

# 组合交换代数讲义

2025 年 3 月 17 日

## 总体规划

组合学和其他学科尤其交换代数，代数几何，代数拓扑的交融，对组合学的问题，方法，工具以及思想都产生了积极影响，经典的比如 上世纪 80 年代 Stanley 通过构造 face ring 并借助交换环的 Cohen-Macaulay 性质解决 Upper Bound Conjecture，以及近十年 June Huh 以及合作者借助 Hodge 理论解决拟阵的一系列问题，Adiprasito 通过组合 Hodge 理论解决 g-conjecture 等等。

讨论班的目标是介绍组合交换代数这个方向的经典内容，主要对象包括但不限于多胞体 (polytope)，单纯复形 (simplicial complex)，以及由它们所构造的分次代数 (graded algebra)。这些对象的基本性质比如 Cohen-Macaulay 性质，Lefschetz 性质等是核心内容。

我们将从整数分拆 (integer partition) 开始，通过 Frobenius 问题构造格点多胞体 (lattice polytope)，由此引入 Ehrhart 理论，了解格点多胞体的格点计数多项式，即 Ehrhart polynomial。 $s$ -lecture hall partition 构造的多胞体是第二个分拆-多胞体的实例，我们将分析其基本性质及其与分拆的联系，更多细节可参考陈端宇。

以 Ehrhart polynomial 为系数构造 Ehrhart series，在几何上对应将格点多胞体的整数倍扩张分层排列在更高一维的空间从而形成锥 (cone)，代数上对应一个由多项式构成的交换环模掉 binomial 张成的理想的分次代数。这样我们就得到了第一个分次代数的实例和基本性质。

接下来正式登场的是单纯复形 (simplicial complex) 及其上丰富的理论，一般称之为 Stanley-Reisner ring 或 face ring (面环) 理论。按 Adiprasito, Yashfe 在 [AY21] 中所述，面环的核心是“理解单纯复形的诸多不变量，而其中最基本的即是计数各个维度的面的个数的面向量 (face vector)”。故而，单纯复形，面 (face) 以及面环 (face ring) 的概念将会一一给出，由此开启讨论班最核心的也是第二个分次代数的学习和研究。

代数简要介绍如上，拓扑面向主要涉及同调群，上同调群的计算，并且几乎只针对单纯复形。链复形 (chain complex) 是我们将会学习的第三个分次结构。事实上，面环理论的核心定理之一，即 Reisner 定理恰好架起了面环的代数性质 (Cohen-Macaulay) 和拓扑性质 (面的同调群) 的桥梁。如果

时间允许, 我们还会结合范畴的观点 (主要参考 Benoit Fresse 的讲义) 来统一看 “分次结构” 这个 **graded category**。

## §1 多胞体

设  $d$  是一个非负整数,  $d$ -多胞体 (**polytope**) 直观地讲是  $d$ -维欧式空间  $\mathbb{R}^d$  中有限个点构成的凸包 (严格地说, 我们这里关心的凸多胞体)。例如, 1-多胞体是一个闭区间, 2-多胞体是一个凸多边形, 3-多胞体常常被称为是凸多面体 (**polyhedron**)。

**定义 1.1** ( $V$ -多胞体). 设  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^d$  是一个有限点集合。我们称

$$P = \text{conv}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ 并且 } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\},$$

为由顶点集  $V$  生成的多胞体。

这是多胞体的顶点定义, 由此定义的多胞体  $P$  也称为是  $V$ -多胞体。不难看出,  $P$  是包含顶点集  $V$  的最小凸集。此外, 还可以利用超平面定义多胞体, 称为是  $H$ -多胞体。

**定义 1.2** ( $H$ -多胞体). 设  $P \subset \mathbb{R}^d$  是一个非空有界集合。如果存在  $m$  个非零向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^d$  和对应的实数  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , 使得:

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \leq b_1, \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} \leq b_2, \dots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x} \leq b_m \right\},$$

则称  $P$  称为一个多胞体。

**注 1.3.** 在上述定义中, 每个  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = b_i$  都确定了一个超平面  $H_i$ , 所以我们称它是  $H$ -多胞体。

上述两个定义的等价性, 是多胞理论中一个基础性的结果, 被称为是 “多胞体主定理” (Main theorem for polytopes)。具体可以参考 [ZG12, Chapter 1]。

我们关心一类具有丰富组合、几何结构的重要的多胞体——格点多胞体。具体来说，若多胞体  $P$  的顶点集  $V$  是  $\mathbb{Z}^d$  的子集，则称  $P$  是一个格点多胞体。我们接下来讨论一个有趣的格点多胞体的例子。

