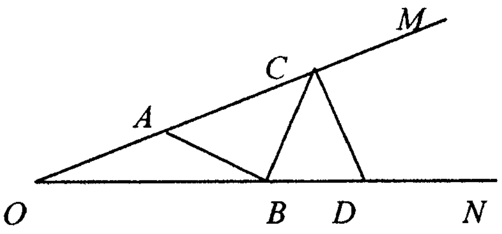
最短距離(二)

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2012-05-01

如圖一，已給$\angle MON(< 60°)$，A 在 OM 上，D 在 ON 上，在 ON 上找出 B 點、在 OM 上找出 C 點，使得 $AB + BC + CD$ 為最短。[1]



圖一

作圖方法如下(圖二)：

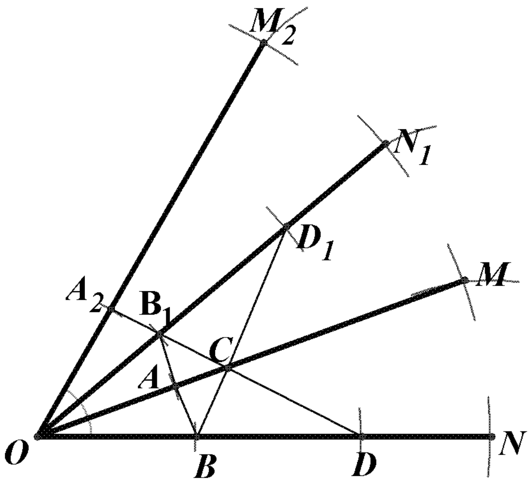
(1) 將ΔMON 沿 OM 反射，得ΔMON_1，D_1 為 D 的反射點。

(2) 將ΔMON_1 沿 ON_1 反射，得ΔM_2ON_1，A_2 為 A 的反射點。

(3) 連接 A_2D，交 ON_1 於 B_1，交 OM 於 C。

(4) 將 B_1 沿 OM 反射，得 B。

作圖完畢。



圖二

證明如下：

由反射所得，$\Delta AB_1C \cong \Delta ABC$, $\Delta B_1CD_1 \cong \Delta BCD$, $\Delta A_2OB_1 \cong \Delta AOB_1$

$\ell = AB + BC + CD = AB_1 + B_1C + CD$

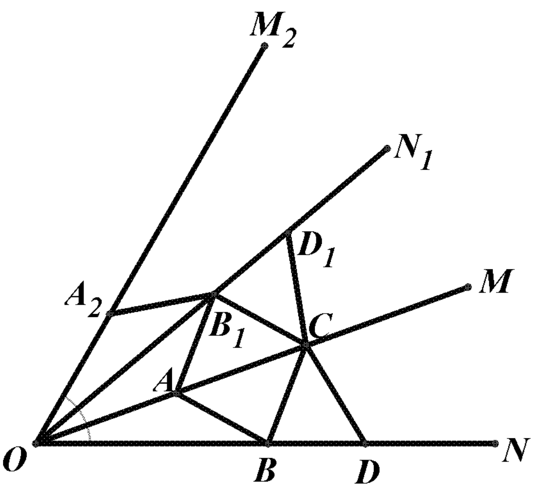
$\ell = A_2B_1 + B_1C + CD$

當 A_2、B_1、C、D 共綫時，ℓ 為最短。

證明完畢。

註一：為能確保可作一直綫 A_2D，橫過 OM 及 ON_1，$3\times\angle MON < 180°$，即$\angle MON < 60°$

註二：若 A_2、B_1、C、D 不成一直綫時(如圖三)，ℓ 較長。



圖三

練習題：

試將以下題目改寫，並以尺規作圖找出答案。

HKMO 2007 初賽團體項目第 9 題

在座標平面上，點 $A = (-6, 2)$、$B = (-3, 3)$、$C = (0, n)$ 及 $D = (m, 0)$組成一個四邊形 $ABCD$。求 n 的值使得該四邊形 $ABCD$ 的周界為最短。

---

[1]此題是由 HKMO 1999 初賽團體項目第 9 題轉化出來的。

原題目為：

在圖中，$\angle MON = 20°$，A 為 OM 上的一點，$OA = 4\sqrt{3}$，D 為 ON 上的一點，$OD = 8\sqrt{3}$，C 為 AM 上的任意一點，B 為 OD 上的任意一點。若 $\ell = AB + BC + CD$，求 ℓ 的最小值。