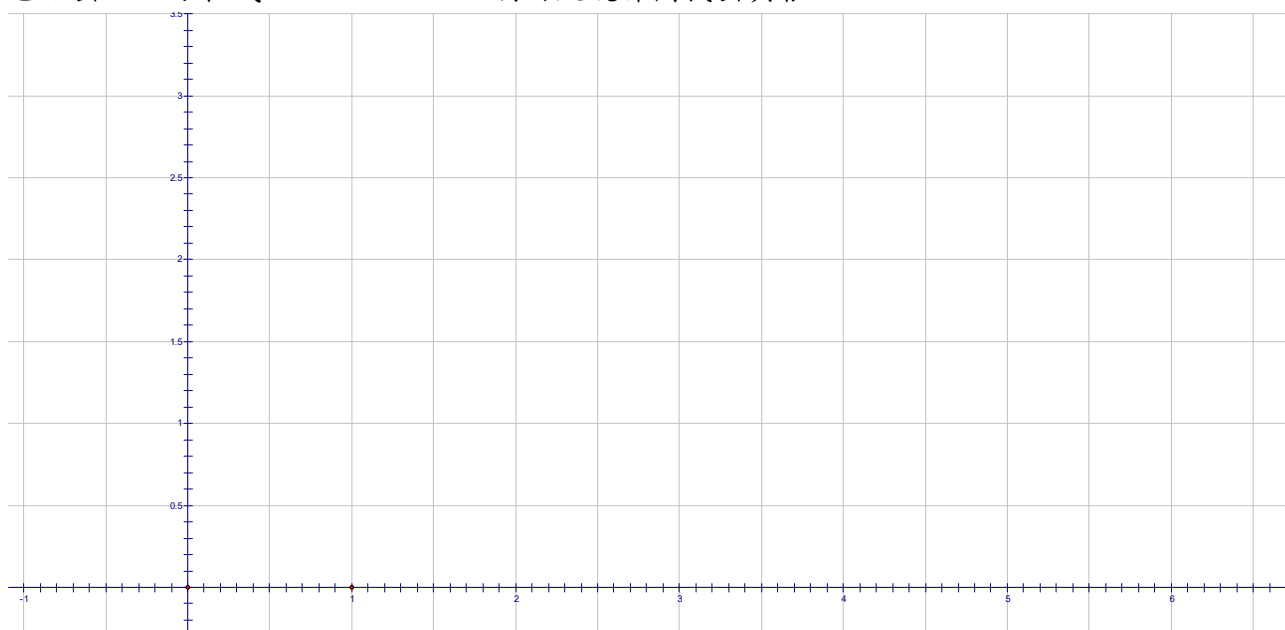


利用尺規作圖解二次方程式

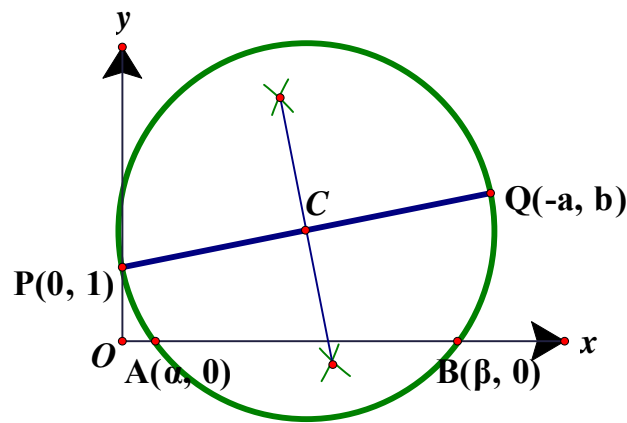
Created by Mr. Francis Hung

Last updated: 2023-07-03

已給出二次方程式 $x^2 - 5x + 3 = 0$ ，利用尺規作圖找出其根。¹



¹翻譯自 “Benjamin Bold” 著作的 “Famous Problems of Geometry and How to solve them”



圖一

作圖方法如下(圖一)：

- (1) 在直角座標系統點出 $P(0, 1)$ 及 $Q(-a, b)$ 。
- (2) 利用垂直平分線，找出 PQ 之中點 C ， $PC = CQ$ 。
- (3) 以 C 為圓心， $CP = CQ$ 為半徑作一圓。 PCQ 為直徑。
- (4) 若該圓交 x -軸於 A 、 B ，則 A 、 B 的 x -座標便是該二次方程式的解。

作圖完畢。

證明如下：

圓公式為 $\frac{y-b}{x+a} \cdot \frac{y-1}{x-0} = -1$ (直徑表達式)

代入 $y=0$ 且兩邊交叉相乘得

$$b = -(x^2 + ax)$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$\therefore A$ 、 B 的 x -座標便是該二次方程式的解。

證明完畢。

當然，若該圓與 x -軸沒有交點，則 $x^2 + ax + b = 0$ 沒有解。

若該圓與 x -軸只有一個交點，則 $x^2 + ax + b = 0$ 便有二重根。