Hoja 2

Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática

Universidad Autónoma de Madrid

Ejercicio 1

Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. $f(x, y) = x - y + 2$
2. $f(x, y) = x^2 + 4\,y^2$
3. $f(x, y) = -x^2y^2$
4. $f(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$
5. $f(x, y) = \max\left\{|x|, |y|\right\}$
6. $f(x, y) = \cos^2(x^2 + y^2)$.

Apartado 1

Dibujar la gráfica y la curvas de nivel de $f(x,y) = x - y + 2$.

Recordemos que $N_C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = C\}$. En nuestro caso, como $f(x,y) = x - y + 2$, obtenemos que

$$(x,y) \in N_C \Leftrightarrow f(x,y) = x - y + 2 = C.$$

Para resolver este ejercicio, seguimos la estrategia de despejar y en función de x y C, para tener las curvas de nivel escritas como el grafo de una función en la forma $N_C = \{(x, f(x,C)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ donde C es el número real que define la curva de nivel N_C. Observamos que dado $C \in \mathbb{R}$, obtenemos que

$$f(x,y) = x - y + 2 = C \Leftrightarrow y = x + 2 - C.$$

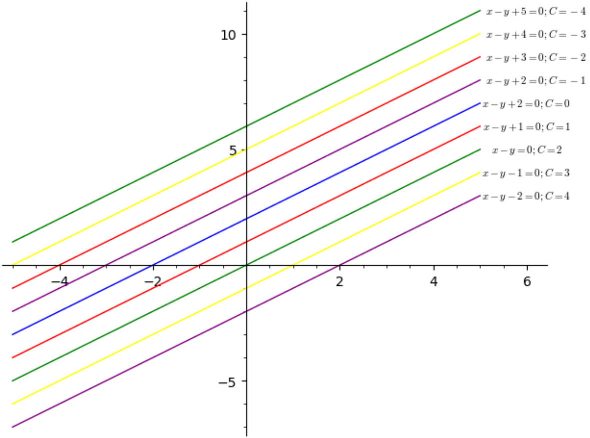
Por tanto, los conjuntos de nivel son las rectas

$$N_C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 2 - C = 0\} = \{(x, x + 2 - C) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

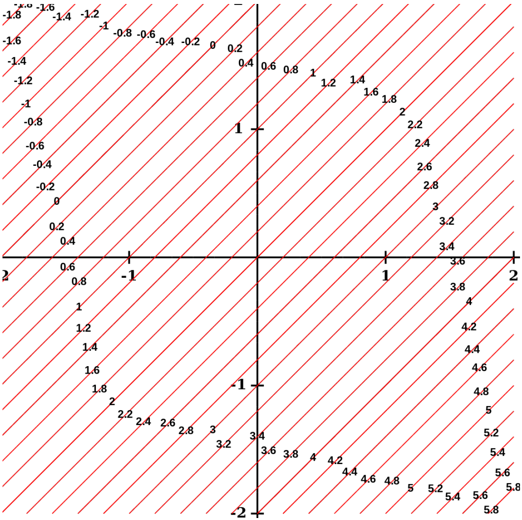
Tratemos ahora de dibujar las curvas de nivel

$$N_C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 2 - C = 0\} = \{(x, x + 2 - C) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

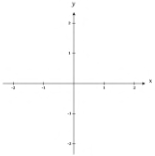
Observamos que para cada valor de $C \in \mathbb{R}$ estas curvas son rectas de que pasan por el punto $(0, 2 - C)$, por tanto las representamos para algunos valores



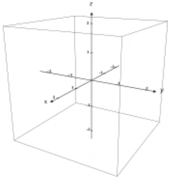
Observamos que entonces, el esquema de las curvas de nivel es



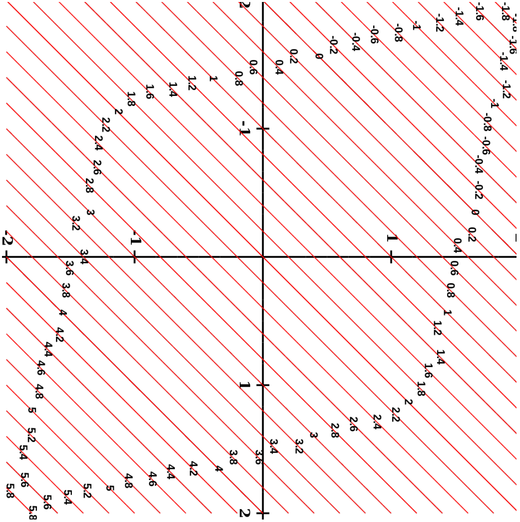
Tratemos ahora de visualizar la gráfica de la función. Comenzaremos representando las curvas en el plano $z = 0$. Nótese que la orientación con las que las hemos dibujado anteriormente es



Ahora bien, tenemos que dibujar estas curvas en el plano $z = 0$, con la orientación.



Tratemos ahora de representar la función. Comenzamos representando las curvas en el plano $z = 0$, en $\mathbb{R}^3$. Nótese que es necesario rotar las curvas de nivel para representarlas.



