1. 두 함수 $F(x)$, $G(x)$는 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이다. $F(x)=x^3+2x^2-3x-4$이고, $G(0)=F(0)+2$일 때, $G(1)$의 값은?

[4.0점]

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

2. $\int_0^1 (x+1)^2 dx + \int_1^0 (x-1)^2 dx$의 값은?

[4.1점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$

④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

3. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 출발한지 t초 후의 속도 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$는 각각 $v_{\mathrm{P}}(t)=2t+3$, $v_{\mathrm{Q}}(t)=4t$이고, 점 P는 좌표가 4인 점에서, 점 Q는 원점에서 동시에 같은 방향으로 출발한다. 출발한 지 a초 후에 두 점 P, Q가 만날 때, a의 값은?
[4.2점]
① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

4. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)+f(x)=0$을 만족시킨다. $\int_{-3}^{3}(x+1)(f'(x)+x)dx=10$일 때, $f(-3)$의 값은?
[4.2점]
① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

5. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=2x+\int_{0}^{2}(x-1)^2 f(t)dt$일 때, $f(0)$은?

[4.3점]

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

6. 함수 $f(x)=x(x-3a)^2+b$의 극댓값이 6이고, 극솟값이 2일 때, $a+b$의 최댓값은?

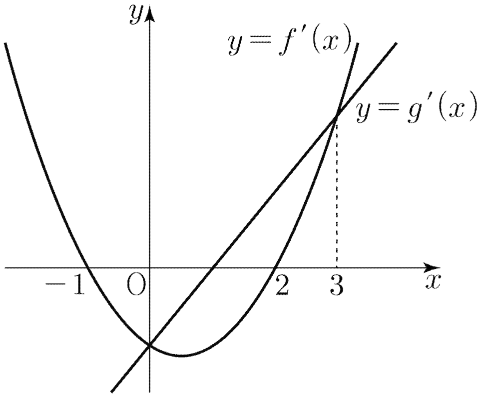
(단, a, b는 상수이다.)

[4.3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

7. 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x 좌표는 -1, 2이고, $y=f'(x)$와 $y=g'(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 0, 3이다. 보기에서 옳은 것만을 모두 고른 것은?
[4.4점]



[보 기]

ㄱ $f(2)=0$이면 $f(-1)>0$이다.
ㄴ. $f(a)=f(-1)$이면 $a>2$이다. (단, $a\neq-1$)
ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극소이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $xf'(x)+f(x)=16x^3+3x^2-4x+1$을 만족한다. 직선 $x=-1$과 x축, y축, 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?
[4.4점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

9. 두 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+2x-1$, $g(x)=3x^2-5x+2$에 대하여 $0 \le x \le 3$에서 부등식 $f(x)+k \le 2g(x)$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?
[4.4점]

① -5 ② -4 ③ 0

④ 4 ⑤ 5

10. 함수 $f(x)=-x^2+x$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n f(x-n) & (n \leq x < n+1) \end{cases}$$

(단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

$\int_0^{10} g(x)dx$의 값은?

[4.5점]

① $\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$ ② $\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

③ $\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$ ④ $\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

⑤ $\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

11. 곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=2x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분한다. 닫힌구간 $[0,\ k]$에서 y축, 곡선 $y=x^2-2x-3$, 직선 $y=2x+1$ 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)

[4.5점]

① $\frac{34}{3}$ ② 12 ③ $\frac{38}{3}$

④ $\frac{40}{3}$ ⑤ 14

12. 다항함수 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+ax+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

[조 건]

(가) $f'(-1)=0$
(나) 방정식 $f(x)=0$은 음의 실근 하나와 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $|f(x)|=3$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

$f(0)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)
[4.6점]

① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 2
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 7

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.

[조 건]

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근 0, α, β를 갖는다.
(나) 방정식 $f'(x)=1$은 서로 다른 두 실근 0, γ를 갖는다.

$g(x)=f(x)-x$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $0<\alpha<\beta<\gamma$)
[4.6점]

[보 기]

ㄱ. $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. $\alpha<1$, $\beta>1$
ㄷ. $g'(\alpha)g'(\beta)>0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 이차함수 $f(x)=x^2-2kx+3k$에 대하여

부등식 $\int_1^7 |f(x)|dx > \left|\int_1^7 f(x)dx\right|$가 성립하도록 하는 상수 k의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, k는 10 이하의 자연수)

[4.7점]

① 9 ② 10 ③ 12

④ 14 ⑤ 45

15. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

[조 건]

(가) $f(1)=f(0)+4$

(나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, $x=\alpha$에서 극소이다.

