TEMA 2a: Funciones, límites y continuidad

Fernando Soria (UAM)

Curso 2022-23

Estructura del Tema 2:

- Funciones de varias variables
- Límites de funciones en $\mathbb{R}^n$. Noción de continuidad.
- Derivación. Derivadas parciales y gradiente.
- Cambios de coordenadas. Regla de la cadena.
- Derivadas de orden superior.
- Fórmula de Taylor.
- Máximos y mínimos. Extremos condicionales.

Tema 2a: Funciones de varias variables

Una **función** $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una *regla* que asocia, a cada $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$, un único $(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

- Si $m = 1$, se dice que f es una **función escalar**:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$$

- Si $m > 1$, se dice que f es una **función vectorial** y las m funciones que la definen se denominan funciones coordenadas:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

El **dominio** de una función es el conjunto de puntos para los que está definida, A en este caso, y se denota por $\mathrm{Dom}(f)$.
Observación: Si no se indica explícitamente, entonces el dominio son todos aquellos puntos donde la fórmula que da f tiene sentido (**dominio natural**).

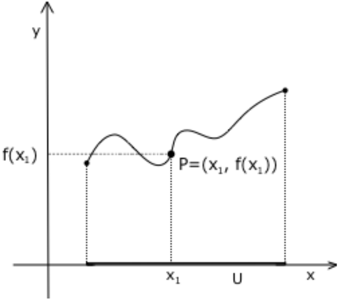
La **imagen** de una función es el conjunto de $(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ tales que existe un $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$ con $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$, y se denota por $\mathrm{Img}(f)$.

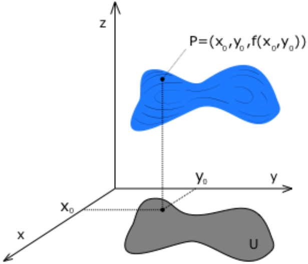
La gráfica de una función

La **gráfica** de una **función escalar**, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, es el conjunto de puntos:

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \vec{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$n = 1 :\ \mathrm{Graf}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $n = 2 :\ \mathrm{Graf}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $n \geq 3$: ???





Curvas y superficies de nivel

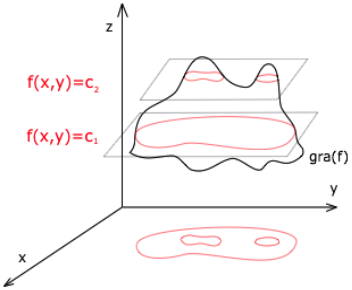
Dada una **función escalar**, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, y $C \in \mathbb{R}$, el **conjunto de nivel de valor** C es el conjunto de puntos $\vec{x} \in A$ para los cuales $f(\vec{x}) = C$:

$$N_C(f) = \{\vec{x} \in A : \; f(\vec{x}) = C\} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Si $n = 2$, lo denominamos **curva de nivel de valor** C.

Si $n = 3$, lo denominamos **superficie de nivel de valor** C.

Idea: intersecamos la gráfica de f, $z = f(x, y)$, con el plano horizontal $z = C$ y proyectamos la intersección sobre el plano XY obteniéndose en este la curva de nivel $f(x, y) = C$.
Ejemplos: las isobaras o isotermas de un mapa del tiempo atmosférico.



Método de secciones

Una *sección de la gráfica de* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la intersección de la gráfica de f con un plano (que suele ser vertical).

Utilidad: Ayudan a colocar a la altura adecuada las curvas de nivel de f, con lo que nos facilita el dibujar la gráfica de f.

Ejemplo: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $f(x, y) = x^2 + y^2$, la sección con el plano $y = 0$ (el plano XZ) es la parábola

$$\{ (x, 0, f(x, 0)) \, : \, x \in \mathbb{R} \} = \{ (x, 0, x^2) \, : \, x \in \mathbb{R} \}.$$

Ejercicio: Dadas las siguientes funciones, representa los conjuntos de nivel y esboza, si es posible, sus gráficas:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Límite de una función.

