(Para la respuesta usa solo la cara de una página)

1.- La intensidad de la luz en el plano viene dada por la función $f(x,y) = A - 2x^2 - y^2 + 4x$ para cierta constante positiva $A \in \mathbb{R}$.

a) ¿En qué punto del plano se encuentra el foco de luz, es decir, el de mayor intensidad?

b) Demuestra que una partícula que siga, desde el punto $(2,1)$, la trayectoria $\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (e^{-4t} + 1, e^{-2t})$ se dirige con la mayor eficacia en intensidad hacia el punto de luz.

c) Una determinada especie de insecto es sensible a los cambios de luz. Si parte del punto $(1,1)$, describe la trayectoria que debería seguir para que no sufra cambios durante la misma.

SOL.: (a) Tenemos que probar que hay un punto en el plano en el que $f(x,y)$ alcanza el máximo absoluto. Buscamos primero los puntos críticos:

$$\nabla(f) = (-4x+4, -2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0).$$

La matriz Hessiana de $f(x,y)$ es,

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz define una forma cuadrática que es definida negativa en todo punto, por lo tanto, f alcanza un máximo local en $(1,0)$ y el valor en ese punto es $A+2$. Para demostrar que el valor anterior es en realidad un máximo global de f, basta observar que:

$$f(x,y) = A - 2x^2 - y^2 + 4x = A - (2x^2 + y^2 - 4x) = A - \left[2(x-1)^2 + y^2\right] + 2$$

y que $2(x-1)^2 + y^2 \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Luego el valor máximo (absoluto) de f es $A+2$ y se alcanza en el punto $(1,0)$.

(b) Para probar lo que se nos pide debemos ver que el vector derivada de la trayectoria σ en cada punto tiene la misma dirección y sentido que el vector gradiente de f en ese punto, pues eso querrá decir que la partícula se mueve en la dirección de mayor cambio. De hecho, como comprobamos a continuación, son iguales:

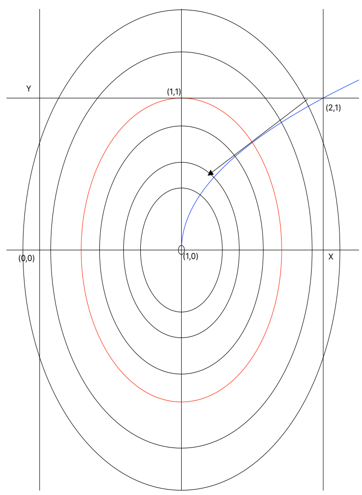
$$\nabla(f(\sigma(t))) = (-4(e^{-4t}+1)+4, -2(e^{-2t})) = (-4e^{4t}, -2e^{-2t}) = \sigma'(t).$$

(c) Para que no haya cambios en la intensidad de la luz, la trayectoria del insecto debe ser la de la curva de nivel de f que pasa por el punto $(1,1)$ de partida. Como $f(1,1) = A+1$, la curva de nivel correspondiente es:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : A - 2x^2 - y^2 + 4x = A+1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2x^2 - y^2 + 4x = 1\} =$$

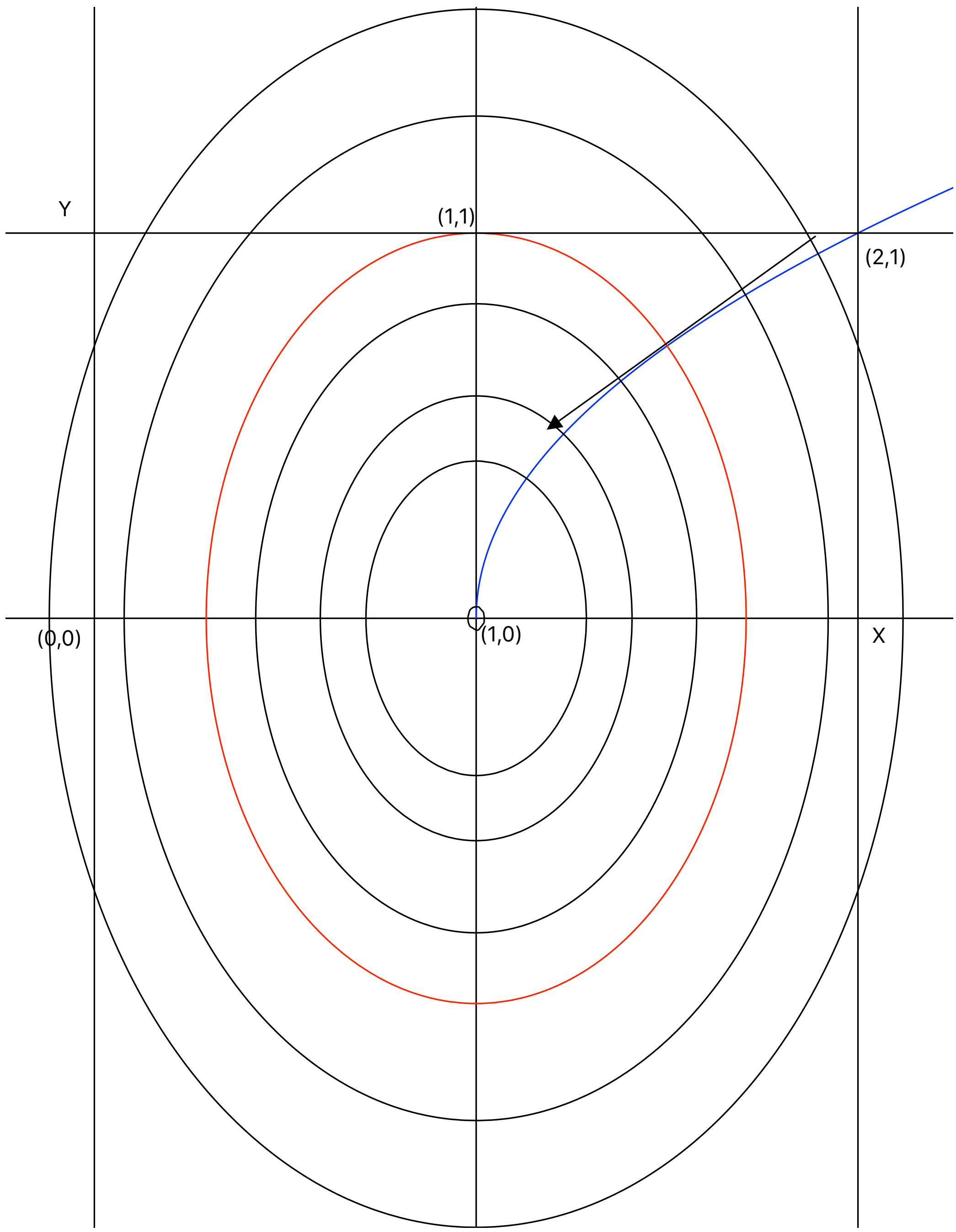
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2(x-1)^2 + y^2 = 1\},$$

lo que corresponde a una elipse con centro el punto $(1,0)$, (véanse los dibujos en esta y en la siguiente página).



Los detalles del dibujo:

En azul puede verse la trayectoria que sigue la partícula hasta llegar al foco. Las elipses son curvas de nivel de la función intesidad. Obsérvese cómo la trayectoria azul es perpendicular a cada una de ellas en el punto de corte. La curva de nivel de color rojo es la pedida en el apartado c)


Y
(1,1)
(2,1)
(0,0)
(1,0)
X