(다) 방정식 $f(x)=f(0)$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(2)-f(0)$의 값들의 합은?

[4.8점]

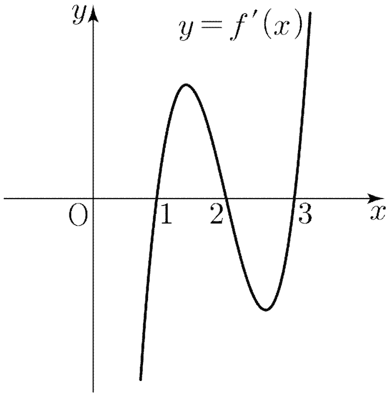
① -14 ② -10 ③ -4

④ 2 ⑤ 8

16. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P와 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 x가 $x=t^3+pt^2+qt$이다. $t=3$에서 점 P의 운동방향이 바뀌고 그때의 가속도가 12일 때, $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. (단, p, q는 상수이다.)

[6.0점]

17. 오른쪽 그림은 사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 0일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 근들의 곱을 구하시오.
(단, a, b, c, d는 상수이다.)
[6.0점]

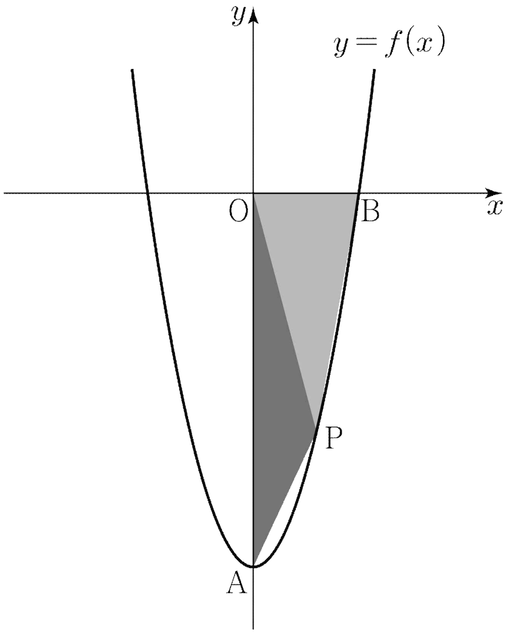


18. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3+x^2+ax+3$일 때, 상수 a의 값과 함수 $f(x)$를 구하시오.

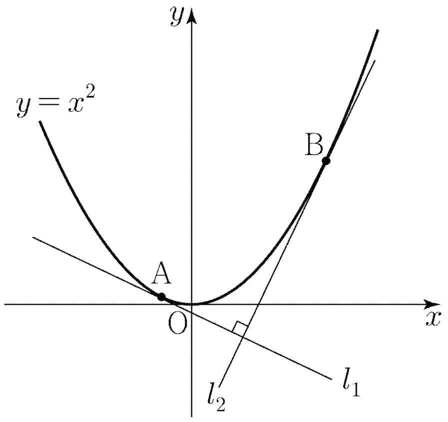
[7.0점]

19. 함수 $f(x)=2x^2-12$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 B라 하자. 제4사분면 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에 대하여 두 삼각형 OAP, OPB의 넓이의 곱을 $S(t)$라 할 때, $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 $S(t)$의 최댓값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)
[7.0점]



20. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직일 때, 곡선 $y=x^2$과 두 직선 l_1, l_2로 둘러싸인 부분의 넓이의 최솟값을 구하시오. (단, $a<0,\ b>0$)

[8.0점]



1. [정답] ①

$F(x)=x^3+2x^2-3x-4,\ \ G(x)=x^3+2x^2-3x+C$

$G(0)=F(0)+2$에서 $C=-4+2=-2$

$\therefore\ \ C=-2$

$\therefore\ \ G(1)=1+2-3-2=-2$

2. [정답] ②

$\int_0^1 (x+1)^2dx+\int_1^0 (x-1)^2dx$

$=\int_0^1 \left(x^2+2x+1\right)dx+\int_1^0 \left(x^2-2x+1\right)dx$

$=\int_0^1 \left(x^2+2x+1\right)dx-\int_0^1 \left(x^2-2x+1\right)dx$

$=\int_0^1 4x\,dx$

$=\left[2x^2\right]_0^1=2$

3. [정답] ③

두 점 P, Q의 위치함수는

$x_{\mathrm{P}}(t)=t^2+3t+4,\ \ x_{\mathrm{Q}}(t)=2t^2$

두 점이 만나므로

$t^2+3t+4=2t^2,\ \ t^2-3t-4=0,\ \ (t-4)(t+1)=0$

$\therefore\ \ t=4$

4. [정답] ④

$f(-x)+f(x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 원점대칭인 기함수이다.