**例 1.4.** 假设给定一个正整数集合

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_d\},$$

其最大公约数满足  $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_d) = 1$ 。对于任意的正整数  $n$ ，利用超平面  $H: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d = n$ ，和第一象限  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_d \geq 0$  可以定义一个  $H$ -多胞体，记为  $P_{A,n}$ 。换言之，我们有

$$P_{A,n} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1a_1 + \dots + x_da_d = n \text{ 且 } x_1, x_2, \dots, x_d \geq 0\},$$

注意，因为有超平面  $H$  的限制，使得  $P_{A,n}$  是  $(d-1)$ -维的（尽管我们没有严格定义多胞体的维度，但是其含义是直观的）。比如， $d=2$  时  $P_{A,n}$  对应的是 1-维多胞体也就是线段； $d=3$  时  $P_{A,n}$  对应的是多边形。

我们问这样一个问题： $P_{A,n}$  中包含了多少格点？这类计数问题也是我们后续主要讨论的内容之一。也就是说，我们要计算下述集合的大小：

$$\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{N}^d \mid x_1a_1 + \dots + x_da_d = n \text{ 且 } x_1, x_2, \dots, x_d \geq 0\}. \quad (1.1)$$

对于熟悉整数分拆的我们而言，这个集合的组合意义是相当直观的：当把每个  $x_i$  视为  $a_i$  的重数时，它恰好对应于  $n$  以集合  $A$  中元素为部分的受限分拆所构成的集合。记  $p_A(n)$  为  $n$  以集合  $A$  中元素为部分的受限分拆的总数，则上述讨论说明： $P_{A,n}$  中格点的数目等于  $p_A(n)$ 。

## §2 多胞体的 Ehrhart 多项式

设  $\mathcal{P}$  是  $\mathbb{R}^d$  中的一个多胞体。对于  $n \geq 1$ ，定义  $\mathcal{P}$  的  $n$  倍扩张  $n\mathcal{P}$  如下：

$$n\mathcal{P} = \{n\alpha : \alpha \in \mathcal{P}\}.$$

图 2.1 中给出了一个示意。令

$$L(\mathcal{P}, n) = \#(n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d) = \#\{\alpha \in \mathcal{P} : n\alpha \in \mathbb{Z}^d\}.$$

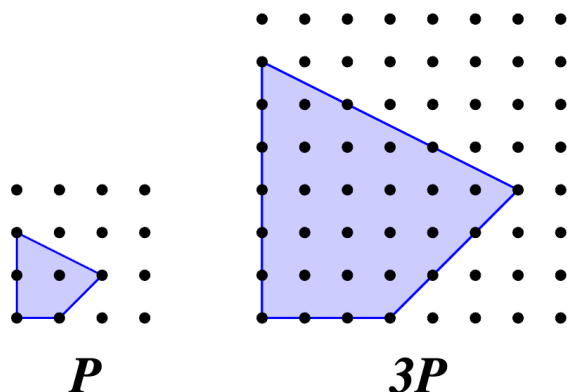


图 2.1: 多胞体及其膨胀

换句话说,  $L(\mathcal{P}, n)$  计数了  $n\mathcal{P}$  内的整点个数 (包括边界)。类似地, 当我们不考虑边界上的整点的时候, 我们有如下的定义: 令

$$\mathcal{P}^\circ = \mathcal{P} - \partial\mathcal{P},$$

其中  $\partial\mathcal{P}$  表示  $\mathcal{P}$  的边界。令

$$\bar{L}(\mathcal{P}, n) = \#(n\mathcal{P}^\circ \cap \mathbb{Z}^d) = \#\{\alpha \in \mathcal{P}^\circ : n\alpha \in \mathbb{Z}^d\}.$$

由此, 我们看出  $\bar{L}(\mathcal{P}, n)$  就是  $n\mathcal{P}$  内部的整点个数。还是图 2.1 中的例子, 我们有  $L(\mathcal{P}, 3) = 32$  以及  $\bar{L}(\mathcal{P}, 3) = 31$ 。

我们接下来解释两个事情:

- (1) 为什么我们要考虑  $n\mathcal{P}$  这种“膨胀”?
- (2) 为什么我们要同时考虑  $L(\mathcal{P}, n)$  和  $\bar{L}(\mathcal{P}, n)$ ?