Tratemos ahora de entender cómo usar las curvas de nivel para dibujar la función. Recordamos que

$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = C\}.$$

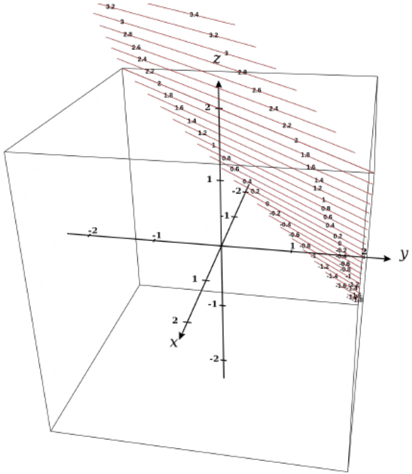
Ahora observamos que si tomamos la intersección de la gráfica de la función con el plano $z = C$, obtenemos que

$$\{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = C\} =$$

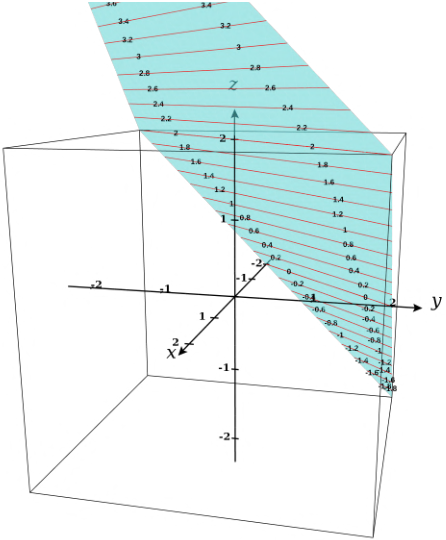
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in N_C ; z = C\}.$$

Por tanto si dibujamos la curva de nivel N_C en el plano $z = C$, estamos dibujando la intersección del grafo de la función con el plano $z = C$.

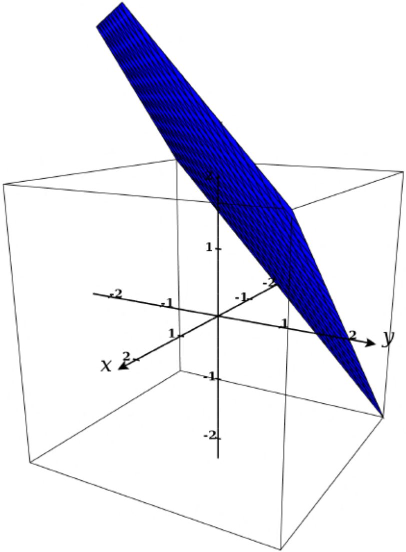
Tratemos ahora de entender qué quieren decir las curvas de nivel. Utilizando el dibujo anterior, y la definición de N_C, es posible dibujar las intersecciones de la grafica de la función con los planos $z = C$, observando que para un valor determinado de C, esta intersección es el conjunto $\{(x, y, C) \mid (x, y) \in N_C\}$.



Tratemos ahora de utilizar el dibujo anterior de estas intersecciones con los planos $z = C$ para dibujar la gráfica de la función.



Por tanto, la gráfica de la función es la siguiente



Apartado 2

Dibujar la gráfica y la curvas de nivel de $f(x,y) = x^2 + 4\,y^2$.

Recordemos que $N_C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = C\}$. En nuestro caso, como $f(x,y) = x^2 + 4\,y^2$, obtenemos que

$$(x,y) \in N_C \Leftrightarrow f(x,y) = x^2 + 4\,y^2 = C.$$

Para resolver este ejercicio, ya no es tan sencillo seguir la estrategia de despejar y en función de x y C como si pudimos hacer en el apartado anterior. No obstante, otra idea puede ser tratar de reescribir la condición de anterior, de manera que se obtenga una ecuación implícita de una curva que si conocemos. En este caso, podemos utilizar y esta idea y vemos que

$$x^2 + 4\,y^2 = C \Leftrightarrow (\frac{x}{2})^2 + y^2 = \frac{C}{4}.$$

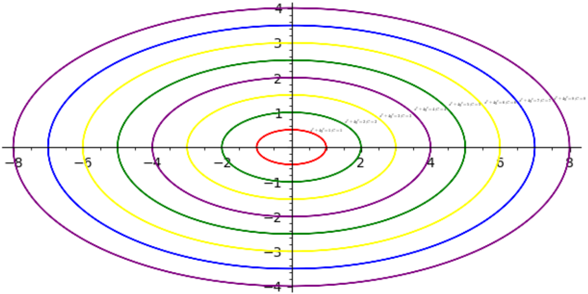
Por tanto, si $C < 0$ los conjuntos de nivel son vacíos, y si $C > 0$, los conjuntos de nivel son las elipses

$$N_C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{2})^2 + y^2 = \frac{C}{4}\}.$$

