Tema 2. Espacios Vectoriales

2.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/95629f01-be9c-4329-8b26-e8d366843f1d/H2_EspaciosVectoriales.pdf

2.1. Espacios vectoriales

Sean $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, podemos definir las siguientes operaciones en $\mathbb{R}^2$:

- Suma. $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.
- Producto. $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

A estas operaciones se les pueden aplicar las siguientes propiedades:

1. Asociativa I. $u + (v + w) = (u + v) + w$
2. Conmutativa. $u + v = v + u$
3. Elemento neutro I. $\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^2 : u + \vec{0} = u$
4. Simetría. $\forall u \in \mathbb{R}^2, \exists(-u) : u + (-u) = \vec{0}$
5. Distributiva I. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
6. Distributiva II. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
7. Asociativa II. $\lambda(\mu u) = (\lambda \mu)u, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
8. Elemento neutro II. $1 \cdot u = u$

*Definición. Un **espacio vectorial** sobre un **cuerpo conmutativo** $\mathbb{K}$ es un conjunto V en el que se han definido las operaciones suma y producto escalar, que satisfacen las 8 propiedades anteriores.*

Ejemplo 1. $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ con las operaciones usuales en un espacio vectorial.

Ejemplo 2. $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ con las operaciones:
- suma. $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$
- producto escalar. $\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, ..., \lambda u_n)$

Ejemplo 3. $V = \mathbb{C}^n, \mathbb{K} = \mathbb{C}$ con las operaciones usuales, $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Ejemplo 4. $V = \mathbb{C}^n, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ con las operaciones usuales, $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 5. $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{K} = \mathbb{Q}$ con las operaciones usuales, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 6. $V = M_{m\times m}(\mathbb{K}), \mathbb{K}$ con la suma usual y la multiplicación por escalares, $M_{m\times m}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo 7. $V = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}, a_i \in \mathbb{K}, \mathbb{K}$ con las operaciones usuales, $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}, a_i \in \mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo 8. $V = F(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K}\}, \mathbb{K}$ con la suma entre funciones y la multiplicación por escalares, $F(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

2.1.1. Subespacios vectoriales

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto $W \subset V$ se dice que es un ***subespacio vectorial*** de *V si:*

1. $\vec{0} \in W$
2. $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$
3. $v \in W \Rightarrow \lambda v \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Observación. Un subespacio vectorial W de V sobre $\mathbb{K}$ es también un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las mismas operaciones de V.

Ejemplo 9. $V = \mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7\} \subseteq \mathbb{R}^3$. W no es un subespacio vectorial porque $\vec{0} = (0, 0, 0) \notin W$.

Ejemplo 10. $V = \mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
- Elemento neutro. $\vec{0} = (0, 0, 0) \in W$, ya que $0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0$.
- Suma. $u + v = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$
- Producto. $\lambda u = \lambda x_1 + \lambda 2x_2 + \lambda 3x_3 = \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = \lambda 0 = 0$
W es un subespacio vectorial de V y un espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Decimos que $\langle v_1, v_2, ..., v_n\rangle = \{v \in V : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{K}\}$ es un ***subespacio vectorial*** *de V y se llama el subespacio vectorial generado por $v_1, v_2, .., v_n$, o también el espacio vectorial de las combinaciones lineales de $v_1, v_2, ..., v_n$.*

Demostración.

Comprobamos que $\langle v_1, v_2, ..., v_n\rangle$ es un subespacio de V.
- $\vec{0} = 0\cdot v_1 + ... + 0\cdot v_n \Rightarrow \vec{0} \in \langle v_1, ..., v_n\rangle$ (porque $0v = \vec{0}, \forall v \in V$)
- $u, v \in \langle v_1, ..., v_n\rangle \Rightarrow \begin{cases} u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n, \lambda \in \mathbb{K} \\ v = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n, \mu \in \mathbb{K} \end{cases} \Rightarrow u + v = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + ... + (\lambda_n + \mu_n)v_n \in \langle v_1, ..., v_n\rangle$

Ejemplo 11. Sea $V = \mathbb{K}^2$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1) \in V$. Se dice que $\langle v_1, v_2\rangle$ genera todo V ya que $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2\rangle$.

Ejemplo 12. Sea $V = \mathbb{K}^2$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $v_1 = (2, -2), v_2 = (1, 1), v_3 = (2, 3) \in V$. Se dice que $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \mathbb{K}^2$ ya que $\forall v \in \mathbb{K}^2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x-y}{4}v_1 + \frac{x+y}{2}v_2 + 0v_3 = \frac{x-y}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \mathbb{K}^2$.

