गाउस का नियम एवं इसके अनुप्रयोग
GAUSS'S LAW AND ITS APPLICATIONS

2
CHAPTER

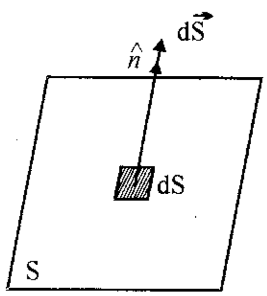
भूमिका (Introduction)

पिछले अध्याय में हमनें स्थिर बिन्दु आवेश, विविक्त आवेशों के निकाय तथा विद्युत द्विध्रुव के कारण विभिन्न स्थितियों पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का अध्ययन किया। इस अध्याय में हम आवेशों के सतत् वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रताओं का अध्ययन करेंगे। इसके लिए गाउस का नियम अत्यधिक उपयोगी है, जो विभिन्न गणनाओं को सरल बना देता है। गाउस के नियम को समझने से पूर्व विद्युत फ्लक्स की अवधारणा समझना आवश्यक है, जो सदिश क्षेत्रफल पर आधारित है।

सदिश क्षेत्रफल (Area Vector)

भौतिकी के प्रश्नों में क्षेत्रफल को सदिश रूप में प्रदर्शित किया जाता है। चित्र में एक अल्प क्षेत्रफल अवयव dS किसी पृष्ठ S में सदिश $\vec{dS}$ द्वारा प्रदर्शित किया गया है। यहाँ क्षेत्रफल का परिमाण dS तथा दिशा अवयव पर खींचे गए अभिलम्ब (बाहर की ओर) द्वारा प्रदर्शित होती है। यदि $\hat{n}$ इस दिशा के अनुदिश एकांक सदिश हो तो

$$\vec{dS} = (dS)\,\hat{n}$$



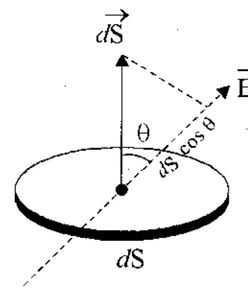
चित्र 2.1

2.1 विद्युत फ्लक्स (Electric flux)

विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी क्षेत्रफल से अभिलम्बवत् गुजरने वाली कुल विद्युत क्षेत्र रेखाओं की संख्या को विद्युत फ्लक्स कहते है। इसे ϕ_E द्वारा व्यक्त करते हैं।

यदि विद्युत् क्षेत्र $\vec{E}$ में dS क्षेत्रफल वाला पृष्ठ स्थित हो तो उससे निर्गत विद्युत् फ्लक्स निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं–

- सबसे पहले पृष्ठ पर लम्ब डालते है जो सदिश क्षेत्रफल $\vec{dS}$ को व्यक्त करता हैं।
- पृष्ठ की एक सतह को धनात्मक मानते हैं। यदि धनात्मक अभिलम्ब ($\vec{dS}$) विद्युत् क्षेत्र $\vec{E}$ से कोण θ बनाता है तो पृष्ठ से निर्गत विद्युत् फ्लक्स–



चित्र 2.2

$$d\phi = E(dS\cos\theta)$$
$$d\phi = E\,dS\cos\theta$$

या $$d\phi = \vec{E}\cdot\vec{dS}$$

इस प्रकार कहा जा सकता है कि किसी विद्युत् क्षेत्र में स्थिर पृष्ठ से निर्गत विद्युत् फ्लक्स विद्युत् क्षेत्र सदिश एवं सदिश क्षेत्रफल के बिन्दु गुणनफल के बराबर होता है। फलतः विद्युत् फ्लक्स एक अदिश राशि है।

विद्युत फ्लक्स का SI मात्रक $\frac{\text{न्यूटन}}{\text{कूलॉम}}\times$ मीटर^2 या वोल्ट × मीटर होता है।

विद्युत फ्लक्स की विमा–$[ML^3T^{-3}A^{-1}]$

किसी बड़े पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \int_s d\phi = \int_s \vec{E}.\vec{dS} = \int_s E\,dS\cos\theta$$

पूरे पृष्ठ पर समाकलन करके ज्ञात कर लेते हैं। बन्द पृष्ठ (closed surface) से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स ज्ञात करने के लिए समाकलन के चिन्ह पर एक वृत्त बना देते हैं जैसे $\oint_s \vec{E}.\vec{dS}$

जब फ्लक्स रेखाएँ किसी पृष्ठ से बाहर निकलती हैं तो पृष्ठ के बाहर की ओर अभिलम्ब (normally outward) $\vec{dS}$ तथा $\vec{E}$ के बीच कोण θ का मान प्रथम चतुर्थांश (0° तथा 90° के बीच) में होता है, अतः $\cos\theta$ धनात्मक होता है। इस कारण किसी पृष्ठ से निर्गत फ्लक्स धनात्मक होता है। जब फ्लक्स रेखाएँ किसी पृष्ठ के भीतर प्रवेश करती है तो θ का मान द्वितीय चतुर्थांश में होता है, अतः $\cos\theta$ ऋणात्मक होता है। इस कारण किसी पृष्ठ के भीतर प्रवेश करने वाला फ्लक्स ऋणात्मक होता है।

- विद्युत् फ्लक्स निम्न तीन भौतिक राशियों पर निर्भर करता है–

(i) विद्युत् क्षेत्र $\vec{E}$ पर (ii) सदिश क्षेत्रफल $\vec{dS}$

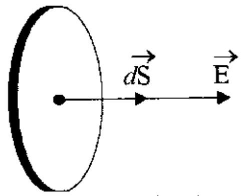
(iii) $\vec{E}$ व $\vec{dS}$ के बीच के कोण पर

यदि विद्युत् क्षेत्र $\vec{E}$ एवं सदिश क्षेत्रफल $\vec{dS}$ के मान नियत रहें तो उनके बीच के कोण θ पर विद्युत् फ्लक्स निम्नानुसार निर्भर करेगा–

(i) जब $\theta = 0°$ होता है अर्थात् जब $\vec{dS}$, विद्युत् क्षेत्र $\vec{E}$ की दिश

होता है तब निर्गत विद्युत् फलक्स निम्नानुसार पारित होगा–

$$\phi = E dS$$



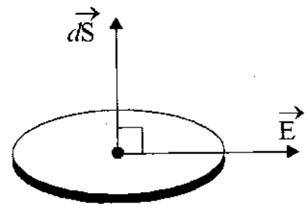
(a)

यह विद्युत् फलक्स–(i) अधिकतम होता है

(ii) धनात्मक होता है

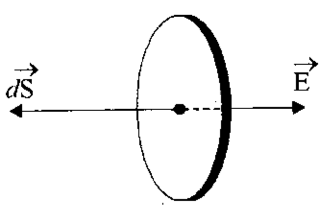
(iii) निर्गत होता है

(ii) जब $\theta = 90°$ होता है अर्थात् जब $\vec{dS}$, विद्युत् क्षेत्र $\vec{E}$ से अभि-लम्बवत होता है तब पृष्ठ से निर्गत फलक्स शून्य होता है



(b)

(iii) यदि धनात्मक अभिलम्ब $\vec{E}$ से 180° पर होता है। अर्थात् जब $\vec{dS}$ व $\vec{E}$ परस्पर विपरीत होते हैं तब पृष्ठ से निर्गत फलक्स $\phi = -EdS$ से व्यक्त होगा



चित्र 2.3 (c)

यह विद्युत् फलक्स ऋणात्मक तथा प्रवेशित फलक्स कहलाता है।

उदा.1. विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = (200\hat{i} + 300\hat{j})$ Vm^{-1} में स्थित एक क्षेत्रफल सदिश $\vec{S} = 5 \times 10^{-3}\ \hat{j}\ m^2$ से पारित विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.1

हल– $\because$ विद्युत फ्लक्स $\phi = \vec{E}.\vec{S}$

$$\Rightarrow \quad \phi = (200\hat{i} + 300\hat{j}).(5 \times 10^{-3}\hat{j})$$

$$\Rightarrow \quad \phi = 0 + 1500 \times 10^{-3} = 1.5\ V \times m$$

उदा.2. एक वर्गाकार फ्रेम जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 10 सेमी. है 20 न्यूटन/कूलॉम के एक समान विद्युत क्षेत्र में इस प्रकार रखा जाता है कि फ्रेम पर अभिलम्ब विद्युत क्षेत्र की दिशा से 60° का कोण बनाता है फ्रेम से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स ज्ञात करो।

हल– $\because \quad d\phi = \vec{E}.d\vec{S} = EdS\cos\theta$

दिया गया है– $E = 20$ न्यूटन/कूलॉम

$dS = 0.1 \times 0.1$ मी^{2}

$\theta = 60°$

$$\phi = 20 \times (0.1 \times 0.1)\cos 60°$$

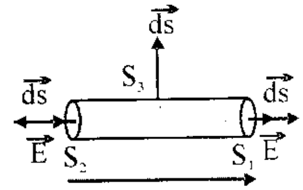
$$\phi = 0.1\ \frac{\text{न्यूटन} \times \text{मी.}^2}{\text{कूलॉम}}$$

उदा.3. एक समान विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में एक बेलन इस प्रकार स्थित है कि इसकी अक्ष विद्युत क्षेत्र के अनुदिश है। प्रदर्शित कीजिए कि बेलन से पारित कुल विद्युत फ्लक्स शून्य है।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.2

हल– चित्रानुसार बेलन को दो वृत्ताकार पृष्ठों s_1 व s_2 तथा वक्रीय पृष्ठ s_3 से मिलकर बना माना जा सकता है। अत: बेलन से पारित कुल विद्युत

फ्लक्स $\quad \phi = \int_{s_1} \vec{E}.\vec{ds} + \int_{s_2} \vec{E}.\vec{ds} + \int_{s_3} \vec{E}.\vec{ds}$



चित्र 2.4

$\therefore$ वृत्ताकार पृष्ठ s_1 पर $\vec{E}$ व $\vec{ds}$ समान दिशा में, s_2 पर $\vec{E}$ व $\vec{ds}$ परस्पर विपरीत दिशा में तथा वक्रीय पृष्ठ पर $\vec{E} \cdot \vec{ds}$ परस्पर लम्बवत् है।

$$\phi = \int_{s_1} Eds\cos 0° + \int_{s_2} Eds\cos 180° + \int_{s_3} Eds\cos 90°$$

$$\phi = \int_{s_1} Eds - \int_{s_2} Eds + 0$$

$$\phi = E\int_{s_1} ds - E\int_{s_2} ds$$

$$\because \quad \int_{s_1} ds = \int_{s_2} ds = s$$

$$\Rightarrow \quad \phi = Es - Es = 0$$

यह परिणाम अपेक्षित ही है, क्योंकि बेलन एक समान विद्युत क्षेत्र ‍ स्थित होने के कारण बेलन के भीतर प्रवेशित क्षेत्र रेखाओं की संख्या बेल से निर्गत क्षेत्र रेखाओं की संख्या के बराबर है। अत: सम्पूर्ण बंद पृष्ठ ‍ सम्बद्ध नैट फ्लक्स शून्य है।

उदा.4. एक 5 cm. त्रिज्या की वृत्ताकार शीट, एक समान विद्यु क्षेत्र $5 \times 10^5\ Vm^{-1}$ में इस प्रकार स्थित है कि इसका तल विद्युत क्षेत्र ‍ 30° का कोण बनाता है। शीट से पारित विद्युत फ्लक्स ज्ञात कीजिए

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.3

हल– प्रश्नानुसार शीट के तल का विद्युत क्षेत्र से कोण = 30°

$\therefore$ शीट के अभिलम्ब (क्षेत्रफल सदिश) का विद्युत क्षेत्र से कोण

$$\theta = 90° - 30° = 60°$$

$\therefore$ विद्युत फ्लक्स $\quad \phi = \vec{E}.\vec{S} = ES\cos\theta$

$$= E(\pi r^2)\cos 60°$$

$$\Rightarrow \quad \phi = 5 \times 10^5 \times 3.14 \times (5 \times 10^{-2})^2 \times$$

$$\phi = 1.96 \times 10^3\ V \times m.$$

2.2 सतत आवेश वितरण (Continuous charge distribution)

जब आवेश इस प्रकार वितरित हो, कि आवेशों के मध्य की दूरी अल्प हो अर्थात् उनके बीच बहुत कम स्थान है, तब आवेश वितरण सतत आवेश वितरण कहलाता है। सतत आवेश वितरण में विविक्त आवेश सतत रूप से एक समान फैले होते हैं।

किसी वस्तु पर आवेश वितरण एक विमीय होने पर इसे रेखीय आवेश वितरण, द्विविमीय होने पर इसे पृष्ठ आवेश वितरण तथा त्रिविमीय होने पर इसे आयतन आवेश वितरण कहते हैं।

आवेश घनत्व–इसे निम्नानुसार तीन प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है।

(A) रेखीय आवेश घनत्व (Linear charge density λ)

(a) प्रति एकांक लम्बाई आवेश की मात्रा को रेखीय आवेश घनत्व कहते हैं।

(b) $\lambda = \frac{q}{l} = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{चालक की लम्बाई}}$

(c) इसकी इकाई कूलॉम/मी. होती है तथा विमा ATL^{-1} होती है।

(d) इसे आवेशित वलय तथा रेखिक चालकों या अचालकों के सूत्र में प्रयुक्त किया जाता है।

उदाहरण–यदि किसी R त्रिज्या के वृत्ताकार तार पर q आवेश एकसमान रूप से वितरित है तो तार पर रेखीय आवेश घनत्व

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{q}{2\pi R}$$

(B) पृष्ठ आवेश घनत्व (Surface charge density σ)

(a) किसी चालक में प्रति एकांक क्षेत्रफल आवेश की मात्रा को पृष्ठ आवेश घनत्व कहते है।

(b) $\sigma = \frac{q}{A} = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{क्षेत्रफल}}$

जब A = 1 मी.^{2} तब σ = q होता है।

(c) इसकी इकाई $\frac{\text{कूलॉम}}{\text{मी.}^2}$ तथा विमा ATL^{-2} होती है।

(d) इसे आवेशित चकती तथा आवेशित चालक प्लेट व अपरिमित आवेशित प्लेट के सूत्रों में प्रयुक्त किया जाता है।

(e) नुकीले पृष्ठों के लिए σ अधिकतम होता है जबकि समतल पृष्ठों के लिए σ न्यूनतम होता है।

(f) σ चालक के आकार तथा चालक के समीप अन्य चालक अथवा विद्युत रोधी की उपस्थिति पर निर्भर करता है।

(g) आवेशित आयताकार धातु के पटल के किनारों पर और शंक्वाकार आवेशित चालक में शीर्ष पर σ अधिकतम होता है।

उदाहरण–यदि q आवेश किसी R त्रिज्या के गोलीय कोश के पृष्ठ पर एकसमान रूप से वितरित है तो पृष्ठ आवेश घनत्व

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi R^2}$$

(C) आयतन आवेश घनत्व (Volume charge density ρ)

(a) प्रति एकांक आयतन आवेश की मात्रा को आयतन आवेश घनत्व कहते हैं।

(b) $\rho = \frac{q}{V} = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{आयतन}}$ अब V = 1 मी.^{3} तब ρ = q होता है।

(c) इसकी इकाई कूलॉम/मी.^{3} तथा विमा ATL^{-3} होती है।

(d) इसे गोलाकार आवेश वितरण के सूत्रों में प्रयुक्त किया जाता है।

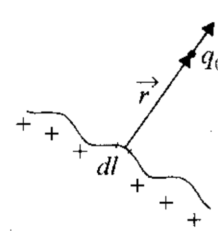
(e) गोलाकार चालक के लिए $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$ अर्थात् $\rho \propto \frac{1}{r^3}$

उदाहरण–यदि q आवेश किसी R त्रिज्या के अचालक गोले के भीतर एकसमान रूप से वितरित है तो गोले के आवेश का आयतन आवेश घनत्व

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

सतत् आवेश वितरण तीन प्रकार के होते हैं–

(i) रेखीय आवेश वितरण (एकविमीय) (Linear charge distribution)–माना कि आवेश वितरण रेखीय है (जैसे एक सरल रेखा या वृत्त की परिधि) तथा रेखीय आवेश घनत्व λ है। तब परीक्षण आवेश q_0 पर रेखीय आवेश वितरण के कारण परिणामी बल ज्ञात करने के लिए L लम्बाई की रेखा पर dl अल्पांश लेते हैं। इस अल्पांश पर आवेश की अल्प मात्रा



चित्र 2.5

$$dq = \lambda\, dl$$

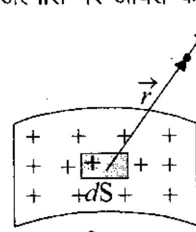
∴ परीक्षण आवेश q_0 पर परिणामी बल

$$d\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r} = \frac{q_0\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

∴ परीक्षण आवेश q_0 पर कुल बल

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\lambda}{r^2} dl\,\hat{r} \quad .....(1)$$

(ii) पृष्ठ आवेश वितरण (द्विविमीय) (Surface charge distribution)– माना कि किसी पृष्ठ पर आवेश सतत रूप से वितरित है (जैसे–एक परत) तथा पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। तब परीक्षण आवेश q_0 पर पृष्ठ आवेश वितरण के कारण परिणामी बल ज्ञात करने के लिए अल्पांश क्षेत्रफल dS लेते हैं। इस अल्पांश पर आवेश की अल्प मात्रा



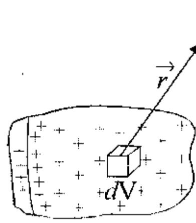
चित्र 2.6

$$dq = \sigma dS$$

∴ परीक्षण आवेश q_0 पर कुल बल

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma}{r^2} dS\hat{r} \quad .....(2)$$

(iii) आयतन आवेश वितरण (त्रिविमीय) (Volume charge distribution)–माना कि किसी आयतन में आवेश सतत रूप से वितरित है (जैसे–एक गोला या एक घन) तथा आयतन आवेश घनत्व ρ है। तब परीक्षण आवेश q_0 पर आयतन आवेश वितरण के कारण परिणामी बल ज्ञात करने के लिए अल्पांश आयतन dV लेते हैं। इस अल्पांश में आवेश की अल्प मात्रा



चित्र 2.7

$dq = \rho dV$

$\therefore$ परीक्षण आवेश q_0 पर कुल बल

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho}{r^2} dV\hat{r} \quad .....(3)$$

2.2.1 सतत आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र (Electric field due to continuous charge distribution)

1. रेखीय आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता–

$\because$ रेखीय आवेश वितरण के कारण परीक्षण आवेश q_0 पर लगने वाला बल

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\lambda}{r^2} dl\hat{r}$$

$\therefore$ रेखीय आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\lambda}{r^2} dl\hat{r}$$

यदि रेखीय आवेश घनत्व λ नियत है, तो

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{dl}{r^2}\hat{r} \quad ...(1)$$

2. पृष्ठ आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता–

$\because$ पृष्ठ आवेश वितरण के कारण परीक्षण आवेश q_0 पर लगने वाला बल

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_s \frac{\sigma}{r^2} ds\hat{r}$$

$\therefore$ पृष्ठ आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_s \frac{\sigma}{r^2} ds\hat{r}$$

यदि पृष्ठ आवेश घनत्व σ नियत है तो

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{ds}{r^2}\hat{r} \quad ...(2)$$

3. आयतन आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता–

$\because$ आयतन आवेश वितरण के कारण परीक्षण आवेश q_0 पर लगने वाला बल

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho}{r^2} dV\hat{r}$$

$\therefore$ आयतन आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता–

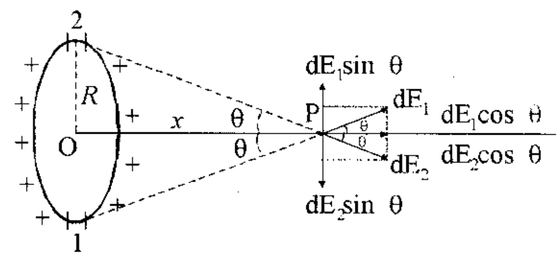
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho}{r^2} dV\hat{r}$$

यदि आयतन आवेश घनत्व ρ नियत है, तो

$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{dV}{r^2}\hat{r} \quad ...(3)$$

उदा.5. एक R त्रिज्या की पतली वलय पर q आवेश एक समान रूप से वितरित है। वलय की अक्ष पर केन्द्र से x दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए। प्राप्त परिणाम की प्रतिबंध x >> R के लिए विवेचना कीजिए। पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.4

हल–वलय पर रेखीय आवेश घनत्व $\lambda = q/2\pi R$ है। वलय पर दो लघु खण्डों 1 और 2, प्रत्येक लम्बाई dl का विचार कीजिये। तब, अक्ष पर केन्द्र O से x दूरी पर स्थित बिन्दु P पर, इन लघु खण्डों के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता होगी,



चित्र 2.8

$$dE_1 = dE_2 = \frac{k\lambda dl}{(R^2+x^2)}$$

इन विद्युत क्षेत्रों की दिशायें, चित्र में दर्शायी गई हैं। इन क्षेत्रों के ऊर्ध्वाधर घटक आपस में निरस्त हो जायेंगें, जबकि क्षैतिज घटक जुड़ जायेंगें। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि वलय के किसी भी एक लघुखण्ड के द्वारा P पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र का प्रभावी भाग, उसके क्षैतिज घटक के बराबर होगा, अर्थात्

$$dE = \frac{k\lambda dl}{(R^2+x^2)}\cos\theta = \frac{k\lambda dl\, x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

प्रत्येक वलय से विद्युत क्षेत्र, प्रत्येक खण्ड से उत्पन्न विद्युत क्षेत्रों के योग से प्राप्त होगा, अर्थात्

$$E = \frac{k\lambda\, x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\int dl = \frac{k\lambda\, x\, 2\pi R}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

या

$$E = \frac{Kqx}{4\pi\epsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}}$$

प्रतिबंध x > > R के लिए उपरोक्त समीकरण से–

$$E = \frac{Kqx}{x^3} = \frac{Kq}{x^2}$$

यह किसी बिन्दु आवेश q से x दूरी पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र का व्यंजक है। इस प्रकार अक्ष पर दूर स्थित बिन्दुओं के लिए वलय इस प्रकार व्यवहार करती है कि मानों कि वलय का सम्पूर्ण आवेश इसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है।

उदा.6. एक समान रूप से आवेशित एक वलय एवं एक गोले दोनों की त्रिज्या R है। दोनों पर आवेश q है। गोले का केन्द्र वलय की

अक्ष पर विद्यमान है तथा वलय के केन्द्र से $R\sqrt{3}$ दूरी पर है। गोले एवं वलय के मध्य विद्युत बल का मान ज्ञात कीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.5

