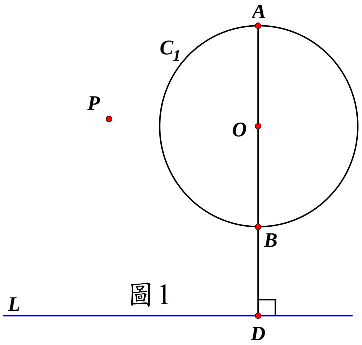
作二圓經過已知點並相切於已知圓及已知直綫

Created by Mr. Francis Hung on 20090217 Last updated: 2023-03-17

如圖 1，已給直綫 L，一圓 C_1(圓心 O，直徑 $AB \perp L$，D 為垂足，$AD > BD$)與 L 不相交，一點 P 在 C_1 外及不在 L 上，AP 不平行於 L，P、A、B 不共綫，且 P 和 O 在 L 的同一方。作二圓經過 P，外切 C，且與 L 相切。



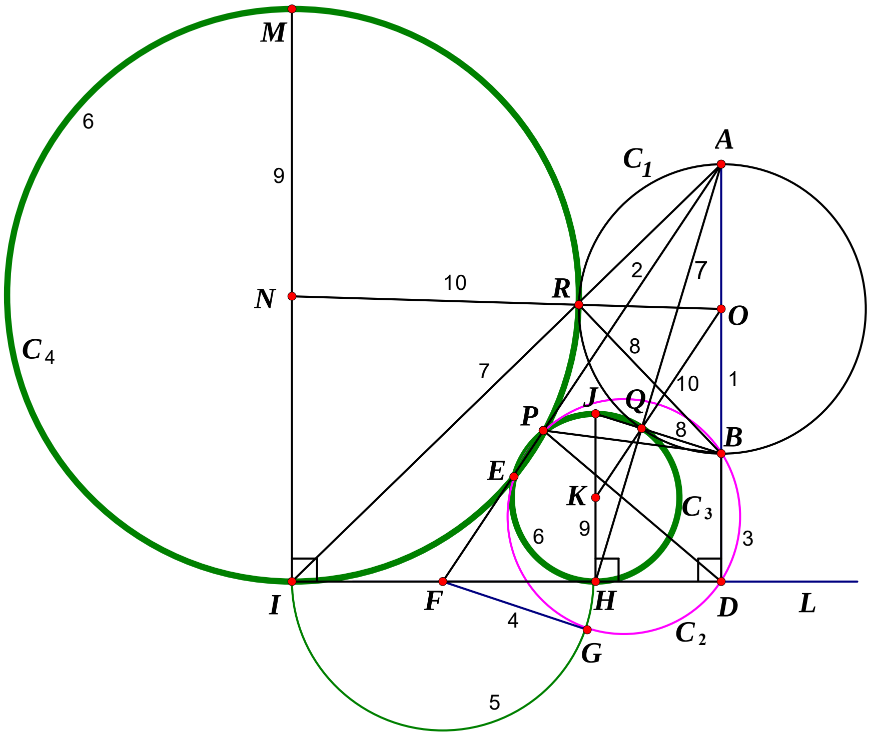


圖 1

作圖方法如下（圖 1)：

(1) 過 O 作直綫 AOD 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 A 和 B，其中 $AD > BD$。

(2) 連接 AP，其延長綫交 L 於 F。

(3) 作ΔBDP 的外接圓 C_2，交 AF 於 E。

(4) 由外點 F 引切綫 FG 至 C_2 上，切 C_2 於 G。

(5) 作一半圓$\odot(F, FG)$，交 L 於 H(在 F 和 D 之間)及 I(在 DF 的延長綫上)。

(6) 作ΔEHP 的外接圓 C_3 及ΔEIP 的外接圓 C_4。

(7) 連接 AH，交圓 C_1 於 Q。連接 AI，交圓 C_1 於 R。

(8) 連接 BQ 及 BR。

(9) 過 H 作一綫段 JH 垂直於 L，交圓 C_1 於 J。過 I 作一綫段 IM 垂直於 L，交圓 C_2 於 M。

(10) 連接 OQ，其延長綫交 JH 於 K。連接 OR，其延長綫交 IM 於 N。

作圖完畢。

證明如下：

$\because FG = FH$ (半徑)

考慮圓 C_2：

$FE \times FP = FG^2$ (相交弦定理)

$\therefore FE \times FP = FH^2$

$\therefore FH$ 是圓 C_3 的切綫 (相交弦定理的逆定理)

即 L 切圓 C_3 於 H。

$\angle AQB = 90°$ (半圓上的圓周角)

$\angle BDH = 90°$ (由作圖所得)

$\therefore \angle AQB = \angle BDH$

B、D、H、Q 四點共圓。 (外角=內對角)

$AB \cdot AD = AQ \cdot AH \cdots\cdots (1)$ (相交弦定理)

$\because$ 圓 C_2 經過 B、D、E、P

$\therefore AB \cdot AD = AE \cdot AP \cdots\cdots (2)$ (相交弦定理)

$(1) = (2)$: $AQ \cdot AH = AE \cdot AP$ (等量代換)

$\therefore E$、H、Q、P 四點共圓。 (相交弦定理的逆定理)

JH 為圓 C_3 的直徑 (切綫 L 切圓 C_1 於 H，且 $JH \perp L$)

$AO \,//\, JH$ (同傍佈角互補)

$\angle QAO = \angle QHK$ (交錯角，$AO \,//\, JH$)

$\angle AQO = \angle HQK$ (對頂角)

$\Delta AOQ \sim \Delta HKQ$ (等角)

$\angle AQB = 90° = \angle HQJ$ (半圓上的圓周角)

$\angle AQB - \angle AQO = \angle HQJ - \angle HQK$ (等量代換)

$\therefore \angle BQO = \angle JQK$

$\Delta BOQ \sim \Delta JKQ$ (等角)

$\frac{KQ}{KH} = \frac{OQ}{OA}$ 及 $\frac{KQ}{KJ} = \frac{OQ}{OB}$ (相似三角形的對應邊)

$\because OQ = OA$ 及 $OQ = OB$ (圓 C_1 的半徑)

$\therefore KQ = KH$ 及 $KQ = KJ$

$\Rightarrow KH = KJ$

$\therefore K$ 為圓 C_1 的圓心

O、Q、K 共綫。

$OQ + QK = OK$

圓 C_3 與圓 C_1 外切於 Q。

利用相似的方法，可證明 C_4 為另一外切圓，滿足所需條件。

證明完畢。

註 1：若圓 C_1 與 L 相交，P 在 C_1 外及不在 L 上，且 P 和 O 在 L 的同一方，作圖法依然成立。

註 2：若 P 和 O 在 L 的相反一方，且圓 C_1(圓心 O)與 L 不相交，則不能作外切圓。

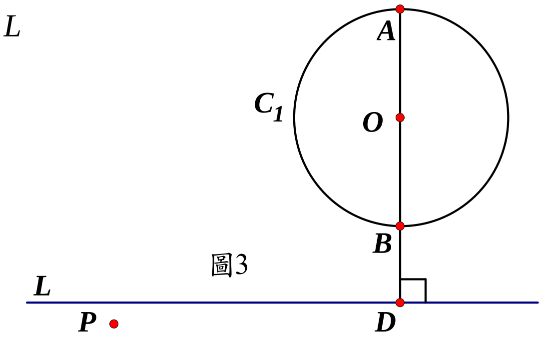


圖3

註 3：若 AP 平行於 L，第 1 頁中的步驟(2)AP 不能與 L 相交。只能作一圓經過 P，外切 C_1，且與 L 相切。作圖方法如下(圖 4)：

(1) 過 O 作直綫 AOD 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C_1 於 A 和 B，其中 $AD > BD$。

