

Hong Kong Mathematics Olympiad 2002-2003
Heat Event (Individual)

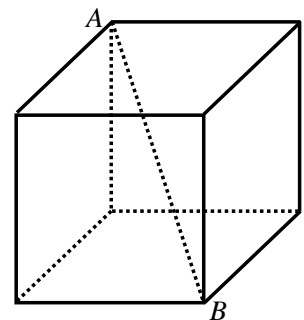
除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

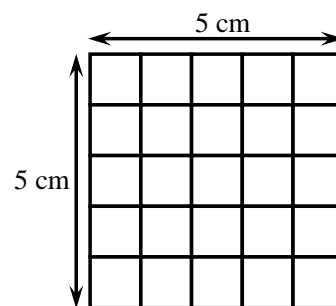
1. 設 f 是一函數，使對所有整數 m 及 n ， $f(m)$ 是整數及 $f(mn) = f(m)f(n)$ 。
已知當 $9 > m > n$ 時， $f(m) > f(n)$ ，且 $f(2) = 3$ 及 $f(6) > 22$ ，求 $f(3)$ 的值。
Let f be a function such that for all integers m and n , $f(m)$ is an integer and $f(mn) = f(m)f(n)$. It is given that $f(m) > f(n)$ when $9 > m > n$, $f(2) = 3$ and $f(6) > 22$, find the value of $f(3)$.
2. 若 $P = \frac{1}{4}$ ，求 $P \log_2 P$ 的值。
If $P = \frac{1}{4}$, find the value of $P \log_2 P$.
3. 若 $0 \leq x \leq 1$ ，求 $\left[\log_{10} \left(\frac{99999x+1}{1000} \right) \right]^2$ 的最大值。
If $0 \leq x \leq 1$, find the maximum value of $\left[\log_{10} \left(\frac{99999x+1}{1000} \right) \right]^2$.
4. 已知 0 及 1 是二次方程 $a(x+1)(x+2) + b(x+2)(x+3) + c(x+3)(x+1) = 0$ 的根。
若 $k = \frac{a}{b}$ ，求 k 的值。
Given that a quadratic equation $a(x+1)(x+2) + b(x+2)(x+3) + c(x+3)(x+1) = 0$ has roots 0 and 1, and $k = \frac{a}{b}$, find the value of k .
5. 課室內有 n 個人，若每個人恰好跟其他人各握手一次，則共有 28 次握手，求 n 的值。
There are n persons in the classroom. If each person in the classroom shakes hands exactly once with each other person in the classroom and there are altogether 28 handshakes. Find the value of n .
6. 若對任意 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ， $\cot \frac{1}{4}x - \cot x \equiv \frac{\sin kx}{\left(\sin \frac{1}{4}x \right)(\sin x)}$ ，其中 k 是一常數，求 k 的值。
If for any $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ， $\cot \frac{1}{4}x - \cot x \equiv \frac{\sin kx}{\left(\sin \frac{1}{4}x \right)(\sin x)}$ ，where k is a constant, find the value of k .
7. 圖一中，正方體的對角線 AB 的長度是 $\sqrt{12}$ cm。
若該正方體的體積是 $M \text{ cm}^3$ ，求 M 的值。
In Figure 1, AB is a diagonal of the cube and $AB = \sqrt{12}$ cm.
If the volume of the cube is $M \text{ cm}^3$, find the value of M .



圖一 Figure 1

8. 圖二中，一個面積為 25 cm^2 的正方形被分成 25 個邊長為 1 cm 的小正方形。若圖中共有 K 個不同的正方形，求 K 的值。

In Figure 2, a square with area equal to 25 cm^2 is divided into 25 small squares with side length equal to 1 cm . If the total number of different squares in the figure is K , find the value of K .



圖二 Figure 2

9. 已知六位數 $N = \overline{x1527y}$ 是 4 的倍數，且 N 被 11 除餘 5。求 $x+y$ 的值。
It is given that the 6-digit number $N = \overline{x1527y}$ is a multiple of 4, and the remainder is 5 when N is divided by 11. Find the value of $x+y$.
10. 一個三角形的三邊長分別是 7.5 cm 、 11 cm 和 $x \text{ cm}$ 。若 x 為整數，求 x 的最小值。
The sides of a triangle have lengths 7.5 cm , 11 cm and $x \text{ cm}$ respectively.
If x is an integer, find the minimum value of x .

Hong Kong Mathematics Olympiad 2002-2003
Heat Event (Group)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

1. 若 $k = \frac{1}{4 \times 5 \times 6} + \frac{1}{5 \times 6 \times 7} + \frac{1}{6 \times 7 \times 8} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100 \times 101}$ ，求 k 的值。

If $k = \frac{1}{4 \times 5 \times 6} + \frac{1}{5 \times 6 \times 7} + \frac{1}{6 \times 7 \times 8} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100 \times 101}$, find the value of k .

2. 若 $x > 1$, $y > 0$, 且 $x^y + x^{-y} = 2\sqrt{2}$ 及 $x^y - x^{-y} = k$, 求 k 的值。

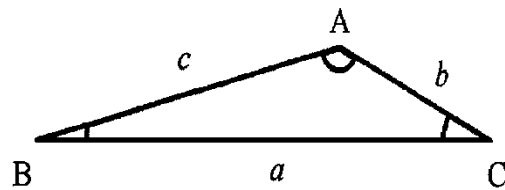
Suppose $x^y + x^{-y} = 2\sqrt{2}$ and $x^y - x^{-y} = k$, where $x > 1$ and $y > 0$, find the value of k .

