

作三角形的內心

Created by Mr. Francis Hung

Last updated: 2023-07-03

在已知三角形中，試作出一點使它與該三角形各邊的距離相等。¹

首先，已給出 $\angle ABC$ (圖 1)，我們找出一點 D 的軌跡，使得 D 至 AB 和 BC 的距離相等。

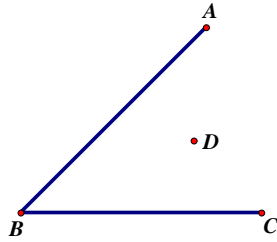


圖 1

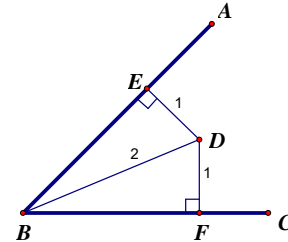


圖 2

(1) 過 D 作垂直線至 AB 和 BC ， E 及 F 為垂足 (圖 2)。

(2) 連接 BD ，則

$$BD = BD$$

(公共邊)

$$\angle BED = \angle BFD = 90^\circ$$

(由作圖所得)

$$DE = DF$$

(已知 D 至 AB 與 BC 等距)

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BDF$$

(R.H.S.)

$$\angle DBE = \angle DBF$$

(全等三角形的對應角)

$\therefore D$ 在 $\angle ABC$ 的角平分線上。

\therefore 若一點 P 與該三角形各邊的距離相等，則 P 必定在該三角形的三條角平分線的交點。
(即 $\triangle ABC$ 的內心)

作圖方法如下(圖 3)：

(1) 作 $\angle ABC$ 的角平分線。

(2) 作 $\angle ACB$ 的角平分線。

P 為兩條角平分線的交點。

(3) 連接 AP 。

(4) 分別過 P 作垂直線至 BC 、 AC 及 AB ， R 、 S 、 T 為對應的垂足。

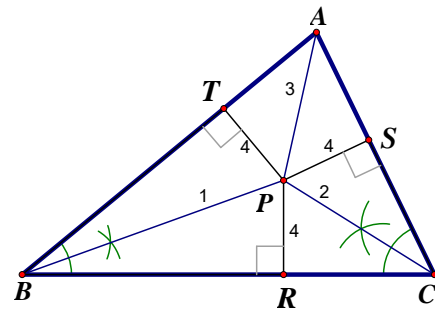


圖 3

作圖完畢。

證明如下：

$$\triangle BPR \cong \triangle BPT \quad (\text{A.A.S.})$$

$$\triangle CPR \cong \triangle CPS \quad (\text{A.A.S.})$$

$$PT = PR = PS \quad (\text{全等三角形的對應邊})$$

證明完畢。

若以 P 為圓心， PR 為半徑作一圓，此圓內切於三角形的三邊，稱為內切圓(**inscribed circle**)。(圖 4)

延伸：可進一步證明三條角平分線必然共點。

$$\text{證明：} \triangle APT \cong \triangle APS \quad (\text{R.H.S.})$$

$$\angle PAT = \angle PAS \quad (\text{全等三角形的對應角})$$

$\therefore AP$ 為 $\angle BAC$ 是角平分線

\therefore 三條角平分線必然共點

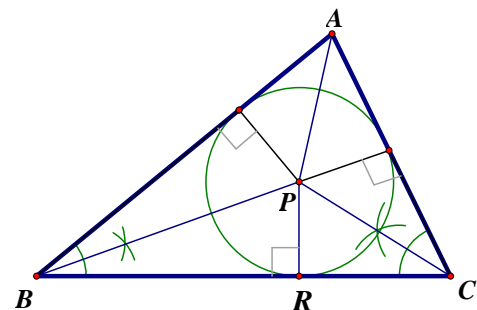


圖 4

註一： \therefore 三條角平分線必然共點(**concurrent at a point**)

