1. 정적분 $\int_{-1}^{1}(4x^3+3x^2)dx$의 값은?

[4.0점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=x^3-x^2-x+2$의 극솟값은?

[4.1점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

3. 함수

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}(t^2+3t+2)dx$$

에 대하여 $f'(0)$의 값은?

[4.2점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

4. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가

$$x(t)=\frac{1}{3}t^3-t\ \ (t\geq 0)$$

일 때, 점 P가 운동방향을 바꾸는 순간의 가속도는?

[4.3점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

5. 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이가 36일 때, 양수 a의 값은?

[4.4점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

6. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

(가) $0\leq f(1)\leq 2$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $-1\leq f'(x)\leq 2$ 이다.

[4.5점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

커스텀 1회차 사용

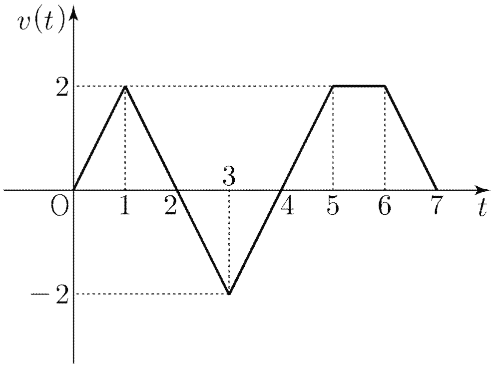
7. 함수 $f(x)=x^3+(a-2)x^2+3x$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값은?
[4.6점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8. $x \geq 1$에서 정의된 함수 $f(x)=x^3-ax^2+2$의 최솟값이 -2가 되도록 하는 양의 상수 a의 값은?
[4.7점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$, 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면 t에 따른 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다. $x(0)+x(7)=4$일 때, $x(3)$의 값은?



[4.8점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

10. 두 곡선 $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{2}x$과 $y=-x^2+4x-\frac{3}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

[4.9점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

11. $0 \leq x \leq 7$일 때, 부등식

$$|x^3 - 3x^2 - 24x + 16k| < 64$$

가 성립하도록 하는 자연수 k의 값은?

[5.0점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

12. $\int_0^{10} \frac{s^2 - ks}{s+3} ds = 3\int_{10}^{0} \frac{t-k}{t+3} dt$가 성립하도록 하는 상수 k의 값은?

[5.1점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_{0}^{x} f(t)dt & (x<0) \\ \int_{1}^{x} f(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $h(x)=\lim_{t \to x-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$의 극값이 존재한다.

[5.4점]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 2$$

가 $x = -2$에서 극댓값 22를 가질 때, a와 b의 값을 각각 구하고, 그 풀이과정을 서술하시오.
[4.0점]

15. 정적분 $\int_{-4}^{5} |x^2 + 2x - 8| dx$의 값을 구하시오.
[4.5점]

16. 방정식

$$x^3+3x^2-9x-4k=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수 k의 합을 구하시오.

17. 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=f(k)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 자연수 k의 합을 구하시오.

(가) $f(x)$는 $x=-2$에서 극값을 갖는다. (나) 함수 $f(x+2)-f(x)$는 $x=0$에서 최대이다.

[4.9점]

18. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

(가) $f(2)=13$

(나) 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=\int_0^x f(t)dt+x^3\int_0^1 f(t)dt$$

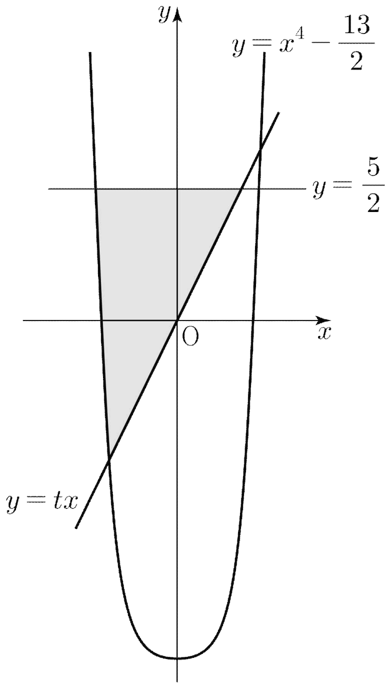
가 성립한다.

