

## प्रक्षेपगति (PROJECTILE MOTION)

जब किसी वस्तु को एक बार बल लगाकर  $\theta$  कोण पर फेंक दिया जाता है तो ऐसी गति को प्रक्षेप गति कहते हैं। प्रक्षेप का पथ परवलयकार होता है।

जैसे-तोप का गोला, भाला, छक्का मारने पर बॉल की गति

नोट : अगर कोई शिकारी पेड़ पर बैठे किसी बंदर पर गोली चला रहा है और गोली के चलते ही बंदर कूद जाता है तो संभावना है कि बंदर को गोली लग जाएगी, क्योंकि पहले गोली का पथ सरल रेखीय होगा और फिर गोली का पथ प्रक्षेप्य (परवलयाकार) हो जाएगा।

परवलयकार



$\theta$  = प्रक्षेपण कोण (Projected Angle)

$u$  = प्रारंभिक वेग (Initial Velocity)

$g$  = गुरुत्वीयत्वरण (Gravitation Acceleration)

$t$  = चढ़ान/उतरान काल (Time of Ascent & Descent)

$H_{\max}$  = महत्तम ऊँचाई (Maximum Height)

$R$  = परास (Range)

$T$  = उड़ान काल (Time of Flight)

$$\text{परास (Range)} = R$$

प्रक्षेप के दौरान भूमि पर तय की गई दूरी को परास या Rang कहते हैं।

$$\text{Range } R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

एक भाला को 60 m/sec के वेग से  $30^\circ$  के कोण पर फेंका जाता है। वह कितनी दूरी पर जाकर गिरेगा।

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(60)^2 \times \sin 2 \times 30}{10} = \frac{3600 \times \sin 60}{10} = \frac{3600 \times \sqrt{3}/2}{10} = 180\sqrt{3}$$

$45^\circ$  पर Range अधिकतम हो जाता है। इसी कारण भाला को  $45^\circ$  के कोण पर फेंका जाता है।

Q. एक भाला को 12 m/sec की वेग से  $45^\circ$  के कोण पर फेंका जाता है। Range ज्ञात करें।

$$\text{Sol. } R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{12^2 \times \sin 2 \times 45}{10} = \frac{144 \times \sin 90^\circ}{10} = \frac{144 \times 1}{10} = 14.4$$

$$\text{उड़ान काल (Time of Flight)} = T$$

प्रक्षेप गति के दौरान कोई वस्तु जितनी देरी हवा में रहती है। उस समय को उड़डयन काल कहते हैं।

$$T = \frac{2u \sin \theta}{g}$$

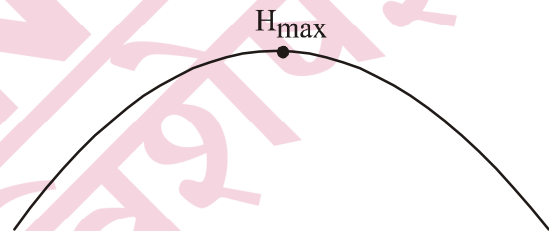
Q. एक तोप के गोला को  $30^\circ$  के कोण पर 60m की वेग से फेंका जाता है तो कितनी देर बाद वह पृथ्वी पर गिरेगा ?

Sol.

$$T = \frac{2u \sin \theta}{g} = \frac{2 \times 60 \times \sin 30^\circ}{10} = \frac{120 \times 1/2}{10} = 6$$

$$\text{महत्तम ऊँचाई (Maximum Height)} = H$$

प्रक्षेप के दौरान वस्तु विभिन्न ऊँचाई पर गति करती है इन सभी में जो सबसे अधिक ऊँचाई होती है उसे ही महत्तम ऊँचाई कहते हैं।



$$H_{\max} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Q. एक वस्तु को 120 m/sec की वेग से  $30^\circ$  के कोण पर फेंका जाता है तो वह अधिकतम कितनी ऊँचाई पर जाएगा ?

$$\text{Sol. } H_{\max} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{120 \times 120 \times \sin^2 30^\circ}{2 \times 10} = \frac{120 \times 120 \times 1/4}{20} = 180$$

चढ़ान काल या उतरान काल (Time of Ascent / Descent)