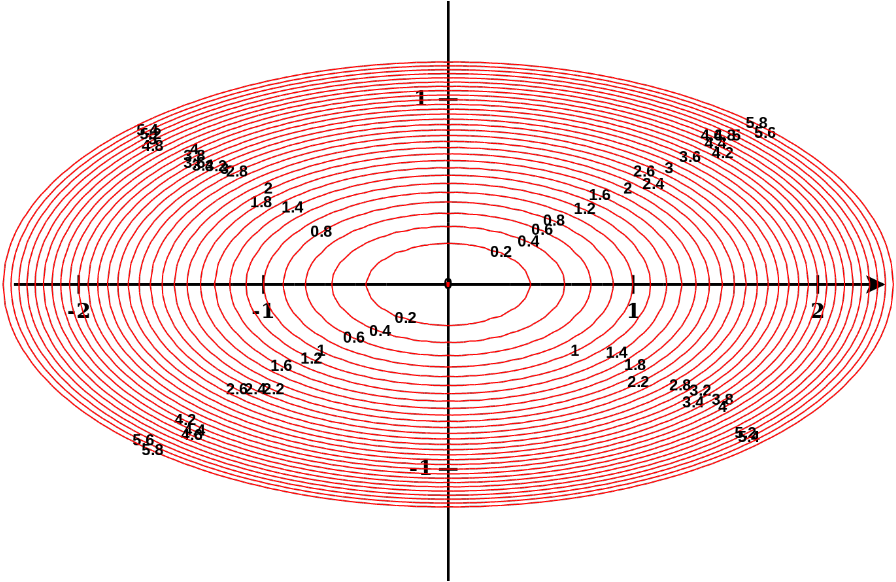
Tratemos ahora de dibujar las curvas de nivel

$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{2})^2 + y^2 = \frac{C}{4}\}.$$

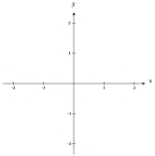
Observamos que estas curvas son elipses de centro $(0, 0)$ y de radio $\frac{\sqrt{C}}{2}$, por lo que son elipses cuyo radio crece conforme C crece.



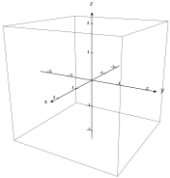
Observamos que entonces, el esquema de las curvas de nivel es



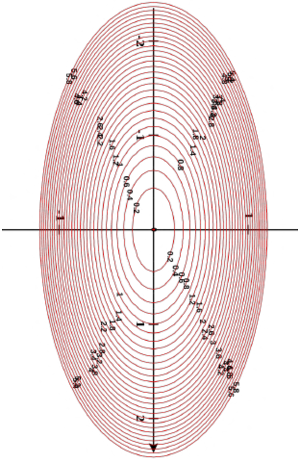
Tratemos ahora de visualizar la gráfica de la función. Comenzaremos representando las curvas en el plano $z = 0$. Nótese que la orientación con las que las hemos dibujado anteriormente es



Ahora bien, tenemos que dibujar estas curvas en el plano $z = 0$, con la orientación.



Tratemos ahora de representar la función. Antes de comenzar, es interesante observar que el grafo de la función será una superficie de la forma $z = x^2 + 4y^2 = 4((\frac{x}{2})^2 + y^2)$ que sabemos que es un paraboloide elíptico. Comenzamos representando las curvas en el plano $z = 0$, en $\mathbb{R}^3$. Nótese que es necesario rotar las curvas de nivel para representarlas.



Tratemos ahora de entender cómo usar las curvas de nivel para dibujar la función. Recordamos que

$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = C\}.$$

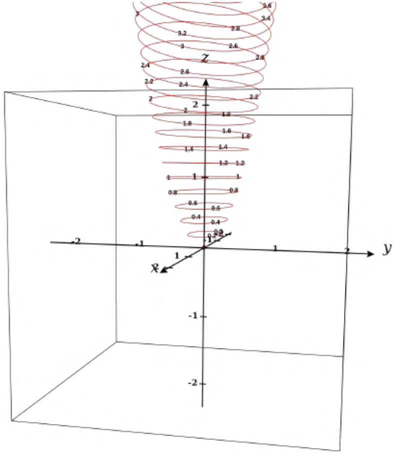
Ahora observamos que si tomamos la intersección de la gráfica de la función con el plano $z = C$, obtenemos que

$$\{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = C\} =$$

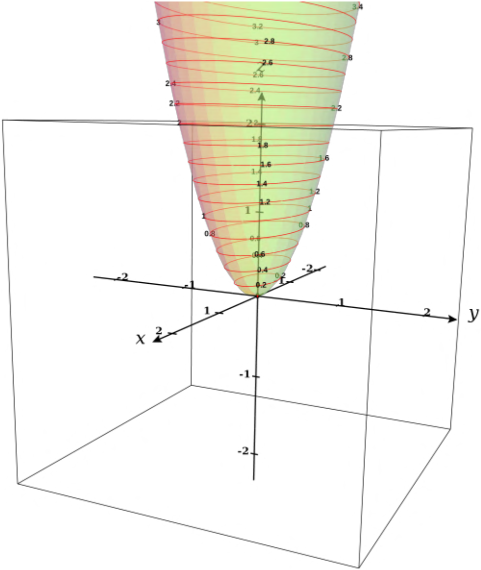
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in N_C; z = C\}.$$

Por tanto si dibujamos la curva de nivel N_C en el plano $z = C$, estamos dibujando la intersección del grafo de la función con el plano $z = C$.

