1. 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)=x^3+3x^2+a$의 최댓값이 10일 때, 실수 a의 값은?
[2.8점]

① -12　② -11　③ -10
④ -9　⑤ -8

2. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)f(x)=\int_{-1}^{x}\{2f(t)+4\}dt$를 만족할 때, $f(-1)$의 값은?

[2.9점]

① -4　② -3　③ -2
④ -1　⑤ 0

3. 이차함수 $f(x)$가 $f(x)=\frac{3}{4}x^2-x+\left\{\int_{1}^{2}f(t)dt\right\}^2$일 때, 정적분 $\int_{1}^{2}f(x)dx$의 값은?

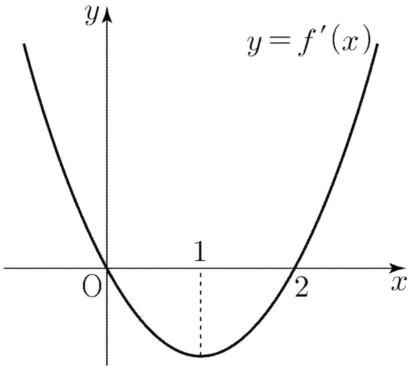
[2.9점]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{7}{8}$

4. 두 함수 $f(x)=5x^3-10x^2+k,\ g(x)=5x^2+2$가 $0<x<3$에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$를 만족시키도록 하는 정수 k의 최솟값은?
[3.0점]

① 18　② 19　③ 20
④ 21　⑤ 22

5. 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $f(0)=1$, $f(2)=-1$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[3.3점]



[보 기]

ㄱ. $f(x)$는 원점을 지난다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

6. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P, Q의 시간 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2t^2-4t,\ v_2(t)=t^2-2t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 순간까지 두 점 P, Q의 이동거리의 합은?
[3.4점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

7. 이차함수 $f(x)$가 $\int_{-3}^{3} f(x)dx - 3 = \int_{0}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx$를 만족시키고 $f(1) = 3$일 때, $f(4)$의 값은?

[3.4점]

① -8 ② -9 ③ -10
④ -11 ⑤ -12

8. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x) = 0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 갖고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) < 0$이다. (단, $\alpha < \beta < \gamma$)

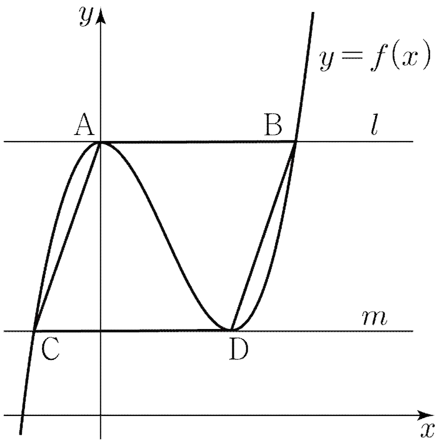
옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[3.4점]

[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x = \alpha$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $f(\alpha) > 0$이면 방정식 $f(x) = 0$의 실근은 모두 β보다 크다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

9. 삼차함수 $f(x)=ax^3-3x^2+3\ (a>0)$이 있다. 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 접하고 x축과 평행한 두 직선 l, m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 할 때, 사각형 ACDB는 마름모이다. 이때, $f(3a)$의 값은?
[3.5점]



① 54 ② 55 ③ 56
④ 57 ⑤ 58

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고, $f'(\alpha)=g'(\alpha)=8$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=-8$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값은?
[3.6점]

① 25 ② 26 ③ 27

④ 28 ⑤ 29

11. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f'(3)=36$
(나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린 구간 $(-\infty,\ 0),\ (0,\ k)$에서 $f'(x)<0$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[3.8점]

[보 기]

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
ㄴ. $f(x)$는 열린구간 $(2,\ 3)$에서 증가한다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq -\dfrac{16}{3}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$
(나) 모든 일차함수 $g(x)$에 대하여 $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} f(x)g(x)dx=0$

$[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $g(h)=\int_{-1}^{h} f(x)dx$의 최댓값 M, 최솟값 m에 대하여 $\dfrac{M}{m}$의 값은?

