Bloque III: Combinatoria

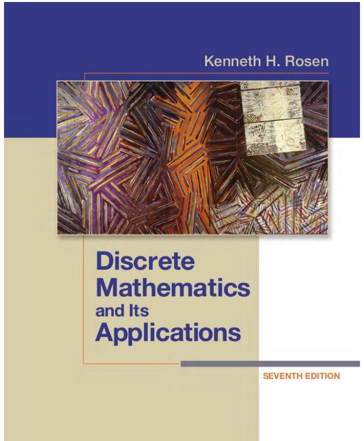
Principios básicos de enumeración

Contenidos

Lecturas sugeridas

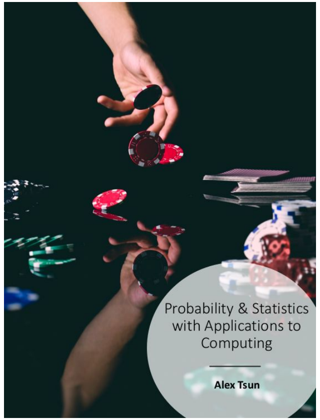
Rosen:

- 6.1. The basics of counting
- 6.2. The pigeonhole principle



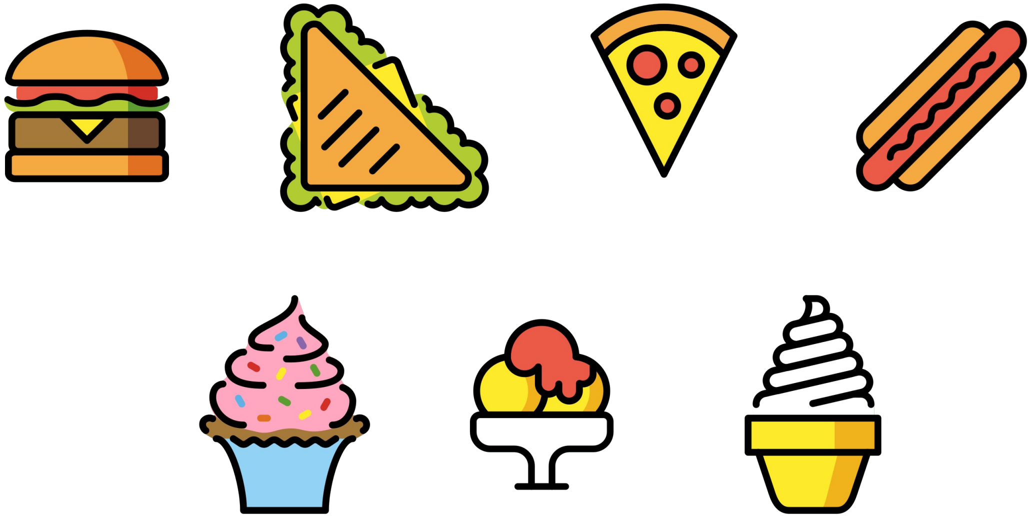
Tsun:

- 1.1.1. Sum rule
- 1.1.2. Product rule
- 1.3.2. Inclusion-Exclusion
- 1.3.3. Pigeonhole principle



El restaurante

En un restaurante de comida rápida hay **4 platos principales** y **3 postres**. Queremos consumir sólo un producto (plato principal o postre). ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?



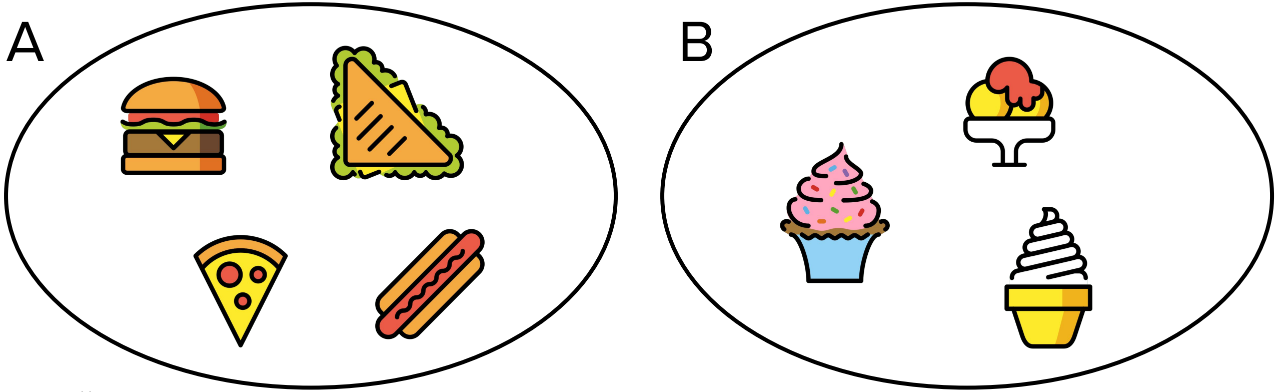
$$4 + 3 = 7$$

Dibujos de https://openmoji.org

La regla de la suma

Si una tarea se puede realizar de una entre un conjunto de N_1 formas o de una entre un conjunto de N_2 formas, de modo que no hay intersección entre ambos conjuntos, entonces el número total de formas de realizar la tarea es

$$N_1 + N_2$$

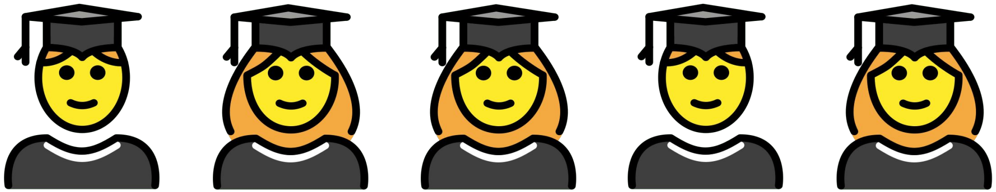


$$|A \cup B| = |A| + |B| \text{ si}$$
$$A \cap B = \emptyset$$

Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 1

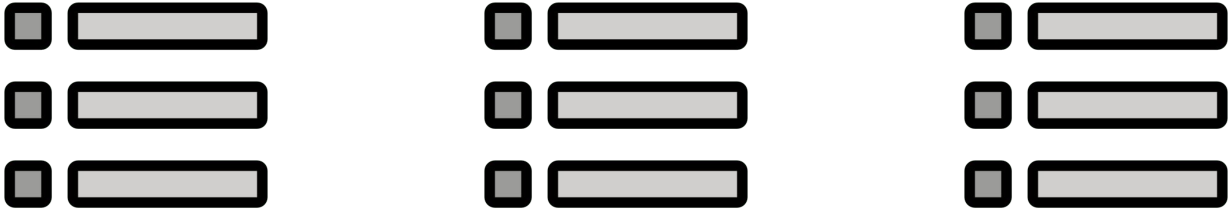
[Adaptado de Rosen] En una escuela de ingeniería se quiere elegir a un representante entre los estudiantes de Informática y los de Telecomunicación. Hay 153 estudiantes de Informática y 85 de Telecomunicación. ¿De cuántas maneras diferentes se puede elegir al representante?



Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 2

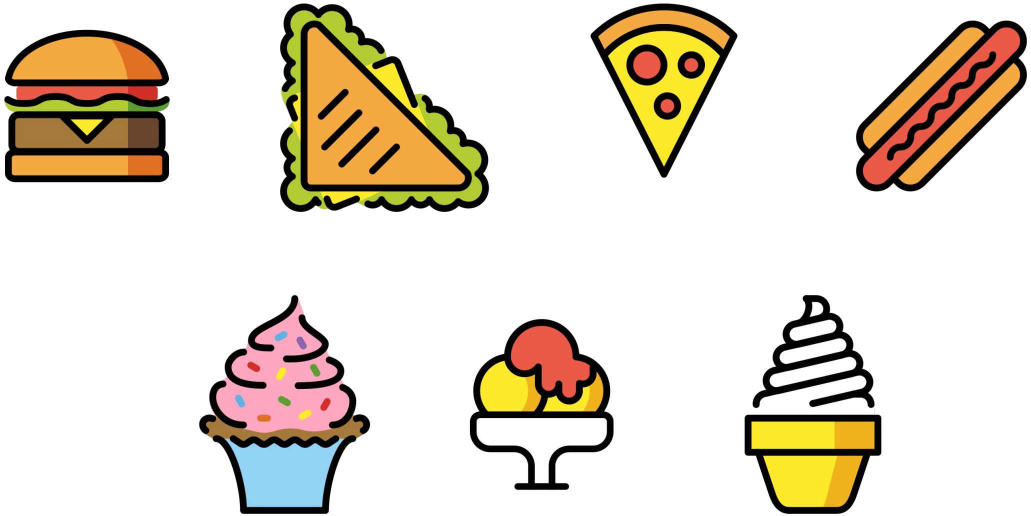
[Adaptado de Rosen] Un estudiante puede elegir un Trabajo de Fin de Grado (TFG) de una de tres listas, que contienen, 23, 15 y 19 propuestas de TFG, respectivamente. ¿Entre cuántos trabajos distintos se puede elegir?



Dibujos de https://openmoji.org

Volvamos al restaurante

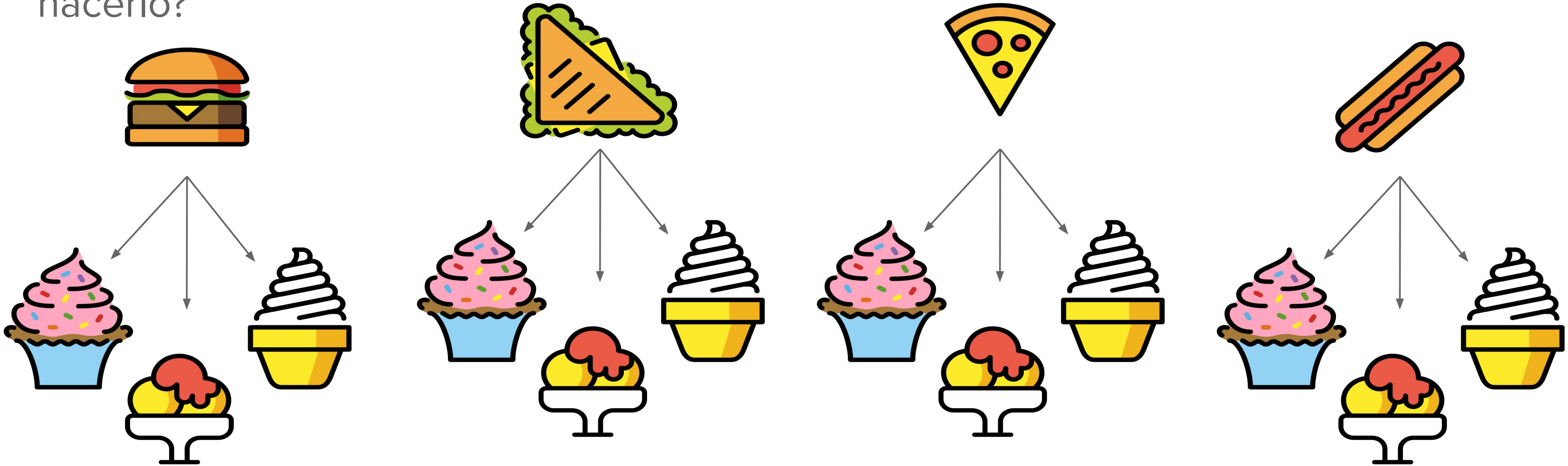
En un restaurante de comida rápida hay **4 platos principales** y **3 postres**. Queremos consumir un plato principal y un postre. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?



Dibujos de https://openmoji.org

Volvamos al restaurante

En un restaurante de comida rápida hay **4 platos principales** y **3 postres**. Queremos consumir un plato principal y un postre. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?