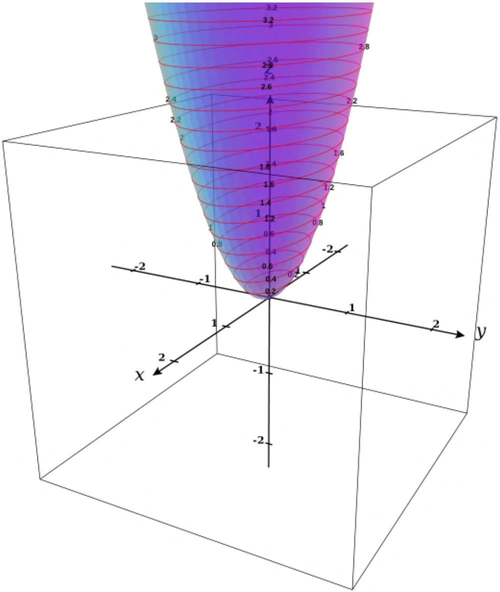
Tratemos ahora de entender qué quieren decir las curvas de nivel. Utilizando el dibujo anterior, y la definición de N_C, es posible dibujar las intersecciones de la grafica de la función con los planos $z = C$, observando que para un valor determinado de C, esta intersección es el conjunto $\{(x, y, C) \mid (x, y) \in N_C\}$, que es una elipse de radio $\frac{\sqrt{C}}{2}$ en el plano $z = C$.



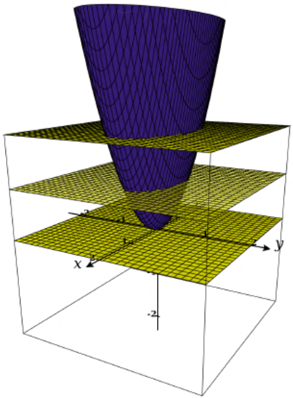
Tratemos ahora de utilizar el dibujo anterior de estas intersecciones con los planos $z = C$ para dibujar la gráfica de la función.



Por tanto, la gráfica de la función es la siguiente



Otro método para dibujar la función, que en este caso es más sencillo, es reconocer que la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, es la superficie $z = x^2 + 4y^2$, que es un paraboloide elíptico, y por tanto la gráfica es



Nótese que las intersecciones de los planos con la gráfica representan la idea de qué es un conjunto de nivel.

En estos apartados se ha descrito un método general que permite obtener la gráfica de una función a partir de sus curvas de nivel. Este método es una idea que nos va a permitir visualizar la gráfica de la función en muchos casos. Por supuesto, en estos apartados quizás es más fácil dibujar la gráfica directamente y no es necesario utilizar los métodos anteriores, ya que las fórmulas que la definen son conocidas ya que si se cumple que

1. La función es de la forma $f(x, y) = ax + by + c$, entonces su gráfica será la superficie, $z = ax + by + c$, que como sabemos es un plano.
2. La función es de la forma $f(x, y) = ax^2 + by^2 + c$, donde $a, b \geq 0$ estamos ante un paraboloide elíptico y es fácil visualizar la gráfica.

No obstante, es posible encontrarnos con funciones que no sepamos visualizar tan fácilmente, y entonces una idea puede ser aplicar el método anterior, de forma parcial o total para ser capaces de visualizar la función.

Apartado 3

Dibujar la gráfica y la curvas de nivel de $f(x, y) = -x^2y^2$.

Recordemos que $N_C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = C\}$. En nuestro caso, como $f(x, y) = -x^2y^2$, obtenemos que

$$(x, y) \in N_C \Leftrightarrow f(x, y) = -x^2y^2 = C.$$

Para resolver este ejercicio, si es posible seguir la estrategia de despejar y en función de x y C, pero debemos tener cuidado al despejar la y. No obstante, en este caso, podemos utilizar y esta idea y vemos que si $C \neq 0$, entonces

$$-x^2y^2 = C \Leftrightarrow y^2 = -\frac{C}{x^2}.$$

Ahora nos gustaría tomar la raíz cuadrada para despejar y, pero tenemos dos problemas. El primero es que si $C > 0$, el término de la izquierda de la igualdad sería negativo y no podríamos tomar la raíz cuadrada. Ahora bien si observamos más detenidamente este caso, veremos que si $C > 0$, entonces no hay soluciones para la ecuación $-x^2y^2 = C$, ya que el término de la izquierda siempre es negativo. Por tanto si $C < 0$, entonces $N_C = \emptyset$.

