

Hong Kong Mathematics Olympiad 2014-2015

Heat Event (Individual)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

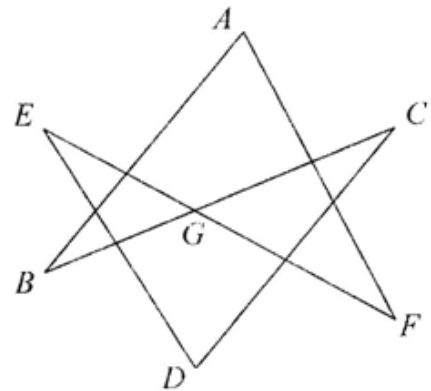
1. 在 1 至 2015 之間(包括 1 及 2015 在內)有多少對相異整數的積是 5 的倍數?
How many pairs of distinct integers between 1 and 2015 inclusively have their products as multiple of 5?

2. 已知 $(10^{2015})^{-10^2} = \underbrace{0.000\cdots 01}_{n\text{個}0}$ ，求 n 的值。

Given that $(10^{2015})^{-10^2} = \underbrace{0.000\cdots 01}_{n\text{ times}}$. Find the value of n .

3. 設正 n 邊形的內角為 x° ，其中 x 為整數。問 n 有多少個可能值？
Let x° be the measure of an interior angle of an n -sided regular polygon, where x is an integer, how many possible values of n are there?

4. 已知右圖中， $\angle EGB = 64^\circ$ ，
 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = ?$
As shown in the figure, $\angle EGB = 64^\circ$ ，
 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = ?$

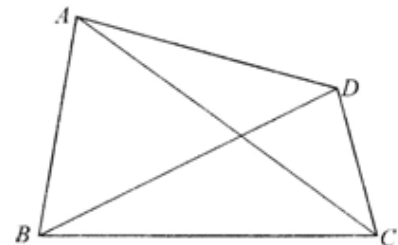


5. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 為一正實數序列，其中 $a_1 = 1$ 及 $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n} + \frac{1}{4}$ 。求 a_{2015} 的值。

It is given that $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ is a sequence of positive real numbers such that $a_1 = 1$ and $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n} + \frac{1}{4}$. Find the value of a_{2015} .

6. 右圖中的 $ABCD$ 是一個凸四邊形及 $AB + BD + CD = 16$ ，求 $ABCD$ 的最大面積。

As shown in the figure, $ABCD$ is a convex quadrilateral and $AB + BD + CD = 16$. Find the maximum area of $ABCD$.



7. 設 $x, y, z > 1$ 、 $p > 0$ 、 $\log_x p = 18$ 、 $\log_y p = 21$ 及 $\log_{xyz} p = 9$ 。求 $\log_z p$ 的值。
Let $x, y, z > 1$, $p > 0$, $\log_x p = 18$, $\log_y p = 21$ and $\log_{xyz} p = 9$. Find the value of $\log_z p$.

8. 求 $\frac{1}{4029} + \frac{2 \times 2014}{2014^2 + 2015^2} + \frac{4 \times 2014^3}{2014^4 + 2015^4} - \frac{8 \times 2014^7}{2014^8 - 2015^8}$ 的值。

Find the value of $\frac{1}{4029} + \frac{2 \times 2014}{2014^2 + 2015^2} + \frac{4 \times 2014^3}{2014^4 + 2015^4} - \frac{8 \times 2014^7}{2014^8 - 2015^8}$.

9. 設 x 實數。求 $\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 130}$ 的最小值。

Let x be a real number. Find the minimum value of $\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 130}$.

10. B 、 H 及 I 為圓上的點。 C 是該圓外的一點。 BC 是該圓在點 B 的切綫。 HC 和 IC 分別通過該圓於點 D 及 G 。已知 HDC 是 $\angle BCI$ 的角平分綫、 $BC = 12$ 、 $DC = 6$ 及 $GC = 9$ ，求 $\frac{\Delta BDH \text{ 的面積}}{\Delta HIG \text{ 的面積}}$ 的值。

B , H and I are points on the circle. C is a point outside the circle. BC is tangent to the circle at B . HC and IC cut the circle at D and G respectively. It is given that HDC is the angle bisector of $\angle BCI$, $BC = 12$, $DC = 6$ and $GC = 9$. Find the value of $\frac{\text{area of } \Delta BDH}{\text{area of } \Delta HIG}$.

