ÁLGEBRA LINEAL

Doble Grado
Curso 2022–23

Hoja nº 9

Espacio Dual.

1. Determinar la base dual de la base $\mathcal{B} = \{(1,2,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, escribiéndola en la base dual de la base estándar.

2. Determinar la base dual de la base $\mathcal{B} = \{1, 1+x, -2+x^2, -x^2+x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$, escribiéndola en la base dual de la base estándar.

3. Encontrar una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, respecto de la cual v_1^* (el dual de v_1 respecto de $\mathcal{B}$) coincide con la aplicación lineal $f(x,y,z) = x - y$.

4. Decidir si $\mathcal{S} \subset V^*$ es una base en los siguientes casos:

(i) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{S} = \{\omega_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\ \omega_2(x_1,x_2,x_3) = x_2,\ \omega_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2\}$.

(ii) $V = \mathbb{R}_1[x]$, $\mathcal{S} = \{\omega_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx,\ \ \omega_2(p(x)) = \int_{-1}^0 p(x)dx\}$.

(iii) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{S} = \{\omega_1(p(x)) = p(0),\ \omega_2(p(x)) = p'(0),\ \omega_3(p(x)) = p''(0)\}$.

5. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal definida por $T(p(x)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\,dt$. Calcular las coordenadas de T respecto de la base dual de $\{1, x, x^2, x^3\}$.

6. Sea $\omega \in (\mathbb{R}^4)^*$ definida por $\omega(x,y,z,t) = 2x - y + 3t$. Calcular las coordenadas de ω con respecto a la base dual de $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1),(1,1,0,0),(1,0,0,0),(1,1,1,2)\}$.

7. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, 0, d)$$

(i) Encontrar bases de $Ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$. Comprobar la fórmula de la dimensión.

(ii) Sea $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ la base dual de $\{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ y f^* la aplicación dual. Calcular $f^*(v_3^*)$.

(iii) Calcular la matriz de f^* respecto de las bases canónicas.

(iv) Describir el núcleo de f^* y el anulador de $\mathrm{Im}(f)$.

(v) Describir el anulador de $Ker(f)$ y la imagen de f^*.

8. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(p(x)) = (p(0), p'(0))$. Calcular:

(i) la matriz de f respecto de las bases canónicas y la de f^* respecto de sus duales.

(ii) la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}_1 = \left\{1+x, 1, x^2\right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ y la de f^* respecto de sus duales.

9. Sean $f : V \to W$ y $g : W \to T$ dos aplicaciones lineales.

(i) Demostrar que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(ii) Si f es biyectiva, demostrar que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

(iii) Sea M una matriz invertible de orden n. Probar que $(M^{-1})^t = (M^t)^{-1}$.

10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean E y F dos subespacios de V. Demostrar:

(a) $(E^\circ)^\circ \cong E$

(c) $(E \cap F)^\circ = E^\circ + F^\circ$ y $(E+F)^\circ = E^\circ \cap F^\circ$

(c) Si $V = E \oplus F$, entonces $V^* = E^\circ \oplus F^\circ$.

11. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 - 2x_2 + 3x_4 = x_2 + x_4 = 0\} \quad \text{y} \quad W_2 = \langle (-5,-1,1,1), (0,0,0,1) \rangle,$$

calcular una base del anulador de W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

12. Expresar cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^n$ como conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales adecuado.

(i) $V = \langle v_1 = (1,-1,2)\,, v_2 = (2,1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$

(ii) $E = \langle v_1 = (1,1,1,3)\,, v_2 = (1,1,3,2), v_3 = (1,3,2,1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$

(iii) $F = \langle v_1 = (3,1,1,1)\,, v_2 = (2,3,1,1), v_3 = (1,2,3,1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$

(iv) $E \cap F \subset \mathbb{R}^4$

(v) $G = \langle v_1 = (1,1,1,1,2)\,, v_2 = (1,1,1,2,2), v_3 = (1,1,2,2,2) \rangle \subset \mathbb{R}^5$

(vi) $H = \langle v_1 = (2,1,1,1,1)\,, v_2 = (2,2,1,1,1), v_3 = (2,2,2,1,1) \rangle \subset \mathbb{R}^5$

(vii) $G \cap H \subset \mathbb{R}^5$