Conjuntos y Números, UAM

Examen Parcial 1 — 16 de octubre de 2020

Apellidos y Nombre: ______________________ Grupo: __________

Se pide razonar y justificar todas las respuestas

Tiempo disponible: 90 minutos

1. (**2,5 puntos**)

   (a) Decidir razonadamente si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

   Para dos conjuntos arbitrarios A y B, siempre se cumple $B \setminus (B \setminus A) = A$.

   Si es verdadera, se pide dar una demostración y si es falsa, se pide dar un contraejemplo sencillo.

   (b) Si los conjuntos A y $A \cap B$ tienen 10 y 3 elementos, respectivamente, ¿cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A \setminus B)$, el conjunto de partes de $(A \setminus B)$?

2. (**2,5 puntos**) Demostrar por inducción que

   $$(n+1)(n+2)\ldots(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

   para todo número $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

3. (**2,5 puntos**) (a) Demostrar que el número $(1+\sqrt{2})^3$ es irracional.

   (b) Cada cupón de Lotería Nacional lleva un número de 5 cifras, siendo posibles todos los números desde 00000 hasta 99999. Demuestre que, si compramos 47 cupones, habrá entre ellos al menos dos con la misma suma de sus cifras.

4. (**2,5 puntos**)

   a) Demostrar que si $f : X \to A$ y $g : Y \to B$ son funciones sobreyectivas, entonces la función $h : X \times Y \to A \times B$, dada por $h(x, y) = (f(x), g(y))$, para $x \in X$, $y \in Y$, también es sobreyectiva.

   b) Consideremos una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple la siguiente propiedad:

   $$f(f(x)) + f(x) = 2x + 15 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

   Demuestre que f es inyectiva. ¿Puede dar un ejemplo sencillo de una función f con dicha propiedad?