2.1.2. Independencia lineal

*Definición. Se dice que $v_1, v_2, ..., v_n$ son **linealmente independientes** si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.*

*Definición. Se dice que $v_1, v_2, ..., v_3 \in V$ forman una **base** de V si son generadores y linealmente independientes.*

Ejemplo 13. Sea $V = \mathbb{K}^2$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1) \in V$ son generadores de V (ver ejemplo 11). Forman un base $\Leftrightarrow x_1 v_1 + x_2 v_2 = \vec{0}$ tiene solución única $x_1 = x_2 = 0$.
$x_1 v_1 + x_2 v_2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$.

Ejemplo 14. Demostrar que $0v = \vec{0}$ $(0 \in \mathbb{K}, \vec{0} \in V)$.
$0v = (0+0)v = 0v + 0v \Rightarrow (-0v) + 0v = (-0v) + (0v + 0v) \Rightarrow \vec{0} = ((-0v) + 0v) + 0v \Rightarrow \vec{0} = \vec{0} + 0v = 0v$. $\square$

Ejemplo 15. Demostrar que $(-1)v = (-v)$.
$\vec{0} = 0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$; $(-v) = \vec{0} + (-v) = (-v) + (v + (-1)v) = (-v + v) + (-1)v = \vec{0} + (-1)v = (-1)v$. $\square$

2.1.3. Base canónica

*Definición. Llamamos **base canónica** de $\mathbb{K}^n$ al conjunto de vectores:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Bases de un espacio vectorial

> Proposición. Sea $B = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$, donde V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces, B es una base $\Leftrightarrow \forall v \in V$ se expresa como combinación lineal de los elementos de B de forma única.

Demostración.
$\Rightarrow)$ $\forall v \in V$, tenemos que $v \in \langle B \rangle$, es decir, todo v es combinación lineal de $v_1, ..., v_n$. Suponemos que $\begin{cases} v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n, \lambda_i \in \mathbb{K} \\ v = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n, \mu_i \in \mathbb{K} \end{cases} \Rightarrow \vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + ... + (\lambda_n + \mu_n) v_n \Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = ... = \lambda_n - \mu_n = 0 \Rightarrow \lambda_i = \mu_i, \forall i \in \mathbb{K}$.

$\Leftarrow)$ $\langle B \rangle = V$, es decir, B es un conjunto generador. Suponemos que $\begin{cases} \vec{0} = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n, \lambda_i \in \mathbb{K} \\ \vec{0} = 0 v_1 + ... + 0 v_n \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0 \Rightarrow B$ es un conjunto de vectores linealmente independientes $\Rightarrow B$ es una base. $\square$

Definición. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{\vec{0}\}$, y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base. Entonces sabemos que $v \in V$, $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ (con $\lambda_1, ..., \lambda_n$ únicos).
Nota. Estos coeficientes $(\lambda_1, .., \lambda_n)$ son las **coordenadas** de v respecto de B.

Ejemplo 16. Sea $V = \mathbb{K}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y dados los vectores $v_1 = (1,0,2,1), v_2 = (2,1,0,0), v_3 = (0,1,1,1), v_4 = (0,0,1,1), v = (1,2,3,4)$. ¿Es $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base? Si lo es, ¿Cuáles son las coordenadas de v?
La matriz $\bar{A}$ representa el sistema lineal $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = v$.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & | & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & | & 8/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

En este punto, podemos asegurar que los tres vectores son linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Luego $v = -v_1 + v_2 + v_3 + 4v_4$.

> Teorema de Steintz: Sea V un espacio vectorial, $u_1, ..., u_r$ vectores. Sea $\{v_1, .., v_n\}$ una base de V. Entonces, salvo reordenación de la base, se puede sustituir u_1 por v_1, u_2 por v_2,..., u_r por v_r.