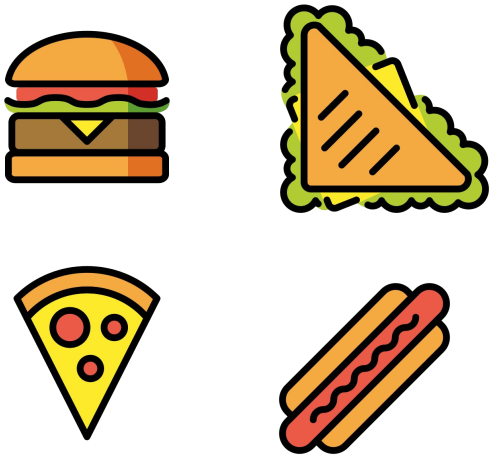


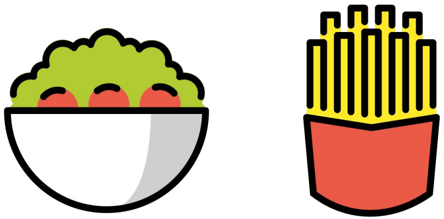
$$4 \cdot 3 = 12$$

Dibujos de https://openmoji.org

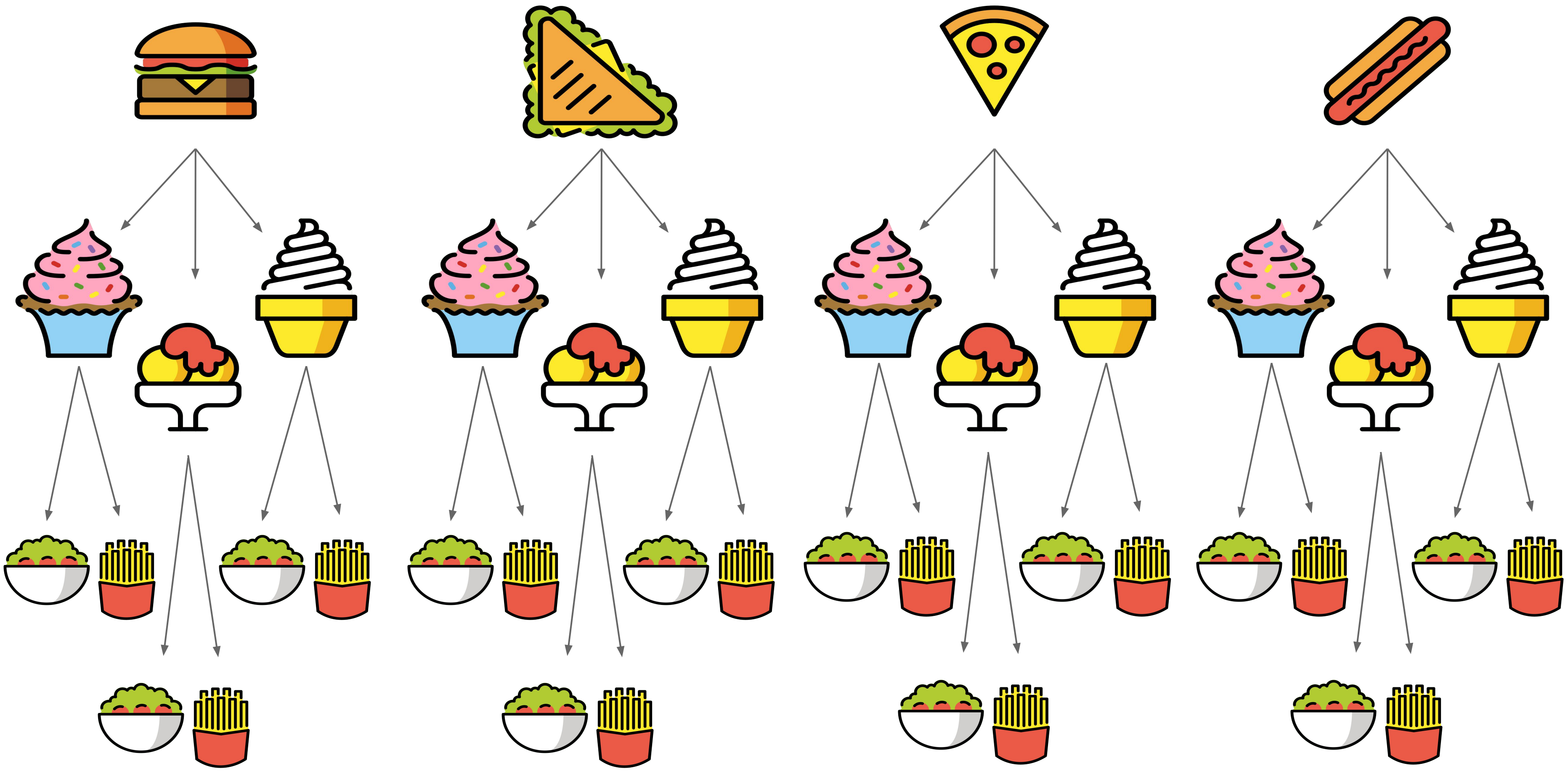
Volvamos al restaurante

En un restaurante de comida rápida hay **4 platos principales**, **2 complementos** y **3 postres**. Queremos consumir un plato principal, un complemento y un postre. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?





Dibujos de https://openmoji.org



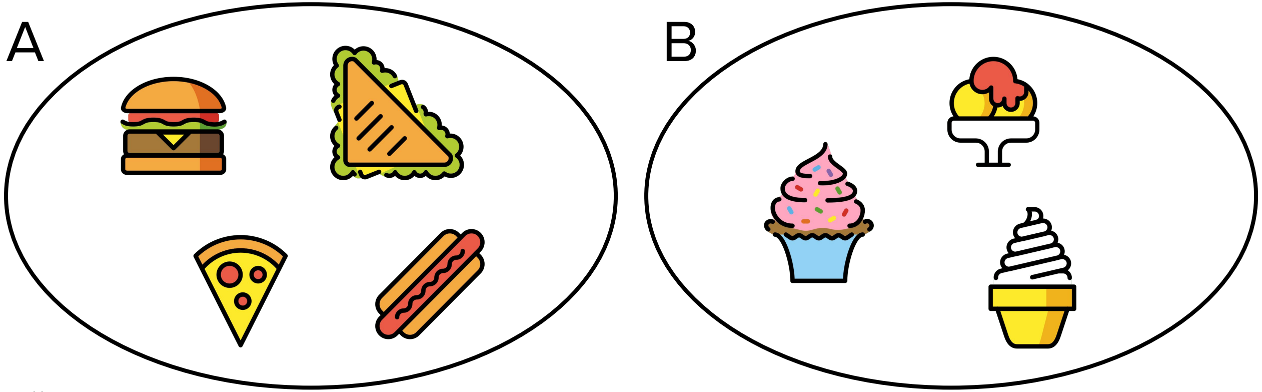
$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Dibujos de https://openmoji.org

La regla del producto

Si un procedimiento se puede descomponer en una secuencia de K tareas T_1, T_2, … T_K, y hay N_i formas de hacer la tarea T_i, entonces el número total de formas de realizar el procedimiento es

$$N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_K$$

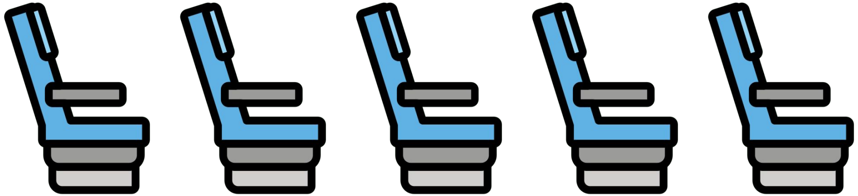


|AxB| = |A|·|B|

Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 3

[Adaptado de Rosen] Se quiere etiquetar las sillas de un auditorio con una letra mayúscula seguida de un número entero positivo no mayor que 100. ¿Cuál es el mayor número de sillas que se pueden etiquetar sin que haya etiquetas repetidas?



Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 4

[Adaptado de Rosen] ¿Cuántas matrículas distintas se pueden construir si cada matrícula es una secuencia de 4 dígitos y 3 letras consonantes mayúsculas?

