作三角形的內心

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2012-05-19

在已知三角形中，試作出一點使它與該三角形各邊的距離相等。[1]

首先，已給出∠*ABC*(圖 1)，我們找出一點 *D* 的軌跡，使得 *D* 至 *AB* 和 *CD* 的距離相等。

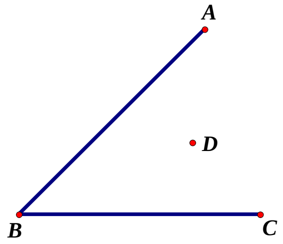

圖 1

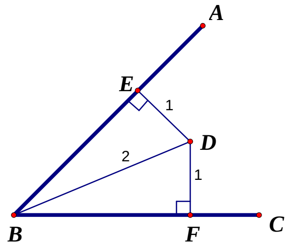

圖 2

(1) 過 *D* 作垂直綫至 *AB* 和 *BC*，*E* 及 *F* 為垂足 (圖 2)。

(2) 連接 *BD*，則

$BD = BD$	(公共邊)
$\angle BED = \angle BFD = 90°$	(由作圖所得)
$DE = DF$	(已知 *D* 至 *AB* 與 *BC* 等距)
$\therefore \Delta BDE \cong \Delta BDF$	(R.H.S.)
$\angle DBE = \angle DBF$	(全等三角形的對應角)

∴ *D* 在∠*ABC* 的角平分綫上。

∴ 若一點 *P* 與該三角形各邊的距離相等，則 *P* 必定在該三角形的三條角平分綫的交點。(即Δ*ABC* 的內心)

作圖方法如下(圖 3)：

(1) 作∠*ABC* 的角平分綫。

(2) 作∠*ACB* 的角平分綫。
P 為兩條角平分綫的交點。

(3) 連接 *AP*。

(4) 分別過 *P* 作垂直綫至 *BC*、*AC* 及 *AB*，*R*、*S*、*T* 為對應的垂足。

作圖完畢。

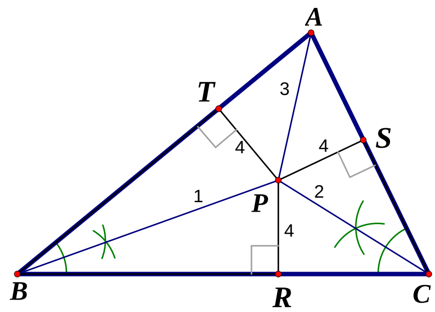

圖 3

證明如下：

$\Delta BPR \cong \Delta BPT$	(A.A.S.)
$\Delta CPR \cong \Delta CPS$	(A.A.S.)
$PT = PR = PS$	(全等三角形的對應邊)

證明完畢。

若以 *P* 為圓心，*PR* 為半徑作一圓，此圓內切於三角形的三邊，稱為**內切圓(inscribed circle)**。(圖 4)

延伸：可進一步證明三條角平分綫必然共點。

證明：$\Delta APT \cong \Delta APS$ (R.H.S.)

$\angle PAT = \angle PAS$ (全等三角形的對應角)

∴ *AP* 為∠*BAC* 是角平分綫

∴ 三條角平分綫必然共點

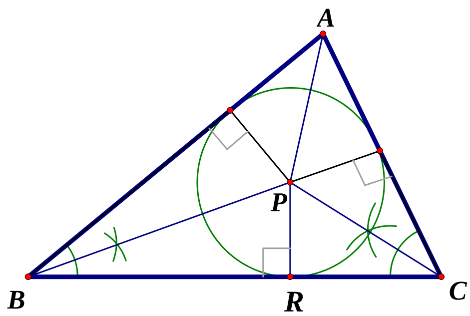

圖 4

註一：∵ 三條角平分綫必然共點(concurrent at a point)

∴ 我們只須找出其中兩條角平分綫的交點，便可找出三角形的內心。

[1]香港數學競賽 2009 初賽(幾何作圖)樣本題第 1 題

註二：三角形有三個**旁心**，每個旁心皆與每條邊等距。現在，只作其中一個旁心，作為示範。

作圖方法如下(圖 5)：

(1) 將 AB 延長至 S，將 AC 延長至 T。

(2) 分別作$\angle ABC$ 的外角平分綫和$\angle ACB$ 的外角平分綫。兩條外角平分綫相交於 I。

(3) 過 I，分別作綫段 IP、IQ、IR 垂直於 BC、AC 及 AB。P，Q，R 為對應之垂足。

(4) 連接 AI。AI 為$\angle BAC$ 的內角平分綫。

作圖完畢。

證明如下：

$\Delta IBP \cong \Delta IBR$ (A.A.S.)

$\Delta ICP \cong \Delta ICQ$ (A.A.S.)

$\therefore IP = IQ = IR$ (全等三角形的對應邊)

$\therefore I$ 與 AB，BC 及 AC 等距。

$\Delta IAR \cong \Delta IAQ$ (R.H.S.)

$\angle IAR = \angle IAQ$ (全等三角形的對應角)

$\therefore IA$ 為$\angle BAC$ 的內角平分綫

三角形的兩條外角平分綫和一條內角平分綫共點。

證明完畢。

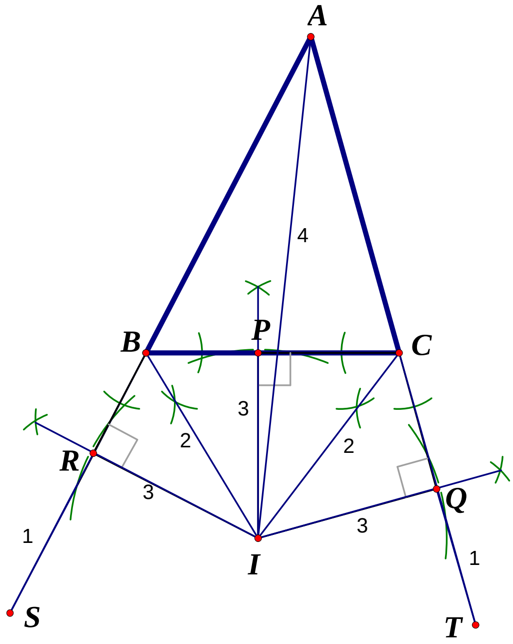

圖 5

註： 若以 I 為圓心，IP 為半徑作一圓，此圓旁切於三角形的三邊，稱為**旁切圓(escribed circle or ex-circle)**(圖 6)。

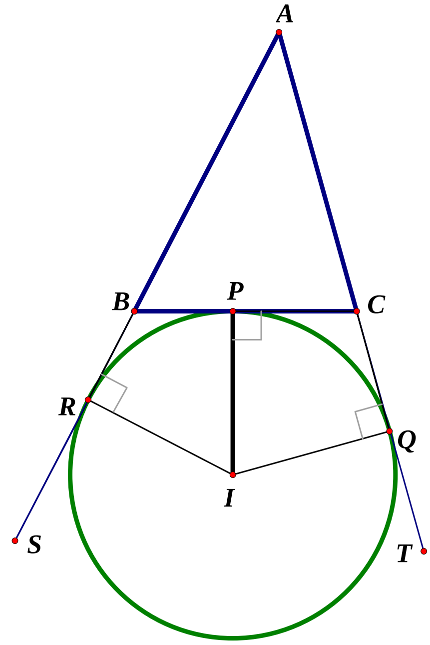

圖 6