

Hong Kong Mathematics Olympiad 2003-2004
Heat Event (Individual)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

1. 設 $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2003^2 - 2004^2$ ，求 A 的值。

Let $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2003^2 - 2004^2$, find the value of A .

2. 若 $\sqrt[2003]{B} = 2003$ ， C 是 B 的個位數，求 C 的值。

If $\sqrt[2003]{B} = 2003$, C is the units digit of B , find the value of C .

3. 若 $x + y + z = 10$ ， $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 及 $xy + yz + zx = m$ ，求 m 的值。

If $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ and $xy + yz + zx = m$, find the value of m .

4. 把自然數按下列方式排列，其中 9 的位置是第 3 列第 2 行。若 2003 的位置是第 x 列第 y 行，求 xy 的值。

Arrange the natural numbers in the following order. In this arrangement, 9 is in the row 3 and the column 2. If the number 2003 is in the row x and the column y , find the value of xy .

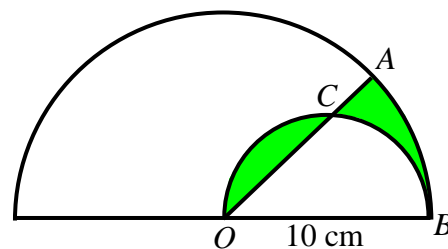
1	2	4	7	11	16	...
3	5	8	12	17	...	
6	9	13	18	...		
10	14	19	...			
15	20	...				
21	...					
...						

5. 設 $E = \sqrt{12+6\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}}$ ，求 E 的值。

Let $E = \sqrt{12+6\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}}$, find the value of E .

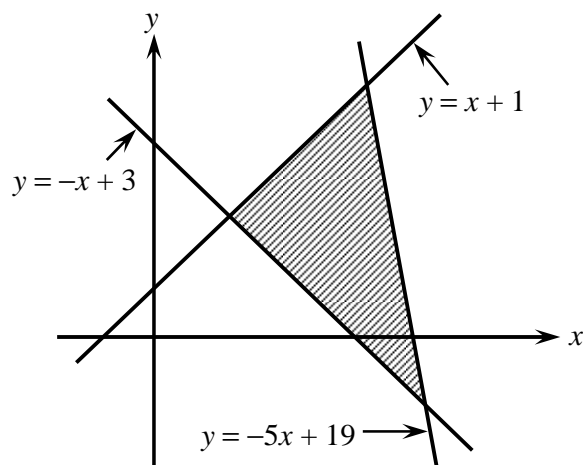
6. 在圖中，大半圓的圓心是 O ，半徑是 10 cm， OB 是小半圓的直徑， C 是弧 OB 的中點且在線段 OA 上。設陰影部分的面積是 $K \text{ cm}^2$ ，求 K 的值。(取 $\pi = 3$)

In the figure, O is the centre of the bigger semicircle with radius 10 cm, OB is the diameter of the smaller semicircle and C is the midpoint of arc OB and it lies on the segment OA . Let the area of the shaded region be $K \text{ cm}^2$, find the value of K . (Take $\pi = 3$)



7. 在圖中，設被三條直線 $y = -x + 3$ ， $y = x + 1$ 及 $y = -x + 19$ 所圍出的陰影部分的面積是 R ，求 R 的值。

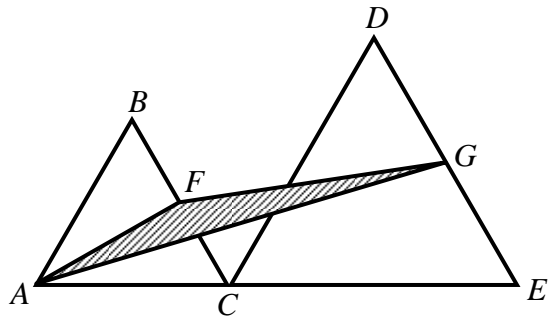
In the figure, let the shaded area formed by the three straight lines $y = -x + 3$, $y = x + 1$ and $y = -5x + 19$ be R , find the value of R .



8. 若 $t = \sin^4 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{2\pi}{6}$ ，求 t 的值。

If $t = \sin^4 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{2\pi}{6}$, find the value of t .

9. 在圖中， C 在 AE 上， $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等邊三角形，且 F 、 G 分別是 BC 和 DE 的中點。若 $\triangle ABC$ 的面積是 24cm^2 ， $\triangle CDE$ 的面積是 60cm^2 ， $\triangle AFG$ 的面積是 $Q\text{cm}^2$ ，求 Q 的值。
- In the figure, C lies on AE , $\triangle ABC$ and $\triangle CDE$ are equilateral triangles, F and G are the mid-points of BC and DE respectively. If the area of $\triangle ABC$ is 24cm^2 , the area of $\triangle CDE$ is 60cm^2 , and the area of $\triangle AFG$ is $Q\text{cm}^2$, find the value of Q .