[5.1점]

19. $0 < k < 48$인 상수 k에 대하여 $y = 24|x|$의 그래프와 곡선 $y = 3x^2 + k$로 둘러싸인 세 도형의 넓이가 모두 같을 때, $20k$의 값을 구하시오.
[5.3점]

[서답형 20~21]

$f(x) = x^4 - \frac{13}{2}$라 하자. 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = \frac{5}{2}$로 둘러싸인 도형을 직선 $y = tx$가 둘로 나눌 때, 제2사분면의 점이 포함된 도형의 넓이를 $g(t)$라 하자. $\left(\text{단, } t > \frac{5\sqrt{3}}{6} \right)$

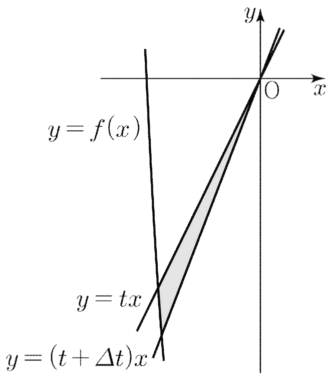


다음은 함수 $g(t)$를 최소가 되게 하는 t의 값을 구하는 과정이다.

문제의 도형을 세 부분으로 나누어 제1사분면 위의 도형, 제2사분면 위의 도형, 제3사분면 위의 도형의 넓이를 각각 $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$라 하자. 그러면 $g(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t)$이다. 세 함수 $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$의 도함수를 구해보자. 먼저, $\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{g_3(t + \Delta t) - g_3(t)}{\Delta t}$를 구하자. (가) $g_2(t)$의 값은 t의 값에 따라 달라지지 않으므로 $\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{g_2(t + \Delta t) - g_2(t)}{\Delta t} = 0$이다.

마지막으로 $\lim_{\Delta t \to 0+} \dfrac{g_3(t+\Delta t)-g_3(t)}{\Delta t}$ 를 구하자.

$g_3(t+\Delta t)-g_3(t)$는 다음 그림의 색칠된 도형의 넓이이다.



방정식 $f(x)=tx$의 0보다 작은 근을 α, 방정식 $f(x)=(t+\Delta t)x$의 0보다 작은 근을 β라 하자. 네 점 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha t)$, $\mathrm{B}(\alpha, \alpha t+\alpha\Delta t)$, $\mathrm{C}(\beta, \beta t)$, $\mathrm{D}(\beta, \beta t+\beta\Delta t)$에 대하여 색칠된 도형의 넓이는 삼각형 OAB보다는 작고 삼각형 OCD의 넓이보다는 크다.

(중략)

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{g_3(t+\Delta t)-g_3(t)}{\Delta t} = \boxed{\text{(나)}}$$

비슷한 계산을 통하여 3이하의 자연수 n에 대하여

$$\lim_{\Delta t \to 0-} \frac{g_n(t+\Delta t)-g_n(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{g_n(t+\Delta t)-g_n(t)}{\Delta t}$$

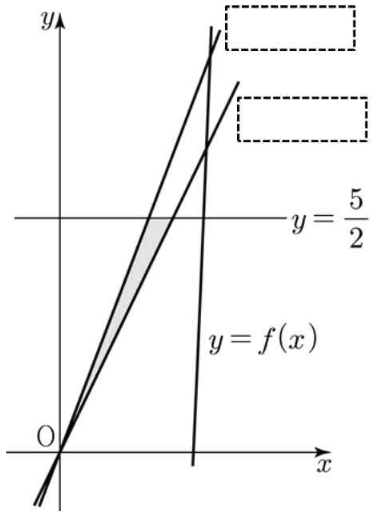
이 성립함을 확인할 수 있다.