(2) 作ΔBDP 的外接圓 C_2(圓心 C)，交 AP 於 Q。

(3) 過 C 作一綫段 CH 垂直於 L，交 L 於 H。
連接 AH，交圓 C_1 於 E，連接並延長 OE，交 HC 的延長綫於 G。

(4) 連接 BE，作ΔBDH 的外接圓 C_3。

(5) 作圓 $C_4 \odot (G, GH)$。

那麼，C_4 便是所需圓形。

作圖完畢。

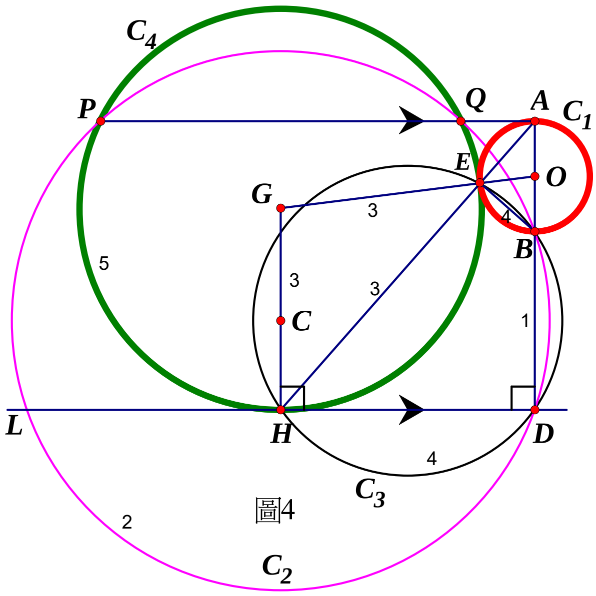


圖4

證明如下：

$\because GH \perp L$

$\therefore L$ 切圓 C_4 於 H

$AD \,//\, GH$ (同旁內角互補)

$\Delta AOE \sim \Delta HGE$ (等角)

$\because OA = OE$ (C_1 之半徑)

$\therefore GH = GE$ (相似三角形對應邊)

$\therefore E$ 在 C_4 及 C_1 且 O、E、G 共綫

$\therefore C_1$ 與 C_4 相切於 E

$\angle ABE = 90^\circ$ (半圓上的圓周角)

$\angle BEH + \angle BDH = 180^\circ$ (直綫上的鄰角)

$\therefore B$、D、H、E 四點共圓 (對角互補)

$\therefore E$ 在 C_3 上

$AB \cdot AD = AE \cdot AH$ …… (1) (於 C_4 應用相交弦定理)

$AB \cdot AD = AQ \cdot AP$ …… (2) (於 C_2 應用相交弦定理)

比較(1)及(2)，得 $AE \cdot AH = AQ \cdot AP$

$\therefore P$、Q、E、H 四點共圓 (相交弦定理的逆定理)

P 和 Q 在圓 C_4 上

證明完畢

註 4：若 P、A、B 共綫，第 1 頁步驟(3)不能作ΔBDP 的外接圓。現就 P 在不同位置進行分析：

情況 4.1，P_1 在 AB 之間，或 P_2 與 A 在 L 的相反一方，則不能作外切圓，滿足以上條件。

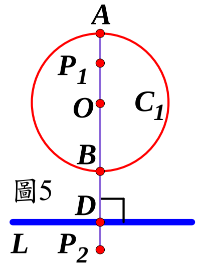


圖5

情況 4.2，P 與 A 重疊，則只能作一內切圓，滿足以上條件。

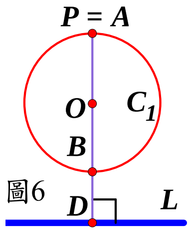


圖6

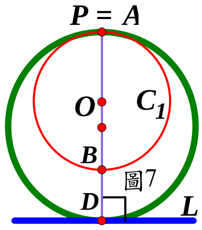


圖7

情況 4.3，P 與 B 重疊，則只能作一外切圓，滿足以上條件。

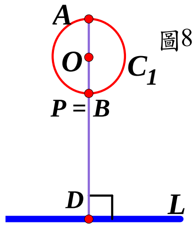


圖8

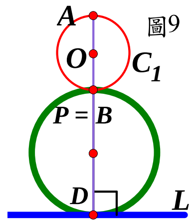


圖9

情況 4.4，P 與 D 重疊，則可以作一外切圓，和一內切圓，滿足以上條件。

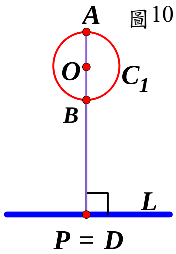


圖10

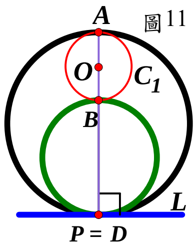


圖11

情況 4.5，DP 切所需圓 C_2 於 P，

現嘗試找出 P 的位置。

假設 L 切圓 $C_2\odot(G, R)$於 H。

$GH \perp L$，$GP \perp DP$ (切綫與半徑垂直)

$GHDP$ 為一正方形

$GH = HD = DP = GP = R$

設 $OD = d$，則 $OP = R - d$

假設已知圓 $C_1\odot(O, r)$與圓 $C_2\odot(G, R)$互相外切於 E。連接並延長 OE，交 C_2 於 I，則 $EI = 2R$。

$OE\cdot OI = OP^2$ (於 C_2 應用相交弦定理)

$r(r + 2R) = (R - d)^2$

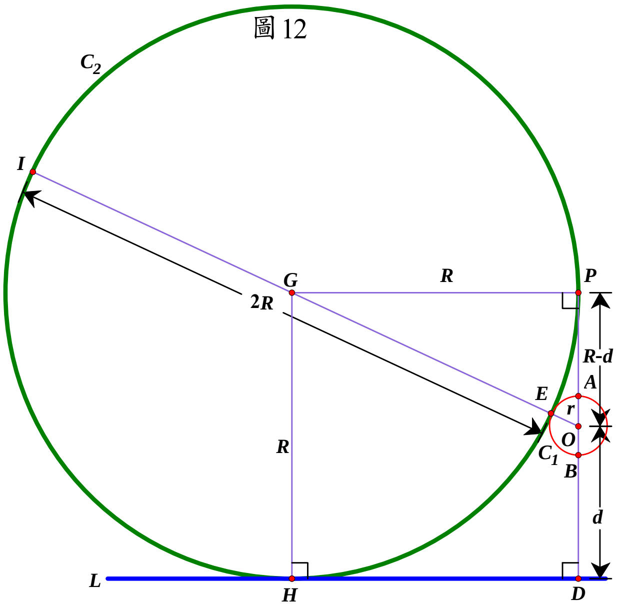
$r^2 + 2rR = R^2 - 2dR + d^2$

$R^2 - 2(d + r)R + (d^2 - r^2) = 0$

$$R = (d + r) \pm \sqrt{(d + r)^2 - (d^2 - r^2)}$$

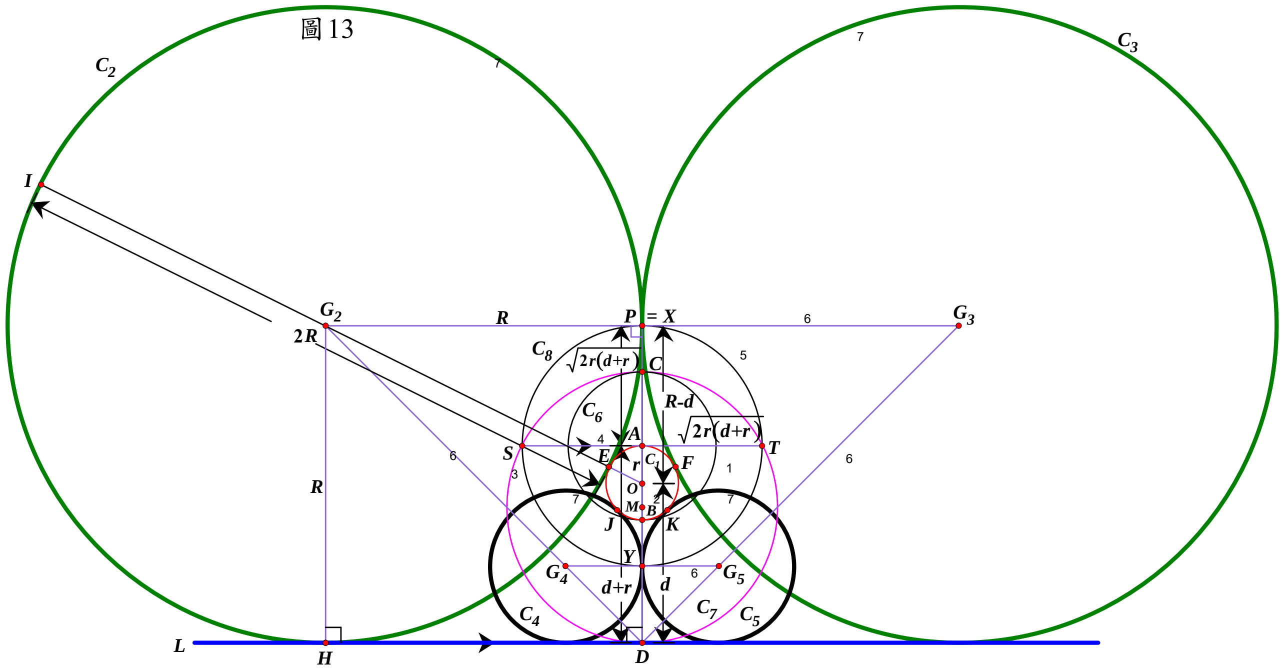
$$R = (d + r) \pm \sqrt{2r(d + r)}$$

因此，存在兩個不同位置，滿足情況 4.5。



作圖方法及證明方法如下(圖 13):

