Conjuntos y Números, UAM

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 20 DE JUNIO DE 2022

APELLIDOS Y NOMBRE: ______________________ GRUPO: ________

Se pide razonar y justificar todas las respuestas

Tiempo disponible: 3 horas

1. (**1 punto**) Sea $f : A \longrightarrow B$ una función definida entre dos conjuntos arbitrarios no vacios A y B. Demostrar la doble implicación

$$f \text{ es sobreyectiva} \iff B \setminus f(A_1) \subset f(A \setminus A_1) \text{ para } \underline{\text{todo}} \text{ subconjunto } A_1 \text{ de } A$$

2. (**1 punto**) Demostrar que $n^7 - n$ es divisible por $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. (**2 puntos**) Una empresa de camiones tiene que transportar 600 cajas. Pueden usar dos tipos de camiones: grandes con capacidad 34 cajas y pequeños con capacidad 28 cajas. Todos los camiones parten simultáneamente y a su máxima capacidad. Determinar las posibles formas de realizar el envío.

4. (**2 puntos**) En el conjunto $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definimos la relación

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff a^2 d = c^2 b$$

(a) Demostrar que es una relación de equivalencia.

(b) Describir la clase de equivalencia $\overline{(a,b)} := \{(c,d) \in X : (c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b)\}$

para $(a,b) = (1,1)$ y $(a,b) = (0,1)$. Realizar los correspondientes dibujos en X.

(c) Describir el conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ sin repetir elementos. Comparar(justificadamente) su cardinalidad con la de $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$.

5. (**2 puntos**) Sean A y B dos conjuntos <u>disjuntos</u> cualesquiera. Demostrar que los conjuntos $\mathcal{P}(A \cup B)$ y $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tienen la misma cardinalidad. Usamos $\mathcal{P}(X)$ para denotar al conjunto de partes del conjunto X.

Debes definir las funciones y comprobar las propiedades de las mismas que te permitan concluir tus afirmaciones.

6. (a)(**1 punto**) En $\mathbb{Z}_3[x]$ se consideran los polinomios

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 1 \qquad \text{y} \qquad q(x) = x^4 + 1$$

Calcular su máximo común divisor y determinar dos polinomios $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ tales que:

$$u(x) \cdot p(x) + v(x) \cdot q(x) = \text{mcd}(p(x), q(x))$$

(b)(**1 punto**) Encontrar las 5 raices de la ecuación $z^5 - \sqrt{3} + \mathbf{i} = 0$ y determina cuál de ellas es la más cercana al eje imaginario.

Recordar: $\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\quad \text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$