\therefore 我們只須找出其中兩條角平分線的交點，便可找出三角形的內心。

¹香港數學競賽 2009 初賽(幾何作圖)樣本題第 1 題

作三角形的旁心

Created by Mr. Francis Hung

Last updated: 2023-07-03

註二：三角形有三個旁心，每個旁心皆與每條邊等距。現在，只作其中一個旁心，作為示範。

作圖方法如下(圖 5)：

- (1) 將 AB 延長至 S ，將 AC 延長至 T 。
- (2) 分別作 $\angle ABC$ 的外角平分綫和 $\angle ACB$ 的外角平分綫。兩條外角平分綫相交於 I 。
- (3) 過 I ，分別作綫段 IP 、 IQ 、 IR 垂直於 BC 、 AC 及 AB 。 P 、 Q 、 R 為對應之垂足。
- (4) 連接 AI 。 AI 為 $\angle BAC$ 的內角平分綫。

作圖完畢。

證明如下：

$$\triangle IBP \cong \triangle IBR \quad (\text{A.A.S.})$$

$$\triangle ICP \cong \triangle ICQ \quad (\text{A.A.S.})$$

$$\therefore IP = IQ = IR \quad (\text{全等三角形的對應邊})$$

$\therefore I$ 與 AB 、 BC 及 AC 等距。

$$\triangle IAR \cong \triangle IAQ \quad (\text{R.H.S.})$$

$$\angle IAR = \angle IAQ \quad (\text{全等三角形的對應角})$$

$\therefore IA$ 為 $\angle BAC$ 的內角平分綫

三角形的兩條外角平分綫和一條內角平分綫共點。

證明完畢。

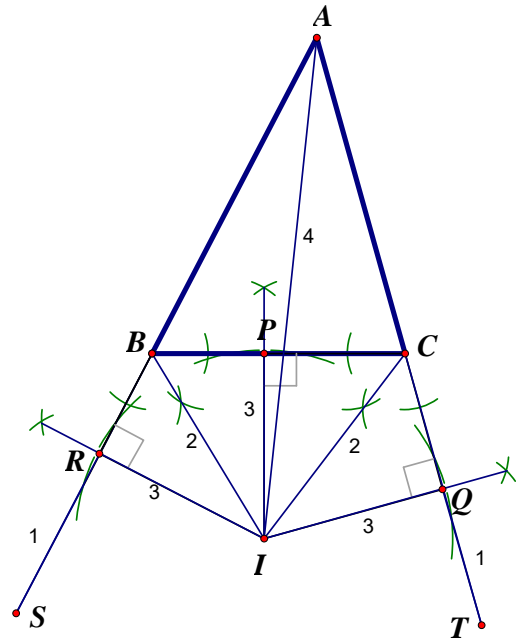


圖 5

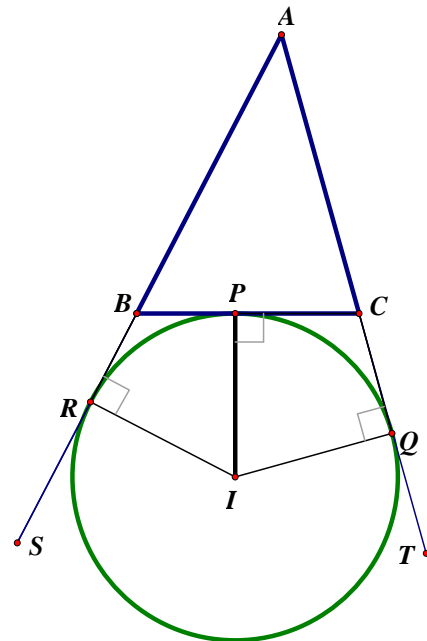


圖 6

註：若以 I 為圓心， IP 為半徑作一圓，此圓旁切於三角形的三邊，稱為旁切圓(escribed circle or ex-circle)(圖 6)。