No obstante, si $C < 0$, entonces si se puede tomar la raíz cuadrada, pero cuidado porque hay dos posibles soluciones, ya que si

$$y^2 = -\frac{C}{x^2}x^2$$

entonces es posible que

$$y = \frac{\sqrt{-C}}{x}$$

pero también es posible que

$$y = -\frac{\sqrt{-C}}{x}.$$

En cualquier caso, lo que si tenemos es que debe cumplirse una de las dos igualdades. Por tanto, si $C < 0$, obtenemos que

$$-x^2y^2 = C \Leftrightarrow y^2 = -\frac{C}{x^2} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{-C}}{x} \text{ o bien } y = -\frac{\sqrt{-C}}{x}.$$

Por tanto, si $C < 0$

$$N_C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = C\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2y^2 = C\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{\sqrt{-C}}{x}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{\sqrt{-C}}{x}\}.$$

Recordemos que, si $C > 0$, entonces $N_C = \emptyset$. Parece que ya casi hemos terminado, pero nos falta ver que pasa si $C = 0$, en ese caso, tenemos que ver cúales son las soluciones de la ecuación $-x^2y^2 = 0$. Observamos que

$$-x^2y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Por tanto, si $C = 0$

$$N_C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.$$

Tratemos ahora de dibujar las curvas de nivel. Recordamos que las curvas de nivel son $N_C = \emptyset$ si $C > 0$ y los conjuntos

$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{\sqrt{-C}}{x}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{\sqrt{-C}}{x}\} =$$

$$= \{(x, \frac{\sqrt{-C}}{x} \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -\frac{\sqrt{-C}}{x}) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

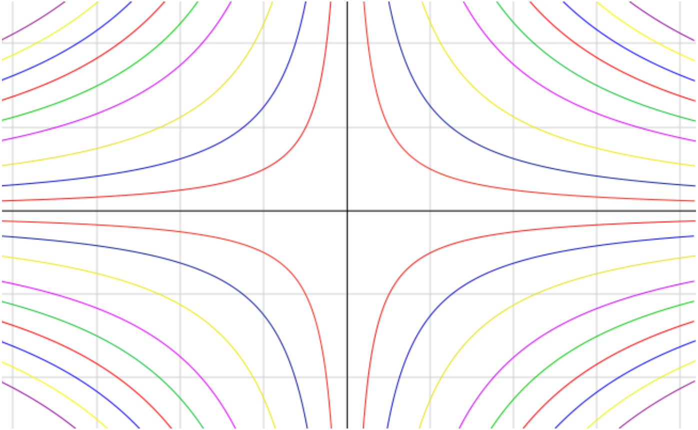
si $C < 0$, que es una unión de dos hipérbolas y

$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} =$$

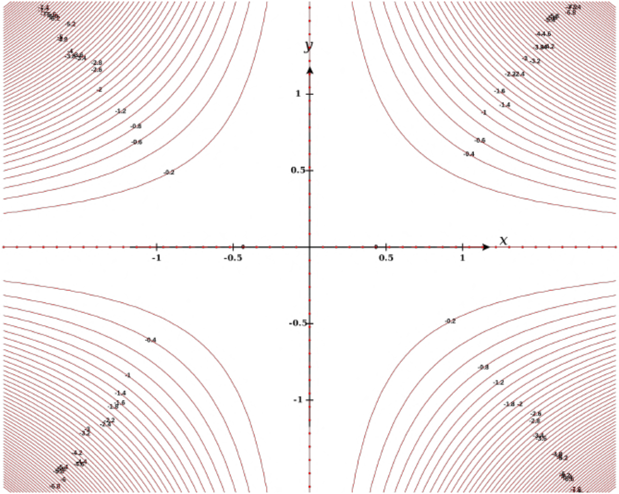
$$= \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}0\}$$

si $C = 0$, que es una unión de dos rectas

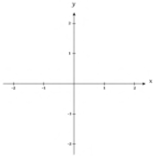
Tratemos ahora de visualizar cómo son estas curvas de nivel



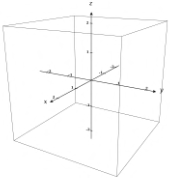
Observamos que entonces, el esquema de las curvas de nivel es



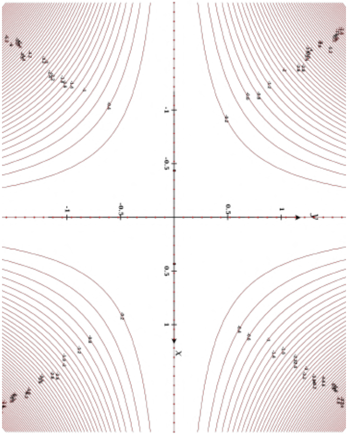
Tratemos ahora de visualizar la gráfica de la función. Comenzaremos representando las curvas en el plano $z = 0$. Nótese que la orientación con las que las hemos dibujado anteriormente es



Ahora bien, tenemos que dibujar estas curvas en el plano $z = 0$, con la orientación.



