Escuela Politécnica Superior

UAM Universidad Autónoma de Madrid

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INFORMÁTICA

Curso : 2022/2023

1er curso Grado en Ingeniería Informática

Tema 2c

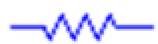
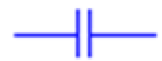
Capítulo 2c: Autoinductancia & Circuitos RL

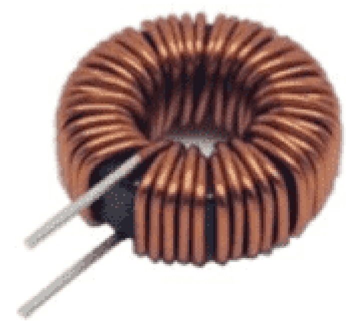
2c.1 Definición L

2c.2 Conexión y desconexión de una inductancia. Circuitos RL

Recordamos…

En este curso vamos a estudiar circuitos en corriente continua con los siguientes elementos:

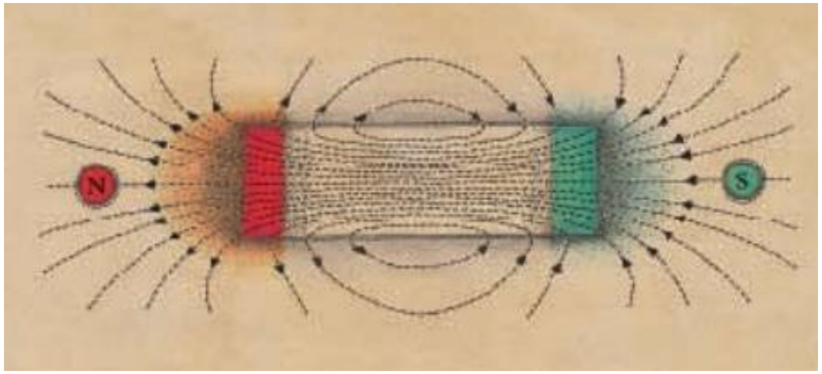
Elemento	**Resistor**	**Condensador**	**Inductancia**
Magnitud	Resistencia	Capacidad	Inducción
Unidad	Ohmio (Ω)	Faradio (F)	Henrio (H)
Símbolo			
Relación circuital	$V = I \cdot R$	$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$



Estado transitorio y estado estacionario

Introducción: Electricidad y Magnetismo

- Hemos estudiado cargas eléctricas en reposo y en movimiento
- En este último caso se originan una serie de fenómenos físicos que son los que estudia el magnetismo. Por consiguiente, ambos tipos de fenómenos -los eléctricos y los magnéticos- están íntimamente relacionados y se estudian de manera conjunta a través de lo que se denomina teoría electromagnética.



Introducción: Electricidad y Magnetismo

Los campos magnéticos son producidos por cargas en movimiento, es decir, por corrientes eléctricas (aunque también se pueden producir campos magnéticos con imanes permanentes).
Así pues, el campo eléctrico existe siempre que haya cargas eléctricas, mientras que sólo hay campo magnético cuando esas cargas están en movimiento, es decir, cuando hay un flujo de corriente eléctrica

La relación de los campos eléctricos y magnéticos con las fuentes de carga y de corriente que los crean viene determinada por unas relaciones conocidas como ecuaciones de Maxwell, que sintetizan diversas leyes experimentales descubiertas por otros científicos.

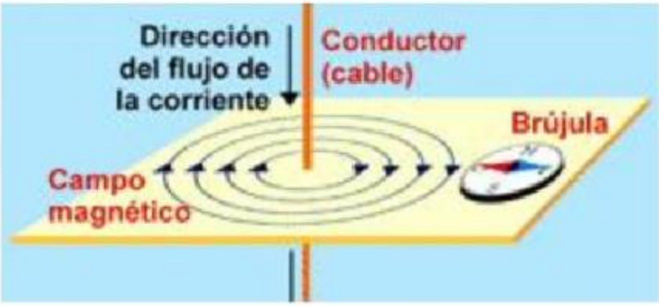
Estas ecuaciones fueron expuestas por James Clerk Maxwell en 1873 en su obra *Electricity and Magnetism* y describen todos los fenómenos electromagnéticos, siendo válidas para todo tipo de medios y frecuencias, desde 0 Hz hasta las más altas.

