Entrega 1

1. En $\mathbb{R}^2$ consideramos el siguiente conjunto: $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) : y \in \mathbb{R} \right\}$.

PRELIMINARES:

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) : y \in \mathbb{R} \right\} = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\} \bigcup \left\{ \left(\frac{1}{2}, y \right) : y \in \mathbb{R} \right\} \bigcup$..., de forma que $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \not\subset A$.

Así, el conjunto A no es más que el conjunto de rectas verticales de la forma $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

APARTADO A: Decide, de manera razonada, si A tiene puntos de acumulación.

Diremos que (a, b) es un punto de acumulación de A si existe una sucesión $\{a_k, b_k\}$ en A, de forma que $\lim_{k \to \infty} \{a_k, b_k\} = (a, b)$.

Con el conjunto dado, podemos definir $a_k = \frac{1}{k}$ y $b_k = y + \frac{1}{k}, y \in \mathbb{R}$, de forma que $\lim_{k \to \infty} \{a_k, b_k\} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{k}, y + \frac{1}{k} \right) = \left(\frac{1}{\infty}, y + \frac{1}{\infty} \right) = (0, y + 0) = (0, y), y \in \mathbb{R}$.

Así, podríamos decir que un conjunto de puntos de acumulación de A es el conjunto $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Por otra parte, si fijamos un valor concreto para $n \in \mathbb{N}$ y tomamos las sucesiones $a_k = \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$ y $b_k = y + \frac{1}{k}, y \in \mathbb{R}$, tenemos que $\lim_{k \to \infty} \{a_k, b_k\} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}, y + \frac{1}{k} \right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\infty}, y + \frac{1}{\infty} \right) = \left(\frac{1}{n} + 0, y + 0 \right) = \left(\frac{1}{n}, y \right), y \in \mathbb{R}$.

De forma que otro conjunto de puntos de acumulación de A es el conjunto $\left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) : n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R} \right\}$, que resulta ser el propio conjunto A.

En conclusión, el conjunto A tiene puntos de acumulación, y el conjunto de estos es $A \cup \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

APARTADO B: Decide, de manera razonada, cuál es el conjunto de puntos interiores de A.

Diremos que a es un punto interior de A si $\exists r > 0$ tal que la bola $B_r(a) \subset A$.

Ya hemos apreciado que el conjunto A se compone de rectas verticales, de forma que basta con apreciar el comportamiento de los puntos contenidos en una recta horizontal para ver el comportamiento de todos los puntos del conjunto.

Si tomamos la recta $y = 0$, tenemos el conjunto de puntos $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, de forma que entre cada par de puntos $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N}$ hay infinitos puntos comprendidos, ya que hay infinitos puntos en la recta real comprendidos en el intervalo $(n, n+1), n \in \mathbb{N}$.

De esta forma, no es posible encontrar un intervalo de la forma $\frac{1}{n} + r, r > 0$ que esté contenido en A, de forma que tampoco será posible encontrar una bola cuando se extienda al plano.

En conclusión, el conjunto A no tiene puntos interiores, $\mathring{A} = \emptyset$.

APARTADO C: ¿Es A compacto? ¿Por qué?

Diremos que el conjunto A es compacto si es cerrado y acotado. También diremos que es cerrado si todas las sucesiones de elementos de A convergen a un punto perteneciente a A.

Basta con considerar la sucesión de elementos $a_k = \left(\frac{1}{k}, y\right)$, para algún $y \in \mathbb{R}$ fijo. Esta sucesión converge al punto $(0, y)$, ya que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, y\right) = \left(\frac{1}{\infty}, y\right) = (0, y)$, que por lo visto anteriormente, no pertenece a A.

En conclusión, A no es compacto.

ALBERTO TARRASA MARTÍN