चढ़ने या उतरने में लगे समय को चढ़ान या उतरान काल कहते हैं।

$$T = \frac{u \sin \theta}{g}$$

Trick :

$$H = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$T = \frac{2u \sin \theta}{g}$$

### Objective Questions

- अगर प्रक्षेप्य गति में परास का मान महत्तम ऊँचाई के चार गुने के बराबर हो तो प्रक्षेपण कोण क्या होगा ?  
 (a)  $45^\circ$  (b)  $60^\circ$   
 (c)  $90^\circ$  (d)  $30^\circ$
- किसी प्रक्षेप्य का प्रक्षेप वक्र ( या पथ ) होता है.....  
 (a) सरल रेखा (b) परवलय  
 (c) वृत्त (d) अतिपरवलय

### Numerical Questions

- किस कोण से फेंके जाने पर कोई वस्तु सर्वाधिक दूरी तक प्रक्षेपित होती है ?  
 (a)  $60^\circ$  (b)  $75^\circ$   
 (c)  $30^\circ$  (d)  $45^\circ$

**Sol :** जब किसी वस्तु को प्रक्षेप्य पथ पर  $45^\circ$  पर प्रक्षेपित किया जाता है तो वह अधिकतम परास (दूरी) तय करता है।

$$R \text{ (Range)} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

यदि,  $\theta = 45^\circ$

$$R_{\max} = \frac{u^2 \sin 2 \times 45^\circ}{g} = \frac{u^2 \sin 90^\circ}{g}$$

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g}$$

- एक खिलाड़ी गेंद को 50 मी० ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंक सकता है तो वह कितनी अधिकतम क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है ?  
 (a) 150 मी० (b) 100 मी०  
 (c) 75 मी० (d) N.O.T

**Sol :**  $H_{\max} = 50 \text{ cm}$

$$R_{\max} = \frac{u^2 \sin(2 \times 45)}{g} = \frac{u^2}{g}$$

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g} = 100, H_{\max} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$50 = \frac{u^2 \sin^2 90}{2g}, 50 = \frac{u^2}{2g}, 100 = \frac{u^2}{g}$$

- एक खिलाड़ी एक गेंद को अधिकतम 100 मीटर की क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है। गेंद का प्रक्षेपण वेग ( लगभग ) होगा ?

- (a)  $30 \text{ ms}^{-1}$  (b)  $42 \text{ ms}^{-1}$   
 (c)  $32 \text{ ms}^{-1}$  (d)  $35 \text{ ms}^{-1}$

$$\text{Sol : } R_{\max} = \frac{u^2}{g} = 100$$

$$\Rightarrow u = 10\sqrt{10} = 32 \text{ m/s}$$

- प्रक्षेप्य गति में अधिकतम परास व उड़ान समय के वर्ग का अनुपात है ?

- (a) 10 : 49 (b) 49 : 10  
 (c) 98 : 10 (d) 10 : 98

**Sol :** अधिकतम परास के लिये  $\theta = 45^\circ$

$$\frac{R_{\text{अधिकतम}}}{T^2} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \bigg/ \frac{4u^2 \sin^2 \theta}{g^2}$$

$$\Rightarrow \frac{R_{\text{अधिकतम}}}{T^2} = \frac{\sin 90^\circ \times g}{4 \times \sin^2 45^\circ} = \frac{49}{10} \text{ Ans.}$$

- एक लड़का एक पत्थर को अधिकतम 10 m की ऊँचाई तक फेंक सकता है। लड़का उसी पत्थर को जिस अधिकतम क्षैतिज दूरी तक फेंक सकेगा, वह है ?

- (a)  $20\sqrt{2} \text{ m}$  (b) 10m  
 (c)  $10\sqrt{2} \text{ m}$  (d) 20m

**Sol :** प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई

$$h_{\max} = \frac{u^2}{2g} = 10$$

$$u^2 = 200$$

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g} = 20 \text{ m}$$

- किसी प्रक्षेप्य की अधिकतम क्षैतिज परास 400m है। इसके द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई का मान होगा

- (a) 100 m (b) 200 m  
 (c) 400 m (d) 800 m

**Sol :** दिया है,

अधिकतम क्षैतिज परास  $R_{\max} = 400$

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g}$$

परास महत्तम होने पर,

$$H = \frac{R_{\max}}{4}, \quad R_{\max} = 4H, \quad 400 = 4H$$

$$H = 100\text{m}$$

7. दो गेंदे क्षैतिज से  $30^\circ$  तथा  $60^\circ$  दिशाओं में एक ही बिन्दु से प्रक्षेपित की जाती है तो दोनों गेंदे एक ही ऊँचाई तक जाती है उनके प्रक्षेपण वेगों का अनुपात होगा ?