Hong Kong Mathematics Olympiad 2014-2015
Heat Event (Group)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

1. 求 $\frac{1}{1860 \times 1865} + \frac{1}{1865 \times 1870} + \frac{1}{1870 \times 1875} + \cdots + \frac{1}{2010 \times 2015}$ 的值。

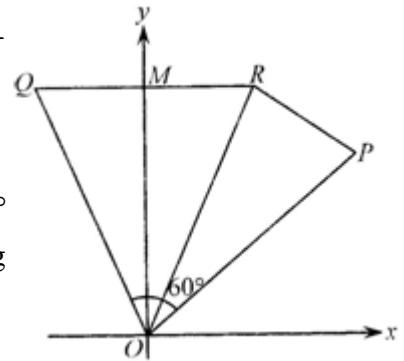
Find the value of $\frac{1}{1860 \times 1865} + \frac{1}{1865 \times 1870} + \frac{1}{1870 \times 1875} + \cdots + \frac{1}{2010 \times 2015}$.

2. 已知等邊三角形 ABC 的邊長為 3， P 為三角形內的一點。設 PX 、 PY 及 PZ 分別為 P 至三角形三邊 AB 、 BC 及 CA 的垂足，求 $PX + PY + PZ$ 的值。

Given an equilateral triangle ABC with each side of length 3 and P is an interior point of the triangle. Let PX , PY and PZ be the feet of perpendiculars from P to AB , BC and CA respectively, find the value of $PX + PY + PZ$.

3. 點 P 的坐標為 $(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} + 1)$ 。設點 P 繞原點作逆時針方向 60° 旋轉至點 Q ，接著點 Q 再沿 y -軸反射至點 R 。求 PR^2 的值。

The coordinates of P are $(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} + 1)$. P is rotated 60° anticlockwise about the origin to Q . Q is then reflected along the y -axis to R . Find the value of PR^2 .



4. 已知 $a^2 + \frac{b^2}{2} + 9 \leq ab - 3b$ ，其中 a 與 b 為實數，求 ab 的值。

Given that $a^2 + \frac{b^2}{2} + 9 \leq ab - 3b$, where a and b are real numbers. Find the value of ab .

5. 已知方程 $x^2 + 15x + 58 = 2\sqrt{x^2 + 15x + 66}$ 有兩個實根，求兩根之和。

Given that the equation $x^2 + 15x + 58 = 2\sqrt{x^2 + 15x + 66}$ has two real roots. Find the sum of the roots.

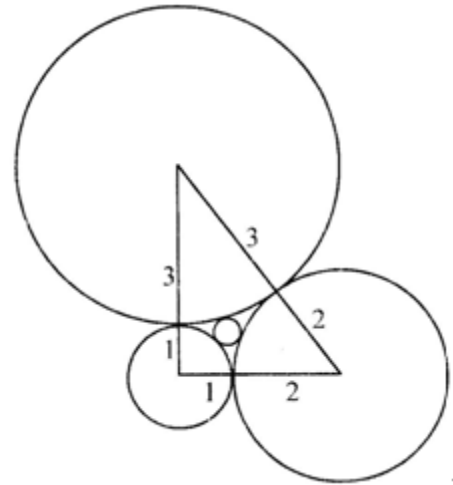
6. 已知三角形中兩角之和為 n° ，最大角比最小角大 30° ，求 n 的最大值。

Given that the sum of two interior angles of a triangle is n° , and the largest interior angle is 30° greater than the smallest one. Find the largest possible value of n .

7. 四個半徑分別為 1 單位、2 單位、3 單位及 r 單位的圓互相相切如圖所示。求 r 的值。

Four circles with radii 1 unit, 2 units, 3 units and r units are touching one another as shown in the figure.

