

**计算机科学中的建模技术**

**课程作业报告**

**班 级 9191062301**

**学生姓名 孙傲歆**

**学 号 919106840333**

**指导教师 刘芳**

**2023年1月**

# **摘 要**

新冠疫情自2019年爆发以来一直对人们的生活和健康产生了严重的危害。新冠其传染性十分之强，需要我们进行合理的防护，并且尽量不去人口比较聚集的地方。但现如今我国已经停止公布阳性感染者轨迹的相关信息，所以如何确定每天上班/上学的最安全路线和最实用的防护方式是一个急需解决的问题。

本文主要聚焦于两个问题：一是如何确定外出通行的最安全路线；二是如何确定最实用合理的防护方式。在本文中我们建立了通用的数学模型，利用层次分析法和最短路径算法帮助“搜索者”制定可用的针对阳性患者追踪的搜索方案，辅助选择确定每天上班/上学的最安全路线和最实用的防护方式。

针对问题一，即如何确定最安全路线。我们假设：一个地方其人员越是密集，那么这个地方的阳性感染者可能就越多，即某地阳性感染者的人数与某地的总人数成比例。基于该假设，我们可以把不同地点抽象为点，地点与地点之间的路抽象为边。然后根据每个地点人的聚集程度确认边的权重，再使用最短路径算法来计算出一条上班/上学的最安全路线。

针对问题二，即如何确定防护方式。这是一个标准的评价类问题。首先对于防护方式有很多种选择，例如普通口罩、N95口罩、防护服、防毒面具等等。而对于每一种防护方式，又可以从其美观程度、防护程度、价格等方面进行考虑。基于这些条件我们可以使用层次分析法AHP进行求解，求得最实用的一种防护方式。

**关键词：**疫情防控 评价模型 AHP Dijkstra算法

# **目 录**

[**摘 要** 2](#_Toc123666193)

[**目 录** 3](#_Toc123666194)

[一、问题重述 4](#_Toc123666195)

[1.1 问题背景 4](#_Toc123666196)

[1.2 问题提出 4](#_Toc123666197)

[二、问题分析 4](#_Toc123666198)

[2.1 问题1的分析 4](#_Toc123666199)

[2.2 问题2的分析 4](#_Toc123666200)

[三、问题假设 4](#_Toc123666201)

[四、符号说明 5](#_Toc123666202)

[五、模型的建立与求解 5](#_Toc123666203)

[5.1 问题1模型的建立与求解 5](#_Toc123666204)

[5.1.1 问题1模型的建立 5](#_Toc123666205)

[5.1.2 问题1模型的求解 6](#_Toc123666206)

[5.2 问题2模型的建立与求解 7](#_Toc123666207)

[5.2.1 问题2模型的建立 7](#_Toc123666208)

[5.2.2 问题2模型的求解 8](#_Toc123666209)

[六、心得总结 9](#_Toc123666210)

[附录：源代码 9](#_Toc123666211)

[问题1源代码 9](#_Toc123666212)

[问题2源代码 10](#_Toc123666213)

一、问题重述

1.1 问题背景

新冠疫情自2019年爆发以来一直对人们的生活和健康产生了严重的危害。新冠其传染性十分之强，需要我们进行合理的防护，并且尽量不去人口比较聚集的地方。但现如今我国已经停止公布阳性感染者轨迹的相关信息，所以如何确定每天上班/上学的最安全路线和最实用的防护方式是一个急需解决的问题。

1.2 问题提出

所有人每天在从 A 点（家里）到 B 点（公司）工作或者学习，中途可能停留在便利店、公交站、地铁站、医院、菜市场、餐厅等区域。

建立一个通用的数学模型，可以帮助“搜索者”制定一个可用的针对阳性患者追踪的搜索方案，辅助选择确定每天上班/上学的最安全路线和最实用的防护方式。（**下文称确定最安全路线为问题1，最实用防护方法为问题2**）

二、问题分析

2.1 问题1的分析

问题1让我们求出每天上班/上学的最安全路线。虽然我们不能准确知道各地阳性和阴性的情况，但我们认为：一个地方其人员越是密集，那么这个地方的阳性感染者可能就越多，即某地阳性感染者的人数与某地的总人数成比例。

基于这个假设，我们可以把不同地点抽象为点，地点与地点之间的路抽象为边。然后根据每个地点人的聚集程度确认边的权重，在使用最短路径算法来计算出一条上班/上学的最安全路线。

2.2 问题2的分析

问题2让我们选择最实用的防护方式，这是一个标准的评价类问题。首先对于防护方式有很多种选择，例如普通口罩、N95口罩、防护服、防毒面具等等。而对于每一种防护方式，又可以从其美观程度、防护程度、价格等方面进行考虑。基于这些条件我们可以使用层次分析法AHP进行求解，求得最实用的一种防护方式。