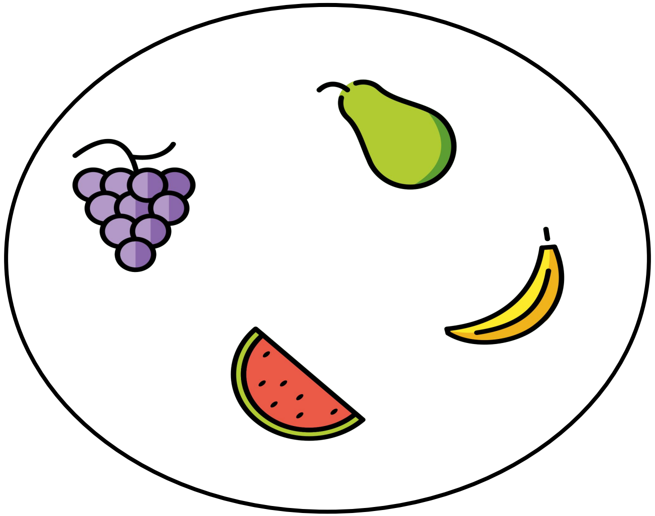
Ejemplo 5

[Adaptado de Rosen] Suponiendo que un número de teléfono es de la forma NXX-NXX-XXXX, donde N es un dígito entre 2 y 9 (incluidos) y X es un dígito entre 0 y 9 (incluidos), ¿cuántos números de teléfono distintos puede haber?

Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 6

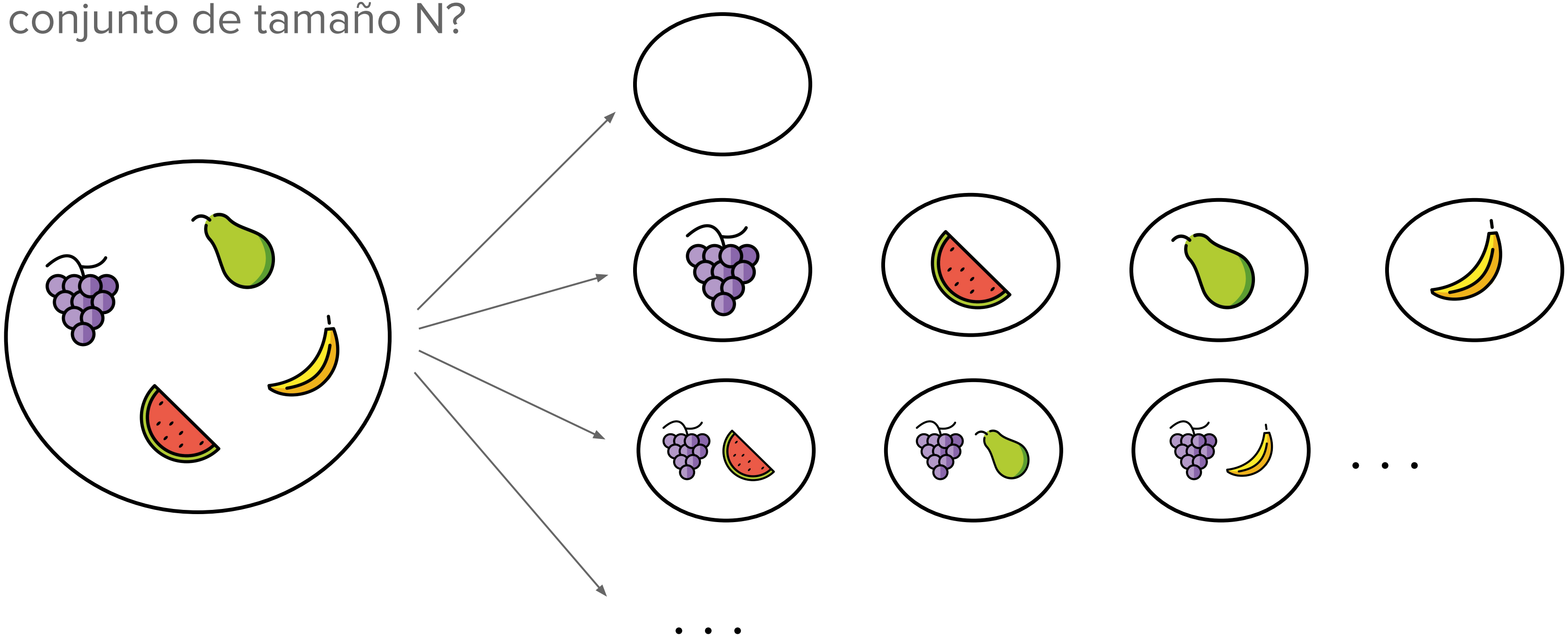
[Adaptado de Rosen] ¿Cuántos subconjuntos distintos se pueden hacer con un conjunto de tamaño N?



Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 6

[Adaptado de Rosen] ¿Cuántos subconjuntos distintos se pueden hacer con un conjunto de tamaño N?



Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 7

[Adaptado de Rosen] En un lenguaje de programación los nombres de las variables son cadenas de uno o dos caracteres alfanuméricos, sin distinguir entre mayúsculas y minúsculas. Los nombres de variable siempre deben empezar por una letra y no pueden coincidir con ninguna de cinco cadenas reservadas de longitud dos. ¿Cuántas variables distintas se pueden declarar?

La contraseña

Cada usuario de un sistema informático tiene una contraseña de 6 caracteres alfanuméricos (dígitos o letras mayúsculas). Si cada contraseña debe tener al menos un dígito, ¿cuántas contraseñas distintas puede haber?

Dibujos de https://openmoji.org

La contraseña

Cada usuario de un sistema informático tiene una contraseña de 6 caracteres alfanuméricos (dígitos o letras mayúsculas). Si cada contraseña debe tener al menos un dígito, ¿cuántas contraseñas distintas puede haber?

¿Sabemos calcular la solución si la contraseña puede tener cualquier combinación de letras y dígitos?