[4.0점]

① $-\dfrac{1}{4}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $-\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{5}{4}$ ⑤ $-\dfrac{3}{2}$

13. $f(-1)=0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $[-1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)=\left|\int_{-1}^{x} f(t)dt\right|$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=5$에서 극솟값을 갖는다. (나) 방정식 $g(x)=32$는 두 실근을 갖는다.

이때, $|f(4)|$의 값은?

[4.2점]

① 12 ② 13 ③ 14

④ 15 ⑤ 16

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $x=-3$에서 극값을 가질 때, $f(2)$의 값은? (단, $a,\ b,\ c$는 상수이다.)

[4.3점]

① 26 ② 27 ③ 28

④ 29 ⑤ 30

15. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f\left(f\left(x^2+1\right)+x\right)=x\int_{-2}^{x} f(t)dt-x^3+x^2+13$를 만족할 때, $f(2)$의 값은?
[4.4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

16. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$가 있다. 실수 a에 대하여 $h(a)$를 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수라 할 때, 함수 $h(a)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{a\to n+} h(a)=\lim_{a\to n-} h(a)=3,\ h(n)=1\ \ (n=1,\ -1)$

이때, $g(2)$의 값은?
[4.9점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

17. 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값은 5이다. (나) 방정식 $(g\circ f)(x)=5$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (다) 방정식 $(g\circ f)(x)=10$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (라) 함수 $f(x)$가 극값을 갖도록 하는 모든 실수 x의 합은 6이다.

이때, $|f(4)|$의 값은?

[5.4점]

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

18. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt & (x \geq 0) \\ -\int_3^x f(t)dt & (x < 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[5.8점]

[보 기]

ㄱ. $g(3)=0$

ㄴ. $\dfrac{f(5)}{f(-1)}=-5$

ㄷ. 방정식 $f(x)+3x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1일 때, $x \geq 0$에서 $g(x) \geq -\dfrac{3}{2}$ 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

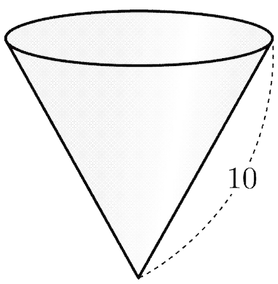
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 가능한 모든 $f(3)$의 값의 합은?
[6.0점]

(가) $f(0)=0$, $f'(0)\neq 1$
(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 접하는 실수 k는 -1과 1뿐이다.
(다) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.

① 63 ② 66 ③ 69
④ 72 ⑤ 75

20. 반지름의 길이가 10인 부채꼴 모양의 종이로 다음 그림과 같은 원뿔 모양의 그릇을 만들려고 한다. 그릇의 부피가 최대일 때, 그릇의 높이를 풀이 과정과 함께 구하시오.
[5.0점]



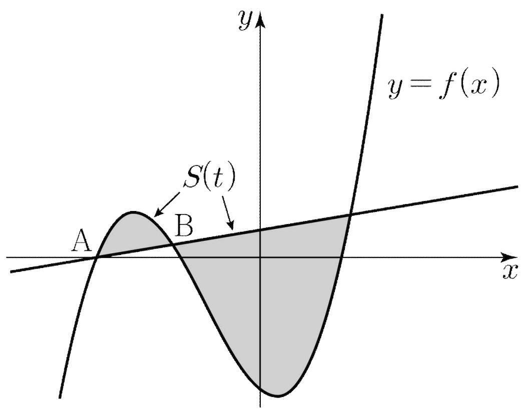
21. 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $\left|2x^3-9x^2+11\right|=n$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{25} a_n$의 값을 풀이 과정과 함께 구하시오.
[6.0점]

22. 이차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=\int_{-1}^{x}\{f(t)+f'(t)\}dt$ 라 하자. 세 함수 $f(x),\ f'(x),\ g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=g'(x)$와 $y=f'(x)$는 원점에서 서로 접한다. (나) 함수 $g(x)$의 극솟값은 -4이다. (다) $g(0)>0$

이때, $g(x)$의 식을 풀이 과정과 함께 구하시오.
[6.0점]

23. 함수 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$와 열린 구간 $(-2,\ 0)$에 속하는 실수 t에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(t,\ f(t))$를 지나는 직선과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라 하자. 함수 $S(t)$가 극값을 갖도록 하는 t의 값을 풀이 과정과 함께 구하시오.
[8.0점]



y
$y = f(x)$
$S(t)$
A
B
x

1. [정답] ③

닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)=x^3+3x^2+a$의 최댓값이 10이므로 $y=f(x)$를 미분하여 $f'(x)=0$이 되는 점을 찾아보면

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$=3x(x+2)$$

$f'(x)=0$이 되는 x는 $x=-2,\ 0$이므로

$f(-1)=-1+3+a=a+2$

$f(0)=a$

$f(2)=8+12+a=a+20$이므로

최댓값은 $a+20=10$임을 알 수 있다.