हल–∵ वलय की अक्ष पर केन्द्र से x दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{kqx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

वलय के केन्द्र से $x = R\sqrt{3}$ दूरी पर वलय के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{KqR\sqrt{3}}{(R^2+3R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{KqR\sqrt{3}}{(4R^2)^{3/2}} = \frac{KqR\sqrt{3}}{(2R)^{2\times\frac{3}{2}}}$$

$$E = \frac{KqR\sqrt{3}}{8R^3} = \frac{Kq\sqrt{3}}{8R^2}$$

सममितता से एक समान आवेशित गोले पर आवेश q को इसके केन्द्र पर संकेन्द्रित माना जा सकता है।

∴ गोले एवं वलय के मध्य विद्युत बल

$$F = qE$$

$$\therefore \quad F = \frac{Kq^2\sqrt{3}}{8R^2} = \frac{1}{32\pi\epsilon_0}\frac{q^2\sqrt{3}}{R^2}$$

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. सदिश क्षेत्रफल की दिशा निर्धारण किस प्रकार की जाती है?
2. विद्युत फ्लक्स अदिश है या सदिश?
3. विद्युत फ्लक्स किन भौतिक राशियों पर निर्भर करता है?
4. यदि एक बेलनाकार पृष्ठ एक समान विद्युत क्षेत्र के भीतर स्थित हो तब सम्पूर्ण बन्द पृष्ठ से सम्बद्ध नैट फ्लक्स कितना होगा जबकि पृष्ठ के भीतर कोई आवेश नहीं है?
5. रेखीय आवेश घनत्व, पृष्ठ आवेश घनत्व तथा आयतन आवेश घनत्व के संकेत लिखिए।

उत्तरमाला

1. सदिश क्षेत्रफल की दिशा क्षेत्रफल अवयव पर खींचे गए अभिलम्ब (बाहर की ओर) द्वारा व्यक्त की जाती है।
2. विद्युत फ्लक्स एक अदिश राशि है।
3. (i) विद्युत क्षेत्र पर (ii) सदिश क्षेत्रफल पर
   (iii) विद्युत क्षेत्र तथा सदिश क्षेत्रफल के मध्य कोण पर।
4. शून्य
5. रेखीय आवेश घनत्व = λ
   पृष्ठ आवेश घनत्व = σ
   आयतन आवेश घनत्व = ρ

2.3 गाउस का नियम (Gauss Law)

कार्ल फ्रिडरिच गाउस ने किसी बन्द पृष्ठ से गुजरने वाले विद्युत फ्लक्स तथा उसमें उपस्थित आवेश के बीच सम्बन्ध बताने के लिए एक नियम का प्रतिपादन किया जिसे गाउस का नियम कहते है। इस नियम के अनुसार **निर्वात् (अथवा वायु) में उपस्थित किसी बन्द पृष्ठ से पारित विद्युत फ्लक्स का कुल मान उस बन्द पृष्ठ से घिरे आयतन में उपस्थित नैट आवेश (Σq) तथा $\frac{1}{\epsilon_0}$ के गुणनफल के बराबर होता है** अर्थात्

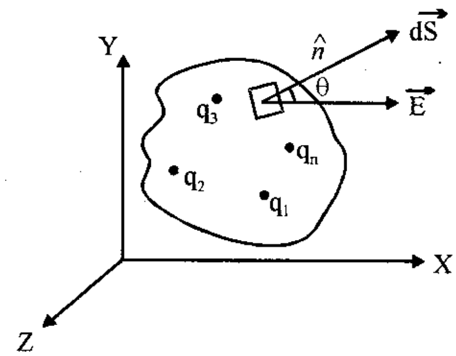
$$\phi = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} \quad .....(1)$$

यहाँ ϵ_0 निर्वात की विद्युतशीलता है।

यदि $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9 \frac{\text{न्यूटन}\times\text{मी.}^2}{\text{कूलॉम}^2}$

से $\frac{1}{\epsilon_0} = 4\pi K$ रखने पर

$$\therefore \quad \phi = 4\pi K\Sigma q \quad .....(2)$$



चित्र 2.9

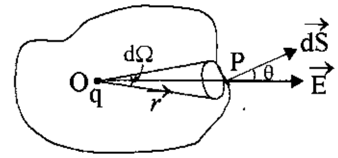
व्यापक रूप में गॉऊसीय प्रमेय को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है–

$$\therefore \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = 4\pi K\Sigma q \quad .....(3)$$

समीकरण (3) से स्पष्ट होता है कि (i) यदि किसी बन्द पृष्ठ के अन्दर आवेशों का योग शून्य हो (अर्थात् बन्द पृष्ठ के अन्दर आवेश न हो या धन एवं ऋण आवेश बराबर हों, उदाहरणार्थ द्विध्रुव अथवा आवेश पृष्ठ के बाहर हो) तो निर्गत फ्लक्स का मान शून्य होता है, (ii) जब बन्द पृष्ठ के अन्दर आवेशों का योग धनात्मक आवेश होता है तब पृष्ठ से फ्लक्स निर्गत होता है, (iii) जब बन्द पृष्ठ के भीतर आवेशों का योग ऋणात्मक होता है तब बन्द पृष्ठ में फ्लक्स प्रवेश करता है।

2.3.1 कूलॉम नियम से गाउस नियम की व्युत्पत्ति (Derivation of Gauss's law from coulomb's law)

माना किसी बन्द पृष्ठ के भीतर बिन्दु O पर q आवेश स्थित है। पृष्ठ पर एक अल्पांश क्षेत्रफल dS की कल्पना करते हैं जिसका मध्य बिंदु P है।



चित्र 2.10

यदि स्थिति सदिश $\vec{OP} = \vec{r}$ हो तब कूलॉम के नियम से P बिन्दु पर तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad .....(1)$$

अब क्षेत्रफल $d\vec{S}$ से निर्गत विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ का फ्लक्स

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S} \quad .....(2)$$

इसलिये सम्पूर्ण बन्द पृष्ठ से निर्गत फ्लक्स

$$\phi = \oint_S d\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

या $$\phi = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}.d\vec{S} \quad .....(3)$$

या $$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{dS.\cos\theta}{r^2}$$

जहाँ θ संदिश $\vec{E}$ तथा $d\vec{S}$ के बीच का कोण है।

घन कोण की परिभाषा के अनुसार क्षेत्रफल dS द्वारा बिन्दु O पर बनाया घन कोण $d\Omega$ का मान निम्नलिखित होता है–

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} \quad .....(5)$$

अतएव समीकरण (4) तथा (5) से

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S d\Omega \quad .....(6)$$

क्योंकि एक बन्द पृष्ठ द्वारा उसके अन्दर के किसी बिन्दु पर बनाया गया घन कोण 4π होता है। अतएव

$$\oint_S d\Omega = 4\pi \quad .....(7)$$

अतएव समी. (6) एवं (7) से

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad .....(8)$$

यदि बन्द पृष्ठ में अनेक आवेश $q_1, q_2, ...\, q_n$ हो तथा प्रत्येक कोण के कारण निर्गत फ्लक्स क्रमशः $\phi_1, \phi_2, ...\, \phi_n$ हो तो समी (8) से

$$\phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon_0}, \phi_2 = \frac{q_2}{\epsilon_0}, ..., \phi_n = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

अतएव बन्द पृष्ठ से कुल निर्गत फ्लक्स

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_n$$

$$= \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + ... + \frac{q_n}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + ... + q_n}{\epsilon_0}$$

या $$\phi = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0}$$

यही गाउस का नियम है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

C.G.S. पद्धति में $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$.

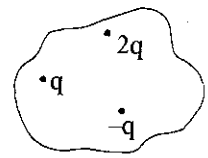
अतः यदि 1 कूलॉम आवेश किसी बन्द पृष्ठ के भीतर है तो इससे गुजरने वाला फ्लक्स $\phi = 4\pi$ है।

गाउस के नियम के विषय में महत्वपूर्ण तथ्य–

(i) (a) गाउस का नियम केवल उन्हीं क्षेत्रों के लिए लागू होता जो कूलॉम के व्युत्क्रम वर्ग के नियम का पालन करते है

(b) गाउस का नियम निर्वात् एवं माध्यम दोनों में लागू होता है

(ii) पृष्ठ से परिबद्ध कुल आवेशों का अर्थ पृष्ठ के अन्दर स्थि आवेशों का बीजगणितीय योग होता है। जैसे–



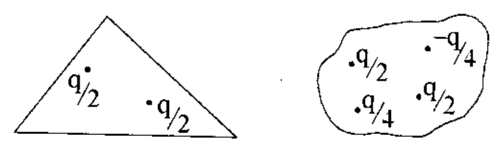
परिबद्ध आवेश $\Sigma q = q + 2q - q =$:

(iii) गाउस नियम के अनुप्रयोग के लिए उपयुक्त पृष्ठ का चुनाव किया जा है जिसे गाउसीय पृष्ठ कहते हैं। यह बन्द काल्पनिक तथा स्वैच्छि पृष्ठ होता है जिसकी आकृति गोलीय, बेलनाकार, घनाकार या कोई भ अन्य स्वैच्छिक आकृति हो सकती है।

(iv) गाउस के नियमानुसार बंद पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स का मा बंद पृष्ठ के आकार, क्षेत्रफल एवं आकृति पर निर्भर नहीं करत है।

$\phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0}$ $\quad \phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0}$ $\quad \phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0}$ $\quad \phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0}$

(v) बन्द पृष्ठ से निर्गत् विद्युत फ्लक्स का मान बन्द पृष्ठ के अन्दर आवेशों के वितरण पर निर्भर नहीं करता है।



$$\phi_{net} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{\frac{q}{2} + \frac{q}{2}}{\epsilon_0} \qquad \phi_{net} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{\frac{q}{2} + \frac{q}{4} - \frac{q}{4} + \frac{q}{2}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(vi) ϕ_{net} का मान बन्द पृष्ठ के अन्दर आवेश की स्थिति पर भी निर्भर नहीं करता है।

$$\phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(vii) फ्लक्स का मान आवेशों की मात्रा, प्रकृति तथा माध्यम पर निर्भर करता है।

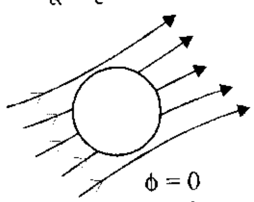
(viii) गाउस का नियम परिबद्ध आवेशों की गतिशीलता या स्थिर अवस्था पर निर्भर नहीं करता है। कूलॉम नियम केवल स्थिर आवेशों के लिए ही सही है। इस प्रकार गाउस नियम, कूलॉम नियम से अधिक व्यापक है।

(ix) गाउस का नियम केवल उन सदिश क्षेत्रों के लिए लागू होता है जो व्युत्क्रम वर्ग नियम का पालन करते हैं।

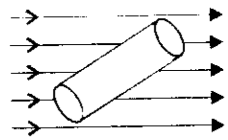
(x) किसी बन्द सममित वस्तु (closed symmetrical body) के केन्द्र पर आवेश q स्थित हो तो इसके आधे पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स का मान $\frac{1}{2}\phi = \frac{q}{2\epsilon_0}$ होता है।

(xi) यदि सममित वस्तु में n समरूप फलक (identical faces) हों और आवेश q इसके केन्द्र पर स्थित हो तो इसके प्रत्येक फलक से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स का मान $\frac{\phi}{n} = \frac{q}{\epsilon_0 n}$ होता है।

(xii) यदि किसी विद्युत क्षेत्र (समान अथवा असमान) में कोई बन्द पृष्ठ स्थित हो तथा पृष्ठ के भीतर कोई आवेश नहीं हो तो इस वस्तु के सम्पूर्ण पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स शून्य होता है।

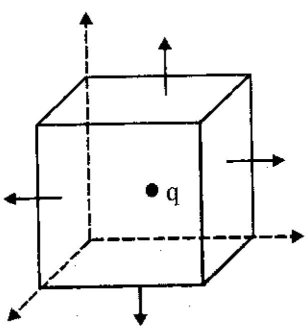


$\phi = 0$



$\phi = 0$

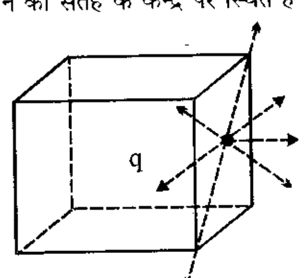
(xiii) यदि आवेश घन के केन्द्र पर स्थित है –



$$\phi_{कुल} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \phi_{सतह} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

$$\phi_{शीर्ष} = \frac{q}{8\epsilon_0}, \quad \phi_{कोर} = \frac{q}{12\epsilon_0}$$

(xiv) यदि आवेश घन की सतह के केन्द्र पर स्थित है–

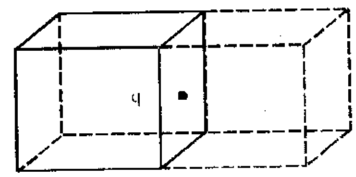


सर्वप्रथम हम आवेश को सममित सतह (गाउसीय पृष्ठ) द्वारा घेरते हैं (एक काल्पनिक घन)

$$\phi_{कुल} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

$$\phi_{घन} = \frac{q}{2\epsilon_0} \text{ (केवल 5 सतहों से)}$$

$$\phi_{सतह} = \frac{1}{5}\left(\frac{q}{2\epsilon_0}\right) = \frac{q}{10\epsilon_0}$$



उदा.7. 0.03 m. त्रिज्या के एक गोलीय पृष्ठ के केन्द्र पर 7.6 μC आवेश स्थित है। गोलीय पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिए। पृष्ठ की त्रिज्या दोगुनी करने पर फ्लक्स के मान में क्या परिवर्तन होगा? **पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.6**

हल–

$$\text{विद्युत फ्लक्स } \phi = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{7.6 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}}$$
$$= 8.6 \times 10^5 \text{ वोल्ट} \times \text{मी.}$$

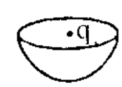
गोलीय पृष्ठ की त्रिज्या दोगुनी करने पर परिबद्ध आवेश की मात्रा पूर्ववत् ही रहती है अत: निर्गत फ्लक्स अपरिवर्तित रहेगा अर्थात् 8.6×10^5 वोल्ट × मी. ही रहेगा।

उदा.8. किसी बन्द सतह में प्रवेशित फ्लक्स 2000 वोल्ट मी. है तथा उसी सतह से निर्गत फ्लक्स 8×10^3 वोल्ट मी. है सतह के अन्द आवेश की गणना करो।

उत्तर– नेट फ्लक्स
$$\phi_{net} = \phi_{out} - \phi_{in}$$
$$= 8000 - 2000$$
$$= 6000 \text{ वोल्ट मी.}$$

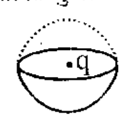
$$\text{गाउस के नियम से } \phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$
$$q = \phi\epsilon_0$$
$$= 6000\,(8.85 \times 10^{-12})$$
$$q = 0.53 \text{ माइक्रोकूलॉम}$$

उदा.9. चित्रानुसार एक बिन्दु आवेश q, एक अर्द्धगोलीय पृष्ठ वे केन्द्र पर स्थित है। पृष्ठ से पारित कुल विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिए **पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.7**



चित्र 2.11

हल–गाउस के नियम के अनुसार विद्युत फ्लक्स, बंद पृष्ठ द्वा परिबद्ध आवेश पर निर्भर करता है। अत: सममिति से एक पूर्ण गोलाकार पृ की कल्पना करने पर पृष्ठ से पारित कुल विद्युत फ्लक्स



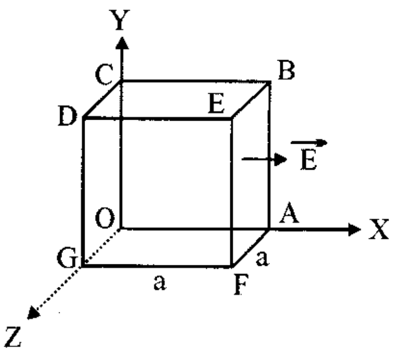
चित्र 2.12

$$\phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

∴ दिए गए अर्द्धगोलाकार पृष्ठ से पारित कुल विद्युत फ्लक्स

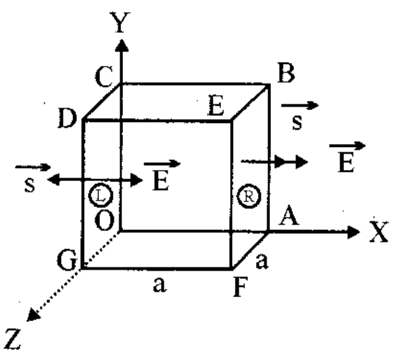
$$\phi = \frac{\phi_{net}}{2} = \frac{1}{2}\frac{q}{\epsilon_0}$$

उदा.10 चित्रानुसार एक घन विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = E_0 x\hat{i}$ में स्थित है। fdl· eÂÿØ¤ÖÂ aa = 1 cm है तथा नियतांक $E_0 = 2.5 \times 10^5$ NC^{-1} m^{-1} है। घन से पारित कुल विद्युत फ्लक्स तथा घन द्वारा परिबद्ध आवेश का मान ज्ञात कीजिए। **पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.8**



चित्र 2.13

हल– ∵ दिये गये विद्युत क्षेत्र में विद्युत क्षेत्र का केवल x घटक विद्यमान है। (E_y व $E_z = 0$) अतः x-अक्ष के लम्बवत् फलकों (जिनके क्षेत्रफल की दिशाएँ y या z दिशा में हो) के लिए $\vec{E}.\vec{S} = 0$ होगा।



चित्र 2.14

अतः विद्युत फ्लक्स केवल बाये व दांये फलकों से सम्बद्ध होगा।

बायें फलक के लिए– $x = 0$ तथा $\vec{S} = a^2(-\hat{i})$

∴ बायें फलक से सम्बद्ध फ्लक्स

$$\phi_L = \vec{E}.\vec{S}$$
$$= E_0 x\hat{i}.a^2(-\hat{i})$$
$$= -E_0 x a^2 = 0$$

दायें फलक के लिए– $x = a$ तथा $\vec{S} = a^2\hat{i}$

∴ दायें फलक से सम्बद्ध फ्लक्स–

$$\phi_R = \vec{E}.\vec{S}$$
$$= E_0 x\hat{i}.a^2\hat{i}$$
$$= E_0 x a^2 = E_0 a a^2 = E_0 a^3$$

अतः घन से पारित कुल विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \phi_R + \phi_L = E_0 a^3$$
$$\phi = 2.5 \times 10^5 \times (10^{-2})^3$$
$$= 0.25 \frac{\text{न्यूटन}}{\text{कूलॉम}} \times \text{मी}^2$$

गाउस के नियम से घन द्वारा परिबद्ध आवेश–

$$q = \epsilon_0 \phi$$
$$= 8.85 \times 10^{-12} \times 0.25$$
$$= 2.21 \times 10^{-12}\ C$$

उदा.11. +4μC, 6μC, 3μC एवं –9μC के चार आवेश किसी बन्द पृष्ठ के भीतर स्थित है तथा +8μC का आवेश पृष्ठ के बाहर है। i "B l sfuxZ dq ¶ly D Kkr dj ks ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ c^2/Nm^2$)

हल– +8μC का आवेश पृष्ठ के बाहर है अतः पृष्ठ के भीतर आवेशों का कुल योग

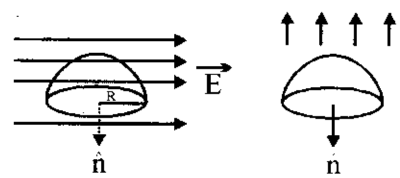
$$\Sigma q = 4\mu C + 6\mu C + 3\mu C - 9\mu C$$
$$= 4\mu C = 4 \times 10^{-6} \text{ कूलॉम}$$

∴ कुल निर्गत फ्लक्स

$$\phi = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}}$$
$$= 4.524 \times 10^5 \text{ वोल्ट} \times \text{मी.}$$

उदा.12. एक अर्द्धगोलाकार बिन्दु, किसी एक समान विद्युत क्षेत्र E में रखा गया है। इसके वक्र पृष्ठ से सम्बद्ध फ्लक्स कितना होगा यदि विद्युत क्षेत्र है– (अ) इसके आधार के समान्तर (चित्र अ) तथा (ब) इसके आधार के लम्बवत् (चित्र ब)

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.9



चित्र (अ) चित्र (ब)

चित्र 2.15

हल– माना कि वक्र पृष्ठ तथा आकार से सम्बद्ध फ्लक्स क्रमशः ϕ_C तथा ϕ_b है।

चित्र (अ) से $\phi_b = \vec{E}.\vec{S}$

$$= ES\cos 90^\circ = 0 \quad ....(1)$$

∴ प्रश्नानुसार अर्द्धगोलाकार पृष्ठ एक समान विद्युत क्षेत्र में स्थित है तथा पृष्ठ के भीतर कोई आवेश परिबद्ध नहीं है। अब यदि अर्द्धगोलाकार पिण्ड को एक बंद पिण्ड की तरह माना जाये जो वक्र पृष्ठ तथा आधार से मिलकर बना है, तब अर्द्धगोलाकार पिण्ड से सम्बद्ध कुल फ्लक्स

$$\phi = \phi_c + \phi_b = 0 \quad ....(2)$$

समी. (1) की सहायता से–

$$\phi_c = 0$$

अर्थात् चित्र (अ) के लिए वक्र पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स शून्य होगा।

चित्र (ब) से $\phi_b = \vec{E}.\vec{S}$

$$= ES\cos 180^\circ$$
$$= -E \times \pi R^2$$

समी. (2) से $\phi_c - E \times \pi R^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad \phi_c = E \times \pi R^2$$

अर्थात् चित्र (ब) के लिए वक्र पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स

$$\phi_c = E \times \pi R^2 \text{ होगा।}$$

2.4 गाउस नियम के अनुप्रयोग (Applications of Gauss's law)

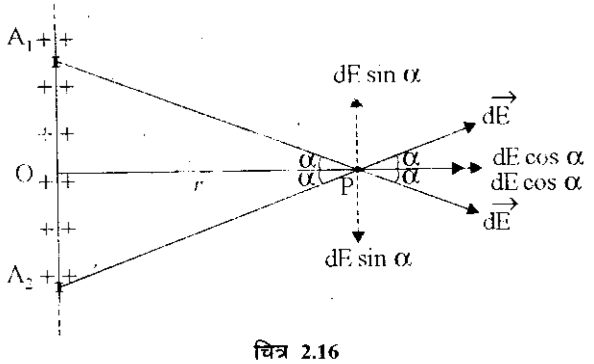
आवेश के सममित वितरण (Symmetrical distribution of charge) की स्थिति में उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की गणना के लिये गाउस का नियम प्रयुक्त किया जाता है। इसके लिए एक ऐसा बन्द पृष्ठ चुनते हैं जिसके विभिन्न फलकों पर $\vec{E}$ या तो फलक के समान्तर हो या लम्बवत् हो। इस बन्द पृष्ठ को गॉउसीय पृष्ठ (Gaussian surface) कहते हैं। यह किसी भी आकृति जैसे गोलीय, बेलनाकार या कोई अन्य आकृति का हो सकता है।

