Inicial primer apellido

**Cálculo II**
1º del Grado en Matemáticas
1º de Doble titulación en Ingeniería Informática-Matemáticas
Curso 2019-2020

Grupo mañana ☐
Grupo tarde ☐

21 de febrero de 2020

**Parcial 1**

Apellidos y Nombre ______________________ D.N.I. ____________

**Justificar todas las respuestas.**

**1.** Sea $f$ definida en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| < 12\}$ por:

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$$

Determina y dibuja las curvas de nivel de la función correspondientes a los valores $c = 0$ y $c = 1$.

---

**Solución:** $\operatorname{sen} r = 0$ solo si $r = k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Como $|x| + |y| \geq 0$, solo nos interesan los $k \geq 0$; como el dominio es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| < 12\}$, solo queremos $k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq k\pi < 12$, esto es $k = 0, 1, 2, 3$. Las curvas de nivel pedidas son entonces

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| = k\pi, k = 0, 1, 2, 3\}$$

EL caso $k = 0$ corresponde al punto $(0,0)$; asumimos entonces $1 \leq k \leq 3$. Para tratar los valores absolutos, estudiamos la curva en cada cuadrante determinado por los ejes coordenados.

- En el primer cuadrante, $x, y \geq 0$, así que las curvas quedan como

  $$x + y = k\pi, \quad 1 \leq k \leq 3,$$

  que es el segmento de la recta de pendiente $(-1)$ entre los puntos $(k\pi, 0)$ y $(0, k\pi)$;
- en el segundo, $x \leq 0$, $y \geq 0$, así que las curvas son

  $$-x + y = k\pi, \quad 1 \leq k \leq 3,$$

  que es el segmento de la recta de pendiente 1 entre los puntos $(0, k\pi)$ y $(-k\pi, 0)$;
- en el tercero, $x \leq 0$, $y \leq 0$, así que las curvas son

  $$-x - y = k\pi, \quad 1 \leq k \leq 3,$$

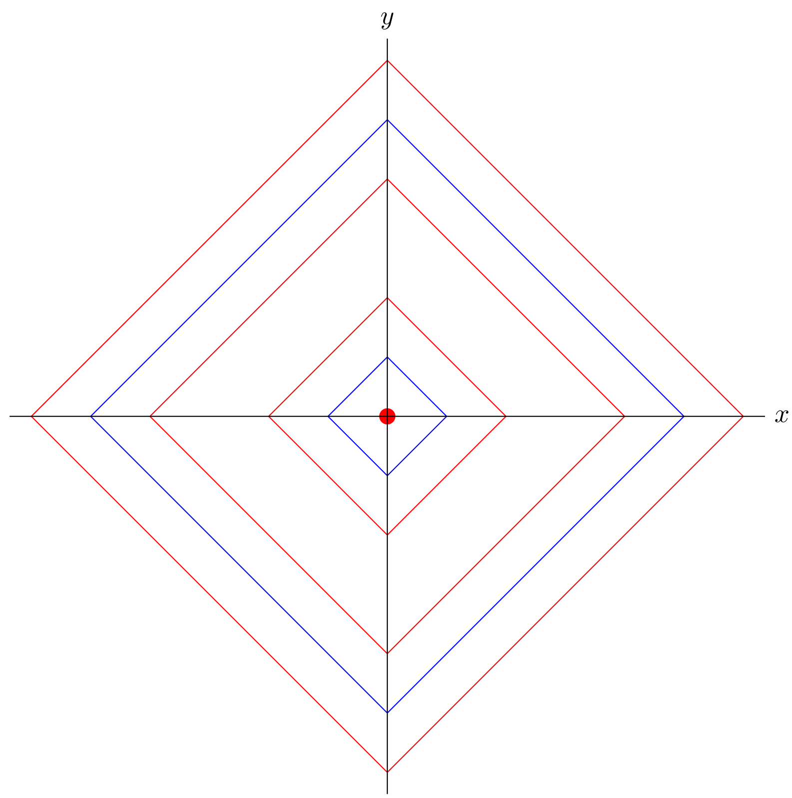
  que es el segmento de la recta de pendiente $-1$ entre los puntos $(0, -k\pi)$ y $(-k\pi, 0)$;
- finalmente, en el cuarto, $x \geq 0$, $y \leq 0$, así que las curvas son

  $$x - y = k\pi, \quad 1 \leq k \leq 3,$$

  que es el segmento de la recta de pendiente 1 entre los puntos $(0, -k\pi)$ y $(k\pi, 0)$.