三、问题假设

基于对问题的分析我们做如下假设：

* 假设某地阳性感染者的人数与某地的总人数成比例
* 假设某地阳性感染者去往其相邻地点的可能性相同
* 假设各地点之间没有大小和形状的差距（全部抽象为点）
* 假设各地点之间的路没有大小和形状的差距（全部抽象为边）
* 假设不同年龄段的人群其感染可能性相同
* 假设不同年龄段的人群其被感染可能性相同
* 假设阳性感染者的权重都是一样的，即感染者之间没有轻重缓急之分
* 假设各类事件都是相互独立的

四、符号说明

|  |  |
| --- | --- |
| 符号 | 意义 |
|  | 地区i和地区j之间的边权大小 |
|  | 地区i的人口密集程度(1-10) |
|  | 因素i与因素j相比其重要程度 |
|  | 第i个比较因子 |
|  | 第i个准则的权重值 |
|  | 第i个准则对于目标判别矩阵的CI值 |
|  | 第i个准则对于目标判别矩阵的RI值 |

五、模型的建立与求解

5.1 问题1模型的建立与求解

### 5.1.1 问题1模型的建立

**1.最短路径问题**

从图中的某个顶点出发到达另外一个顶点的所经过的边的权重和最小的一条路径，称为最短路径。

**2.算法特点**

Dijkstr算法使用了广度优先搜索解决赋权有向图或者无向图的单源最短路径问题，算法最终得到一个最短路径树。该算法常用于路由算法或者作为其他图算法的一个子模块。

**3.基本思想**

通Dijkstra算法计算图G中的最短路径时，需要指定起点s。此外，需要引进两个集合S和U。S的作用是记录已求出最短路径的顶点（以及相应的最短路径长度），而U则是记录还未求出最短路径的顶点（以及该顶点到起点s的距离）。初始时，S中只有起点s；U中是除s之外的顶点，并且U中顶点的路径是“起点 s到该顶点的路径”。然后，从U中找到路径最短的顶点，并将其加入到S中；接着，更新U中的顶点和顶点对应的路径。然后，再从U中找到路径最短的顶点，并将其加入到S中；接着，更新U中的顶点和顶点对应的路径。重复该操作，直到遍历完所有顶点。

**4.具体步骤**

(1)初始时,S只包含起s；U包含除s之外的其他顶点,且U中顶点的距离为“起点s到该顶点的距离”；例如：U中顶点v的距离为(s,v)的长度，然后s和v不相邻，则v的距离为∞

(2)中选出“距离最短的顶点k”，并将顶点k加入到S中；同时，从U中移除顶点k

(3)新U中各个顶点到起点s的距离。之所以更新U中顶点的距离，是由于上一步中确定了k是求出最短路径的顶点，从而可以利用k来更新其他顶点的距离；例如：(s,v)的距离可能大于(s, k)+(k, v)的距离

(4)重复步骤(2)和(3)，直到遍历完所有顶点

### 5.1.2 问题1模型的求解

**1.路径边权的确定**

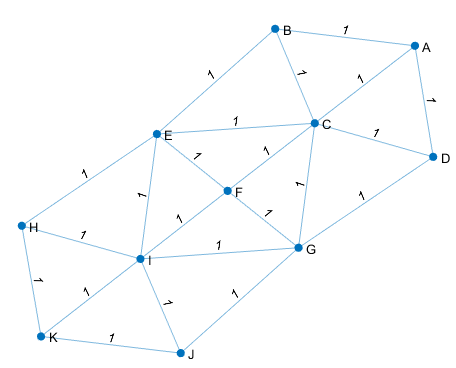
在问题假设中，我们提到：假设某地阳性感染者的人数与某地的总人数成比例。所以我们只要能够确定一个地区的人口密集程度就可以确定其阳性感染者的人数，然而在实际生活中一个地区的人口密集程度是很好知道。

我们将不同地区抽象为点，不同地区之间的路抽象为边。但是这里的边权并不是两地区之间的距离，而是由以下公式确定的：

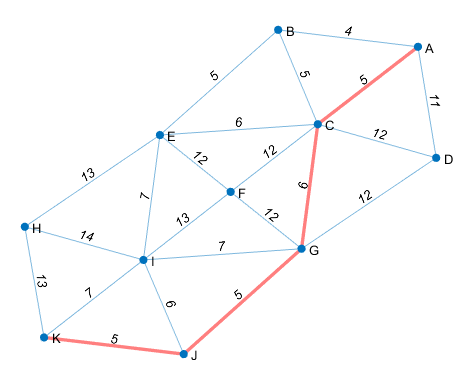
其中i和j为两个有路径相连的地区，表示地区i的人口密集程度（一个1到10之间的数），表示地区i和地区j之间的边权大小。

