Tema 2b. Series

2b.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/3d4e6d1a-0dcf-40f0-985e-0f82ed02e386/U2b_Series.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/557e8030-51a2-4fb1-be51-ab8939aa9f2c/H3_Series.pdf

2b.1. Series numéricas

*Definición. Una **serie** es la **suma parcial** de n términos de una sucesión de números reales. La suma de una serie es el límite de las sumas parciales de esta.*
Notación: $\sum a_n$.

*Definición. Se dice que la serie $\sum a_n$ es **convergente** si la sucesión formada por las sumas parciales $s_1, s_2, ..., s_n$ es convergente. Si $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$.*

> Teorema. La serie $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ dado un $\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{n=q+1}^{p} a_n\right| < \varepsilon$, si $p > q \geq N$.

Demostración.
Vemos que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy si y solo si $\forall\varepsilon, \exists N : |s_p -$

$s_q| < \varepsilon, \forall p, q \geq N$ y que $|s_p - s_q| = \left|\sum_{n=q+1}^{p} a_n\right|$, si $p > q$.

> Corolario. Si $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esta es una condición necesaria de convergencia, obtenida a partir del teorema anterior, situando $p = q + 1$.

> Teorema. Sea $\sum a_n$ convergente, $\exists \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ejemplo 1. Sea $A \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$, determinar la divergencia de A.
Calculamos $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \neq 0$, luego, no se cumple la condición necesaria de convergencia y A es divergente.

2b.2. Series de términos no negativos

> Teorema. Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos. Esta serie es convergente $\Leftrightarrow$ la sucesión $\{s_n\}$ de las sumas parciales está acotada superiormente.

Demostración.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \{s_n\}$ está acotada porque tiene límite.
Por otro lado, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, es decir, $\{s_n\}$ crece y está acotada $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n$ finito, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

2b.2.1. Serie armónica

> Teorema: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge si $a > 1$ y diverge si $a \leq 1$.

Demostración.
Para $a = 1$ sabemos que la serie diverge, a partir de esto:
- Para $a < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ diverge, por comparación de series.

- Para $a > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n^a} = n^{-a}$, sea $b_n = n^{-a+1} - (n+1)^{-a+1}$, de forma que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1^{-a+1} - (n+1)^{-a+1} = 1$. Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge a 1. □

2b.3. Criterios de convergencia

2b.3.1. Criterio de Cauchy

> Teorema (Criterio de Cauchy). Sea $\{a_n\}$ una serie de términos no negativos, $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Si $\alpha > 1$, la serie diverge, de lo contrario, converge.

Demostración.
$\alpha > 1 \Rightarrow \exists$ infinitos términos tales que $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Leftrightarrow \exists$ infinitos $a_n > 1$. Luego $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ y la serie diverge. □

Ejemplo 3. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$, determinar su convergencia.

Aplicando el criterio de Cauchy, calculamos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} = \dfrac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{2}$. Luego, como $\dfrac{1}{2} > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$ converge.

2b.3.2. Criterio del cociente

> Teorema (Criterio del cociente). Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos, si $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; si $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración.
$\exists n_0 : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ si $n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n > 0$ si $n \geq n_0 \Rightarrow 0 < a_{n_0} < a_{n_0+1} < ....$ Luego $\lim_{n\to\infty} a_n > a_{n_0} > 0$, por lo que no se cumple la condición necesaria de convergencia y la serie es divergente. □

Ejemplo 4. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{100^n}$, determinar su convergencia.

Aplicando el criterio del cociente, calculamos $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{(n+1)!}{100^{n+1}}}{\frac{n!}{100^n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)! \cdot 100^n}{n! \cdot 100^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{100} = \infty > 1$. Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{100^n}$ diverge.

2b.3.3. Criterio de comparación

> Teorema (Criterio de comparación). Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tales que $b_n \geq a_n \geq 0, \forall n$: si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente; y si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

Demostración.

Denotando las sumas parciales de ambas series como: $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, de forma que $s_n \leq S_n$. Si S_n está acotada, s_n también lo está; y si s_n no está acotada, S_n tampoco lo estará. ☐

Ejemplo 5. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$, determinar su convergencia.

Aplicando el criterio de comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, vemos que $\frac{(\ln n)^2}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. Luego, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (serie armónica), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$ también lo hace.

2b.3.4. Criterio de comparación por paso al límite

> Teorema (Criterio de comparación por paso al límite). Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tales que $b_n, a_n > 0, \forall n$; y $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$:
>
> - si $L \neq 0$ y $L \neq \infty$ ambas series se comportan igual.
> - si $L = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
> - si $L = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Ejemplo 6. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$, determinar su convergencia.

Aplicando el criterio de comparación por paso al límite con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, calculamos $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n+2)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)!} = 0$. Luego, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ también lo hace.

