

Hong Kong Mathematics Olympiad 2009-2010

Heat Event (Individual)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

1. 把 8 個完全相同的球放入三個不同的盒中，使得每個盒內至少有球一個，問共有多少個不同的分配方法？

In how many possible ways can 8 identical balls be distributed to 3 distinct boxes so that every box contains at least one ball?

2. 若 α 及 β 為二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的兩個實根，求 $\alpha^6 + 8\beta$ 的值。
If α and β are the two real roots of the quadratic equation $x^2 - x - 1 = 0$, find the value of $\alpha^6 + 8\beta$.

3. 若 $a = \frac{1}{5 \times 10} + \frac{1}{10 \times 15} + \frac{1}{15 \times 20} + \cdots + \frac{1}{100 \times 105}$ ，求 a 的值。

If $a = \frac{1}{5 \times 10} + \frac{1}{10 \times 15} + \frac{1}{15 \times 20} + \cdots + \frac{1}{100 \times 105}$, find the value of a .

4. 已知 $x + y + z = 3$ 及 $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ ，且 x, y, z 為整數。若 $x < 0$ ，求 y 的值。
Given that $x + y + z = 3$ and $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, where x, y, z are integers. If $x < 0$, find the value of y .

5. 已知 a, b, c, d 為正整數，且滿足 $\log_a b = \frac{1}{2}$ 及 $\log_c d = \frac{3}{4}$ 。若 $a - c = 9$ ，求 $b - d$ 的值。

Given that a, b, c, d are positive integers satisfying $\log_a b = \frac{1}{2}$ and $\log_c d = \frac{3}{4}$.

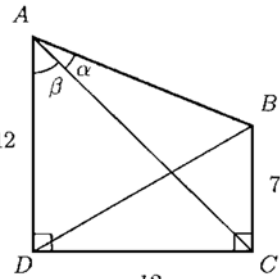
If $a - c = 9$, find the value of $b - d$.

6. 若 $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ ，其中 $0 \leq x, y \leq 1$ ，求 $x^2 + y^2$ 的值。

If $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$, where $0 \leq x, y \leq 1$, find the value of $x^2 + y^2$.

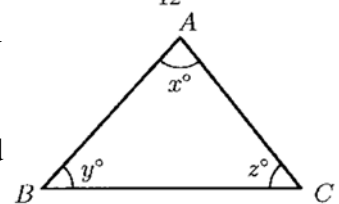
7. 在圖一中， $ABCD$ 是一梯形。 AD 、 BC 和 DC 的長分別為 12、7 和 12。若 DC 分別垂直於 AD 及 BC ，求 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ 的值。

In figure 1, $ABCD$ is a trapezium. The lengths of segments AD , BC and DC are 12, 7 and 12 respectively. If segments AD and BC are both perpendicular to DC , find the value of $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.



8. 在圖二中， $\triangle ABC$ 滿足： $x \geq y \geq z$ 及 $4x = 7z$ 。若 x 的最大值是 m ， x 的最小值是 n ，求 $m + n$ 的值。

In Figure 2, $\triangle ABC$ is a triangle satisfying $x \geq y \geq z$ and $4x = 7z$. If the maximum value of x is m and the minimum value of x is n , find the value of $m + n$.



9. 把 $1, 2, \dots, n$ ($n \geq 3$) 作環形排列，使得每兩個相鄰的數字相差為 1 或 2。求有多少個此類的環形排列。

Arrange the numbers $1, 2, \dots, n$ ($n \geq 3$) in a circle so that adjacent numbers always differ by 1 or 2. Find the number of possible such circular arrangements.

10. 若 $\lfloor x \rfloor$ 為最大的整數小於或等於 x ，求以下 2010 個數中共有多少個不同的值：

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2010} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2010} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2010^2}{2010} \right\rfloor.$$

If $\lfloor x \rfloor$ is the largest integer less than or equal to x , find the number of distinct values in the following 2010 numbers: $\left\lfloor \frac{1^2}{2010} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2010} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2010^2}{2010} \right\rfloor$.

*** 試卷完 End of Paper ***

Hong Kong Mathematics Olympiad 2009-2010
Heat Event (Individual) — Spare

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

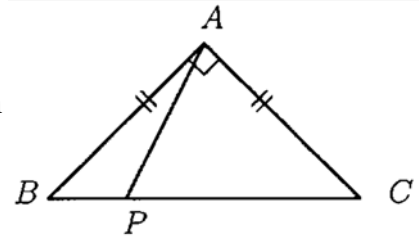
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark.