$\therefore\ a=-10$

2. [정답] ①

다항식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)f(x)=\int_{-1}^{x}\{2f(t)+4\}dt$를 만족하며, 이 다항함수는 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to-1}\frac{\int_{-1}^{x}\{2f(t)+4\}dt}{x+1}=f(-1)$$

$$\Rightarrow\ 2f(-1)+4=f(-1)$$

$$\Leftrightarrow\ f(-1)=-4$$

3. [정답] ③

이차함수 $f(x)$에서 $\int_{1}^{2}f(t)dt=A$라 하면

$f(x)=\frac{3}{4}x^2-x+A^2$이며

$$A=\int_{1}^{2}\left(\frac{3}{4}x^2-x+A^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+A^2x\right]_1^2$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}+A^2$$

$$\Leftrightarrow\ A^2-A+\frac{1}{4}=0$$

$$\therefore\ A=\frac{1}{2}$$

4. [정답] ⑤

$0 < x < 3$에서 $f(x) \geq g(x)$를 증명하기 위하여 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자.

$h(x)=5x^3-10x^2+k-5x^2-2$

$\quad\quad=5x^3-15x^2+k-2$

$h'(x)=15x^2-30x$

$\quad\quad=15x(x-2)$

$x=2$에서 극소이므로 주어진 부등식을 증명하려면 $h(2) \geq 0$임을 증명하면 된다.

$h(2)=40-60+k-2 \geq 0$

$\Rightarrow k \geq 22$

따라서 k의 최솟값은 22

5. [정답] ②

ㄱ. $f(0)=1$이므로 $f(x)$는 원점을 지나지 않는다. [거짓]

ㄴ. $f'(x)=0$이고 $f'(x)$의 부호가 $-$에서 $+$으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다. [참]

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프의 극댓값이 1, 극솟값이 -1이므로 서로 다른 세 실근을 갖는다. [거짓]

6. [정답] ②

점 P의 위치 $S_{\mathrm{P}}(t)=\dfrac{2}{3}t^3-2t^2$

점 Q의 위치 $S_{\mathrm{Q}}(t)=\dfrac{1}{3}t^3-t^2$

두 점이 만나는 순간 시각 t를 구해보면

$$\frac{2}{3}t^3-2t^2=\frac{1}{3}t^3-t^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}t^3-t^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}t^2(t-3)=0$$

$\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

이동 거리의 합은

$$\int_0^3\{|v_1(t)|+|v_2(t)|\}dt$$

$$=3\left\{\int_0^2(-t^2+2t)dt+\int_2^3(t^2-2t)dt\right\}$$

$$=3\left\{\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3\right\}$$

$$=3\left\{\left(-\frac{8}{3}\right)+4+\frac{19}{3}-5\right\}=3\left\{\frac{11}{3}-1\right\}$$

$$=8$$

7. [정답] ⑤

$\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)dx-3=\int_0^3 f(x)dx=\int_{-3}^0 f(x)dx=A$라 하면 $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)dx=\int_{-3}^0 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx$ 이므로

$\Rightarrow A+3=A+A$

$\therefore\ A=3$

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $\int_{-3}^{0} f(x)dx=3$에서 $\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_{-3}^{0}=3$

$\Leftrightarrow 9a-\frac{9}{2}b+3c=3$ ...㉠

$\int_{0}^{3} f(x)dx=3$에서 $\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_{0}^{3}=3$

$\Leftrightarrow 9a+\frac{9}{2}b+3c=3$ ...㉡

㉠, ㉡에서 $b=0,\ 3a+c=1$ ...㉢

$f(1)=3$이므로 $a+c=3$ ...㉣

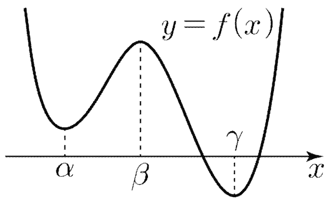
㉢, ㉣에서 $a=-1,\ c=4$

$f(4)=16a+4b+c=(-16)+4=-12$

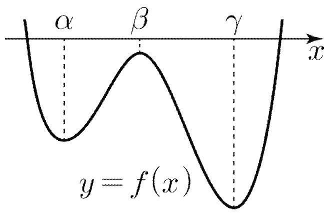
8. [정답] ⑤

주어진 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같은 형태를 생각할 수 있다.

