Tema 6. Espacio Dual

6.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/4494b073-91a4-4fc9-9539-91cfe79e333b/H9_EspacioDual.pdf

6.1. Espacio dual

Definición. Sea V^n un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces $V^* = \mathrm{Hom}(V^n, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial llamada ***espacio dual*** *de V.*

Ejemplo 1. Sea $V = \mathbb{R}^3$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3$. Entonces, $\varphi \in V^*$.

Observación. Sea $\{v_1, ..., v_n\}$ una base de V, entonces, $v_1^* : V \to \mathbb{K}$, con $v_1 \to 1, v_2 \to 0, ..., v_n \to 0$ y $v_1^* \in V^*$.
$\forall v \in V \Rightarrow v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$, $a_i \in \mathbb{K} \Rightarrow v_1^*(v) = a_1 v_1^*(v_1) + a_2 v_1^*(v_2) + ... + a_n v_1^*(v_n) = a_1$.

> Proposición. Si $B = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V, entonces $\{v_1^*, ..., v_n^*\}$ es una base de V^*, llamada **base dual** de B. En particular, $\dim V = \dim V^*$.

Demostración.
Supongamos que $\lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_n v_n^* = \vec{0} \in V^*$. Entonces tenemos que $(\lambda v_1^* + ... + \lambda v_2^*)(v_2) = 0(v_2) = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_2 v_2^*(v_2) = \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0$.

Definición. Sea $f : V^* \to W^*$ un endomorfismo de espacios duales, se define la aplicación dual de f como $f^* : W^* \to V^*$, con $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Observación. $f^* : W^* \to V^*$ es ciertamente lineal:

1. $f^*(\varphi_1 + \varphi_2) = f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2)$.
2. $f^*(\lambda\varphi) = \lambda f^*(\varphi)$.

> Proposición. Sea $f : V^n \to W^n$ una aplicación lineal, y sean $B = \{v_1, ..., v_n\}$ y $B' = \{w_1, ..., w_n\}$ bases de V y W respectivamente. Entonces $(M_{BB'}(f))^t = M_{(B')^* B^*}(f^*)$.

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2 = \{\text{polinomios de grado} \leq 2\}$ tal que $f(a_1, a_2, a_3) = a_1 x + (a_2 + a_3)x^2$ y dadas las bases $B_1 = \left\{ e_1, e_2, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B_2 = \{w_1 = 1, w_2 = x, w_3 = x^2 - 1\}$.

Tenemos que $M_{B_1B_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
$f^*(w_1^*) = f^*(w_1^*)(e_1)e_1^* + f^*(w_1^*)(e_2)e_2^* + f^*(w_1^*)(e_3)e_3^*$:
- $f^*(w_1^*)(e_1) = (w_1^* \circ f)(e_1) = w_1^*(f(e_1)) = w_1^*(x) = w_1^*(w_2) = 0$.
- $f^*(w_1^*)(e_2) = (w_2^* \circ f)(e_2) = w_1^*(f(e_2)) = w_1^*(x^2) = w_1^*(w_1 + w_3) = 1 + 0 = 1$.
- $f^*(w_1^*)(v) = (w_1^* \circ f)(v) = w_1^*(f(v)) = w_1^*(x + 2x^2) = w_1^*(2w_1 + w_2 + 2w_3) = 2$.

Luego, efectivamente, $M_{B_1^*B_2^*}(f^*) = (M_{B_1B_2}(f))^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.2. Espacio bidual

*Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ el espacio dual de V. Podemos definir $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{K})$ como el espacio dual de V^* o el **espacio bidual** de V.*

> Proposición. V se identifica con V^{**}, $V \equiv V^{**}$, mediante la regla $v \to \tilde{v} : v^* \to \mathbb{K}$, tal que $\varphi \to \tilde{v}(\varphi) = \varphi(v)$.

Demostración.
Comprobamos que $\tilde{v} \in (V^*)^*$, es decir, $\tilde{v} : v^* \to \mathbb{K}$ es lineal.
- $\tilde{v}(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) = \tilde{v}(\varphi_1) + \tilde{v}(\varphi_2)$
- $\tilde{v}(\lambda\varphi) = \lambda\varphi(v) = \lambda\tilde{v}(\varphi)$

Comprobamos que $\Phi : V \to V^{**} \equiv v \to \tilde{v}$ es un isomorfismo.
- $\widetilde{v_1 + v_2}(\varphi) = \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \tilde{v}_1(\varphi) + \tilde{v}_2(\varphi) \Rightarrow \Phi$ es lineal
- Si $v \neq \vec{0} \Rightarrow$ tomamos una base de V de la forma $\{v_1 = v, v_2, ..., v_n\}$ y consideramos su base dual $\{v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*\}$, entonces $\tilde{v}(v_1^*) = v_1^*(v) = v_1^*(v_1) = 1 \neq 0 \Rightarrow \tilde{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \Phi$ es inyectiva
- $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**} \Rightarrow \Phi$ es sobreyectiva ☐

---

*Definición. Sea $S \subset V$, se define el **anulador** de S como $S^\circ = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0, \forall v \in S\} \subset V^*$.*
Nota. S° es un subespacio de V^*.

> Proposición. Sea $F \subset V$ un subespacio vectorial. Entonces, $\dim F + \dim D^\circ = \dim V = n$.

Demostración.
Sea $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ una base de F, $\{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ una base de V y $\{u_1^*, ..., u_r^*, u_{r+1}^*, ..., u_n\}$ una base dual; basta ver que $\{u_{r+1}^*, ..., u_n^*\}$ es una base de F°.
1. $u_{r+1}^* \in F^\circ$ porque $u_{r+1}^*(u_1) = u_{r+1}^*(u_2) = ... = u_{r+1}^*(u_r) = 0$, es decir, u_{r+1}^* anula a todos los vectores de F. $\{u_{r+1}^*, ..., u_n^*\}$ son independientes y generadores de forma trivial. ☐

> Proposición. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo, entonces $(\mathrm{Im}\ f)^\circ = \ker f^* \subset V^*$.

Demostración.
$\varphi \in (\mathrm{Im}\ f)^\circ \Leftrightarrow \varphi(f(v)) = \vec{0}, \forall v \in V \Leftrightarrow (f^* \circ \varphi)(v) = 0, \forall v \in V \Leftrightarrow f^*(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in \ker f^*$.

□

> Teorema. $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im} f^*)$.

Demostración. $\dim(\operatorname{Im} f^*) = \dim V^* - \dim(\ker f^*) = \dim V - \dim(\operatorname{Im} f)^\circ = \dim V - (\dim V - \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im} f)$. □

> Corolario. $\text{rango filas}(A) = \text{rango columnas}(A)$.