5.15 作一圓經過已知點並外切於兩已知圓

Created by Mr. Francis Hung on 20090217　　　　　Last updated: 2023-03-19

如圖 1，已給兩個大小不同圓 C_1 和 C_2，圓心分別為 A 和 B，一點 P 在兩圓外。試作一圓經過 P，外切該二圓。

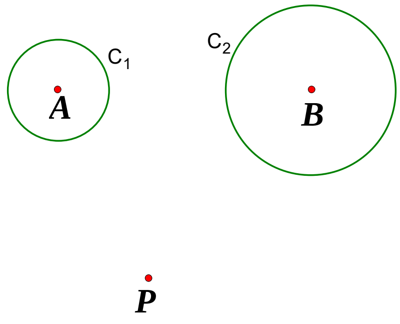

圖 1

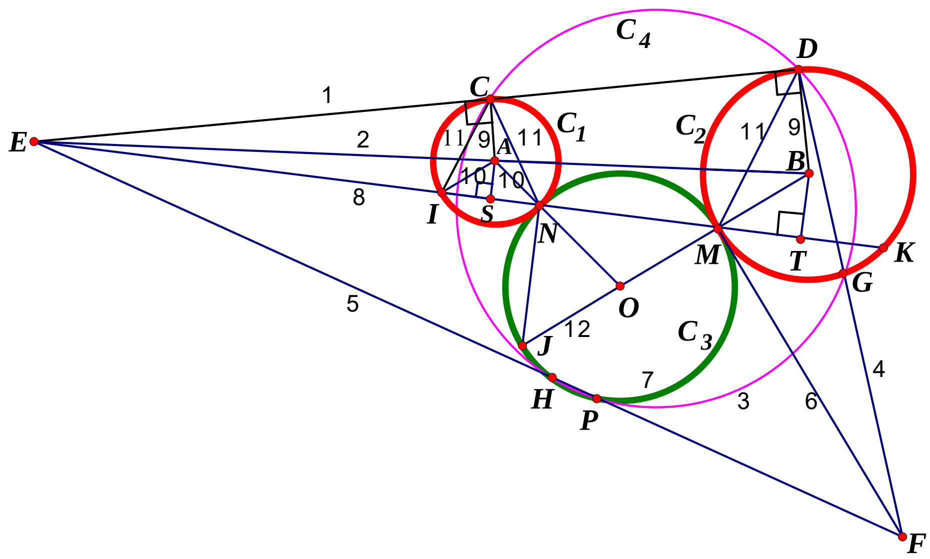

圖 2

作圖方法如下(圖 2)：

不妨假設圓 C_2 大於圓 C_1。

(1)　作二圓的外公切綫 CD 切圓 C_1 於 C 及切圓 C_2 於 D。(參考 5.4 作外公切綫)

(2)　連接 BA，其延長綫交 DC 的延長綫於 E。(若 $BA \mathbin{//} DC$，將於第 5 頁分析)