Las curvas de nivel correspondientes a $c = 1$ aparecen cuando $|x| + |y| = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, lo que deja $k = 0, 1$. El mismo análisis que en el caso anterior deja un cuadrado con vértices $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, 0)$, $(0, -\pi/2)$, $(-\pi/2, 0)$, y otro con vértices $(0, 2\pi + \pi/2)$, $(2\pi + \pi/2, 0)$, $(0, -2\pi - \pi/2)$, $(-2\pi - \pi/2, 0)$.

En la gráfica indicamos en rojo las curvas correspondientes a $c = 0$, y en azul aquellas correspondientes a $c = 1$.



**2.** Considera la funciones

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^4} \ \text{ sen } \ y$$

Determina si cada una de ellas se puede definir en el origen de manera que sean funciones continuas en $\mathbb{R}^2$.

---

**Solución:** Para la primera función, observamos que cuando $y = 0, x \neq 0$, $f(x,0) = 0/x^4 = 0$, así que

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

Esto implica que, si el límite existe, debería ser igual a cero. Pero cuando $x = y \neq 0$, tenemos que

$$f(x,x) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4+x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2},$$

así que

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como $0 \neq 1/2$, el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ no existe; esto hace que $f$ no se pueda definir en $\mathbf{x_0} = (0,0)$ para que $f$ sea continua ahí.

Para la segunda función, observamos que, cuando $(x,y) \neq (0,0)$,

$$0 \leq |g(x,y)| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^4} \ \operatorname{sen} y\right| = \frac{x^2}{x^2+y^4} \cdot |\operatorname{sen} y| \leq \frac{x^2}{x^2} \cdot |\operatorname{sen} y| = |\operatorname{sen} y|,$$

donde hemos usado que $x^2 + y^4 \geq x^2$

Podemos usar entonces que, cuando $(x,y) \to (0,0)$, se tiene que $y \to 0$, y $\operatorname{sen} y \to 0$, por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Para una demostración más rigurosa, usamos la definición:

Sea $\varepsilon > 0$; como la función $h(r) = \operatorname{sen} r$ es continua en $r = 0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |r| < \delta_1$, se tiene que $|\operatorname{sen} r| < \varepsilon$. Pero si $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta_1$, entonces

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} =< \|(x,y) - (0,0)\|,$$

y por tanto $|y| \leq \delta_1$. Así que tomando $\delta = \delta_1$, si $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta$, $|y| < \delta$, y

$$|g(x,y)| \leq |\operatorname{sen} y| < \varepsilon$$

Por la definición de límite,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$$

Por tanto, definiendo $g(0,0) := 0$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0),$$

y $g$ es continua ahí.

**3.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

y sea $E$ su gráfica, es decir, el conjunto definido como

$$E := \{\, (x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\}$$

1. Determina las secciones de $E$ con los planos $y = \lambda x$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Demuestra que todo punto de la forma $(0,0,a)$ con $|a| \leq 1$ está en la clausura de $E$.
3. ¿Es $E$ cerrado?

---

**Solución:** Para la primera pregunta, cuando $y = \lambda x$, **y** $x \neq 0$**,** $f(x,\lambda x) = \frac{2\lambda x^2}{x^2+\lambda^2 x^2} = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$. Cuando $x = y = 0$, $f(0,0) = 0$, así que el punto $(0,0,0)$ también está en la sección pedida. Por lo tanto

$$E \cap \{(x,\lambda x,z)\} = \{(x,\lambda x,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2})\} \cup \{(0,0,0)\}.$$

Para la segunda pregunta, observamos que si $|a| \leq 1$, $a \neq 0$, entonces igualando

$$a = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

implica

$$a\lambda^2 - 2\lambda + a = 0,$$

o

$$\lambda_a = \frac{2 \pm \sqrt{4-4a^2}}{2a}$$

lo que tiene solución porque $|a| \leq 1$, $a \neq 0$. Por otra parte, si $a = 0$, $\lambda = 0$ vale.

En cualquiera de los dos casos, puntos de la forma

$$(x,\lambda x,a), \qquad \text{con } x \neq 0$$

se hallan en $E$, y tienen límite $(0,0,a)$ cuando $x \to 0$. Por lo tanto, $(0,0,a) \in \bar{E}$ para todo $|a| \leq 1$.

Finalmente, $E$ no es cerrado porque no contiene todos sus puntos límite por el apartado anterior.

**4.** Considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4 < x^2 + y^2 < 9\}$$

Determina (y justifica) quien es el interior del conjunto $A$.

---

**Solución:** La forma más sencilla de hacer este ejercicio es definir la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, darse cuenta de que es continua (ya que es un polinomio), y escribir

$$A = f^{-1}(I), \quad \text{donde } I \text{ es el intervalo abierto } (4, 9) \subseteq \mathbb{R}.$$

Como el intervalo $I = (4, 9)$ es abierto en $\mathbb{R}$ y $f$ es continua, $A$ es abierto. Al ser abierto, $A$ coincide con su interior.