㉠



㉡



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다. [거짓]

ㄴ. $y=f(x)$는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. [참]

ㄷ. ㉠ 그래프의 경우이며 이때 두 근은 모두 β보다 크다. [참]

9. [정답] ④

$ax^3-3x^2+3=3$

$\Leftrightarrow ax^2\left(x-\frac{3}{a}\right)=0$

B의 좌표는$\left(\frac{3}{a},\ 3\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 $\frac{3}{a}$

$f'(x)=3ax^2-6x$

$\quad =3ax\left(x-\frac{2}{a}\right)$이므로 D점의 x좌표는 $\frac{2}{a}$이다.

$f\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{8}{a^2}-\frac{12}{a^2}+3=\frac{-4}{a^2}+3$

D점의 좌표는 $\left(\frac{2}{a},\ -\frac{4}{a^2}+3\right)$

그런데 ACDB는 마름모이므로 $\overline{\mathrm{DB}}$의 길이는 $\frac{3}{a}$이다.

$\quad \frac{3}{a}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(-\frac{4}{a^2}\right)^2}$

$\Rightarrow \frac{9}{a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{16}{a^4}$

$\Leftrightarrow \frac{8}{a^2}=\frac{16}{a^4}$

$\Leftrightarrow 8a^2=16$

$\therefore\ a=\sqrt{2}$

$f(3a)=27a^4-27a^2+3$

$\quad =27\cdot 4-27\cdot 2+3=57$

10. [정답] ①

$f(\alpha)=g(\alpha),\ f'(\alpha)=g'(\alpha)$이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $x=\alpha$에서 접한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(x-\alpha)^2\cdot(x-p)$의 형태로 나타낼 수 있으며

$h'(x)=2(x-\alpha)(x-p)+(x-\alpha)^2$

$\quad =(x-\alpha)(3x-2p-\alpha)$에서

$h'(\beta)=f'(\beta)-g'(\beta)=0$이므로 $3\beta-2p-\alpha=0$

$p=\frac{3\beta-\alpha}{2}$

$h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$

한편 $g(x)$는 최고차항의 계수가 -2인 이차함수이므로 $g(x)=-2x^2+ax+b$라 하면

$g'(x)=-4x+a$

$g'(\alpha)=-4\alpha+a=8$

$g'(\beta)=-4\beta+a=-8$이므로 두 식을 연립하면

$-4(\alpha-\beta)=16$

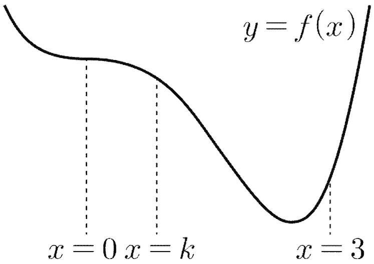
$\therefore\ \alpha-\beta=-4$

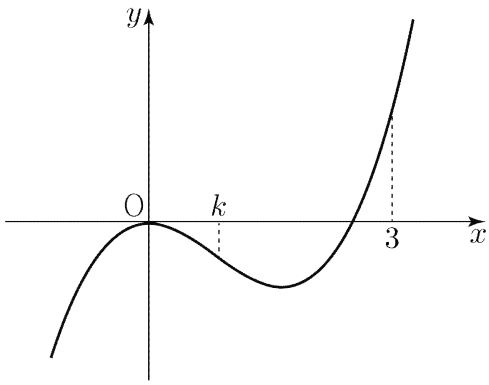
$g(\beta+1)-f(\beta+1)=-h(\beta+1)$

$$=-(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$$
$$=-(\beta-\alpha+1)^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)$$
$$=-(5)^2(-2+1)=25$$

11. [정답] ⑤

조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f'(x)$의 그래프는 각각 아래 그림과 같다.





ㄱ. $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. [거짓]

ㄴ. $f(x)=x^3(x-a)=x^4-ax^3$이라 하자.