(3)　作ΔCDP 的外接圓 C_4，交圓 C_2 於 G。

(4)　連接 DG。

(5)　連接 EP，交圓 C_4 於 H，其延長綫交 DG 的延長綫於 F。

(6)　由外點 F 引切綫 FM 至圓 C_2 上，切該圓於 M (在圓 C_4 內)。

(7)　作ΔHMP 的外接圓 C_3。

(8)　連接 EM，交圓 C_1 於 I、N，其延長綫交圓 C_2 於 K。

(9)　連接 AC 及 BD。

(10)　連接 AI 及 AN。

(11)　連接 CI、CN 及 DM。

(12)　連接 BM，其延長綫交 AN 的延長綫於 O，且交圓 C_3 於 J。

作圖完畢，證明如下：

分別設 S 和 T 為 A 及 B 至 EK 之垂足。

$FD\times FG = FM^2$ ……… (1)	(於圓 C_2 應用相交弦定理)
$FD\times FG = FH\times FP$ …… (2)	(於圓 C_4 應用相交弦定理)
$\therefore FH\times FP = FM^2$	(由(1)及(2)所得，等量代換)
$\therefore FM$ 切圓 C_3 於 M。	(相交弦定理的逆定理)
$\Rightarrow FM$ 為圓 C_2 及圓 C_3 的公切綫	
$\Rightarrow$ 圓 C_2 及圓 C_3 互相外切於 M	
$\therefore \angle FMO = 180^\circ - \angle FMB = 90^\circ$	(直綫上的鄰角，切綫⊥半徑)
$\therefore JOM$ 為圓 C_3 的直徑 …… (*)	
$\angle ACE = \angle BDE = 90^\circ$	(切綫⊥半徑)
$\angle AEC = \angle BED$	(公共角)
$\therefore \Delta ACE \sim \Delta BDE$	(等角)

$\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AE}{BE}\cdots\cdots(3)$ (相似三角形的對應邊)

$\angle ASE=\angle BTE=90°$ (由作圖所得)

$\angle AES=\angle BET$ (公共角)

$\therefore \Delta AES\sim\Delta BET$ (等角)

$\dfrac{AS}{BT}=\dfrac{AE}{BE}\cdots\cdots(4)$ (相似三角形的對應邊)

比較(3)式及(4)式得：$\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AS}{BT}\cdots\cdots(5)$

分別設圓 C_1 和圓 C_2 的半徑為 a 及 b。

由(5)式得：$\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{AS}{BT}$

$\Rightarrow\dfrac{AS}{a}=\dfrac{BT}{b}\Rightarrow\dfrac{AS}{AN}=\dfrac{BT}{BM}$

$\Rightarrow \sin\angle ANS=\sin\angle BMT$

設 $\angle ANS=\angle BMT=\theta\cdots\cdots(6)$

$\because AI=AN$ (圓 C_1 的半徑)

$\therefore \angle AIS=\angle ANS=\theta\cdots\cdots(7)$ (等腰三角形的底角)

比較(6)式及(7)式得：$\angle AIS=\angle BMT=\theta$

$\therefore AI\,//\,BM$ (同位角相等)

$\Delta AEI\sim\Delta BEM$ (等角)

$\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{IE}{ME}\quad\cdots\cdots(8)$ (相似三角形的對應邊)

$\because \Delta ACE\sim\Delta BDE$ (已證)

$\therefore\ \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CE}{DE}\cdots\cdots(9)$ (相似三角形的對應邊)

比較(8)式及(9)式得：$\dfrac{IE}{ME}=\dfrac{CE}{DE}\quad\cdots\cdots(10)$

$\angle CEI=\angle DEM$ (公共角)

$\therefore \Delta CEI\sim\Delta DEM$ (兩邊成比例，一夾角相等)

$\angle ECI=\angle EDM\cdots\cdots(11)$ (相似三角形的對應角)

$\angle ECI=\angle CNI\cdots\cdots(12)$ (交錯弓形的圓周角)

比較(11)式及(12)式得：$\angle EDM=\angle CNI$

$\therefore CDMN$ 為圓內接四邊形 (外角 = 內對角)

$EC\times ED=EN\times EM\cdots\cdots(13)$ (相交弦定理)

$EC\times ED=EH\times EP\cdots\cdots(14)$ (於圓 C_4 應用相交弦定理)

比較(13)式及(14)式得：$EN\times EM=EH\times EP$

$\therefore N$、M、P、H 四點共圓 (相交弦定理的逆定理)

$\therefore N$ 在圓 C_3 上。

$\because \angle ONM=\angle ANS$ 及 $\angle BMT=\angle OMN$ (對頂角)

由(6)式得：$\angle OMN=\angle ONM=\theta$ (等量代換)

$OM=ON\cdots\cdots(15)$ (等邊對等角)

$\angle JNM=90°$ (由(*)得知，半圓上的圓周角)

$\angle ONJ = 90° - \theta$

$\angle NJM = 90° - \theta$ (ΔMJN 的內角和)

$\therefore \angle ONJ = \angle NJM$

$ON = OJ$ …… (16) (等邊對等角)