Tratemos ahora de representar la función. Comenzamos representando las curvas en el plano $z = 0$, en $\mathbb{R}^3$. Nótese que es necesario rotar las curvas de nivel para representarlas.



Tratemos ahora de entender cómo usar las curvas de nivel para dibujar la función. Recordamos que

$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = C\}.$$

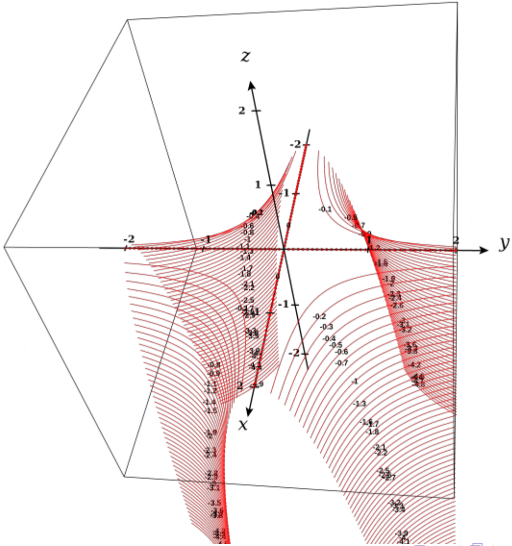
Ahora observamos que si tomamos la intersección de la gráfica de la función con el plano $z = C$, obtenemos que

$$\{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = C\} =$$

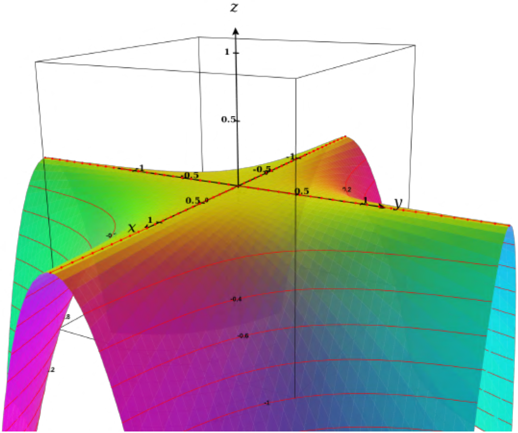
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in N_C; z = C\}.$$

Por tanto si dibujamos la curva de nivel N_C en el plano $z = C$, estamos dibujando la intersección del grafo de la función con el plano $z = C$.

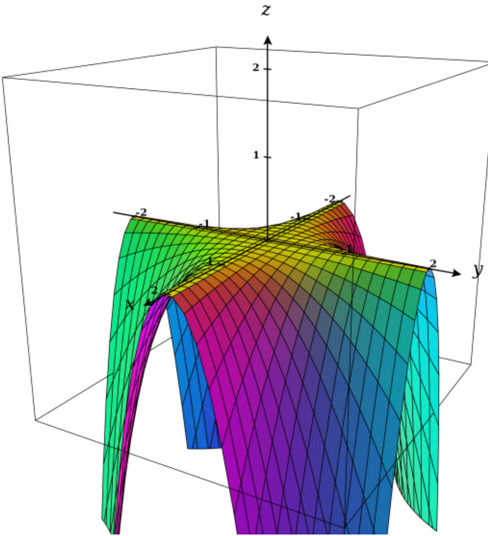
Tratemos ahora de entender qué quieren decir las curvas de nivel. Utilizando el dibujo anterior, y la definición de N_C, es posible dibujar las intersecciones de la grafica de la función con los planos $z = C$.



Tratemos ahora de utilizar el dibujo anterior de estas intersecciones con los planos $z = C$ para dibujar la gráfica de la función.



Por tanto, la gráfica de la función es la siguiente



Apartado 9

Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de la función $f(x,y) = \cos^2(x^2+y^2)$.

Recordemos que $N_C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = C\}$. En nuestro caso, como $f(x,y) = \cos^2(x^2+y^2)$, observamos que $N_C = \emptyset$ si $C > 1$ y $N_C = \emptyset$ si $C < 0$. Por tanto, sólo es necesario estudiar los casos en los que $0 \leq C \leq 1$. Observamos que si $0 \leq C \leq 1$, entonces

$$(x,y) \in N_C \Leftrightarrow \cos^2(x^2+y^2) = C \Leftrightarrow \cos(x^2+y^2) = \sqrt{C}$$

$$\text{o bien } \cos(x^2+y^2) = -\sqrt{C}.$$

Ahora observamos que si $cos(\theta) = t$, entonces $\theta = \text{arcos}(t) + 2k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$, o bien $\theta = -\text{arcos}(t) + 2k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto

$$\cos(x^2+y^2) = \sqrt{C} \Leftrightarrow x^2+y^2 = \text{arcos}(\sqrt{C}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{o bien } x^2+y^2 = -\text{arcos}(\sqrt{C}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Análogamente, también obtenemos que

$$\cos(x^2+y^2) = -\sqrt{C} \Leftrightarrow x^2+y^2 = \operatorname{arcos}(-\sqrt{C}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{o bien } x^2+y^2 = -\operatorname{arcos}(-\sqrt{C}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, $\operatorname{arcos}(-x) = \pi - \operatorname{arcos}(x)$. Por tanto

