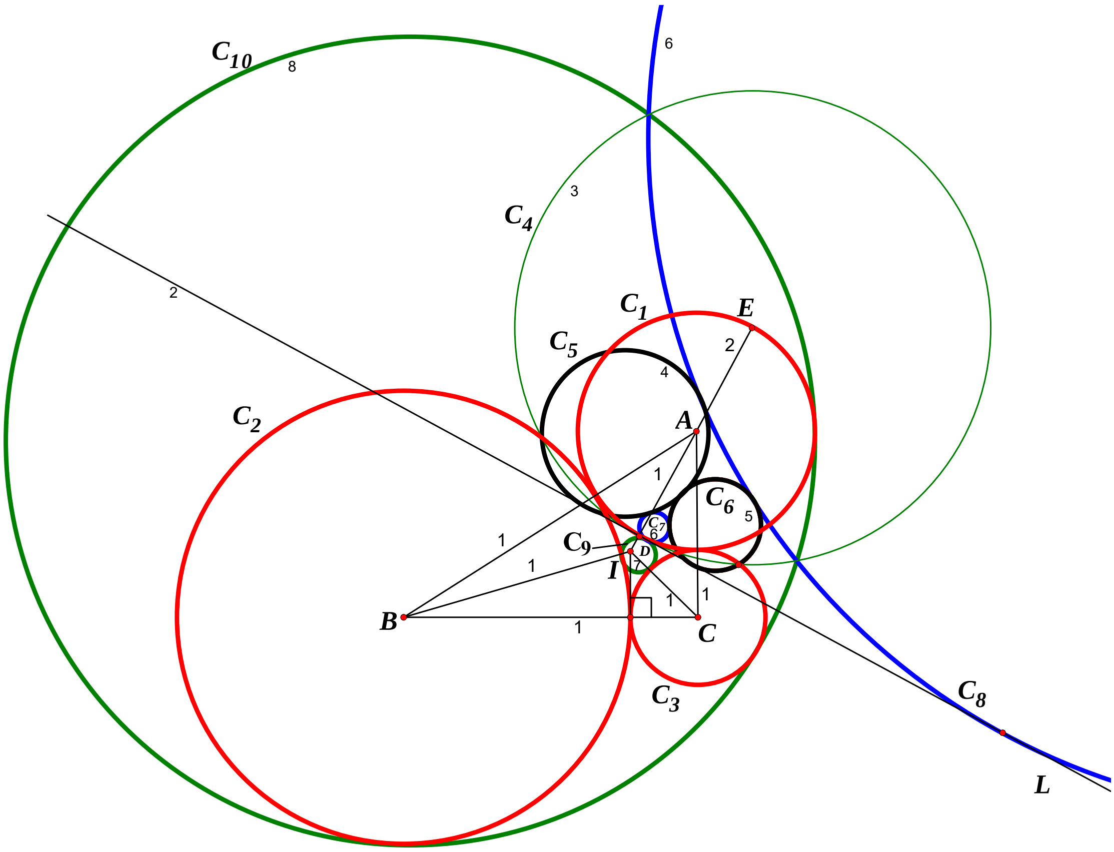

圖 12

作圖方法如下(圖 12)：

(1) 連接 AB、BC 及 AC，作 ΔABC 的內心 I(即內角平分綫的交點)。連接 AI、BI 及 AI。

(2) 假設 AI 交圓 C_1 於 D，連接並延長 DA，交圓 C_1 於 E。過 D 作一綫 L 與 DA 垂直。

(3) 以 E 為圓心，ED 為半徑，作一圓 C_4，切 C_1 於 D。

(4) 以 E 為中心，作 C_2 關於圓 C_4 的反演，其影像為圓 C_5。

(5) 以 E 為中心，作 C_3 關於圓 C_4 的反演圓 C_6。

(6) 根據第 4 頁的步驟，作圓 C_7 和 C_8 外切 C_5、C_6 和切直綫 L。

(7) 以 E 為中心，作 C_7 關於圓 C_4 的反演圓 C_9。

(8) 以 E 為中心，作 C_8 關於圓 C_4 的反演圓 C_{10}。

作圖完畢。證明從略。