比較(15)及(16)得 $OM = ON = OJ$

$\therefore$ O 為圓 C_3 的圓心。

$\because$ A、N、O 共綫。

$\therefore AN + NO = AO$

$\therefore$ 圓 C_1 與圓 C_3 外切於 N。證明完畢。

討論一 為確保步驟(2) DC 和 BA 有交點 E，圓 C_1 和圓 C_2 必須為大小不同；否則 DC 和 BA 平行而沒有交點；另外，圓 C_1 和圓 C_2 可以相交或不相交。

討論二 若圓 C_1 大於圓 C_2；可重新命名 C_1 為 C_2，及 C_2 為 C_1。

討論三 在步驟(6)中，由外點 F 可引兩條不同的切綫至圓 C_2 上。若由 F 引另一條切綫至圓 C_2 上的 M 點(在圓 CDP 外)，其餘步驟不變，則可作一圓過 P 而內切圓 C_1 和圓 C_2。(圖 3)

證明從略。

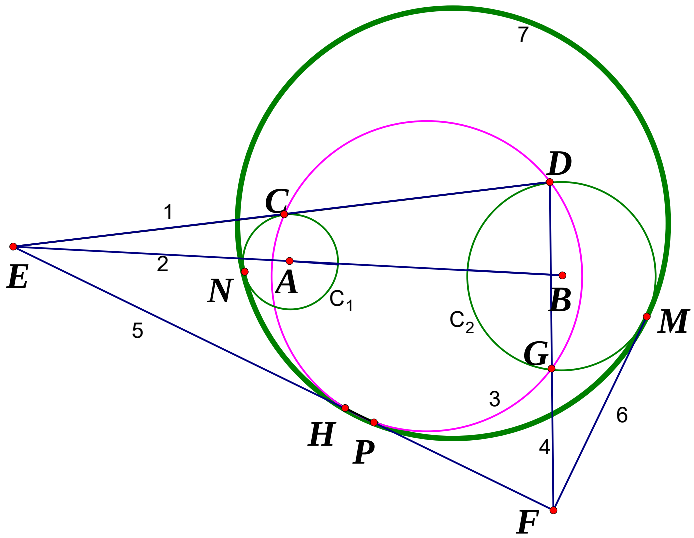

圖 3

討論四 若圓 C_1 及圓 C_2 沒有相交，作一圓過 P，內切圓 C_1 及外切圓 C_2。

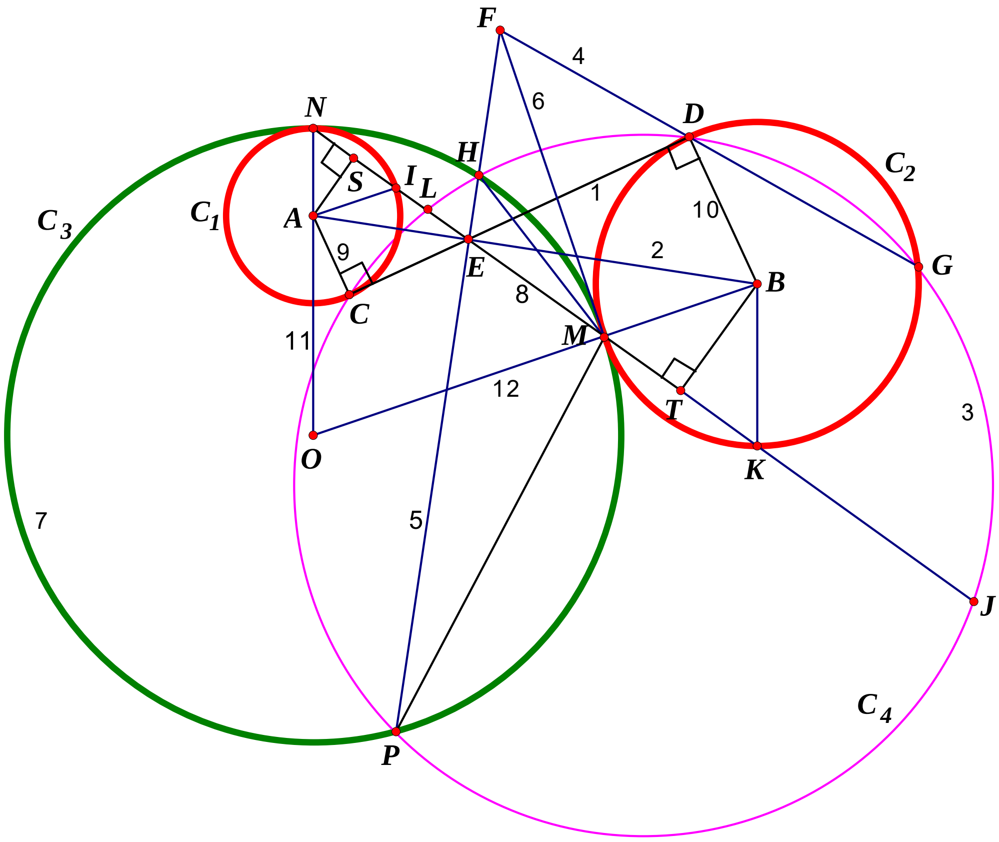

圖 4

作圖方法如下(圖 4)：

(1) 作二圓的內公切綫 CD 切圓 C_1 於 C 及切圓 C_2 於 D。(參考 5.5 作內公切綫)

