

只用圓規平分兩已知點

作圖方法由教育局數學教育組吳銳堅博士提供

Last updated: 2011-11-26

已給兩已知點 A 、 B ，只用圓規找出 A 、 B 的中點。（ A 、 B 不重疊）

$B \cdot \quad \cdot A$

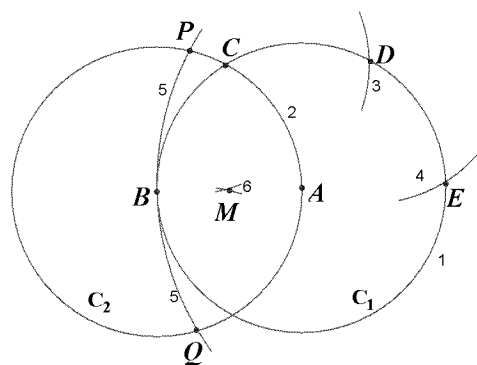
只用圓規平分兩已知點

作圖方法由教育局數學教育組吳銳堅博士提供

Last updated: 2011-11-26

作圖方法如下：

- (1) 以 A 為圓心， AB 為半徑作一圓 C_1 。
- (2) 以 B 為圓心， BA 為半徑作一圓 C_2 ，交圓 C_1 於 C 。
- (3) 以 C 為圓心， CA 為半徑作一弧，交圓 C_1 於 D 。
- (4) 以 D 為圓心， DA 為半徑作一弧，交圓 C_1 於 E 。
- (5) 以 E 為圓心， EB 為半徑作一弧，交圓 C_2 於 P 、 Q 。
- (6) 以 P 為圓心， PB 為半徑作一弧；以 Q 為圓心， QB 為半徑作一弧；兩弧相交於 M 。



作圖完畢，證明如下：

設 $AB = r$

易證 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ADE$ 為等邊三角形。

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = 60^\circ$$

$$\angle BAE = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$\therefore BAE$ 為一平角

$\Rightarrow BE$ 為圓 C_1 的直徑，即 $BE = 2r$ 。

$$BE = EP = EQ = 2r$$

$\triangle BEP$ 及 $\triangle BEQ$ 為全等的等腰三角形

$$\angle PBE = \angle QBE \dots (1)$$

$$PB = PM = QB = QM = r$$

$\therefore PBQM$ 為一菱形

$\Rightarrow BM$ 平分 $\angle PBQ \dots (2)$

考慮 $\triangle BEP$ 及 $\triangle BPM$ ：

$$\angle EBP = \angle PBM$$

$$PB = PM$$

$\therefore \triangle BPM$ 為等腰三角形

$$\angle PMB = \angle PBM$$

$\therefore \triangle BEP$ 及 $\triangle BPM$ 中有兩對角相同

$$\triangle BEP \sim \triangle BPM$$

$$\frac{BM}{BP} = \frac{BP}{BE}$$

$$\frac{BM}{r} = \frac{r}{2r}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{1}{2}r$$

$$\therefore \angle PBM = \angle PBE$$

$\therefore B$ 、 M 、 E 共線

$\Rightarrow B$ 、 M 、 A 共線

$\Rightarrow M$ 為 AB 的中點

證明完畢。

(S.S.S.)

(全等三角形對應邊相等)

(由作圖所得)

(菱形的性質)

(由(1)式及(2)式得知)

(由作圖所得)

(等腰三角形底角相同)

(等角)

(相似三角形三邊成比例)