विद्युत फ्लक्स की परिभाषा के अनुसार इस बंद पृष्ठ के प्रत्येक फलक से विद्युत फ्लक्स $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_s EdS\cos\theta$ के मान की गणना कर लेते हैं। जिन फलकों पर $\vec{E}$ फलक के समान्तर होता है वहाँ $\theta = 90°$ हो जाने के कारण उन फलकों से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स शून्य हो जाता है तथा जिन फलकों पर $\vec{E}$, फलक के लम्बवत् होता है वहाँ $\theta = 0°$ अथवा π हो जाने के कारण फ्लक्स का मान $\pm$(EX फलक का क्षेत्रफल) हो जाता है। फिर सभी फलकों से सम्बद्ध फ्लक्सों के मानों का योग करके उस बन्द पृष्ठ से नैट विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कर लेते हैं जो गॉउस के नियम से $\frac{\Sigma q}{\epsilon_0}$ के मान के बराबर होता है। नैट विद्युत फ्लक्स के दोनों मानों को बराबर करने पर $|\vec{E}|$ का मान ज्ञात कर लेते हैं।

2.4.1 गाउस के नियम से अनन्त रेखीय आवेश (आवेशित तार) के कारण विद्युत क्षेत्र की गणना (Intensity of Electric Field due to Infinite Line Charge)

(i) अनन्त रेखीय आवेश के कारण क्षेत्र की दिशा–चित्र में दर्शाये जैसे मान AB एक अनन्त रेखीय आवेश का एक भाग है जिसकी इकाई लम्बाई पर आवेश (रेखीय आवेश घनत्व) का मान λ है। इस रेखीय आवेश के कारण किसी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की दिशा ज्ञात करनी है। माना इस बिन्दु की तार से लम्बवत् दूरी $OP = r$ है।

बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की दिशा ज्ञात करने के लिए P के सम्मुख बिन्दु O को निर्देश बिन्दु मानकर सममिततः परत के दो समान क्षेत्रफल अल्पांश A_1 व A_2 लेते हैं। इन अल्पांशों के क्षेत्रफल समान होने के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिमाण बिन्दु P पर समान होगा। परन्तु दिशा क्रमशः A_1P व A_2P की दिशा में होगी। अब यदि विद्युत क्षेत्र $d\vec{E}$ को घटकों में वियोजित करें तो $dE\cos\alpha$ घटक एक ही दिशा में होने से जुड़ जायेंगे। परतु $dE\sin\alpha$ परस्पर विपरीत दिशा में होने के कारण एक दूसरे को निरस्त कर देंगे और बिन्दु P पर परिणामी विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा पृष्ठ के लम्बवत् प्राप्त होगी।



चित्र 2.16

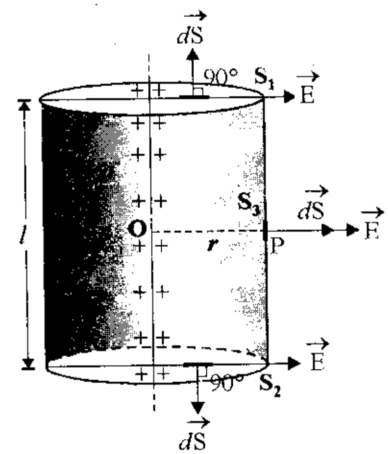
इस प्रकार अन्य अल्पांशों के कारण भी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की दिशा परत के लम्बवत् प्राप्त होती है।

(ii) अनन्त रेखीय आवेश से r दूरी पर स्थित P बिन्दु प[र] विद्युत क्षेत्र–रेखीय आवेश को अक्ष मानकर चित्र में दर्शाये अनुसार त्रिज्या तथा l लम्बाई के एक बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ की कल्पना कर[ते] हैं। स्पष्ट है कि इस गाउसीय पृष्ठ में आवेश का मान λl होगा तथा बिन्[दु] P इसके वक्र पर होगा। इस गाउसीय पृष्ठ को तीन भागों में विभाजि[त] किया जा सकता है। (i) ऊपरी वृत्ताकार पृष्ठ S_1 (ii) निचला वृत्ताकार पृ[ष्ठ] S_2 (iii) बेलनाकार पृष्ठ S_3

गाउस के नियम से तीनों पृष्ठों से कुल निर्गत फ्लक्स

$$\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} \quad .....(1)$$

$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad .....(2)$$



चित्र 2.17

वृत्ताकार पृष्ठ S_1 तथा S_2 पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा $d\vec{S}$ की दि[शा] परस्पर लम्बवत् है। जबकि बेलनाकार पृष्ठ S_3 पर $\vec{E}$ तथा $d\vec{S}$ की दि[शा] समान होती है। इसके साथ ही आवेशित तार से बेलनाकार पृष्ठ सम[ान] दूरी पर होने के कारण इसके सभी बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र का मान समान होता है। अतः समी. (2) से

$$\int_{S_1} EdS\cos 90° + \int_{S_2} EdS\cos 90° + \int_{S_3} EdS\cos 0° = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

या $$E\int_{S_1} dS = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad .....$$

अब बेलनाकार पृष्ठ के लिये

$$\int dS = 2\pi r l \quad .....$$

$$\therefore \quad E \times 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

या $$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda}{r} = \frac{2K\lambda}{r} \quad .....$$

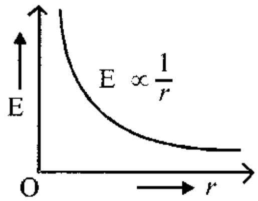
या $$E \propto \frac{1}{r} \quad ....$$

अर्थात् किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र उसकी तार से दूरी के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

विद्युत क्षेत्र की दिशा तार के लम्बवत् त्रिज्य होती है।

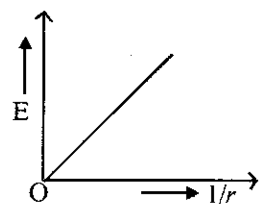
अनन्त रेखीय आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र का आलेख–

(i) अनन्त रेखीय आवेश के कारण उससे r दूरी के साथ निम्न चित्रानुसार प्राप्त होता है–



चित्र 2.18

(ii) अनन्त रेखीय आवेश के कारण उससे $1/r$ दूरी के साथ विद्युत क्षेत्र का परिवर्तन निम्न चित्रानुसार प्राप्त होता है–



चित्र 2.19

अनन्त रेखीय आवेश के कारण उससे दूरी r के साथ विद्युत क्षेत्र में परिवर्तन चित्र अनुसार होता है तथा $\frac{1}{r}$ के साथ विद्युत क्षेत्र का परिवर्तन चित्र के अनुसार होता है।

उदा.13. एक अपरिमित विस्तार के लिए सीधे तार पर रेखीय आवेश घनत्व $2\mu C/m$ है। इस रेखीय आवेश से वायु में 20 cm दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान ज्ञात कीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.10

हल– अनन्त रेखीय आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{2K\lambda}{r}$$

∵ प्रश्नानुसार $\lambda = 2\frac{\mu C}{m} = 2\times10^{-6}\frac{C}{m}$,

$r = 0.20$ m.

$$\therefore \quad E = \frac{2\times9\times10^{9}\times2\times10^{-6}}{0.20}$$

$$= 1.8\times10^{5}\ N/C$$

उदा.14. λ_1 रेखीय आवेश घनत्व वाले एक अनन्त विस्तार के एक समान आवेशित तार से d पर उसके समान्तर एक अन्य λ_2 रेखीय आवेश घनत्व वाला आवेशित तार रखा गया है। दूसरे तार पर प्रति एकांक लम्बाई बल ज्ञात कीजिये।

हल– रेखीय आवेश घनत्व λ_1 वाले तार के कारण d दूरी पर विद्युत क्षेत्र–

$\vec{E} = K\frac{2\lambda_1}{d}\hat{n}$, तार पर लम्ब की दिशा में एकांक सदिश $\hat{n}$ है

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता बिन्दु पर स्थित प्रति एकांक धन आवेश पर बल का मान होती है। दूसरे तार के एक अल्पांश पर विचार करते हैं जिसकी लम्बाई δl है। अल्पांश पर आवेश $\delta q = \lambda_2\delta l$, अत अल्पांश पर बल–

$$\vec{F} = \vec{E}(\delta q) = K\frac{2\lambda_1}{d}(\lambda_2\delta l)\hat{n}$$

∴ दूसरे तार पर प्रति एकांक लम्बाई बल

$$= \frac{\vec{F}}{\delta l} = K\frac{2\lambda_1\lambda_2}{d}\hat{n}$$

यह बल प्रतिकर्षण बल होगा।

उदा.15. एक इलेक्ट्रॉन 0.1 m त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर अनन्त रेखीय आवेश के चारों ओर चक्कर लगा रहा है। यदि रेखीय आवेश घनत्व $10^{-6}\ Cm^{-1}$ है, तो इलेक्ट्रॉन के वेग का मान ज्ञात कीजिए। [दिया गया है – $m_e = 9.0\times10^{-31}$ kg, $e = 1.6\times10^{-19}$ C]

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.11

हल– प्रश्नानुसार– $E = K\frac{2\lambda}{r}$

$\lambda = 10^{-6}$ कूलॉम/मी., $r = 0.1$ मी.

$K = 9\times10^{9}$ मात्रक

$m = 9.1\times10^{-31}$ किग्रा.

$e = 1.6\times10^{-19}$ कूलॉम

$q = e$

$$F = qE = q\cdot\frac{K2\lambda}{r}$$

इलेक्ट्रॉन की वर्तुल गति में यह बल अभिकेन्द्रीय बल का कार्य करता है।

$$\frac{mv^2}{r} = F$$

$$\frac{mv^2}{r} = q\cdot\frac{K2\lambda}{r}$$

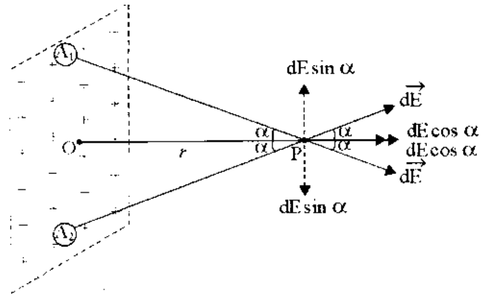
$$v = \sqrt{\frac{2K\lambda q}{m}} = \sqrt{\frac{2\times9\times10^{9}\times10^{-6}\times1.6\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}}$$

$= 5.625\times10^{7}$ मी./से.

2.4.2 गाउस के नियम से अपरिमित, अचालक समरूप आवेशित परत के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of electric field due to uniformly charged non-counducting infinite sheet)

(i) आवेशित परत के कारण विद्युत क्षेत्र की दिशा–

माना एक अनन्त विस्तार की आवेशित अचालक परत पर प्रति एकांक क्षेत्रफल (पृष्ठ आवेश घनत्व) आवेश σ है। इस परत के सम्मुख लम्ब दूरी r पर एक बिन्दु P है जिस पर आवेशित परत के कारण विद्युत क्षेत्र की दिशा ज्ञात करनी है।

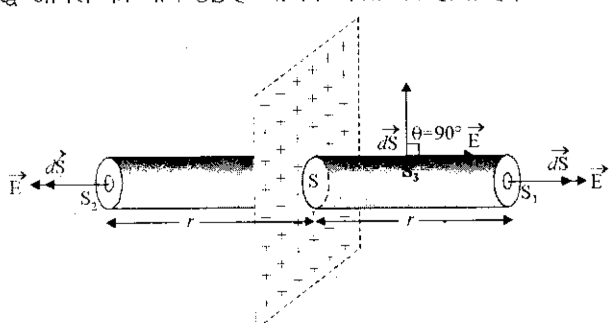


चित्र 2.20

बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की दिशा ज्ञात करने के लिए P के सम्मुख बिन्दु O को निर्देश बिन्दु मानकर सममिततः परत के दो समान क्षेत्रफल अल्पांश A_1 व A_2 लेते है। इन अल्पांशों के क्षेत्रफल समान होने के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिमाण बिन्दु P पर समान होगा। परन्तु दिशा क्रमशः A_1P व A_2P की दिशा में होगी। अब यदि विद्युत क्षेत्र $d\vec{E}$ को घटकों में वियोजित करें तो $dE\cos\alpha$ घटक एक ही दिशा में होने से जुड़ जायेंगे। परतु $dE\sin\alpha$ परस्पर विपरीत दिशा में होने के कारण एक दूसरे को निरस्त कर देंगे और बिन्दु P पर परिणामी विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा पृष्ठ के लम्बवत् प्राप्त होगी। इस प्रकार अन्य अल्पांशों के कारण भी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की दिशा परत के लम्बवत् प्राप्त होती है।

(ii) आवेशित अचालक परत से *r* दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र का मान–

चित्र में दर्शाये अनुसार परत के लम्बवत् $2r$ लम्बाई एवं S काट क्षेत्र के एक बेलनाकार पृष्ठ की कल्पना करते हैं जिसके वृत्ताकार तल पर बिन्दु P है। इस बेलनाकार पृष्ठ को गाउसीय पृष्ठ कहते हैं। इस पृष्ठ से परिबद्ध आवेश का मान σS है जो कि परत पर होता है।



चित्र 2.21

इस गाउसीय पृष्ठ को तीन भागों में विभाजित किया जा सकता है– (i) दांयी ओर का वृत्ताकार पृष्ठ S_1 (ii) बायीं ओर का वृत्ताकार पृष्ठ S_2 (iii) बेलनाकार पृष्ठ S_3

अब गाउस के नियम से तीनों पृष्ठों से कुल निर्गत फलक्स

$$\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0}$$

$$\int_{S_1} \vec{E}.d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}.d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad .....(1)$$

चित्र से स्पष्ट है कि दोनों वृत्ताकार पृष्ठों S_1 तथा S_2 पर सदिश $\vec{E}$ तथा सदिश $d\vec{S}$ की दिशा समान होगी एवं दोनों पृष्ठों पर सममिति के कारण विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ का परिमाण भी समान होगा। परन्तु बेलनाकार पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा $d\vec{S}$ की दिशा लम्बवत् होगी। अतएव समी. (1) से

$$\int_{S_1} EdS\cos 0° + \int_{S_2} EdS\cos 0° + \int_{S_3} EdS\cos 90° = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

या $$E\int_{S_1} dS + E\int_{S_2} dS + 0 = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad .....(2)$$

या $$ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad ...(3)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad ...(4)$$

सदिश संकेत में व्यक्त करने पर

या $$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \quad ...(5)$$

जहाँ $\hat{n}$ परत के लम्बवत् एकांक सदिश है।

समी. (4) से स्पष्ट होता है कि समरूप आवेशित अचालक परत के कारण विद्युत क्षेत्र परत से बिन्दु की दूरी पर निर्भर नहीं करता है अर्थात् सभी बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र समान रहता है।

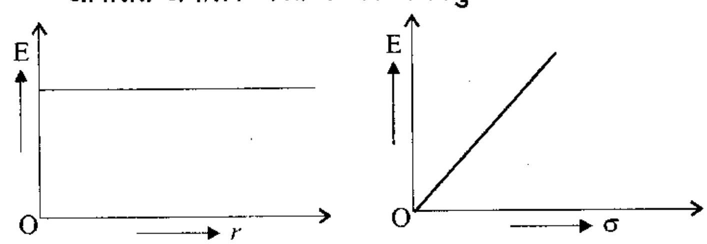
$$E \propto r^0$$

निर्वात (अथवा वायु) के अतिरिक्त अन्य माध्यम में

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\text{न्यूटन}}{\text{कूलॉम}}$$ होता है।

विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ की दिशा सदैव परत के लम्बवत् होती है तथा धन आवेशित परत से दूर (away from a positively charged plate) अथवा ऋण आवेशित परत की ओर (towards a negatively charged plate) होती है।

आवेशित अचालक परत के कारण विद्युत क्षेत्र का आलेख–



चित्र 2.22

(नोट–सीमित आकार के परत के लिए भी निकट बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र का मान समीकरण (4) द्वारा ही होता है।

उदा.16. एक अनन्त विस्तार की अचालक परत के 1 cm² क्षेत्रफल में 17.70 μC आवेश है। परत के निकट वायु में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए। **पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.12**

हल– दिया गया है– $S = 10^{-4}\ m^2$

$q = 17.70 \times 10^{-6}\ C$

$\because$ पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{17.70 \times 10^{-6}}{10^{-4}}$

$\sigma = 17.70 \times 10^{-2}\ C/m^2$

$\because$ अनन्त विस्तार की अचालक परत के निकट विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \qquad E = \frac{17.70\times10^{-2}}{2\times8.85\times10^{-12}} = 10^{10}\ N/C$$

उदा.17. धनावेशित अनन्त विस्तार की एक परत पर प्रति वर्ग ऐंगस्ट्रॉम क्षेत्रफल पर एक इलेक्ट्रॉन के तुल्य आवेश घनत्व विद्यमान हैं। परत के पृष्ठ के समीप विद्युत क्षेत्र का परिकलन कीजिये। इस क्षेत्र में इलेक्ट्रॉन का त्वरण क्या होगा ?

हल– अनन्त विस्तार की आवेशित परत के कारण उसके निकट विद्युत क्षेत्र $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} = 2\pi K\sigma$

जहाँ σ पृष्ठ आवेश घनत्व है।

प्रश्नानुसार $\sigma = \frac{1.6\times10^{-19}}{10^{-10}\times10^{-10}}$ कूलॉम/मी.^{2}

$= 16$ कूलॉम/मी.^{2}

$\therefore \quad E = 2\pi\times9\times10^9\times16$

$= 9.04\times10^{11}$ न्यूटन/कूलॉम

(परत के लम्बवत् दिशा में)

इलेक्ट्रॉन पर बल

$\vec{F} = (-e)\vec{E}$

$= 1.6\times10^{-19}\times9.04\times10^{11}\ (-\hat{n})$ न्यूटन

इलेक्ट्रॉन का त्वरण $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

$= \frac{1.6\times10^{-19}\times9.04\times10^{11}}{9.1\times10^{-31}}(-\hat{n})$

$= 1.59\times10^{23}$ मी./से.^{2} (परत की ओर लम्ब दिशा में)

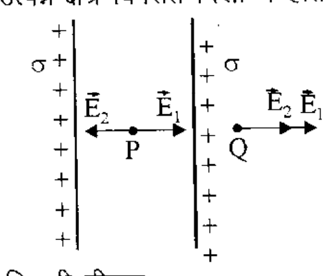
उदा.18. अनन्त विस्तार की दो समान मात्रा में आवेशित अचालक पट्टिकायें एक-दूसरे के सामने स्थित हैं। इन पृष्ठों के बीच में तथा बाहर किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिये।

हल– समावेशित अचालक पृष्ठ के निकट किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

जहाँ σ परत का पृष्ठ आवेश घनत्व है।

(i) जब दोनों पट्टिकायें समान आवेशित हों–इस स्थिति में पट्टिकाओं के बीच किसी बिन्दु P पर दोनों पट्टिकाओं द्वारा उत्पन्न क्षेत्र विपरीत दिशा में होते हैं।



चित्र 2.23

$\therefore$ परिणामी तीव्रता

$$E_P = E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0$$

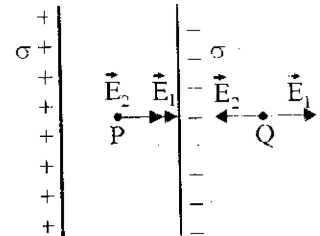
पट्टिकाओं के बाहर किसी बिन्दु Q पर दोनों पट्टिकाओं द्वारा उत्पन्न क्षेत्र एक ही दिशा में होते हैं।

$\therefore$ परिणामी तीव्रता $E_Q = E_1 + E_2$

$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

$$E_Q = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(ii) जब दोनों पट्टिकाओं पर समान मात्रा में विपरीत प्रकृति आवेश हो–इस स्थिति मे पट्टिकाओं के मध्य किसी बिन्दु पर क्षेत्र एक ही दिशा में होते हैं।



चित्र 2.24

अतः परिणामी तीव्रता

$E_P = E_1 + E_2$

$E_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

इस स्थिति में पट्टिकाओं के बाहर किसी बिन्दु Q पर उत्पन्न विपरीत दिशा में होते हैं।

$\therefore$ परिणामी तीव्रता

$E_Q = E_1 - E_2$

$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

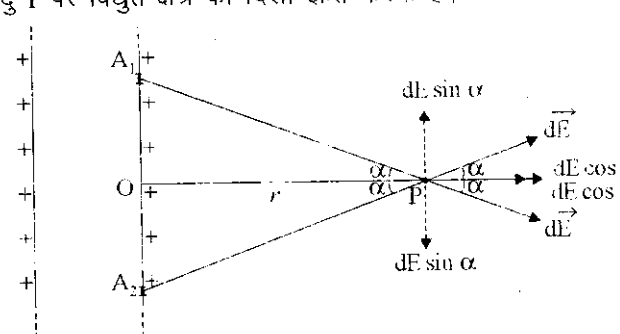
अर्थात् $E_Q = 0$

महत्वपूर्ण तथ्य

इस प्रकार बराबर व विपरीत पृष्ठ आवेश घनत्व वाली दो अनन्त विस की पट्टिकाओं के मध्य में विद्युत क्षेत्र अशून्य होता है तथा उनके ब की दूरी पर निर्भर नहीं करता है अर्थात् पट्टिकाओं के मध्य क्षेत्र में वि क्षेत्र समरूप है। ध्यान रखें कि यह परिणाम सीमित आकार की पट्टिका के लिये सत्य है यदि उनके बीच की दूरी उनके आकार की तुलना में ब कम है अर्थात् समान्तर प्लेट संधारित्र मे।

2.4.3. गाउस के नियम से अपरिमित, चालक समरूप आवेशित प (पट्टिका) के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of elect field due to uniformly charged conducting infinite she

(i) आवेशित चालक परत के कारण क्षेत्र की दिशा–माना अ विस्तार की एक चालक आवेशित परत है जिसकी बाह्य सतह पर आवेश घनत्व σ है इस परत के कारण इससे r लम्बवत् दूरी पर बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की दिशा ज्ञात करनी है।

