Conjuntos y números 16/12

2. $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$, P y Q coprimos $\iff$ $P+Q$ y $P.Q$ son coprimos.

$\Rightarrow)$ Sea $R \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible y tq. $R \mid P+Q \wedge R \mid P.Q$.

Como P y Q coprimos, $R \mid P.Q \Rightarrow R \mid P \vee R \mid Q$ (R es irred.)

s. p. d. g. asumo $R \mid P$.

Entonces $R \mid P \wedge R \mid P+Q \Rightarrow R \mid (P+Q) - P = Q$. Es decir $R \mid P$ y $R \mid Q$. Como P y Q coprimos, $R = 1$.

$\Leftarrow)$ Sea $R \in \mathbb{Q}[x]$ irred. y tq. $R \mid P$ y $R \mid Q$.

$R \mid P \wedge R \mid Q \Rightarrow R \mid P+Q \wedge R \mid P.Q$, luego $R = 1$. $\blacksquare$

3. $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$, $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + \quad -5x^3 + \quad +4x & x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\
\hline
-\ x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 & x^2 + 2x + 4 \\
\quad 2x^4 \quad - 6x^2 + 4x & \\
-\ 2x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 12x & \\
\quad 4x^3 + 4x^2 - 8x & \\
-\ 4x^3 - 8x^2 - 20x + 24 & \\
\quad 12x^2 + 12x - 24 &
\end{array}$$

$x^5 - 5x^3 + 4 = (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2x + 4) + (12x^2 + 12x - 24)$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (12x^2 + 12x - 24)\dfrac{(x-3)}{12} + 0$

El m.c.d. mónico es $x^2 + x - 2$.

Despejando el resto:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x^2 + x - 2 \\
\hline
-\ x^3 + x^2 - 2x & x - 3 \\
\quad -3x^2 - 3x + 6 & \\
-\ -3x^2 - 3x + 6 & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

$x^2 + x - 2 = \dfrac{1}{12}\left((x^5 - 5x^3 + 4x) - (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + 2x + 4)\right)$

$\Updownarrow$

$x^2 + x - 2 = \left(\dfrac{1}{12}\right) \cdot (x^5 - 5x^3 + 4x) - (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\left(\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{3}\right)$ $\blacksquare$

5. Encontrar $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tq. $x^2 + 1 \mid P(x)$ y $x^3 + 1 \mid P(x) - 1$, P mínimo grado posible

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + \quad\quad + 1 & x^2 + 1 \\
\hline
-\ x^3 \quad + x & x \\
\end{array}$$

$x^3 + 1 = x(x^2 + 1) - x + 1$

$-x+1$

$x^2+1 = (-x+1)(-x-1)+2$

$$\begin{array}{l|l} x^2 + \quad +1 & -x+1 \\ \hline -x^2 \quad -x & -x-1 \\ \hline \quad x+1 & \\ \quad -x-1 & \\ \hline \quad\quad 2 & \end{array}$$

Proced. inverso:

$$2 = x^2+1 + (-x+1)(x+1)$$

$$2 = x^2+1 + \left(x^3+1 - x(x^2+1)\right)(x+1)$$

$$\Rightarrow 2 = (x^2+1)\cdot\left(1 - x(x+1)\right) + (x^3+1)(x+1)$$

$$1 = \underbrace{(x^2+1)\cdot\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{P(x)} + \underbrace{(x^3+1)\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)}_{-P(x)+1}$$

$$P(x) = -\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

Por una parte $\quad -(-P(x)+1)+1 = P(x) = (x^2+1)(\ldots)$

Luego $x^2+1 \mid P(x)$.

También tengo $\quad -(-P(x)+1) = P(x)-1$, luego $(x^3+1) \mid P(x)-1$. ■

$$\parallel$$

$$-(x^3+1)\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

7) $P(x) = x^4+7x^3+9x^2-27x-54$ $\quad x = p/q$, $p \mid -54$ y $q \mid 1$

Por el criterio de las raíces racionales, $\quad x \in \pm\{1,2,3,6,9,27,54\}$.

Probamos $P(1) = 1+7+9-27-54 = -64$.

Sea $x = 1+t$, el polinomio $P(1+t)$:

- Tiene coef. de t^4 el mismo que $P(x)$ en x^4.
- Tiene como término libre $P(1) = -64$.

Por el mismo crit. $\quad t \in \pm\{1,2,4,8,16,32,64\}$

$$x = 1+t \in \left\{\begin{array}{l} 2,3,5,9,17,33,65 \\ 0,-1,-3,-7,-15,-31,-63 \end{array}\right\}.$$

Los valores buenos tienen que estar en ambos conjuntos:

$$\{2, \pm 3, 9, -1\}$$

$P(2) = 16 + 56 + 36 - 54 - 54 = 16 \cdot 2 - 18 = 0$

$$x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 27x - 54 = (x-2)(x^3 + 9x^2 + 27x + 27)$$

$P(-3) = -27 + 3 \cdot 27 - 3 \cdot 27 + 27 = 0$

$$(x^3 + 9x^2 + 27x + 27) = (x+3)(x^2 + 6x + 9)$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{\cancel{36 - 4 \cdot 9}}}{2} = -3$$

Las raíces son 2 (multiplicidad 1) y -3 (multiplicidad 3).

$$P(x) = (x-2)(x+3)^3, \qquad P'(x) = (x+3)^2\left(x+3 + 3(x-2)\right)$$

Tener una raíz múltiple $\Rightarrow$ $\text{mcd}(P, P') $ tiene grado ≥ 1.

(8) Hallar $P(X)$ con $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ como raíz. Buscamos una comb. lineal:

$\uparrow$

$\mathbb{Z}[X]$

$$a_n(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n + \dots + a_1(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + a_0 = 0$$

- $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$
- $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 = \dots = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$
- $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 = 25 + 24 + 20\sqrt{6} = 49 + 20\sqrt{6}$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 - 10(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 49 + 20\sqrt{6} - 10(5 + 2\sqrt{6}) = -1$$

$$\Rightarrow \quad x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

$\blacksquare$