(중략)

따라서 $g(t)$는 $t=\boxed{\text{(다)}}$일 때 최소가 된다.

20. 답안지에 제시된 그림의 점선으로 표시된 두 사각형에 알맞은 직선의 방정식을 쓰고, 이 그림을 이용하여 (가)에 알맞은 내용을 서술하시오.

[6.0점]



21. (나)에 알맞은 식을 $h(\alpha)$, (다)에 알맞은 값을 k라 할 때, $h(12k)$의 값을 구하시오. [5.5점]

---

1. [정답] ②

정적분 $\int_{-1}^{1}(4x^3+3x^2)dx$은 적분 구간이 대칭이고, x^3은 원점대칭, x^2은 y축대칭이므로

$\int_{-1}^{1}(4x^3+3x^2)dx = 2\int_{0}^{1}3x^2dx = 2$

2. [정답] ①

$f(x)=x^3-x^2-x+2$에서 $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고, $x=-\frac{1}{3}$에서 극대이다.

그러므로 극솟값은 $f(1)=1$

3. [정답] ③

$f(x)=\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}(t^2+3t+2)dx = x^2+3x+2$

이므로

$f'(x)=2x+3$

$\therefore f'(0)=3$

4. [정답] ②

위치가 $x(t)=\frac{1}{3}t^3-t$이므로

속도는 $v(t)=x'(t)=t^2-1$이므로 $t=1$일 때 운동방향을 바꾼다.

가속도는 $a(t)=v'(t)=2t$이므로 $a(1)=2$

5. [정답] ⑤

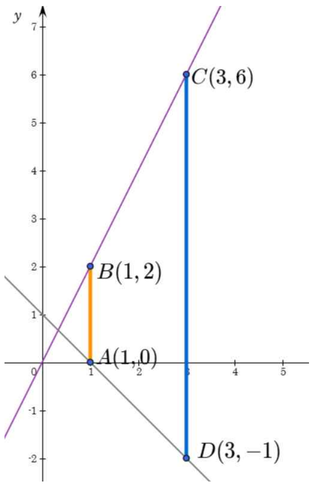
$y=x^2-x$와 $y=ax$의 교점은 $x=0,\, a+1$이므로, 둘러싸인 도형의 넓이는 공식을 이용하면

$\frac{1}{6}(a+1)^3=36$에서 $a+1=6$

$\therefore a=5$

6. [정답] ④

조건을 음미하면, 그림과 같이 $f(1)$의 값은 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$위에 존재하고, (나)조건에서 $f(3)$이 가질 수 있는 최댓값은 직선 BC를 지날 때이고, 최솟값은 직선 AD일 때이다. 즉 $-1 \le f(3) \le 6$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 5이다.



7. [정답] ⑤

함수 $f(x)=x^3+(a-2)x^2+3x$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 $f'(x)=3x^2+2(a-2)x+3\geq 0$이면 된다.

따라서 판별식 $D/4=(a-2)^2-9\leq 0$이므로 $-1\leq a\leq 5$이다.

따라서 a의 최댓값은 5

8. [정답] ③

$f(x)=x^3-ax^2+2$을 미분하면

$f'(x)=3x^2-2ax=3x\left(x-\frac{2a}{3}\right)$

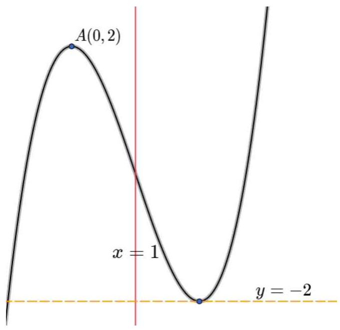
$a>0$이므로 극댓값 $f(0)=2$, 극솟값 $f\left(\frac{2a}{3}\right)$이다.

만일 $0<\frac{2a}{3}<1$이면 $x\geq 1$에서 $f(x)$가 증가함수이므로 최솟값은 $f(1)=3-a$이고 이 값이 -2가 되려면 $a=5$가 되어 모순이다.