这些问题的答案构成了 Ehrhart 理论的基础。

对于第一个问题, 我们希望给出不同角度的解释。第一个就是体积的计算, 例如对于图 2.1 中的多边形  $\mathcal{P}$ , 如何快速的计算  $\mathcal{P}$  的面积? 从小学估算的技巧, 我们就知道了, 可以直接数其中“方格”的数量, 近似地, 可以数其中格点的数量。此时, 我们有两种选择: 包括边界的点以及不包括边界的点。前者会是使得面积的估算比较大, 后者会是使得面积的估算比较小。

在本例中分别是 6 和 1，而实际的面积是 2.5。这当然是不准确的，但是我们能想象给定的多边形  $\mathcal{P}$  越大，这个边界的点相对于内部的点越少，也就是越可以忽略，从而二者都逼近了  $\mathcal{P}$  本身的面积。那么如何让  $\mathcal{P}$  变大？方法就是我们这里解释的“膨胀”。这里的核心的原理就是：一般而言，凸多胞体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  的体积在膨胀  $n$  倍后满足严格的比例关系：

$$\text{Vol}(n\mathcal{P}) = n^d \cdot \text{Vol}(\mathcal{P}).$$

反之，若已知  $\text{Vol}(n\mathcal{P})$  的表达式，可通过除以  $n^d$  快速反推原体积，无需复杂积分。这就是计算体积的“离散思路”。而我们上面的讨论则说明了：当  $n \rightarrow \infty$  时，膨胀后的多胞体  $n\mathcal{P}$  展现出与体积相关的渐近行为： $n\mathcal{P}$  内整数点（格点）的数量近似于体积  $\text{Vol}(n\mathcal{P})$ ，即

$$L(\mathcal{P}, n) \approx \bar{L}(\mathcal{P}, n) \approx n^d \cdot \text{Vol}(\mathcal{P}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

我们接下来说第二个问题。二维的情况有一个著名的定理 Pick 定理，它描述了整点多边形的面积与其内部整点数和边界整点数之间的关系：

**定理 2.1 (Pick 定理).** 设  $P$  是一个顶点位于  $\mathbb{Z}^2$  的简单多边形，记其内部的整点数为  $I$ ，边界上的整点数为  $B$ ，则多边形的面积  $A$  满足公式：

$$A = \frac{2I + B - 2}{2}$$

**例 2.2.** 例如，对于图 2.2 中的多边形，我们数得  $I = 4$ ， $B = 10$ ，代入公式得：

$$A = \frac{2 \times 4 + 10 - 2}{2} = 9.$$

Pick 定理在不能直接在更高维度使用，即便是三维情况。

**例 2.3.** 考虑两个四面体  $T_1$  和  $T_2$ ，如图 2.3 所示。它们的顶点分别为：

$$v(T_1) = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

$$v(T_2) = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

由此计算，它们的内部整点数和边界整点数分别为：

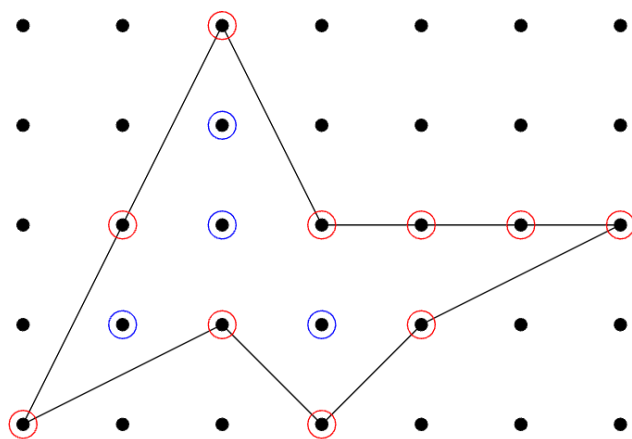


图 2.2: Pick 定理的示例

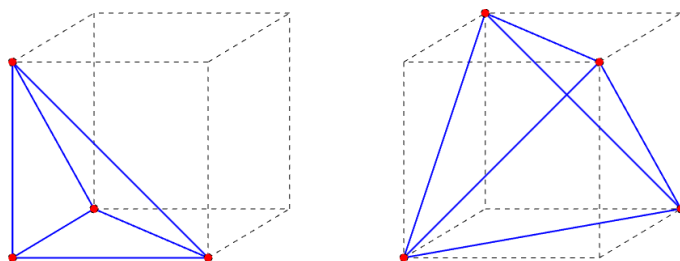


图 2.3: 例 2.3 的示意图

$$I(T_1) = I(T_2) = 0, \quad B(T_1) = B(T_2) = 4.$$

但它们的体积分别为：

$$A(T_1) = \frac{1}{6}, \quad A(T_2) = \frac{1}{3}.$$

上例表明，在三维空间中，即使两个四面体具有相同的边界整点数和内部整点数，它们的体积仍然可能不同，因此 Pick 定理无法直接推广到更高维度。不过，我们至少感受到考虑  $L(\mathcal{P}, n)$  和  $\bar{L}(\mathcal{P}, n)$  是一个自然的想法。