圖 13



(1) 作圓 $C_6 \odot(A, AB)$，交 PD 於 C 和 B。$AC = 2r$，$AD = d + r$。

(2) 利用垂直平分綫，求 CD 的中點 M，$MC = MD$。

(3) 作粉紅色圓 $C_7 \odot(M, MD)$。

(4) 過 A 作綫段 $ST // L$，交 C_7 於 S 及 T。

$ST \perp PD$ ($ST // L$，同旁內角)

$SA = AT$ (圓心至弦的垂綫平分弦)

$SA \cdot AT = AC \cdot AD$ (於圓 C_7 利用相交弦定理)

$AT = \sqrt{2r(d+r)}$

(5) 作圓 $C_8 \odot(A, AT)$，交 PD 於 X 和 Y。$XA = AY = AT = \sqrt{2r(d+r)}$。

$XD = XA + AD = (d+r) + \sqrt{2r(d+r)}$，$YD = AD - AY = (d+r) - \sqrt{2r(d+r)}$。

(6) 過 X 作 $G_2G_3 // L$，過 Y 作 $G_4G_5 // L$，作$\angle XDH$ 的角平分綫 DG_2，交 G_2G_3 於 G_2，將 DG_2 沿 XD 反射，得 DG_3。

ΔG_2XD、ΔG_3XD、ΔG_4YD 及ΔG_5YD 為直角等腰三角形。

$G_2X = G_3X = XD = (d+r) + \sqrt{2r(d+r)}$，$G_4Y = G_5Y = YD = (d+r) - \sqrt{2r(d+r)}$。

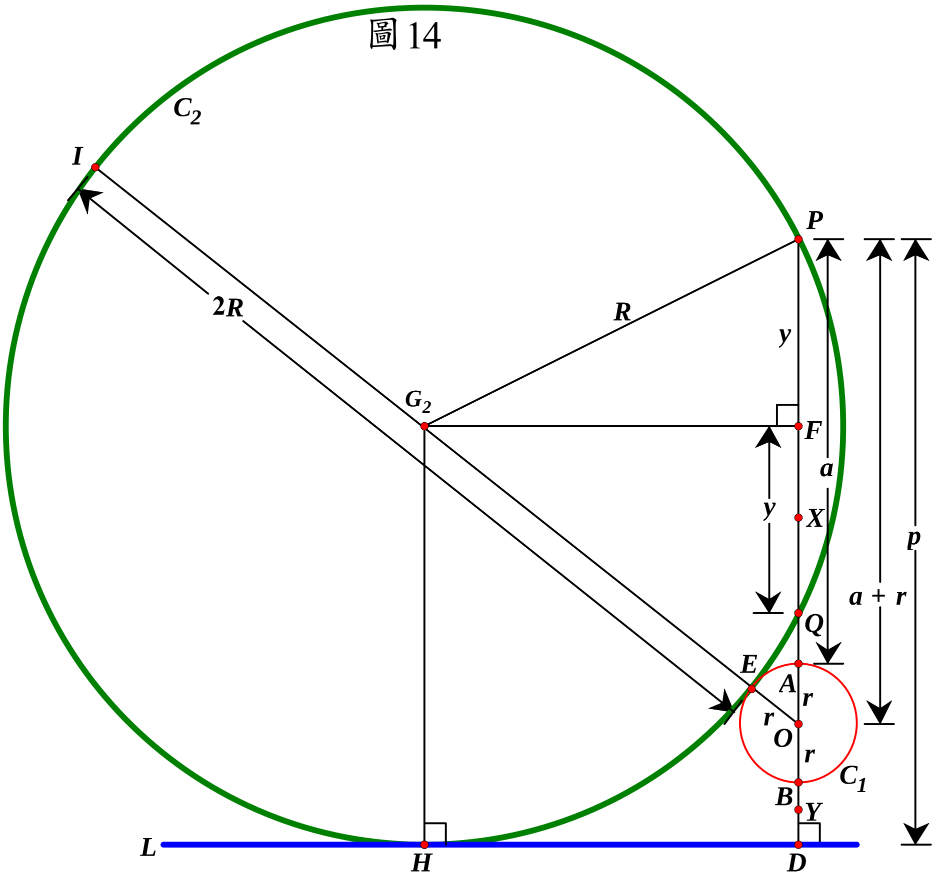
(7) 作圓 $C_2 \odot(G_2, G_2X)$、$C_3 \odot(G_3, G_3X)$、$C_4 \odot(G_4, G_4Y)$及 $C_5 \odot(G_5, G_5Y)$。

作圖及證明完畢。

令 $P = X$，或 $P = Y$。

情況 4.6，$PD > XD$ (其中 X 為情況 4.5 的固定點)，分析如下：

圖 14



已知圓 $C_1 \odot (O, r)$，圓 $C_2 \odot (G_2, R)$為所需圓。C_1 與 C_2 互相外切於 E。P、F、Q、A、O、B 和 D 共綫且 $PD \perp L$ ($AD > BD$)及 D 在 L 上。L 切 C_2 於 H。P、Q 在 C_2 上($PD > QD$)。$G_2H \perp L$ 及 $G_2F \perp PQ$。

設 $PF = y$，$PD = p$，$PA = a$。

$G_2E = G_2H = G_2P = G_2Q = FD = R$

$PF = FQ = y$ (圓心至弦的垂綫平分弦)

$OP = PA + OA = a + r,\ OQ = OA + AQ = r + a - 2y$

$PF = PD - FD \Rightarrow y = p - R \cdots\cdots (1)$

$OP \cdot OQ = OE \cdot OI$ (於圓 C_2 應用相交弦定理)