$\int_{-3}^3 (x+1)(f'(x)+x)dx$

$=\int_{-3}^3 \left(xf'(x)+f'(x)+x^2+x\right)dx$

$=\int_{-3}^3 xf'(x)dx+\int_{-3}^3 f'(x)dx+\int_{-3}^3 x^2dx+\int_{-3}^3 x\,dx$

$=0+\int_{-3}^3 f'(x)dx+\int_{-3}^3 x^2dx+0$

$=0+2\int_0^3 f'(x)dx+2\int_0^3 x^2dx+0$

$=2f(3)-2f(0)+18$

$=2f(3)+18$

$2f(3)+18=10$에서 $f(3)=-4$

$\therefore\ \ f(-3)=4$

5. [정답] ④

$f(x)=2x+(x-1)^2\int_0^2 f(t)dt$에서 $a=\int_0^2 f(t)dt$라 놓으면

$f(x)=2x+a(x-1)^2$

$$a=\int_0^2 (2x+ax^2-2ax+a)dx$$

$$=\left[x^2+\frac{a}{3}x^3-ax^2+ax\right]_0^2$$

$$=4+\frac{8}{3}a-4a+2a$$

$$=4+\frac{2}{3}a$$

$\therefore\ a=12$

6. [정답] ⑤

$f'(x)=(x-3a)^2+2x(x-3a)$

$\quad\quad=(x-3a)(3x-3a)$

$f'(x)=0$에서 $x=a,\ 3a$

(i) $a>0$일 때

극댓값 $f(a)=4a^3+b=6$, 극솟값 $f(3a)=b=2$에서

$b=2,\ a=1$

(ii) $a<0$일 때

극댓값 $f(3a)=b=6$, 극솟값 $f(a)=4a^3+b=2$에서

$b=6,\ a=-1$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 5이다.

7. [정답] ⑤

$f'(x)=m(x+1)(x-2)$ $(m>0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄱ. 극솟값<극댓값이므로 $f(2)=0<f(-1)$ (참)

ㄴ. 극댓값 $f(-1)$과 $f(a)$가 같으므로 $a=\frac{7}{2}>2$ (참)

ㄷ. $h'(x)=mx(x-3)$ $(m>0)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8. [정답] ③

$xf'(x)+f(x)=16x^3+3x^2-4x+1$ 양변을 부정적분하면 $xf(x)=4x^4+x^3-2x^2+x+C$

$x=0$을 대입하면 $C=0$

$\therefore\ f(x)=4x^3+x^2-2x+1$

$f'(x)=12x^2+2x-2=0$은 음근과 양근을 가지며 $f(0)=1,\ f(-1)=0$이므로 $x=-1$과 x축, y축, 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}(4x^3+x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[x^4+\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{4}{3}$$

9. [정답] ②
$0 \le x \le 3$에서 $2x^3-3x^2+2x-1+k \le 6x^2-10x+4$,
$2x^3-9x^2+12x-5 \le -k$가 성립하려면
$0 \le x \le 3$에서 $h(x)=2x^3-9x^2+12x-5$가 $y=-k$보다 같거나 아래 위치해야 한다.
$h'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$에서
함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값 0, $x=2$에서 극솟값 -1을 가지며 $h(0)=-5$, $h(3)=4$이므로
$0 \le x \le 3$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 4이다.
따라서 $-k \ge 4$이어야 하므로 k의 최댓값은 -4이다.

