第五章：宇宙的交响乐——麦克斯韦方程组的张量协奏

引言：从四座山峰到一座山脉

在经典物理学中，麦克斯韦方程组是四座巍峨的山峰，各自描述了电磁世界的一个侧面（电荷如何产生电场、磁场线为何闭合、变化的磁场如何产生电场、电流和变化的电场如何产生磁场）。然而，在相对论的四维时空框架下，这四座山峰被揭示为同一座宏伟山脉的不同视角。

本章的使命，就是用我们在前一章构建的电磁场张量 $F^{\mu\nu}$，将这四条定律重新谱写为一首和谐的、在所有参考系中都回响着同样旋律的“宇宙交响乐”。我们将看到，麦克斯韦的四条方程被完美地归入两个张量方程：

1. 一个描述场如何由“源”（电荷与电流）产生（**有源方程**）。
2. 另一个则描述场自身必须遵守的内在几何约束（**无源方程**）。

5.1 有源方程：$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$

这个方程被称为**非齐次麦克斯韦方程（Inhomogeneous Maxwell's Equations）**，因为它包含了源项 J^ν。

> $$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$
>
> 这是一个四维矢量方程，等号两边都是四维矢量，因此它等价于四个独立的标量方程（对应$\nu = 0, 1, 2, 3$）。这四个方程，不多不少，正好对应着经典的高斯电场定律和安培-麦克斯韦定律。

核心思想： 这个方程在物理上回答了“**场从何而来？**”以及“**源如何驱动场？**”的问题。它将场的时空变化（左侧的四维散度 $\partial_\mu F^{\mu\nu}$）与电荷和电流的分布（右侧的源 J^ν）直接联系起来。

展开推导的准备工作：

- **电磁场张量 $F^{\mu\nu}$**:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- **四维电流密度 J^ν**: $J^\nu = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$
- **四维导数算符 ∂_μ**: $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
- **展开 $\partial_\mu F^{\mu\nu}$**: 遵循爱因斯坦求和约定对哑指标 μ 求和:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_0 F^{0\nu} + \partial_1 F^{1\nu} + \partial_2 F^{2\nu} + \partial_3 F^{3\nu}$$

5.1.1 逐分量推导：时间分量 ($\nu = 0$) → 高斯电场定律

我们令 $\nu = 0$，展开有源方程:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 J^0 \implies \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \mu_0 (c\rho)$$

从 $F^{\mu\nu}$ 矩阵中取出 $\nu = 0$ 这一列的四个分量代入:
$F^{00} = 0$, $F^{10} = E_x/c$, $F^{20} = E_y/c$, $F^{30} = E_z/c$。

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}(0) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{E_x}{c}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{E_y}{c}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{E_z}{c}) = \mu_0 c\rho$$

将常数 $1/c$ 提取出来:

$$\frac{1}{c}(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}) = \mu_0 c\rho$$

我们立刻认出，括号中的项正是**电场 $\mathbf{E}$ 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{E}$**。

$$\frac{1}{c}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 c\rho \implies \nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 c^2 \rho$$

最后，代入光速与真空电磁学常数之间的基本关系 $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 (\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}) \rho \implies \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

结论： 有源张量方程的时间分量，在展开后，完美地重现了**高斯电场定律**。

5.1.2 逐分量推导：空间分量 ($\nu = 1, 2, 3$) $\rightarrow$ 安培-麦克斯韦定律

现在我们令 $\nu = 1$，展开有源方程的空间x分量：

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 J^1 \implies \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \mu_0 J_x$$

从 $F^{\mu\nu}$ 矩阵中取出 $\nu = 1$ 这一列的四个分量代入：
$F^{01} = -E_x/c, F^{11} = 0, F^{21} = -B_z, F^{31} = B_y$。

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}(-\frac{E_x}{c}) + \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(-B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(B_y) = \mu_0 J_x$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x$$

整理一下，并将 $\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}$ 识别为**磁场旋度 $(\nabla \times \mathbf{B})$ 的 x 分量**。

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \mu_0 J_x + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

再次代入 $1/c^2 = \varepsilon_0 \mu_0$：

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \mu_0 J_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

结论： 有源张量方程的空间x分量，完美重现了**安培-麦克斯韦定律的x分量**。同理，当 $\nu = 2$ 和 $\nu = 3$ 时，我们会分别得到该定律的y分量和z分量。将这三个空间分量合并为一个矢量方程，我们就得到了完整的**安培-麦克斯韦定律**：

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$$

5.2 无源方程：比安基恒等式的物理回响

这个方程被称为**齐次麦克斯韦方程（Homogeneous Maxwell's Equations）**，因为它不包含源

项。

> $$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$
>
> 这是一个对三个指标进行轮换求和并置零的方程。