Find the value of r .



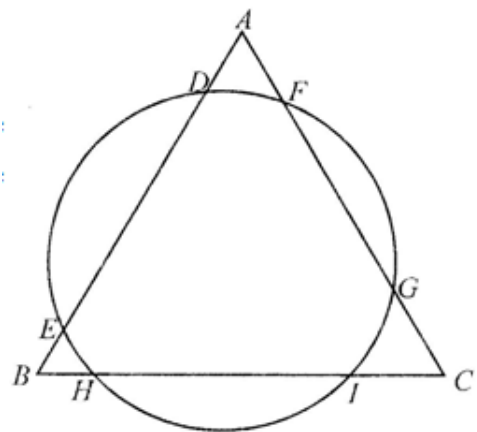
8. 已知 a 、 b 、 x 及 y 為非零整數，其中 $ax + by = 4$ 、 $ax^2 + by^2 = 22$ 、 $ax^3 + by^3 = 46$ 及 $ax^4 + by^4 = 178$ 。求 $ax^5 + by^5$ 的值。

Given that a , b , x and y are non-zero integers, where $ax + by = 4$, $ax^2 + by^2 = 22$, $ax^3 + by^3 = 46$ and $ax^4 + by^4 = 178$. Find the value of $ax^5 + by^5$.

9. 已知圖中的 ABC 為等邊三角形， $AF = 2$ 、 $FG = 10$ 、 $GC = 1$ 及 $DE = 5$ 。求 HI 的值。

Given that, in the figure, ABC is an equilateral triangle with $AF = 2$, $FG = 10$, $GC = 1$ and $DE = 5$.

Find the value of HI .



10. 設 a_n 及 b_n 為二次函數 $y = n(n-1)x^2 - (2n-1)x + 1$ 的截距，其中 n 為一個大於 1 的整數。求 $a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{2015}b_{2015}$ 的值。

Let a_n and b_n be the x -intercepts of the quadratic function $y = n(n-1)x^2 - (2n-1)x + 1$, where n is an integer greater than 1. Find the value of $a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{2015}b_{2015}$.

Hong Kong Mathematics Olympiad 2014 – 2015
Heat Event (Geometric Construction)
香港數學競賽 2014 – 2015
初賽(幾何作圖)

每隊必須列出詳細所有步驟(包括作圖步驟)。

時限：20 分鐘

All working (including geometric drawing) must be clearly shown.

此部份滿分為十分。The full marks of this part is 10 marks.

Time allowed: 20 minutes

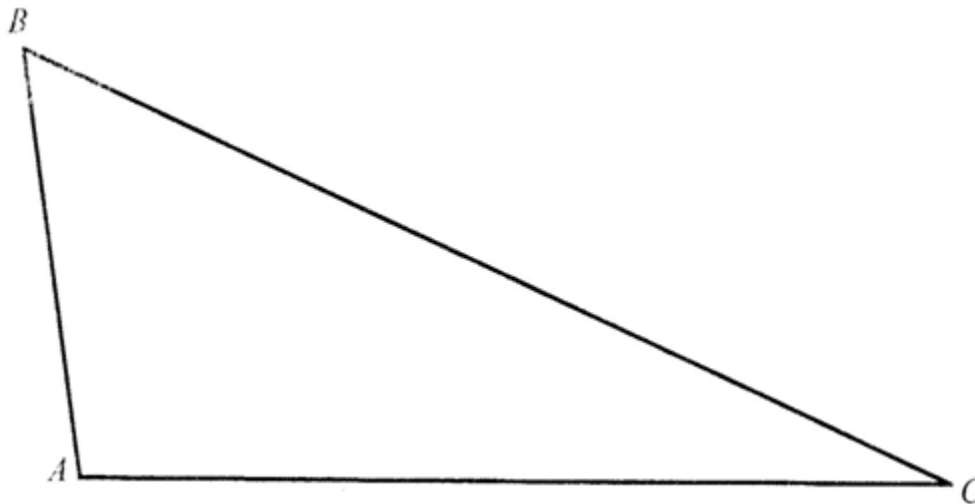
School Code: _____

School Name: _____

第一題 Question No. 1

構作一個與下列三角形的底和高相等的等腰三角形。

Construct an isosceles triangle which has the same base and height to the following triangle.



