

# Hong Kong Mathematics Olympiad 1998-1999

## Heat Event (Individual)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

1. 有一圓，其圓周是  $14\pi$  cm。

若一弧所對的圓心角是  $\frac{1}{7}$  個弧度，設這弧的長度是  $X$  cm，求  $X$  的數值。

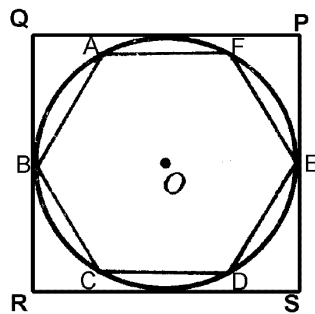
The circumference of a circle is  $14\pi$  cm. Let  $X$  cm be the length of an arc of the circle, which subtends an angle of  $\frac{1}{7}$  radian at the centre. Find the value of  $X$ .

2. 在圖一， $ABCDEF$  是一正六邊形及其面積是  $3\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>。

設正方形  $PQRS$  的面積是  $X$  cm<sup>2</sup>，求  $X$  的值。

In Figure 1,  $ABCDEF$  is a regular hexagon with area equal to  $3\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.

Let  $X$  cm<sup>2</sup> be the area of the square PQRS, find the value of  $X$ .



圖一  
Figure 1

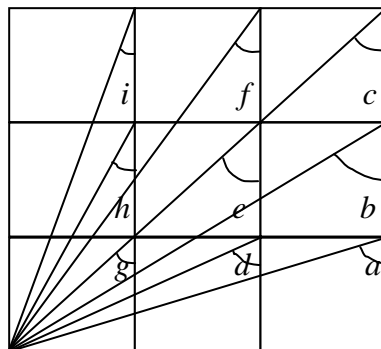
3. 已知 8 點，其中沒有任何 3 點是共線的。求以任意 3 點作為三角形頂點的三角形的個數。

8 points are given and no three of them are collinear.

Find the number of triangles formed by using any 3 of the given points as vertices.

4. 在圖二，有一個  $3 \times 3$  正方形。設  $\angle a + \angle b + \dots + \angle i = X^\circ$ ，求  $X$  的數值。

In Figure 2, there is a  $3 \times 3$  square. Let  $\angle a + \angle b + \dots + \angle i = X^\circ$ , find the value of  $X$ .



圖二 Figure 2

5. 在 0 至  $10^6$  之間，有多少個整數  $n$ ，使得  $n^3$  的個位數字是 1？

How many integers  $n$  are there between 0 and  $10^6$ , such that the unit digit of  $n^3$  is 1?

6. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是正整數，且滿足  $a < b < c = 100$ ，

求以  $a$  cm、 $b$  cm、 $c$  cm 為邊長的三角形的個數。

Given that  $a, b, c$  are positive integers and  $a < b < c = 100$ ,

find the number of triangles formed with sides equal  $a$  cm,  $b$  cm and  $c$  cm.

7. 一班青年參加旅行，他們同意所有消費平均攤分。整個活動，他們共用去 288 元。其中有一位成員無法支付其所應付出的部份。其他成員願意各多付 4 元，湊夠其數。問共有多少青年參加這次旅行。

A group of youngsters went for a picnic. They agreed to share all expenses. The total amount used was \$288. One youngster had no money to pay his share, and each of the others had to pay \$4 more to cover the expenses. How many youngsters were there in the group?

8. 某兩位數其值等於它的位值的和的 4 倍。若將該數的個位和十位數字相調，這個新兩位數的值比其位值的和的 5 倍多出 18。求該數。

A two-digit number is equal to 4 times the sum of the digits, and the number formed by reversing the digits exceeds 5 times the sum of the digits by 18. What is the number?

9. 已知下列序列的第 1001 項的分母為 46，求該項的分子。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

Given that the denominator of the 1001<sup>th</sup> term of the following sequence is 46, find the numerator of this term.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

10. 下列加法算式中，若字母‘S’代表 4，那麼字母‘A’代表甚麼數字？

In the following addition, if the letter ‘S’ represents 4, what digit does the letter ‘A’ represent?

$$\begin{array}{r} \text{SEE} \\ \text{SEE} \\ \text{SEE} \\ + \text{YES} \\ \hline \text{EASY} \end{array}$$

\*\*\* 試卷完 End of Paper \*\*\*

# Hong Kong Mathematics Olympiad 1998-1999

## Heat Event (Group)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

1. 若  $a$  是質數，且滿足  $a^2 - 2a - 15 < 0$ ，求  $a$  的最大值。

If  $a$  is a prime number and  $a^2 - 2a - 15 < 0$ , find the greatest value of  $a$ .