1. 在圖三中， ABC 為一等腰三角形及 P 為 BC 上的一點。

若 $BP^2 + CP^2 : AP^2 = k : 1$ ，求 k 的值。

In Figure 3, ABC is an isosceles triangle and P is a point on BC . If $BP^2 + CP^2 : AP^2 = k : 1$, find the value of k .



圖三

Figure 3

Hong Kong Mathematics Olympiad 2009-2010
Heat Event (Group)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

1. 已知六位數 $503xyz$ 可以被 7, 9, 11 整除。求三位數 xyz 的最小值。

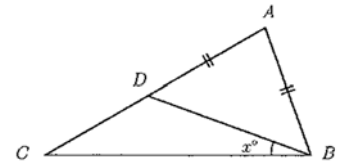
Given that the six-digit number $503xyz$ is divisible by 7, 9, 11. Find the minimum value of the three-digit number xyz .

2. 求最小的正整數 n 使得 $\underbrace{20092009\cdots 2009}_{n\text{個}2009}$ 能被 11 整除。

Find the smallest positive integer n so that $\underbrace{20092009\cdots 2009}_{n\text{ copies of }2009}$ is divisible by 11.

3. 在圖一中， ABC 是一三角形。 D 是 AC 上的一點，使得 $AB = AD$ 。若 $\angle ABC - \angle ACB = 40^\circ$ ，求 x 的值。

In figure 1, ABC is a triangle. D is a point on AC such that $AB = AD$. If $\angle ABC - \angle ACB = 40^\circ$, find the value of x .



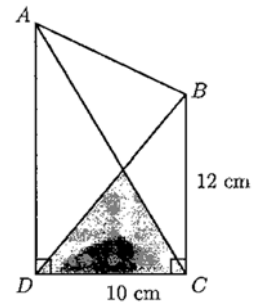
圖一 Figure 1

4. 在圖二中，已知陰影部分的面積是 35 cm^2 。

若梯形 $ABCD$ 的面積是 $z \text{ cm}^2$ ，求 z 的值。

In figure 2, given that the area of the shaded region is 35 cm^2 .

If the area of the trapezium $ABCD$ is $z \text{ cm}^2$, find the value of z .



圖二 Figure 2

5. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6 中抽取三個號碼。求抽得的號碼中包含最少兩個連續數的概率。

Three numbers are drawn from 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Find the probability that the numbers drawn contain at least two consecutive numbers.

6. 求以下函數的最小值： $f(x) = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-1000|$ ，其中 x 是一實數。

Find the minimum value of the following function: $f(x) = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-1000|$, where x is a real number.

7. 設 m, n 為正整數使得 $\frac{1}{2010} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2009}$ 。求 n 的最小值。

Let m, n be positive integers such that $\frac{1}{2010} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2009}$. Find the minimum value of n .

8. 如果正整數 a 的各數位之和等於 7，則 a 稱為「幸運數」。例如 7, 61, 12310 都是「幸運數」。將所有「幸運數」從小到大排成一系列 a_1, a_2, a_3, \dots 。若 $a_n = 1600$ ，求 a_{2n} 的值。

Let a be a positive integer. If the sum of all digits of a is equal to 7, then a is called a “lucky number”. For example, 7, 61, 12310 are lucky numbers.

List all lucky numbers in ascending order a_1, a_2, a_3, \dots . If $a_n = 1600$, find the value of a_{2n} .

9. 若 $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$ ，求 $|x| - |y|$ 的最小值。

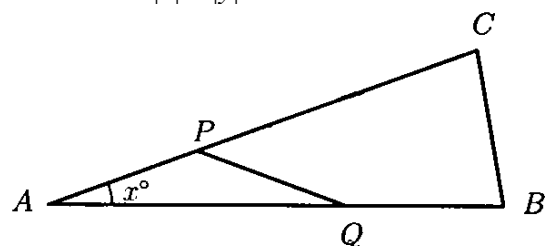
If $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$, find the minimum value of $|x| - |y|$.