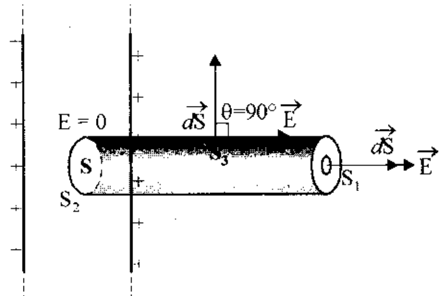


चित्र 2.25

बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की दिशा ज्ञात करने के लिए P के स बिन्दु O को निर्देश बिन्दु मानकर सममिततः परत के दो समान क्षे अल्पांश A_1 व A_2 लेते हैं। इन अल्पांशों के क्षेत्रफल समान होने के

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिमाण बिन्दु P पर समान होगा। परन्तु दिशा क्रमशः A_1P व A_2P की दिशा में होगी। अब यदि विद्युत क्षेत्र $d\vec{E}$ को घटकों में वियोजित करें तो $dE\cos\alpha$ घटक एक ही दिशा में होने से जुड़ जायेंगे। परतु $dE\sin\alpha$ परस्पर विपरीत दिशा में होने के कारण एक दूसरे को निरस्त कर देंगे और बिन्दु P पर परिणामी विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा पृष्ठ के लम्बवत् प्राप्त होगी। इस प्रकार अन्य अल्पांशों के कारण भी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की दिशा परत के लम्बवत् प्राप्त होती है।

(ii) आवेशित चालक परत से r दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र का मान–चित्र में एक आवेशित अपरिमित चालक परत दर्शाई गई है। जब किसी चालक प्लेट को कोई आवेश दिया जाता है तो यह आवेश चालक के सम्पूर्ण (दोनों ओर के) बाहरी पृष्ठ पर वितरित हो जाता है। यदि समतल प्लेट समान मोटाई तथा अनन्त आकार की है तो आवेश का पृष्ठ घनत्व σ, सम्पूर्ण पृष्ठ पर एकसमान होने के कारण, प्लेट के दोनों पृष्ठों पर एक–समान होता है। माना परत पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। इस परत के कारण उसकी सतह से लम्बवत् दूरी 'r' पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना है।



चित्र 2.26

अब चित्र में दर्शाये अनुसार परत के लम्बवत् S काट क्षेत्र के एक बेलनाकार पृष्ठ की कल्पना करते हैं, जिसके वृत्ताकार तल पर बिन्दु P स्थित है। इस बेलानाकार पृष्ठ को गाउसीय तल कहते हैं। बेलन के एक वृत्ताकार पृष्ठ S_1 पर बिन्दु P स्थित है। बेलन का दूसरा वृत्ताकार पृष्ठ S_2 चालक परत के अन्दर है तथा इसके बेलनाकार पृष्ठ S_3 का कुछ भाग चालक परत के अन्दर एवं कुछ बाहर है। चित्र से स्पष्ट है कि इस गाउसीय पृष्ठ से सम्बद्ध आवेश का मान σS होता है। अब गाउस नियम के अनुसार

$$\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0}$$

$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad .....(1)$$

उपरोक्त समीकरण में (i) बेलनाकार पृष्ठ S_3 पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा $d\vec{S}$ की दिशा परस्पर लम्बवत् होती है। (ii) वृत्ताकार पृष्ठ S_2 चालक परत के अन्दर है तथा चालक के अन्दर विद्युत क्षेत्र E का मान शून्य होता है। (iii) वृत्ताकार पृष्ठ S_1 पर पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा $d\vec{S}$ की दिशा समान होती है। अतः समी. (1) से

$$\int_{S_1} EdS + \int_{S_2} 0\cdot dS + \int_{S_3} E\cdot dS\cos 90 = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad .....(2)$$

या $$E\int_{S_1} dS + 0 + 0 = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

या $$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad .....(3)$$

या $$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad .....(4)$$

सदिश संकेत में व्यक्त करने पर

या $$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \quad .....(5$$

जहाँ $\hat{n}$ परत के लम्बवत् एकांक सदिश है।

समी. (4) से हम पाते है कि चालक परत के कारण किसी बिन्[दु] पर विद्युत क्षेत्र बिन्दु की परत से दूरी पर निर्भर नहीं करता। अर्थात् सभ[ी] बिन्दुओं पर क्षेत्र का मान समान होता है।

$$E \propto r^{\circ}$$

निर्वात (अथवा वायु) के अतिरिक्त किसी अन्य माध्यम में

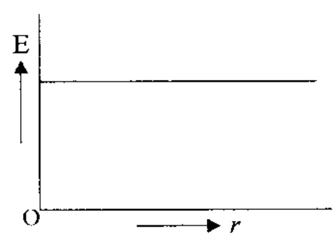
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}$$ होता है।

विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ की दिशा सदैव परत के लम्बवत् होती है तथा ध[न] आवेशित परत से दूर अथवा ऋण आवेशित परत की ओर होती है।

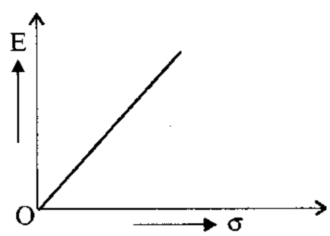
(**नोट**–यदि परत अपरिमित न हो तो परत के निकट के बिन्दुओ पर विद्युत क्षेत्र का मान समी. (4) द्वारा ही व्यक्त होता है।

विशेष–चालक के पृष्ठ पर पृष्ठ आवेश घनत्व (σ). पृष्ठ व[की] वक्रता त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती होता है। अतः पृष्ठ के नुकीले सि[रों] (वक्रता त्रिज्या कम) पर σ व का मान बहुत अधिक होने के कारण, पृ[ष्ठ] के इन नुकीले सिरों के पास की वायु में बहुत तीव्र विद्युत क्षेत्र उत्पन्न [हो] जाता है जिससे वायु का आयनीकरण हो जाने पर वायु में धन तथा ऋ[ण] आयन उत्पन्न हो जाते हैं। अतः विपरीत आवेश वाले आयन तीव्र विद्यु[त] क्षेत्र द्वारा त्वरित होकर आवेशित चालक के नुकीले भाग की ओर दौड़[ते] हैं। जबकि समान प्रकृति के आवेश वाले आयन तीव्र विद्युत क्षेत्र द्वा[रा] त्वरित होकर आवेशित चालक के नुकीले भाग से दूर दौड़ते हैं तथा मा[र्ग] में आने वाले वायु के अन्य अणुओं से टकराकर और अधिक आयन उत्प[न्न] करते हैं। इस प्रकार आवेशित चालक के नुकीले भाग के निकट की वा[यु] चालकीय (conducting) हो जाती है तथा चालक का आवेश अति शी[घ्र] विसर्जित हो जाता है।

विद्युत क्षेत्र का आलेख– समरूप आवेशित परत के कारण विद्यु[त] क्षेत्र परत से बिन्दु की दूरी पर निर्भर नहीं करता अर्थात् सभी बिन्दुओं [प]र समान रहता है। इसका आलेख भी चित्र जैसा प्राप्त होता है।



चित्र 2.27



चित्र 2.28

उदा.19. एक अपरिमित चालक पट्टिका पर पृष्ठ आवेश घन[त्व] 4×10^{-6} C × m^{-2} है। पट्टिका के निकट एक आवेश -2×10^{-6} C र[खा] गया है। आवेश पर लगने वाले विद्युत बल का मान क्या होगा?

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.1[3]

हल– दिया गया है–

$$\sigma = 4 \times 10^{-6}\ C/m^2$$
$$q = -2 \times 10^{-6} C$$

अपरिमित चालक पट्टिका के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

∴ आवेश पर लगने वाले विद्युत बल का परिमाण

$$F = qE = \frac{q\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2\times10^{-6}\times4\times10^{-6}}{8.85\times10^{-12}}$$
$$= 0.903 \text{ न्यूटन}$$

उदा.20. धनावेशित अनन्त विस्तार की एक परत पर प्रति वर्ग ऐंगस्ट्रॉम क्षेत्रफल पर एक इलेक्ट्रॉन के तुल्य आवेश घनत्व विद्यमान हैं। परत के पृष्ठ के समीप विद्युत क्षेत्र का परिकलन कीजिये। इस क्षेत्र में इलेक्ट्रॉन का त्वरण क्या होगा ?

हल– अनन्त विस्तार की आवेशित परत के कारण उसके निकट विद्युत क्षेत्र $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} = 2\pi K\sigma$

जहाँ σ पृष्ठ आवेश घनत्व है।

प्रश्नानुसार $\sigma = \frac{1.6\times10^{-19}}{10^{-10}\times10^{-10}}$ कूलॉम/मी.^{2}

$= 16$ कूलॉम/मी.^{2}

$\therefore \quad E = 2\pi\times9\times10^9\times16$

$= 9.04\times10^{11}$ न्यूटन/कूलॉम

(परत के लम्बवत् दिशा में)

इलेक्ट्रॉन पर बल

$\vec{F} = (-e)\vec{E}$

$= 1.6\times10^{-19}\times9.04\times10^{11}\ (-\hat{n})$ न्यूटन

इलेक्ट्रॉन का त्वरण $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

$$= \frac{1.6\times10^{-19}\times9.04\times10^{11}}{9.1\times10^{-31}}(-\hat{n})$$

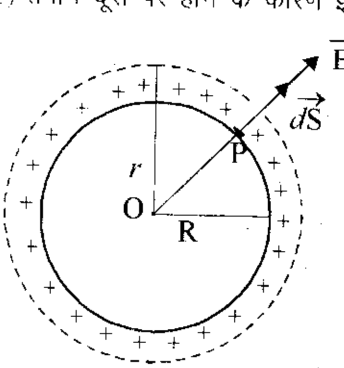
$= 1.59\times10^{23}$ मी./से.^{2} (परत की ओर लम्ब दिशा में)

2.4.4 गाउस के नियम से समरूप आवेशित गोलीय कोश (खोखला गोला) के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of Electric Field due to uniformly Charged Spherical Shell by Gauss Law)

(i) जब बिन्दु गोलीय कोश के बाहर स्थित है। ($r > R$)

माना त्रिज्या R के गोलीय कोश की सतह पर q आवेश समान रूप से वितरित है; इस गोले के केन्द्र O से दूरी r (जबकि $r > R$) पर P एक बिन्दु है जहाँ हमें विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ का मान ज्ञात करना है।

अब चित्र में दर्शाये अनुसार O को केन्द्र मानकर त्रिज्या r के एक गोलाकार पृष्ठ की कल्पना करते हैं। (इस गोलाकार पृष्ठ को गाउसीय पृष्ठ कहते हैं) समान दूरी पर होने के कारण इस पृष्ठ के



चित्र 2.29

प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ का परिमाण तो समान होता परन्तु उसकी दिशा अलग–अलग एवं उस बिन्दु पर त्रिज्यीय होती है। बिन्दु पर गाउसीय पृष्ठ की सतह पर एक अल्पांश क्षेत्रफल dS लेते हैं जिसके सदिश क्षेत्रफल की दिशा भी त्रिज्यीय होती है। अब गाउस के नियम से

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad .....(1$$

$\because$ $\vec{E}$ तथा $d\vec{S}$ की दिशा समान है, ($\theta = 0°$) अतः समी. (1

से $\oint_S EdA\cos0° = \oint_S EdS = \frac{q}{\epsilon_0}$

$\because$ $\vec{E}$ का परिमाण संपूर्ण पृष्ठ के लिये समान है अतः

$$E\oint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad .....(2)$$

r त्रिज्या के गोलाकार पृष्ठ के लिये

$\therefore \quad \oint_S dS = 4\pi r^2$ (गाउसीय पृष्ठ का क्षेत्रफल)

$\therefore \quad E\times4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$

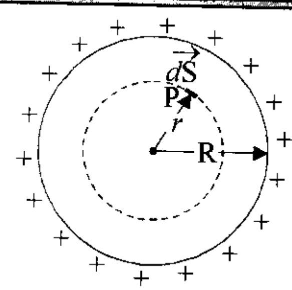
या $$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad .....(3)$$

या $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad .....(4)$$

या $$E \propto \frac{1}{r^2} \qquad .....(5)$$

समी. (4) से स्पष्ट होता है कि बाह्य बिन्दु के लिये गोलीय कोश पर वितरित आवेश इस प्रकार व्यवहार करता है जैसे कि सम्पूर्ण आवेश गोलीय कोश के केन्द्र पर स्थित हो।

(ii) जब बिन्दु गोलीय कोश के अन्दर होता है ($r < R$)



चित्र 2.30

माना गोलीय कोश के अन्दर उसके केन्द्र O से r दूरी ($r < R$) पर एक बिन्दु P है। जिस पर विद्युत क्षेत्र E का मान ज्ञात करना है। चित्र में दर्शाये अनुसार O को केन्द्र मानकर r त्रिज्या के एक गाउसीय पृष्ठ की कल्पना करते हैं। चूँकि इस पृष्ठ के अन्दर आवेश शून्य है अतः इस पृष्ठ के लिये गाउस के नियम से

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0} \qquad .....(6)$$

$$\therefore \quad E = 0 \qquad .....(7)$$

अतः आवेशित गोलीय कोश के अन्दर विद्युत क्षेत्र का मान शून्य होता है।

(iii) जब बिन्दु गोलीय कोश की सतह पर होता है ($r = R$)

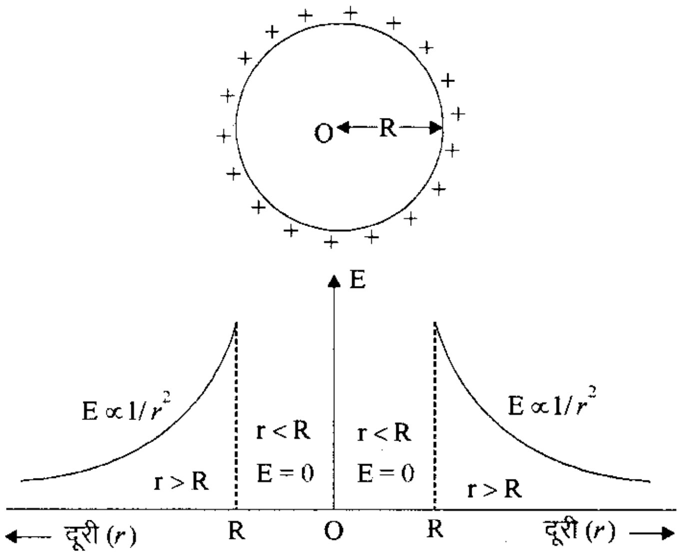
जब बिन्दु गोलीय कोश की सतह पर होता है तब उसके लिये केन्द्र से दूरी $r = R$ होती है। अतः समीकरण (3) में r का मान R रखने पर

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R^2} \qquad .....(8)$$

अतः स्पष्ट है कि आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र का मान उसकी सतह पर अधिकतम होता है।

समरूप आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र का आलेख–

समरूप आवेशित गोलीय कोश के कारण, कोश के केन्द्र से दूरी r के साथ विद्युत क्षेत्र में परिवर्तन समी. (4), समी. (7) एवं समी. (8) द्वारा व्यक्त होता है। इस परिवर्तन को चित्र में ग्राफ द्वारा दर्शाया गया है।



चित्र 2.31

निष्कर्ष–(i) गोलीय कोश के अन्दर विद्युत क्षेत्र का मान शून्य होता है। (ii) गोलीय कोश के बाहर विद्युत क्षेत्र केन्द्र से दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है (iii) गोलीय कोश की सतह पर विद्युत क्षेत्र का मान अधिकतम होता है। फिर सभी फलकों से सम्बद्ध फ्लक्सों के मानों का योग करके उस बन्द पृष्ठ से नैट विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कर लेते हैं जो गॉउस के नियम से $\frac{\Sigma q}{\epsilon}$ के मान के बराबर होता है। नैट विद्युत फ्लक्स के दोनों मानों को बराबर करने पर $|\vec{E}|$ का मान ज्ञात कर लेते हैं।

2.4.5 समरूप आवेशित चालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of electric field due to uniformly charged conducting sphere) :

किसी विलगित गोलीय चालक में कुल आवेश शून्य रहता है, क्योंकि इसके स्वतंत्र इलेक्ट्रॉन इस प्रकार गतिशील रहते हैं कि चालक के भीतर और बाहर सदैव विद्युत क्षेत्र शून्य रहता है। जब गोलीय चालक को बाहर से अतिरिक्त आवेश दिया जाता है तो समान प्रकृति के आवेश परस्पर प्रतिकर्षण करते हैं तथा आवेश चालक में गति कर सकते हैं जिससे अतिरिक्त आवेश प्रतिकर्षण के कारण अधिकतम दूरी पर जाने का प्रयास करेंगे अर्थात् सतह पर आ जायेंगे जब किसी विलगित गोलीय (अथवा अन्य रूप) चालक को आवेश दिया जाता है, तो यह आवेश चालक के भीतर क्षणिक विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करता है। परंतु यह आवेश लगभग 10^{-9} सेकण्ड में अपने आप को पुनः वितरित कर सतह पर आ जाता है, ताकि चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य हो जाए। यदि चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य नहीं होगा तो चालक के भीतर मुक्त इलेक्ट्रॉन बल का अनुभव करेंगे, जिससे मुक्त इलेक्ट्रॉन बल का अनुभव करेंगे, जिससे मुक्त इलेक्ट्रॉनों के गतिशील होने से धारा प्रवाहित होगी। विलगित चालक में इस प्रकार की धारा प्रवाहित नहीं होती है। इस प्रकार चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य होने पर अतिरिक्त आवेशों की गति समाप्त हो जाती है तथा प्रत्येक आवेश पर परिणामी विद्युत बल शून्य होता है। यह अवस्था स्थिर विद्युत साम्य कहलाती है।

इस प्रकार समरूप आवेशित चालक गोले को दिया गया आवेश उसकी सतह पर वितरित होने से इसकी विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के समान होगा।

2.4.6 गाउस के नियम से समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of electric field due to uniformly charged non-conducting sphere by Gauss law) :

किसी अचालक गोले को दिया गया आवेश उसी स्थान पर विद्यमान रहता है, जहाँ आवेश दिया जाता है।

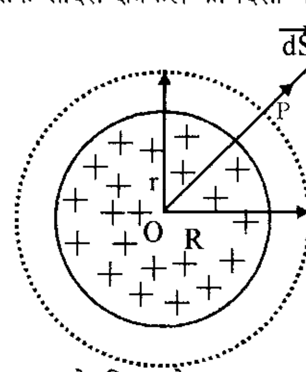
यदि एक R त्रिज्या के अचालक गोले को समरूप आवेशित किया जाता है, तब आवेश q उसके आयतन V में एक समान रूप से वितरित रहता है। अतः गोले का आयतन आवेश घनत्व

$$\rho = \frac{q}{4/3\pi R^3} \qquad ...(i)$$

माना कि गोले के केन्द्र O से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है, तब गोले के केन्द्र O को केन्द्र मानकर r त्रिज्या के गोलाकार गाउसीय पृष्ठ की कल्पना करते हैं।

यहाँ बिन्दु P की तीन प्रकार की स्थितियाँ संभव है–

(अ) जब बिन्दु P गोले के बाहर स्थित है (r > R) : r त्रिज्या के गोलाकार गाउसीय पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ का परिमाण तो समान होता है, परंतु उसकी दिशा अलग–अलग एवं उस बिन्दु पर त्रिज्यीय होती है। P बिन्दु पर गाउसीय पृष्ठ की सतह पर एक अल्पांश क्षेत्रफल dS लेते हैं, जिसके सदिश क्षेत्रफल की दिशा भी त्रिज्यीय होती है।



चित्र 2.32

अब गाउस के नियम से–

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad ...(2)$$

$\because$ $\vec{E}$ तथा $\vec{dS}$ की दिशा समान है ($\theta = 0°$) अतः समी. (2) से–

$$\oint_s E dS \cos 0^\circ = \oint_s E dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$\because$ $\vec{E}$ का परिमाण सम्पूर्ण पृष्ठ के लिये समान है। अत:

$$E \oint_s dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

r त्रिज्या के गोलाकार पृष्ठ के लिए

$$\oint_S dS = 4\pi r^2 \text{ [गाउसीय पृष्ठ का क्षेत्रफल]}$$

$$\therefore \quad E \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad ...(3)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad ...(4)$$

$$\Rightarrow \quad E \propto \frac{1}{r^2} \quad ...(5)$$

समी. (4) से स्पष्ट होता है कि बाह्य बिन्दु के लिये अचालक गोले का वितरित आवेश इस प्रकार व्यवहार करता है जैसे कि सम्पूर्ण आवेश गोले के केन्द्र पर स्थित हो।

समी. (1) से $\quad q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

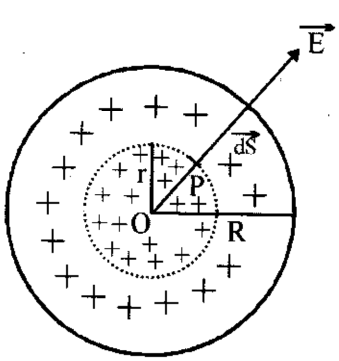
$\therefore$ समी. (3) से $\quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4/3\pi R^3 \rho}{r^2}$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R^3}{r^2}\right) \quad ...(6)$$

सदिश रूप में $\quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R^3}{r^2}\right)\hat{r} \quad ...(7)$

(ब) जब बिन्दु P गोले के भीतर स्थित है (r < R)

गाउसीय पृष्ठ पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता इस पृष्ठ के भीतर स्थित परिबद्ध आवेश q' (माना) के कारण होती है। यहाँ गाउसीय पृष्ठ के बाहर और गोले की सतह के मध्य स्थित आवेश (q – q') के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होगी।



चित्र 2.33

अत: गाउसीय पृष्ठ के भीतर स्थित परिबद्ध आवेश

$$q' = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{4/3\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{qr^3}{R^3} \quad ...(8)$$

अब गाउस के नियम से–

$$\oint_s \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q'}{\epsilon_0} \quad ...(9)$$

$\because$ $\vec{E}$ व $\vec{dS}$ की दिशा समान है, ($\theta = 0^\circ$)

$\therefore$ समी. (9) से

$$\oint_S E dS \cos 0^\circ = \oint_S E dS = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{qr^3}{R^3 \epsilon_0}$$

$\because$ $\vec{E}$ का परिमाण सम्पूर्ण पृष्ठ के लिये समान है।

अत: $\quad E \oint_S dS = \frac{qr^3}{R^3 \epsilon_0}$

r त्रिज्या के गोलाकार पृष्ठ के लिए

$$\oint_S dS = 4\pi r^2 \text{ (गाउसीय पृष्ठ का क्षेत्रफल)}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{qr^3}{R^3 \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^3} r \quad ...(10)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^3} r\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^3}\vec{r} \quad ...(11)$$

$$\Rightarrow \quad E \propto r \quad ...(12)$$

गोले के केन्द्र r = 0 विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

समी. (10) से $\quad E = 0$

समी. (1) से $\quad q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$\therefore$ समी. (10) से

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^3} r$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad ...(13)$$

सदिश रूप में $\quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r\hat{r}$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r} \quad ...(14)$$

(स) जब बिन्दु P गोले की सतह पर स्थित है (r = R)

समी. (3) या समी. (10) में r = R रखने पर–

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R^2} \quad ...(15)$$

सदिश रूप में $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R^2} \vec{r} \quad ...(16)$$

इसी प्रकार समी. (6) या समी. (13) से–

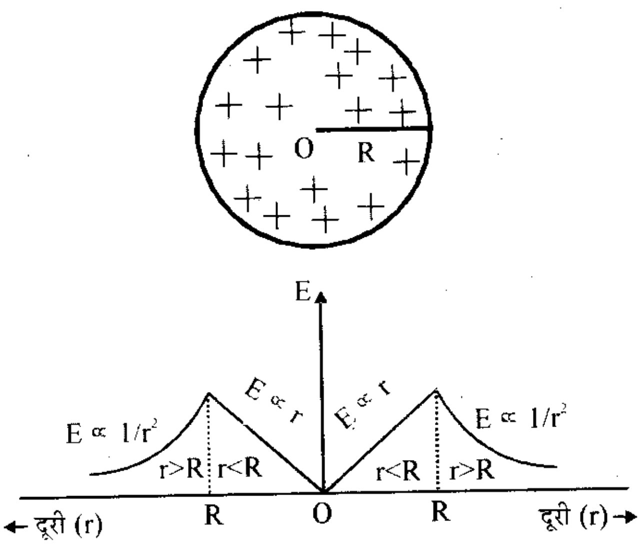
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R$$

सदिश रूप में $$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R\hat{r} \quad ...(17)$$

उपरोक्त समीकरणों से स्पष्ट है कि गोले की सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता अधिकतम होती है।

समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र का आलेख–

समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण गोले के केन्द्र से दूरी r के साथ विद्युत क्षेत्र में परिवर्तन समी. (5), (12) तथा (15) द्वारा व्यक्त होता है। इस परिवर्तन को चित्र में ग्राफ द्वारा दर्शाया गया है–



चित्र 2.34

उदा.21. एक 10 सेमी. त्रिज्या के चालक गोले को 1μC आवेश से आवेशित करने पर (अ) गोले के केन्द्र पर, (ब) गोले के केन्द्र से 5 सेमी. दूरी पर, (स) गोले के केन्द्र से 10 सेमी. दूरी पर तथा (द) गोले के केन्द्र से 15 सेमी. दूरी पर स्थित (वायु में) बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए। **पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.14**

हल– दिया गया है– R = 10 सेमी. = 10×10^{-2} मी.