10. [정답] ①
$0 \le x < 1$에서 함수 $g(x)=-x(x-1)$이므로
$$\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{6}(1-0)^3=\frac{1}{6}$$
$n \le x < n+1$에서 $g(x)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-n)(x-n-1)$이므로
$$\int_n^{n+1} g(x)dx=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{6}(n+1-n)^3=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\int_0^{10} g(x)dx=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}-\ \cdots-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^9$$
$$=\frac{\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$$

11. [정답] ④
곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=2x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분하려면
$h(x)=x^2-4x-4$와 x축으로 둘러싸인 넓이를 $x=k$가 이등분하여야 하므로 $k=2$이다.
$0 \le x \le 2$에서 y축, 곡선 $y=x^2-2x-3$, 직선 $y=2x+1$ 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는
$0 \le x \le 2$에서 $h(x)=x^2-4x-4$와 x축 및 $x=2$로 둘러싸인 넓이이므로
구하는 넓이 S는

$S=-\int_{0}^{2}(x^2-4x-4)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x\right]_0^2$

$=-\left(\frac{8}{3}-8-8\right)$

$=\frac{40}{3}$

12. [정답] ⑤

$f'(x)=3x^2-3x+a$

조건 (가)에서 $f'(-1)=3+3+a=0$

$\therefore\ a=-6$

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x-2)(x+1)$에서

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

조건 (나)를 만족하려면 극댓값×극솟값<0이고 $f(0)=b>0$이어야 한다.

조건 (다)를 만족하려면 극댓값이 3 또는 극솟값이 -3이어야 한다.

극댓값 $f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+b=b+\frac{7}{2}>\frac{7}{2}$이므로 극솟값 $f(2)=8-6-12+b=b-10=-3$이어야 한다.

$\therefore\ b=7$

따라서 $f(0)=b=7$이다.

13. [정답] ⑤

$g(x)=f(x)-x$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수

ㄱ. 조건 (나)에서 $g'(0)=0,\ g'(\gamma)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. 조건 (가)에서 $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$

조건 (나)에서 $f'(x)=3x^2-2(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=1$이고 $f'(0)=\alpha\beta=1$이다.

$0<\alpha<\beta$이므로 $\alpha<1,\ \beta>1$ (참)

ㄷ. ㄱ.에서 $g'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수이고 $g'(0)=0,\ g'(\gamma)=0,\ \alpha<\beta<\gamma$이므로

$g'(\alpha)<0,\ g'(\beta)<0$이다.

$\therefore\ g'(\alpha)g'(\beta)>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14. [정답] ④

$1\le x\le 7$에서 $f(x)\ge 0$이거나 $f(x)\le 0$이면

$\int_1^7|f(x)|dx=\left|\int_1^7 f(x)dx\right|$이므로 부등식을 만족하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 x축과 서로 다른 2개의 교점을 가져야 하므로 $f(x)=0$의 $\frac{D}{4}=k^2-3k>0$

$\therefore\ k>3$ ($\because\ k$는 자연수) $\cdots\cdots$ ㉠

k는 자연수이므로 $f(1)=1+k>0$

함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=k$
(i) $k<7$일 때
부등식 $\int_{1}^{7}|f(x)|dx>\left|\int_{1}^{7}f(x)dx\right|$은 항상 성립
(ii) $k\geq 7$일 때
$f(7)<0$이어야 한다.
이때, $f(7)=49-14k+3k=49-11k<0$이므로 조건을 만족한다.
㉠과 (i), (ii)에서 $3<k\leq 10$
k의 최댓값은 10, 최솟값은 4이므로 그 합은 14이다.

15. [정답] ①
3차항의 계수를 a라 놓으면 a의 부호에 따라 나누어 살펴본다.
(i) $a>0$인 경우
(다) $y=f(x)$와 $y=f(0)$의 그래프의 교점이 2개, 즉 $f(0)=f(\alpha)$이므로 $f(x)=ax(x-\alpha)^2+f(0)$이고 $\alpha=3$이다.
$f(1)=4a+f(0)$이고 (가)에서 $a=1$
$\therefore\ f(x)=x(x-3)^2+f(0)$
$f(2)=2+f(0)$에서
$f(2)-f(0)=2$
(ii) $a<0$인 경우
(다) $y=f(x)$와 $y=f(0)$의 그래프의 교점이 2개, 즉 $x=0$에서 극솟값을 가지므로
$f(x)=ax^2(x-\alpha)+f(0)$이고 $\alpha=\frac{3}{2}$이다.
$f(1)=-\frac{1}{2}a+f(0)$이고 (가)에서 $a=-8$
$\therefore\ f(x)=-8x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)+f(0)$
$f(2)=-16+f(0)$에서
$f(2)-f(0)=-16$
(i), (ii)에서 $f(2)-f(0)$의 값들의 합은 -14이다.