Introducción a la bobina

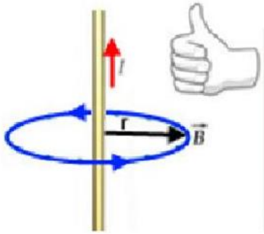
Una ***bobina*** es un elemento pasivo capaz de almacenar y entregar cantidades finitas de **energía en forma de campo magnético**. También recibe el nombre de inductor.

A diferencia de una fuente ideal, las bobinas no pueden suministrar una cantidad ilimitada de energía.

Hans Christian **Oesterd** (1777-1851) acercó una brújula a un cable por el cual circulaba una corriente y demostró que un conductor con corriente produce un campo magnético El movimiento de la aguja de la brújula se veía afectado en presencia de un conductor con corriente.



Ampere (1775-1836) demostró que el campo magnético B está relacionado linealmente con la corriente I que lo produce.



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

μ_0 es la permeabilidad del aire

$\mu_0 = 4\pi x 10^{-7} H/m$

Michael Faraday (1791-1867) demostró que un campo magnético variable puede inducir un voltaje en un circuito cercano. El voltaje es proporcional a la rapidez de cambio de la corriente con respecto al tiempo

$$\boxed{\epsilon = -L\frac{dI}{dt}}$$

L= Inductancia

Ley de inducción de Faraday (conteniendo la Ley de Lenz)

- Ley completamente general: es una de las ecuaciones de Maxwell

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Ley de Faraday: la fuerza electromotriz inducida es igual a la variación del flujo magnético en el tiempo.

Ley de Lenz (signo negativo en la Ley de Faraday):

La f.e.m. inducida siempre tiene un *sentido* tal *que su efecto (la corriente inducida) se opone a la causa que la genera*.

¿Qué es el flujo magnético Φm? Viene dado por la siguiente expresión:

$$\phi_{\mathrm{m}} = \int_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA = \int_S B_n\, dA$$

*Φm es el resultado d*el **producto escalar** de dos vectores, el vector campo magnético **B** y el vector que nos define la **superficie** (un vector cuyo módulo es el valor de la superficie y la dirección perpendicular a la misma, saliente de ella).

Ley de inducción de Faraday

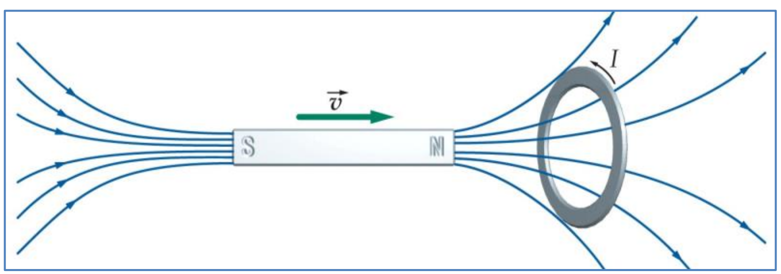
¿Cómo podemos variar el flujo magnético? En otras palabras para que aparezca una fuerza electromotriz (fem) inducida **debe variar el flujo del campo magnético a través de la superficie** delimitada por el conductor. De la definición de flujo se deduce que hay tres formas de variar el flujo del campo magnético: variar el módulo del campo (1), la superficie que lo atraviesa (2) o el ángulo que forman ambos (3).