(2) 連接 AB，交 CD 於 E。

(3) 作ΔCDP 的外接圓 C_4，交圓 C_2 於 G。

(4) 連接 DG。

(5) 連接 PE，其延長綫交圓 C_4 於 H，且交 GD 的延長綫於 F。

(6) 由外點 F 引切綫 FM 至圓 C_2 上，切該圓於 M(在圓 C_4 內)。

(7) 作 HMP 的外接圓 C_3。

(8) 連接 ME，其延長綫交圓 C_1 於 I、N，交圓 C_2 於 K，交圓 C_4 於 L、J。

(9) 連接 AC。

(10) 連接 BD。

(11) 連接 AN。

(12) 連接 BM。其延長綫交 NA 的延長綫於 O。分別設 S 和 T 為 A 及 B 至 NJ 之垂足。

除了第一步由外切綫改為內切綫之外，以上方法與原文(第 1 頁)的步驟幾乎一模一樣。讀者可參考上文，從而推出證明方法。

討論五 若圓 C_1 及圓 C_2 半徑相等，以下作圖法顯示如何作圓經過 P 而外切圓 C_1 和圓 C_2。

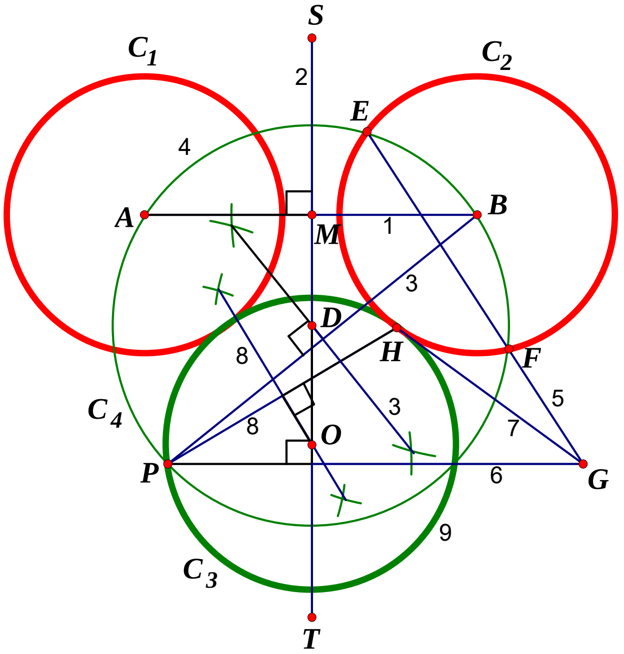

圖 5

作圖方法如下(圖)：

(1) 連接 AB。

(2) 作 AB 的垂直平分綫 ST，M 為 AB 的中點。

(3) 連接 PB，作 PB 的垂直平分綫，交 ST 於 D。