Sean un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : U \to \mathbb{R}^m$ y un punto x_0 de acumulación de U .

Definición

Decimos que f **tiene límite** $L \in \mathbb{R}^m$ *en x_0, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in U \text{ con } 0 < \|x - x_0\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - L\| < \varepsilon$$

En este caso, escribiremos $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L.$

Observación: Si existe el límite de la función, este es único. Además, si f tiene funciones coordenadas $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ y $L = (L_1, L_2, \cdots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. Entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} f_i(x) = L_i \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m,$$

es decir, para calcular el límite de una función $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, basta calcular el límite de cada función coordenada por separado.

Esto último se debe a la desigualdad ya vista

$$|f_j(x) - L_j| \leq \|f(x) - L\| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - L_k|, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Cálculo operativo de límites

Sean $f, g : U \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dos funciones para las que existen $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$; entonces:

(1) $\lim_{x\to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \,(\lim_{x\to x_0} f(x))$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\,.$

(3) $\lim_{x\to x_0} (f(x) g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\,(\lim_{x\to x_0} g(x))\;,\quad$ si $m = 1\,.$

(4) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\;,\quad$ si $m = 1$, y $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\,.$

Ejercicio: Demostrar, usando la definición, los siguientes límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x^2 + y^2) = 0; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2 y}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\,\operatorname{sen} \frac{x}{(x-1)^2 + y^2} = 0.$$

Límites y sucesiones

Teorema (Caracterización del límite de funciones por sucesiones)

Sean U un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, una función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, un punto x_0 de acumulación de U y $L \in \mathbb{R}^m$. Entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ *para toda sucesión de U convergente a x_0, $\{x_k\}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, se tiene* $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = L$

Dem.: La demostración es idéntica a la que se hace en una variable.

Consecuencia: Si hay dos sucesiones diferentes x_k, $y_k \to x_0$, de forma que las sucesiones $f(x_k)$ y $f(y_k)$ tienen límites diferentes, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe.

Ejemplo: Demuestra que no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Límite de una función escalar en $\mathbb{R}^2$.

Este es un caso frecuente en los ejercicios, así que estudiamos algunas pautas para tratar de encontrarlos. Suponemos $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, y queremos decidir si existe, y en ese caso hallar,

$$L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x)$$

1. **Si existe** L, podemos usar que cualquier forma de aproximarnos a (a, b) debería dar valores de f que se aproximan a L. Por ejemplo, podemos probar

$$\lim_{y\to b} f(a, y), \text{ o } \lim_{x\to a} f(x, b)$$

Muy importante: Con esto hallamos un **candidato** al límite, pero **no demostramos que el límite exista**; podría ser que al aproximarnos de otra forma a (a, b), los valores de f se aproximaran a otro límite.

Límite de una función escalar en $\mathbb{R}^2$ (cont).

2. Si encontramos dos formas distintas de acercarnos a (a, b) donde la función f se aproxima a dos valores **diferentes**, entonces **el límite no existe**.
   - A menudo uno se aproxima con rectas de la forma $y = \lambda(x - a) + b$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$; Si
   $$\lim_{x \to a} f(x, \lambda(x - a) + b) \qquad \text{depende de } \lambda,$$
   el límite de la función no existe. (E.g., funciones homogéneas de grado 0).
   - A veces hay que probar con curvas más complicadas:
   $$(x, \lambda(x - a)^k + b), \qquad \text{con } x \to a, \lambda \in \mathbb{R},$$
   ó
   $$(\lambda(y - b)^k + a, y), \qquad \text{con } y \to b, \lambda \in \mathbb{R},$$
3. Las expresiones $\lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x, y) \right)$, $\quad \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x, y) \right)$, se denominan (si es que existen) **límites laterales**. Si existe el límite ordinario en (a, b) y los límites laterales, entonces todos deben coincidir. Pero hay un cúmulo de situaciones a tener en cuenta (veánse los ejercicios 6, 7 y 8 de la hoja 2.)