$$\phi_{\mathrm{m}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA = \int_S B_n\, dA$$

$$\boxed{\epsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$$

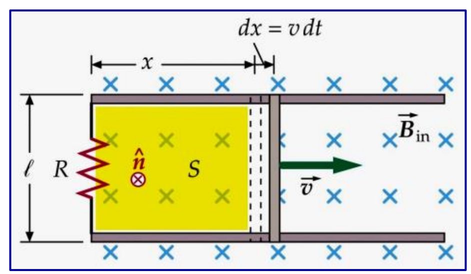
EJEMPLOS

(1) variar el módulo del campo



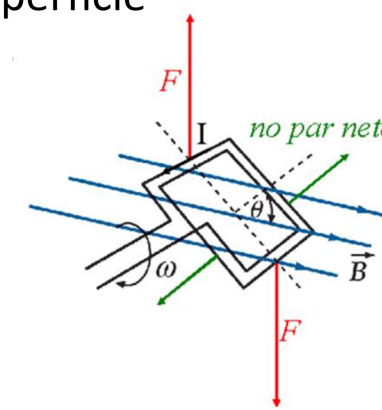
Moviendo un imán con respecto a una espira.

(2) variar la superficie que atraviesa el campo



Circuitos con área variable. Ejemplo: Barra que desliza al interior de una zona con campo magnético

(3) variar el ángulo que forman el campo y la superficie



Girando una espira en un B uniforme.

Una corriente que fluye a través de un cable crea un campo magnético alrededor. El flujo magnético depende de la corriente y cuando la corriente varía, el flujo magnético también varía con ella. Cuando el flujo magnético varía, se desarrolla un fuerza electromotriz inducida (fem, es decir d.d.p o ε) a través del conductor de acuerdo con la ley de Faraday.

$$\boxed{\epsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$$

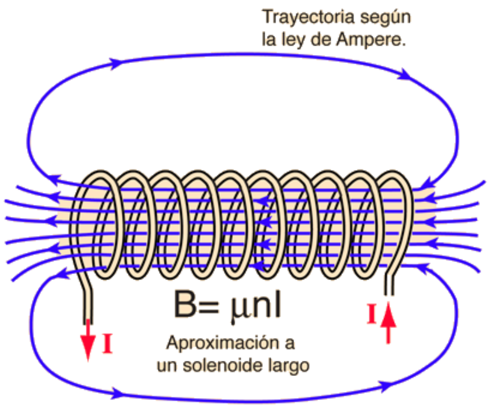
Se puede demostrar que el flujo magnético es proporcional a la corriente. La constante de proporcionalidad es L (INDUCTANCIA)

$$\phi = LI$$

Esta **fem (ε)** está en la dirección opuesta a la dirección de la corriente, tal como postula la **Ley de Lenz**.

Por tanto el voltaje inducido se puede escribir como función de la variación de la corriente con el tiempo

$$\boxed{\epsilon = -L\frac{dI}{dt}}$$

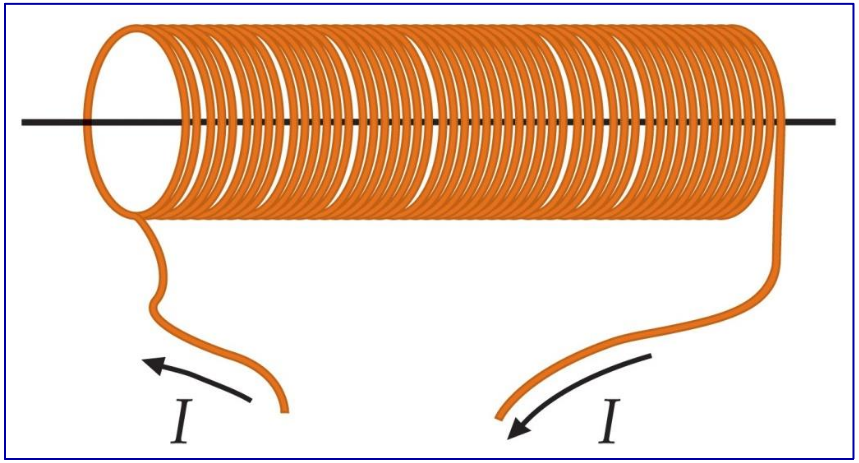


El campo magnético en un solenoide largo se concentra en su centro, en un campo casi uniforme. El campo exterior es débil y divergente.