16. [정답] 22
점 P의 시각 t에서 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2pt+q,\ a=6t+2p$이다.
점 P의 운동방향이 바뀔 때의 점 P의 속도는 0이므로 점 P의 운동방향이 바뀌는 $t=3$에서 점 P의 속도는 0이다.
$\therefore\ 27+6p+q=0\quad\cdots\cdots$ ㉠
$t=3$에서 점 P의 가속도가 12이므로 $18+2p=12$
$\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의해 $p=-3,\ q=-9$이다.

따라서 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |3t^2-6t-9|dt$$

$$=\int_0^2 (-3t^2+6t+9)dt$$

$$=\left[-t^3+3t^2+9t\right]_0^2=-8+12+18=22$$

[다른풀이]

$t=0$에서 $t=2$까지 $v=3t^2-6t-9<0$이다.

따라서 $x=t^3-3t^2-9t$에서 $t=2$일 때의 위치를 구하면 $x=8-12-18=-22$이므로 구하는 값은 22이다.

17. [정답] 4

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$이므로

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ …… ㉠

그림에서 $f'(x)=0$의 해가 $x=1,\ 2,\ 3$이므로

$f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)$이고, 이를 전개하면

$f'(x)=4(x^3-6x^2+11x-6)$ …… ㉡

㉠, ㉡의 각 항의 계수를 비교하면

$a=-8,\ b=22,\ c=-24$이다.

$f(x)$의 극댓값은 $f(2)=0$이므로

$16+8a+4b+2c+d=0$에서 $d=8$이고, 방정식 $f(x)=0$은 $x=2$를 중근으로 갖는다.

따라서

$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+8=(x-2)^2(x^2-4x+2)$

이고, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$x=2$(중근)가 존재하고, 방정식 $x^2-4x+2=0$에서 나머지 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 2이다.

따라서 서로 다른 세 실근의 곱은 4이다.

18. [정답] $a=-5,\ f(x)=6x+2$

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3+x^2+ax+3$$

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3+x^2+ax+3$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2x+a$$

$$\int_1^x f(t)dt=3x^2+2x+a$$

양변에 $x=1$을 대입하면, $0=3+2+a$

$\therefore\ a=-5$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=6x+2$

19. [정답] $48\sqrt{3}$

$\mathrm{A}(0,\ -12)$, $\mathrm{B}\left(\sqrt{6},\ 0\right)$이므로

삼각형 OAP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times t\times 12=6t$이고,

삼각형 OBP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\left(-2t^2+12\right)=\sqrt{6}\left(-t^2+6\right)$이다.

$\therefore\ S(t)=6t\times\sqrt{6}\left(-t^2+6\right)=6\sqrt{6}\left(-t^3+6t\right)$

$S'(t)=6\sqrt{6}\left(-3t^2+6\right)=0$을 만족하는 t의 값은 $\sqrt{2}$ 또는 $-\sqrt{2}$이고, $0<t<\sqrt{6}$이므로 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$48\sqrt{3}$	↘	

따라서 $t=\sqrt{2}$일 때 $S(t)$는 최대이고, 최댓값은 $S\left(\sqrt{2}\right)=48\sqrt{3}$이다.

20. [정답] $\frac{1}{12}$

$l_1 : y=2a(x-a)+a^2$ 즉, $y=2ax-a^2$

$l_2 : y=2b(x-b)+b^2$ 즉, $y=2bx-b^2$

직선 l_1과 직선 l_2는 서로 수직이므로 $2a\times 2b=-1$

즉, $ab=-\frac{1}{4}$

직선 l_1과 직선 l_2의 교점의 x좌표를 구하면,

$2ax-a^2=2bx-b^2$에서 $(a-b)(2x-a-b)=0$

$a\neq b$이므로 $x=\frac{a+b}{2}$

구하는 부분의 넓이는

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left\{x^2-\left(2ax-a^2\right)\right\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left\{x^2-\left(2bx-b^2\right)\right\}dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2dx$$

$$=\int_0^{\frac{b-a}{2}}x^2dx+\int_{\frac{a-b}{2}}^{0}x^2dx=\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}x^2dx$$

$$=2\int_0^{\frac{b-a}{2}}x^2dx=\frac{1}{12}(b-a)^3$$

여기서 $\frac{1}{12}(b-a)^3=\frac{1}{12}\left(b+\frac{1}{4b}\right)^3$이고,

양수 b에 대하여 $b+\frac{1}{4b}\geq 2\sqrt{b\times\frac{1}{4b}}=1$이므로

구하는 넓이의 최솟값은 $\dfrac{1}{12}$ 이다.