$q = 1\mu C = 10^{-6}$ C

(अ) चालक गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होती है।

(ब) गोले के केन्द्र से 5 सेमी. दूरी पर स्थित बिन्दु चालक गोले के भीतर होगा। अत: गोले के केन्द्र से 5 सेमी.दूरी पर विद्युत क्षेत्र शून्य होगा।

(स) गोले के केन्द्र से 10 सेमी. दूरी पर बिन्दु चालक गोले के पृष्ठ पर होगा।

$$\therefore \quad E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

$$= 9\times10^9 \times \frac{10^{-6}}{(10\times10^{-2})^2}$$

$$= 9 \times 10^5 \text{ N/C}$$

(द) गोले के केन्द्र से 15 सेमी. दूरी पर बिन्दु चालक गोले के बाहर स्थित होगा।

$$\therefore \quad E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$= 9\times10^9 \times \frac{10^{-6}}{(15\times10^{-2})^2}$$

$$= 4 \times 10^5 \text{ N/C}$$

उदा.22. 10 सेमी व्यास के एक गोले को एक समान रूप से आवेशित किया गया है ताकि इसकी सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता 5×10^5 Vm⁻¹ हो जाती है। गोले के केन्द्र से 25 सेमी. दूरी पर स्थित 5×10^{-2} μC आवेश पर बल का मान ज्ञात कीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.15

हल– दिया गया है–

गोले की त्रिज्या $R = \frac{10}{2} = 5$ सेमी.

$= 5 \times 10^{-2}$ मी.

$E_{surface} = 5 \times 10^5 \text{ Vm}^{-1}$

$r = 25$ सेमी. $= 25 \times 10^{-2}$ मी.

$q_0 = 5 \times 10^{-2}\ \mu C$

$= 5 \times 10^{-2} \times 10^{-6}$ C

$= 5 \times 10^{-8}$ C

∴ गोले की सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E_{surface} = \frac{Kq}{R^2}$$

गोले के बाहर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E_{out} = \frac{Kq}{r^2}$$

$$\therefore \quad \frac{E_{out}}{E_{surface}} = \frac{R^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad E_{out} = E_{surface} \times \frac{R^2}{r^2}$$

$$= 5 \times 10^5 \left(\frac{5\times10^{-2}}{25\times10^{-2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad E_{out} = 2 \times 10^4 \text{ V/m}$$

∴ गोले के बाहर स्थित बिन्दु पर q_0 आवेश पर बल

$$F = q_0 E_{out}$$

$$F = 5 \times 10^{-2} \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{4}$$
$$= 10^{-3} \text{ न्यूटन}$$

उदा.23. एक 10 सेमी. त्रिज्या के एक चालक गोले को 3.14 माइक्रो कूलॉम आवेश से आवेशित करने पर पृष्ठ आवेश घनत्व क्या होगा?

हल– दिया गया है– $R = 10$ सेमी. $= 10 \times 10^{-2}$ मी.

$q = 3.14\ \mu C = 3.14 \times 10^{-6}\ C$

$\therefore$ पृष्ठ आवेश घनत्व $\quad \sigma = \dfrac{q}{4\pi R^2}$

$$\sigma = \frac{3.14 \times 10^{-6}}{4 \times 3.14 \times (10 \times 10^{-2})^2}$$
$$= 25\ \mu C / m^2$$

उदा.24. 2.4m व्यास के किसी एकसमान आवेशित चालक गोले का पृष्ठीय आवेश घनत्व 80.0 $\mu C/m^2$ है।

(a) गोले पर आवेश ज्ञात कीजिए।

(b) गोले के पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स कितना होगा?

हल– दिया है– त्रिज्या $R = \dfrac{2.4}{2} = 1.2$ मी.,

$\sigma = 80\ \mu C/\text{मी.}^2 = 80 \times 10^{-6}$ कूलॉम/मी.^{2}

(a) आवेश $\quad q = \sigma \times 4\pi R^2$

$$= 80 \times 10^{-6} \times 4 \times 3.14 \times 1.2 \times 1.2 = 1.45 \times 10^{-3} \text{ कूलॉम}$$

(b) निर्गत फ्लक्स $\quad \phi = \dfrac{q}{\epsilon_0} = \dfrac{1.45 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12}}$

$$= 1.63 \times 10^{8} \text{ न्यूटन–मी.}^2/\text{कूलॉम}$$

उदा.25. एक 10 सेमी. त्रिज्या के अचालक गोले पर 0.5 μC आवेश एक समान रूप से वितरित है। गोले के (अ) केन्द्र पर तथा केन्द्र से (ब) 8 सेमी. दूर (स) 10 सेमी. दूर (द) 20 सेमी. दूर वायु में स्थित बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.16

हल– दिया गया है– $R = 10$ सेमी. $= 10 \times 10^{-2}$ मी.

$q = 0.5\ \mu C = 0.5 \times 10^{-6}\ C$

(अ) गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E = 0$

(ब) $r = 8$ सेमी. का बिन्दु गोले के भीतर होगा–

$$\therefore \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^3}r$$

$$E = \frac{9 \times 10^9 \times 0.5 \times 10^{-6} \times 8 \times 10^{-2}}{(10 \times 10^{-2})^3}$$
$$= 3.6 \times 10^5\ V/m$$

(स) $r = 10$ सेमी. का बिन्दु गोले की सतह पर स्थित होगा–

$$\therefore \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

$$E = \frac{9 \times 10^9 \times 0.5 \times 10^{-6}}{(10 \times 10^{-2})^2}$$
$$= 4.5 \times 10^5\ V/m$$

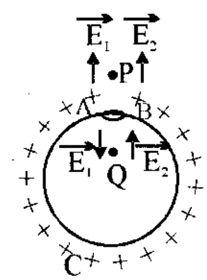
(द) $r = 20$ सेमी. का बिन्दु गोले के बाहर स्थित होगा–

$$\therefore \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$E = \frac{9 \times 10^9 \times 0.5 \times 10^{-6}}{(20 \times 10^{-2})^2}$$
$$= 1.125 \times 10^5\ V/m$$

2.5 आवेशित चालक की सतह पर बल (Force on the surface of charged conductor)

किसी चालक को दिया गया सम्पूर्ण आवेश चालक के बाह्य पृष्ठ पर एक समान रूप से वितरित हो जाता है। चालक के आवेशित पृष्ठ का एक अल्पांश दूसरे अल्पांश को परस्पर प्रतिकर्षित करता है। सम्पूर्ण पृष्ठ के सभी अल्पांशों द्वारा किसी एक अल्पांश पर प्रतिकर्षण बलों का योग एक परिणामी बल उत्पन्न करता है। प्रति एकांक क्षेत्रफल पर यह परिणामी बल विद्युत दाब कहलाता है।



चित्र 2.35

माना कि ABC एक समान रूप से आवेशित एक गोलाकार चालक का पृष्ठ है। इस पृष्ठ का पृष्ठ आवेश घनत्व σ है, तब चालक के पृष्ठ के बाहर अतिनिकट बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E_p = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$ जबकि E_p की दिशा पृष्ठ से लम्बवत् होगी। चालक के पृष्ठ के भीतर बिन्दु Q पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होगी।

अब गोलाकार चालक पृष्ठ के अतिनिकट बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता चालक पृष्ठ के दो भागों के कारण उत्पन्न हुई मानी जा सकती है–

(i) अल्पांश AB जिसका क्षेत्रफल dS (माना) है तथा (ii) चालक के शेष भाग ACB के कारण। माना कि अल्पांश AB के कारण निकट स्थित बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}_1$ तथा चालक के शेष भाग ACB के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}_2$ है, तब

$$E_p = E_1 + E_2$$

$\because$ बिन्दु P पर $\vec{E}_1$ व $\vec{E}_2$ समान दिशा में है।

$$\because \quad E_p = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \quad E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad ...(1)$$

$$E_Q = E_1 - E_2$$

$\because$ बिन्दु Q पर $\vec{E}_1$ व $\vec{E}_2$ परस्पर विपरीत दिशा में है।

$$\because \quad E_Q = 0$$
$$\therefore \quad E_1 - E_2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad E_1 = E_2 \qquad ...(2)$$

$\therefore$ समी. (1) व (2) से-

$$E_2 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad ...(3)$$

इस प्रकार चालक के भाग ACB के कारण अल्पांश AB पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E_2 = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$ होगी। अब यदि अल्पांश AB पर आवेश की मात्रा dq हो तो अल्पांश पर बल

$$dF = E_2 dq = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.\sigma dS$$

$$\Rightarrow \quad dF = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \qquad \left(\because \sigma = \frac{dq}{dS}\right)$$

$$\because \quad E_p = E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \quad \sigma = \epsilon_0 E$$

$$\therefore \quad dF = \frac{(\epsilon_0 E)^2}{2\epsilon_0}.dS$$

$$\Rightarrow \quad dF = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dS$$

सम्पूर्ण चालक पृष्ठ पर लगने वाला बल

$$F = \oint_S \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS$$

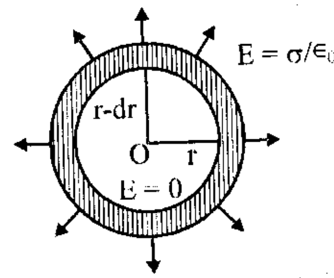
$$= \oint_S \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dS \qquad ...(4)$$

इस बल की दिशा पृष्ठ से बाहर की ओर लम्बवत् होती है। आवेशित चालक की सतह के एकांक क्षेत्रफल पर बल पृष्ठ का विद्युत दाब कहलाता है।

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad ...(5)$$

2.6 विद्युत क्षेत्र के एकांक आयतन में ऊर्जा (Energy per unit volume in an electric field)

आवेशित चालक पृष्ठ पर विद्युत बल पृष्ठ से बाहर की ओर लम्बवत् होता है। अब यदि चालक की सतह पर आवेश की मात्रा बढ़ायी जाती है या विद्युत क्षेत्र के आयतन में वृद्धि की जाती है, तब विद्युत बल के विरूद्ध किया गया कार्य विद्युत क्षेत्र में ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।



चित्र 2.36

माना कि r त्रिज्या का एक समरूप आवेशित गोलीय कोश है, जिसका पृष्ठ आवेश घनत्व σ है, तब आवेशित गोलीय कोश पर त्रिज्यीय दिशा में बाहर की ओर विद्युत दाब

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \qquad ...(1)$$

$\therefore$ गोलीय कोश के सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल पर लगने वाला बल

$$F = P \times 4\pi r^2$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \times 4\pi r^2$$

अब यदि गोलीय कोश को चारों ओर से अल्पांश दूरी dr से सम्पीड़ित किया जाये, तो सम्पीड़न में किया गया कार्य

$$dw = Fdr = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \times 4\pi r^2 dr$$

सम्पीड़न के कारण किया गया कार्य ऊर्जा के रूप में विद्युत क्षेत्र से सम्बद्ध होता है, जिससे E = 0 क्षेत्र के आयतन में कमी होती है, जबकि $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$ क्षेत्र के आयतन में वृद्धि होती है। इस प्रकार विद्युत क्षेत्र के आयतन में वृद्धि

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\therefore \quad dw = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}.dV$$

$\therefore$ सम्पूर्ण विद्युत क्षेत्र से सम्बद्ध ऊर्जा

$$U = W = \int \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dV \quad ..(2)$$

विद्युत क्षेत्र के एकांक आयतन में संचित ऊर्जा अर्थात् ऊर्जा घनत्व

$$u = \frac{dw}{dV} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$\because \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \epsilon_0 E$$

$$\therefore \quad u = \frac{(\epsilon_0 E)^2}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad ...(3)$$

यदि निर्वात् या वायु के स्थान पर अन्य माध्यम हो, तो

$$u = \frac{1}{2} \in E^2 \qquad ...(4)$$

2.7 साबुन के आवेशित बुलबुले का संतुलन (Equilibrium of charged soap bubble)

साबुन के बुलबुले के भीतर वायु का दाब, बुलबुले के बाहर के वायुमण्डलीय दाब से अधिक होता है। यह दाब आधिक्य पृष्ठ तनाव के कारण होता है। यदि किसी साबुन के बुलबुले की त्रिज्या r तथा पृष्ठ तनाव T हो, तो अनावेशित बुलबुले की संतुलन अवस्था में दाब आधिक्य के कारण बाहर की ओर बल का मान पृष्ठ तनाव के कारण बुलबुले के भीतर की ओर उत्पन्न बल के बराबर होता है अर्थात्

$$P \times \pi r^2 = T \times 2 \times 2\pi r$$

यहाँ साबुन के बुलबुले के दो पृष्ठ होते हैं।

$$\therefore \text{ दाब आधिक्य } \quad P = \frac{T \times 2 \times 2\pi r}{\pi r^2}$$

$$P = \frac{4T}{r} \qquad ...(1)$$

इस प्रकार साबुन के बुलबुले के भीतर की हवा का दाब, वायुमण्डलीय दाब से $\frac{4T}{r}$ अधिक होता है। अब यदि साबुन के बुलबुले को आवेशित करने पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ हो, तो इस आवेशित बुलबुले पर पृष्ठ के बाहर की ओर विद्युत दाब $\frac{\sigma^2}{2\in_0}$ होगा।

अब संतुलन अवस्था में बुलबुले के भीतर दाब आधिक्य तथा आवेशन के कारण विद्युत दाब सम्मिलित रूप से पृष्ठ तनाव के बल के कारण होते हैं, अर्थात्

$$P + \frac{\sigma^2}{2\in_0} = \frac{4T}{r}$$

$$P = \frac{4T}{r} - \frac{\sigma^2}{2\in_0} \qquad ...(2)$$

जब बुलबुले को आवेशित किया जाता है, तब एक ऐसी स्थिति आ जाती है, जब दाब आधिक्य शून्य हो जाता है। इस स्थिति में आवेशित बुलबुला फूट जाता है। अत: संतुलन के लिए

$$P = \frac{4T}{r} - \frac{\sigma^2}{2\in_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4T}{r} = \frac{\sigma^2}{2\in_0}$$

$$\text{बुलबुले की त्रिज्या} \quad r = \frac{8T\in_0}{\sigma^2} \qquad ...(3)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{8T\in_0}{r}$$

$$\text{बुलबुले पर पृष्ठ आवेश घनत्व } \sigma = \sqrt{\frac{8T\in_0}{r}} \qquad ...(4)$$

$$\because \text{ पृष्ठ आवेश घनत्व } \quad \sigma = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\therefore \quad \frac{q}{4\pi r^2} = \sqrt{\frac{8T\in_0}{r}}$$

$$\text{बुलबुले पर आवेश} \quad q = 4\pi\sqrt{8T\in_0 r^3} \qquad ...(5)$$

उदा. 26. एक आवेशित साबुन के बुलबुले पर पृष्ठ आवेश घनत्व 2.96 $\mu C/m^2$ है। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 4×10^{-4} N/m है। बुलबुले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जबकि दाब आधिक्य शून्य हो तथा बुलबुला संतुलन में रहे। पाठ्यपुस्तक उदाहरण 2.17

हल– जब आवेशित बुलबुले का दाब आधिक्य शून्य हो तथा बुलबुला संतुलन अवस्था में हो, तब बुलबुले की त्रिज्या

$$r = \frac{8T\in_0}{\sigma^2}$$

$$\because \text{ दिया गया है–} \quad \sigma = 2.96 \frac{\mu C}{m^2}$$

$$= 2.96 \times 10^{-6}\ C/m^2$$

$$T = 4 \times 10^{-4}\ N/m$$

$$\therefore \quad r = \frac{8 \times 4 \times 10^{-4} \times 8.85 \times 10^{-12}}{(2.96 \times 10^{-6})^2}$$

$$= 0.32 \text{ मी.}$$

उदा.27. एक 0.32 मीटर त्रिज्या के एक आवेशित साबुन के बुलबुले में दाबान्तर शून्य है। यदि साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 4×10^{-2} न्यूटन / मीटर हो, तो बुलबुले पर पृष्ठ आवेश घनत्व की गणना कीजिए

हल– दिया गया है– $r = 0.32$ मीटर, $T = 4 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मीटर

$\sigma = ?$

$$\because \quad \sigma = \sqrt{\frac{8T\in_0}{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{8 \times 4 \times 10^{-2} \times 8.85 \times 10^{-12}}{0.32}}$$

$$\sigma = 2.96 \times 10^{-6} \text{ कूलॉम/मीटर}^2$$

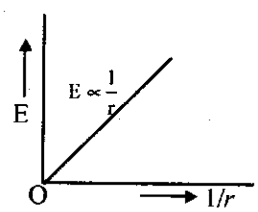
अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

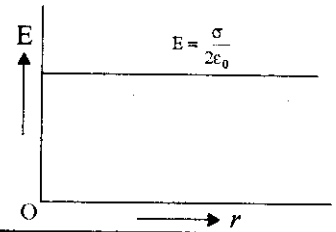
1. गाउसीय पृष्ठ क्या है?
2. गाउसीय पृष्ठ के क्या उपयोग है?
3. क्या विद्युत फ्लक्स का मान गाउसीय पृष्ठ की आकृति पर निर्भर करता है?
4. क्या एक खोखले गोले की अपेक्षा समान त्रिज्या के ठोस चालक गोले को अधिक आवेशित किया जा सकता है? कारण भी बताइए।
5. क्या 1 सेमी त्रिज्या के धातु के गोले को 1 कूलॉम आवेश दिया जा सकता है?
6. गाउस के नियम से (i) घनाकार चालक कोश के भीतर रखे आवेश (ii) विद्युत द्विध्रुव (iii) आवेशित चकती (iv) किसी त्रिभुज

के कोनों पर रखे आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात क्यों नहीं कर सकते है?

7. क्या आवेश की अपरिमित अचालक समतल परत के कारण $\vec{E}$ का मान परत की प्रेक्षण बिन्दु से दूरी पर निर्भर करता है?
8. गॉऊसीय प्रमेय का सूत्र लिखिए।
9. एक बन्द पृष्ठ द्वारा उसके भीतर के किसी बिन्दु पर बनाया गया घन कोण का मान लिखिए।
10. एक बन्द पृष्ठ के भीतर विद्युत द्विध्रुव स्थित है। पृष्ठ से सम्बद्ध कुल विद्युत फ्लक्स का मान कितना होगा?
11. अनन्त रेखीय आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र E, प्रेक्षण बिन्दु की दूरी r पर किस प्रकार निर्भर करता है?
12. अनन्त रेखीय आवेश के कारण उससे $\frac{1}{r}$ दूरी के साथ विद्युत क्षेत्र परिवर्तन का आलेख खींचिए।
13. किसी समरूप आवेशित अपरिमित, अचालक परत के कारण विद्युत क्षेत्र E की प्रेक्षण बिन्दु की दूरी r पर निर्भरता बताइए।
14. आवेशित अचालक परत के कारण विद्युत क्षेत्र का आलेख खींचिए।
15. समरूप आवेशित गोलीय कोश के कारण अधिकतम विद्युत क्षेत्र कहाँ होता है?
16. समरूप आवेशित गोलीय कोश के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र का मान कितना होता है?
17. यदि किसी आवेशित चालक गोले का पृष्ठ आवेश घनत्व σ है तब उसके पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता कितनी होगी?
18. कोई बिन्दु-आवेश एक बन्द गोलीय गाउसीय पृष्ठ के केन्द्र पर रखा है। पृष्ठ से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स ϕ_E कैसे प्रभावित होता है, जब :
    (i) गोले को उसी अथवा विभिन्न आयतन के बेलन द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है,
    (ii) आवेश को गोले के भीतर केन्द्र से किसी अन्य स्थान पर हटाया जाता है,
    (iii) गोले के भीतर किसी दूसरे आवेश को भी रख दिया जाता है,
    (iv) गोले के भीतर बिन्दु-आवेश के स्थान पर विद्युत द्विध्रुव रख दिया जाता है।
19. माना कि किसी गाउसीय पृष्ठ के भीतर नैट आवेश शून्य है। क्या इसका यह अर्थ है कि पृष्ठ पर सभी बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ अवश्य ही शून्य होगी ? क्या इसका विलोम (converse) भी सत्य है ?
20. R मीटर त्रिज्या के गोलीय चालक पर + q कूलॉम आवेश है। चालक के पृष्ठ से r मीटर की दूरी पर स्थित बाह्य बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के लिये व्यंजक लिखिये।
21. आवेशित खोखले गोलाकार चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता कितनी होती है ?
22. आवेश के पृष्ठ-घनत्व से आप क्या समझते हैं?
23. भवन की चोटी पर लगी नुकीली छड़ तड़ित-आघातों से भवन की सुरक्षा किस प्रकार करती हैं ?

