# Tema 7. Extensiones de Q

## 7.0. Contenido y cocumentación



H7_NumerosComplejos.pdf

## 7.1. El cuerpo $\mathbb{Q}$

En $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ definimos la relación de equivalencia $\sim$ como $(m, n) \sim (k, l) \Leftrightarrow ml = nk$. De esta forma, podemos definir el conjunto $\mathbb{Q}$ como el conjunto cociente $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})/_\sim$, donde las clases de equivalencia se definen como $[(m, n)] = \{(k, l) : ml = nk$ con $k, l \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$.
Después, definimos las operaciones suma ($+$) y producto escalar (·), de forma que $[(m, n)] + [(k, l)] = [(ml + nk, nl)]$, cumpliéndose que $\dfrac{m}{n} + \dfrac{k}{l} = \dfrac{ml + nk}{nl}$; y $[(m, n)] \cdot [(k, l)] = [(mk, nl)]$, cumpliéndose que $\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{k}{l} = \dfrac{mk}{nl}$.
Como además, se cumplen todas las propiedades relativas a la suma ($+$) y el producto escalar (·), podemos concluir que $\mathbb{Q}$ es un **cuerpo**.

Además, se da que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, definiendo todo $m \in \mathbb{Z}$ como $[(m, 1)] \in \mathbb{Q}$.

## 7.2. Extensiones de $\mathbb{Q}$

> Teorema. Existe un cuerpo $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; y que posee una relación de orden total, así como la propiedad del supremo.

Nótese que $\mathbb{Q}$ no tiene la propiedad del supremo ya que $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que está acotado superiormente y no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. El mismo conjunto sí tiene supremo en $\mathbb{R}$, la extensión de $\mathbb{Q}$.

El conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, puede construirse formalmente usando subconjuntos de $\mathbb{Q}$. Esto se hace a través de las **cortaduras** o cortes de Dedekind.

*Definición. Un* ***corte*** *es un subconjunto $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que:*
*- $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \neq \mathbb{Q}$.*

*- Sean $p \in \alpha$ y $q \in \mathbb{Q}$, si $q < p$, entonces, $q \in \alpha$.*
*- Sea $p \in \alpha$, entonces, existe un $r \in \alpha$ tal que $p < r$.*

A partir de esto, definimos $\mathbb{R}$ como el conjunto de todos los cortes, de forma que $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Añadimos además, que para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si $\alpha < \beta$ y $\alpha \subset \beta$, entonces $\alpha + \beta = \{r + s : r \in \alpha, s \in \beta\}$.

### 7.2.1. Elemento neutro

Identificamos el $0^*$ como el elemento neutro para la suma en $\mathbb{R}$. Esto es, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se identifica un único $-\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0^*$. Además, se verifica que $\alpha < 0^* \Leftrightarrow -\alpha > 0^*$. Así, identificamos los números positivos como $\mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0^*\}$.

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, se definen $\alpha\beta = \{p : \exists r \in \alpha, \exists s \in \beta$ con $r, s > 0$ y $p \leq rs\}$ y $1^* = \{q : q < 1\}$. Para $\alpha, \beta < 0^*$, fijamos que $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$.

Por último, a cada $r \in \mathbb{Q}$ le asociamos un conjunto $r^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < r\}$, que es un corte. Por lo tanto, $\mathbb{R} = \{\text{cortes}\}$ contiene a todos los cortes racionales $\{r^* : r \in \mathbb{Q}\}$ y las operaciones de $\mathbb{Q}$ se extienden a $\mathbb{R}$.

## 7.3. Los número complejos

En el cuerpo $\mathbb{R}$ podemos resolver la ecuación $x^2 = 2$, pero no $x^2 = -1$, puesto que $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$ . Es deseable extender $\mathbb{R}$ para obtener un cuerpo en el que eso sea posible, al que denotaremos $\mathbb{C}$ (cuerpo de **números complejos**).

Necesitamos que ese nuevo cuerpo contenga un nuevo elemento, denotado $i$ (llamado **unidad imaginaria**), tal que $i^2 = -1$. También necesitamos sumar y multiplicar con los números reales y los "números" como $i$, presentando la propiedades de las operaciones básicas.

- Asociativa. $(a + bi) + c + di = a + c + (b + d)i$.
- Distributiva. $(a + bi)(c + di) = ac + bic + adi + bdi^2 = ac - bd + (bc + ad)i$.

Esto lo conseguimos definiendo $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones suma $(+)$ y producto escalar $(\cdot)$ definidas como:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc - ad)$.

Ademas, el conjunto $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ es una "copia" de $\mathbb{R}$, por lo que podemos decir que $\mathbb{C}$ es una extensión de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$.

Efectivamente, en $\mathbb{C}$ existe un elemento $i = (0, 1)$ tal que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 - 0) = (-1, 0) = -(1, 0)$, que denotaremos como $-1^*$.

Observamos que para $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ y $\lambda = (\lambda, 0) \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda(a, b) = (\lambda, 0) \cdot (a, b) = (\lambda a - 0, \lambda b - 0) = (\lambda a, \lambda b)$. Luego, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $a \cdot 1^* + b \cdot i = a(1, 0) + b(0, 1) = (a, b)$. Por tanto, $\forall z = (a, b) \in \mathbb{C}$ se tiene que $z = a + bi$.