따라서 $\frac{2a}{3}\geq 1$이고, $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x\geq 1$에서 최솟값이 -2가 되려면 극솟값 $f\left(\frac{2a}{3}\right)$가 -2가 되면 된다.

즉, $f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{8a^3}{27}-\frac{4a^3}{9}+2=-2$

$\therefore a=3$



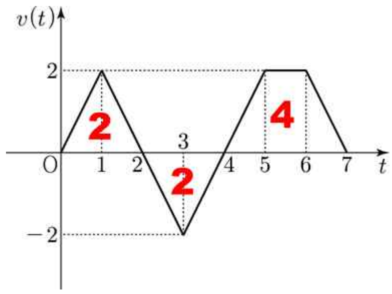
9. [정답] ①

속도-시간 그래프에서 정적분의 값은 점의 변위를 의미하므로 오른쪽 그림과 같이 점의 위치는 $t=0$에서 $t=7$까지 $2-2+4=4$만큼 이동한다.

즉 $x(7)=x(0)+4$이다.

$x(0)+x(7)=4$이므로 $x(0)=0$, $x(7)=4$

$x(3)$은 $t=0$에서 $t=2$까지 2만큼 전진, $t=2$에서 $t=3$까지 1만큼 후진하였으므로 $x(3)=1$이다.



10. [정답] ④

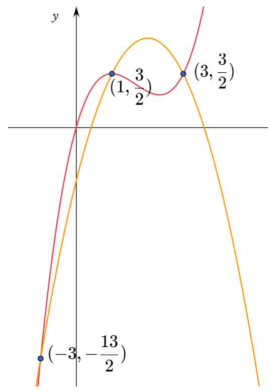
두 식 $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$과 $y = -x^2 + 4x - \frac{3}{2}$을 연립하면,

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x = -x^2 + 4x - \frac{3}{2}$$

정리하면

$$(x-3)(x-1)(x+1) = 0$$

따라서 두 곡선의 교점은 $\left(3, \frac{3}{2}\right)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(-1, -\frac{13}{2}\right)$이고, 오른쪽 그림과 같은 그림이 나온다. 따라서 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + x^2 - 4x + \frac{3}{2}\right)dx$$

$$+\int_{1}^{3}\left(-x^2 + 4x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x\right)dx$$

이다. 정리하고 결과를 계산하면 다음과 같다.

$$\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx + \int_{1}^{3}\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)dx$$

$$= \left[-x^3+3x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x\right]_1^3$$

$$= 2+2 = 4$$

11. [정답] ②

부등식 $|x^3 - 3x^2 - 24x + 16k| < 64$을 정리하면

$$-16k - 64 < x^3 - 3x^2 - 24x < 64 - 16k \ \cdots\cdots (*)$$

이고, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$로 두면

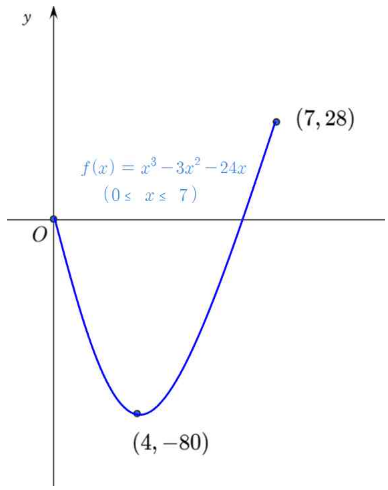
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$$

따라서 $x = -2$에서 극대, $x = 4$에서 극솟값을 갖는다. $0 \le x \le 7$일 때, $f(x)$의 그래프를 그려보면 오른쪽 그림과 같으므로

식$(*)$을 만족시키기 위해서

$64 - 16k > 28$, $-16k - 64 < -80$을 모두 만족시키면 된다. 이 두 부등식을 연립하면

$1 < k < \frac{9}{4}$이므로 이를 만족시키는 자연수 k의 값은 2 뿐이다.