$(a + r)(a + r - 2y) = r(r + 2R)$

$a^2 + 2ar + r^2 - 2(a + r)y = r^2 + 2rR$

$a^2 + 2ar - 2(a + r)y = 2rR \cdots\cdots (2)$

代(1)入(2)：

$a^2 + 2ar - 2(a + r)(p - R) = 2rR$

$a^2 + 2ar - 2(a + r)p + 2aR + 2rR = 2rR$

$2aR = a^2 + 2ap + 2rp - 2ar - 2a^2$

$2aR = a^2 + 2(p - a)(a + r)$

$R = \dfrac{a}{2} + \dfrac{(p-a)(a+r)}{a} \cdots\cdots (3)$

作圖方法及證明如下(圖 15)：

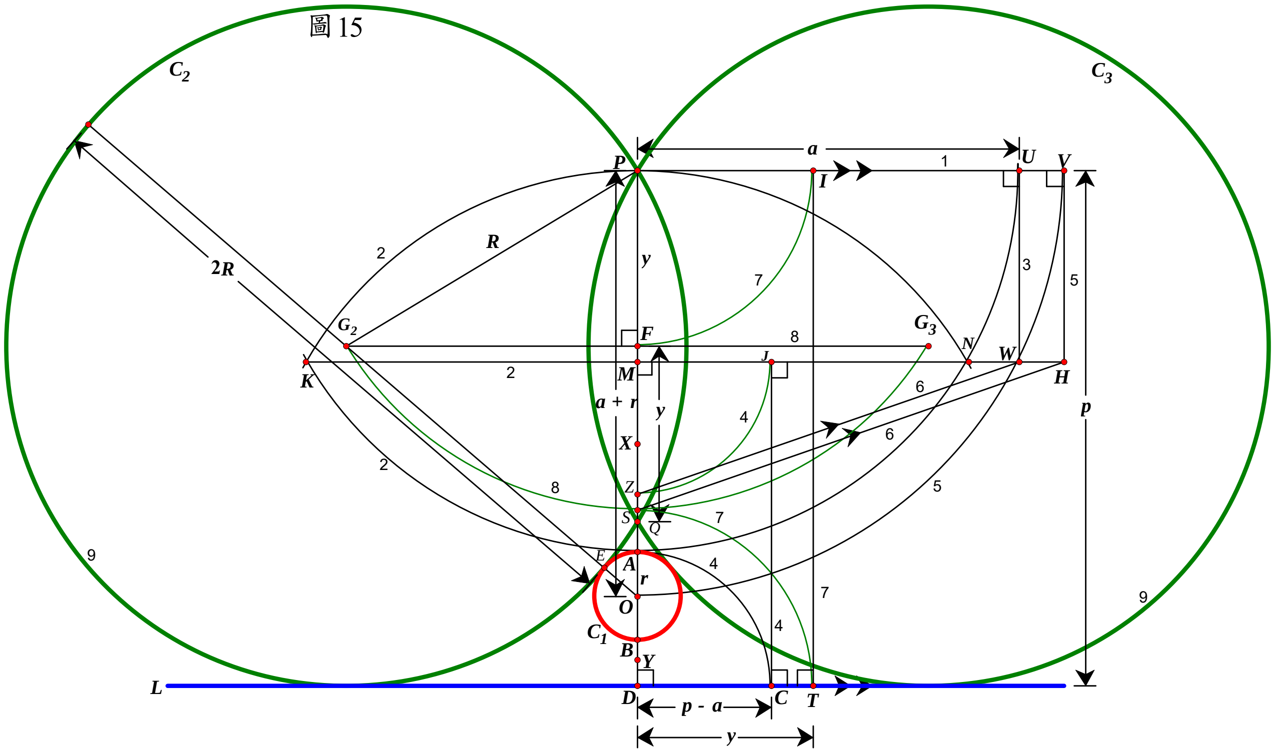


圖 15

(1) 過 P 作 $PV \,//\, L$。

(2) 作弧⊙(P, PA)及弧⊙(A, AP)交於 K、N，連接 KN。KN 為 PA 的中垂綫，交 PA 於 M。且弧⊙(P, PA)交 PV 於 U。$PU = PA = a$，$PM = MA = \dfrac{a}{2}$。

(3) 過 U 作 $UW \perp PV$，交 KN 的延綫於 W。$MW = PU = a$。

(4) 作弧⊙(D, DA)交 L 於 C，過 C 作 $CJ \perp L$，交 KN 的延綫於 J，作弧⊙(M,MJ)交 PD 於 Z。
$DA = DC = MJ = MZ = p - a$。

(5) 作弧⊙(P, PO)交 PV 於 V。過 V 作 $VH \perp PV$，交 KN 的延綫於 H。
$PV = PO = MH = a + r$。

(6) 連接 ZW，過 H 作 $HS \,//\, WZ$，交 PD 於 S。

易證：$\Delta MWZ \sim \Delta MHS$ (等角)

$$\frac{MS}{MZ} = \frac{MH}{MW} \quad \text{(相似三角形對應邊)}$$

$$MS = \frac{(p-a)(a+r)}{a}$$

$$PS = PM + MS = \frac{a}{2} + \frac{(p-a)(a+r)}{a} = R$$

(7) 作弧⊙(D, DS)交 L 於 T，過 T 作 $TI \perp L$，交 PV 於 I，作弧⊙(P, PI)交 PA 於 F。
$DS = DT = PI = PF = QF = p - R = y$。

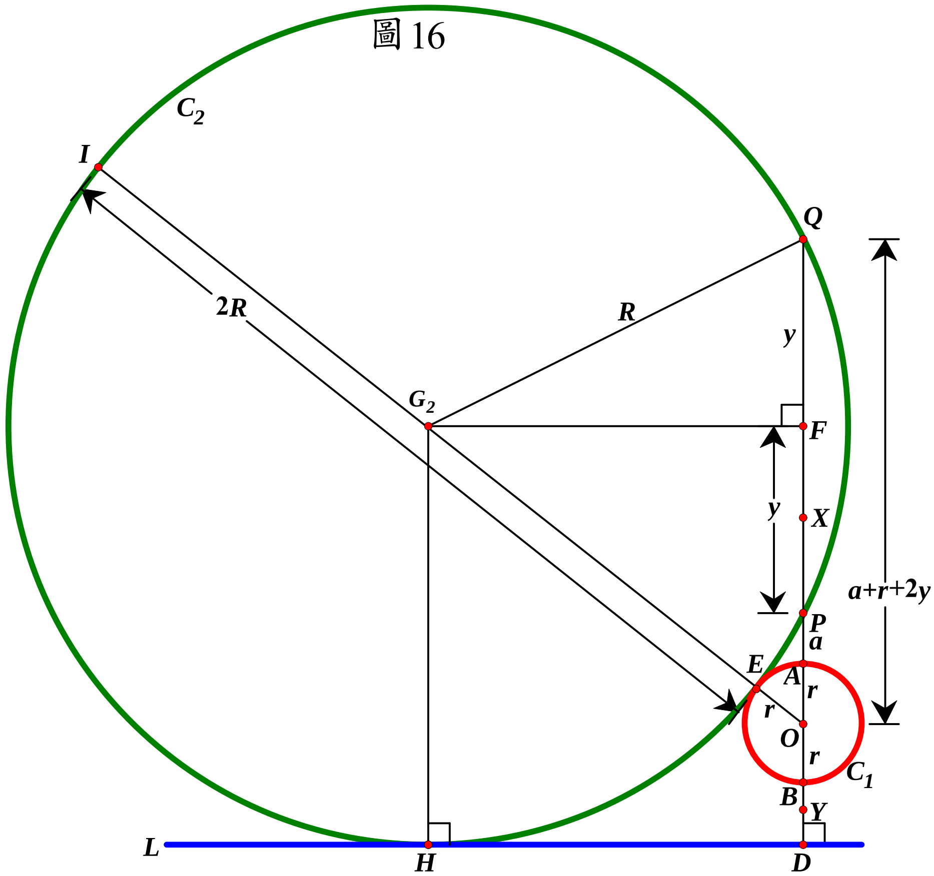
(8) 過 F 作 $G_2FG_3 \perp PD$，作弧⊙(P, PS)交 G_2FG_3 於 G_2 及 G_3。
$PG_2 = PG_3 = PS = R$

(9) 作圓 C_2⊙(G_2, R)及圓 C_3⊙(G_3, R)，交 PD 於 P 和 Q，則 C_2 及 C_3 為所需圓。

作圖及證明完畢。

情況 4.7，$XD > PD > AD$ (其中 X 為情況 4.5 的固定點)，分析如下：

圖 16



已知圓 $C_1\odot(O, r)$，圓 $C_2\odot(G_2, R)$為所需圓。C_1 與 C_2 互相外切於 E。Q、F、P、A、O、B 和 D 共綫且 $QD\perp L$ $(AD > BD)$及 D 在 L 上。L 切 C_2 於 H。P、Q 在 C_2 上$(QD > PD)$。$G_2H\perp L$ 及 $G_2F\perp PQ$。

設 $PF = y$，$PD = p$，$PA = a$，$AD = p - a$。

$G_2E = G_2H = G_2P = G_2Q = FD = R$

$PF = FQ = y$ (圓心至弦的垂綫平分弦)

$OP = PA + OA = a + r$, $OQ = OA + AQ = r + a + 2y$

$PF = FD - PD \Rightarrow y = R - p \cdots\cdots (1)$

$OP\cdot OQ = OE\cdot OI$ (於圓 C_2 應用相交弦定理)