$$\cos(x^2+y^2) = -\sqrt{C} \Leftrightarrow x^2+y^2 = -\operatorname{arcos}(\sqrt{C}) + (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{o bien } x^2+y^2 = \operatorname{arcos}(\sqrt{C}) + (2k-1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, utilizando lo anterior obtenemos que se cumple que

$$\cos^2(x^2+y^2) = C \Leftrightarrow x^2+y^2 = \operatorname{arcos}(\sqrt{C}) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{o bien } x^2+y^2 = -\operatorname{arcos}(\sqrt{C}) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora observamos que, $x^2 + y^2 \geq 0$, y por tanto

$$\cos^2(x^2 + y^2) = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \operatorname{arcos}(\sqrt{C}) + k\pi \mid k \in \mathbb{N}$$

$$\text{o bien } x^2 + y^2 = -\operatorname{arcos}(\sqrt{C}) + k\pi \mid k \geq 1.$$

Entonces

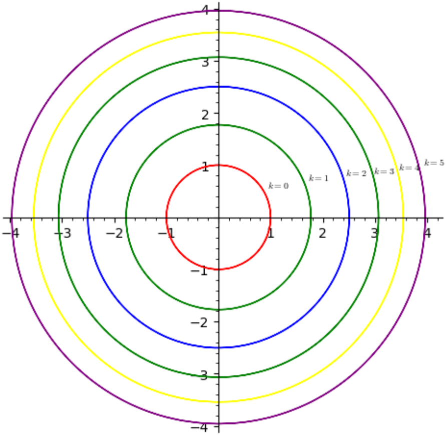
$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos^2(x^2 + y^2) = C\} =$$

$$= \bigcup_{k \geq 0} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \operatorname{arcos}(\sqrt{C}) + k\pi\} \cup$$

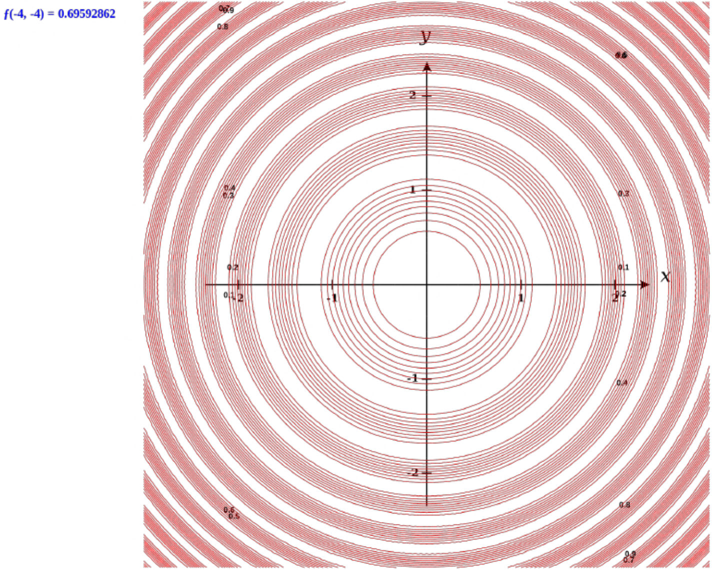
$$\cup \bigcup_{k \geq 1} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = -\operatorname{arcos}(\sqrt{C}) + k\pi\}.$$

Por tanto, si $0 \leq C \leq 1$, las curvas de nivel son uniones infinitas de circunferencias.

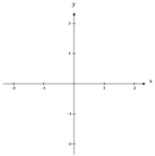
Tratemos de ver por ejemplo, como es la curva de nivel para $C = 1$.



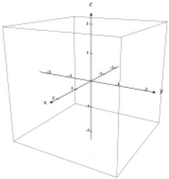
Tratemos de ver ahora el esquema de las curvas de nivel de la función.



Tratemos ahora de visualizar la gráfica de la función. Comenzaremos representando las curvas en el plano $z = 0$. Nótese que la orientación con las que las hemos dibujado anteriormente es



Ahora bien, tenemos que dibujar estas curvas en el plano $z = 0$, con la orientación.



Tratemos ahora de entender cómo usar las curvas de nivel para dibujar la función. Recordamos que