$$36 \times 36 \times 36 \times 36 \times 36 \times 36 = 36^6$$

La contraseña

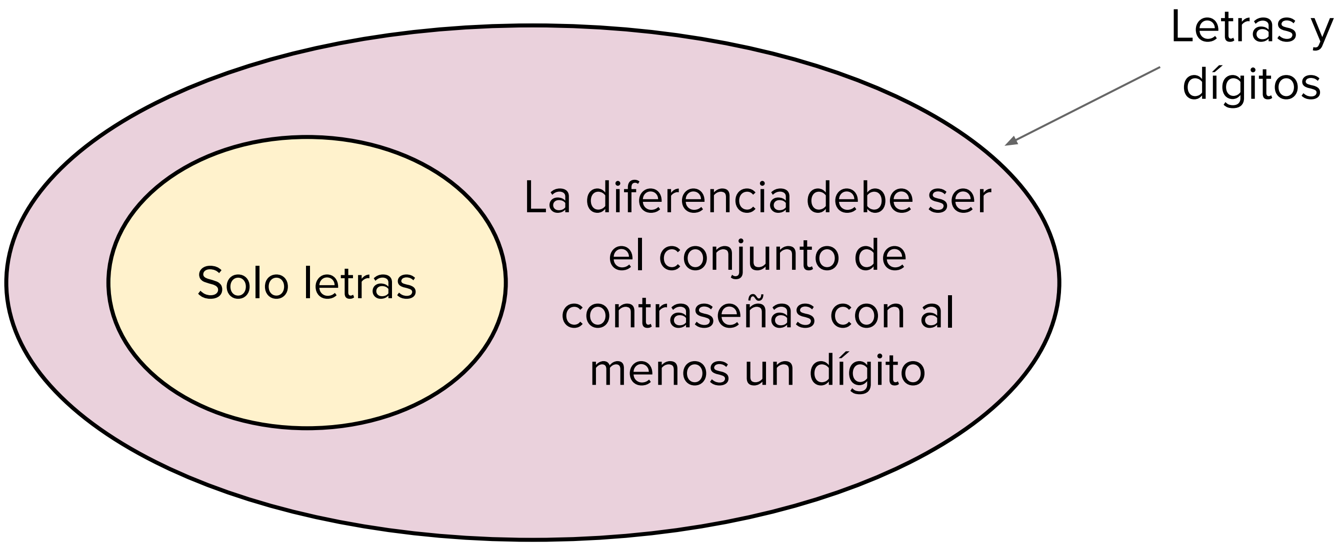
Cada usuario de un sistema informático tiene una contraseña de 6 caracteres alfanuméricos (dígitos o letras mayúsculas). Si cada contraseña debe tener al menos un dígito, ¿cuántas contraseñas distintas puede haber?

¿Sabemos calcular la solución si la contraseña solo tiene letras?

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^6$$

La contraseña

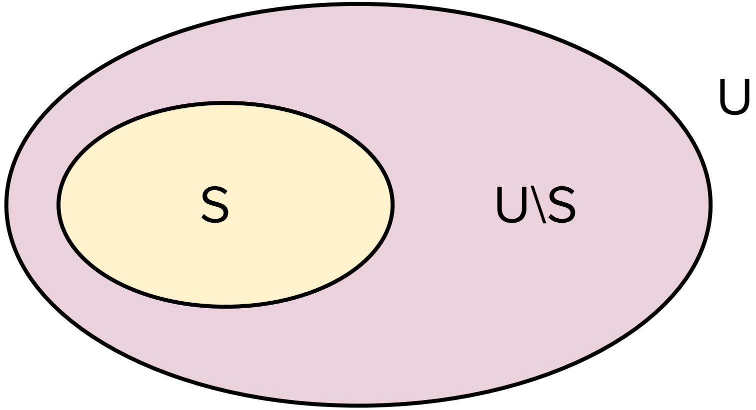
Cada usuario de un sistema informático tiene una contraseña de 6 caracteres alfanuméricos (dígitos o letras mayúsculas). Si cada contraseña debe tener al menos un dígito, ¿cuántas contraseñas distintas puede haber?



Enumeración complementaria

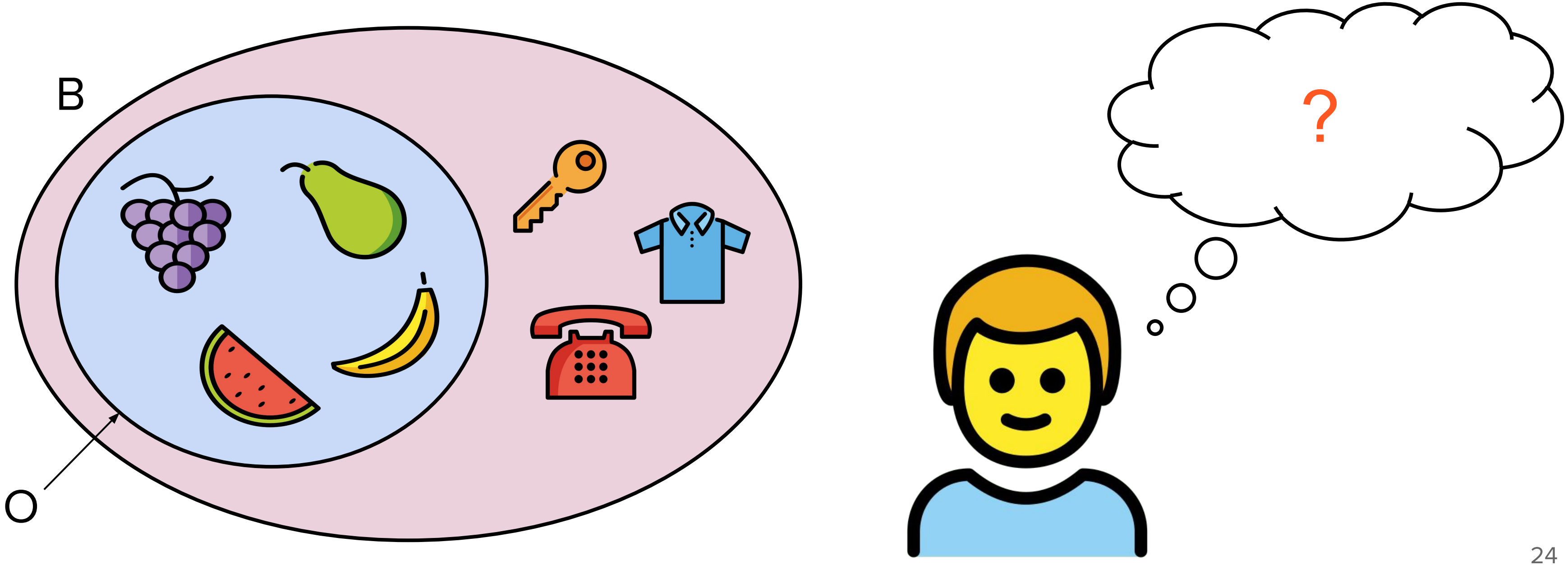
Sea U un conjunto finito y S un subconjunto de U cuyo número de elementos nos interesa conocer. El número de elementos de S se puede calcular como

