在正方形內找出滿足已知條件的點

Created by Mr. Francis Hung　　　　Last updated: 2012-06-04

如圖 1，在正方形 $ABCD$ 內找出一點 P，使得 $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$。[1]

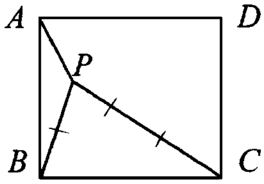

圖 1

分析方法如下(圖 2)：

設 $PA = a$，$PB = 2a$，$PC = 3a$。

將ΔAPB 以 B 為中心點逆時針旋轉 90°，得ΔEQB。

$\Delta APB \cong \Delta EQB$　　(由旋轉所得)

$EQ = a$，$BQ = 2a = BP$

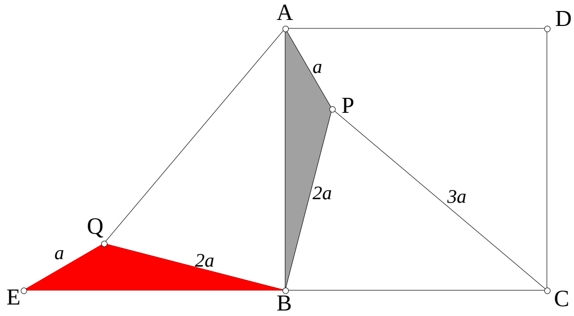

圖 2

連接 AQ。

$\angle PBQ = 90°$　　(由旋轉所得)

$\angle ABQ = 90° - \angle ABP = \angle PBC$

$AB = BC$

$\Delta ABQ \cong \Delta CBP$　　(S.A.S.)

$AQ = CP = 3a$　　(全等三角形對應邊)

$\because \angle PBQ = 90°$　　(由旋轉所得)

$\therefore PQ^2 = PB^2 + QB^2$　　(畢氏定理)

$= (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2$

$AP^2 + PQ^2 = a^2 + 8a^2 = 9a^2$

$AQ^2 = (3a)^2$

$\therefore AP^2 + PQ^2 = AQ^2$

$\angle APQ = 90°$　　(畢氏定理的逆定理)

$\because \angle PBQ = 90°$及 $PB = QB$　(由旋轉所得)

$\therefore \angle BPQ = 45°$　　(三角形內角和)

$\angle APB = 45° + 90° = 135°$

作圖方法如下(圖 3，圖 4 及圖 5)：

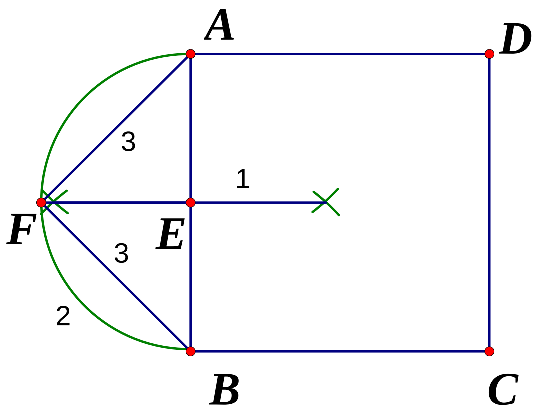

圖 3

(1)　於 AB 作垂直平分綫得中點 E。

(2)　以 E 為圓心，EA 為半徑向外作一半圓；延伸垂直平分綫交半圓於 F。

(3)　連接 AF、FB(圖 3)。

$\angle AFB = 90°$　　(半圓上的圓周角)。

顯然易見，ΔAFB 為直角等腰三角形。

(4)　以 F 為圓心，FA 為半徑作一圓。(圖 4)

(5)　EF 的延長綫交圓於 G。

(6)　利用截綫定理找出一點 H，使得 $AH : HB = 1 : 2$。設 $AH = k$，$HB = 2k$

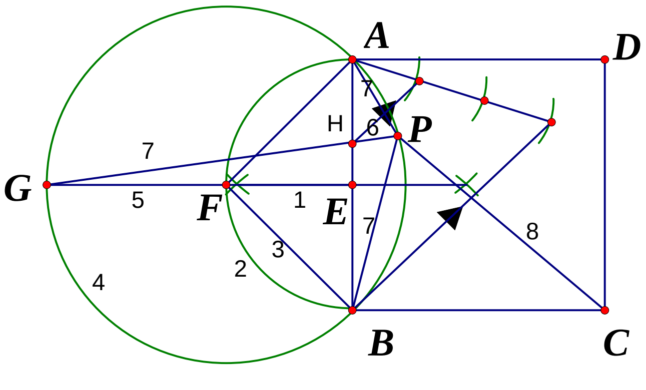

圖 4

(7)　連接 GH 並延長交圓於 P。

連接 PA 及 PB。

$\Delta AGE \cong \Delta BGE$　(S.A.S.)

$\therefore AG = BG$　　(全等三角形對應邊)

$\angle APG = \angle BPG = \theta$　　(等弦對等角)

設$\angle AHP = \alpha$

$\angle BHP = 180° - \alpha$　　(直綫上的鄰角)

$k : \sin\theta = AP : \sin\alpha$ …… (1)　　(於ΔAHP 應用正弦定理)

[1]此題是由 HKMO 1999 初賽團體項目第 10 題轉化出來的。原題目為：

在圖中，P 為正方形 $ABCD$ 內一點，$PA = a$，$PB = 2a$，$PC = 3a$ $(a > 0)$。

若$\angle APB = x°$，求 x 的值。

$2k : \sin\theta = BP : \sin(180° - \alpha)$ …… (2) (於ΔBHP 應用正弦定理)

利用 $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;

(1) ÷ (2): $1 : 2 = AP : BP$

設 $AP = a$，$BP = 2a$

$\angle APB = \frac{1}{2} \times$ 反角 $\angle AFB$ (圓心角兩倍於圓周角)

$= \frac{1}{2} \cdot 270^\circ = 135°$ (同頂角)

(8) 連接 PC，將 ΔAPB 以 B 為中心點逆時針旋轉 90°，得ΔEQB (圖 5)。

作圖完畢。

證明如下：

$\Delta APB \cong \Delta EQB$ (由旋轉所得)

$\angle PBQ = 90°$及 $PB = QB$ (由旋轉所得)

ΔPBQ 為一直角等腰三角形

$\angle BPQ = 45°$ (三角形內角和)

$\therefore PQ^2 = PB^2 + QB^2$ (畢氏定理)

$= (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2$

$\angle APQ = 135° - 45° = 90°$

$\therefore$ ΔAPQ 為直角三角形

$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 = a^2 + 8a^2$ (畢氏定理)

$AQ = 3a$

$\angle ABQ = 90° - \angle ABP = \angle PBC$

$AB = BC$

$\Delta ABQ \cong \Delta CBP$ (S.A.S.)

$CP = AQ = 3a$ (全等三角形對應邊)

$\therefore PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$。

P 滿足以上要求，證明完畢。

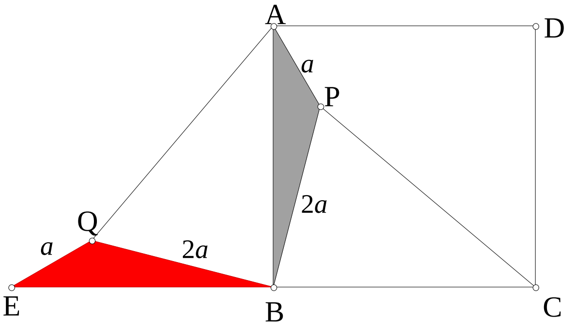

圖 5