**例 2.4.** 若  $P$  为以原点为顶点，边长为 1 且第一象限内的等腰直角三角形（即  $P$  为一个标准 2-单形 *standard 2-simplex*），则有

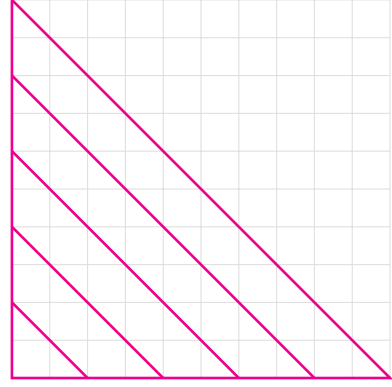
$$L_p(1) = 3 = \binom{3}{2},$$

$$L_p(2) = 6 = \binom{4}{2},$$

$$L_p(3) = 10 = \binom{5}{2},$$

$\vdots$

$$L_p(n) = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$



**例 2.5.** 若  $P$  为以原点为顶点，第一象限内的单位正方形，则

$$L_p(1) = 4,$$

$$L_p(2) = 9,$$

$\vdots$

$$L_p(n) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

观察上述两个例子，可以发现  $L_p(n)$  总可以写成关于  $n$  的多项式，且最高次等于该多胞体的维数。一般的，我们有以下定理：

**定理 2.6 (Ehrhart).** 对任意  $d$  维格点多胞体  $P$ ,

$$L_p(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0, \quad (2.1)$$

其中  $a_i \in \mathbb{Z}$ 。



定理中的  $L_P(n)$  称为多胞体  $P$  的 **Ehrhart 多项式**，系数  $a_d, a_{d-1}, \dots, a_0$  为多胞体  $P$  的 **Ehrhart 系数**。关于 Ehrhart 系数有结论如下：

1.  $a_d = \text{vol}(P)$  ( $P$  的体积),
2.  $a_{d-1} = \text{facet}$  的标准化体积总和的一半,
3.  $a_0 = 1$ .

注 2.7. 除了以上 Ehrhart 系数，其它系数的正性和多胞体本身的性质密切相关，具体可查看刘拂老师的文章 [\[FL19\]](#)。

注 2.8. Ehrhart 多项式是对格点多胞体扩张（或缩小所在的格）之后格点数的计数，当取极限时格点数即是多胞体的体积。因此，Ehrhart 多项式可以看作是格点多胞体的离散体积，而这个离散体积作为一种 valuation，它恰好可以表为多项式。经典的 Hadwiger 定理刻画了 valuation 所形成的向量空间的基，在离散情形中也有类似结论，此处不详述。

### §3 s-lecture hall polytope

待更新，详情见陈端宇。

### §4 Ehrhart 级数

定义 4.1. 给定一个格点多胞体  $P \subseteq \mathbb{Z}^d$ ， $P$  的 Ehrhart 级数定义为

$$\text{Ehr}_P(z) := \sum L_P(n) z^n$$

其中  $L_P(n)$  为  $P$  的 Ehrhart 多项式。

例 4.2. 令  $P = \Delta_{d-1} := \text{conv}\{e_i : i \in [d]\}$ 。

1. 对于  $\Delta_0$ ， $\text{Ehr}_{\Delta_0}(z) = \sum_{n \geq 0} L_{\Delta_0}(n) z^n = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$ .

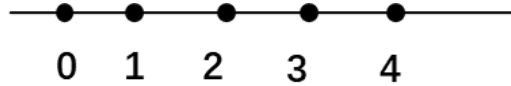


图 4.1: 零维单形扩张图

2. 对于  $\Delta_1$ ,  $\text{Ehr}_{\Delta_1}(z) = \sum_{n \geq 0} L_{\Delta_1}(n)z^n = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \frac{1}{(1-z)^2}$ .

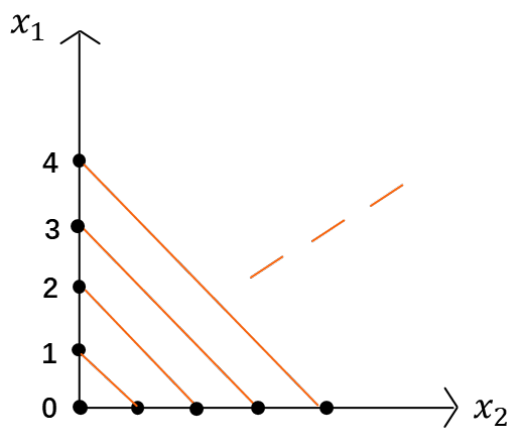


图 4.2: 一维单形扩张图

3. 对于  $\Delta_2$ ,  $\text{Ehr}_{\Delta_2}(z) = \sum_{n \geq 0} L_{\Delta_2}(n)z^n = \sum_{n \geq 0} \binom{n+1}{2} z^n = \frac{1}{(1-z)^3}$ .