12. [정답] ⑤

정적분의 성질을 이용하여

$$\int_0^{10}\frac{s^2-ks}{s+3}ds=\int_0^{10}\frac{x^2-kx}{x+3}dx \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$3\int_{10}^{0}\frac{t-k}{t+3}dt=-\int_0^{10}\frac{3x-3k}{x+3}dx \qquad \cdots\cdots(2)$$

이므로

$$\int_0^{10}\frac{s^2-ks}{s+3}ds=3\int_{10}^{0}\frac{t-k}{t+3}dt$$

에서 (1), (2)를 적용하고 정리하면

$$\int_0^{10}\frac{x^2-kx}{x+3}dx+\int_0^{10}\frac{3x-3k}{x+3}dx=0$$

$$\int_0^{10}\frac{(x+3)(x-k)}{x+3}dx=\int_0^{10}(x-k)dx=0$$

$\therefore k=5$

13. [정답] ③

ㄱ. $g(x)$가 삼차함수이므로 미분하면 2차함수이다.

$$g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases} \quad \cdots\cdots(1)$$

$g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $-f(0)=f(0)$

$\therefore f(0)=0$ (참)

ㄴ. 한편, $f(x)=\begin{cases}-g'(x) & (x<0)\\ g'(x) & (x>0)\end{cases}$ $\cdots\cdots(2)$이다.

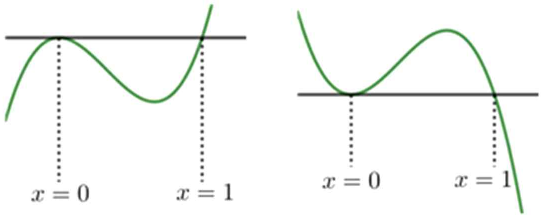
$g(x)$는 삼차함수이므로 $g(0)=0$이고, $x=0$에서 연속이다.

$$g(0)=\int_1^0 f(t)dt=\int_1^0 g'(t)dt=g(0)-g(1)$$

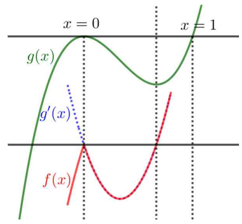
$\therefore g(1)=0$

또한, $f(x)$가 연속함수이므로 식(2)에서 $g'(0)=0$

따라서 이 조건을 모두 만족하는 삼차함수 $g(x)$의 개형은 아래와 같다.



이 때, $g(x)$가 위 그림의 좌측일 때의 상황에서 그 도함수를 생각하면 오른쪽 그림과 같다.

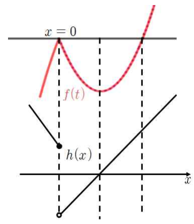


즉 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

$g(x)$가 위 그림의 우측일 때의 상황에서도 동일한 결론을 내릴수 있다.

이상으로부터 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 사용된 그림을 활용하여 $h(x)$를 그리면 오른쪽 그림과 같고, 이 경우 극값이 존재하지 않는다. (거짓)



14. [정답] $a=3,\ b=-12$

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+2$

$22=f(-2)=-16+4a-2b+2$

$\therefore 2a-b=18 \quad \cdots\cdots (1)$

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

$0=f'(-2)=24-4a+b$

$\therefore a-b=24 \quad \cdots\cdots (2)$

$(1),\ (2)$를 연립하면

$a=3,\ b=-12$

15. [정답] 72

$f(x)=x^2+2x-8$이라 하면

$f(x)=(x-2)(x+4)$이므로

$-4\le x\le 2$에서 $f(x)\le 0$이고 $2<x\le 5$에서 $f(x)\ge 0$이다.