$(a + r)(a + r + 2y) = r(r + 2R)$

$a^2 + 2ar + r^2 + 2(a + r)y = r^2 + 2rR$

$a^2 + 2ar + 2(a + r)y = 2rR \cdots\cdots (2)$

代(1)入(2)：

$a^2 + 2ar + 2(a + r)(R - p) = 2rR$

$a^2 + 2ar - 2(a + r)p + 2aR + 2rR = 2rR$

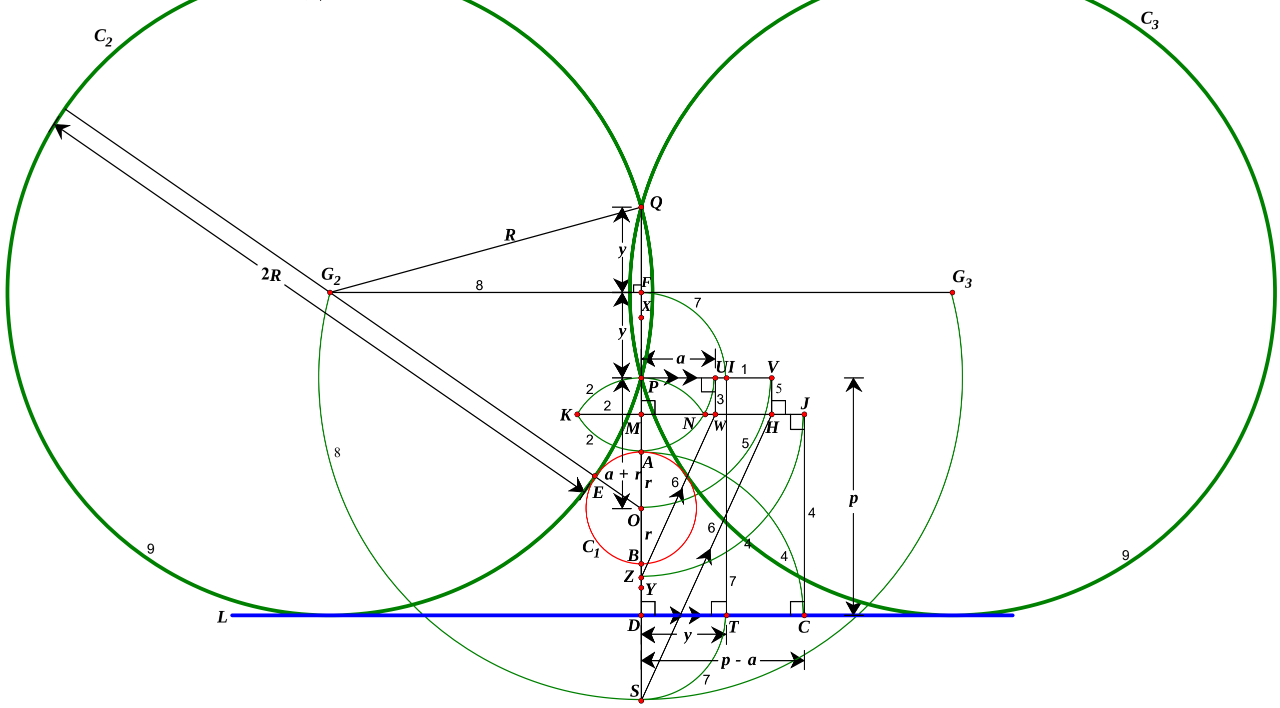
$2aR = a^2 + 2ap + 2rp - 2ar - 2a^2$

$2aR = a^2 + 2(p - a)(a + r)$

$R = \dfrac{a}{2} + \dfrac{(p-a)(a+r)}{a} \cdots\cdots (3)$

作圖方法如下(圖 17)：

圖17



(1) 過 P 作 $PV // L$。

(2) 作弧⊙(P, PA)及弧⊙(A, AP)交於 K、N，連接 KN。KN 為 PA 的中垂綫，交 PA 於 M。且弧⊙(P, PA)交 PV 於 U。$PU = PA = a$，$PM = MA = \frac{a}{2}$。

(3) 過 U 作 $UW \perp PV$，交 KN 的延綫於 W。$MW = PU = a$。

(4) 作弧⊙(D, DA)交 L 於 C，過 C 作 $CJ \perp L$，交 KN 的延綫於 J，作弧⊙(M,MJ)交 PD 於 Z。
$DA = DC = MJ = MZ = p - a$。

(5) 作弧⊙(P, PO)交 PV 於 V。過 V 作 $VH \perp PV$，交 KN 的延綫於 H。
$PV = PO = MH = a + r$。

(6) 連接 ZW，過 H 作 $HS // WZ$，交 PD 的延綫於 S。
易證：$\Delta MWZ \sim \Delta MHS$ (等角)

$$\frac{MS}{MZ} = \frac{MH}{MW} \quad \text{(相似三角形對應邊)}$$

$$MS = \frac{(p-a)(a+r)}{a}$$

$$PS = PM + MS = \frac{a}{2} + \frac{(p-a)(a+r)}{a} = R$$

(7) 作弧⊙(D, DS)交 L 於 T，過 T 作 $TI \perp L$，交 PV 於 I，作弧⊙(P, PI)交 AP 的延綫於 F。
$DS = DT = PI = PF = QF = R - p = y$。

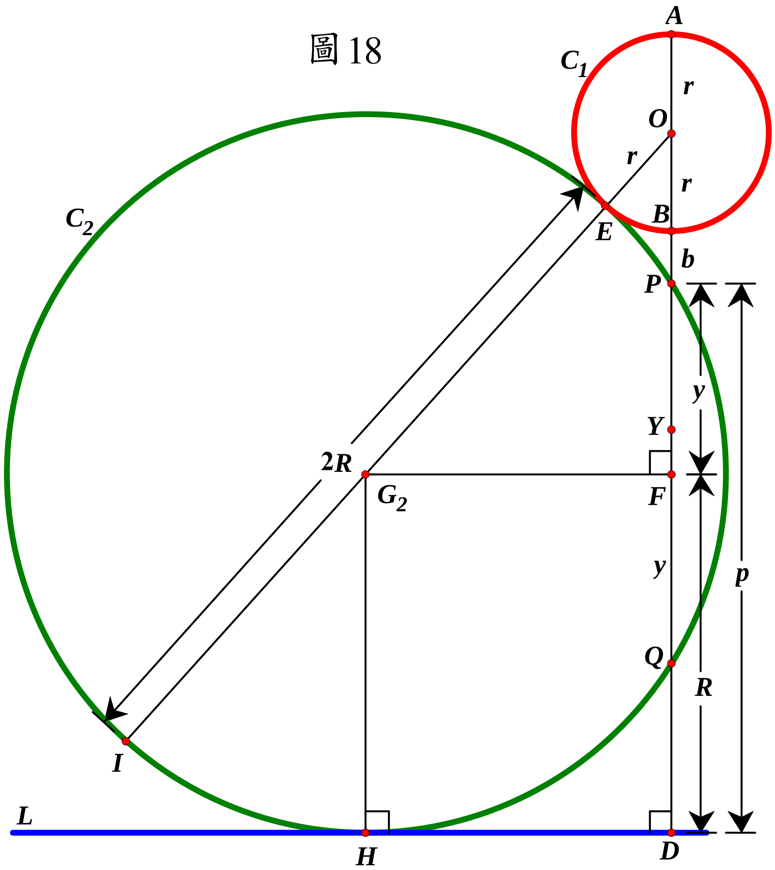
(8) 過 F 作 $G_2FG_3 \perp PD$，作弧⊙(P, PS)交 G_2FG_3 於 G_2 及 G_3。
$PG_2 = PG_3 = PS = R$

(9) 作圓 C_2⊙(G_2, R)及圓 C_3⊙(G_3, R)，交 DP 的延綫於 P 和 Q，則 C_2 及 C_3 為所需圓。

作圖及證明完畢。

情況 4.8，$BD > PD > YD$ (其中 Y 為情況 4.5 的固定點)，分析如下：

圖 18



已知圓 $C_1 \odot(O, r)$，圓 $C_2 \odot(G_2, R)$為所需圓。C_1與 C_2 互相外切於 E。A、O、B、P、F、Q和 D 共綫且 $AD \perp L$ ($AD > BD$)及 D 在 L 上。L 切 C_2於 H。P、Q 在 C_2 上($PD > QD$)。$G_2H \perp L$ 及 $G_2F \perp PQ$。

設 $PF = y$，$PD = p$，$PB = b$。

$G_2E = G_2H = G_2P = G_2Q = FD = R$

$PF = FQ = y$ (圓心至弦的垂綫平分弦)

$OP = PB + OB = b + r$, $OQ = OB + BQ = r + b + 2y$

$PF = PD - FD \Rightarrow y = p - R \cdots\cdots (1)$

$OP \cdot OQ = OE \cdot OI$ (於圓 C_2 應用相交弦定理)