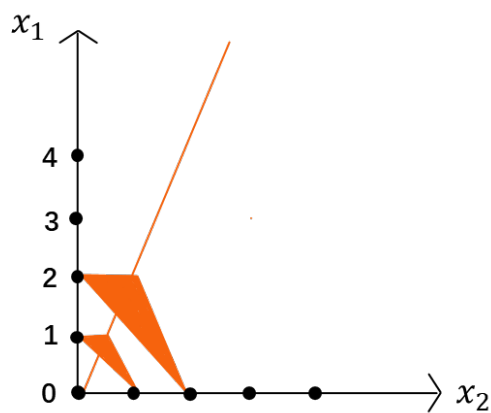


图 4.3: 二维单形扩张图

4. 对于  $\Delta_d$ ,  $\text{Ehr}_{\Delta_d}(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{n+d}{d} z^n = \frac{1}{(1-z)^{d+1}}$ .

**注 4.3.** 思考: 当  $P = \Delta_{d-1}$  时, 其生成函数写成有理函数之后, 分子也就是等式右边为什么恒为 1?

**例 4.4.** 令  $P = \square_d := \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_k \leq 1, k \in [d]\}$ .

1, 对于  $\square_2$ ,  $L_{\square_2}(n) = (n+1)^2$ ,

$$\begin{aligned} \text{Ehr}_{\square_2}(z) &= \sum_{n \geq 0} L_{\square_2}(n) z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1)^2 z^n \\ &= \frac{\sum_{k=1}^d A(2, k) z^{k-1}}{(1-z)^3}. \end{aligned}$$

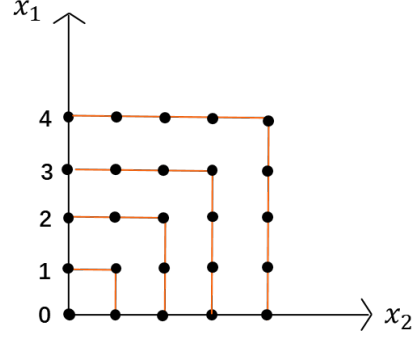


图 4.4:  $\square_2$  扩张图

2, 对于  $\square_d$ ,  $L_{\square_d}(n) = (n+1)^d$ ,

$$\begin{aligned} \text{Ehr}_{\square_d}(z) &= \sum_{n \geq 0} L_{\square_d}(n) z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1)^d z^n \\ &= \frac{\sum_{k=1}^d A(d, k) z^{k-1}}{(1-z)^{d+1}}. \end{aligned}$$

## §5 Coning 技巧与 $h^*$ 多项式

对于单形而言, 其 Ehrhart 级数是将每一层格点的总数作为系数; 现在我们将其一般化, 对于一个一般的格点多胞体, 我们将其嵌入到更高一维, 即在新构造的锥 (cone) 下计数格点数。这是处理 Ehrhart 多项式与级数的一种非常核心的技巧, 暂称之为 **Coning 技巧**。

**定义 5.1.** 我们考虑一个格点多胞体  $\mathcal{P}$ , 其顶点为  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{Z}^d$ 。我们将这些顶点提升到  $\mathbb{R}^{d+1}$  中, 即通过添加一个 1 作为它们的最后一个坐标。即如果令

$$\mathbf{w}_1 = (\mathbf{v}_1, 1), \mathbf{w}_2 = (\mathbf{v}_2, 1), \dots, \mathbf{w}_n = (\mathbf{v}_n, 1).$$

则

$$\text{cone}(\mathcal{P}) = \{\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{w}_n : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

**例 5.2.** 考虑下面这个由二维上升到三维的格点多胞体的例子。

令  $P := \Delta_1 \subset \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ , 则有:

$$P := \text{conv} \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \left\{ e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