$$|S| = |U| - |U \setminus S|$$



Un descanso

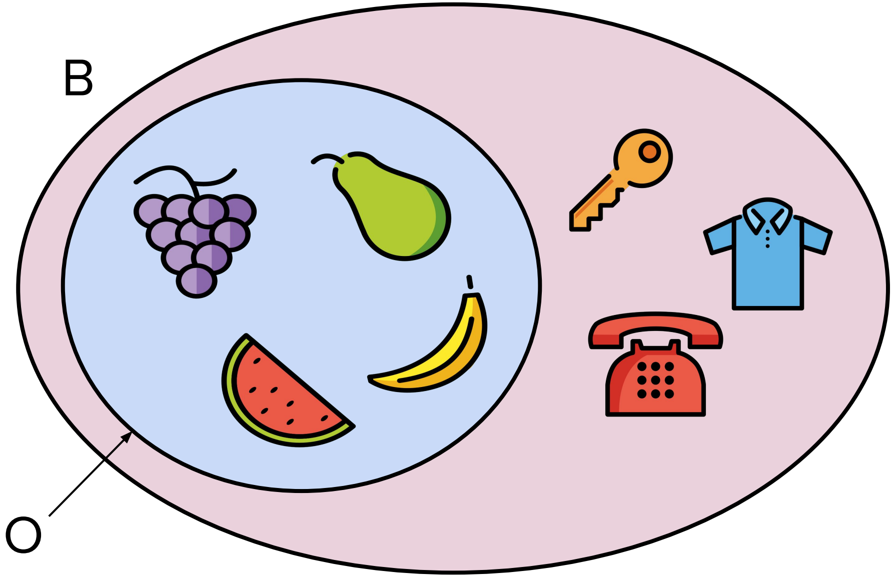
Sea B un conjunto arbitrario y O el subconjunto de todas las *cosas comestibles* de B. Al resto de B lo llamamos X. ¿Te comerías algún elemento de X?



Dibujos de https://openmoji.org

Un descanso

Sea B un conjunto arbitrario y O el subconjunto de todas las *cosas comestibles* de B. Al resto de B lo llamamos X. ¿Te comerías algún elemento de X?



Dibujos de https://openmoji.org

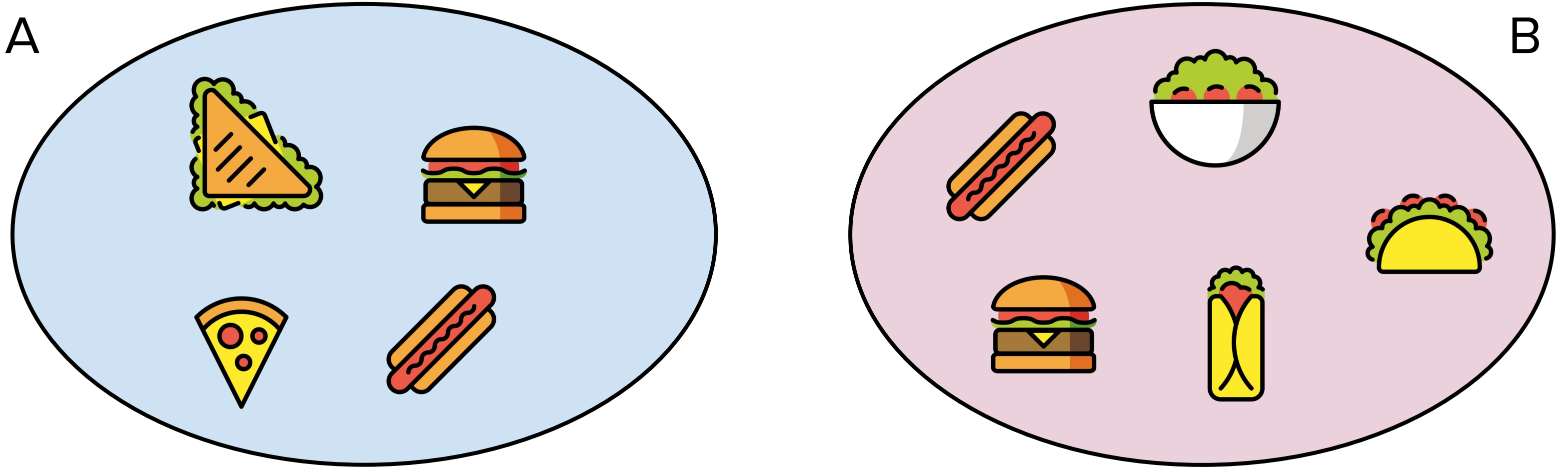
Ejemplo 8

[Adaptado de Rosen] Cada usuario de un sistema informático tiene una contraseña de entre 6 y 8 caracteres alfanuméricos (dígitos o letras mayúsculas). Si cada contraseña debe tener al menos un dígito, ¿cuántas contraseñas distintas puede haber?

Dibujos de https://openmoji.org

Más restaurantes

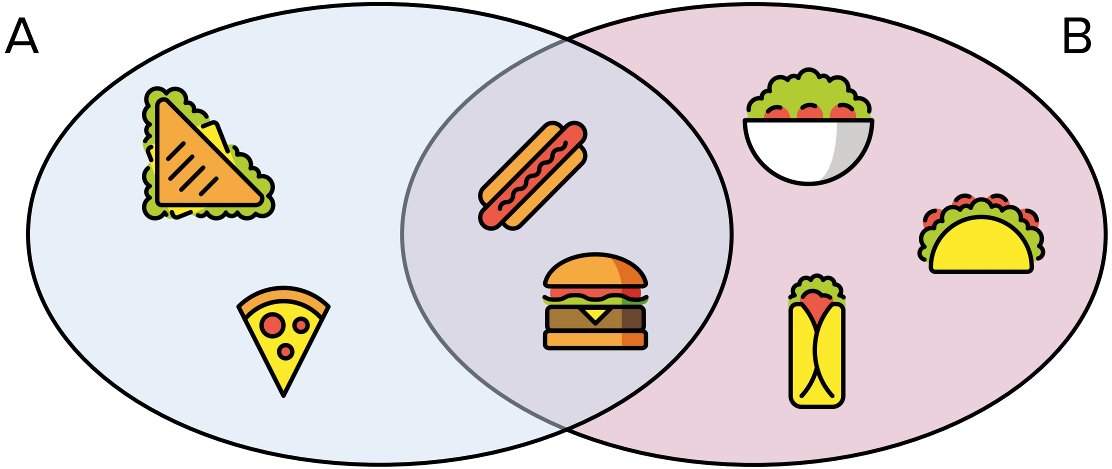
En el restaurante A hay 4 tipos de menú. En el restaurante B hay 5 tipos de menú, pero dos de ellos coinciden con los del restaurante A. Si comemos en uno de los dos restaurantes A o B. ¿Cuántos menús distintos podemos degustar?



Dibujos de https://openmoji.org

Más restaurantes

En el restaurante A hay 4 tipos de menú. En el restaurante B hay 5 tipos de menú, pero dos de ellos coinciden con los del restaurante A. Si comemos en uno de los dos restaurantes A o B. ¿Cuántos menús distintos podemos degustar?