donde ε se mide en voltios, I es la corriente en Amperios y L es es la inductancia cuyas unidades son Henrios

Coeficiente *L* de un solenoide

Bobina circular (solenoide): vueltas *N*, radio *r*, sección *A*, longitud *l*



$$\Phi = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{A}$$

$$\Phi = N B A$$

$$\Phi = N(\mu_0 n I)\pi r^2$$

$$\rightarrow \quad \boxed{L = \mu_0 n^2 l \pi r^2 = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r^2}$$

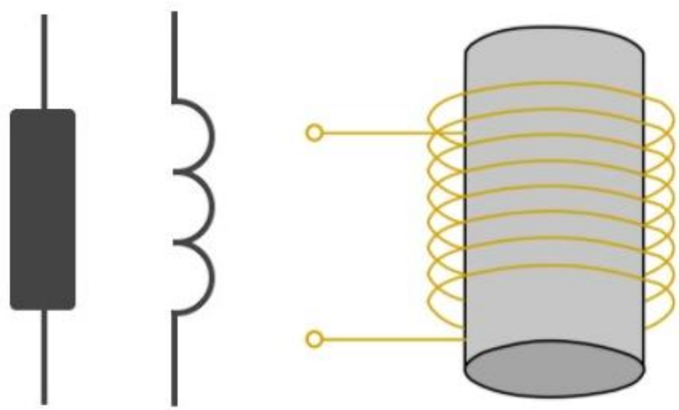
L: **Coeficiente de autoinductancia** de un solenoide.

CIRCUITOS RL

Los circuitos RL son circuitos que contienen una resistencia y una bobina en serie.

Si por un inductor circula una corriente que cambia con el tiempo se produce en él una caída de potencial, y esta caída de potencial dentro del inductor depende de cuan rápido cambia la corriente. Este fenómeno nos lleva a pensar que la presencia de un inductor en un circuito eléctrico conduce a un comportamiento diferente de la corriente con respecto al tiempo en comparación con los circuitos en los que solo existen resistores.

Símbolo de L en un circuito



Energía magnética almacenada en un inductor

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

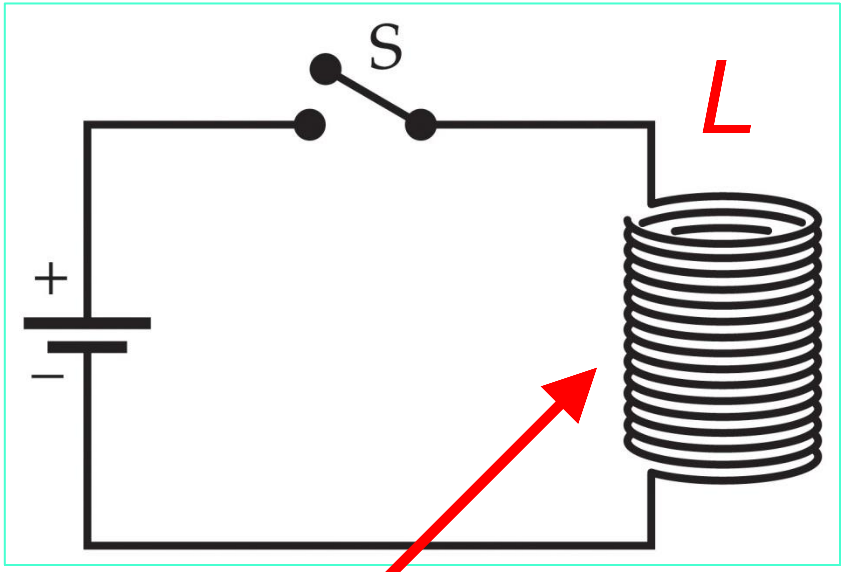
Aplicaciones Circuitos RL

- electroimanes
- sistema de encendido de un automóvil: mediante el circuito RL, se logra que la bobina de dicho circuito proporcione una subida repentina de tensión tan grande que provoca una chispa en la bujía que esta conectada en paralelo a dicha bobina ya que el inductor no puede cambiar la corriente muy rápidamente