**2. 最短路径问题的求解**

我们创建图来测试我们方法的可行性。如下图所示，A点为起点，K点为终点。



我们对于每个地区人口密集程度设置为（从左到右依次为A、B、C、…、K）。使用matlab编程运行Dijkstra算法求得以下最短路径：



从上图我们不难看出，在此人口密集程度情况下最安全的路径为A-C-G-J-K，最短路径长度为：21。可以看到对于人口比较密集的D区域（密集度9），F区域（密集度9），H区域（密集度10），算法很好的避开了这些人口密集区域。

5.2 问题2模型的建立与求解

### 5.2.1 问题2模型的建立

层次分析法是用来根据多种准则，或是说因素从候选方案中选出最优的一种数学方法，一般分为三层，最上面为目标层，最下面为方案层，中间是准则层或指标层。

**1.构造判断矩阵**

设现在要比较个因子对某因素的影响大小，采用两两比较建立比较判别矩阵，与对的影响之比为。然后反过来与的影响之比为。

判别矩阵的定义为: 若矩阵满足 (i) (ii)则称之为正互反矩阵。

矩阵中每一个值使用数字1-9以及其倒数作为标度，如下表所示：

|  |  |
| --- | --- |
| **标度** | **含义** |
| 1 | 表示两个因素相比，具有相同重要性 |
| 3 | 表示两个因素相比，前者比后者稍重要 |
| 5 | 表示两个因素相比，前者比后者明显重要 |
| 7 | 表示两个因素相比，前者比后者强烈重要 |
| 9 | 表示两个因素相比，前者比后者极端重要 |
| 2,4,6,8 | 表示上述的相邻判断的中间值 |
| 倒数 | 若因素i与因素j的重要性之比为，那么因素j与因素i重要性之比为 |

**2.层次单排序及一致性检验**

判断矩阵 A 对应于最大特征值得特征向量 W，经归一化即为同一层次相应元素对于上一层次元素相对重要性的排序权值, 称为层次单排序。

因此，我们通过来检验 A 是否为一致矩阵，当比n大的越多，A的非一致性程度也就越严重，所以我们可以通过这种方法来检验一致性。

根据如下公式:

其中RI满足：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| RI | 0 | 0 | 0.58 | 0.90 | 1.12 | 1.24 | 1.32 | 1.41 | 1.45 |

当 CR < 0.1, 认为矩阵的一致性是可以接受的。

**3.层次总排序及其一致性检验**

确定某层所有因素对于总目标相对重要性的排序权值过程，称为层次总排序。一般要对方案层进行层次总排序及一致性检验。

可根据如下公式求得层次总排序的一致性比率：

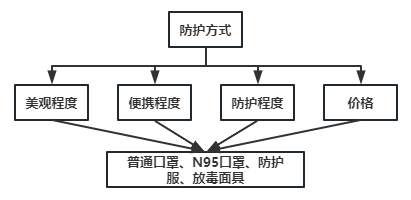
其中和第i个准则对于目标的判别矩阵的CI值和RI值，为第i个准则的权重值。

同样地，当 CR < 0.1, 认为层次总排序的一致性是可以接受的。

### 5.2.2 问题2模型的求解

**1.准则层&目标层的确定：**

选取美观程度、便携程度、防护程度、价格作为准侧层指标。选取普通口罩、N95口罩、防护服、防毒面具作为目标层指标，如下图所示：



**2.层次分析法评价模型求解**

构建如下准则层判断矩阵：

使用matlab编程求得以下权重矩阵：

其中矩阵中的值分别是美观程度、便携程度、防护程度、价格的权重。可以看到，我们认为防护程度重要性最高，其次是便携程度；而价格和美观程度的重要性相对较低。

矩阵A的CR值为0.0512<0.1，通过一致性检验。

之后，对美观程度矩阵B1，便携程度矩阵B2，防护程度矩阵B3，价格矩阵B4分别求其权重和CR值，如下表所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **wk1** | 0.4225 | 0.4175 | 0.0713 | 0.5092 |
| **wk2** | 0.4225 | 0.4175 | 0.1522 | 0.3273 |
| **wk3** | 0.1044 | 0.0864 | 0.3132 | 0.1105 |
| **wk4** | 0.0506 | 0.0787 | 0.4633 | 0.0530 |
| **CR** | 0.0272 | 0.0749 | 0.0399 | 0.0367 |