$$\therefore \int_{-4}^{5}|x^2+2x-8|dx$$

$$=\int_{-4}^{2}(-x^2-2x+8)dx+\int_{2}^{5}(x^2+2x-8)dx$$

$$=36+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-8x\right]_2^5$$

$$=36+36=72$$

16. [정답] 20

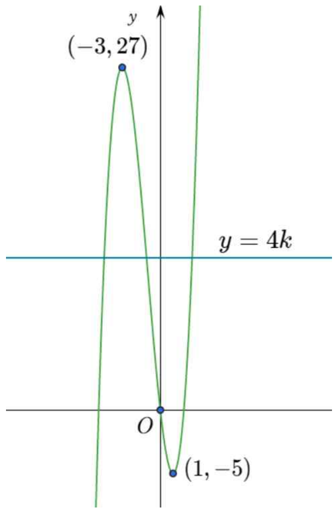
$f(x)=x^3+3x^2-9x$와 $y=4k$의 교점의 개수가 3이면 조건을 만족한다.

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

이므로 극댓값 $f(-3)=27$, 극솟값 $f(1)=-5$이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=4k$의 그래프와 교점의 개수가 3이려면 $-5<4k<27$이어야 한다.

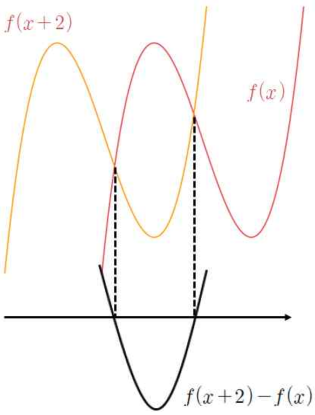
따라서 조건을 만족하는 정수 k의 값은 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 이들의 합은 20이다.

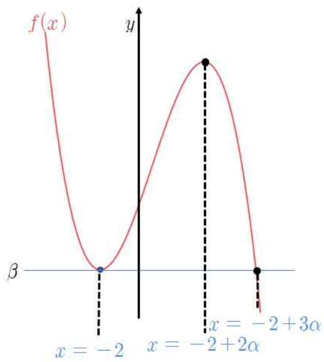


17. [정답] 17

$f(x)$의 최고차항이 양수인 경우 아래 왼쪽 그림과 같이 최댓값을 가질 수 없다. 따라서 $f(x)$의 최고차항은 음수임을 알 수 있다.

또한, 이차함수 $f(x+2)-f(x)$의 대칭축은 $x=0$이므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 가져야 한다. 따라서 아래 오른쪽 그림과 같이, 비율관계에 의하여 $x=-2+2\alpha$에서 극대이고, $x=-2+3\alpha$에서 다시 $f(-2)$와 동일한 함숫값을 갖는다.





$f(-2)=\beta$라 하면

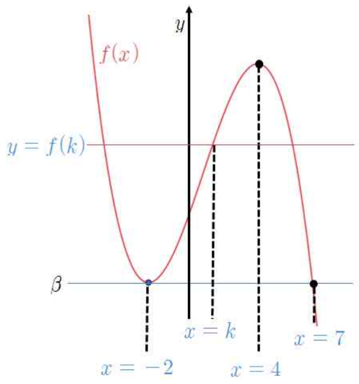
$f(x)=a(x+2)^2(x+2-3\alpha)+\beta$로 설정할 수 있다.

$f(x+2)=a(x+4)^2(x+4-3\alpha)+\alpha$이므로

$f(x+2)-f(x)=a\{6x^2+(36-12\alpha)x+56-36\alpha\}$

이 되어, 이차함수 $f(x+2)-f(x)$의 대칭축은 $x=3-\alpha=0$이므로 $\alpha=3$이다.

이상의 결과로부터 왼쪽 그림을 참조하면, 방정식 $f(x)=f(k)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값은 $k=1, 2, 3, 5, 6$이므로 이들의 합은 17이다.



18. [정답] 193

$xf(x)=\int_0^x f(t)dt+x^3\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=c$라 하자.

$xf(x)=\int_0^x f(t)dt+cx^3$

양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)+xf'(x)=f(x)+3cx^2$

따라서 $f'(x)=3cx$

따라서 적분상수를 d로 두면

$f(x)=\frac{3}{2}cx^2+d$이다.

