

**Hong Kong Mathematics Olympiad (1996 – 97)**  
**Heat Event (Individual)**

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

1. 設  $n$  為一正整數。若  $n^2 = 29p + 1$ ，其中  $p$  為質數，試求  $n$  之值。  
Let  $n$  be a positive integer. If  $n^2 = 29p + 1$ , where  $p$  is a prime number, find the value of  $n$ .
2. 若一長方形之闊度增加  $\frac{1}{3}$  米，其面積增加  $\frac{5}{3}$  平方米。若其長度減少  $\frac{1}{2}$  米，則面積減少  $\frac{9}{5}$  平方米。設該長方形之面積為  $x$  平方米，求  $x$  之值。  
If the width of a rectangle is increased by  $\frac{1}{3}$  m, its area will be increased by  $\frac{5}{3}$  m<sup>2</sup>. If its length is decreased by  $\frac{1}{2}$  m, its area will be decreased by  $\frac{9}{5}$  m<sup>2</sup>. Let the area of the rectangle be  $x$  m<sup>2</sup>, find the value of  $x$ .
3. 若  $s$  為 1234 之所有正因數的總和，求  $s$  之值。  
If  $s$  is the sum of all positive factors of 1234, find the value of  $s$ .
4. 設  $x = \frac{1}{x}$ ，求  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \div \frac{x + 5}{x^2 + 3x - 6}$  的值。  
Let  $x = \frac{1}{x}$ , find the value of  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \div \frac{x + 5}{x^2 + 3x - 6}$ .
5. Find the value of  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$ .  
求  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$  的值。
6. 若  $yz : zx : xy = 1 : 2 : 3$ ，求  $\frac{x}{yz} : \frac{y}{zx}$  的值。  
If  $yz : zx : xy = 1 : 2 : 3$ , find the value of  $\frac{x}{yz} : \frac{y}{zx}$ .
7. 求下列方程的實根： $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = x$ 。  
Find the real roots of the equation:  $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = x$ .
8. 某班有 6 位學生。每位學生送給班中其餘各位同學一張聖誕咭，求該班學生寄出聖誕咭的總數。  
There are 6 students in a class. Everyone sends one Christmas card to each of the rest of the class. Find the total number of cards sent out by the class.
9. 若  $2x^2 - 8x + k \equiv 2(x - 2)^2 + 9$ ，求  $k$  之值。  
If  $2x^2 - 8x + k \equiv 2(x - 2)^2 + 9$ , find the value of  $k$ .
10. 若十位數  $1357p1357p$  可被 9 整除，求  $p$  之值。  
If the ten-digit number  $1357p1357p$  is divisible by 9, find the value of  $p$ .

\*\*\* 試卷完 End of Paper \*\*\*

**Hong Kong Mathematics Olympiad (1996 – 97)**  
**Heat Event (Group)**

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

1. 已知  $a_1, a_2, a_3, \dots$  和  $b_1, b_2, b_3, \dots$  為等差數列，其中  $a_1 = 25, b_1 = 75$  及  $a_{100} + b_{100} = 100$ 。求數列  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots$  的前 100 項的和。

If  $a_1, a_2, a_3, \dots$  and  $b_1, b_2, b_3, \dots$  are arithmetic sequences, where  $a_1 = 25, b_1 = 75$  and  $a_{100} + b_{100} = 100$ . Find the sum of the first 100 terms of the sequence  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots$ .

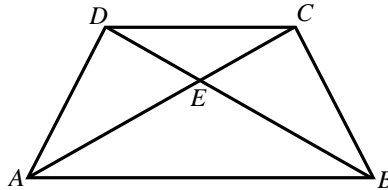
2. 已知  $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ ，及  $x_1 = 1, x_n = f(x_{n-1})$ ，求  $x_{99}$  的值。

If  $f(x) = \frac{2x}{x+2}$  and  $x_1 = 1, x_n = f(x_{n-1})$ , find the value of  $x_{99}$ .

3.  $ABCD$  為一梯形，其中  $AB \parallel DC$  及  $\triangle DCE$  的面積： $\triangle DCB$  的面積 = 1 : 3。

求  $\triangle DEC$  的面積： $\triangle ABD$  的面積。

$ABCD$  is a trapezium, where  $AB \parallel DC$  and area of  $\triangle DCE$  : area of  $\triangle DCB = 1 : 3$ , find area of  $\triangle DEC$  : area of  $\triangle ABD$ .



4. 設  $x$  為一正整數。若  $\frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} (x-1) - 1 \right) - 1 \right)$  能被 3 整除，試求  $x$  之最小可能數值。

Let  $x$  be a positive integer.

If  $\frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} (x-1) - 1 \right) - 1 \right)$  is divisible by 3, find the least possible value of  $x$ .

5. 水管 A 能於 20 小時內獨自盛滿某一水池，而水管 B 則於 5 小時內完成此工作。若兩水管同時使用時盛滿這水池所需的時間則為  $x$  小時，求  $x$  的值。

Pipe A alone takes 20 hours to fill a tank and pipe B takes 5 hours to fill the same tank alone.

If pipes A and B together take  $x$  hours to fill the tank, find the value of  $x$ .

6. 一正多邊形的每一內角被外角大  $150^\circ$ 。求此多邊形的邊的數目。

Each interior angle of a regular polygon exceeds the exterior angle by  $150^\circ$ .

Find the number of sides of the polygon.

7. 若  $x + \frac{1}{x} = 3$ ，求  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  的值。

If  $x + \frac{1}{x} = 3$ , find the value of  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

8. 已知 5 個算術級數中之最大值為最小值之 7 倍，及該 5 個數之平均值為 32。

求 5 個數中之最小值。

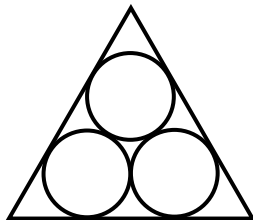
Five numbers are in arithmetic progression. If the largest number is 7 times the smallest one and the average of the five numbers is 32, find the smallest number.

9. 圖中三個半徑為  $r$  cm 之全等圓被一三角形緊緊圍著。

若三角形之周界為  $(180 + 180\sqrt{3})$  cm，求  $r$  的值。

In the figure, three identical circles with radius  $r$  cm are tightly enclosed in a triangle.

If the perimeter of the triangle is  $(180 + 180\sqrt{3})$  cm, find the value of  $r$ .



10. 投擲兩粒公平的骰子。求其總和為小於 5 及至少一粒骰子為‘2’的機會率。

Two fair dice are thrown.

Find the probability that the sum is less than 5 and at least one die is a ‘2’.