Circuitos con autoinductancia *L*

Circuito con elementos con autoinductancia *L*: comportamientos transitorios en la *conexión* y *desconexión*:

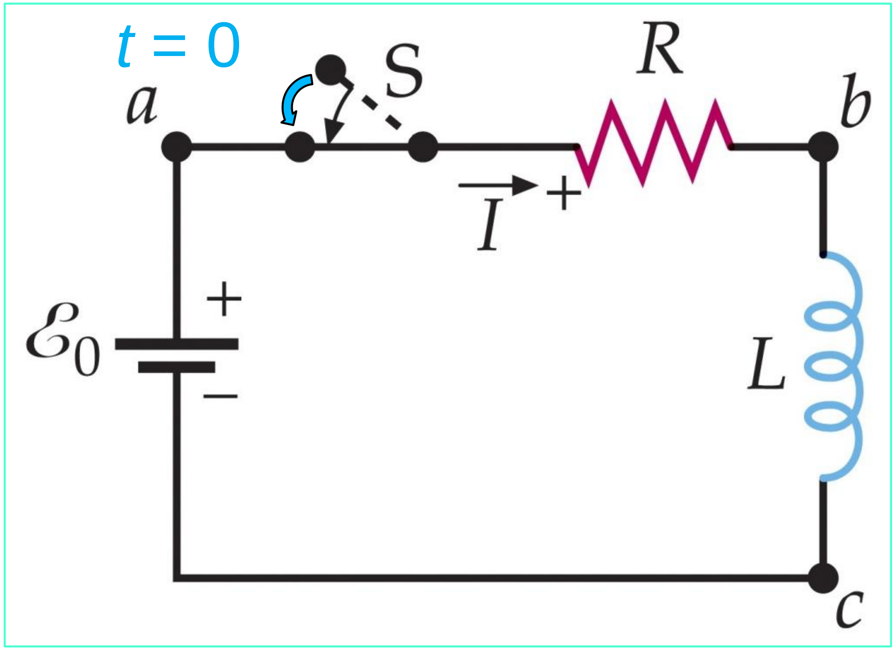
- Al *variar* la corriente *I*, varía ***B*** y el flujo magnético Φ_m y por lo tanto, se *induce* una f.e.m. ε *adicional* en el circuito.
- De acuerdo a la **Ley de Lenz**, la f.e.m. inducida se opone siempre a la causa que origina la variación del flujo Φ_m.
- Problema: ¿Cómo evoluciona *I* con *t*: *I*(*t*) ?



$$\epsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\epsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

Conexión de una autoinductancia *L*



- Proceso de **conexión** en circuito *RL*:
    - *Corriente inicial*: 0
    - En $t = 0$ se *cierra* el circuito y *comienza la conexión.*
- Ley de Kirchhoff

