Doble Titulación. Álgebra Lineal. Curso 2022/2023

Hoja 6

1. Determinar en cada caso una base de $\mathbb{R}^2$ (o de $\mathbb{C}^2$) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen.

a)$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, c)$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, d)$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

e)$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, f)$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, g)$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Soluciones:(vectores y valores propios)

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1$

b)$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1, \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1$

c)$\left\{\begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1+i\sqrt{2}, \left\{\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1-i\sqrt{2}$

d)$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2$

e)$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2, \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3$

f)$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow i, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -i$

g)$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow i, \left\{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -i$

2. Resolver la misma cuestión que en el ejercicio anterior para las matrices

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ b)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ c)}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y d)}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluciones:(vectores y valores propios)

$$\text{a)}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 7, \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -4,$$

$$\text{b)}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} \frac{4}{5}-\frac{3}{5}i \\ 1 \\ \frac{2}{5}+\frac{6}{5}i \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1+3i, \left\{\begin{pmatrix} \frac{4}{5}+\frac{3}{5}i \\ 1 \\ \frac{2}{5}-\frac{6}{5}i \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1-3i$$

$$\text{c)}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 6, \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2$$

$$\text{d)}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2, \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 4, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2$$

3. Sea A una matriz cuadrada real.

a) Demostrar que si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ : \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ : \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio con valor propio $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ : \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$ lo es con valor propio $\overline{\lambda}$.

b) Demostrar que el e.v. $V = \left\langle X = \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ : \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^n$ es A-invariante y calcular la matriz de $A_{|V}$ respecto de esta base. Se obtendrá $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ **(forma canónica real)**

c) Encontrar la forma canónica real en los casos anteriores 1)c,f,g y 2)b