$f(2)=13$에서 $13=6c+d$ $\cdots\cdots(1)$

한 편, $c=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\left(\frac{3}{2}cx^2+d\right)dt=\frac{1}{2}c+d$ 이므로 $c=2d$ $\cdots\cdots(2)$

식 (1), (2)를 연립하면 $c=2,\ d=1$이므로

$f(x)=3x^2+1$

$\therefore\ f(8)=193$

19. [정답] 640

문제를 음미하면 아래그림과 같이 색칠한 세 부분의 넓이가 같으면 된다.

방정식 $3x^2+k=24x$의 두 실근을 α,β라 하자. $(0<\alpha<\beta)$

$3x^2-24x+k=0$에서 근-계수의 관계로부터

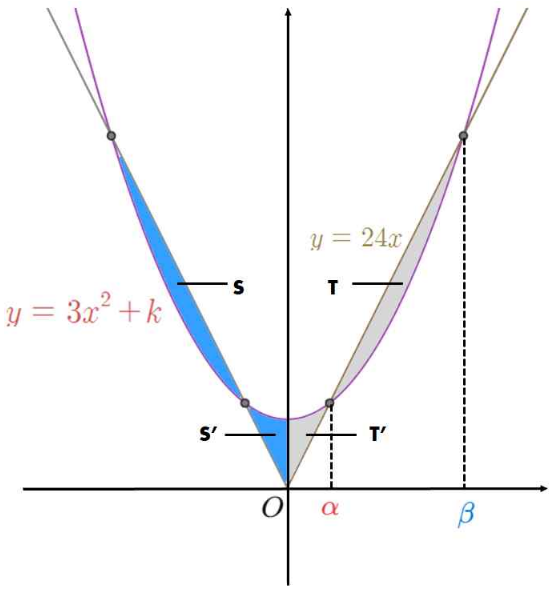
$\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=\frac{k}{3}$ $\cdots\cdots(1)$

대칭성을 생각하면

$S=T=S'+T',\ S'=T'$이므로

$2T'=T$ $\cdots\cdots(2)$인 조건을 만족하면 된다.

한편, $T-T'=\int_0^\beta(24x-3x^2-k)dx$



$T' = \int_0^{\alpha}(3x^2+k-24x)dx$이므로

식(2)로부터 $T - T' = T'$

$\int_0^{\alpha}(3x^2+k-24x)dx = \int_0^{\beta}(24x-3x^2-k)dx$

이다.

$\therefore \left[x^3-12x^2+kx\right]_0^{\alpha} = \left[-x^3+12x^2-kx\right]_0^{\beta}$

정리하면

$\alpha^3+\beta^3-12(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)=0 \quad \cdots\cdots (3)$

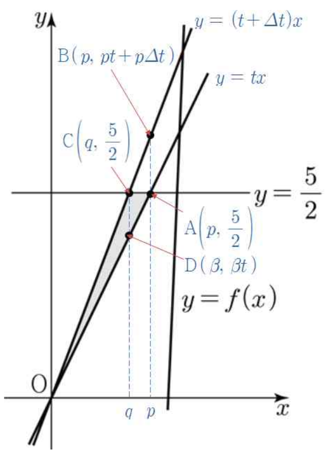
식(1)로부터

$\alpha^3+\beta^3 = 8^3-8k,\ \alpha^2+\beta^2 = 64-\dfrac{2k}{3}$이므로

식(3)에 대입하고 정리하면 $128=192-2k$

$\therefore 20k=640$

20. [정답]



$g_1(t+\Delta t)-g_1(t)$는 그림의 색칠된 도형의 넓이이다.