- (a)  $\sqrt{3}:2$  (b)  $\sqrt{3}:3$   
(c)  $\sqrt{3}:5$  (d)  $\sqrt{3}:1$

**Sol :**  $H_{30} = H_{60}$


$$\frac{H_{30}}{H_{60}} = \frac{\frac{u_1^2 \sin^2 30^\circ}{2g}}{\frac{u_2^2 \sin^2 60^\circ}{2g}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{u_1^2 \sin^2 30^\circ}{2g}}{\frac{u_2^2 \sin^2 60^\circ}{2g}} = 1 \Rightarrow \frac{u_1^2 \times \frac{1}{4}}{u_2^2 \times \frac{3}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{u_1^2}{u_2^2} = \frac{3}{1} = 1 \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \sqrt{3}:1$$

8. एक गेंद, जिसकी गतिज ऊर्जा  $E$  है, क्षैतिज से  $45^\circ$  के कोण पर फेंकी जाती है। उड़ान के उच्चतम बिंदु पर इसकी गतिज ऊर्जा होगी ?

- (a)  $E$  (b)  $\frac{E}{\sqrt{2}}$   
(c)  $\frac{E}{2}$  (d)  $0$

**Sol :** 

$$E = \frac{1}{2}mu^2$$

$$E \text{ महत्तम} = \frac{1}{2}m(u \cos \theta)^2 = \frac{1}{2}mu^2(\cos 45^\circ)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}E = \frac{E}{2}$$

9. जब वस्तु इस प्रकार प्रक्षेपित की जाती है कि इसकी अधिकतम क्षैतिज परास  $R$  होती है। यदि वस्तु द्वारा अधिकतम ऊँचाई  $H$  हो, तब अनुपात  $R/H$  है ?

- (a)  $4:1$  (b)  $2:1$   
(c)  $3:1$  (d)  $\frac{1}{2}:6$

**Sol :**  $R_{\max} = \frac{u^2}{g} \dots(i)$

इस स्थिति में वस्तु  $45^\circ$  के कोण पर प्रक्षेपित होती है

$$H = \frac{u^2 \sin^2 45^\circ}{2g} = \frac{u^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2g} = \frac{u^2}{4g} \dots(ii)$$

$$\frac{R}{H} = \frac{u^2}{g} \times \frac{4g}{u^2} = 4$$

10. क्षैतिज से  $45^\circ$  पर फेंकी गई एक वस्तु के लिए अधिकतम ऊँचाई ( $H$ ) तथा क्षैतिज परास ( $R$ ) परस्पर सम्बन्धित होंगे ?

- (a)  $R = 16H$  (b)  $R = 8H$   
(c)  $R = 4H$  (d)  $R = 2H$

**Sol :**  $\theta = 45^\circ$

$$H_{\max} = \frac{u^2 \sin^2 45^\circ}{2g} = \frac{u^2}{4g} \left[ \because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$R = \frac{u^2 \sin 90^\circ}{g} = \frac{u^2}{g}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{u^2}{g} \times \frac{4g}{u^2}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{4}{1}$$

$$R = 4H$$

11. दो वस्तुओं को समान वेग से प्रक्षेपित किया जाता है। यदि एक वस्तु को क्षैतिज से  $30^\circ$  के कोण पर तथा अन्य को क्षैतिज से  $60^\circ$  के कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है, तो उनकी अधिकतम ऊँचाईयों का अनुपात होगा—

- (a)  $3:1$  (b)  $1:3$   
(c)  $1:2$  (d)  $2:1$

**Sol :** चूँकि  $H = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$

$$\therefore \frac{H_1}{H_2} = \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2} = \frac{\sin^2 30^\circ}{\sin^2 60^\circ} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$