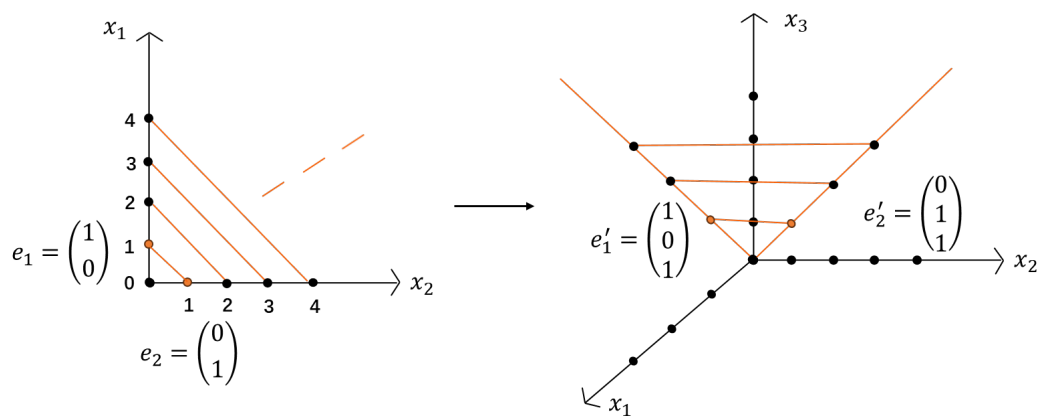


图 5.1:  $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  嵌入图

**注 5.3.** 将由此形成的锥里的每个格点对应单项式，我们发现所有的单项式可以构成一个半群代数，即  $\mathbb{R}[\mathcal{P}] := \mathbb{R}[\text{cone}(\mathcal{P})]$ 。

通过构造锥，我们将原来的格点多胞体的每个扩张的“备份”嵌入到了更高一维的相应高度，反过来，通过用超平面“切割”这个锥我们能完整复原原来的格点多胞体及其扩张。此时，格点多胞体的 Ehrhart 级数实际是对整个锥的计数，从代数的角度看它是半群代数的生成函数。

在上述定义下，由格点多胞体的 Ehrhart 级数所引出的  $h^*$ -多项式是研究的关键。

定义 5.4. 假设  $P$  是一个格点多胞体,  $\dim P = d$ .  $P$  的  $h^*$ -多项式定义为:

$$\begin{aligned} \text{Ehr}_P(z) &= 1 + \sum_{t \geq 1} L_P(t) z^t \\ &:= \frac{h^*(z)}{(1-z)^{d+1}} \\ &= \frac{h_d^* z^d + h_{d-1}^* z^{d-1} + \cdots + h_1^* z + h_0^*}{(1-z)^{d+1}}, \end{aligned}$$

## §6 单纯复形与 Stanley-Reisner 环

### 6.1 集合与子集

集合

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

简记为

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}.$$

定义 6.1. 设集合  $I \subset E$ ,  $I$  的特征函数定义为:

$$\delta_I : E \rightarrow \{0, 1\}$$

其中

$$\delta_I(i) = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \in I, \\ 0, & \text{若 } i \notin I. \end{cases}$$

可以用单项式  $\prod_{i \in I} x_i$  或特征向量  $v_I = (\delta_I(1), \delta_I(2), \dots, \delta_I(n))$  表示  $I$ .

例 6.2.  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $I = \{1, 4\}$  可表示为  $x_1 x_4$  或  $v_I = (1, 0, 0, 1)$ .

定义 6.3. 若  $I \subset E$  且  $|I| = k$ , 则称  $I$  为  $E$  的  $k$  子集.

### 6.2 重集

为表述方便, 接下来默认  $E = [n]$ .

**定义 6.4.** 称  $M = (E, \delta_E)$  为重集, 若

$$\delta_E(i) = \begin{cases} k_i, & \text{若 } i \in E, \\ 0, & \text{若 } i \notin E. \end{cases}$$

其中  $k_i \in \mathbb{Z}_{>0}$  为  $E$  中  $i$  的重数.

称

$$S = \{i \in E \mid \delta_E(i) \neq 0\}$$

为重集  $M$  的支撑集, 记  $\text{supp}(M) = S$ .

**例 6.5.** 设  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ , 且

$$\delta_E(1) = 2, \quad \delta_E(2) = 2, \quad \delta_E(3) = 1, \quad \delta_E(4) = 0.$$

则重集可表示为  $M = \{1, 1, 2, 2, 3\}$ , 且  $\text{supp}(M) = \{1, 2, 3\}$

**注 6.6.** 子重集是指重集的子集,  $k$  子重集是指基数为  $k$  的子重集.

对于给定的集合  $I \subset E = [n]$ , 如何表示以  $I$  为支撑集的  $k$  子重集?

**例 6.7.** 设  $I = \{1, 3\}$ ,  $|M| = 4$ . 则

$$\{M \mid \text{supp}(M) = I, |M| = 4\} = \{\{1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 3, 3\}, \{1, 3, 3, 3\}\}.$$

**引理 6.8.** 设  $I \subset E = [n]$ , 且  $|I| = m$ . 记  $X = \{M \mid \text{supp}(M) = I, |M| = k\}$ ,  $Y = \{(z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m \mid \sum_{i=1}^m z_i = k\}$ . 则  $X$  和  $Y$  之间存在一一映射.