3. 圖一中， $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 2 : 1$,

$a : b : c = 2 : k : 1$, 求 k 的值。

In Figure 1, $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 2 : 1$,

$a : b : c = 2 : k : 1$, find the value of k .



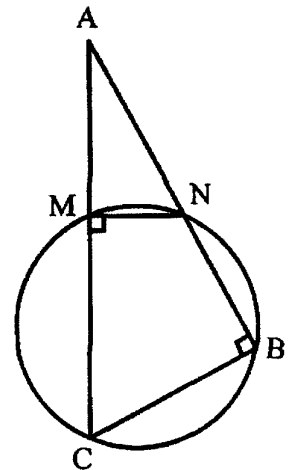
圖一 Figure 1

4. 圖二中， AMC 和 ANB 為直線， $\angle NMC = \angle NBC = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 3$ ， $\triangle AMN$ 及 $\triangle ABC$ 面積之比為 $1 : 4$ 。

求圓形 $BNMC$ 的半徑。

In Figure 1, AMC and ANB are straight lines, $\angle NMC = \angle NBC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 3$, areas of $\triangle AMN$ and $\triangle ABC$ are in the ratio $1 : 4$.

Find the radius of the circle $BNMC$.



圖二 Figure 2

5. 對任意實數 a ，方程 $x^2 + ax + 3b - a + 2 = 0$ 都有實數解，求 b 的最大值。

If the equation $x^2 + ax + 3b - a + 2 = 0$ has real root(s) for any real number a , find the maximum value of b .

6. 設拋物線 $y = 4x^2 - 5x + c$ 與 x -軸相交於 $(\cos \theta, 0)$ 及 $(\cos \phi, 0)$ 。

若 θ 和 ϕ 分別為一直角三角形中兩銳角的角度，求 c 的值。

Suppose the parabola $y = 4x^2 - 5x + c$ intersects the x -axis at $(\cos \theta, 0)$ and $(\cos \phi, 0)$ respectively.

If θ and ϕ are two acute angles of a right-angled triangle, find the value of c .

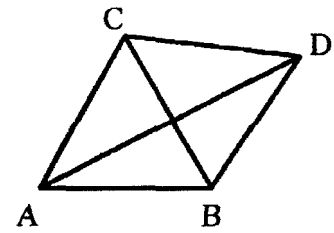
7. 設直線 $y + 3x - 4 = 0$ 與拋物線 $y = x^2$ 相交於 A 及 B 。若 O 為原點，求 $\triangle OAB$ 的面積。

Suppose the straight line $y + 3x - 4 = 0$ intersects the parabola $y = x^2$ at points A and B respectively. If O is the origin, find the area of $\triangle OAB$.

8. 圖三中， $AC = BC = CD$ ， $\angle ACB = 80^\circ$ 。
若 $\angle ADB = x^\circ$ ，求 x 的值。

In Figure 3, $AC = BC = CD$, $\angle ACB = 80^\circ$.

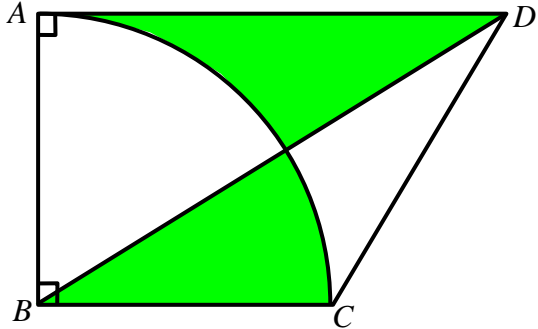
If $\angle ADB = x^\circ$, find the value of x .



圖三 Figure 3

9. 圖四中，扇形 ABC 為半徑是 4 cm 的圓的四分之一，且兩個陰影部分的面積相等。設梯形 $ABCD$ 的面積為 $A \text{ cm}^2$ ，求 A 的值。(取 $\pi = 3.14$)

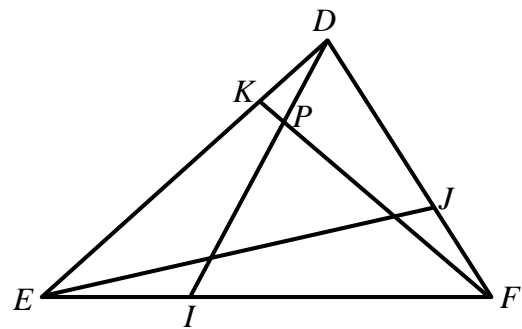
In Figure 4, the sector ABC is one quarter of a circle with radius 4 cm. Suppose the areas of the two shaded parts are equal. Let the area of the trapezium $ABCD$ be $A \text{ cm}^2$, find the area of A . (Take $\pi = 3.14$)



圖四 Figure 4

10. 圖五中， $\triangle DEF$ 的面積是 30 cm^2 。EIF、DJF 及 DKE 皆為直線。P 是 DI 和 FK 的相交點，
 $EI : IF = 1 : 2$ ， $FJ : JD = 3 : 4$ ， $DK : KE = 2 : 3$ 。
設 $\triangle DFP$ 的面積為 $B \text{ cm}^2$ ，求 B 的值。

In Figure 5, the area of $\triangle DEF$ is 30 cm^2 . EIF, DJF and DKE are straight lines. P is the intersection point of DI and FK. Let $EI : IF = 1 : 2$, $FJ : JD = 3 : 4$, $DK : KE = 2 : 3$. Let the area of $\triangle DFP$ be $B \text{ cm}^2$, find the value of B .



圖五 Figure 5