$(b + r)(b + r + 2y) = r(r + 2R)$

$b^2 + 2br + r^2 + 2(b + r)y = r^2 + 2rR$

$b^2 + 2br + 2(b + r)y = 2rR \cdots\cdots (2)$

代(1)入(2)：

$b^2 + 2br + 2(b + r)(p - R) = 2rR$

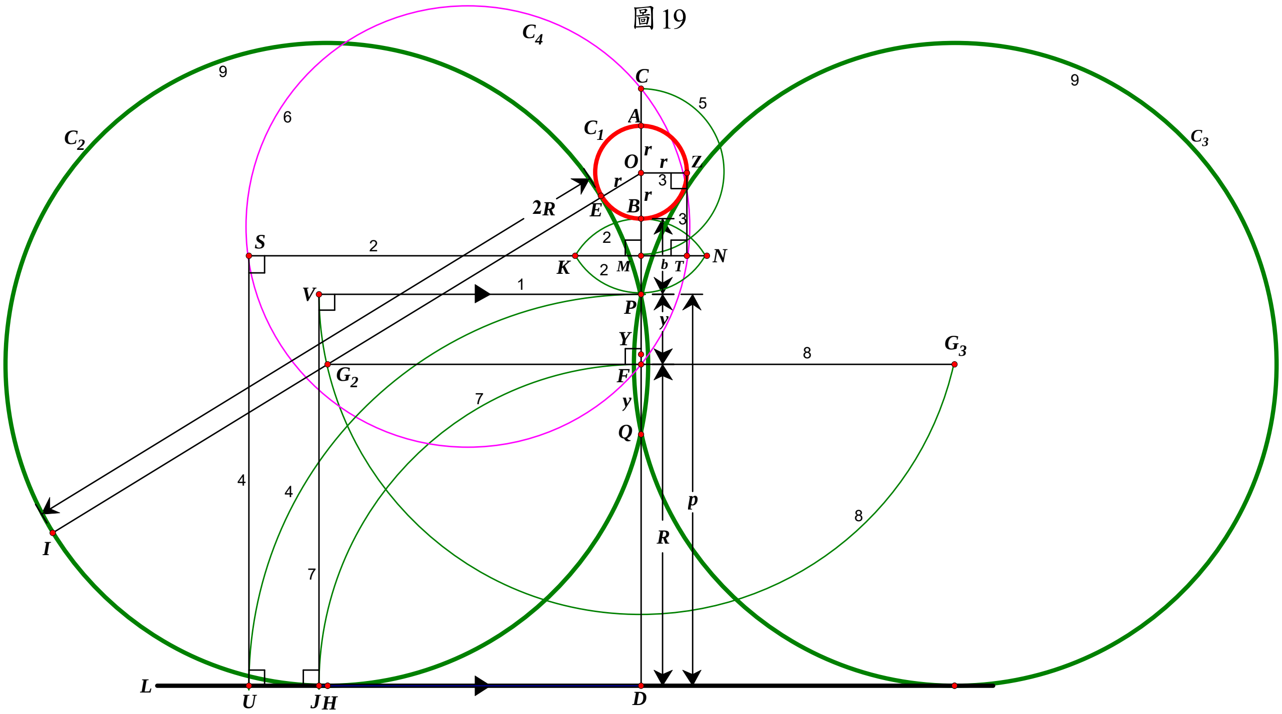
$b^2 + 2br + 2(b + r)p - 2bR - 2rR = 2rR$

$2(b + 2r)R = b(b + 2r) + 2(b + 2r)p - 2rp$

$R = \dfrac{b}{2} + p - \dfrac{rp}{b + 2r} \cdots\cdots (3)$

作圖方法及證明如下(圖 19)：

圖 19



(1) 過 P 作 $PV // L$。

(2) 作弧⊙(P, PB)及弧⊙(B, BP)交於 K、N，連接 KN。KN 為 PB 的中垂綫，交 PB 於 M。

$PB = b$，$MP = MB = \dfrac{b}{2}$。

(3) 過 O 作 $OZ // L$，交圓 C_1 於 Z。過 Z 作 $ZT \perp KN$，交 KN 於 T。$MT = OZ = r$。

(4) 作弧⊙(D, DP)交 L 於 U，過 U 作 $US \perp L$，交 NK 的延綫於 S。$DU = DP = MS = p$。

(5) 作半圓⊙(O, OM)交 DA 的延綫於 C。$CM = 2\left(r + \dfrac{b}{2}\right) = b + 2r$。

(6) 作 S、T、C 的外接圓 C_4，交 CD 於 F。

$MT \cdot MS = MC \cdot MF$ (於 C_4 應用相交圓定理)

$r \cdot p = (b + 2r)MF$ (相似三角形對應邊)

$MF = \dfrac{rp}{b+2r}$

$FD = MD - MF = MP + PD - MF = \dfrac{b}{2} + p - \dfrac{rp}{b+2r} = R$

(7) 作弧⊙(D, DF)交 L 於 J，過 J 作 $JV \perp L$，交 PV 於 V。$PV = DJ = DF = R$。

(8) 過 F 作 $G_2FG_3 \perp PD$，作弧⊙(P, PV)交 G_2FG_3 於 G_2 及 G_3。

$PG_2 = PG_3 = PV = R$

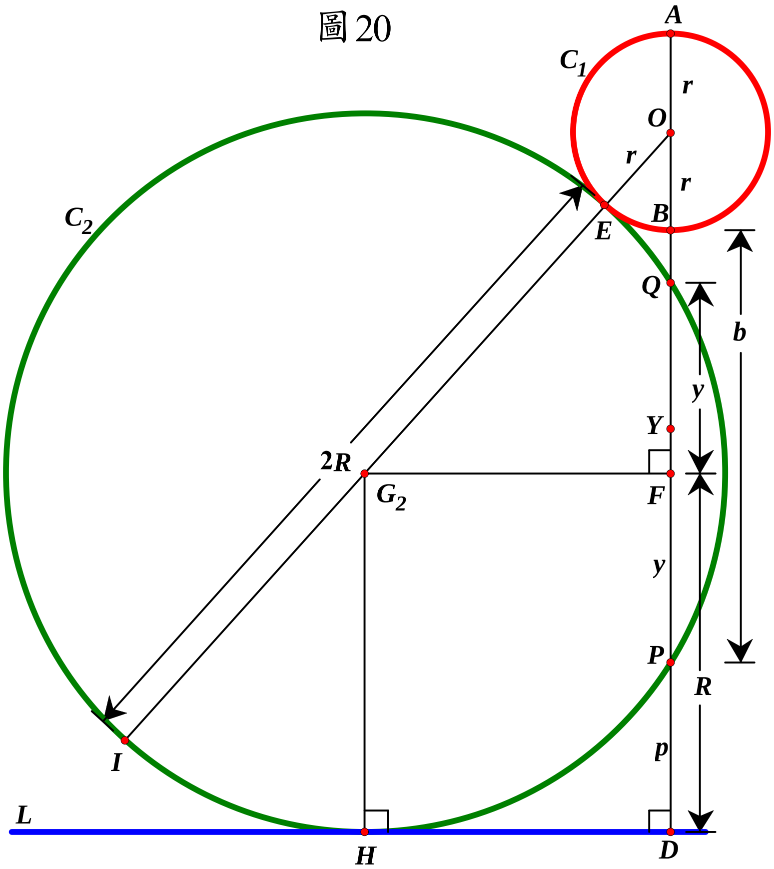
(9) 作圓 C_2⊙(G_2, R)及圓 C_3⊙(G_3, R)，交 PD 於 P 和 Q，則 C_2 及 C_3 為所需圓。

作圖及證明完畢。

註：點 J 並不在圓 C_2 上，L 切圓 C_2 於 H。

情況 4.9，$PD < YD$ (其中 Y 為情況 4.5 的固定點)，分析如下：。

圖 20



已知圓 $C_1 \odot (O, r)$，圓 $C_2 \odot (G_2, R)$為所需圓。C_1 與 C_2 互相外切於 E。A、O、B、Q、F、P 和 D 共綫且 $AD \perp L$ ($AD > BD$)及 D 在 L 上。L 切 C_2 於 H。P、Q 在 C_2 上($QD > PD$)。$G_2H \perp L$ 及 $G_2F \perp PQ$。

設 $PF = y$，$PD = p$，$BP = b$。

$G_2E = G_2H = G_2P = G_2Q = FD = R$

$PF = FQ = y$ (圓心至弦的垂綫平分弦)

$OP = OB + BP = r + b,\ OQ = OB + BQ = r + b - 2y$

$PF = FD - PD \Rightarrow y = R - p \cdots\cdots (1)$

$OP \cdot OQ = OE \cdot OI$ (於圓 C_2 應用相交弦定理)

