

**Hong Kong Mathematics Olympiad (1995–96)**  
**Heat Event (Individual)**

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

1. 已知  $4^{x-3} = 8^{x-2}$ ，求  $x$  的值。  
Find the value of  $x$  if  $4^{x-3} = 8^{x-2}$ .
2. 已知  $f\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}$ ，求  $f(x^3)$  的值。  
If  $f\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}$ , find  $f(x^3)$ .
3. 考慮  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ ，求  $100!$  的末尾 0 的數目。  
By considering  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ , find the number of trailing zeros of  $100!$ .
4. 能滿足不等式  $n^{200} < 5^{300}$  的最大整數  $n$  是多少？  
What is the largest integral value  $n$  that satisfies the inequality  $n^{200} < 5^{300}$ ?
5. 三個面值 \$0.1、\$3 和 \$5 的郵票共有 110 個，這組郵票共值 \$100。求 \$3 郵票的數目。  
A set of 110 stamps of the denominations of \$0.1, \$3, \$5 worth \$100 in total.  
Find the number of \$3 stamps in the set of stamps.
6. 對於任何數值  $m$ ，直線  $y = mx + 2m + 2$  必經一定點  $P$ 。求  $P$  之座標。  
For any value of  $m$ , a straight line  $y = mx + 2m + 2$  passes through a fixed point  $P$ . Find the coordinates of  $P$ .
7. 若各數字可重複選用，從數字 4, 5, 6, 7, 8, 9 中，可組成多少個 3 位數？  
How many 3-digit numbers can be made from the figures 4, 5, 6, 7, 8, 9 when repetitions are allowed?
8. 將  $2.\dot{3}\dot{1}$  以分數表示。  
Express  $2.\dot{3}\dot{1}$  as a fraction.
9. 若  $x$  及  $y$  為正整數及  $x - y = 5$ ，求  $x^2 - y^2 + 5$  之最小值。  
If  $x$  and  $y$  are positive integers and  $x - y = 5$ , find the least value of  $x^2 - y^2 + 5$ .
10. 因式分解  $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ 。  
Factorize  $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ .

\*\*\* 試卷完 End of Paper \*\*\*

**Hong Kong Mathematics Olympiad (1995 – 96)**  
**Heat Event (Group)**

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

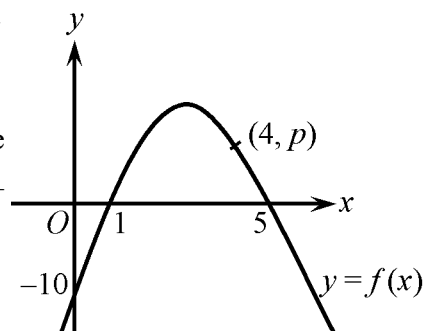
時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

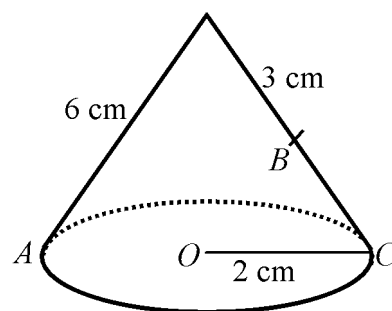
1. 圖中二次函數曲線  $y=f(x)$  切  $x$ -軸於點  $(1, 0)$  和  $(5, 0)$ ，及  $y$ -軸於點  $(0, -10)$ 。求  $p$  的值。

In the figure, the quadratic curve  $y=f(x)$  cuts the  $x$ -axis at the two points  $(1, 0)$  and  $(5, 0)$  and the  $y$ -axis at the point  $(0, -10)$ . Find the value of  $p$ .



2. 在圖中  $O$  是圓錐體底部的圓心； $A$ 、 $B$ 、 $C$  及  $O$  躺於同一平面上。若螞蟻在圓錐曲面上由  $A$  走到  $B$ ，找出由  $A$  到  $B$  的最短路綫的長度。

In the figure,  $O$  is the centre of the base circle of a cone and the points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $O$  lie in the same plane. An ant walks from  $A$  to  $B$  on the surface of the cone. Find the length of the shortest path from  $A$  to  $B$ .



3. 當一疊面值 7020 元的十元紙幣被等分給  $x$  人時，餘下 650 元。把剩下的 650 元換成 5 元硬幣再等分給  $x$  人時，餘下 195 元。求  $x$  的值。

When a sum of \$7020, in the form of ten-dollar notes, is divided equally among  $x$  persons, \$650 remains. When this sum \$650 is changed to five-dollar coins and then divided equally among the  $x$  persons, \$195 remains. Find the value of  $x$ .

4. 射擊比賽中，根據統計紀錄， $A$  每 5 發射擊，有一發落空， $B$  每 4 發射擊則有一發落空，而  $C$  每 3 發射擊則有一發落空。

若  $A$ 、 $B$ 、 $C$  同時各發一槍，求  $A$ 、 $B$  命中而  $C$  落空的概率。

In a shooting competition, according to statistics,  $A$  misses one in every 5 shoots,  $B$  misses one in every 4 shoots and  $C$  misses one in every 3 shoots. Find the probability of obtaining successful shoots by  $A$ ,  $B$  but not  $C$ .

5. Given that  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , find the value of  $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$ .

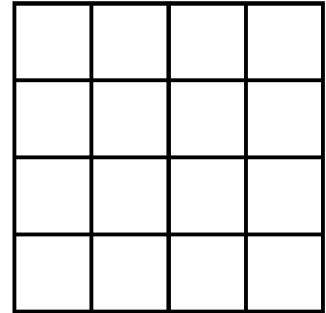
已知  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ，求  $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$  之值。

6. 若三位數  $A$  加上 3，新數的三個數字之和為原先  $A$  的三位數之和的三分之一。求所有這些可能的數目  $A$  的總和。

If 3 is added to a 3-digit number  $A$ , the sum of the digits of the new number is  $\frac{1}{3}$  of the value of the sum of digits of the original number  $A$ . Find the sum of all such possible numbers  $A$ .

7. 圖中每個小正方形的邊長為 1 單位。求圖中所有可能組成之長方形(包括正方形)的面積之和。

In the figure, the side of each smaller square is 1 unit long. Find the sum of the area of all possible rectangles (squares included) that can be formed in the figure.



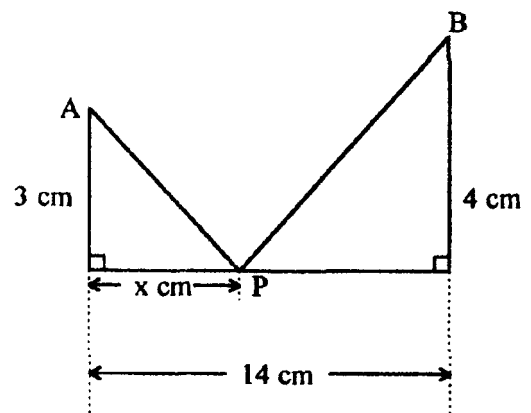
8. 若質數  $a, b$  為二次方程  $x^2 - 21x + t = 0$  的根，求  $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$  的值。

If prime numbers  $a, b$  are the roots of the quadratic equation  $x^2 - 21x + t = 0$ ,

find the value of  $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$ .

9. 求  $x$  的值使得圖中路綫  $APB$  的長度最小。

Find the value of  $x$  such that the length of the path  $APB$  in the figure is the smallest.



10. 求總數  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 123456789^2$  的個位數。

Find the units digit of the sum  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 123456789^2$ .