Demostración.
Demostramos por inducción.
Caso base: $r = 1 \to u_1 = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, $\lambda_1 \neq 0$. Afirmamos que $\{u_1, v_2, ..., v_n\}$.
a) Generadores. Comprobamos que $\langle u_1, v_2, ..., v_n \rangle = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$.
$\subset$) Trivial.
$\supset$) Basta con probar que $v_1 \in \langle u_1, v_2, ..., v_n \rangle$. $\lambda_1 v_1 = u_1 - \lambda_2 v_2 - ... - \lambda_n v_n \Rightarrow v_1 = \dfrac{u_1}{\lambda_1} - \dfrac{\lambda_2 v_2}{\lambda_1} - ... - \dfrac{\lambda_n v_n}{\lambda_1}$.
b) Independencia. Suponemos que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = \vec{0}$.
Entonces, $a_1(u_1 = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = \vec{0} \Rightarrow a_1\lambda_1 v_1 + (a_1\lambda_2 + a_2)v_2 + ... + (a_1\lambda_n + a_n) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} a_1\lambda_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ a_1\lambda_2 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_1\lambda_n + a_n = 0 \Rightarrow a_n = 0 \end{cases}$.
Paso inductivo: Sean $\{u_1, ..., u_r, u_{r+1}\}$ linealmente independientes $\Rightarrow \{u_1, ..., u_r, v_{r+1}, ..., v_v\}$ es una base.
Falta ver que sustituyendo alguno de los vectores $v_{r+1}, ..., v_n$ por u_{r+1}. Por lo anterior, solo hace falta probar que en la expresión $u_{r+1} = \mu_1 u_1 + ... + \mu_r u_r + \mu_{r+1} v_{r+1} + ... \mu_n v_n, \mu_i \in \mathbb{K}$, algún μ_j, con $j > r$, es no nulo.

Si tuviésemos que $\mu_{r+1} = ... = \mu_n = 0 \Rightarrow u_{r+1} = \mu_1 u_1 + ... + \mu_r u_r$, de forma que $u_1, u_2, ..., u_r, u_{r+1}$ no serían linealmente independientes. Contradicción. $\square$

> Corolario 1. $r \leq n$, es decir, cualquier conjunto de vectores linealmente independientes tiene cardinalidad $\leq$ cardinalidad de la base.

> Corolario 2. Todas las bases tienen el mismo cardinal.

Demostración.

Sea $\{u_1, .., u_r\}$ una base y $\{v_1, .., v_n\}$ otra. Entonces, $\begin{cases} r \leq n \\ n \leq r \end{cases} \Rightarrow r = n$. $\square$

2.2.1. Dimensión de una base

*Definición. Sea V un espacio vectorial finitamente generador, se llama **dimensión** de V, $\dim V$, al cardinal de cualquier base.*

Ejemplo 17. Sea $V = \mathbb{K}^5$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y dados los vectores $v_1 = (1,2,0,4,0), v_2 = (0,1,2,3,4), v_3 = (2,5,5,11,9), v_4 = (1,1,1,1,1)$. Sea $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, ¿es $W = \mathbb{K}^5$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes, de forma que una base de W sería $\{v_1, v_2, v_3\}$. Luego, la dimensión de W es 3.

Observaciones.

1. De todo sistema generador $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ se puede extraer una base. Si son linealmente independientes, es trivial. Si no lo son, tenemos que $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$, con $\lambda_n \neq 0 \Rightarrow v_n = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_n} v_1 - ... - \dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} v_{n-1} = \vec{0} \in \langle v_1, ..., v_{n-1} \rangle$ es también un sistema generador. Ahora sí, $v_1, ..., v_{n-1}$ son linealmente independientes $\Rightarrow \{v_1, .., v_{n-1}\}$ es base.
2. Cualquier subconjunto libre $\{v_1, ..., v_n\}$ de elementos linealmente independientes se puede ampliar a una base. Si $\langle v_1, ..., v_n \rangle = V$ ya está, son base. Si no lo son, $\exists v_{n+1} \notin \langle v_1, ..., v_d \rangle$ de forma que $v_1, ..., v_n, v_{n+1}$ son linealmente independientes, pues $a_1 v_1 + ... + a_n v_n + a_{n+1} v_{n+1} = \vec{0} \Rightarrow a_{n+1} \neq 0 \Rightarrow v_{n+1} \in \langle v_1, ..., v_n \rangle$. Contradicción.

2.3. Subespacios suma e intersección

> Sean V_1, V_2 subespacios de V, se definen:
>
> 1. Subespacio interior. $V_1 \cap V_2$ también es un subespacio.
> 2. Suma de subespacios. $V_1 + V_2$ también es un subespacio.

Demostración 1.
- $\vec{0} \in V_1 \cap V_2$ es trivial, pues $\vec{0} \in V_1 \wedge \vec{0} \in V_2$.
- $v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v_1, v_2 \in V_1 \wedge v_1, v_2 \in V_2 \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_1 \wedge v_1 + v_2 \in V_2 \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$.
- $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V_1 \cap V_2$. $\square$

Demostración 2.
- $\vec{0} \in V_1 + V_2$ porque $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$.
- $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V_1 + V_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \Rightarrow \lambda v = \lambda v_1 + \lambda v_2 \in V_1 + V_2$. $\square$

2.3.1. Fórmula de Grassman

Sea V un espacio vectorial y V_1, V_2 dos subespacios, definimos $V_1 + V_2$ como la suma directa de $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$.