10. 在圖三中， $\triangle ABC$ 滿足 $AB = AC$ 且 $x \leq 45$ 。

若 P 和 Q 分別是 AC 及 AB 上的兩點，

且 $AP = PQ = QB = BC \leq AQ$ ，求 x 的值。

In Figure 3, in $\triangle ABC$, $AB = AC$, $x \leq 45$. If P and Q are two points on AC and AB respectively, and $AP = PQ = QB = BC \leq AQ$, find the value of x .



圖三 Figure 3

*** 試卷完 End of Paper ***

Hong Kong Mathematics Olympiad 2009-2010
Heat Event (Group) — Spare

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

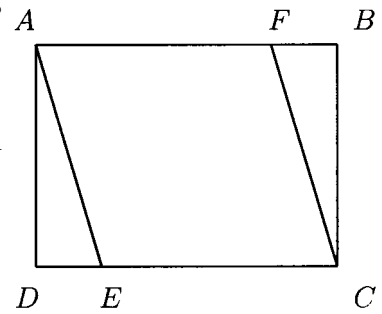
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark.

1. 在圖四中， $ABCD$ 為一矩形。設 E 及 F 分別為 DC 及 AB 上的點，並使得 $AFCE$ 為一菱形。若 $AB = 16$ 及 $BC = 12$ ，求 EF 的值。

In Figure 4, $ABCD$ is a rectangle. Let E and F be two points on DC and AB respectively, so that $AFCE$ is a rhombus.

If $AB = 16$ and $BC = 12$, find the value of EF .



圖四

Figure 4

Hong Kong Mathematics Olympiad 2009 – 2010
Heat Event (Geometric Construction)
香港數學競賽 2009 – 2010
初賽(幾何作圖)

每隊必須列出詳細所有步驟(包括作圖步驟)。

時限：15 分鐘

All working (including geometric drawing) must be clearly shown.

此部份不計分。This part does not carries any marks.

Time allowed: 15 minutes

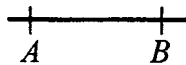
School Code: _____

School Name: _____

第一題 Question No. 1

圖一所示為長度 1 單位的綫段 AB 。試構作一長度為 $\sqrt{7}$ 單位的綫段。

Figure 1 shows a line segment AB of length 1 unit. Construct a line segment of length $\sqrt{7}$ units.



Hong Kong Mathematics Olympiad 2009 – 2010
Heat Event (Geometric Construction)
香港數學競賽 2009 – 2010
初賽(幾何作圖)

每隊必須列出詳細所有步驟(包括作圖步驟)。

時限：15 分鐘

All working (including geometric drawing) must be clearly shown.

此部份不計分。This part does not carries any marks.

Time allowed: 15 minutes

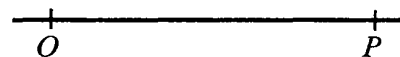
School Code: _____

School Name: _____

第二題 Question No. 2

已知 $\triangle ABC$ 是等邊三角形。 P 、 Q 及 R 為分別位於綫段 AB 、 BC 及 CA 上的相異點，
且 $OP \perp AB$ ， $OQ \perp BC$ ， $OR \perp CA$ 及 $OP = OQ = OR$ 。圖二展示綫段 OP 。試構作 $\triangle ABC$ 。

Given that $\triangle ABC$ is equilateral. P , Q and R are distinct points lying on the lines AB , BC and CA such that $OP \perp AB$, $OQ \perp BC$, $OR \perp CA$ and $OP = OQ = OR$. Figure 2 shows the line segment OP . Construct $\triangle ABC$.



Hong Kong Mathematics Olympiad 2009 – 2010
Heat Event (Geometric Construction)
香港數學競賽 2009 – 2010
初賽(幾何作圖)

每隊必須列出詳細所有步驟(包括作圖步驟)。

時限：15 分鐘

All working (including geometric drawing) must be clearly shown.

此部份不計分。This part does not carries any marks.

Time allowed: 15 minutes

School Code: _____

School Name: _____

第三題 Question No. 3

圖三所示為一綫段 AB 。試構作三角形 ABC 使 $AC:BC=3:2$ 及 $\angle ACB=60^\circ$ 。

Figure 3 shows a line segment AB . Construct a triangle ABC such that $AC:BC=3:2$ and $\angle ACB=60^\circ$



*** 試卷完 End of Paper ***