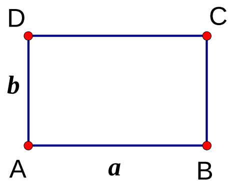
化長方形為長方形

Created by Mr. Francis Hung　　　　Last updated: 2018-09-01

如圖 2，已給一長方形，邊長為 $a \times b$，作一面積相等的長方形，其中一邊為 x。



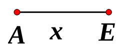


圖 1

參考：Exercises in Technical Drawing for GCE 1970 p.32 Q9

化長方形為長方形

作圖方法如下：

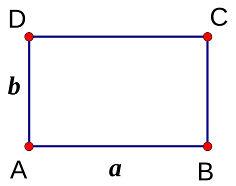


圖 2

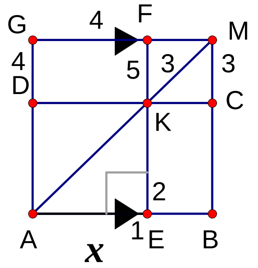


圖 3

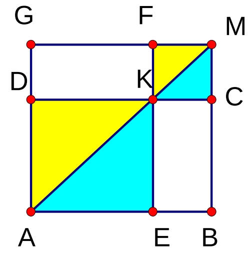


圖 4

假設 $x < a$ (圖 3)。

(1)　作 E 點使得 $AE = x$。

(2)　過 E 作 EK 垂直於 AB，交 CD 於 K。

(3)　連接 AK，其延長綫交 BC 的延長綫於 M。

(4)　過 M 作 GM 平行於 AB，交 AD 的延長綫於 G。

(5)　延長 EK 交 MG 於 F。

$AEFG$ 便是該長方形了。作圖完畢。

證明如下(圖 4)：

$\Delta AMG \cong \Delta MAB$　　(S.S.S.)

$\Delta AKD \cong \Delta KAE$　　(S.S.S.)

$\Delta KMF \cong \Delta MKC$　　(S.S.S.)

$\therefore$ 長方形 $GFKD$ 的面積 = 長方形 $BCKE$ 的面積

$\therefore$ 長方形 $ABCD$ 的面積 = 長方形 $AEFG$ 的面積

證明完畢。

假設 $x \geq a$ (圖 5)。

(1)　延長 AB，作 E 點使得 $AE = x$。

(2)　過 E 作 EK 垂直於 AB，交 DC 的延長綫於 K。

(3)　連接 AK，交 BC 於 M。

(4)　過 M 作 FMG 平行於 BA，交 KE 於 F、及交 AD 於 G。

$AEFG$ 便是該長方形了。作圖完畢。

證明從略。

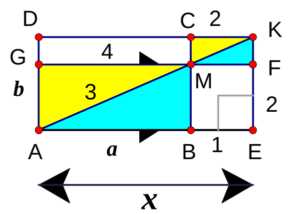


圖 5

方法二：(由趙聿修紀念中學葉嘉皓提供)

(1)　以 B 為圓心，BC 為半徑，作一弧，交 AB 的延長綫於 E。

(2)　延長 BC 至 F，使得 $BF = x$。

(3)　連接 AF、連接 EF。

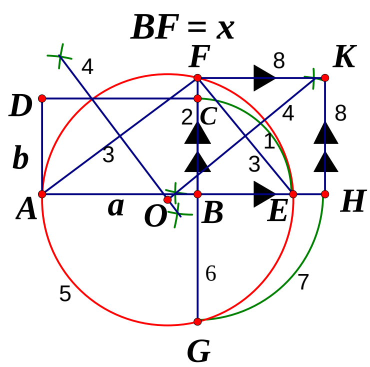
(4)　作 AE 的垂直平分綫，作 FE 的垂直平分綫，交於 O。

(5)　以 O 為圓心，OF 為半徑，作外接圓通過 A、F 和 E。

(6)　延長 FB 交此外接圓於 G。

(7)　以 B 為圓心，BG 為半徑，作一弧，交 AB 的延長綫於 H。

(8)　過 F 作 $FK \,//\, BH$，過 H 作 $HK \,//\, BF$，交於 K



$BHKF$ 便是該長方形了。作圖完畢。

證明如下：

$BH = BG$

$AB \times BE = BF \times BG$　　(相交弦定理)

$\Rightarrow AB \times BC = x \times BH$

$\therefore ABCD$ 的面積 $= BHKF$ 的面積

註： 以上方法不能化長方形的面積為正方形的面積。讀者可參考以下方法：

已給一長方形，邊長為 $a\times b$，作一正方形，其面積與長方形相等。

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2018-09-01

作圖方法如下：(圖六)

假設該長方形為 $PQRS$，其中 $PQ = a$，$QR = b$。

(1) 以 R 為圓心，RS 為半徑作一弧，交 QR 的延長線於 G。

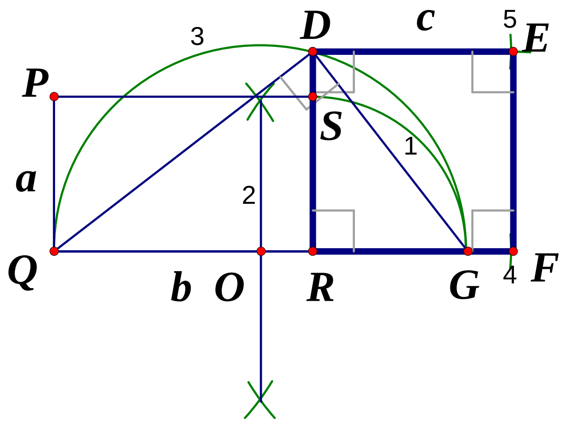
(2) 作 QG 的垂直平分線，O 為 QG 的中點。

(3) 以 O 為圓心，OQ 為半徑作一半圓，交 RS 的延長線於 D，連接 QD、DG。

(4) 以 R 為圓心，RD 為半徑作一弧，交 QR 的延長線於 F。

(5) 以 F 為圓心，FR 為半徑作一弧，以 D 為圓心，DR 為半徑作一弧，兩弧相交於 E。

(6) 連接 DE、FE。



圖六

作圖完畢，證明如下：

$\angle GDQ = 90^\circ$ (半圓上的圓周角)

$RG = RS = a$

$\Delta DRG \sim \Delta QRD$ (等角)

$\dfrac{RG}{DR} = \dfrac{DR}{QR}$ (相似三角形三邊成比例)

$DR^2 = ab$ …… (1)

$RF = DR = DE = EF$ (半徑相等)

$\angle DRF = 90^\circ$ (直線上的鄰角)

$\therefore$ $DEFR$ 便是該正方形，其面積與長方形 $PQRS$ 相等。(由(1)式得知)

證明完畢。

參考：Exercises in Technical Drawing for GCE 1970 p.32 Q9