(4) 作圓 $C_4 \odot(D, DB)$，交圓 C_2 於 E 和 F。

(5) 連接 EF。

(6) 過 P 作 PG 垂直於 ST，交 EF 的延長綫於 G。

(7) 由外點 G 引切綫至圓 C_2 上，切該圓於 H(在圓 C_4 內)。

(8) 連接 PH，作 PH 的垂直平分綫，交 ST 於 O。

(9) 作圓 $C_3 \odot(O, OP)$。

作圖完畢，證明從略。

討論六 若圓 C_1 及圓 C_2 半徑相等，以下作圖法顯示如何作圓過 P 而內切圓 C_1 和圓 C_2。

只要將步驟(6)由外點 G 引另一條切綫至圓 C_2 上，切該圓於 H(圓 C_3 外)；其餘步驟相同。

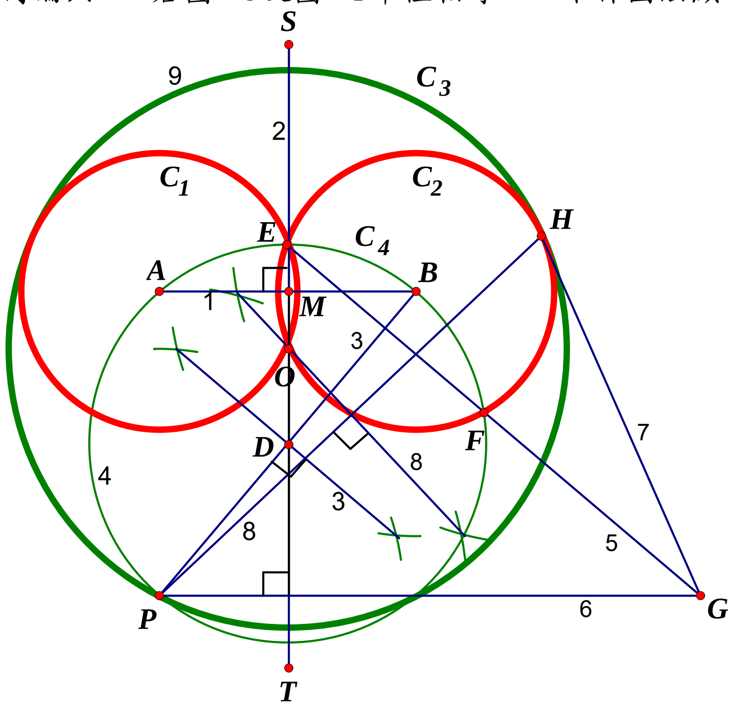

圖 5

討論七 若 C、D、P 共綫，則第 1 頁中步驟(3)不能作外接圓 C_4。

另外，若 EP // DG，，則第 1 頁中步驟(5)不能作交點 F。

再者，若 H 與 P 重疊，則第 1 頁中步驟(7)不能作外接圓 C_3。

為了要解決以上種種已知和未知的情況，而使最終作圖不成功，現在用圓的反演 (circle inversion)，加上第 5.14 段的知識，一次過解決所有問題，作圖方法如下：