$$N_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = C\}.$$

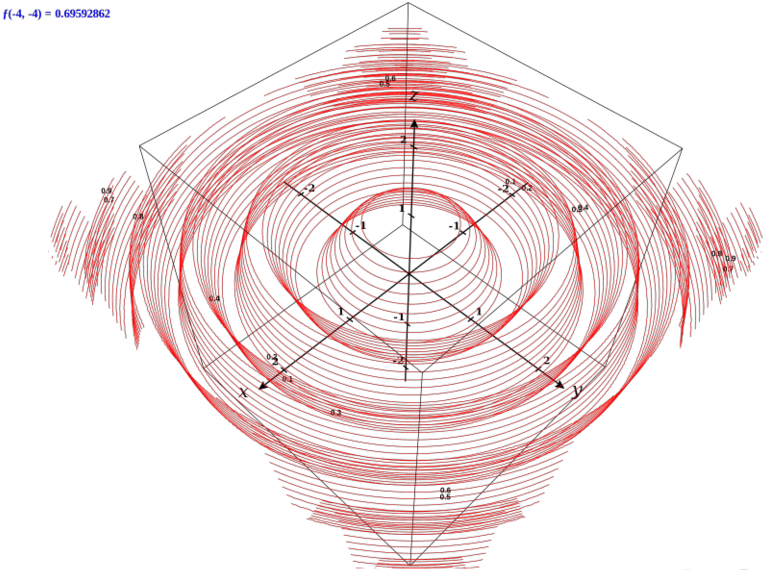
Ahora observamos que si tomamos la intersección de la gráfica de la función con el plano $z = C$, obtenemos que

$$\{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = C\} =$$

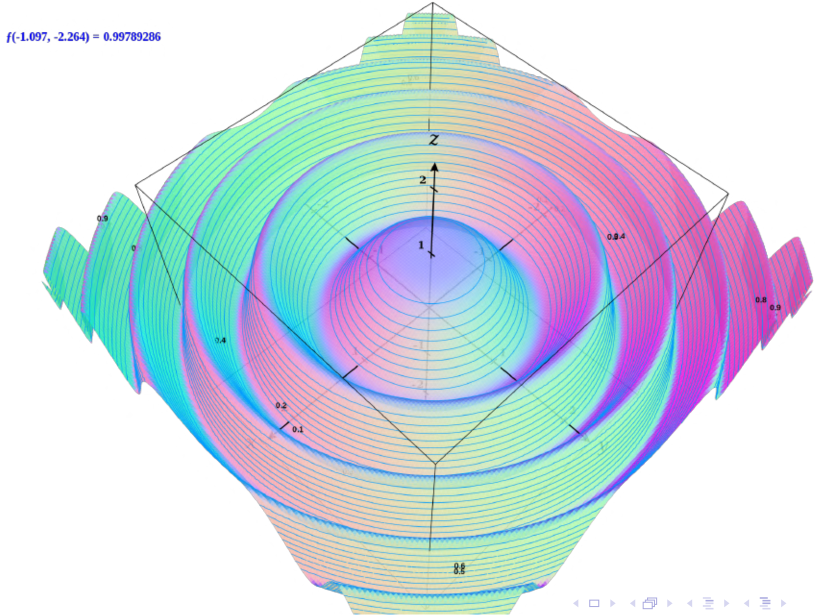
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in N_C; z = C\}.$$

Por tanto si dibujamos la curva de nivel N_C en el plano $z = C$, estamos dibujando la intersección del grafo de la función con el plano $z = C$.

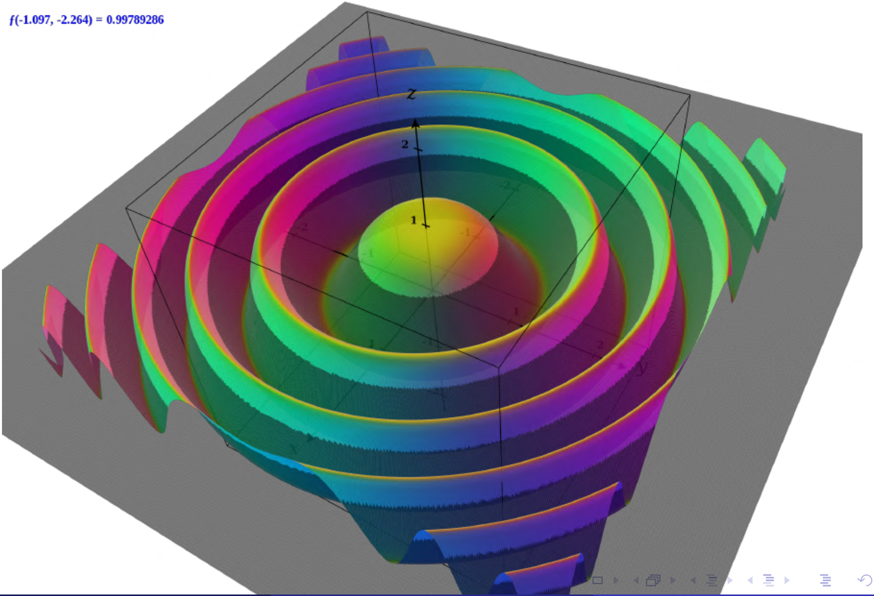
Tratemos de dibujar las intersecciones del grafo de la función con los planos $z = C$, utilizando el dibujo de las curvas de nivel de la función.



Tratemos ahora de representar la función, usando el dibujo de las curvas de nivel



Entonces, representemos ahora la intersección de la curva con un plano de la forma $z = C$, para visualizar el significado de las curvas de nivel.



Por tanto, la gráfica de la función es