10. 若 α 和 β 是二次方程式 $4x^2 - 10x + 3 = 0$ 的根及 $k = \alpha^2 + \beta^2$ ，求 k 的值。
- If α and β are the roots of the quadratic equation $4x^2 - 10x + 3 = 0$ and $k = \alpha^2 + \beta^2$, find the value of k .

Hong Kong Mathematics Olympiad 2003-2004
Heat Event (Group)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

1. 若 $x = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \cdots + \frac{99}{100}\right)$, 求 x 的值。

If $x = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \cdots + \frac{99}{100}\right)$,

find the value of x .

2. 若 z 是方程 $6 \times 4^x - 13 \times 6^x + 6 \times 9^x = 0$ 的正數根，求 z 的值。

If z is the positive root of the equation $6 \times 4^x - 13 \times 6^x + 6 \times 9^x = 0$, find the value of z .

3. 若最多有 k 個互不全等的等腰三角形，其周界為 25 cm 及其三邊的長度以 cm 表示時均為正整數，求 k 的值。

If there are at most k mutually non-congruent isosceles triangles whose perimeter is 25cm and the lengths of the three sides are positive integers when expressed in cm, find the value of k .

4. 已知 a, b 為實數並且滿足 $a^3 = 2004$ 及 $b^2 = 2004$ 。若滿足不等式 $a < x < b$ 的整數 x 有 h 個，求 h 的值。

Given that a, b are positive real numbers satisfying $a^3 = 2004$ and $b^2 = 2004$.

If the number of integers x that satisfy the inequality $a < x < b$ is h , find the value of h .

5. 若 R 個連續正整數之和是 1000 (其中 $R > 1$)，求 R 的最小值。

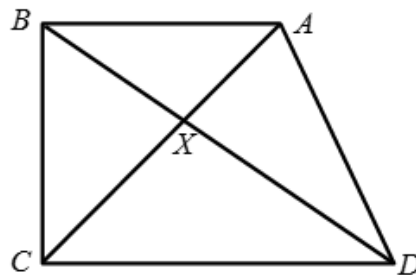
If the sum of R consecutive positive integers is 1000 (where $R > 1$), find the least value of R .

6. 若 a, b 及 c 是正整數且 $abc + ab + bc + ac + a + b + c = 2003$ ，求 abc 的最小值。

If a, b and c are positive integers such that $abc + ab + bc + ac + a + b + c = 2003$, find the least value of abc .

7. 在圖中， $ABCD$ 是梯形， AB, CD 垂直於 BC ，對角綫 AC 和 BD 相交於 X 。若 $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $CD = 16$ cm, $\triangle BXC$ 的面積為 W cm²，求 W 的值。

In the figure, $ABCD$ is a trapezium, the segments AB and CD are both perpendicular to BC and the diagonals AC and BD intersect at X . If $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm and $CD = 16$ cm, and the area of $\triangle BXC$ is W cm², find the value of W .



8. 設 $y = \log_{1400} \sqrt{2} + \log_{1400} \sqrt[3]{5} + \log_{1400} \sqrt[6]{7}$ ，求 y 的值。

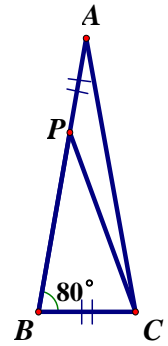
Let $y = \log_{1400} \sqrt{2} + \log_{1400} \sqrt[3]{5} + \log_{1400} \sqrt[6]{7}$, find the value of y .

9. 在圖中， $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $AB = AC$ 及 $\angle ABC = 80^\circ$ 。

若 P 是 AB 上一點使得 $AP = BC$ ， $\angle ACP = k^\circ$ ，求 k 的值。

In the figure, $\triangle ABC$ is an isosceles triangle with $AB = AC$ and $\angle ABC = 80^\circ$.

If P is a point on the AB such that $AP = BC$, $\angle ACP = k^\circ$, find the value of k .



10. 若點 $P(a, b)$ 在直線 $x - y + 1 = 0$ 上使得點 P 與點 $A(1, 0)$ 之間的距離和點 P 與點 $B(3, 0)$ 之間的距離之和為最小，求 $a + b$ 的值。

Suppose $P(a, b)$ is a point on the straight line $x - y + 1 = 0$ such that the sum of the distance between P and the point $A(1, 0)$ and the distance between P and the point $B(3, 0)$ is the least, find the value of $a + b$.

*** 試卷完 End of Paper ***