作二圓與已知圓相切並與已知直綫相切於特定點

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2012-06-04

如圖 1，已給直綫 *L* 經過 *P* 點，及一圓 *C*(圓心 *G*)與 *L* 相交，其中 *P* 點在圓 *C* 外。作二圓外切 *C*，且與 *L* 相切於 *P* 點。[1]

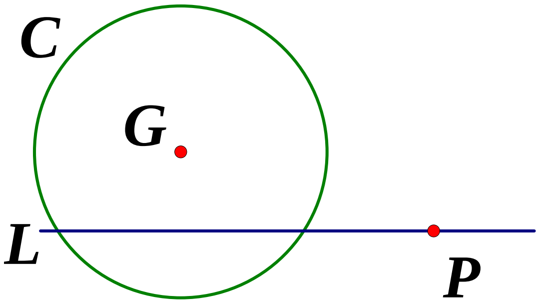

圖 1

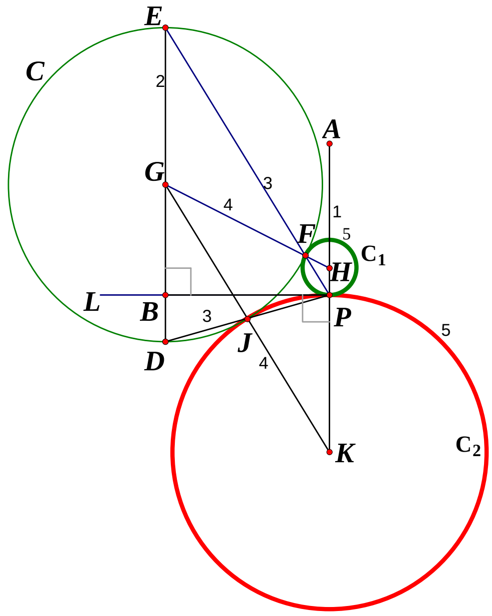

圖 2

作圖方法如下(圖 2)：

(1)　過 P 作 AP 垂直於 L。

(2)　過 G 作 EB 垂直於 L，交 L 於 B，交圓 C 於 E(離 L 較遠一端)及 D(離 L 較近一端)。

(3)　連接 DP，交圓 C 於 J；連接 EP，交圓 C 於 F。

(4)　連接 GF，其延長綫交 AP 於 H；連接 GJ，其延長綫交 AP 的延長綫於 K。

(5)　以 H 為圓心，HF 為半徑作一圓 C_1；以 K 為圓心，KJ 為半徑作一圓 C_2。

作圖完畢，證明如下：

$\angle GBP + \angle HPB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$　　(由作圖所得)

$EB \parallel HP$　　(同傍內角互補)

$\Delta EFG \sim \Delta PFH$　　(等角)

$\dfrac{HP}{GE} = \dfrac{HF}{GF}$　　(相似三角形的對應邊)

$\because GE = GF$　　(圓 C 的半徑)

$\therefore HF = HP$

圓 C_1 經過 F、P

G、F、H 共綫

$HF + FG = HG$

$\therefore$ 圓 C_1 外切 C 於 F

$\angle BPH = 90^\circ$　　(由作圖所得)

$\therefore$ 圓 C_1 與 L 相切於 P　　(切綫⊥半徑的逆定理)

利用相似的方法，可證明 C_2 為另一外切圓，滿足所需條件，證明完畢。

---

[1] 參考：Exercises in Technical Drawing for GCE 1970 p.40 Q20

已給直綫 *L* 經過 *P* 點，及一圓 *C*(圓心 *G*)不與 *L* 相交。

分別作一圓 C_1 外切 *C* 及另一圓 C_2 內切 *C*，且與 *L* 相切於 *P* 點。

作圖方法(圖 3)與第 56 頁完全相同。

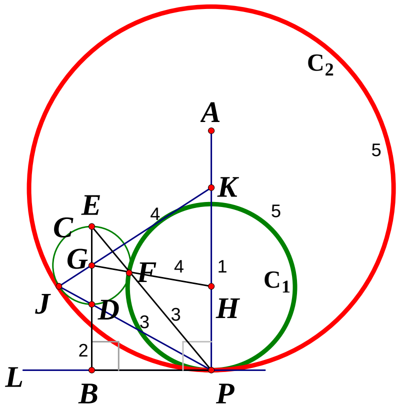

圖 3

現證明 C_2 為一內切圓：

$\angle GBP + \angle HPB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$	(由作圖所得)
$EB \mathbin{//} AP$	(同傍內角互補)
$\Delta DJG \sim \Delta PJK$	(等角)
$\dfrac{KP}{GD} = \dfrac{KJ}{GJ}$	(相似三角形的對應邊)
$\because GD = GJ$	(圓 *C* 的半徑)
$\therefore KP = KJ$	
圓 C_2 經過 *P* 及 *J*	
$\because$ *J*、*G*、*K* 共綫	
$\therefore GK = JK - GJ$	
$\therefore$ 圓 C_2 內切 *C* 於 *J*	
$\angle BPK = 90^\circ$	(由作圖所得)
$\therefore$ 圓 C_2 與 *L* 相切於 *P*。	(切綫⊥半徑的逆定理)

證明完畢。

已給直綫 *L* 經過 *P* 點，及一圓 *C*(圓心 *G*)與 *L* 相交，其中 *P* 點在圓 *C* 內。作二圓內切 *C*，且與 *L* 相切於 *P* 點。

作圖方法(圖 4)與第 56 頁相似：

(1) 過 *P* 作 *AP* 垂直於 *L*。

(2) 過 *G* 作 *ED* 垂直於 *L*，交 *L* 於 *B*，交圓 *C* 於 *E*(離 *L* 較遠一端)及 *D*(離 *L* 較近一端)。

(3) 連接 *DP*，其延長綫交圓 *C* 於 *J*；連接 *EP*，其延長綫交圓 *C* 於 *F*。

(4) 連接 *GF*，交 *AP* 的延長綫於 *H*；連接 *GJ*，交 *AP* 於 *K*。

(5) 以 *H* 為圓心，*HF* 為半徑作一圓 C_2；以 *K* 為圓心，*KJ* 為半徑作一圓 C_1。

作圖完畢，證明從略。

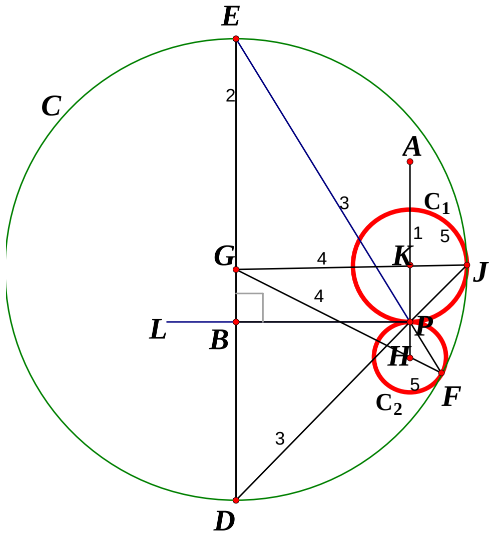

圖 4