核心思想： 这个方程不关心场是“谁生的”，只规定了场一旦存在，其**自身的几何结构和演化规则**必须是什么样的。

> **【数学起源：势存在的必然结果】**
>
> 这个方程，在数学上被称为**比安基恒等式（Bianchi Identity）**。它并不是一条独立的物理定律，而是 $F_{\mu\nu}$ 由四维势 A_μ 定义（$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$）的一个直接的、自动满足的数学推论。
>
> $$\partial_\lambda(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) = 0$$
>
> 展开后，所有项都会因为二阶偏导数可以交换次序而两两抵消。因此，它比有源方程更根本，因为它反映了“势”的存在。任何可以由一个势场派生出来的场，都必须自动满足这个比安基恒等式。

5.2.1 纯空间分量 ($\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$) $\rightarrow$ 高斯磁定律

我们选择一组纯粹的空间指标：$(\lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 3)$。
$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$
从 $F_{\mu\nu}$ （下标形式）矩阵中取出对应的分量代入（$F_{23} = B_x, F_{31} = B_y, F_{12} = B_z$）：

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \implies \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

结论： 无源方程的纯空间分量，完美重现了**高斯磁定律**。它等价于宣称**宇宙中不存在磁单极子（磁荷）**。

5.2.2 时空混合分量 ($\lambda = 0, \mu, \nu = 1, 2, 3$) $\rightarrow$ 法拉第电磁感应定律

现在我们选择一组包含时间指标`0`的混合分量：$(\lambda, \mu, \nu) = (0, 1, 2)$。
$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0$
从 $F_{\mu\nu}$ 矩阵中取出对应的分量代入（$F_{12} = B_z, F_{20} = -E_y/c, F_{01} = E_x/c$）：

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}(B_z) + \frac{\partial}{\partial x}(-E_y/c) + \frac{\partial}{\partial y}(E_x/c) = 0$$

方程两边同乘以 c 并整理:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

左边是**电场旋度 $(\nabla \times \mathbf{E})$ 的 z 分量。**
$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$
结论: 选择不同的时空混合分量，将分别得到法拉第定律的x, y, z分量，合并后即为完整的**法拉第电磁感应定律**:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

5.3 四维洛伦兹力: $f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$

我们已经有了描述场如何产生和演化的方程，最后还需要一个方程来描述**场如何作用于物质**。这由四维形式的洛伦兹力定律给出。

> $$f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

- f^μ 是**四维力（闵可夫斯基力）**。它的时间分量 f^0 描述了功率（能量变化率），空间分量 (f^1, f^2, f^3) 构成了我们熟悉的三维力 $\mathbf{F}$。
- u_ν 是粒子的**四维速度**: $u_\nu = (\gamma c, -\gamma \mathbf{v})$。

5.3.1 从四维力到三维力的推导

我们来展开 f^μ 的空间分量，以 f^1 为例:
$f^1 = qF^{1\nu}u_\nu = q(F^{10}u_0 + F^{11}u_1 + F^{12}u_2 + F^{13}u_3)$
代入 $F^{\mu\nu}$ 和 u_ν 的分量:
$f^1 = q[(\frac{E_x}{c})(\gamma c) + (0)(-\gamma v_x) + (-B_z)(-\gamma v_y) + (B_y)(-\gamma v_z)]$
$f^1 = q\gamma[E_x + (v_y B_z - v_z B_y)]$
我们认出 $v_y B_z - v_z B_y$ 正是矢量叉乘 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的 x 分量。
$f^1 = q\gamma[E_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x] = \gamma F_x$
在相对论中，三维力 $\mathbf{F}$ 与四维力空间分量 $\mathbf{f}$ 的关系是 $\mathbf{f} = \gamma \mathbf{F}$。因此，我们重现了经典的三维

洛伦兹力定律：

$$\boxed{\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

第五章总结

我们见证了物理学史上最美妙的统一之一。麦克斯韦的四条经典方程，被证明只是两个更根本的四维张量方程在三维世界中的不同“投影”：

1. **有源方程** $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$：一个四维矢量方程，包含了**高斯电场定律**和**安培-麦克斯韦定律**。它告诉我们，**源（电荷与电流）是电磁场张量的“四维散度”**。
2. **无源方程 (比安基恒等式)**：一个自动满足的几何约束，包含了**高斯磁定律**和**法拉第电磁感应定律**。它告诉我们，**电磁场必须可以由一个四维势A^μ导出**，这等价于磁单极子不存在。

再加上描述“场与物质”相互作用的四维洛伦兹力，整个经典电磁动力学的宏伟画卷，便以一种前所未有的简洁、和谐与深刻的方式，完整地展现在我们面前。

> **【本章思考题】**
>
> 1. (基础) 电荷守恒定律的微分形式是 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$。请证明，这个定律可以从有源麦克斯韦方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$ 中自动推导出来。（提示：对该方程两边同时求四维散度 ∂_ν，并利用 $F^{\mu\nu}$ 的反对称性）。
> 2. (进阶) 如果未来的实验真的发现了磁单极子，这意味着 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$，那么比安基恒等式将被打破。这将对我们理论的哪个最基本假设构成挑战？我们可能需要引入什么新的物理量来修正无源方程？（提示：思考电荷与电流如何构成四维电流密度 J^ν）。