$f'(x)=4x^3-3ax^2$이며 $f'(3)=108-27a=36$이므로 $27a=72$

$\therefore\ a=\dfrac{8}{3}$

$f'(x)=4x^3-8x^2=4x^2(x-2)$이므로 $f'(x)$는 $(2,\ 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다. [참]

ㄷ. 극솟값 $f(2)=8\cdot(2-a)=8\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{16}{3}$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq-\dfrac{16}{3}$이다. [참]

12. [정답] ④

모든 실수 a에 대하여 $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$이므로 $f(x)$는 기함수이며 $f(x)=x^3+px$라 할 수 있다.

모든 일차함수 $g(x)$에 대하여 $\displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}f(x)g(x)dx=0$이므로 $g(x)=cx+d$라 하면

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x^3+px)(cx+d)dx=0$$
$$\Leftrightarrow\ \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(cx^4+dx^3+pcx^2+pdx)dx=0$$
$$\Leftrightarrow\ \int_{0}^{\sqrt{5}}(cx^4+pcx^2)dx=0$$

$\Leftrightarrow c \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{p}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{5}} = 0$

$\Leftrightarrow c\left(5\sqrt{5} + \frac{5}{3}\sqrt{5} \cdot p\right) = 0$

주어진 식은 c에 대한 항등식이므로 $5\sqrt{5} + \frac{5}{3}\sqrt{5} \cdot p = 0$

$\Rightarrow p = -3$

$\therefore f(x) = x^3 - 3x$

$[-2,\ 2]$에서 정의된 $g(h) = \int_{-1}^{h} f(x)dx$에서 $g'(h) = f(h) = h^3 - 3h$

$= h(h^2 - 3)$

$= h(h + \sqrt{3})(h - \sqrt{3})$이고

$h = 0,\ \pm\sqrt{3}$에서 극값을 가진다.

$g(h) = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{h}$

$= \frac{1}{4}h^4 - \frac{3}{2}h^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{4}h^4 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{5}{4}$

$g(-2) = \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$

$g(-\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{5}{4} = -1$

$g(0) = \frac{5}{4}$

따라서 최댓값은 $\frac{5}{4}$, 최솟값은 -1

$\frac{M}{m} = -\frac{5}{4}$

13. [정답] ④

$f(-1) = 0$인 이차함수 $f(x)$에서 $[-1,\ \infty)$에서 정의된 $g(x) = \left|\int_{-1}^{x} f(t)dt\right|$가 $x = 5$에서 극솟값을 가지려면 $f(x) = 0$은 -1보다 큰 해 a를 가져야 한다. 그런데 $x = 5$에서 극소이므로

$\int_{-1}^{5} \{p(x+1)(x-a)\}dx = 0$이어야 하며

$\Rightarrow \int_{-1}^{5} \{x^2 + (1-a)x - a\}dx = 0$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 + (1-a)\frac{x^2}{2} - ax\right]_{-1}^{5} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 126 + \frac{(1-a)}{2} \cdot 24 - 6a = 0$

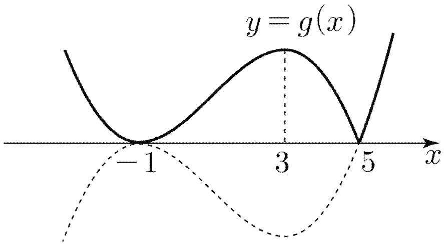
$\Leftrightarrow 42 + 12 = 18a$

$\therefore\ a=3$

$h(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$ 라 하면

$h'(x)=f(x)=p(x+1)(x-3)$이므로 $x=-1,\ 3$에서 $h(x)$는 극값을 가지며 $h(-1)=0,\ h'(-1)=0$이므로 $h(x)$는 $x=-1$에서 접한다.

$g(x)=|h(x)|$이므로 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면



위 그래프와 같으며 $g(x)=32$는 두 실근을 가지므로 $y=g(x)$의 그래프는 $(3,\ 32)$를 지나야 한다.

$$\left|\int_{-1}^{3} p(x+1)(x-3)dx\right|=32$$

$\Leftrightarrow\ |p|\cdot\frac{1}{6}\cdot 4^3=32$

$\Leftrightarrow\ |p|=3$

$|f(4)|=|p\cdot 5\cdot 1|=|p|\cdot 5=15$

14. [정답] ①

$g(x)$가 실수 전체에서 미분 가능하므로 $x=0$에서 연속이고 미분 가능하다.