Límite de una función escalar en $\mathbb{R}^2$ (cont).

4. Podemos probar con coordenadas polares centradas en (a,b): si encontramos una función $F(r)$ con $\lim_{r\to 0^+} F(r) = 0$, tal que

$$\left| f(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta) - L \right| \le F(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

5. Y finalmente, muchas veces, para demostrar el valor de un límite, **hay que trabajar con desigualdades** (en particular con el lema del sandwich).

Ejemplos: Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ para:

(a) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}$

Continuidad de funciones.

Definición (Funcion continua)

- *Dado un conjunto abierto* $U \subset \mathbb{R}^n$*, decimos que* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *es* **continua en un punto** $x_0 \in U$ *si:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in U \text{ con } \|x - x_0\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

O, equivalentemente: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

- f *es* **continua** *en* U *si es continua en todo punto* $x_0 \in U$*.*

Resumiendo, para que f sea continua en el punto x_0, necesitamos:

- que exista $\lim_{x \to x_0} f(x)$,
- que f esté definida en x_0, esto es, que exista $f(x_0)$,
- que ambos valores coincidan: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

Cálculo operativo de las funciones continuas.

Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continuas en x_0, entonces:

1. $\lambda f(x)$ es continua en x_0.
2. $f(x) + g(x)$ es continua en x_0.
3. $f(x)g(x)$ es continua en x_0, si $m = 1$.
4. $f(x)/g(x)$ es continua en x_0, si $m = 1$ y $g(x_0) \neq 0$.

Lemma

Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ entonces f es continua en x_0 si y sólo si f_i es continua para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.

Teorema (Composición)

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ con $f(A) \subset B$. Si $x_0 \in A$, f es continua en x_0, y g es continua en $f(x_0)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en x_0.

Ejercicio: estudiar la continuidad de las funciones vistas anteriormente.

Propiedades de las funciones continuas

Al igual que en el caso de las funciones de una variable, se tiene:

Teorema (Existencia de valores intermedios sobre un conexo)

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y U es un conexo (por arcos) entonces dados $x_1, x_2 \in U$ y $f(x_1) \leq m \leq f(x_2)$, existe $x \in U$ de forma que $f(z) = m$.

Dem.: Elegimos una función $\varphi : [0,1] \to U$ continua con $\varphi(0) = x_1, \quad \varphi(1) = x_2$. Entonces la función compuesta $f \circ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y podemos aplicar el resultado en una variable para concluir la demostración.

Teorema (Existencia de máximo y mínimo sobre compactos)

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y U es un compacto, entonces f está acotada y alcanza su supremo e ínfimo en valores de su dominio (es decir, posee máximo y mínimo).

Dem.: La demostración es idéntica a la que se hace en una variable, sustituyendo el Teorema de Bolzano-Weierstrass por la caracterización de los compactos a través de sucesiones (en un compacto toda sucesión posee una subsucesión convergente cuyo límite pertenece al conjunto).

Caracterización topológica de la continuidad

Dados $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^m$, definimos la **preimagen/ imagen inversa** de V por f como

$$f^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \in V\}$$

Teorema

Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y solo si para todo $V \subset \mathbb{R}^m$ abierto, la preimagen $f^{-1}(V)$ es un abierto.

Dem.: Para la demostración usaremos que f es continua en un punto $x_0 \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ de forma que $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$, es decir $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$. Además, si $f(x_0) \in V$ y este conjunto es abierto, entonces $\exists \epsilon > 0$ con $B_\epsilon(f(x_0)) \subset V$.

Análogamente, una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y solo si para todo $H \subset \mathbb{R}^m$ cerrado, la preimagen $f^{-1}(H)$ es un cerrado. (Esto se debe a que $\left(f^{-1}(H)\right)^c = f^{-1}(H^c)$).