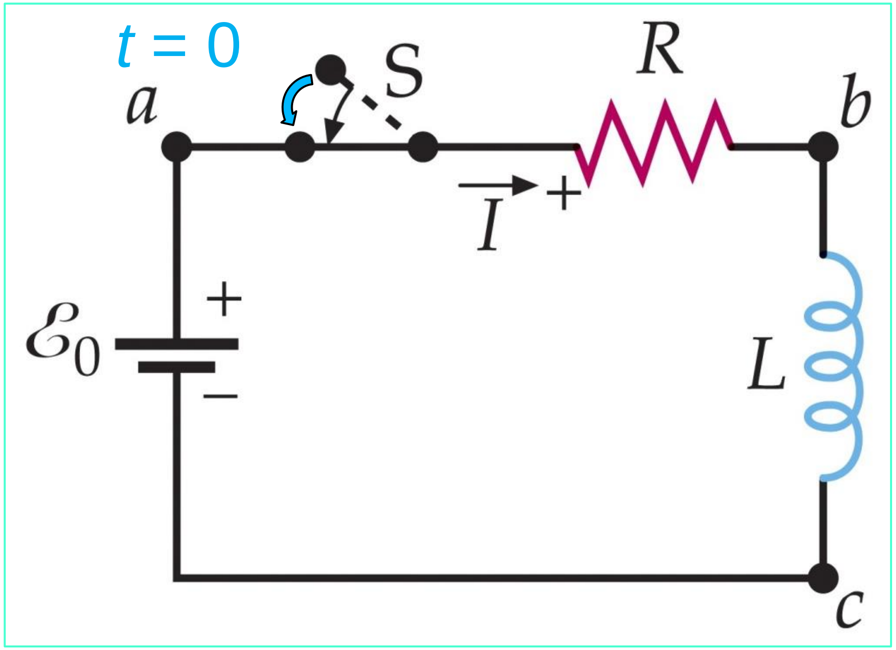
$$-\epsilon_0 + V_R - V_L = 0$$

$$-\epsilon_0 + IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{c} I + \dfrac{L}{R}\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{\epsilon_0}{R} \\ I(0) = 0 \end{array}}$$

Ecuación diferencial
+ condición inicial

Conexión de una autoinductancia *L*

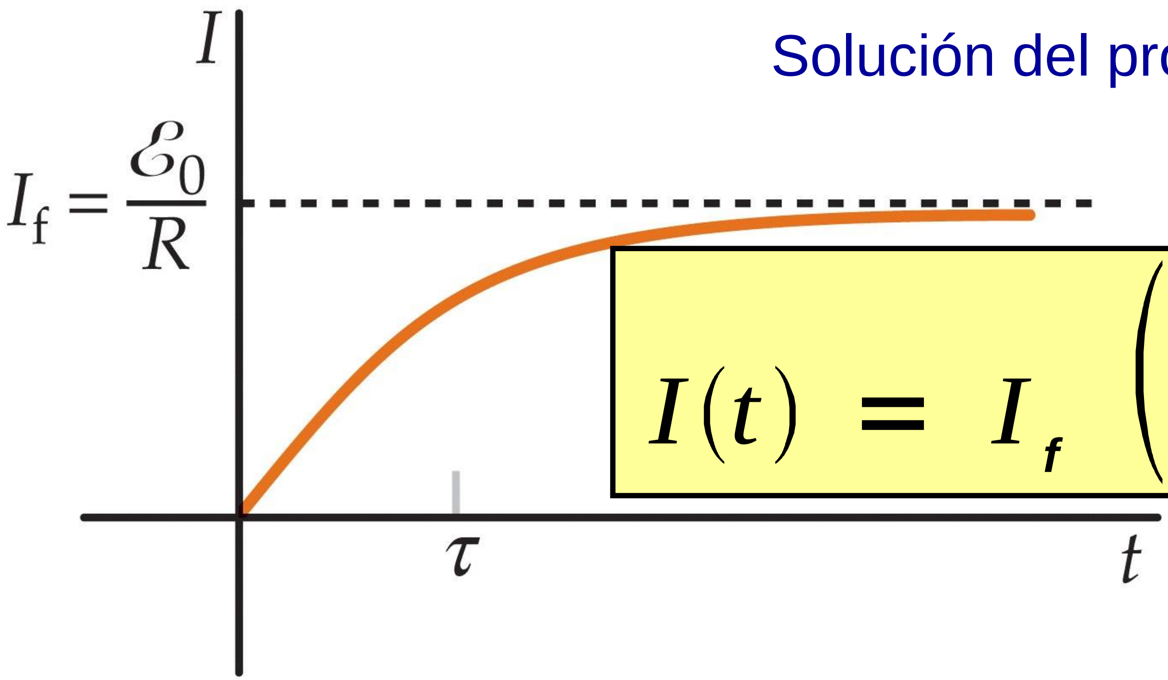


$$\boxed{I + \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = \frac{\epsilon_0}{R} \qquad I(0) = 0}$$