ⅰ) $x=0$에서 연속이므로 $-f(0)=f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

ⅱ) $x=0$에서 미분 가능하므로 $-f'(0)=f'(0)$

$\therefore\ f'(0)=0$

$f(x)=x^2(x-a)$에서 $f'(-3)=0$이므로 $f'(x)=2x(x-a)+x^2$

$$f'(-3)=-6\cdot(-3-a)+9=0$$

$\Rightarrow\ 18+6a+9=0$

$\therefore\ a=-\frac{9}{2}$

$f(x)=x^2\left(x+\frac{9}{2}\right)$

$f(2)=4\left(2+\frac{9}{2}\right)=26$

15. [정답] ④

다항함수 $f(x)$의 차수를 $n\ (n\geq 2)$차라 가정하자.

$f(x)=ax^n$ 으로 가정하고 좌변과 우변의 차수를 비교하면

좌변의 최고차항은 $a^{n+1}\cdot x^{2n^2}$ 이며 이때 차수는 $2n^2$

우변의 최고차항은 $\dfrac{a}{n+1}\cdot x^{n+2}$ 이므로 이때 차수는 $n+2$

두 차수가 같을 때 n의 값을 구하면

$2n^2=n+2$

$\Rightarrow 2n^2-n-2=0$

$n=\dfrac{1\pm\sqrt{1+16}}{4}$ 이므로 n은 자연수인 조건에 맞지 않는다. 즉, 다항함수의 차수가 1차 혹은 상수함수인 경우를 생각해 보면

ⅰ) $f(x)=ax+b$ 인 경우

좌변 $=f\left(f(x^2+1)+x\right)=f\left(ax^2+a+b+x\right)$

$=f\left(ax^2+x+a+b\right)$

$=a^2x^2+ax+a^2+ab+b$ ...㉠

우변 $=x\displaystyle\int_{-2}^{x}f(t)dt-x^3+x^2+13$

$=x\cdot\left[\dfrac{1}{2}at^2+bt\right]_{-2}^{x}-x^3+x^2+13$

$=x\left\{\dfrac{1}{2}ax^2+bx-2a+2b\right\}-x^3+x^2+13$

$=\left(\dfrac{1}{2}a-1\right)x^3+(b+1)x^2+(2b-2a)x+13$ ...㉡

㉠, ㉡ 식이 같아야 하므로 $a=2,\ b=3$이다.

$f(x)=2x+3$이므로 $f(2)=7$

ⅱ) $f(x)=C$인 경우

좌변 $=C$ ...㉢

우변 $=x\cdot[Ct]_{-2}^{x}-x^3+x^2+13$

$=x(Cx+2C)-x^3+x^2+13$

$=-x^3+(C+1)x^2+2Cx+13$ ...㉣

이므로 ㉢, ㉣ 두 식은 항상 같을 수 없다.

16. [정답] ②

$f(x)$가 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 는 $g(0)=0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$|g(x)-g(a)|$가 $a=1,\ -1$일 때 미분가능하지 않은 x가 1개이므로 $y=g(x)$는 $x=1,\ -1$에서 극값을 가짐을 알 수 있다.

$g'(x)=3(x-1)(x+1)$

$=3x^2-3$

$g(x)=x^3-3x$

$g(2)=8-6=2$

17. [정답] ③

(가) $g(x)=(x-3)^2+1$이고, $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 5이므로 $f(x)\le 1$임을 알 수 있다.

(나) $(g\circ f)(x)=5$의 서로 다른 실근의 개수가 2개이므로 $y=f(x)$의 최댓값 1을 갖는 x의 값은 두 개다. 즉, $f(x)$의 두 극댓값이 같음을 알 수 있다.

(다) $g(f(x))=10$의 서로 다른 실근의 개수, 즉 $f(x)=0$이 되는 x의 개수가 3개이므로 $y=f(x)$의 극솟값은 0임을 알 수 있다.

(라) $f'(x)=0$의 세 근을 $\alpha,\ \dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \beta$라 하면 $\alpha+\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\beta=6$이므로 $\alpha+\beta=4$임을 알 수 있다.

