Conjuntos y números 16/11

H4. 14: n), ñ).

n) Considerar $[0,1)$ en base 9 (dígitos del 0 al 8)

$$\updownarrow ?$$

$[0,1)$ en base 10

ñ) $S = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \}$

$$gr(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in [0,1] \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

H.5.

② $a, b \in \mathbb{Z}^{>0}$, $\begin{cases} a = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s} & 0 \leq n_i \\ b = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s} & 0 \leq m_i \end{cases}$

a) $\operatorname{mcd}(a,b) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\min\{n_i, m_i\}}$. $\operatorname{mcm}(a,b) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\max\{n_i, m_i\}}$

b) $\operatorname{mcd}(a,b) \cdot \operatorname{mcm}(a,b) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\min\{n_i, m_i\} + \max\{n_i, m_i\}} = \prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i + m_i} = a \cdot b$

c) Encontrar el mcd (3059, 1547)

$\begin{cases} 3059 = 7 \cdot 19 \cdot 23 \\ 1547 = 7 \cdot 13 \cdot 17 \end{cases}$ $\operatorname{mcd}(3059, 1547) = 7$

$\operatorname{mcm}(3059, 1547) = 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$

Algoritmo de Euclides:

$3059 = 1547 \cdot 1 + 1512$

$1547 = 1512 \cdot 1 + 35$

$1512 = 35 \cdot 43 + 7$ → mcd(3059, 1547)

$35 = 7 \cdot 5 + 0$

$\begin{cases} 15 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \\ 16 = 2^4 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \end{cases}$ $\begin{cases} 15 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \\ 22 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \end{cases}$

---

③ $a, b, m \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Demostrar: $a \mid m \wedge b \mid m \Rightarrow a \cdot b \mid m$

$\begin{cases} a \mid m \iff m = a \cdot n, \ n \in \mathbb{N} \\ b \mid a \cdot n \end{cases}$, pero $(a,b) = 1$ luego $b \mid n$. Es decir $n = b \cdot n'$, $n' \in \mathbb{N}$

y $m = a \cdot n = a \cdot b \cdot n'$, es decir $a \cdot b \mid m$.

Si $(a,b)\neq 1$, contraej. $a=4$, $b=4$, $m=4$; $a|m$, $b|m$ pero $a.b = 16 \nmid 4 = m$. ■

④ Encontremos los pares de enteros a,b tq. $mcd(a,b) = \overset{\overset{5.2}{\shortparallel}}{10}$ y $mcm(a,b) = \overset{\overset{5^2.2^2}{\shortparallel}}{100}$.

Como $mcm(a,b) = 10^2$, en las factorizaciones de a y b solo pueden aparecer:

$$\begin{cases} a = 2^{\alpha_1} 5^{\alpha_2} \\ b = 2^{\beta_1} 5^{\beta_2} \end{cases}$$

Como $mcd(a,b)=10$, $\min\{\alpha_i, \beta_i\} = 1$.

$\max\{\alpha_i, \beta_i\} = 2$

Posibles pares: $\begin{cases} a = 2^1 5^1 \\ b = 2^2 5^2 \end{cases}$, $\begin{array}{l} a = 2^2 5^1 \\ b = 2^1 5^2 \end{array}$, $\begin{array}{l} a = 2^1 5^2 \\ b = 2^2 5^1 \end{array}$ ... .

⑤ $n = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{n_s}$. Dem. que tiene $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot \ldots \cdot(n_s+1)$

Sea $d \in \mathbb{N}$ tq. $d|N$. Por la unicidad de la descomposición, $d = \prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}$. $\quad 0 \leq m_i \leq n_i$

Para el primo i-ésimo, tenemos que elegir un exponente de entre n_i+1 posibles. Luego el total de combinaciones para los exponentes es $\prod_{i=1}^{s}(n_i+1)$. ■

⑥ • Demostrar que existen infinitos primos de la forma $4n-1$.

Sea $A = \{\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{4n_1 - 1}, \underset{\overset{\shortparallel}{7}}{4n_2 - 1}, \ldots, \underset{\overset{\shortparallel}{X}}{4n_k - 1}\}$

$N = 4\cdot(3.7.\ldots.X) - 1$. Ningún primo de A puede dividir a N. Tampoco puede ser primo porque $N > X$ y es de la forma $4.(\ldots)-1$.

Si p es un primo, pueden ocurrir dos cosas: $\begin{cases} p \equiv 1 \text{ mód } 4 \\ p \equiv 3 \text{ mód } 4 \end{cases}$

$\left(\text{si } p \equiv 2 \bmod 4 \Rightarrow p = 4k+2 = 2(2k+1)\right)$

Los $p \equiv 3 \bmod 4$ son los de A, y ninguno divide a N. Luego todos los primos que dividen a N son $\equiv 1 \bmod 4$. Luego su producto es $\equiv 1 \bmod 4$, pero $N \equiv 3 \bmod 4$. Contradicción, tiene que haber un primo $\equiv 3 \bmod 4$ que no esté en A. ■

• Demostrar que existen infinitos primos de la forma $6n-1$.

Si p es primo $\rightarrow \begin{cases} p \equiv 1 \text{ mód } 6 \\ p \equiv 5 \text{ mód } 6 \end{cases}$. Aplicar el mismo argumento.

$(-1 \equiv 5 \text{ mód } 6)$

$B = \{\underset{\underset{5}{\shortparallel}}{6n_1 - 1}, \underset{\underset{11}{\shortparallel}}{6n_2 - 1}, \dots, \underset{X}{6n_k - 1}\}$

$N = 6(5 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot X) - 1$. $\underset{\underset{B}{\uparrow}}{6n_i - 1} \nmid N$ y N no es primo $(N > X)$

Todos los primos $p \mid N$ son $p \equiv 1$ mód 6, pero $N \equiv 5$ mód 6. ¡!