> Proposición: La suma es directa $\Leftrightarrow \forall v \in V_1 + V_2, v = v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

Demostración.
$\Rightarrow)$ $v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2' : v_1, v_1' \in V_1, v_2, v_2' \in V_2 \Rightarrow v_1 - v_1' = v_2 - v_2' \in V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow v_1 = v_1' \wedge v_2 = v_2'$.
$\Leftarrow)$ $v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \begin{cases} v = v + \vec{0} \in V_1 + V_2 \\ v = \vec{0} + v \in V_1 \cap V_2 \end{cases} \Rightarrow v = \vec{0}$. $\square$

> Fórmula de Grassman. $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$.

Demostración.
Definimos $n = \dim V_1$ y $m = \dim V_2$. Sea $\{u_1, ..., u_r\}$ una base de $V_1 \cap V_2$,
$\{u_1, ..., u_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ una base de V_1 y $\{u_1, ..., u_r, w_{r+1}, ..., w_m\}$ una base de V_2.
Tenemos que ver que $\dim(V_1 + V_2) = n + m - r$. Basta con probar que
$\{u_1, ..., u_r, v_{r+1}, ..., v_n, w_{r+1}, ..., w_m\}$ es una base de $V_1 + V_2$.
1. Son generadores. $\alpha \in V_1 + V_2 \Rightarrow \alpha = \beta + \gamma$, con $\beta \in V_1, \gamma \in V_2 \Rightarrow \alpha = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_r u_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_n v_n + \mu_1 u_1 + ... + \mu_r u_r + \mu_{r+1} v_{r+1} + ... + \mu_m v_m$, con $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$.
$\alpha \in \langle u - 1, ..., u_r, v_{r+1}, ..., v_n, w_{r+1}, ..., w_m \rangle$, luego, son generadores.
2. Son linealmente independientes. $a_1 u_1 + ... + a_r u_r + a_{r+1} v_{r+1} + ... + a_n v_n + b_{r+1} w_{r+1} + ... + b_m w_m = \vec{0} \Rightarrow a_1 u_1 + ... + a_r u_r + a_{r+1} v_{r+1} + ... + a_n v_n = -(b_{r+1} w_{r+1} + ... + b_m w_m) \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow b_{r+1} w_{r+1} + ... + b_m w_m = c_1 u_1 + ... + c_r u_r \Rightarrow 0 = c_1 = ... = c_r = b_{r+1} = ... = b_m = 0 \Rightarrow a_1 u_1 + ... + a_r u_r + a_{r+1} v_{r+1} + ... + a_n v_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = ... = a_r = a_{r+1} = ... = a_n = 0$.
Luego, son linealmente independientes. $\square$

Ejemplo 18. Sea $V=\mathbb{K}^5$, $V_1=\left\langle v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle, V_2=$
$\left\langle v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\\0\end{pmatrix}\right\rangle$.

Dimensiones y bases de V_1, V_2, V_1+V_2 y $V_1\cap V_2$.

$x_1v_1+x_2v_2+...+x_6v_6=\vec{0}$ da lugar a:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0&1&1\\1&1&-1&1&1&2\\0&2&0&1&1&2\\0&3&1&0&1&3\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow_{(1)}\begin{pmatrix}1&0&2&0&1&1\\0&1&-3&1&0&1\\0&0&6&-1&1&0\\0&0&10&-3&1&0\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow_{(2)}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&2&0&1&1\\0&1&-3&1&0&1\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow_{(3)}\begin{pmatrix}1&0&2&0&0&1\\0&1&-3&1&0&1\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

1. v_1,v_2,v_3 son linealmente independientes $\Rightarrow \dim V_1=3\Rightarrow\{v_1,v_2,v_3\}$ forman una base en V_1.
2. v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 son linealmente independientes $\Rightarrow \dim(V_1+V_2)=5\Rightarrow V_1+V_2=\mathbb{R}^5\Rightarrow$ $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ forman una base en $\mathbb{R}^5$.
3. v_4,v_5,v_6 son linealmente independientes $\Rightarrow \dim V_2=3\Rightarrow\{v_4,v_5,v_6\}$ forman una base en V_2.