$f(\alpha)=f(\beta)=1,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로

$f(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+1$

$f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$이므로

$f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=-\left(\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)^2+1=0$

$\Rightarrow\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^4=1$

$\therefore\ \beta-\alpha=2$

$\alpha+\beta=4,\ \beta-\alpha=2$에서 $\beta=3,\ \alpha=1$

$\therefore\ f(x)=-(x-1)^2(x-3)^2+1$

$f(4)=-3^2\cdot 1^1+1=-8$

$|f(4)|=8$

18. [정답] ②

$g(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로

$g'(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 0) \\ -f(x) & (x<0) \end{cases}$에서 $g'(x)$가 $x=0$에서 미분가능하고 연속이어야 한다.

즉, $f(0)=-f(0)=g'(0)$이므로 $g'(0)=0$이다.

$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt\ \ (x\ge 0)$에서 $g(0)=0$이며

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}g(x)=-\int_3^0 f(t)dt=0$이므로 $\displaystyle\int_0^3 f(t)dt=0$ 이다.

즉, $g(3)=\displaystyle\int_0^3 f(t)dt=0$이다.

$\therefore\ g(x)=A\cdot x^2(x-3)\ \ (A>0)$

ㄱ. $g(3)=0$ [참]

ㄴ. $g(x)=Ax^3-3Ax^2,\ g'(x)=3Ax^2-6Ax$ 에서

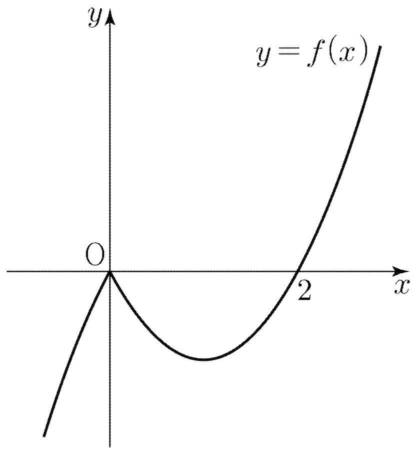
$f(5)=g'(5)=3A\cdot 25-6A\cdot 5=45A$

$f(-1)=-g'(-1)=-3A-6A=-9A$

$\dfrac{f(5)}{f(-1)}=\dfrac{45A}{-9A}=-5$ [참]

ㄷ. $g'(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 0) \\ -f(x) & (x<0) \end{cases}$이므로 $f(x)=\begin{cases} g'(x) & (x\ge 0) \\ -g'(x) & (x<0) \end{cases}$이다.

$g'(x)=3Ax^2-6Ax\ \ (A>0)$이며 $f(x)=\begin{cases}3Ax(x-2) & (x\geq 0)\\ -3Ax(x-2) & (x<0)\end{cases}$이므로 그래프를 그려보면



위 그림과 같고

$f(x)+3x=0$, 즉 $f(x)=-3x$의 서로 다른 실근의 개수가 1개려면 $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\geq -3$ 이어야 하므로

$\Rightarrow\ -6A\geq -3$

$\therefore\ A\leq\dfrac{1}{2}$

$x\geq 0$에서 $g(x)$의 최솟값은 $g(2)$이며 $g(2)=-4A\geq -2$이다. [거짓]

19. [정답] ⑤

$f(0)=0,\ f'(0)\neq 1$이고 $y=f(x)$와 $y=kx$가 접하는 실수 k가 $-1,\ 1$ 두 개 뿐이므로 $f'(0)=-1$이 되어야 한다.

$f(0)=0,\ f'(0)=-1$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(x-p)^2-x$이거나 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3\cdot(x-q)-x$형태를 가져야 한다.

i) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(x-p)^2-x$인 경우

$f(x)=x$가 중근을 가져야 하므로 $f(x)-x=\dfrac{1}{2}x^2(x-p)^2-2x$

$$=\frac{1}{2}x\{x(x-p)-4\}$$

여기서 $x(x-p)^2-4=0$이 중근을 가지려면 $g(x)=x(x-p)^2-4$라 했을 때 극댓값 혹은 극솟값이 0이 되어야 한다.