---

(7) $\underset{\neq \emptyset}{S \subset \mathbb{Z}}$ tq. P1: $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 + s_2 \in S$ (cerrado por la suma)

P2: $s \in S \Rightarrow -s \in S$

Demostrar que $S = \{0\}$ ó $S = n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{Z}^{>0}$

Supongamos que $\exists\, \underset{\neq 0}{n} \in S$. Entonces por P2: $-n \in S$. Uno de los dos (n ó $-n$) es positivo, luego $S \cap \mathbb{Z}^{>0} \neq \emptyset$ y podemos aplicar el ppio. del buen orden.

Sea $m \in S \cap \mathbb{Z}^{>0}$ el mínimo. Por la P1, $m\mathbb{Z} \subseteq S$ $\left(\begin{matrix} m + m = 2m \in S, \\ m + 2m = 3m \in S, \\ \vdots \end{matrix} \text{ etc}\right)$

Supongamos que $\exists\, s \in S \setminus m\mathbb{Z}$. Por la P2, $-s \in S \setminus m\mathbb{Z}$. Luego puedo asumir $s > 0$.

Entonces $s = q \cdot m + r$ con $0 < r < m$. $r = \underset{\underset{S}{\uparrow}}{s} - \underset{\underset{S}{\uparrow}}{qm} \overset{P1}{\Rightarrow} r \in S$.

Pero m era el mínimo. Contradicción.

(8) Hallar soluciones de:

a) $110x + 55y = 22 \rightsquigarrow 10x + 5y = 2$.

La ecuación tiene sol. si y solo si $\underset{\underset{5}{\shortparallel}}{\text{mcd}(5,10)} \mid 2$. No hay sol.

b) $111x + 36y = 15 \rightsquigarrow 37x + 12y = 5$. $(37, 12) = 1 \mid 5$

Encontrar x_0, y_0 tq. $37x_0 + 12y_0 = 1$ (id. de Bezout) y multiplicar por 5.

Por ej. $37 \cdot 1 + 12 \cdot (-3) = 1 \overset{\cdot 5}{\rightsquigarrow} 37 \cdot 5 + 12 \cdot (-15) = 5$

Soluciones: $\left\{ \begin{matrix} x = 5 + 12n, \\ y = -15 - 37n \end{matrix} \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $6x+10y=20 \rightsquigarrow 3x+5y=10$, $mcd(3,5)=1$

Observamos que $3\cdot(-3)+5\cdot 2=1 \Rightarrow 3\cdot(-30)+5\cdot(20)=10$

$$\text{Soluciones: } \left\{ \begin{array}{l} x=-30+5n \\ y=20-3n \end{array} \right. \quad n\in\mathbb{Z} \Big\}$$

■

(11) $\overset{\mathbb{Z}}{n}>0$ es perfecto si $n=\sum_{\substack{d\mid n \\ 0<d<n}} d$. Dem.: 2^n-1 primo $\Rightarrow 2^{n-1}\cdot(2^n-1)$ es perfecto.

Sea $d \mid 2^{n-1}(2^n-1)$ un divisor propio. Como 2^n-1 en primo:

$$d=\left\{ \begin{array}{ll} 2^j\cdot(2^n-1),\ 0\le j\le n-2 & \text{si } d\mid(2^n-1) \\ 2^i\ ,0\le i\le n-1 & \text{si } d\nmid(2^n-1) \end{array} \right.$$

$$\sum_{j=0}^{n-2} 2^j\cdot(2^n-1) + \sum_{j=0}^{n-1} 2^i = \sum_{j=0}^{n-2}\left(2^j(2^n-1)+2^j\right) + 2^{n-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2}(2^j\cdot 2^n) + 2^{n-1} = 2^n\cdot\sum_{j=0}^{n-2} 2^j + 2^{n-1}$$

$$= 2^n\,\frac{(1-2^{n-1})}{1-2} + 2^{n-1}$$

Esto es $2^n(2^{n-1}-1)+2^{n-1} = 2^{n-1}(2^n-2+1) = 2^{n-1}(2^n-1)$ ■

(9.) $55x+71\cdot y=2000$. Necesitamos $x,y\ge 0$. $(55,71)=1$

Difícil encontrar sol. de $55x+71y=1$ por ~~tanteo~~. Alg. de Euclides:

$71=55\cdot 1+16$

$55=16\cdot 3+7$

$16=7\cdot 2+2$

$7=2\cdot 3+1$

$1=7-2\cdot 3$

$1=7-(16-7\cdot 2)\cdot 3$

$1=(55-16\cdot 3)-(16-(55-16\cdot 3)\cdot 2)\cdot 3$

$1=55-16\cdot 3-16\cdot 3+55\cdot 6-16\cdot 18$

$1=55\cdot 7+16\cdot(-24)$

$1=55\cdot 7+(71-55)\cdot(-24)$

$\Rightarrow \quad 1=55\cdot 31+71\cdot(-24)$

Multiplico por 2000: $71(-24\cdot 2000) + 55(2000\cdot 31) = 2000$

Soluciones $\left\{ \begin{array}{l} x = -48000 + 55n \\ y = 62000 - 71n \end{array} \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$

Tengo que buscar $n \in \mathbb{Z}$ tq. $-48000 + 55n > 0$

$62000 - 71n > 0$

es decir $n > \dfrac{48000}{55} > 872$ y $n < \dfrac{62000}{71} < 874$

$\Rightarrow$ $n = 873$ y $x = -48000 + 873\cdot 55 = 15$

$y = 62000 - 873\cdot 71 = 17$

$\blacksquare$