Una vez definido el conjunto $\mathbb{C}$ formalmente y comprobadas las propiedades, podemos definir las operaciones suma y producto escalar como:

- $z + w = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$.
- $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$.

Con $z, w \in \mathbb{C}$ definidos como $z = a + bi$ y $w = c + di$. Para $z = a + bi$, decimos que $a$ es la parte real, $a = \mathrm{Re}\ z$, y $b$ es la parte imaginaria, $b = \mathrm{Im}\ z$.

> Propiedad. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Si $z = w$, entonces, $\mathrm{Re}\ z = \mathrm{Re}\ w$ e $\mathrm{Im}\ z = \mathrm{Im}\ w$.

### 7.3.1. Conjugado complejo

*Definición. Dado un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos el **conjugado complejo** o número conjugado de $z$ como $\overline{z} = a - bi$.*

Algunas de las principales propiedades del conjugado complejo son:

1. Conjugado del conjugado. $\overline{(\overline{z})} = z$.
2. Conjugado de la suma. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
3. Conjugado del producto. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
4. Igualdad con el conjugado. Si $z = \overline{z}$, entonces, $z \in \mathbb{R}$.
5. Igualdad de las partes reales. $\mathrm{Re}\ z = \mathrm{Re}\ \overline{z}$.
6. Conjugado del cociente. $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$, siempre que $z \neq 0$.
7. Suma de conjugados. $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}\ z$.
8. Resta de conjugados. $z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}\ z$.

### 7.3.2. Módulo

*Definición. Dado un número complejo $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Definimos su **módulo** como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

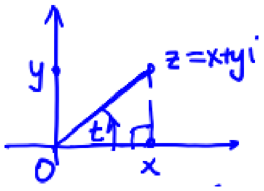
Algunas propiedades del módulo son:

1. Valor positivo. $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene que $|z| \geq 0$, se da el caso $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.
2. Igualdad con el conjugado. $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene que $|z| = |\overline{z}|$.
3. Producto de conjugados. $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
4. Módulo del producto. $|zw| = |z| \cdot |w|$.
5. Cuadrado del módulo de la suma. $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\ (z\overline{w}) = |z|^2 + |w|^1 + 2 \cdot \mathrm{Re}\ (\overline{z}w)$.
6. Módulo real e imaginario. $|\mathrm{Re}\ z| \leq |z|$ y $|\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$.
7. Módulo de la suma (desigualdad triangular). $|z + w| \leq |z| + |w|$.
8. Módulo de la resta (desigualdad triangular invertida). $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

## 7.4. Representación polar

Si $z \neq 0$, podemos formar un triángulo (rectángulo) definido por los punto $0$, $z$ y $x = \mathrm{Re}\ z$.

*Definición. Dado el ángulo $t$ entre los segmentos $0x$ y $0z$ en el sentido positivo. Decimos que $t$ es el **argumento** de $z$.*




Notación. $t = \arg z$.

Así, $z = x + yi = r\cos t + ir\sin t = r(\cos t + i\sin t)$, frecuentemente escrito como $e^{it} = \cos t + i\sin t$. Por tanto, $z = re^{it}$.

Algunas propiedades de la representación polar son:

1. Igualdad. Si $z = w$, entonces, $|z| = |w|$ y $\arg z = \arg w + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
2. Agrupación de exponentes. $e^{is} \cdot e^{it} = e^{i(s+t)}$, con $s, t \in \mathbb{R}$.
3. Módulo. $\forall t \in \mathbb{R}$ se tiene que $|e^{it}| = 1$.
4. Conjugado. $\overline{re^{it}} = re^{-it}$, con $t \in \mathbb{R}$.

### 7.4.1. Multiplicación de números complejos dados en forma polar

Basándonos en las propiedades anteriores, vemos que sean $z = r_1e^{is}$ y $w = r_2e^{it}$, con $r_1, r_2, s, t \in \mathbb{R}$, tenemos que $zw = r_1r_2e^{i(s+t)}$. Es decir, al multiplicar dos números complejos, se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

Generalizando, $e^{is} \cdot e^{it} = e^{i(s+t)}$, obteniendo por inducción que $e^{it_1}e^{it_2}...e^{it_n} = e^{i(t_1+t_2+...+t_n)}$.

También hay que considerar el caso especial $t_1 = t_2 = ... = t_n = t \in \mathbb{R}$, donde $(e^{it})^n = e^{int}$, es decir, $(\cos t + i\sin t)^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$, conocido como la **fórmula de Abraham de Moivre**.

## 7.5. Raíces de números complejos

*Definición. Dados un natural $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y un complejo $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es una **raíz n-ésima** de $w$ si $z^n = w$.*

Excluimos $w = 0$ porque $z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Así, $\sqrt[n]{w}$ no es un valor único, de hecho, $\sqrt[n]{w}$ tendrá $n$ valores diferente. Para hallarlos, se usa la representación polar y la fórmula de Moivre.