$(b + r)(b + r - 2y) = r(r + 2R)$

$b^2 + 2br + r^2 - 2(b + r)y = r^2 + 2rR$

$b^2 + 2br - 2(b + r)y = 2rR \cdots\cdots (2)$

代(1)入(2)：

$b^2 + 2br - 2(b + r)(R - p) = 2rR$

$b^2 + 2br + 2(b + r)p - 2bR - 2rR = 2rR$

$2(b + 2r)R = b(b + 2r) + 2(b + 2r)p - 2rp$

$R = \dfrac{b}{2} + p - \dfrac{rp}{b + 2r} \cdots\cdots (3)$

作圖方法及證明如下(圖 21)：

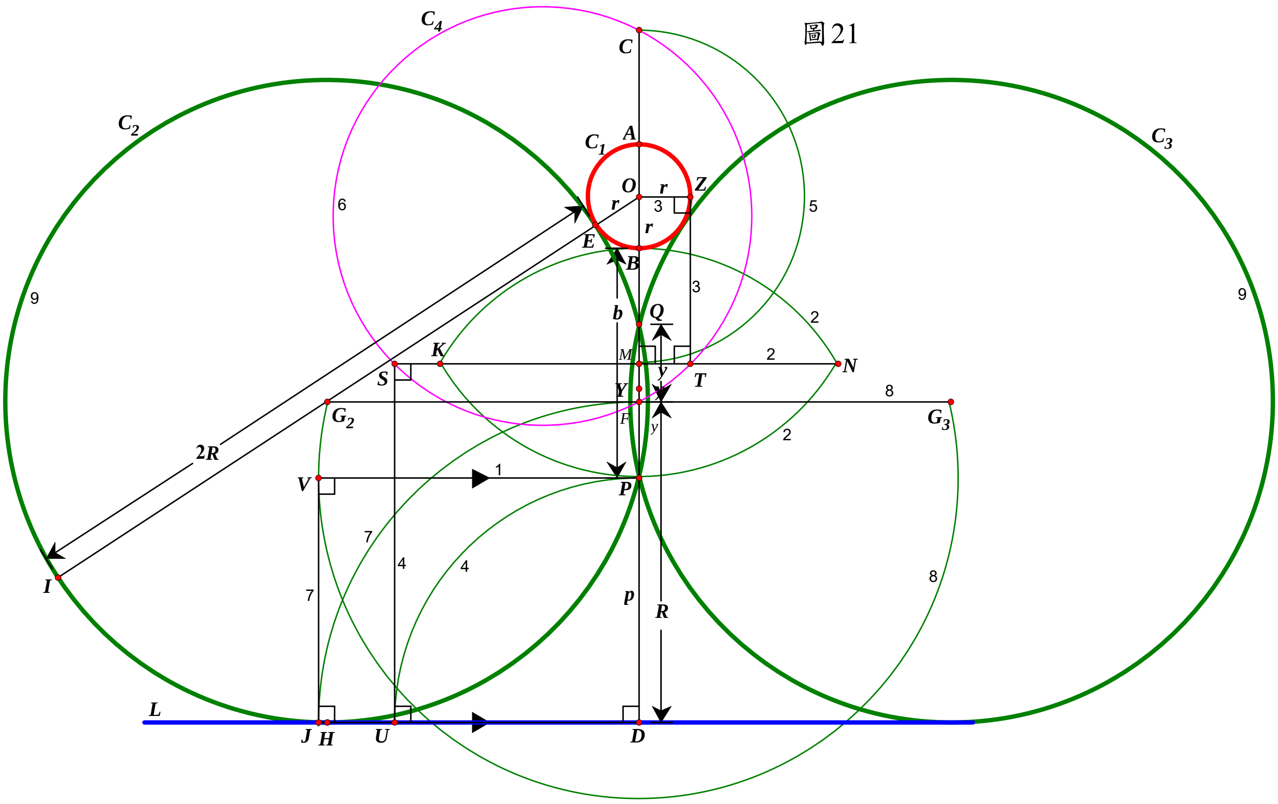


圖21

(1) 過 P 作 PV // L。

(2) 作弧⊙(P, PB)及弧⊙(B, BP)交於 K、N，連接 KN。KN 為 PB 的中垂綫，交 PB 於 M。

$PB = b$，$MP = MB = \dfrac{b}{2}$。

(3) 過 O 作 OZ // L，交圓 C_1 於 Z。過 Z 作 $ZT \perp KN$，交 KN 於 T。$MT = OZ = r$。

(4) 作弧⊙(D, DP)交 L 於 U，過 U 作 $US \perp L$，交 NK 的延綫於 S。$DU = DP = MS = p$。

(5) 作半圓⊙(O, OM)交 DA 的延綫於 C。$CM = 2\left(r + \dfrac{b}{2}\right) = b + 2r$。

(6) 作 S、T、C 的外接圓 C_4，交 CD 於 F。

$MT \cdot MS = MC \cdot MF$ (於 C_4 應用相交圓定理)

$r \cdot p = (b + 2r)MF$ (相似三角形對應邊)

$$MF = \frac{rp}{b+2r}$$

$$FD = MD - MF = MP + PD - MF = \frac{b}{2} + p - \frac{rp}{b+2r} = R$$

(7) 作弧⊙(D, DF)交 L 於 J，過 J 作 $JV \perp L$，交 PV 於 V。$PV = DJ = DF = R$。

(8) 過 F 作 $G_2FG_3 \perp PD$，作弧⊙(P, PV)交 G_2FG_3 於 G_2 及 G_3。

$PG_2 = PG_3 = PV = R$

(9) 作圓 C_2⊙(G_2, R)及圓 C_3⊙(G_3, R)，交 CD 於 P 和 Q，則 C_2 及 C_3 為所需圓。

作圖及證明完畢。

註：點 J 並不在圓 C_2 上，L 切圓 C_2 於 H。

已給直綫 L，一圓 C(圓心 O)與 L 相交，一點 P 在 C 外及不在 L 上，且 P 和 O 在 L 的相反一方。作二圓經過 P，外切 C，且與 L 相切。

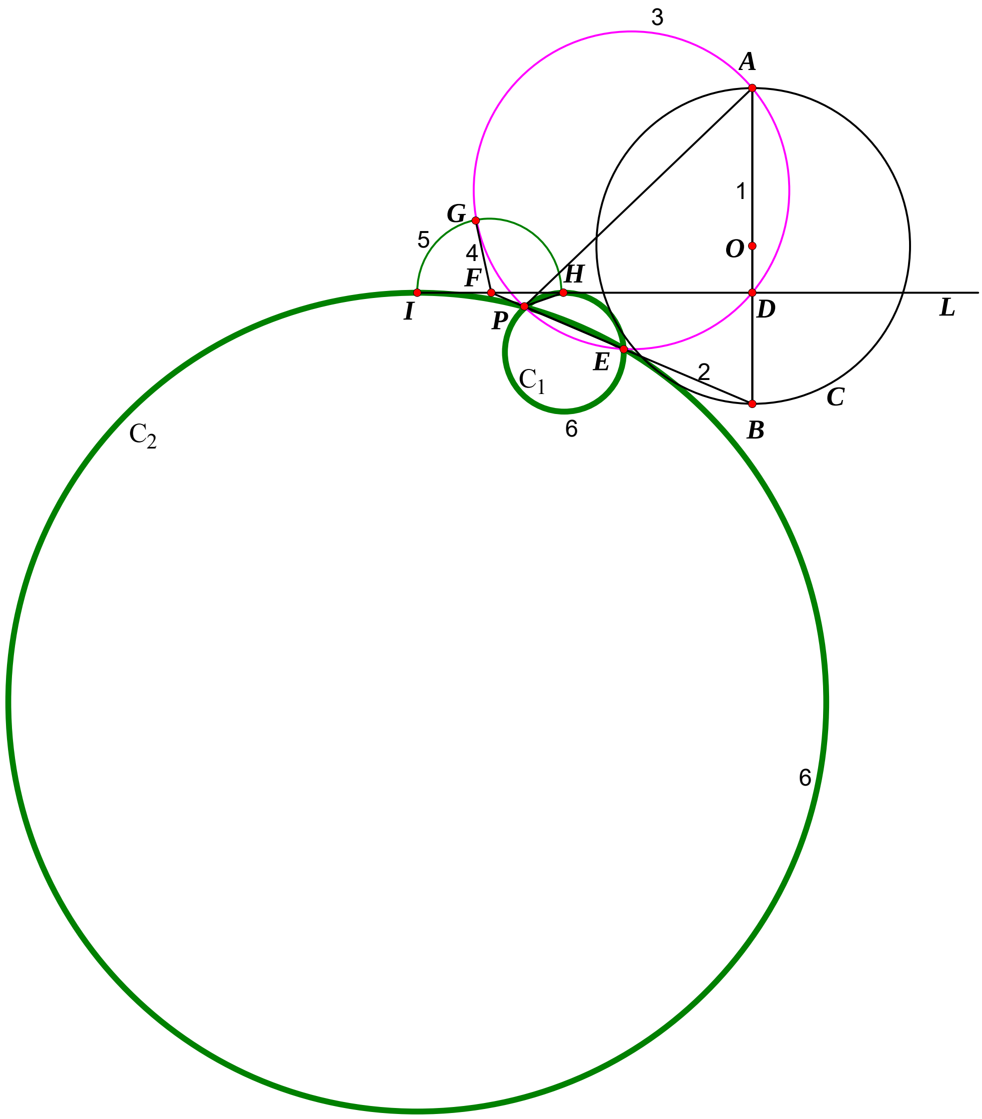


圖 22

作圖方法如下(圖 22)：

(1) 過 O 作直綫 AOB 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 A(與 O 在 L 的同一方)和 B(與 O 在 L 的相反一方)。