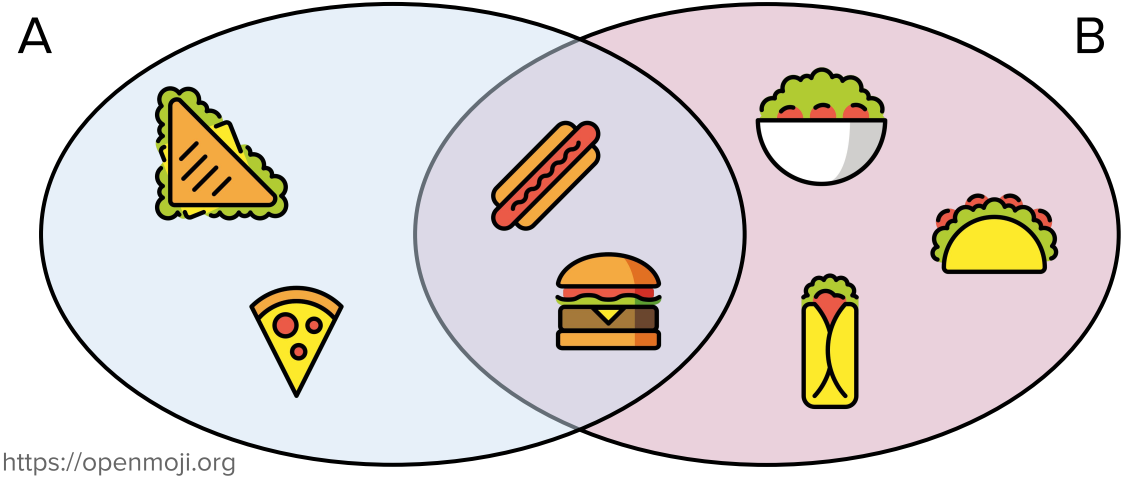


$$4 + 5 - 2 = 7$$

Dibujos de https://openmoji.org

El principio de inclusión-exclusión (la regla de la resta)

Si una tarea se puede realizar de una entre un conjunto de N_1 formas o de una entre un conjunto de N_2 formas, entonces el número total de formas de realizar la tarea es $N_1 + N_2$ menos el número de formas que son comunes a ambos conjuntos.



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 9

[Adaptado de Rosen] ¿Cuántas cadenas de 8 bits empiezan por 1 o acaban por 00 (o ambas cosas a la vez)?

La regla de la división

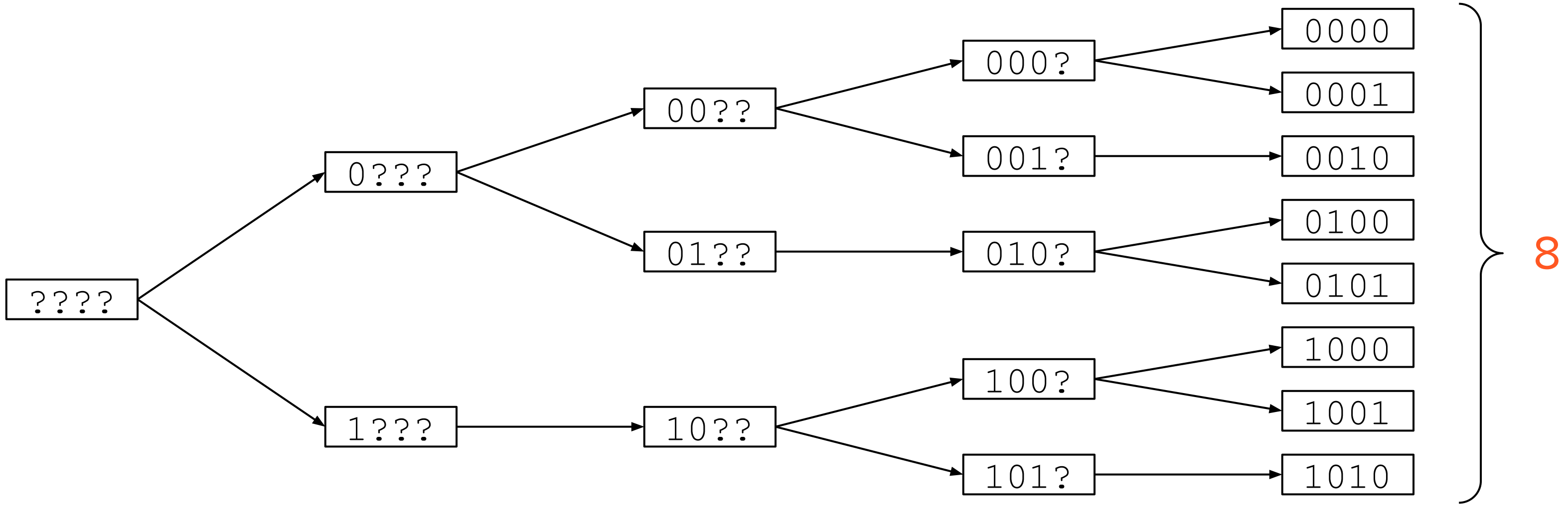
Si una tarea se puede realizar siguiendo un procedimiento que se puede hacer de n formas, de tal modo que para cada una de estas n formas hay exactamente d formas equivalentes, entonces hay n/d formas de realizar la tarea.

Ejemplo 10

[Adaptado de Rosen] ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 4 personas alrededor de una mesa circular si dos maneras se consideran iguales cuando cada persona tiene los mismos vecinos a izquierda y derecha?

Diagramas de árbol

[Adaptado de Rosen] ¿Cuántas cadenas diferentes de 4 bits existen que no tengan dos unos consecutivos?



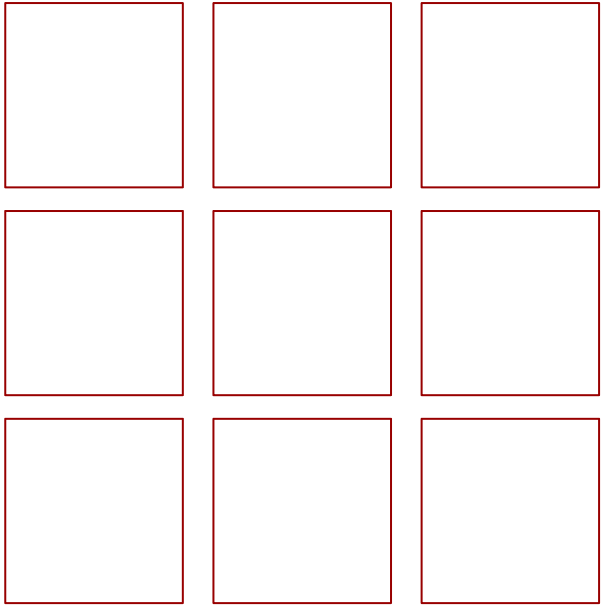
Ejemplo 11

[Adaptado de Rosen] Una tienda vende camisetas en 5 tallas distintas (S, M, L, XL y XXL). Las camisetas de talla S, M y L vienen en 4 colores distintos (rojo, verde, blanco y azul). Las camisetas de talla XL sólo vienen en los colores rojo, verde y blanco. Finalmente las de talla XXL sólo están disponibles en blanco y rojo. ¿Cuántas camisetas diferentes (talla y color) hay en la tienda?

