

**Hong Kong Mathematics Olympiad 1997-1998**  
**Heat Event (Individual)**

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

1. 已知  $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$  能被  $(x - a)$  和  $(x - 2a)$  整除，且  $a$  為整數。求  $a$  的值。

Given that  $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$  is divisible by  $(x - a)$  and  $(x - 2a)$ , where  $a$  is an integer, find the value of  $a$ .

2. 已知  $8, a, b$  形成一等差級數，且  $a, b, 36$  形成一等比級數。

若  $a$  和  $b$  皆為正數，求  $a, b$  的和。

Given that  $8, a, b$  form an A.P. and  $a, b, 36$  form a G.P.

If  $a$  and  $b$  are both positive numbers, find the sum of  $a$  and  $b$ .

3. 求下列方程式的最小實根： $\frac{x}{(x-4)(x+3)} = \frac{x}{(x+4)(x-6)}$ 。

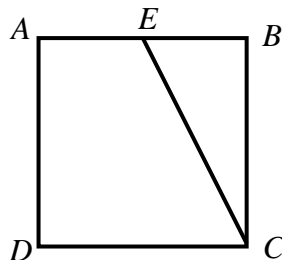
Find the smallest real root of the following equation:  $\frac{x}{(x-4)(x+3)} = \frac{x}{(x+4)(x-6)}$ .

4. 在圖一， $ABCD$  為一正方形。 $E$  為  $AB$  上的一點，使得  $BE = 1$  及  $CE = 2$ 。

求正方形  $ABCD$  的面積。

In figure 1,  $ABCD$  is a square.  $E$  is a point on  $AB$  such that  $BE = 1$  and  $CE = 2$ .

Find the area of the square  $ABCD$ .



圖一

Figure 1

5. 若  $2x + 3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$ ，求  $x$  的值。

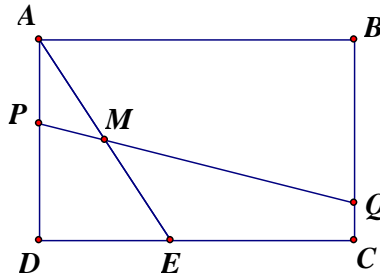
If  $2x + 3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$ , find the value of  $x$ .

6. 已知  $n$  為一小於 1000 的正整數。若  $n$  能被 3 或 5 整除，求  $n$  之可能數值有多少個。

Given that  $n$  is a positive integer which is less than 1000. If  $n$  is divisible by 3 or 5, find the number of possible values of  $n$ .

7. 在圖二， $ABCD$  為一長方形，其中  $CD = 12$ ，且  $E$  為  $CD$  上一點，使得  $DE = 5$ 。  
若  $M$  為  $AE$  的中點，而  $P$ 、 $Q$  為兩點分別躺於  $AD$  和  $BC$  上，使得  $PMQ$  為一直線。  
若  $PM : MQ = 5 : k$ ，求  $k$  的值。

In figure 2,  $ABCD$  is a rectangle with  $CD = 12$ .  $E$  is a point on  $CD$  such that  $DE = 5$ .  $M$  is the mid-point of  $AE$  and  $P$ ,  $Q$  are points on  $AD$  and  $BC$  respectively such that  $PMQ$  is a straight line. If  $PM : MQ = 5 : k$ , find the value of  $k$ .



圖二

Figure 2

8. 求  $6^{20} - 5^{12} - 8$  值的末位數字。

Find the last digit of the value of  $6^{20} - 5^{12} - 8$ .

9. 設  $a$  為方程  $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{5}{2}$  的正根，求  $a$  的數值。

Let  $a$  be the positive root of the equation  $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{5}{2}$ , find the value of  $a$ .

10. 求 240 的所有正因數的和。

Find the sum of all positive factors of 240.

# Hong Kong Mathematics Olympiad 1997-1998

## Heat Event (Group)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

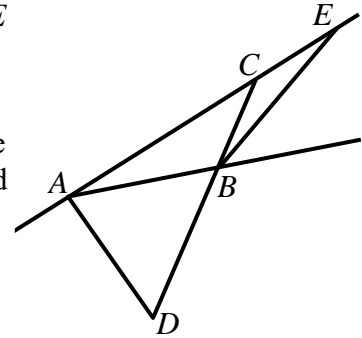
1. 若  $x + \frac{1}{x} = 2$ ，求  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  的值。

If  $x + \frac{1}{x} = 2$ , find the value of  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ .

2. 在圖一， $ABC$  是一三角形，外角  $A$  和  $B$  的角平分綫  $AD$  和  $BE$  分別交  $CB$  和  $AC$  的延綫於  $D$  和  $E$ 。設  $AD = BE = AB$  和  $\angle BAC = a^\circ$ ，求  $a$  的值。

In Figure 1,  $ABC$  is a triangle.  $AD$  and  $BE$  are the bisectors of the exterior angles  $A$  and  $B$  respectively meeting  $CB$  and  $AC$  produced at  $D$  and  $E$ . Let  $AD = BE = AB$  and  $\angle BAC = a^\circ$ .

Find the value of  $a$ .



圖一 Figure 1

3. 若  $-6 \leq a \leq 4$  及  $3 \leq b \leq 6$ ，求  $a^2 - b^2$  的最大值。

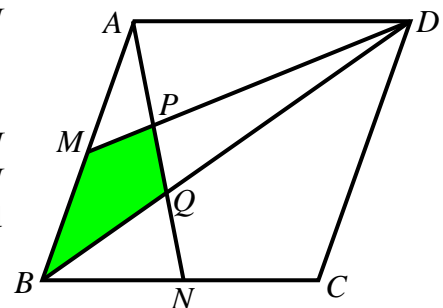
If  $-6 \leq a \leq 4$  and  $3 \leq b \leq 6$ , find the greatest value of  $a^2 - b^2$ .

4. 給出整數  $a, b, c$ ，使得  $a^2 = b^3 = c$ 。若  $c > 1$ ，求  $c$  的最小值。

Let  $a, b, c$  be integers such that  $a^2 = b^3 = c$ . If  $c > 1$ , find the smallest value of  $c$ .

5. 在圖二，平行四邊形  $ABCD$  之面積為 120。點  $M$  和  $N$  分別為邊  $AB$  及  $BC$  之中點。 $AN$  與  $MD$  及  $BD$  分別相交於點  $P$  及  $Q$ 。求  $BQPM$  的面積。

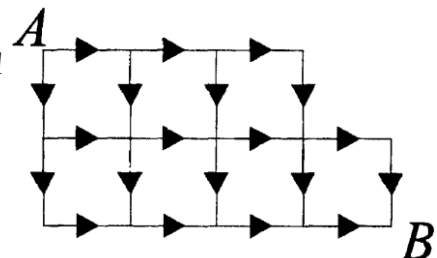
In figure 2, the area of the parallelogram  $ABCD$  is 120.  $M$  and  $N$  are the mid-points of  $AB$  and  $BC$  respectively.  $AN$  intersects  $MD$  and  $BD$  at points  $P$  and  $Q$  respectively. Find the area of  $BQPM$ .



圖二 Figure 2

6. 在圖三，沿箭頭方向前進，求  $A$  到  $B$  點的不同路綫數目。

In figure 3, find the number of possible paths from point  $A$  to point  $B$  following the direction of arrow heads.

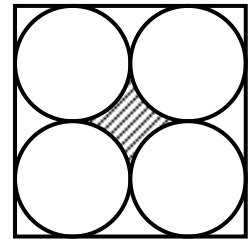


圖三 Figure 3

7. 求方程  $(x-2)(2x-1) = 5$  的最小實根。

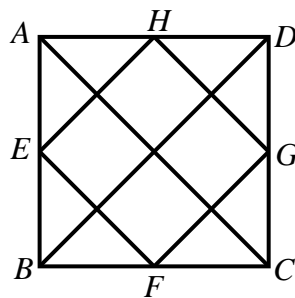
Find the smallest real root of the equation  $(x-2)(2x-1) = 5$ .

8. 在圖四，四個半徑為 1 的圓緊緊地放在一個正方形內。求陰影部分的面積。(答案準確至最接近之整數)。  
In Figure 4, four circles with radius 1 touch each other inside a square. Find the shaded area. (Correct your answer to the nearest integer.)



圖四 Figure 4

9. 在圖五， $ABCD$  為正方形。點  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分別為邊  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  之中點，求圖中直角三角形的數目。  
In figure 5,  $ABCD$  is a square and points  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  are the mid-points of sides  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  respectively, find the number of right-angled triangles in the figure.



圖五 Figure 5

10. 某測驗共有 25 題多項選擇題。每題答對得 4 分，答錯扣 1 分。  
某學生全答所有題目，得分 70，問該生共答對多少題？  
A test is composed of 25 multiple-choice questions. 4 marks will be awarded for each correct answer and 1 mark will be deducted for each incorrect answer. A pupil answered all questions and got 70 marks. How many questions did the pupil answer correctly?