उत्तरमाला

1. गाउसीय पृष्ठ वह काल्पनिक बन्द पृष्ठ है जो गाउस की प्रमेय का उपयोग करने के लिए किसी आयतन को परिबद्ध करते हुए खींचा जाता है। यह किसी भी आकार का चुना जा सकता है।
2. इसका उपयोग आवेशित पिण्डों अथवा आवेशित निकायों के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करने में किया जाता है, जहाँ कूलॉम का नियम प्रयुक्त करना कठिन है।
3. नहीं
4. नहीं, क्योंकि आवेशित चालक का सम्पूर्ण आवेश सदैव चालक के बाह्य पृष्ठ पर होता है।
5. नहीं, क्योंकि गोले के पृष्ठ पर $E = \frac{kq}{R^2} = 9 \times 10^9 \frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$ हो जाएगा। वायु में विद्युत क्षेत्र के $3 \times 10^6 \frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$ से अधिक हो जाने पर वायु आयनित हो जाएगी जिससे गोले के आवेश का वायु में क्षरण हो जाएगा।
6. इन सभी स्थितियों में आवेश का वितरण सममित (symmetric) नहीं है क्योंकि गाउस के नियम से विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ का व्यंजक उन अवस्थाओं में ही ज्ञात किया जाता है जिनमें आवेश का वितरण सममित होता है।
7. नहीं, $\because E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
8. $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = 4\pi K \Sigma q$
9. 4π रेडियन
10. गाउस के नियम से $\quad \phi = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0}$
    द्विध्रुव के लिये $\quad \Sigma q = 0$
    $\therefore \quad \phi = \frac{0}{\epsilon_0} = 0$
    अतः पृष्ठ से सम्बद्ध कुल विद्युत फ्लक्स शून्य होगा।
11. $E \propto \frac{1}{r}$
12. 

13. $E \propto r^0$
    अर्थात् विद्युत क्षेत्र परत से बिन्दु की दूरी पर निर्भर नहीं करता है।
14. 

15. गोलीय कोश की सतह पर। 16. शून्य

17. $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

18. (i) पृष्ठ से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स Φ_E प्रभावित नहीं होगा क्योंकि यह आवेश को परिबद्ध करने वाले बन्द पृष्ठ के आकार अथवा आकृति पर निर्भर नहीं करता।
(ii) Φ_E प्रभावित नहीं होगा, क्योंकि यह पृष्ठ के भीतर आवेश की स्थिति पर निर्भर नहीं करता।
(iii) Φ_E बदलेगा क्योंकि $\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$, जहाँ q नैट आवेश है (दूसरे आवेश का चिन्ह लेने पर)।
(iv) Φ_E शून्य हो जायेगा, क्योंकि द्विध्रुव दो समान तथा विपरीत आवेशों से बना है। इससें पृष्ठ के भीतर नैट आवेश शून्य होगा।

19. यदि गाउसीय पृष्ठ के भीतर नैट आवेश, शून्य है, तब गाउस की प्रमेय के अनुसार

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0. \; [\because q = 0]$$

इसका यह अर्थ नहीं कि $\vec{E}$, पृष्ठ के सभी बिन्दुओं पर आवश्यक रूप से शून्य है। उदाहरण के लिये, यदि $\vec{E}$ अशून्य हो, परन्तु पृष्ठ के सभी बिन्दुओं पर क्षेत्रफल सदिश $d\vec{A}$ के लम्बवत् हो, तब भी $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$ का मान शून्य होगा।
परन्तु इसका विलोम सत्य है अर्थात् यदि गाउसीय पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर $\vec{E}$ शून्य है, तब पृष्ठ से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$ शून्य होगा। इस स्थिति में गाउस की प्रमेय $\left(\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}\right)$ यह बताती है कि गाउसीय पृष्ठ के भीतर नैट आवेश शून्य है।

20. $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(R+r)^2}$ न्यूटन/कूलॉम

21. शून्य।

22. किसी एकसमान आवेशित पृष्ठ के किसी भाग पर आवेश की मात्रा तथा उस भाग के क्षेत्रफल के अनुपात को आवेश का पृष्ठ-घनत्व कहते हैं।

23. जब कोई आवेशित बादल भवन के ऊपर से गुजरता है तो वह प्रेरण द्वारा छड़ के ऊपरी सिरे पर विपरीत आवेश उत्पन्न कर देता है। चूँकि यह सिरा नुकीला है, अतः इस पर आवेश का पृष्ठ घनत्व बहुत अधिक होता है तथा यह आवेश शीघ्रता से विसर्जित होकर बादल के (विपरीत) आवेश का निराकरण कर देता है।

विविध उदाहरण

Basic Level

उदा.28. यदि किसी आवेशित चालक गोले का पृष्ठ आवेश घनत्व σ हो तो सिद्ध करो कि उसके पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ होती है।

हल– आवेशित गोलीय चालक के पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\frac{q}{R^2}$$

जहाँ चालक पर आवेश q है तथा चालक के गोले की त्रिज्या R है।

$$\because \quad \sigma = \frac{\text{आवेश}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{q}{4\pi R^2}$$

$$\therefore \quad q = 4\pi R^2\sigma$$

$$\text{अतः} \quad E = \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

उदा.29. एक 0.1 मी. त्रिज्या के गोलीय चालक के पृष्ठ पर 0.036 न्यूटन/कूलॉम का विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करने के लिए इस पर रखे गये इलेक्ट्रॉनों की संख्या ज्ञात कीजिये।

हल– गोलीय चालक के पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E = \frac{Kq}{R^2}$

परन्तु $q = ne$

$$\therefore \quad E = \frac{Kne}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{ER^2}{Ke} = \frac{0.036\times(0.1)^2}{9\times10^9\times1.6\times10^{-19}}$$

$= 2.5 \times 10^5$ इलेक्ट्रॉन

प्र.30. किसी काले बॉक्स के पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की सावधानीपूर्वक ली गई माप यह संकेत देती है कि बॉक्स के पृष्ठ से गुजरने वाला नेट फ्लक्स 8.0×10^3 Nm²/C है।
(a) बॉक्स के भीतर नेट आवेश कितना है?
(b) यदि बॉक्स के पृष्ठ से नेट बहिर्मुखी फ्लक्स शून्य है तो क्या आप यह निष्कर्ष निकालेंगे कि बॉक्स के भीतर कोई आवेश नहीं है? क्यों, अथवा क्यों नहीं?

हल–दिया है– (a) $\phi = 8\times10^3$ न्यूटन–मी.²/कूलॉम
अतः बॉक्स के अन्दर नेट आवेश $\Sigma q = \phi\,\epsilon_0$
$= 8\times10^3\times8.85\times10^{-12}$
या $\Sigma q = 70.8\times10^{-9}$ कूलॉम = 70.8 नैनो कूलॉम

(b) यदि नेट फ्लक्स $\phi = 0$ तब यह आवश्यक नहीं है कि बॉक्स के अन्दर कोई आवेश उपस्थित न हो परंतु यह आवश्यक है कि बॉक्स के अन्दर आवेशों का बीजगणितीय योग $\Sigma q = 0$ होना चाहिए।

प्र.31. 10cm त्रिज्या के चालक गोले पर अज्ञात परिमाण का आवेश है। यदि गोले के केंद्र से 20cm दूरी पर विद्युत क्षेत्र 1.5×10^3N/C त्रिज्यतः अंतर्मुखी (radially inward) है तो गोले का नैट आवेश कितना है?

हल– दिया है–त्रिज्या R = 10 सेमी., दूरी r = 20 सेमी., $E = -1.5\times10^3$ न्यूटन/कूलॉम
यहाँ ऋणात्मक चिन्ह विद्युत क्षेत्र के अन्तर्मुखी होने के कारण है। अभीष्ट बिन्दु गोले के बाहर स्थित है अतः

$$E = \frac{Kq}{r^2} \text{ से } q = \frac{Er^2}{K}$$

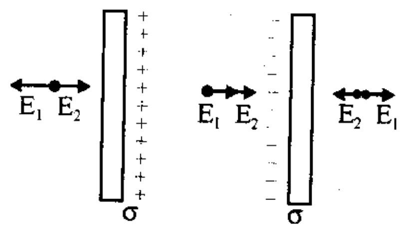
या $$q = -\frac{1.5\times10^3\times(20\times10^{-2})^2}{9\times10^9}$$
$$= -\frac{1.5\times4\times10}{9\times10^9}$$
$= -6.67 \times 10^{-9}$ कूलॉम

या $q = -6.67$ nC

प्र.32. दो बड़ी, पतली धातु की प्लेटें एक दूसरे के समानांतर एवं निकट हैं। इनके भीतरी फलकों पर, प्लेटों के पृष्ठीय आवेश घनत्वों के चिन्ह विपरीत हैं तथा इनका परिमाण 17.0×10^{-22} C/m² है। (a) पहली प्लेट के बाह्य क्षेत्र में, (b) दूसरी प्लेट के बाह्य क्षेत्र में तथा (c) प्लेटों के बीच में विद्युत क्षेत्र E का परिमाण परिकलित कीजिए।

हल–दिया है– $\sigma = 17 \times 10^{-22}$ कूलॉम/मी²

आवेश की परत के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



चित्र 2.37

यदि धनात्मक आवेश परत के कारण विद्युत क्षेत्र E_1 तथा ऋणात्मक आवेश परत के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र E_2 है तब

(a) एवं (b) : प्लेटों के बाह्य बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र $E = E_1 - E_2$

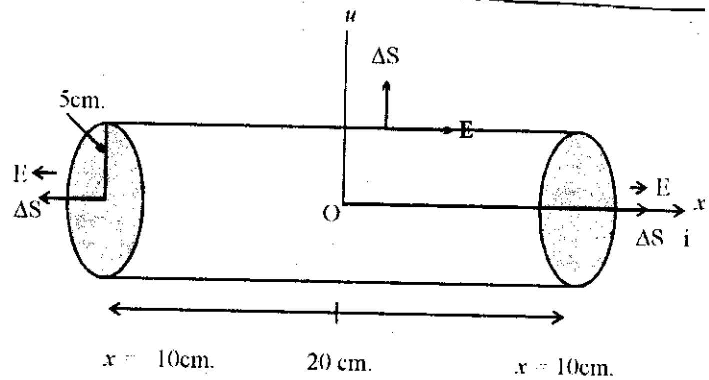
या $$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0$$

(c) प्लेटों के मध्य बिन्दु पर $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$= \frac{17\times10^{-22}}{8.85\times10^{-12}}$$
$= 1.92 \times 10^{-10}$ न्यूटन/कूलॉम

Advance Level

उदा.33.कोई विद्युत क्षेत्र धनात्मक x के लिए, धनात्मक X दिशा में एकसमान है तथा उसी परिमाण के साथ परंतु ऋणात्मक x के लिए, ऋणात्मक X दिशा में एकसमान है। यह दिया गया है कि $E = 200\ \hat{i}$ N/C जबकि $x > 0$ तथा $E = -200\ \hat{i}$ N/C जबकि $x < 0$ है। 20 cm लंबे 5cm त्रिज्या के किसी लंबवृत्तीय सिलिंडर का केंद्र मूल बिंदु पर तथा इस अक्ष X के इस प्रकार अनुदिश है कि इसका एक फलक चित्र में दर्शाए अनुसार x = + 10 cm तथा दूसरा फलक x = – 10 cm पर है। (a) प्रत्येक चपटे फलक से गुजरने वाला नेट बहिर्मुखी फ्लक्स कितना है? (b) सिलिंडर के पार्श्व से गुजरने वाला फ्लक्स कितना है? (c) सिलिंडर से गुजरने वाला नेट बहिर्मुखी फ्लक्स कितना है? (d) सिलिंडर के भीतर नेट आवेश कितना है?



चित्र 2.38

हल-(a)(i) $x = 10$ सेमी पर स्थित वृत्तीय फलक के लिए

$\vec{E} = 200\ \hat{i}$ न्यूटन/कूलॉम

$\vec{S} = S\hat{i}$

जहाँ $S = \pi r^2 = \pi \times (5 \times 10^{-2})^2$मी.²

अतः सम्बद्ध फलक्स $\phi_1 = \vec{E}.\vec{S} = 200\hat{i}.S\hat{i}$

$= 200 \times \pi \times (5 \times 10^{-2})^2\ (\hat{i}.\hat{i})$

या $\phi_1 = +1.57$ न्यूटन–मी.²/कूलॉम

(निर्गत या बहिर्मुखी फलक्स है)

(ii) $x = -10$cm पर स्थित वृत्तीय फलक के लिए

$\vec{E} = -200\hat{i}$ न्यूटन/कूलॉम तथा $\vec{S} = -S\hat{i}$

जहाँ

$S = \pi r^2 = \pi\times(5\times10^{-2})$ मी.²

अतः सम्बद्ध फलक्स

$\phi_2 = \vec{E}.\vec{S} = -(200\hat{i}).(-S\hat{i}) = 200\times\pi\times(5\times10^{-2})^2\,(\hat{i}.\hat{i})$

या $\phi_2 = +1.57$ न्यूटन–मी.²/कूलॉम (निर्गत या बहिर्मुखी फलक्स है।)

(b) सिलिण्डर (बेलन) के पार्श्व (वक्रपृष्ठ) के प्रत्येक बिन्दु पर $\vec{E} \perp \Delta\vec{S}$ अतः निर्गत फलक्स शून्य होगा।

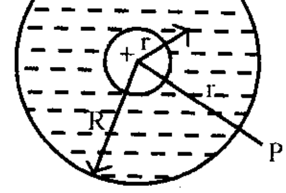
(c) बेलन से निर्गत (बहिर्मुखी) नेट फलक्स $\phi = \phi_1 + \phi_2$
$= 1.57 + 1.57$

या $\phi = 3.14$ न्यूटन–मी.²/कूलॉम

(d) बेलन में परिबद्ध आवेश

$\Sigma q = \phi\,\epsilon_0 = 3.14 \times 8.854 \times 10^{-12}$
$= 2.78 \times 10^{-11}$ कूलॉम

उदा.34. परमाणु के प्रारंभिक प्रतिरूप में यह माना गया था कि आवेश Ze का बिंदु आमाप का धनात्मक नाभिक होता है जो त्रिज्या R तक एकसमान घनत्व के ऋणावेश से घिरा हुआ है। परमाणु पूर्ण रूप में विद्युत उदासीन है। इस प्रतिरूप के लिए नाभिक से r दूरी पर विद्युत क्षेत्र कितना है?



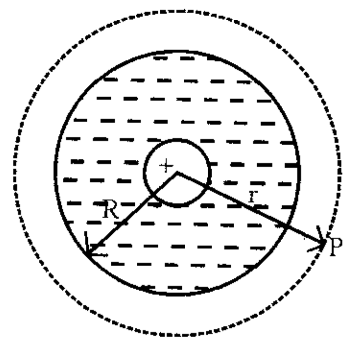
चित्र 2.39

हल– चूंकि परमाणु विद्युत उदासीन होता है अतः यदि नाभिक में धनात्मक आवेश Ze विद्यमान है तो नाभिक के चारों ओर सममित रूप से वितरित ऋणात्मक आवेश का परिमाण भी Ze होगा।
ऋणात्मक आवेश के लिए आवेश घनत्व

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Ze}{4\pi r^3} \qquad ...(1)$$

(i) जब बिन्दु P परमाणु के बाहर स्थित है (r > R)–इस स्थिति में परमाणु के चारों ओर r त्रिज्या के गोलीय गाउसियन पृष्ठ की कल्पना करते हैं जिसका केन्द्र नाभिक पर स्थित होगा।

गाउसियन पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश $\Sigma q = (+Ze) + (-Ze)$



चित्र 2.40

या $\qquad \Sigma q = 0$

अतः $\qquad \phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_o}$ से

$$E_{out} = 0 \qquad (\because \Sigma q = 0)$$

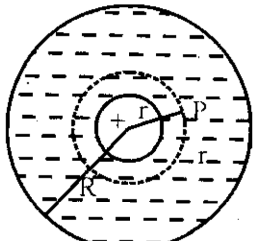
(ii) जब बिन्दु P, परमाणु के अन्दर स्थित है (r < R)–इस स्थिति में गोलीय गाउसियन पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश

$\Sigma q = (+Ze) + $ (r त्रिज्या के गोले में ऋणात्मक आवेश)

$$\Sigma q = (+Ze) + \left(-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)$$

$$\Sigma q = (+Ze) - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{3Ze}{4\pi R^3}\right)$$

$$\Sigma q = Ze - \frac{Zer^3}{R^3}$$



चित्र 2.41

अतः गाउस नियम से

$$\phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_o} = \frac{Ze}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) \qquad ...(1)$$

चूंकि गोलीय गाउसीयन पृष्ठ पर सममिति के कारण सर्वत्र विद्युत क्षेत्र एक समान होगा तथा इसकी दिशा किसी भी बिन्दु पर लिए गए क्षेत्रफल अल्पांश के अनुदिश या विपरीत होगी

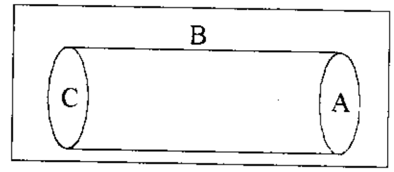
अतः समी. (1) से

$$E\oint dS = \frac{Ze}{\epsilon_0}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^3}\right) \qquad \because \oint dS = 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \qquad E \times 4\pi r^2 = \frac{Ze}{\epsilon_0}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^3}\right)$$

या $\qquad E_{in} = \frac{Ze}{4\pi \epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$

उदा. 35. एक खोखले बेलन के भीतर q आवेश है। यदि वक्र पृष्ठ B से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स ϕ हो तो पृष्ठ A से सम्बद्ध फ्लक्स ज्ञात कीजिए



चित्र 2.42

हल– गाउस के नियमानुसार, $\qquad \phi_{net} = \frac{q}{\epsilon_0}$

परन्तु $\qquad \phi_{net} = \phi_A + \phi_B + \phi_C$

तथा प्रश्नानुसार $\quad \phi_B = \phi$

चित्र की ज्यामिती से $\phi_A = \phi_C = \phi'$ (माना)

तब $\qquad \phi' + \phi + \phi' = \frac{q}{\epsilon_0}$

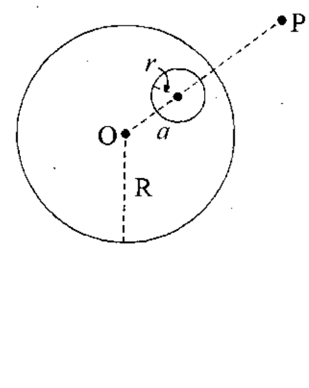
$$\Rightarrow \qquad 2\phi' + \phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \qquad 2\phi' = \frac{q}{\epsilon_0} - \phi$$

$$\Rightarrow \qquad \phi' = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\epsilon_0} - \phi\right)$$

उदा.36. एक त्रिज्या R के गोले के केन्द्र से *a* दूरी पर से एक त्रिज्या *r* का छोटा गोला निकाल दिया गया है और शेष को एक-समान रूप से आवेशित कर दिया गया है। दोनों के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा पर बड़े गोले के बाहर किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिये।

हल– माना त्रिज्या R के बड़े गोले के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}_1$ है तथा त्रिज्या *r* के छोटे गोले के कारण विद्युत क्षेत्र $\vec{E}_2$ है। ये दोनों क्षेत्र एक ही दिशा में होंगे क्योंकि आवेशित गोला इस प्रकार व्यवहार करता है जैसे सम्पूर्ण आवेश केन्द्र पर स्थित हो और बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र त्रिज्य दिशा में होगा जो दोनों गोलों के लिये समान है।



चित्र 2.43

∴ छोटे गोले को निकाल कर शेष भाग के कारण P बिन्दु पर तीव्रता अध्यारोपण के नियम से E_1 और E_2 के अन्तर के बराबर होगी।

∴ $E = E_1 - E_2$ (OP की दिशा में)

यदि आवेश घनत्व ρ है तो बड़े गोले पर आवेश $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ तथा छोटे गोले पर आवेश $q = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ । यदि P की O से दूरी d है तो छोटे गोले के केन्द्र से दूरी $(d-a)$ होगी, अतः

$$E_1 = K\frac{Q}{d^2} = K\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{d^2}$$

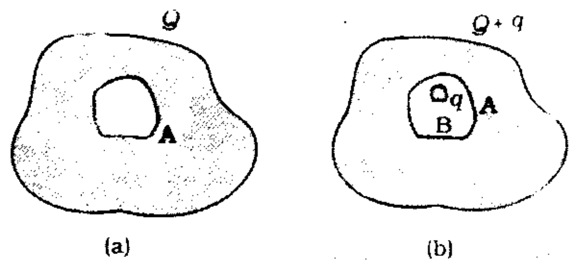
$$E_2 = K\frac{q}{(d-a)^2} = K\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{(d-a)^2}$$

$$E = E_1 - E_2 = K\frac{4}{3}\pi\rho\left[\frac{R^3}{d^2} - \frac{r^3}{(d-a)^2}\right] \text{ (OP दिशा में)}$$

उदा37. (a) किसी चालक A जिसमें चित्र (a) में दर्शाए अनुसार कोई कोटर/गुहा (cavity) है, को Q आवेश दिया गया है। यह दर्शाइए कि समस्त आवेश चालक के बाहय पृष्ठ पर प्रतीत होना चाहिए।

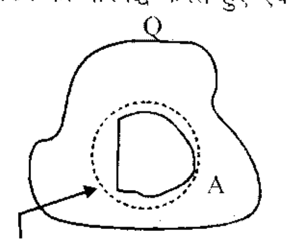
(b) कोई अन्य चालक B जिस पर आवेश q है, को कोटर/गुहा (Cavity) में इस प्रकार धंसा दिया जाता है कि चालक B चालक A से विद्युतरोधी रहे। यह दर्शाइए कि चालक A के बाहय पृष्ठ पर कुल आवेश Q + q है। (चित्र b)