$g'(x)=(x-p)^2+2x(x-p)$
$\quad=(x-p)\{3x-p\}$

즉, $g\left(\dfrac{p}{3}\right)=0$이며 $\left(\dfrac{p}{3}\right)\left(\dfrac{4}{9}\cdot p^2\right)=4$

$\therefore\ p=3$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(x-3)^2-x$이므로 $f(3)=-3$

ii) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3(x-q)-x$인 경우

$f(x)=x$가 중근을 가져야 하며

$f(x)-x=\frac{1}{2}x^3(x-q)-2x$

$\quad\quad\quad =\frac{1}{2}x\{x^2(x-q)-4\}$

여기서 $h(x)=x^2(x-q)-4$라 했을 때 $h(x)$의 극댓값 혹은 극솟값이 0이 되어야 하므로

$h'(x)=2x(x-q)+x^2$

$\quad\quad =x\{2x-2q+x\}$

즉, $h\left(\frac{2q}{3}\right)=0$이며 $\frac{4}{9}q^2\cdot\left(-\frac{q}{3}\right)=4$

$\therefore\ q=-3$

$f(x)=\frac{1}{2}x^3(x+3)-x$ 이므로

$f(3)=\frac{1}{2}\cdot 27\cdot 6-3$

$\quad\quad =81-3=78$

ⅰ)+ⅱ)$=(-3)+78=75$

20. [정답] 풀이 참조

그릇의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라고 하면 $r^2+h^2=100$, $r^2=-h^2+100$이다.

그릇의 부피를 $V(h)$라고 하면

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=-\frac{1}{3}\pi h^3+\frac{100}{3}\pi h$

$V'(h)=-\pi h^2+\frac{100}{3}\pi$

$\quad\quad =-\pi\left(h+\sqrt{\frac{100}{3}}\right)\left(h-\sqrt{\frac{100}{3}}\right)$

$h>0$일 때, $V'(h)=0$에서

$h=\sqrt{\frac{100}{3}}$

따라서 $V(h)$는 $h=\sqrt{\frac{100}{3}}$ 에서 최대이므로 그릇의 부피가 최대일 때, 그릇의 높이는

$\sqrt{\frac{100}{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 이다.

21. [정답] 풀이 참조

$f(x)=2x^3-9x^2+11$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$

ⅰ) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$일 때 $a_n=6$

ⅱ) $n=11$일 때 $a_n=5$

iii) $n=12,\ 13,\ 14,\ 15$일 때 $a_n=4$

iv) $n=16$일 때 $a_n=3$

v) $n=17,\ 18,\ 19,\ \cdots,\ 25$일 때 $a_n=2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{25} a_n = 6\times 10+5+4\times 4+3+2\times 9=102$

22. [정답] 풀이 참조

$g'(x)=f(x)+f'(x)$이며 $g'(x)-f'(x)=kx^2=f(x)$ (k는 실수)

$f'(x)=2kx$이므로 $g'(x)=f(x)+f'(x)=kx(x+2)$ 이다.

$g(x)=\int g'(x)dx$이므로 $g(x)=\frac{k}{3}x^3+kx^2+c$ (c는 적분상수)이다.

또한, $g(-1)=0$이므로 $g(-1)=\frac{2}{3}k+c=0$이다.

i) $k>0$인 경우

$g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 $g(0)=c=-4$이다. $g(0)>0$이어야 하므로 이는 모순이다.

ii) $k<0$인 경우

$g(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로 $g(-2)=\frac{4k}{3}+c=-4$이다.

따라서 $k=-6,\ c=4$이다.

그러므로 $g(x)=-2x^3-6x^2+4$이다.

23. [정답] 풀이 참조

직선 $h(x)=(t^2-1)(x+2)$

$\mathrm{A}(-2,\ 0),\ \mathrm{B}(t,\ f(t)),\ \mathrm{C}(-t,\ f(-t))$

$$S(t)=\int_{-2}^{t}\{f(x)-h(x)\}dx+\int_{t}^{-t}\{h(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{t}f(x)dx-(t^2-1)\int_{-2}^{t}(x+2)dx$$
$$+(t^2-1)\int_{t}^{-t}(x+2)dx-\int_{t}^{-t}(2x^2-2)dx$$

$$S'(t)=f(t)-2t\int_{-2}^{t}(x+2)dx-f(t)$$
$$-4(t^2-1)-8t^2+4(t^2-1)$$
$$=-t(t^2+12t+4)$$

열린 구간 $(-2,\ 0)$에 속하는 t는

$t=-6+4\sqrt{2}$