

作中綫

Created by Mr. Francis Hung

Last updated: 2023-07-03

已給三段長度為 b 、 c 、 m 的綫段，若 x 滿足 $b^2 + c^2 = 2m^2 + 2x^2$ ，

作長度為 x 的綫段。¹

作圖方法如下(圖一)：

作三角形 ABC ，其中邊長 $BC = 2m$ ， $AC = b$ ， $AB = c$ 。

利用垂直平分綫，找出 BC 之中點 D ， $BD = m = DC$ 。

設 $AD = x$ ， $\angle ADC = \theta$ ， $\angle ADB = 180^\circ - \theta$ (直綫上的鄰角)

$$\cos \theta = \frac{m^2 + x^2 - b^2}{2mx} \quad \dots (1) \quad (\triangle ACD \text{ 餘弦定理})$$

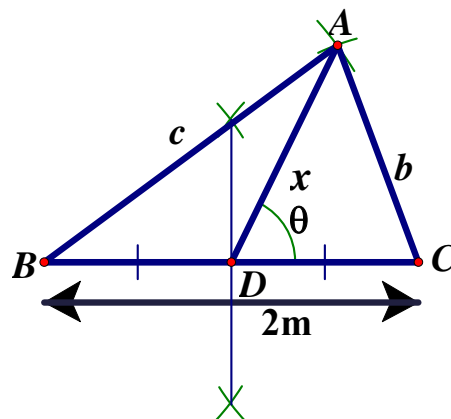
$$\cos (180^\circ - \theta) = \frac{m^2 + x^2 - c^2}{2mx} \quad \dots (2) \quad (\triangle ABD \text{ 餘弦定理})$$

$$\therefore \cos (180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$(1) + (2): 0 = \frac{m^2 + x^2 - b^2}{2mx} + \frac{m^2 + x^2 - c^2}{2mx}$$

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2x^2$$

$\therefore AD = x$ 為題目要求的綫段，亦即中綫。



圖一

¹題目源自 1954 HKU O level Mathematics Paper 2 Q3 (c)

Using the result in (a), derive a construction of the length x from the equation

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2x^2 \text{ when the lengths } b, c \text{ and } m \text{ are given.}$$