(c) किसी सुग्राही उपकरण को उसके पर्यावरण के प्रबल स्थिरविद्युत क्षेत्रों से परिरक्षित किया जाना है। संभावित उपाय लिखिए।



चित्र 2.44

हल–(a) हम चालक पर कोटर को परिबद्ध करते हुए एक गाउसियन पृष्ठ



चित्र 2.45

की कल्पना करते हैं। चूंकि चालक के अन्दर विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = 0$ होता है अतः

गाउसियन पृष्ठ से निर्गत फ्लक्स $\phi = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = 0$

$\Rightarrow \quad q = 0$

अतः कोटर में तथा चालक के आन्तरिक पृष्ठ पर आवेश शून्य होगा तथा सम्पूर्ण आवेश Q चालक के बाह्य पृष्ठ पर होगा।

(b) इस स्थिति में कोटर में उपस्थित आवेश q के कारण चालक की आन्तरिक सतह पर –q आवेश तथा बाह्य पृष्ठ पर +q आवेश प्रेरित होगा फलतः बाह्य पृष्ठ पर कुल आवेश Q + q होगा।

(c) चालक आवरण के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है अतः सुग्राही उपकरण को चालक आवरण से परिबद्ध करने पर प्रबल स्थिर विद्युत क्षेत्र से परिरक्षित किया जा सकता है।

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न-उत्तर

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. एक समरूप आवेशित ठोस अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता अधिकतम होती है
(अ) केन्द्र पर
(ब) केन्द्र से सतह के मध्य के किसी बिन्दु पर
(स) सतह पर (द) अनन्त पर

2. विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E वाले स्थान पर ऊर्जा घनत्व (निर्वात में) होता है
(अ) $\frac{1}{2}\epsilon_0 E$ (ब) $\frac{E^2}{2\epsilon_0}$
(स) $\frac{1}{2}E\epsilon_0^2$ (द) $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

3. 0.2 मीटर भुजा वाले घन के केन्द्र पर 1 μC का आवेश रखा गया है। घन के प्रत्येक फलक से निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान V/m में होगा
(अ) 1.12×10^4 (ब) 2.2×10^4
(स) 1.88×10^4 (द) 3.14×10^4

4. एक घन के अन्दर $\pm q$ आवेशों वाले दो द्विध्रुव एक दूसरे के लम्बवत् रखे हैं तो घन से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स का मान होगा
(अ) $\frac{q}{\epsilon_0}$ (ब) $\frac{4q}{\epsilon_0}$
(स) शून्य (द) $\frac{2q}{\epsilon_0}$

5. एक साबुन के बुलबुले को ऋणात्मक आवेशित करने पर उसकी त्रिज्या
(अ) कम हो जाती है
(ब) बढ़ जाती है
(स) अपरिवर्तित रहती है
(द) जानकारी अपूर्ण है अतः कुछ नहीं कह सकते

6. एक गोले में आवेश q स्थित है तथा इससे निर्गत विद्युत फ्लक्स $\frac{q}{\epsilon_0}$ है। गोले की त्रिज्या आधी करने पर निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान कितना परिवर्तित होगा?
(अ) पहले से 4 गुना हो जायेगा
(ब) पहले से एक चौथाई हो जायेगा
(स) पहले से आधा हो जायेगा
(द) अपरिवर्तित रहेगा

7. वायु में स्थित इकाई धनावेश से निकलने वाले संपूर्ण विद्युत फ्लक्स का मान है
(अ) ϵ_0 (ब) ϵ_0^{-1}

(स) $(4\pi \epsilon_0)^{-1}$ (द) $4\pi \epsilon_0$

8. दो चालक गोलों की त्रिज्याएँ a एवं b हैं। इन्हें समान पृष्ठ आवेश घनत्व से आवेशित करने पर इनकी सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रताओं का अनुपात होगा

(अ) $b^2 : a^2$ (ब) $1 : 1$

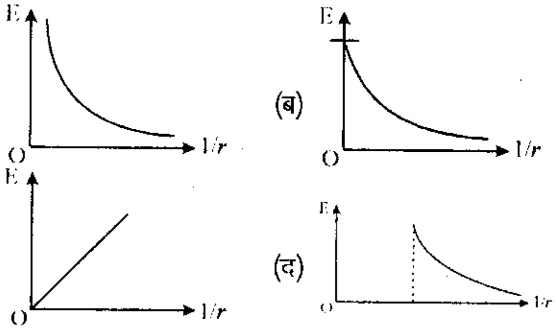
(स) $a^2 : b^2$ (द) $b : a$

9. दो चालक गोलों की त्रिज्याएँ a एवं b हैं। इन्हें समान आवेश से आवेशित करने पर इनकी सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रताओं का अनुपात होगा

(अ) $b^2 : a^2$ (ब) $1 : 1$

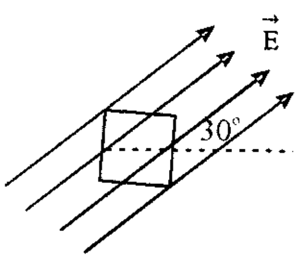
(स) $a^2 : b^2$ (द) $b : a$

10. एक लम्बे सीधे आवेशित तार के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का $1/r$ के साथ परिवर्तन आरेख है



चित्र 2.46

11. क्षैतिज के समान्तर स्थापित एकसमान विद्युत क्षेत्र E में एक वर्ग चित्रानुसार इस प्रकार स्थित है कि वर्ग के तल पर खींची गई रेखा विद्युत क्षेत्र के साथ 30° का कोण बनाती है। यदि वर्ग की भुजा a है तो वर्ग से पारित विद्युत फ्लक्स का मान होगा



चित्र 2.47

(अ) $\frac{\sqrt{3}Ea^2}{2}$ (ब) $\frac{Ea^2}{2}$

(स) शून्य (द) इनमें से कोई नहीं

उत्तरमाला

1.(स) 2.(द) 3.(स) 4.(स) 5.(ब)
6.(द) 7.(ब) 8.(ब) 9.(अ) 10.(स)
11.(ब)

हल एवं संकेत (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. (स) $E_{सतह} = \frac{Kq}{R^2}$

2. (द) विद्युत ऊर्जा घनत्व $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

3. (स) घन के प्रत्येक फलक से निर्गत विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \frac{1}{6}\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{10^{-6}}{6 \times 8.85 \times 10^{-12}}$$
$$= 1.88 \times 10^4 \text{ V/m}$$

4. (स) $\phi = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0} = 0$

$\because$ द्विध्रुव के लिए $\Sigma q = 0$

5. (ब) साबुन के बुलबुले को ऋणात्मक आवेशित करने पर उसके ऊपर आवेश के कारण बाहर की ओर दबाव लगता है, जिसके कारण उसका आयतन बढ़ जाता है अर्थात् बुलबुले की त्रिज्या बढ़ जाती है।

6. (द) विद्युत फ्लक्स $\frac{q}{\epsilon_0}$ का मान गोले की त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता है अर्थात् फ्लक्स अपरिवर्तित रहेगा।

7. (ब) गाउस के नियम से विद्युत फ्लक्स $\phi = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0}$

Σq का मान इकाई धनावेश होने पर

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} = \epsilon_0^{-1}$$

8. (ब) आवेशित गोले के पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

पृष्ठ आवेश घनत्व σ का मान समान होने पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रताओं का अनुपात $= 1 : 1$

9. (अ) आवेशित गोले के पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{Kq}{R^2}$$

$\therefore$ समान आवेश से आवेशित करने पर

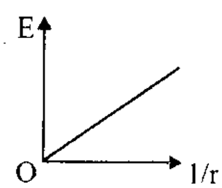
$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{b^2}{a^2}$$

$\Rightarrow$ $E_a : E_b = b^2 : a^2$

10. (स) एक लम्बे सीधे आवेशित तार के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{2K\lambda}{r}$$

$$E \propto \frac{1}{r}$$



चित्र 2.48

11.(ब) वर्ग की प्रत्येक भुजा $= a$

$\therefore$ वर्ग का क्षेत्रफल $dS = a^2$

विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ व क्षेत्रफल सदिश $d\vec{S}$ के बीच कोण

$$\theta = 90^\circ - 30^\circ$$

या $$\theta = 60^\circ$$

∴ वर्ग से पारित विद्युत फ्लक्स

$$d\phi = E.dS\cos\theta$$
$$= E.a^2\cos60^\circ$$
$$= Ea^2 \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{Ea^2}{2}$$

सही विकल्प (ब) है।

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में रखे किसी क्षेत्रफल अल्पांश से निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान शून्य कब होता है?

उत्तर– विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में रखे किसी क्षेत्रफल अल्पांश $d\vec{S}$ से निर्गत विद्युत फ्लक्स

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S} = EdS\cos\theta$$

यदि $\theta = 90^\circ$ हो, तो $d\phi = 0$

इस प्रकार विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा क्षेत्रफल अल्पांश $d\vec{S}$ परस्पर लम्बवत् होने पर निर्गत फ्लक्स शून्य होगा।

प्र.2. एक समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता किन स्थितियों पर शून्य होती है?

उत्तर– एक समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता गोले के केन्द्र तथा अनन्त पर शून्य होती है।

∵ $$E_{in} = \frac{Kq}{R^3}r$$

तथा $$E_{out} = \frac{Kq}{r^2}$$

प्र.3. आवेशित चालक के इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाले बल का सूत्र लिखिए तथा इसकी दिशा भी बताइए।

उत्तर– आवेशित चालक के इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाला बल $= \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

इसकी दिशा पृष्ठ के अभिलम्बवत् बाहर की ओर होती है।

प्र.4. विद्युत आवेश के कारण ऊर्जा कहाँ संग्रहित होती है?

उत्तर– विद्युत आवेश के कारण ऊर्जा विद्युत क्षेत्र के आयतन में संग्रहित होती है।

प्र.5. एक d व्यास के चालक गोले को Q आवेश दिया गया है। गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र का मान क्या होगा?

उत्तर– किसी चालक गोले को दिया गया आवेश गोले की सतह पर एक समान रूप से वितरित हो जाता है, जिससे

$$E_{in} = 0$$

अर्थात् आवेशित चालक गोले के भीतर विद्युत क्षेत्र का मान शून्य होगा।

प्र.6. यदि कूलॉम नियम में $1/r^2$ के स्थान पर निर्भरता $1/r^3$ होती तो क्या गाउस नियम सत्य होता?

उत्तर– नहीं, क्योंकि गाउस नियम केवल उन्हीं क्षेत्रों के लिए लागू होता है, जो क्षेत्र व्युत्क्रम वर्ग नियम का पालन करते हैं।

प्र.7. यदि किसी गाउसीयन पृष्ठ में परिबद्ध नेट आवेश, धनात्मक है तो पृष्ठ से पारित कुल विद्युत फ्लक्स की प्रकृति होगी?

उत्तर– यदि किसी गाउसीयन पृष्ठ में परिबद्ध नेट आवेश धनात्मक है, तो पृष्ठ से पारित कुल विद्युत फ्लक्स धनात्मक होगा तथा फ्लक्स निर्गत होगा।

प्र.8. यदि विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी बन्द पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स शून्य है तो पृष्ठ के संदर्भ में क्या कहा जा सकता है?

उत्तर– यदि विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी बंद पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स शून्य है, तो पृष्ठ में कुल आवेश $\Sigma q = 0$ है तथा पृष्ठ में प्रवेशित फ्लक्स का मान पृष्ठ से निर्गत फ्लक्स के बराबर है।

प्र.9. यदि किसी गाउसियन पृष्ठ के अन्दर नेट आवेश शून्य है तो क्या इसका अर्थ यह है कि पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता भी शून्य होगी?

उत्तर– नहीं, क्योंकि विद्युत फ्लक्स $\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = 0$ से यह स्थिति तब भी हो सकती है, जबकि $\vec{E}$ तथा $d\vec{S}$ परस्पर लम्बवत् हो, तब

$\vec{E}.d\vec{S} = EdS\cos90^\circ = 0$

प्र.10. रेखीय आवेश घनत्व को परिभाषित कीजिए।

उत्तर– प्रति एकांक लम्बाई आवेश की मात्रा को रेखीय आवेश घनत्व कहते हैं।

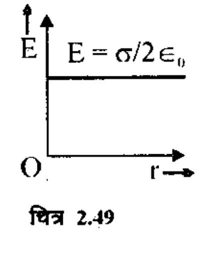
$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{चालक की लम्बाई}}$$

प्र.11. σ पृष्ठ आवेश घनत्व वाली एक आवेशित परत के एक ओर से दूसरी ओर जाने पर विद्युत क्षेत्र में कितना परिवर्तन होगा?

उत्तर– विद्युत क्षेत्र में परिवर्तन $= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

प्र.12. किसी समरूप आवेशित अचालक परत के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को दूरी के साथ आरेखित कीजिए।

उत्तर–



चित्र 2.49

प्र.13. एक समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण उसके केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान कितना होता है?

उत्तर– एक समरूप आवेशित अचालक गोले के भीतर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E = \frac{Kq}{R^3}r$

केन्द्र के लिए $r = 0$

∴ समरूप आवेशित अचालक गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E = 0$

प्र.14. यदि आवेश q एक गोले के केन्द्र पर स्थित है। अब यदि आवेश को समान आयतन के बेलनाकार पृष्ठ के अन्दर स्थापित किया जाए तो दोनों स्थितियों में निर्गत विद्युत फ्लक्सों का अनुपात क्या होगा?

उत्तर– ∵ गाउस के नियमानुसार बंद पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान बंद पृष्ठ की आकृति पर निर्भर नहीं करता है। अत: दी गई दोनों स्थितियों में निर्गत विद्युत फ्लक्सों का अनुपात 1 : 1 होगा।

लघुत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. विद्युत फ्लक्स को समझाइये। इसका SI मात्रक एवं विमाएँ लिखिए।

उत्तर– विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी क्षेत्रफल से अभिलम्बवत् गुजरने वाली कुल विद्युत बल रेखाओं की संख्या को विद्युत फलक्स कहते है। इसे ϕ_E द्वारा व्यक्त करते हैं।

यदि विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में dS क्षेत्रफल वाला पृष्ठ स्थित हो, तो पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स

$$d\phi = EdS\cos\theta = \vec{E}.d\vec{S}$$

जहाँ θ क्षेत्रफल सदिश $d\vec{S}$ का विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ से बना कोण है।

विद्युत फ्लक्स का SI मात्रक : $\frac{\text{न्यूटन}}{\text{कूलॉम}} \times \text{मीटर}^2$ या वोल्ट × मीटर

विद्युत फ्लक्स की विमा $[ML^3T^{-3}A^{-1}]$

प्र.2. रेखीय आवेश घनत्व को समझाइये। इसका मात्रक लिखिए।

उत्तर– रेखीय आवेश घनत्व (Linear charge density) (λ)

(a) प्रति एकांक लम्बाई आवेश की मात्रा को रेखीय आवेश घनत्व कहते हैं।

(b) $\lambda = \frac{q}{l} = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{चालक की लम्बाई}}$

(c) इसकी इकाई कूलॉम/मी. होती है।

प्र.3. पृष्ठ आवेश घनत्व को समझाइये। इसका मात्रक लिखिए।

उत्तर– पृष्ठ आवेश घनत्व (Surface charge density) (σ)

(a) किसी चालक में प्रति एकांक क्षेत्रफल आवेश की मात्रा को पृष्ठ आवेश घनत्व कहते है।

(b) $\sigma = \frac{q}{A} = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{क्षेत्रफल}}$

(c) इसकी इकाई $\frac{\text{कूलॉम}}{\text{मी.}^2}$ होती है।

प्र.4. आयतन आवेश घनत्व को समझाइये। इसका मात्रक लिखिए।

उत्तर– आयतन आवेश घनत्व (Volume charge density) (ρ)

(a) प्रति एकांक आयतन आवेश की मात्रा को आयतन आवेश घनत्व कहते हैं।

(b) $\rho = \frac{q}{V} = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{आयतन}}$

(c) इसकी इकाई कूलॉम/मी.^{3} होती है।

प्र.5. स्थिर वैद्युतिकी के लिए गाउस नियम का प्रतिपादित कीजिए।

उत्तर– गाउस के नियम के अनुसार निर्वात् (अथवा वायु) में उपस्थित किसी बन्द पृष्ठ से पारित विद्युत फलक्स का कुल मान उस बन्द पृष्ठ से घिरे आयतन में उपस्थित नैट आवेश (Σq) तथा $\frac{1}{\epsilon_0}$ के गुणनफल के बराबर होता है अर्थात्

$$\phi = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} \quad .....(1)$$

यहाँ ϵ_0 निर्वात की विद्युतशीलता है।

प्र.6. किसी चालक वस्तु पर आवेश सदैव बाह्य सतह पर ही क्यों होता है? स्पष्ट कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 2.4.5 पर देखें।

प्र.7. साबुन का बुलबुला आवेशित करने पर आकार में क्यों बढ़ जाता है?

उत्तर– साबुन के बुलबुले को आवेशित करने पर उसके ऊपर आवेश के कारण बाहर की ओर दबाव लगता है, जिसके कारण उसका आयतन बढ़ जाता है अर्थात् साबुन का बुलबुला आवेशित करने पर आकार में बढ़ जाता है।

प्र.8. आवेशित चालक के पृष्ठ पर विद्युत बल एवं विद्युत दाब के व्यंजक स्थापित कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 2.5 पर देखें।

प्र.9. विद्युत क्षेत्र के इकाई आयतन में संचित ऊर्जा का व्यंजक स्थापित कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 2.6 पर देखें।

प्र.10. आवेशित साबुन के बुलबुले के संतुलन के लिए अधिकतम पृष्ठ आवेश घनत्व का व्यंजक स्थापित कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 2.7 पर देखें।

प्र.11. कूलॉम नियम से गाउस नियम का सत्यापन कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 2.3.1 पर देखें।

प्र.12. आप एक कार में जा रहे हैं। बिजली गिरने वाली है तो अपनी सुरक्षा के लिए क्या करेंगे?

उत्तर– खिड़की बंद कर लेंगें क्योंकि बिजली गिरने पर सम्पूर्ण आवेश कार के बाहरी पृष्ठ पर ही रहेगा।

प्र.13. दो सीधे समान्तर लम्बे रेखीय आवेशों पर रेखीय आवेश घनत्व λ_1 एवं λ_2 हैं। इनके मध्य प्रति इकाई लम्बाई लगने

वाले बल का व्यंजक स्थापित कीजिए।

उत्तर– रेखीय आवेश घनत्व λ_1 वाले तार के कारण d दूरी पर विद्युत क्षेत्र–

$\vec{E} = K\dfrac{2\lambda_1}{d}\hat{n}$, तार पर लम्ब की दिशा में एकांक सदिश $\hat{n}$ है।

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता बिन्दु पर स्थित प्रति एकांक धन आवेश पर बल का मान होती है। दूसरे तार के एक अल्पांश पर विचार करते हैं जिसकी लम्बाई δl है। अल्पांश पर आवेश $\delta q = \lambda_2 \delta l$, अतः अल्पांश पर बल–

$$\vec{F} = \vec{E}(\delta q) = K\frac{2\lambda_1}{d}(\lambda_2 \delta l)\hat{n}$$

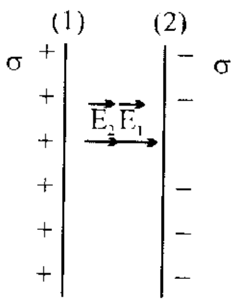
∴ दूसरे तार पर प्रति एकांक लम्बाई बल

$$= \frac{\vec{F}}{\delta l} = K\frac{2\lambda_1\lambda_2}{d}\hat{n}$$

यह बल प्रतिकर्षण बल होगा।

प्र.14. दो अनन्त विस्तार के समतल समान्तर तलों पर क्रमशः समान आवेश घनत्व $+\sigma$ एवं $-\sigma$ हैं। इनके मध्य किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान क्या होगा?

उत्तर– इस स्थिति में समांतर तलों के मध्य किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र एक ही दिशा में होते हैं।



चित्र 2.50

$$E = E_1 + E_2$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

निबंधात्मक प्रश्न

प्र.1 त्रिज्या R के गोलीय चालक को q आवेश से आवेशित करने पर निम्न स्थितियों में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए।

(अ) $r > R$ (ब) $r < R$

(स) गोले की सतह पर (द) गोले के केन्द्र पर

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को दूरी के साथ आरेखित कीजिये।

उत्तर– अनुच्छेद 2.4.4 पर देखें।

प्र.2 समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण (अ) गोले के बाहर (ब) गोले की सतह पर (स) गोले के अन्दर (द) गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए तथा विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को दूरी के साथ आरेखित कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 2.4.6 पर देखें।

प्र.3 गाउस नियम की सहायता से अपरिमित समरूप आवेशित तार के कारण इसके निकट स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए। दूरी के साथ तीव्रता में परिवर्तन को आरेखित कीजिए।

उत्तर– अनुच्छेद 2.4.1 पर देखें।

प्र.4 गाउस नियम की सहायता से अपरिमित समरूप आवेशित अचालक परत के कारण इसके निकट स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए। विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की निर्भरता समझाइये।

उत्तर– अनुच्छेद 2.4.2 पर देखें।

प्र.5 एक समरूप आवेशित अपरिमित चालक पट्टिका के कारण इसके निकट स्थित बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा ज्ञात कीजिए। गाउस नियम का उपयोग कर इसके लिए विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक स्थापित कीजिए। आवश्यक चित्र बनाइये।

उत्तर– अनुच्छेद 2.4.3 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. किसी बन्द पृष्ठ में प्रवेशित फ्लक्स **400 Nm²/C** तथा निर्गत विद्युत फ्लक्स **800 N m²/C** है। बन्द पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश का मान क्या है?

हल– दिया गया है, प्रवेशित फ्लक्स $\phi_{in} = 400\dfrac{N}{C}\times m^2$,

निर्गत फ्लक्स $\phi_{out} = 800\dfrac{N}{C}\times m^2$

∴ नेट फ्लक्स $\phi_{net} = \phi_{out} - \phi_{in}$

$$\phi_{net} = 800 - 400 = 400\frac{N}{C}\times m^2$$

गाउस के नियम से $\phi = \dfrac{\Sigma q}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow$ $\Sigma q = \epsilon_0 \phi$

$= 8.85 \times 10^{-12} \times 400$

$= 3.54 \times 10^{-9}$ C

$= 3.54$ nC

प्र.2. **2.4** मी. व्यास के किसी एकसमान आवेशित चालक गोले का पृष्ठ आवेश घनत्व **80 μC/m²** है। गोले का आवेश एवं गोले के पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है– त्रिज्या $R = \dfrac{2.4}{2} = 1.2$ मी.