2. 若  $a : b : c = 3 : 4 : 5$  及  $a + b + c = 48$ ，求  $a - b - c$  的值。

If  $a : b : c = 3 : 4 : 5$  and  $a + b + c = 48$ , find the value of  $a - b - c$ .

3. 求  $\log(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})$  的值。

Find the value of  $\log(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})$ .

4. 求直線  $x + 4y - 2 = 0$  與兩條坐標軸所圍成的三角形的面積。

Find the area enclosed by the straight line  $x + 4y - 2 = 0$  and the two coordinate axes.

5. 把由 1 開始的自然數依次寫下去，直寫到第 198 位為止 123456789101112.....。

198 位

求所得數被 9 除的餘數。

Natural numbers are written in order starting from 1 until 198th digit as shown 123456789101112...... If the number obtained is divided by 9, find the remainder.

198 digits

6. 2,  $a$ , 5,  $b$ , 8 的平均數為 6。若  $n$  為  $a$ ,  $2a + 1$ , 11,  $b$ ,  $2b + 3$  的平均數，求  $n$  的值。

The average of 2,  $a$ , 5,  $b$ , 8 is 6. If  $n$  is the average of  $a$ ,  $2a + 1$ , 11,  $b$ ,  $2b + 3$ , find the value of  $n$ .

7. 若  $p = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 12y + 16$ ，其中  $x$  及  $y$  皆為實數，求  $p$  的最小值。

If  $p = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 12y + 16$ , where  $x$  and  $y$  are real numbers, find the least value of  $p$ .

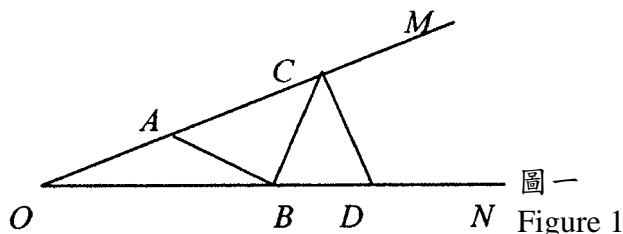
8. 求  $333^{335}$  的個位數字。

Find the units digit of  $333^{335}$ .

9. 在圖一， $\angle MON = 20^\circ$ ， $A$  為  $OM$  上的一點， $OA = 4\sqrt{3}$ ， $D$  為  $ON$  上的一點， $OD = 8\sqrt{3}$ ， $C$  為  $AM$  上的任意一點， $B$  為  $OD$  上的任意一點。

若  $\ell = AB + BC + CD$ ，求  $\ell$  的最小值。

In Figure 1,  $\angle MON = 20^\circ$ ,  $A$  is a point on  $OM$ ,  $OA = 4\sqrt{3}$ ,  $D$  is a point on  $ON$ ,  $OD = 8\sqrt{3}$ ,  $C$  is any point on  $AM$ ,  $B$  is any point on  $OD$ . If  $\ell = AB + BC + CD$ , find the least value of  $\ell$ .



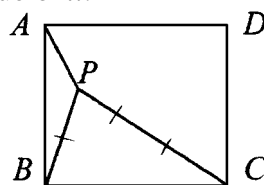
圖一  
Figure 1

10. 在圖二， $P$  為正方形  $ABCD$  內一點， $PA = a$ ， $PB = 2a$ ， $PC = 3a$  ( $a > 0$ )。

若  $\angle APB = x^\circ$ ，求  $x$  的值。

In figure 2,  $P$  is a point inside the square  $ABCD$ ,  $PA = a$ ,  $PB = 2a$ ,  $PC = 3a$  ( $a > 0$ ).

If  $\angle APB = x^\circ$ , find the value of  $x$ .



圖二  
Figure 2

\*\*\* 試卷完 End of Paper \*\*\*