2b.3.5. Criterio de la integral

> Teorema (Criterio de la integral). Sea $f(n)$ una función no negativa, monótona decreciente, definida en $[1, +\infty)$ y localmente integrable. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ converge la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

2b.4. Convergencia absoluta y condicional

> Teorema. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie para la que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo es, se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente. Si se da el caso en el que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no, se dice que es condicionalmente convergente.

Demostración.

Por el criterio de convergencia de Cauchy: sea $\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon : m \geq n \geq N_\epsilon \Rightarrow \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Luego $|a_n + a_{n+1} + ... + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + ... + |a_m| < \varepsilon$. Así $\sum_{k=n}^{m} a_k = 0$ cuando $n, m \to \infty$, luego $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. $\square$

2b.4.1. Convergencia absoluta

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, esta se puede descomponer en $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

> Teorema 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen.

Demostración.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen $\Rightarrow$ converge $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ + a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\square$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergen $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_n}{2}$ convergen. $\square$

> Teorema 2. Si una serie converge absolutamente, cualquier reordenación suya también converge y tiene la misma suma.

Demostración.
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen.
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ la reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.
Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. $\square$

> Teorema 3. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos no negativos divergentes, tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y α cualquier número real. Entonces existen unas sucesiones de índices $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots, l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$ tales que la serie $a_1 + \ldots + a_{k_1} - b_1 - \ldots - b_{l_1} + a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2} - b_{l_1+1} - \ldots - b_{l_2} + \ldots$ converge a α.

Demostración.
Sea k_1 el menor índice > 1 tal que $a_1 + ... + a_{k_1} > \alpha$ y l_1 el primer índice tal que $S_1 = a_1 + ... + a_{k_1} - b_1 - ... - b_{l_1} < \alpha$ y $S_2 = a_1 + ... + a_{k_1} - b_1 - ... - b_{l_1} + a_{k_1+1} + ... + a_{k_2} > \alpha$ (k_2 es el primer índice $> k_1$ para el que esto es cierto).
Veamos que la suma infinita obtenida de esta forma converge a α.
$|\overline{S}_m - \alpha| < a_{k_m}, m \geq 2$ y $|\underline{S}_m - \alpha| < b_{l_m}, m \geq 1$
Sea $\epsilon > 0$ elegimos un $n_0 : a_n < \epsilon, b_n < \epsilon$ si $n > n_0$. Si $k_i, l_i > n_0$, entonces:
$|\overline{S}_i - \alpha| < a_{k_i} < \epsilon$ y $|\underline{S}_i - \alpha| < b_{l_i} < \epsilon$
Luego la suma converge y es igual a α. $\square$

2b.4.2. Teorema de Riemann

> Teorema de Riemann. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero no converge absolutamente. Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, entonces $\exists$ una reordenación $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$.

Demostración.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ no pueden converger ambas (porque entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sería absolutamente convergente). Como $a_n = a_n^+ - a_n^- \Rightarrow$ no puede suceder que una serie converja y la otra no, luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergen ambas.

$|a_n^+|, |a_n^-| \leq |a_n| = 0$ cuando $n \to \infty$ (porque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge).
Ahora, el Teorema 3 implica la afirmación del Teorema de Riemann. $\square$

> Corolario. Una serie converge absolutamente $\Leftrightarrow$ converge incondicionalmente (todas las reordenaciones convergen y el resultado no depende del orden).

2b.5. Fórmula de la sumación de Abel

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números, de forma que $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \geq 1$, con $A_0 = 0$ y $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, con $B_0 = 0$. Entonces, $\sum_{n=q}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) A_q b_q - A_{p-1} b_p$.

2b.5.1. Criterio de Dirichlet

> Teorema (criterio de Dirichlet). Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales que cumplen que:
>
> 1. $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
> 2. $\{b_n\}$ es decreciente.
> 3. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
>
> son acotadas. De forma que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Demostración.

Sea $|A_n| \leq k, \forall n$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea n_0 tal que $b_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2k}$. Entonces si $n_0 \leq p \leq q \Rightarrow |\sum_{n=p}^{q} a_n b_n| = |\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1})A_q b_q - A_{p-1}b_p| \leq k\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + kb_q + kb_p = k[b_p - b_q + b_q + b_p] = akb_p < 2k\frac{\varepsilon}{2k} < \varepsilon$.

Por el criterio de Cauchy, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. □

> Corolario (criterio de Leibniz). Sea b_n una sucesión de decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$ converge.

Demostración.

Efectivamente, si $a_n = (-1)^{n-1} \Rightarrow A_n = \begin{cases} 1, n \text{ impar} \\ 0, n \text{ par} \end{cases}$ ambos acotados. □

Ejemplo 7. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, determinar su convergencia.

Aplicando el criterio de Leibniz, sea $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, de forma que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.