(2) 連接 BP，其延長綫交 L 於 F。(若 $BP \parallel L$，分析方法與第 3 頁相同)

(3) 作ΔADP 的外接圓，交 BF 於 E。(若 A、B、P 共綫，分析方法與第 4–13 頁相同)

(4) 由外點 F 引切綫 FG 至步驟(3)的圓上，切該圓於 G。

(5) 作一半圓$\odot(F, FG)$，交 L 於 H(在 F 和 D 之間)及 I(在 DF 的延長綫上)。

(6) 作ΔEHP 的外接圓 C_1 及ΔEIP 的外接圓 C_2。

作圖完畢，證明從略。

已給直綫 L，一圓 C(圓心 O)與 L 不相交，一點 P 在 C 外及不在 L 上，且 P 和 O 在 L 的同一方。作二圓經過 P，內切 C，且與 L 相切。

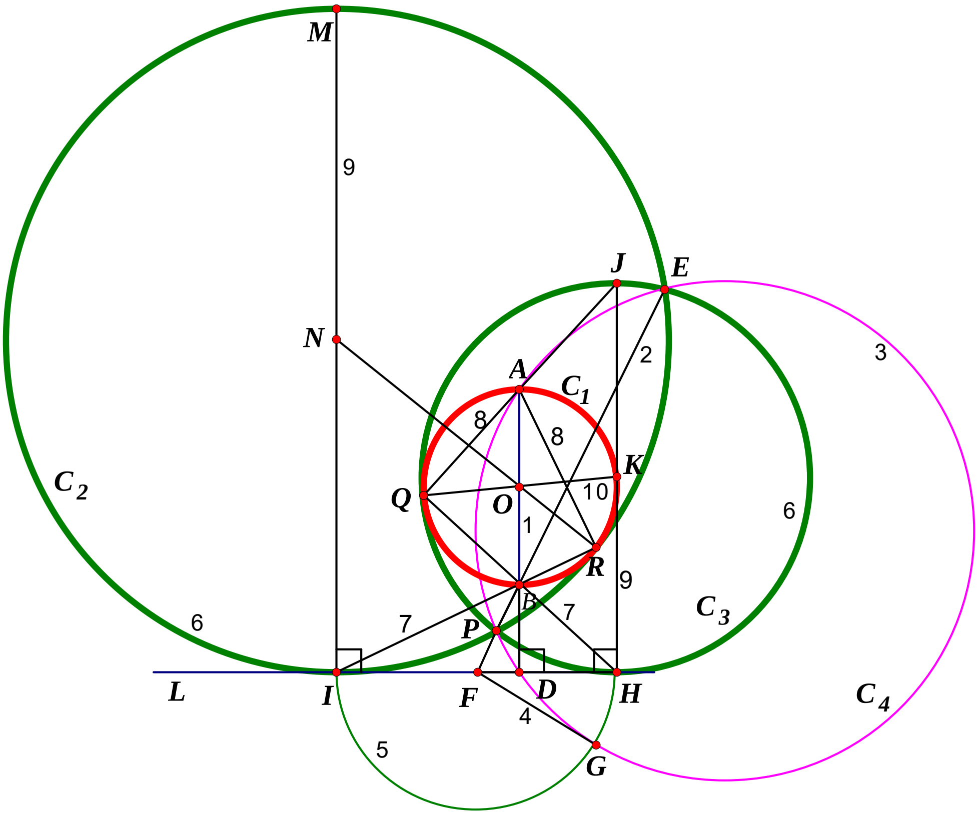


圖 23

作圖方法如下(圖 23)：

(1) 過 O 作 AOD 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 A 和 $B(AD > BD)$。
(2) 連接 BP，其延長綫交 L 於 F。
(3) 作ΔADP 的外接圓 C_4，交 FB 的延長綫於 E。
(4) 由外點 F 引切綫 FG 至步驟(3)的圓上，切該圓於 G。
(5) 作一半圓$\odot(F, FG)$，交 L 於 H(在 FD 的延長綫上)及 I(在 DF 的延長綫上)。
(6) 作ΔEHP 的外接圓 C_1 及ΔEIP 的外接圓 C_2。
(7) 連接 HB，其延長線交圓 C_1 於 Q。連接 IB，其延長線交圓 C_1 於 R。
(8) 連接 AQ、AR。
(9) 過 H 作 JH 垂直於 L，交圓 C_3 於 J。過 I 作一綫段 IM 垂直於 L，交圓 C_2 於 M。
(10) 連接 QO，其延長綫交 JH 於 K。連接 RO，其延長綫交 IM 於 N。

作圖完畢。

註一：若 P 和 O 在 L 的相反一方，由於 F 點在步驟(3)的圓內，故未能由 F 引切綫至該圓上，所以不能完成步驟(4)。

註二：若圓 C 與 L 相交或相切，同理也不能作內切圓。

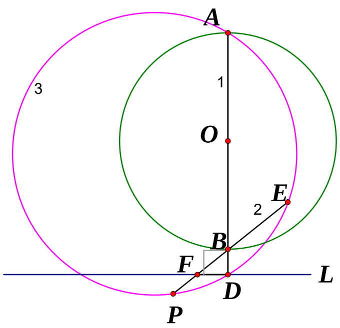


圖 24

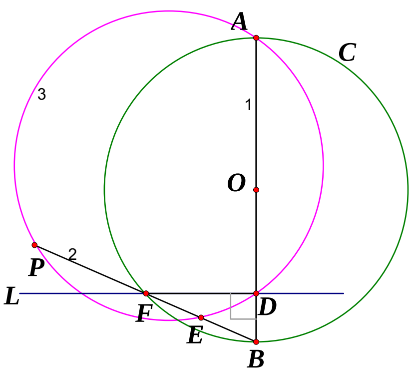


圖 25

證明如下：

考慮步驟(3)的圓 C_4。

$FE \times FP = FG^2$ (相交弦定理)

$\because FG = FH$ (半徑)

$\therefore FE \times FP = FH^2$

$\therefore FH$ 是圓 C_3 的切綫 (相交弦定理的逆定理)

即 L 切圓 C_3 於 H。

$\angle AQB = 90° = \angle BDH$ (半圓上的圓周角)

A、Q、D、H 四點共圓。 (同弓形上的圓周角的逆定理)

$AB \cdot BD = QB \cdot BH \cdots\cdots (1)$ (相交弦定理)

$AB \cdot BD = PB \cdot BE \cdots\cdots (2)$ (於圓 ADP 應用相交弦定理)

$(1) = (2)$: $QB \cdot BH = PB \cdot BE$ (等量代換)

$\therefore E$、H、P、Q 四點共圓。 (相交弦定理的逆定理)

JH 為圓 C_3 的直徑 (切綫 L 切圓 C_1 於 H，且 $JH \perp L$)

$\angle BDF = 90° = \angle KHD$ (由作圖所得)

$OB \parallel JH$ (同位角相等)

$\angle QBO = \angle QHK$ (同位角，$OB \parallel JH$)

$\angle BQO = \angle HQK$ (公共角)

$\Delta BOQ \sim \Delta HKQ$ (等角)

$\angle AQB = 90° = \angle HQJ$ (半圓上的圓周角)

$\angle AQB - \angle BQO = \angle HQJ - \angle HQK$ (等量代換)

$\therefore \angle AQO = \angle JQK$

$\Delta AOQ \sim \Delta JKQ$ (等角)

$\frac{KQ}{KH} = \frac{OQ}{OB}$ 及 $\frac{KQ}{KJ} = \frac{OQ}{OA}$ (相似三角形的對應邊)

$\because OQ = OB$ 及 $OQ = OA$ (圓 C 的半徑)

$\therefore KQ = KH$ 及 $KQ = KJ$

$\Rightarrow KH = KJ$

$\therefore K$ 為圓 C_3 的圓心

Q、O、K 共綫。

$QK - OK = QO$

圓 C_1 與圓 C_3 內切於 Q。

利用相似的方法，可證明 C_2 為另一內切圓，滿足所需條件。證明完畢。

討論 3：若 $BP \parallel L$，則在第 15 頁的步驟 3 BP 與 L 沒有交點，分析方法和作圖方法與第 3 頁註 3 相同。

討論 4：若 A、D、P 共綫，則在第 15 頁的步驟 4 不能作外接圓 C_4，分析方法和作圖方法與第 4–13 頁註 4 相同。