Tema 1. Lógica elemental

1.0. Contenido y documentación

H1_LógicaFundamental.pdf

1.1. Proposiciones

*Definición. Una **proposición** es una frase que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas según las circunstancias. Se suelen definir por letras mayúsculas.*

1.1.1. Operaciones con proposiciones

*Definición. Por una **operación** entendemos un procedimiento por el cual, a partir de una o unas proposiciones dadas, se obtienen otras.*

- **Negación**. Sea P una proposición dada, la negación de P es otra proposición que afirma lo contrario, y se denota por $\neg P$.
- **Combinación**. Sean P y Q dos proposiciones se pueden dar las siguientes operaciones:
  1. **Conjunción**. Es la proposición "P y Q" y significa que se tienen que cumplir ambas a la vez. Se denota $P \wedge Q$.
  2. **Disyunción**. Es la proposición "P o Q" y significa que se tiene que cumplir al menos una de las dos proposiciones. Se denota $P \vee Q$.
  3. **Implicaciones**. Es la proposición "si P entonces Q" y significa que si se cumple la premisa se tiene que cumplir la consecuencia. Se denota $P \Rightarrow Q$, equivalente a $\neg P \vee Q$. También se dice que "P es condición suficiente para Q" y que "Q es condición necesaria para P".
  4. **Equivalencia**. Es la proposición "P es equivalente a Q" y significa que si se cumple la premisa se tiene que cumplir la consecuencia y viceversa. Se denota $P \Leftrightarrow Q$, equivalente a $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

1.2. Cuantificadores

En matemáticas, es frecuente que una propiedad haga referencia a un "objeto" (variable), x, que pertenece a un cierto conjunto U. En tal caso, la proposición se escribe como $P(x)$.

- **Cuantificador existencial**. Se usa cuando queremos expresar que existe un "objeto" de un conjunto U, x, que cumple la propiedad $P(x)$. Escribimos $\exists x \in U : P(x)$, es decir, "$P(x)$ es cierta para algún elemento x del conjunto U". Cuando con el cuantificador existencial queremos matizar que existe un único elemento de U que cumple , se usa el símbolo $\exists!$.

- **Cuantificador universal**. Se usa cuando queremos expresar que todos los objetos del conjunto U cumplen la propiedad $P(x)$, escribimos $\forall x \in U : P(x)$, es decir " es cierta para todo elemento del conjunto U".

1.2.1. Negación de los cuantificadores

- **Negación de la existencia**. $\neg(\exists x \in U : P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in U : \neg P(x)$
- **Negación de la universalidad**. $\neg(\forall x \in U : P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in U : \neg P(x)$

1.3. Métodos de demostración matemática

A la hora de realizar una demostración se pueden emplear distintos métodos. El uso de uno u otro dependerá de lo que se quiera demostrar, así como de las herramientas de las que se disponga. Algunos de los más comunes son:

- **Método directo**. Asumimos que P es cierto y llegamos a que también lo es.
- **Contrarrecíproco**. La afirmación $P \Rightarrow Q$ es equivalente a $\neg Q \Rightarrow \neg P$ y aplicar el método directo a esta última, es decir, asumir como cierto $\neg Q$ y llegar a $\neg P$.
- **Reducción al absurdo** o contradicción. Demostrar que una afirmación, R, es verdadera es equivalente a demostrar que su negación, $\neg R$ es falso. Si $R : P \Rightarrow Q(\Leftrightarrow \neg P \vee Q)$, demostraremos que $\neg(\neg P \vee Q) = P \wedge \neg Q$ da una conclusión errónea.
- **Contraejemplo**. Si quieres probar que una afirmación del tipo $\forall x : P(x)$, basta con ver que su negación se cumple $\exists x : \neg P(x)$.
- **Método de inducción**. Una propiedad es cierta $\forall n \geq n_0$ si se verifican las dos siguientes conclusiones:
    1. $P(n_0)$ es cierta. La propiedad $P(n)$ se cumple para el caso particular de n_0.
    2. $P(n)$ es cierta $\Rightarrow P(n+1)$ también es cierta (hipótesis de inducción). Si se cumple la propiedad $P(n)$ para un número arbitrario k, entonces también se cumple para el siguiente $n + 1$.
- **Principio de inducción fuerte**. Es similar al método de inducción, pero aplicándolo a un mayor número de casos base:
    1. $P(n_0)$ es cierta.
    2. $P(n_0), P(n_o+1), P(n_o+2), ..., P(n_o+k)$ son ciertas $\Rightarrow P(n_o+k+1)$ es cierta.