Dibujos de https://openmoji.org

El principio del palomar

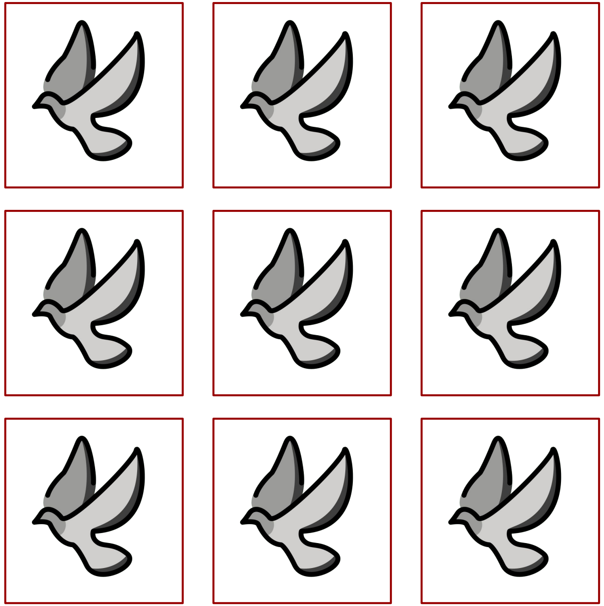
Diez palomas se quieren acomodar en 9 nidos...



Dibujos de https://openmoji.org

El principio del palomar

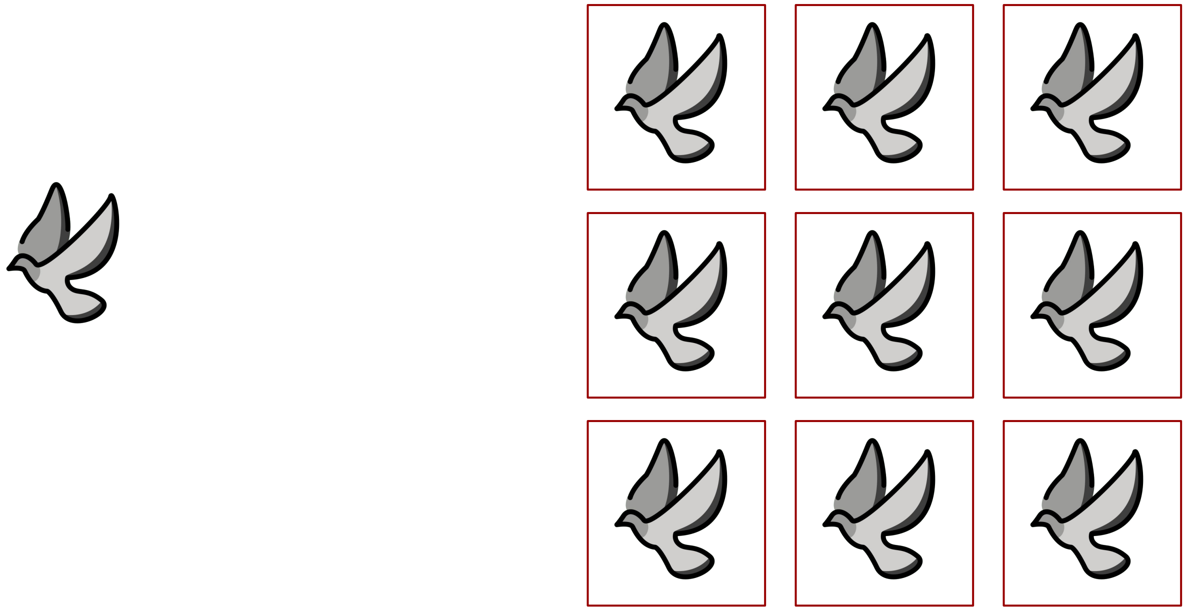
Diez palomas se quieren acomodar en 9 nidos...



Dibujos de https://openmoji.org

El principio del palomar

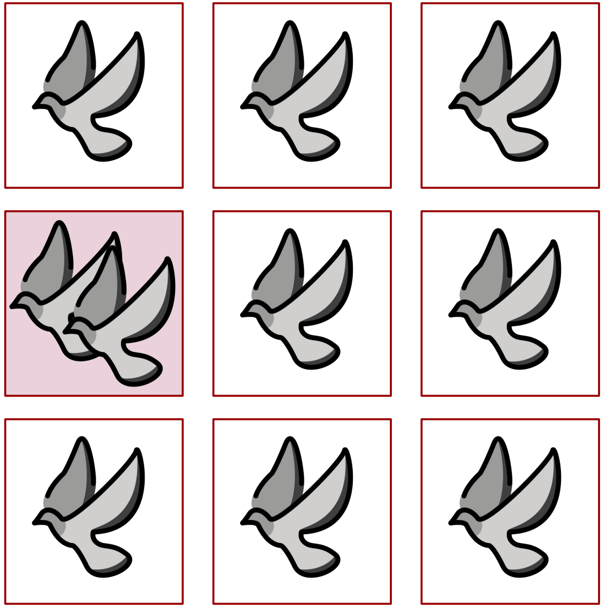
Diez palomas se quieren acomodar en 9 nidos...



Dibujos de https://openmoji.org

El principio del palomar

Diez palomas se quieren acomodar en 9 nidos...



... hay al menos un nido con dos o más palomas.

Dibujos de https://openmoji.org

El principio del palomar

Sea k un número entero positivo. Si colocamos $k + 1$ (o más) objetos en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene dos o más de esos objetos.

Ejemplo 12

[Adaptado de Rosen] En un grupo de 367 personas hay al menos dos personas que cumplen años el mismo día.

Ejemplo 13

[Adaptado de Rosen] En un grupo de 27 palabras en inglés hay al menos dos que empiezan por la misma letra.

Ejemplo 14

[Adaptado de Rosen] ¿Cuántos estudiantes debe haber en clase para garantizar que al menos dos de ellos obtienen la misma nota en la asignatura? Suponemos que las notas son números entre 0 y 10, con un decimal.

Ejemplo 15

[Adaptado de Rosen] Demuestra que cualquier entero positivo n tiene un múltiplo con sólo 0s y 1s en su forma decimal.

Ejemplos:

- Si $n = 3$: 1011 = 337 x 3
- Si $n = 5$: 10 = 2 x 5
- Si $n = 7$: 1111110 = 158730 x 7