

Hong Kong Mathematics Olympiad (1988 – 89)
Heat Event (Individual)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

1. 已知 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，求 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值。

Given that $x + \frac{1}{x} = 3$, find the value of $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

2. 設 $x \# y = xy - 2x$ ，求 $2 \# 3$ 的值。

If $x \# y = xy - 2x$, find the value of $2 \# 3$.

3. 若一正多邊形的某內角較其外角大的 150° ，求該正多邊形邊的數目。

Find the number of sides of a regular polygon if an interior angle exceeds an exterior angle by 150° .

4. 已知 $10^{\log_{10} 9} = 8b + 5$ ，求 b 的值。

Find the value of b such that $10^{\log_{10} 9} = 8b + 5$.

5. 某人以 15 km/h 速率乘單車由 P 至 Q ，然後以 10 km/h 速率由 Q 返回 P 。

求該人來回全程的平均速率。

A man cycles from P to Q with a uniform speed of 15 km/h and then back from Q to P with a uniform speed of 10 km/h. Find the average speed for the whole journey.

6. $[x]$ 是小於或等於 x 的最大整數。例如， $[3] = 3$ ， $[5.7] = 5$ 。

若 $[\sqrt[5]{1}] + [\sqrt[5]{2}] + \cdots + [\sqrt[5]{n}] = n + 14$ ，求 n 的值。

$[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x . For example, $[3] = 3$, $[5.7] = 5$.

If $[\sqrt[5]{1}] + [\sqrt[5]{2}] + \cdots + [\sqrt[5]{n}] = n + 14$, find the value of n .

7. 某小孩以平行四邊形的兩條相鄰邊長的乘積當作該圖形的面積，他計算的答案是正確面積的 $\sqrt{2}$ 倍。若該平行四邊形的銳角是 x° ，求 x 的值。

A boy tries to find the area of a parallelogram by multiplying together the lengths of two adjacent sides. His answer is $\sqrt{2}$ times the correct area. If the acute angle of the parallelogram is x° , find the value of x .

8. 已知三點 $A(-8, 6)$ 、 $B(-2, 1)$ 及 $C(4, c)$ 共線，求 c 的值。

If the points $A(-8, 6)$, $B(-2, 1)$ and $C(4, c)$ are collinear, find the value of c .

9. 曲線 $x^2 + y = 8$ 與直線 $x + y = 8$ 相交於兩點。若該兩點的距離是 \sqrt{d} ，求 d 的值。

The graphs of $x^2 + y = 8$ and $x + y = 8$ meet at two points. If the distance between these two points is \sqrt{d} , find the value of d .

10. 在某三角形中，各內角正弦的比是 $3 : 4 : 5$ 。若 A 是這個三角形的最小內角，且

$$\tan A = \frac{x}{16}, \text{ 求 } x \text{ 的值。}$$

The sines of the three angles of a triangle are in the ratio $3 : 4 : 5$.

If A is the smallest interior angle of the triangle and $\tan A = \frac{x}{16}$, find the value of x .

11. 兩骰同擲，求兩數的和大於 7 的概率。

Two dice are thrown. Find the probability that the sum of the two numbers shown is greater than 7.

12. 函數 F 定義為 $F(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{if } x \leq 3 \\ 3x^2, & \text{if } x > 3 \end{cases}$ 。求 $F(F(3))$ 的值。

F is a function defined by $F(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{if } x \leq 3 \\ 3x^2, & \text{if } x > 3 \end{cases}$. Find the value of $F(F(3))$.

13. 設 $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$ ，且 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = 26$ ，求 y 的值。

If $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$ and $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = 26$, find the value of y .

14. 設 $\frac{1}{B} = \frac{\sin 37^\circ \sin 45^\circ \cos 60^\circ \sin 60^\circ}{\cos 30^\circ \cos 45^\circ \cos 53^\circ}$ ，求 B 的值。

If $\frac{1}{B} = \frac{\sin 37^\circ \sin 45^\circ \cos 60^\circ \sin 60^\circ}{\cos 30^\circ \cos 45^\circ \cos 53^\circ}$, find the value of B .

15. 已知 $x + y = -4$ 、 $y + z = 5$ 及 $z + x = 7$ ，求 xyz 的值。

If $x + y = -4$, $y + z = 5$ and $z + x = 7$, find the value of xyz .

16. 已知 α 、 β 為 $x^2 - 10x + c = 0$ 的兩根，且 $\alpha\beta = -11$ 及 $\alpha > \beta$ ，求 $\alpha - \beta$ 的值。

α, β are the roots of the equation $x^2 - 10x + c = 0$.

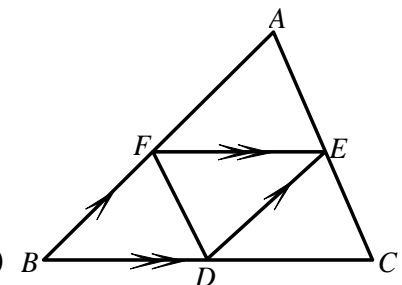
If $\alpha\beta = -11$ and $\alpha > \beta$, find the value of $\alpha - \beta$.

17. 如圖一， $FE \parallel BC$ 及 $ED \parallel AB$ 。

若 $AF : FB = 3 : 2$ ，求 $\triangle DEF$ 的面積 : $\triangle ABC$ 的面積。

In figure 1, $FE \parallel BC$ and $ED \parallel AB$. If $AF : FB = 3 : 2$, find the ratio area of $\triangle DEF$: area of $\triangle ABC$.