从标准可以看出，矩阵B1、B2、B3、B4都通过了一致性检验，我们再通过式子来求得四个矩阵总的CR值为0.0475<0.1，通过一致性检验。

最后我们算得四种防护方式的得分为：。所以最终的**最优选择为N95口罩，次优的选择为普通口罩**。这与我们实际生活中的防护方式选择也较为相似。

六、心得总结

本次的《计算机科学中的建模技术》是一道标准的数学建模题目，而且问题聚焦于如今社会的热点——新型冠状病毒作为题目的背景。题目具有一定的开发性，我通过分析和理解题干提炼出两个小问题：一是最短路径的规划问题、二是评价问题。

本人以前参加过像是五一赛、校赛、国赛、亚太赛等数学建模竞赛，并都取得了一定的成绩。每次比赛最终论文的排版工作都是由我来做，所以我对论文的基本格式比较熟悉。本次大作业也是使用比较标准的数学建模竞赛的论文格式进行书写的，而且在模型的使用上也使用的是课堂上讲述过的Dijkstra算法和AHP算法，这两个模型较为简单，我也比较熟悉。

由于本人水平有限，可能有许多考虑不周到的地方，还望老师谅解。

在最后，感谢刘芳老师在本课程中的指导与所做的努力，祝老师身体健康，科研顺利！

附录：源代码

问题1源代码

**t1.m**

clc;clear;

a=zeros(11);

a(1,2)=1;a(1,3)=1;a(1,4)=1;

a(2,3)=1;a(2,3)=1;a(2,5)=1;

a(3,4)=1;a(3,5)=1;a(3,6)=1;a(3,7)=1;

a(4,7)=1; a(5,6)=1;a(5,8)=1;a(5,9)=1;

a(6,7)=1;a(6,9)=1; a(7,9)=1;a(7,10)=1;

a(8,9)=1;a(8,11)=1;

a(9,10)=1;a(9,11)=1; a(10,11)=1;

P=[];

for i=1:11

P=[P, randi([1,10])];

end

for i=1:11

for j=1:11

if(a(i,j)==1)

a(i,j)=P(i)+P(j);

end

end

end

s=cellstr(['A';'B';'C';'D';'E';'F';'G';'H';'I';'J';'K']);

G=graph(a,s,'Upper');

[p,d]=shortestpath(G,1,11);

h=plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight);

highlight(h,p,'EdgeColor','r','LineWidth',2);

问题2源代码

**t2.m**

clc;clear;

A=[1,1/4,1/5,1/3;

4,1,1/3,2;

5,3,1,2

3,1/2,1/2,1];%构造准侧矩阵

B1=[1,1,5,7;

1,1,5,7;

1/5,1/5,1,3;

1/7,1/7,1/3,1];

B2=[1,1,7,4;

1,1,7,4;

1/7,1/7,1,2;

1/4,1/4,1/2,1;];

B3=[1,1/3,1/4,1/5;

3,1,1/3,1/3;

4,3,1,1/2;

5,3,2,1

];

B4=[1,2,5,7;

1/2,1,4,6;

1/5,1/4,1,3;

1/7,1/6,1/3,1];%构造目标层矩阵

[W,CR]=ahp(A);

[W1,CR1]=ahp(B1);[W2,CR2]=ahp(B2);[W3,CR3]=ahp(B3);[W4,CR4]=ahp(B4);

CRR=W(1)\*CR1+W(2)\*CR2+W(3)\*CR3+W(4)\*CR4;%层次总排检验

E=[];

for i=1:4

E=[E,W(1)\*W1(i)+W(2)\*W2(i)+W(3)\*W3(i)+W(4)\*W4(i)];%决策值

end

**ahp.m**

function [Q,CR]=ahp(B)

[n,m]=size(B);

for i=1:n

for j=1:n

if B(i,j)\*B(j,i)~=1

fprintf('i=%d,j=%d,B(i,j)=%d,B(j,i)=%d\n',i,j,B(i,j),B(j,i))

end

end

end

[V,D]=eig(B);

tz=max(D);

tzz=max(tz);

c1=find(D(1,:)==max(tz));

tzx=V(:,c1);

quan=zeros(n,1);

for i=1:n

quan(i,1)=tzx(i,1)/sum(tzx);

end

Q=quan;

CI=(tzz-n)/(n-1);

RI=[0,0,0.58,0.9,1.12,1.24,1.32,1.41,1.45,1.49,1.52,1.54,1.56,1.58,1.59];

CR=CI/RI(1,n);

if CR>=0.1

fprintf('未通过一致性检验\n');

else

fprintf('通过一致性检验\n');

end

end