Tema 1. Matrices y Sistemas Lineales

1.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/936f8c4c-f480-4d55-a270-808e444ad8d4/H1_Matrices.pdf

1.1. Método de Gauss

El **método de Gauss** nos permite resolver sistemas de ecuaciones realizando una serie de operaciones con dichas ecuaciones, creando sistemas equivalentes:

1. Intercambio de ecuaciones.
2. Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.
3. Multiplicar una ecuación por un número $\neq 0$.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=7 \\ 2x_1-5x_2+2x_3=6 \end{cases} \iff_{(1)} \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=7 \\ 3x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1-5x_2+2x_3=6 \end{cases} \iff_{(2)}$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=7 \\ 8x_2-4x_3=-20 \\ 2x_1-5x_2+2x_3=6 \end{cases} \iff_{(2)} \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=7 \\ 8x_2-4x_3=-20 \\ -x_2=-8 \end{cases} \iff_{(3)} \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=7 \\ 2x_2-x_3=-5 \\ x_2=8 \end{cases} \iff_{(1)}$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=7 \\ x_2=8 \\ 2x_2-x_3=-5 \end{cases} \iff_{(1)(2)} \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=7 \\ x_2=8 \\ x_3=21 \end{cases} \iff_{(2)} \begin{cases} x_1-2x_2=-14 \\ x_2=8 \\ x_3=21 \end{cases} \iff_{(2)}$$

$$\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=8 \\ x_3=21 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss se consigue interpretar los sistemas de ecuaciones como matrices, adaptando las operaciones permitidas:

1. Intercambio de filas.
2. Sumar a una fila un múltiplo de otra.
3. Multiplicar una fila por un número $\neq 0$.

Ejemplo 2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 7 \\ 2 & -5 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \iff_{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 7 \\ 3 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & -5 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \iff_{(2)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 7\\ 0 & 8 & -4 & | & -20\\ 2 & -5 & 2 & | & 6\end{pmatrix} \Longleftrightarrow_{(2)} \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 7\\ 0 & 8 & -4 & | & -20\\ 0 & -1 & 0 & | & -8\end{pmatrix} \Longleftrightarrow_{(3)}$$
$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 7\\ 0 & 8 & -4 & | & -20\\ 0 & 1 & 0 & | & 8\end{pmatrix} \Longleftrightarrow_{(1)} \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 7\\ 0 & 1 & 0 & | & 8\\ 0 & 2 & -1 & | & -5\end{pmatrix} \Longleftrightarrow_{(1)(2)}$$
$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 7\\ 0 & 1 & 0 & | & 8\\ 0 & 0 & 1 & | & 21\end{pmatrix} \Longleftrightarrow_{(2)} \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & | & -14\\ 0 & 1 & 0 & | & 8\\ 0 & 0 & 1 & | & 21\end{pmatrix} \Longleftrightarrow_{(2)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & 2\\ 0 & 1 & 0 & | & 8\\ 0 & 0 & 1 & | & 21\end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} x_1 = 2\\ x_2 = 8\\ x_3 = 21\end{cases}$$

1.2. Matriz inversa

Definición. La ***matriz inversa*** *de A es una matriz X tal que $AX = I$, donde I representa la matriz identidad.*

Notación. La matriz inversa de A suele representarse como A^{-1}.

Ejemplo 3.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 5 & -3\\ -3 & 2 & -4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix}x_1 + 3x_2 - 2x_3 & y_1 + 3y_2 - 2y_3 & z_1 + 3z_2 - 2z_3\\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 & 2y_1 + 5y_2 - 3y_3 & 2z_1 + 5z_2 - 3z_3\\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 & -3y_1 + 2y_2 - 4y_3 & -3z_1 + 2z_2 - 4z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & | & -2 & 1 & 0\\ 0 & 11 & -10 & | & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & | & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & -19 & 11 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & | & -38 & 22 & 2\\ 0 & 1 & 0 & | & -17 & 10 & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & -19 & 11 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & 14 & -8 & -1\\ 0 & 1 & 0 & | & -17 & 10 & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & -19 & 11 & 1\end{pmatrix}$$

Luego, $A^{-1} = \begin{pmatrix}14 & -8 & -1\\ -17 & 10 & 1\\ -19 & 11 & 1\end{pmatrix}$.