**例 6.9.** 设  $I = \{1, 3, 4\}$ ,  $|M| = 5$ . 则

$$M = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\} = \{\{1^{a_1}, 3^{a_2}, 4^{a_3}\} \mid a_1 + a_2 + a_3 = 5\}.$$

**推论 6.10.** 设  $I \subset E = [n]$ , 且  $|I| = m$ . 则  $\#\{M \mid \text{supp}(M) = I, |M| = k\} = \binom{k-1}{m-1}$ .

### 6.3 梯度结构

$E$  的子集可以通过  $rank$  函数生成一个有限梯度 *Boolean lattic*  $B_n$ :

$$rk : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, I \mapsto |I|.$$

例 6.11. 设  $E = [3]$ . 可得到  $B_3$  对应的哈斯图:

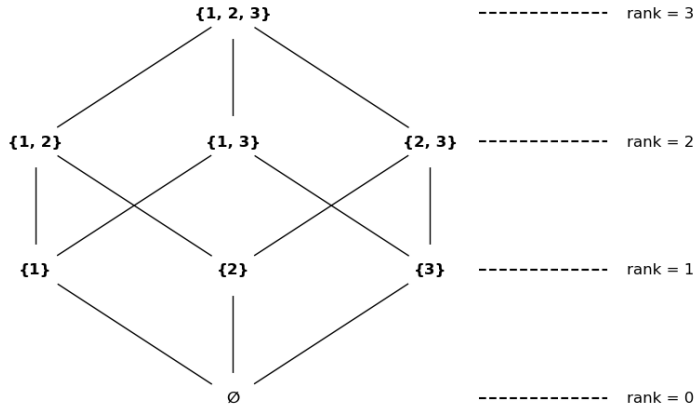


图 6.1: *Boolean lattic*  $B_3$

*Boolean lattic*  $B_n$  的生成函数:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 + \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \dots + x_1 x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^n (1 + x_i).$$

令  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ , 可得到:

$$F(x, x, \dots, x) = (1 + x)^n := \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

同时得到了二项式系数的定义.

定义 6.12. 集合  $[n]$  的  $k$  子集个数为  $\binom{n}{k}$ .

注 6.13. 向量  $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n})$  是 *Boolean lattic*  $B_n$  (单纯复形 *simplicial complex*) 的 *rank* 向量 (*face* 向量).

所有子重集构成梯度晶格  $L^\infty$ . *Boolean lattic*  $L^\infty$  的生成函数为:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i + \sum_{i \leq j} x_i x_j + \dots = \prod_{i=1}^n (1 + x_i + x_i^2 + \dots) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i}.$$

令  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ , 可得到:

$$F(x, x, \dots, x) = \frac{1}{(1-x)^n} := \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n + \dots$$

定义 6.14. 集合  $[n]$  的  $k$  子重集个数为  $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$ .

## 6.4 Down-closed 性质

向下封闭 (*down-closed*) 意味着: 如果  $S \in \Delta$ , 那么  $S$  的所有子集也必须属于  $\Delta$ .

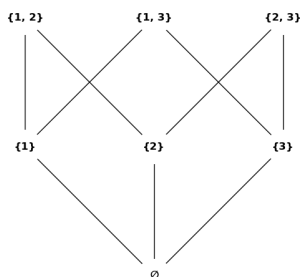


图 6.2: Boolean lattice  $B_3$  截断

## 6.5 单纯复形 *Simplicial complex*

定义 6.15. 一个单纯复形  $\Delta$  是一个向下封闭 (*down-closed*) 的子集族, 它是有限集合  $[n]$  (称为基集 *ground set*) 的子集的集合.

单纯复形的面 (*face*) 可理解为任何维度的子单纯形, 包括顶点、边、三角形等. 例如一个三角形 (2 维单纯形) 的面包括它的三条边 (1 维单纯形) 和三个顶点 (0 维单纯形). 对于 (*facet*), 可理解为在单纯复形中维数最大的单纯形, 或者是不被其他单纯形包含的单纯形.

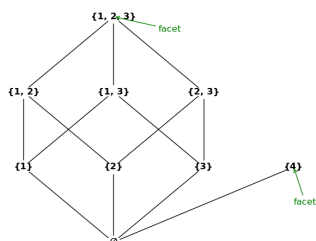


图 6.3: *facet* 举例

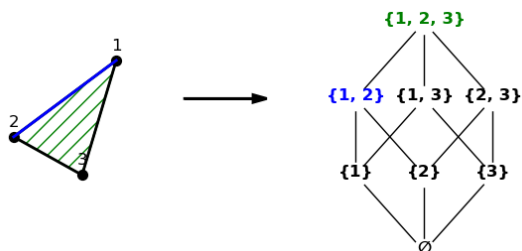


图 6.4: *face lattice*



**定义 6.16.** 设  $\tau \in \Delta$  为一个 *face*. 则  $\dim(\tau) = |\tau| - 1$ ,  $\dim(\Delta) = \max\{\dim(\tau) : \tau \text{ 是一个 } \textit{face}\} = \max\{\dim(\tau) : \tau \text{ 是一个 } \textit{facet}\}$ .