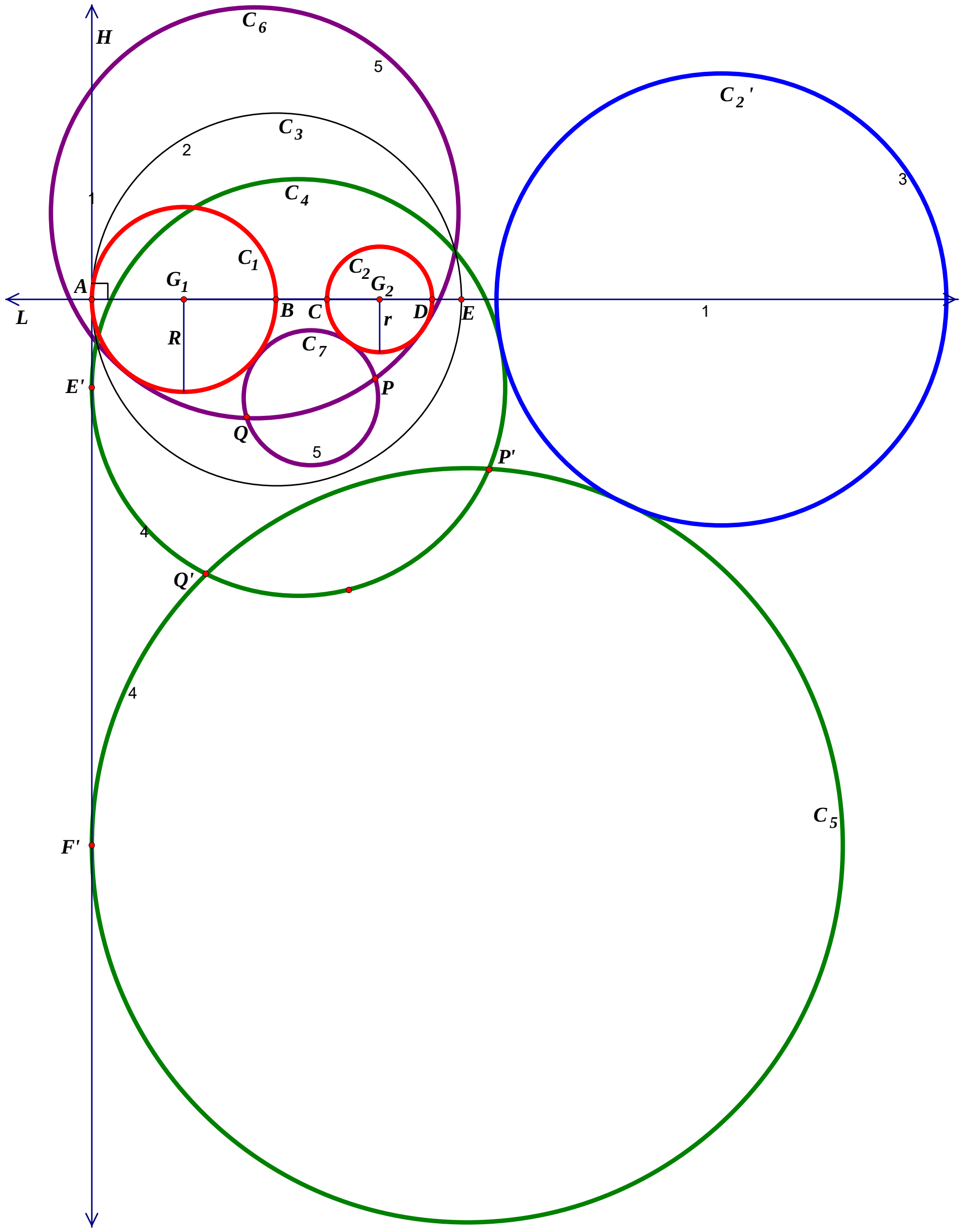

圖 6

設該兩已知圓為 $C_1 \odot (G_1, R)$及 $C_2 \odot (G_2, r)$

(1) 設 L 為過 G_1G_2 之綫，交 C_1 於 A 和 B，及 C_2 於 C 和 D (A、B、C、D 順序)。
設 H 為過 A 之綫，且與 L 垂直。

(2) 作圓 $C_3 \odot (B, 2R)$，交 L 於 A 和 E。

(3) 作圓 C_2 關於 C_3 的反演圓 C'_2，直綫 H 為 C_1 關於 C_3 的反演。
以 E 為中心，作 P 關於 C_3 的反演，其影像為 P'。

(4) 利用第 5.14 段的知識，過 P 作二圓 C_4 及 C_5 切 C_2 及直綫 H。(圖 7)

(5) 作圓 C_4 關於 C_3 的反演圓 C_6，作圓 C_5 關於 C_3 的反演圓 C_7。

C_6 和 C_7 便是所需圓形穿過 P，一內切 C_1 及 C_2，另一外切 C_1 及 C_2。