$\sigma = 80\ \mu C/$मी.$^2 = 80 \times 10^{-6}$ कूलॉम/मी.^{2}

(a) आवेश $q = \sigma \times 4\pi R^2$

$= 80 \times 10^{-6} \times 4 \times 3.14 \times 1.2 \times 1.2 = 1.45 \times 10^{-3}$ कूलॉम

(b) निर्गत फ्लक्स $\phi = \dfrac{q}{\epsilon_0} = \dfrac{1.45 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12}}$

$= 1.63 \times 10^8$ न्यूटन–मी.^{2}/कूलॉम

प्र.3. एक बिन्दु आवेश q, एक a मीटर भुजा वाले (i) घन के केन्द्र पर (ii) घन की एक कोर पर (iii) घन के एक तल पर रखा है। घन से सम्बद्ध कुल विद्युत फ्लक्स तथा घन के प्रत्येक फलक से सम्बद्ध फ्लक्स की गणना कीजिए।

हल– (i) जब आवेश घन के केन्द्र पर स्थित होगा तब सम्पूर्ण घन से

निर्गत फ्लक्स $\phi = \dfrac{q}{\epsilon_0}$

घन के प्रत्येक फलक से निर्गत फ्लक्स $\phi = \dfrac{q}{6\epsilon_0}$

(ii) घन के कोर के जिस बिन्दु पर बिन्दु आवेश है उसे केन्द्र मानकर एक खोखले गोले की कल्पना करो जो घन की कोर को दो बिन्दुओं पर काटे। घन का वह आयतन जो खोखले गोले के अन्दर पड़ेगा वह खोखले गोले के कुल आयतन का एक-चौथाई होगा, इसलिये बिन्दु आवेश पर घन के द्वारा बना ठोस कोण $\left(\dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ\right)$ बनेगा। यदि बिन्दु आवेश का मान q हो तब बिन्दु आवेश के कारण घन से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \frac{q}{4\epsilon_0}$$

घन के दो फलक जिनकी कोर पर बिन्दु आवेश है उनसे कोई विद्युत फ्लक्स नहीं गुजरेगा क्योंकि विद्युत फ्लक्स की दिशा उन पर उनके समान्तर है और घन से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स शेष अन्य फलकों, जिनकी संख्या 4 है, पर समान रूप से बँट जायेगा। इसलिये कोर के दो फलकों को छोड़कर अन्य प्रत्येक फलक से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \frac{1}{4} \times \frac{q}{4\epsilon_0} = \frac{q}{16\epsilon_0}$$

(iii) घन के जिस फलक पर बिन्दु आवेश रखा है उस बिन्दु को केन्द्र मानकर एक ऐसे खोखले गोले की कल्पना करो जो उसे एक पूर्ण वृत्त में काटे। खोखले गोले का आयतन जो घन के अन्दर होगा वह खोखले गोले के कुल आयतन का आधा होगा और वह बिन्दु आवेश पर 180° का ठोस कोण बनायेगा। यदि बिन्दु आवेश का मान q हो तब घन से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स q आवेश से निकलने वाले विद्युत फ्लक्स का आधा होगा। इसलिये घन से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

पुन: चूँकि जिस घन के फलक पर बिन्दु आवेश है उस पर विद्युत फ्लक्स की दिशा फलक के समान्तर है इसलिये उस पर विद्युत फ्लक्स का मान शून्य होगा और विद्युत फ्लक्स शेष अन्य फलकों से समान रूप में निकलेगा।

इसलिये जिन फलकों से विद्युत फ्लक्स गुजरता है उनके प्रत्येक फलक पर विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \frac{1}{5} \times \frac{q}{2\epsilon_0} = \frac{q}{10\epsilon_0}$$

प्र.4. एक गोले के केन्द्र से 20 सेमी. दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता 10 V / m है। गोले की त्रिज्या 5 सेमी. है। गोले के केन्द्र से 8 सेमी. दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है – $R = 5$ सेमी $= 5 \times 10^{-2}$ मी.,

$r = 20$ सेमी. $= 20 \times 10^{-2}$ मी.

$\because r > R$

$$E_{out} = 10\ \frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$$

$r' = 8$ सेमी. $= 8 \times 10^{-2}$ मी.

$\because r' > R \qquad E'_{out} = ?$

$$\because \quad E_{out} = \frac{Kq}{r^2}$$

$$E'_{out} = \frac{Kq}{r'^2}$$

$\because$ q नियत है।

$$\therefore \quad \frac{E'_{out}}{E_{out}} = \frac{r^2}{r'^2} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E'_{out}}{10} = \left(\frac{20 \times 10^{-2}}{8 \times 10^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \quad E'_{out} = \frac{25 \times 10}{4} = 62.5\ \frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$$

प्र.5. एक अनन्त रेखीय आवेश 2 सेमी. दूरी पर 9×10^4 N/C का विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करता है। रेखीय आवेश घनत्व ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है–$r = 2$ सेमी. $= 2 \times 10^{-2}$ मी., $E = 9 \times 10^4$ न्यूटन/कूलॉम

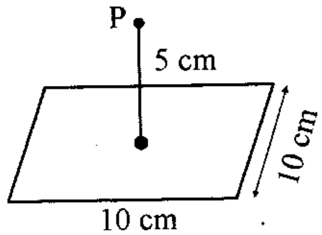
$$\because \quad E = \frac{2K\lambda}{r} \text{ अत: } \lambda = \frac{Er}{2K}$$

या

$$\lambda = \frac{9 \times 10^4 \times 2 \times 10^{-2}}{2 \times 9 \times 10^9}$$

$= 10^{-7}$ कूलॉम/मी.

प्र.6. चित्रानुसार 10 सेमी भुजा के किसी वर्ग के केन्द्र से ठीक 5 सेमी ऊँचाई पर कोई +10 μC आवेश रखा है। इस वर्ग से गुजरने वाले विद्युत फ्लक्स का परिमाण क्या है?



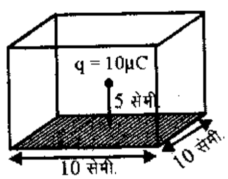
चित्र 2.51

हल– माना दिया गया वर्ग एक 10 सेमी भुजा के घन का फलक है तब दिया गया आवेश घन के केन्द्र पर स्थित होगा।

अतः सम्पूर्ण घन से निर्गत फ्लक्स $\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$

घन के एक फलक से निर्गत फ्लक्स $\phi_1 = \frac{q}{6\epsilon_0}$

या $$\phi_1 = \frac{10\times10^{-6}}{6\times8.85\times10^{-12}}$$
$= 1.88 \times 10^5$ न्यूटन–मी.^{2}/कूलॉम



चित्र 2.52

प्र.7. एक धातु की प्लेट का क्षेत्रफल 10^{-2} मी.^{2} है प्लेट को 10 μC आवेश दिया गया है। प्लेट के निकट बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार–
धातु की प्लेट का क्षेत्रफल $A = 10^{-2}$ मी.^{2}
प्लेट का आवेश $q = 10 \times 10^{-6}$ कूलॉम
$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ मात्रक

विद्युत क्षेत्र $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

∵ पृष्ठ आवेश घनत्व

$$\sigma = \frac{q}{2A}$$

क्योंकि आवेश प्लेट के दोनों ओर समान रूप से वितरित होगा।

$$\therefore \quad E = \frac{q}{2A\epsilon_0}$$

$$E = \frac{10\times10^{-6}}{2\times10^{-2}\times8.85\times10^{-12}}$$
$= 5.652 \times 10^7$ वोल्ट/मी. (पृष्ठ के लम्ब की दिशा में)

प्र.8. 1 मी.^{2} क्षेत्रफल के दो धात्वीय पृष्ठ एक दूसरे के समान्तर **0.05** मी. दूरी पर रखे हैं। दोनों पर समान परिमाण के परंतु विपरीत आवेश हैं। यदि दोनों के मध्य विद्युत क्षेत्र का मान **55 V/m** है तो प्रत्येक पर आवेश का मान ज्ञात कीजिए।

हल– समान परिमाण एवं विपरीत प्रकृति के आवेशों से आवेशित प्लेटों के बीच विद्युत क्षेत्र–

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

जहाँ पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma = \frac{\text{आवेश}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{q}{A}$

$$\therefore \quad E = \frac{q}{A\epsilon_0}$$

या $q = EA\epsilon_0$
प्रश्नानुसार, $E = 55$ वोल्ट/मी.
$A = 1$ मी.^{2}
$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ मी.कि.से. मात्रक
$q = 55 \times 1 \times 8.85 \times 10^{-12} = 4.87 \times 10^{-10}$ कूलॉम

प्र.9. एक 9×10^{-5} ग्राम द्रव्यमान का कण, एक समरूप आवेशित लम्बी क्षैतिज परत, जिस पर पृष्ठ आवेश घनत्व 5×10^{-5} C/m^2 है के ऊपर कुछ दूरी पर रखा जाता है। कण पर कितना आवेश हो कि इसे स्वतन्त्र छोड़ने पर यह नीचे न गिरे?

हल– कण का द्रव्यमान $m = 9 \times 10^{-5}$ ग्राम
$= 9 \times 10^{-8}$ किग्रा

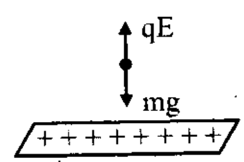
समरूप आवेशित क्षैतिज परत पर पृष्ठ आवेश घनत्व
$\sigma = 5 \times 10^{-5}$ C/m^2

माना कि कण पर कुल आवेश की मात्रा q होने पर, उसे आवेशित पृष्ठ के ऊपर कुछ दूरी से स्वतंत्र छोड़ने पर यह नीचे नहीं गिरता है। इस स्थिति में बलों के संतुलन से

कण पर ऊपर की ओर विद्युत बल = कण का भार (नीचे की ओर)

$$qE = m.g$$

$$q \times \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = mg$$



चित्र 2.53

या $$q = \frac{2\epsilon_0 m.g}{\sigma}$$

या $$q = \frac{2\times8.85\times10^{-12}\times9\times10^{-8}\times9.8}{5\times10^{-5}}$$

या $q = 312.23 \times 10^{-15}$ C

या $q = 3.12 \times 10^{-13}$ C

प्र.10. एक X – Y तल में स्थित लम्बी समरूप आवेशित परत पर पृष्ठ आवेश घनत्व 5×10^{-16} C / m^2 है। एक 0.1 मी. त्रिज्या के

वृत्ताकार लूप जिसकी अक्ष Z- अक्ष से 60° का कोण बनाती है, से पारित विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिए।

हल– z अक्ष से लूप की अक्ष का कोण

$= \vec{E}$ व $d\vec{S}$ के बीच का कोण

$= \theta = 60^\circ$

x – y तल में स्थित आवेशित परत पर पृष्ठ आवेश घनत्व

$$\sigma = 5 \times 10^{-16}\ C/m^2$$

लूप की त्रिज्या $r = 0.1$ मी.

∴ लूप का क्षेत्रफल $S = \pi r^2$

$$S = 3.14 \times 0.1 \times 0.1$$
$$S = 3.14 \times 10^{-2}\ m^2$$

आवेशित परत के कारण विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{5\times10^{-16}}{2\times8.85\times10^{-12}}$$

∴ लूप से पारित विद्युत फ्लक्स

$$\phi = E.S\cos\theta$$

$$\phi = \frac{5\times10^{-16}}{2\times8.85\times10^{-12}} \times 3.14 \times 10^{-2} \times \cos60^\circ$$

या $\phi = \frac{5\times3.14}{2\times8.85}\times\frac{1}{2}\times10^{-6}$

या $\phi = 0.4435 \times 10^{-6}$

या $\phi = 4.435 \times 10^{-7}$

$= 4.44 \times 10^{-7}\ Nm^2/C$

प्र.11. 10^3 eV ऊर्जा का इलेक्ट्रॉन 5 मिमी. दूरी से एक अनन्त विस्तार की चालक प्लेट की ओर लम्बवत् दागा जाता है। चालक प्लेट पर न्यूनतम पृष्ठ आवेश घनत्व की गणना कीजिए कि इलेक्ट्रॉन प्लेट से न टकराये।

हल– दिया गया है–

$V = 1000$ वोल्ट

ऊर्जा $W = eV = 1000\ e$

$d = 5$ मिमी. $= 5 \times 10^{-3}$ मीटर

$\sigma = ?$

e आवेश पर बल $F = eE = \frac{e\sigma}{\epsilon_0}$

$$W = F.d = \frac{e\sigma}{\epsilon_0}\cdot d$$

$$\therefore \quad \frac{e\sigma}{\epsilon_0}\cdot d = 1000\, e$$

अतः न्यूनतम पृष्ठ आवेश घनत्व

$$\sigma = \frac{1000\epsilon_0}{d}$$

$$\sigma = \frac{1000\times8.85\times10^{-12}}{5\times10^{-3}} = 1.77\times10^{-6}\ C/m^2$$

प्र.12. एक साबुन के बुलबुले के अन्दर एवं बाहर दाब समान है। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव **0.04 N / m** है तथा बुलबुले का व्यास **4** सेमी. है। बुलबुले पर आवेश का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है– $T = 0.04$ N/m,

$$r = \frac{4}{2}\text{ सेमी.} = 2\text{ सेमी.} = 2\times10^{-2}\text{ मी.}$$

यदि साबुन के आवेशित बुलबुले में दाबांतर शून्य हो, तो बुलबुले पर आवेश

$$q = 4\pi\sqrt{8T\epsilon_0 r^3} \qquad \left[\because \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{4T}{r} \text{ जबकि } \sigma = \frac{q}{4\pi r^2}\right]$$

$$q = 4\times3.14\sqrt{8\times0.04\times8.85\times10^{-12}\times(2\times10^{-2})^3}$$

$$q = 12.56\sqrt{22.656\times10^{-18}}$$

$$q = 59.8\times10^{-9}\ C$$

$$q = 59.8\ nC$$

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

महत्वपूर्ण वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. एक आवेशित गोले के कारण उसके पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र 10 किलो वोल्ट प्रति मी. है। गोले के केन्द्र से उसके व्यास के बराबर दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता क्या होगी ?
(अ) 2.5 न्यूटन/कूलॉम (ब) 2500 न्यूटन/कूलॉम
(स) 5 किलो वोल्ट/मी. (द) 5 वोल्ट/मी.
2. धातु की बड़ी आवेशित पट्टिकाओं जिनमें प्रत्येक का क्षेत्रफल A है तथा जिन पर आवेश क्रमशः q तथा –q है, एक–दूसरे से d दूरी पर रखी गयी हैं। दोनों पट्टिकाओं के मध्य विद्युत क्षेत्र का मान होगा–
(अ) $2q/\epsilon_0 A$ (ब) qA/ϵ_0
(स) $q/\epsilon_0 A$ (द) $A/q\epsilon_0$
3. एक अनन्त रेखीय आवेश के एकांक लम्बाई पर $4\mu C/m$ आवेश है, उससे 2 मी. लम्बवत् दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता होगी– $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9 Nm^2/C^2$
(अ) 1.8×10^4 N/C (ब) 3.6×10^4 N/C
(स) 9×10^3 N/C (द) शून्य
4. एक समान विद्युत क्षेत्र में रखा हुआ विद्युत द्विध्रुव अनुभव करता है–
(अ) केवल बल आघूर्ण (ब) केवल एक बल
(स) एक बल व आघूर्ण (द) उपरोक्त में से कोई नहीं।

हल एवं संकेत

1. (ब) $E \propto \frac{1}{r^2} \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$

$E_1 = 10\times10^3$ वोल्ट/मीटर

$r_2 = 2R$
$r_1 = R,$

2. (स) $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q/A}{\epsilon_0} = \frac{q}{A\epsilon_0}$

3. (ब) $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, $\lambda = 4 \times 10^{-6}$ C/m 4. (अ)

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. क्यों गॉउस नियम को आवेशित धातु के धन के बाहर किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र का मान ज्ञात करने हेतु प्रयुक्त नहीं किया जा सकता है ?

उत्तर–चूँकि जिस बाह्य बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र ज्ञात करना है उससे गुजरती हुई किसी काल्पनिक बन्द सतह जिसमें कि घन हो उसकी कल्पना नहीं की जा सकती है जिसके लम्बवत् घन के कारण विद्युत् क्षेत्र हो।

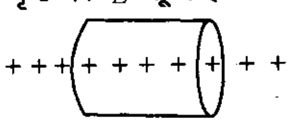
प्र.2. क्या किसी आवेशित वस्तु का सम्पूर्ण आवेश अन्य वस्तु को स्थानान्तरित किया जा सकता है ? यदि हाँ तो कैसे, यदि नहीं तो क्यों ?

उत्तर– हाँ, किसी वस्तु A का कुल आवेश अन्य चालक वस्तु B को स्थानान्तरित किया जा सकता है। जब वस्तु A को वस्तु B पूर्ण रूप से ढक ले तथा इसको किसी तार द्वारा सम्बन्धित कर दिया जाय। यह आवेश की मूल प्रकृति के कारण है क्यों कि आवेश सदैव चालक की बाहरी सतह पर स्थित रहता है।

प्र.3. एक बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ की अक्ष, एकसमान रूप से वितरित धन आवेश की अनन्त रेखा के अनुदिश है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। उत्तर दीजिये :

(i) किस पृष्ठ के लिये विद्युत फ्लक्स शून्य है ?

(ii) किस पृष्ठ पर $\vec{E}$ शून्य है ?



चित्र 2.54

(iii) किस पृष्ठ पर $|\vec{E}|$ नियत है।

(iv) किस पृष्ठ पर $|\vec{E}|$ बदलता है (varies)

उत्तर– (i) रेखीय आवेश, जिसका रेखीय घनत्व λ है, से r दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ है तथा त्रिज्यतः बाहर की ओर दिष्ट है। अतः समतल फलक के लिये विद्युत फ्लक्स $\int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ शून्य है।

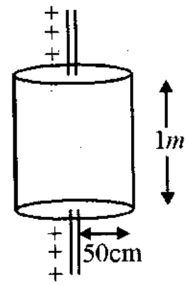
(ii) रेखीय आवेश से परिमित दूरी पर $\vec{E}$ शून्य नहीं हो सकता ।

(iii) बेलन के वक्र पृष्ठ पर $|\vec{E}|$ नियत है।

(iv) बेलन के वक्र समतल फलक पर $|\vec{E}|$ बदलता है। रेखीय आवेश से दूरी बढ़ने पर यह घटता है।

आंकिक प्रश्न–

प्र.1. 1 मिमी. त्रिज्या वाले एक लम्बे, सीधे तार पर विद्युत आवेश समान रूप से वितरित है। तार की 1 सेमी. लम्बाई पर आवेश का मान Q कूलॉम है। एक अन्य बेलनाकार पृष्ठ जिसकी त्रिज्या 50 सेमी. तथा लम्बाई 1 मी. है, इस तार को समान (सममित) रूप से घेरे है, जैसाकि चित्र में दर्शाया गया है। इस बेलनाकार पृष्ठ से गुजरने वाले कुल वैद्युत अभिवाह (फ्लक्स) का मान ज्ञात कीजिए।

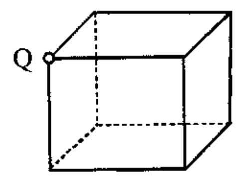


चित्र 2.55

हल– दिया गया है–प्रति सेमी. लम्बाई पर आवेश Q है इसलिए 100 cm लम्बाई पर आवेश = 100Q $\Rightarrow$ बेलनाकार पृष्ठ से निकलने वाला विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \frac{100Q}{\varepsilon_0}$$

प्र.2. एक घन के शीर्ष पर Q आवेश स्थित है, घन की एक फलक से प्रवाहित विद्युत फ्लक्स ज्ञात कीजिए।



चित्र 2.56

हल– शीर्ष पर स्थित आवेश को गाउसीय पृष्ठ से सममित रूप से घेरने के लिए 8 घनों की आवश्यकता होगी। तब इस गाउसीय सतह से कुल फ्लक्स $\phi_T = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ इसलिए दिये गये घन से कुल फ्लक्स $\phi_{घन} = \frac{Q}{8\varepsilon_0}$ । घन में छः फलक हैं एवं तीन सतहों (A से गुजरने वाली) से गुजरने वाला फ्लक्स शून्य है। इसलिए शेष तीन सतहों से सम्बद्ध फ्लक्स $\frac{Q}{8\varepsilon_0}$ होगा। अतः तीन सतहों में से प्रत्येक सतह से सम्बद्ध फ्लक्स

$$= \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{8}\left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\right)\right] = \frac{1}{24}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

प्र.3. किसी स्थान पर विद्युत क्षेत्र X-अक्ष की दिशा में है एवं x के समानुपाती है, अर्थात् $\vec{E} = E_0 x\hat{i}$ । मान लीजिए a भुजा वाला एक काल्पनिक घन इस प्रकार है कि इसकी कोरें निर्देशाक्षों के समान्तर हैं। इस घन के अन्दर आवेश ज्ञात कीजिए।

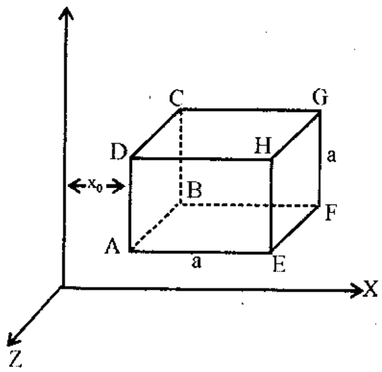
हल– चित्रानुसार सतह ABCD पर विद्युत क्षेत्र = $E_0 x_0 \hat{i}$

$\therefore$ सतह ABCD पर फ्लक्स = $-(E_0 x_0)a^2$

यहाँ ऋण चिह्न इसलिए है क्योंकि विद्युत क्षेत्र सतह ABCD के भीतर की ओर है।

सतह EFGH पर क्षेत्र = $E_0(x_0 + a)\hat{i}$

$\therefore$ सतह EFGH पर फ्लक्स = $E_0(x_0 + a)a^2$



चित्र 2.57

शेष चार सतहों पर फ्लक्स शून्य है क्योंकि विद्युत क्षेत्र इन सतहों के समान्तर

$\therefore$ घन से निकलने वाला कुल फ्लक्स $= E_0 a^3 = \dfrac{1}{\varepsilon_0} q$

जहाँ q घन के अन्दर कुल आवेश है

$\therefore \quad q = \varepsilon_0 E_0 a^3$