직선 $y=tx$와 $y=\dfrac{5}{2}$가 만나는 점의 x좌표를 p, 직선 $y=(t+\Delta t)x$와 $y=\dfrac{5}{2}$가 만나는 점의 x좌표를 q라 하면,

$p=\dfrac{5}{2t},\ q=\dfrac{5}{2(t+\Delta t)}$이다. 네 점 $\mathrm{A}\left(p,\ \dfrac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}(p,\ pt+p\Delta t)$, $\mathrm{C}\left(q,\ \dfrac{5}{2}\right)$, $\mathrm{D}(q,\ qt)$에 대하여 색칠된 도형의 넓이는 삼각형 OAB의 넓이인 $\dfrac{1}{2}p^2\Delta t$보다는 작고 삼각형 OCD의 넓이인 $\dfrac{1}{2}q^2\Delta t$보다는 크다.

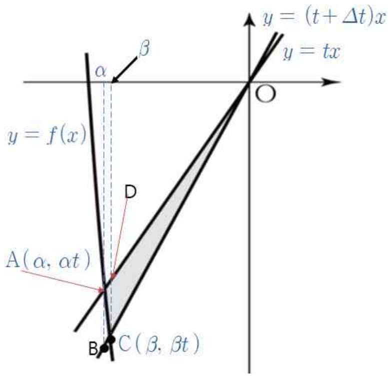
즉, $\dfrac{1}{2}q^2\Delta t < g_1(t+\Delta t)-g_1(t) < \dfrac{1}{2}p^2\Delta t$ 이므로

$$-\frac{1}{2}p^2 < \frac{g_1(t+\Delta t)-g_1(t)}{\Delta t} < -\frac{1}{2}q^2$$

Δt가 0에 가까워짐에 따라 q는 p에 가까워지므로

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{g_1(t+\Delta t)-g_1(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{2}p^2$$이다.

21. [정답] 225



본문에 설명한 대로 그림을 그리면 아래와 같다. 색칠된 도형의 넓이 $g_3(t+\Delta t)-g_3(t)$는

$\triangle \mathrm{OCD} < g_3(t+\Delta t)-g_3(t) < \triangle \mathrm{OAB}$

이다. 즉,

$$\frac{1}{2}\beta^2 \Delta t < g_3(t+\Delta t)-g_3(t) < \frac{1}{2}\alpha^2 \Delta t$$

$$\therefore \ \frac{1}{2}\beta^2 < \frac{g_3(t+\Delta t)-g_3(t)}{\Delta t} < \frac{1}{2}\alpha^2$$

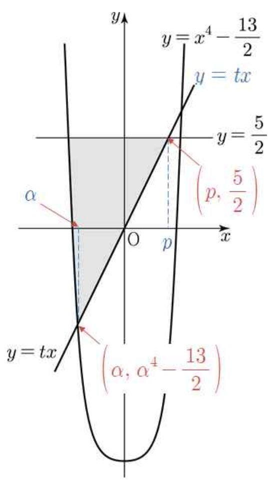
Δt가 0에 가까워짐에 따라 β는 α에 가까워지므로

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{g_1(t+\Delta t)-g_1(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\alpha^2$$이다.

$$\therefore h(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2$$

한편, $g(t) = g_1(t)+g_2(t)+g_3(t)$이고, $g'(t) = g_1{}'(t)+g_2{}'(t)+g_3{}'(t) = \frac{1}{2}\alpha^2+0-\frac{1}{2}p^2$

$$= \frac{1}{2}(\alpha-p)(\alpha+p)$$



$\alpha<0,\ p>0$이므로 $g(t)$는 $\alpha+p=0$일 때 극소이고 최소이다. $\alpha+p=0$이면 왼쪽 그림에서 관찰하면 $\frac{5}{2}+\alpha^4-\frac{13}{2}=0$을 만족하면 되고 이때, 음수 $\alpha = -p = -\sqrt{2}$이다.

그러면 이때의 기울기는

$$t = \frac{5}{2p} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \boxed{\text{(다)}} = \frac{5\sqrt{2}}{4} = k$$

이상으로부터 $h(12k) = \frac{1}{2}\left(12\times\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 225$