Hong Kong Mathematics Olympiad 2014 – 2015
Heat Event (Geometric Construction)
香港數學競賽 2014 – 2015
初賽(幾何作圖)

每隊必須列出詳細所有步驟(包括作圖步驟)。

時限：20 分鐘

All working (including geometric drawing) must be clearly shown.

此部份滿分為十分。The full marks of this part is 10 marks.

Time allowed: 20 minutes

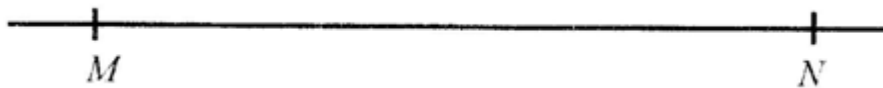
School Code: _____

School Name: _____

第二題 Question No. 2

下圖所示為一個單位長度的綫段 MN ，試構作一條長度為 $\sqrt{\frac{1}{5}}$ 的綫段。

Given the following line segment MN represent a unit length, construct a line segment of length $\sqrt{\frac{1}{5}}$.



Hong Kong Mathematics Olympiad 2014 – 2015

Heat Event (Geometric Construction)

香港數學競賽 2014 – 2015

初賽(幾何作圖)

每隊必須列出詳細所有步驟(包括作圖步驟)。

時限：20 分鐘

All working (including geometric drawing) must be clearly shown.

此部份滿分為十分。The full marks of this part is 10 marks.

Time allowed: 20 minutes

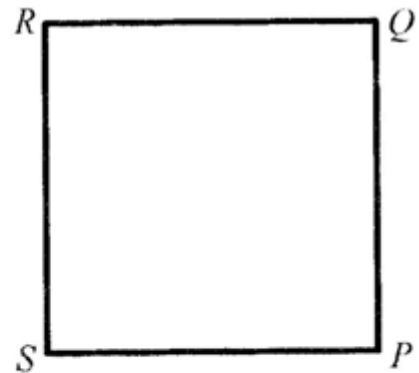
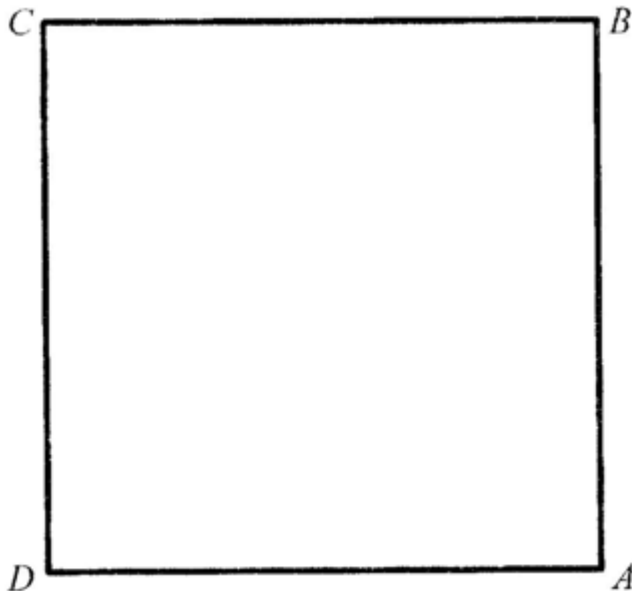
School Code: _____

School Name: _____

第三題 Question No. 3

構作一個面積相等於下列兩個正方形 $ABCD$ 及 $PQRS$ 面積之差的正方形。

Construct a square whose area is equal to the difference between the areas of the following two squares $ABCD$ and $PQRS$.



*** 試卷完 End of Paper ***