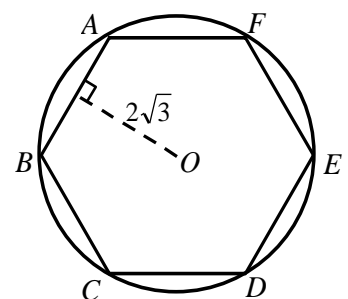
(Figure 1) (圖一)



18. 如圖二， $ABCDEF$ 為一正六邊形內接於圓形上， O 為圓心。
若 O 至 AB 的距離為 $2\sqrt{3}$ ，且 p 為該正六邊形的周界，
求 p 的值。

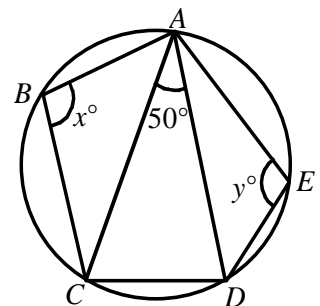
In figure 2, a regular hexagon $ABCDEF$ is inscribed in a circle centred at O . If the distance of O from AB is $2\sqrt{3}$ and p is the perimeter of the hexagon, find the value of p .

(Figure 2) (圖二)



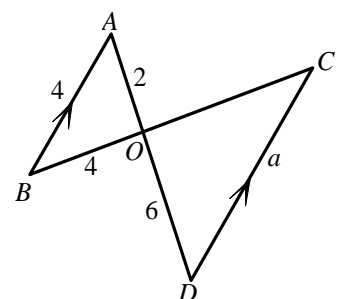
19. 在圖三， $ABCD$ 及 $ACDE$ 是圓內接四邊形，求 $x + y$ 的值。
In figure 3, $ABCD$ and $ACDE$ are cyclic quadrilaterals.
Find the value of $x + y$.

(Figure 3) (圖三)



20. 如圖四，求 a 的值。
Find the value of a in figure 4.

(Figure 4) (圖四)



Hong Kong Mathematics Olympiad (1988 – 89)
Heat Event (Group)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

1. a, b 為兩相異實數，且 $a^2 = 5a + 10$ 及 $b^2 = 5b + 10$ ，求 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的值。

Given a and b are distinct real numbers satisfying $a^2 = 5a + 10$ and $b^2 = 5b + 10$.

Find the value of $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

2. 一凸 n 邊形的一個內角是 x° ，其他內角的和是 800° ，求 n 的值。

An interior angle of an n -sided convex polygon is x° while the sum of other interior angles is 800° . Find the value of n .

3. 已知對所有正整數 n ， $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ，求 $21^2 + 22^2 + \dots + 30^2$ 的值。

It is known that $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for all positive integers n .

Find the value of $21^2 + 22^2 + \dots + 30^2$.

4. 方程 $19x + 88y = 1988$ 的其中一組正整數解是 $(100, 1)$ ，求另一組正整數解。

One of the positive integral solutions of the equation $19x + 88y = 1988$ is given by $(100, 1)$. Find another positive integral solution.

5. $A(2, 3)$ 與 $B(17, 23)$ 的連線交 $2x - y = 7$ 於 P ，求 $\frac{AP}{PB}$ 的值。

The line joining $A(2, 3)$ and $B(17, 23)$ meets the line $2x - y = 7$ at P . Find the value of $\frac{AP}{PB}$.

6. 求 7^{2047} 被 100 除所得的餘數。

Find the remainder when 7^{2047} is divided by 100.

7. 若 $\log_2[\log_3(\log_7 x)] = \log_3[\log_7(\log_2 y)] = \log_7[\log_2(\log_3 z)] = 0$ ，求 $x + y + z$ 的值。

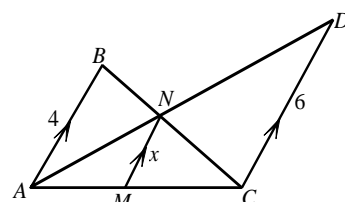
If $\log_2[\log_3(\log_7 x)] = \log_3[\log_7(\log_2 y)] = \log_7[\log_2(\log_3 z)] = 0$, find the value of $x + y + z$.

8. 在圖一中， $AB \parallel MN \parallel CD$ 。若 $AB = 4$ 、 $CD = 6$ 及 $MN = x$ ，

求 x 的值。

In figure 1, $AB \parallel MN \parallel CD$. If $AB = 4$, $CD = 6$ and $MN = x$, find the value of x .

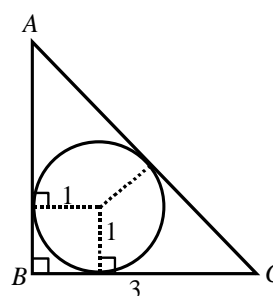
(Figure 1)(圖一)



9. 在圖二中， $\angle B = 90^\circ$ 、 $BC = 3$ ，且 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑長 1 單位，求 AC 的長度。

In figure 2, $\angle B = 90^\circ$, $BC = 3$ and the radius of the inscribed circle of $\triangle ABC$ is 1. Find the length of AC .

(Figure 2)(圖二)

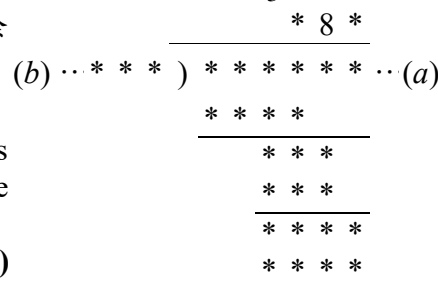


10. 在所附除法算式中(見圖三)，(a)列的被除數可被(b)列的除數整除。求(a)列的被除數。

(每一星號*為由 0 至 9 的整數。)

In the attached division (see figure 3), the dividend in (a) is divisible by the divisor in line (b). Find the dividend in line (a). (Each asterisk * is an integer from 0 to 9.)

(Figure 3)(圖三)



*** 試卷完 End of Paper ***