## 6.6 Stanley-Reisner 环

对于  $[n]$  上的一个  $d$  维单纯复形  $\Delta$ , 定义 *face* 向量  $f = (f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ .

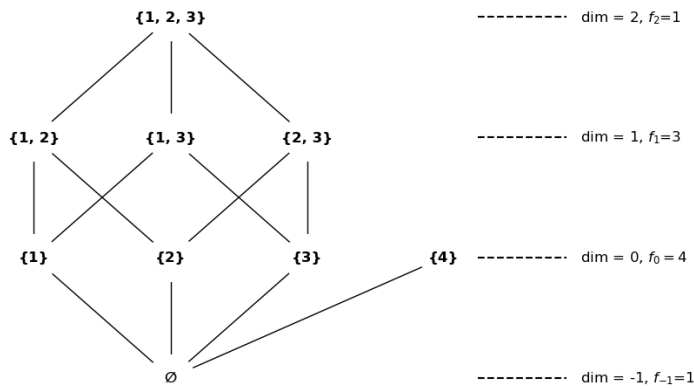


图 6.5:  $[4]$  上的 2 维单纯复形

**定义 6.17.** 设  $\mathbb{K}$  是作为系数的交换环, 给定任何一个顶点集的单纯复形  $\Delta$ ,  $\Delta$  关于  $\mathbb{K}$  的 *Stanley-Reisner* 环是指:

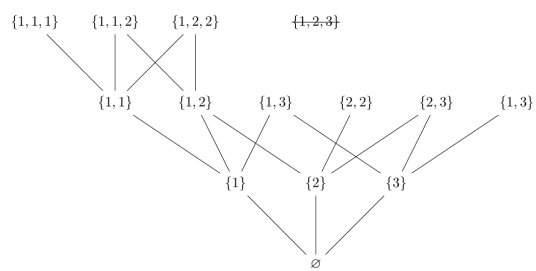
$$\mathbb{K}[\Delta] = \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n] / I_\Delta$$

其中  $I_\Delta$  是由所有不属于  $\Delta$  的单形所对应的单项式生成的理想, 也称为 *Stanley-Reisner* 理想, 即  $I_\Delta = \langle x_\tau : \tau \notin \Delta \rangle$ .

例如, 图 6.5 所对应的 *Stanley-Reisner* 理想为  $I_\Delta = \langle x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4, \dots \rangle$ , 相应的 *Stanley-Reisner* 环为  $\mathbb{K}[\Delta] = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4] / I_\Delta$ .

**命题 6.18.** 作为  $\mathbb{K}$  上的向量空间,  $\Delta$  的 *Stanley-Reisner* 环有直和分解:

$$\mathbb{K} = \bigoplus_{i=0} \mathbb{K}[\Delta]_i.$$



$$\mathbb{K}[\Delta]_0 : 1$$

$$\mathbb{K}[\Delta]_1 : x_1, x_2, x_3$$

$$\mathbb{K}[\Delta]_2 : x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2$$

$$\mathbb{K}[\Delta]_3 : x_1^3, \dots, \widehat{x_1x_2x_3}, \dots$$

## 参考文献

- [AY21] Adiprasito K, Yashfe G. The partition complex: an invitation to combinatorial. *Surveys in combinatorics* 2021. 2021 Jun 24;470:1.
- [FL19] L. FU, On positivity of Ehrhart polynomials, In: Barcelo, H., Karaali, G., Orellana, R. (eds) *Recent Trends in Algebraic Combinatorics*. Association for Women in Mathematics Series, vol 16. Springer, Cham, 2019.
- [BR15] M. Beck, S. Robins, *Computing the continuous discretely* 2ed., Springer, New York, 2015.
- [Li25] 李文威, 代数学讲义 (网络版)
- [Li25] 李文威, 代数学方法 (卷一) (网络版)
- [Li25] 李文威, 代数学方法 (卷二) (网络版)
- [Li25] 李文威, 代数学方法 (卷二) (网络版)
- [ZG12] Ziegler, Günter M. *Lectures on polytopes*. Vol. 152. Springer Science and Business Media, 2012.