- Ecuación diferencial *lineal*, con *coeficientes constantes* e *inhomogénea*.
  - **Solución que cumple la condición inicial** (con $I_f = \varepsilon_0 / R$):

$$\boxed{I(t) = I_f\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

Conexión de una autoinductancia *L*



Solución del problema (ec. dif + c. i.):

$$I(t) = I_f\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$t_o = 0 \rightarrow I_o = 0;$$

$$t_{final} \rightarrow I_f = \frac{V}{R}$$

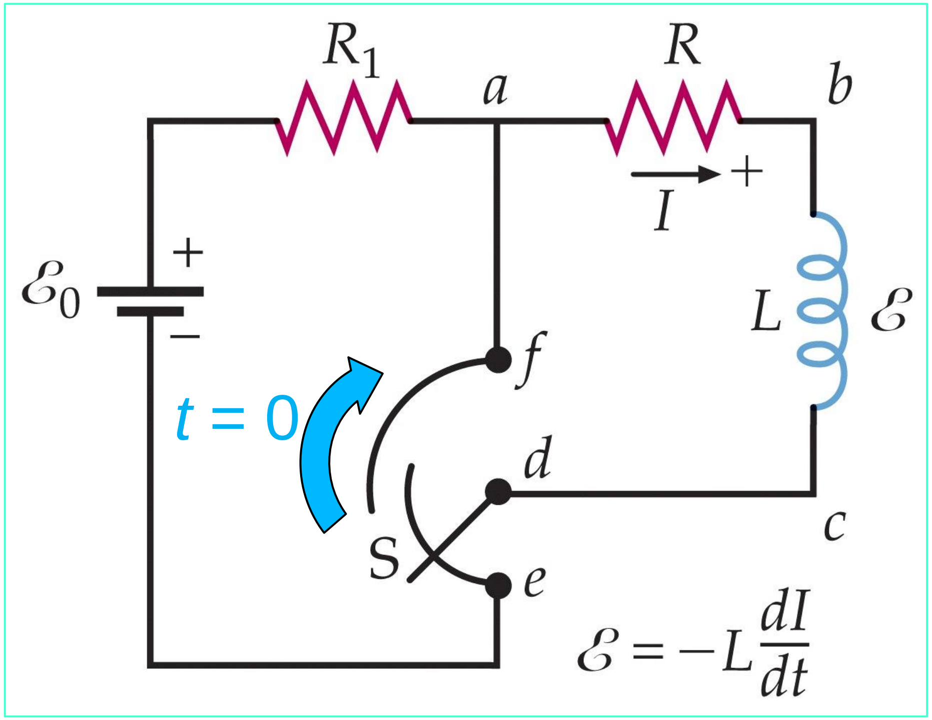
$$\tau = \frac{L}{R}$$

Proceso de conexión: exponencial creciente con constante de tiempo τ

Constante de tiempo τ: tiempo característico de establecimiento de corriente en un circuito *RL* :

- tiempo para el que $I\,(\tau) = (1\text{-}\ e^{-1})\ I_f \approx 0.63\ I_f$

Desconexión de una autoinductancia *L*



- Proceso de **desconexión** en circuito *RL*:
  - *Corriente inicial* : I_0
  - En t = 0 se *desconecta* la fuente y *comienza la desconexión* a través de *R*.
- Ley de Kirchhoff:

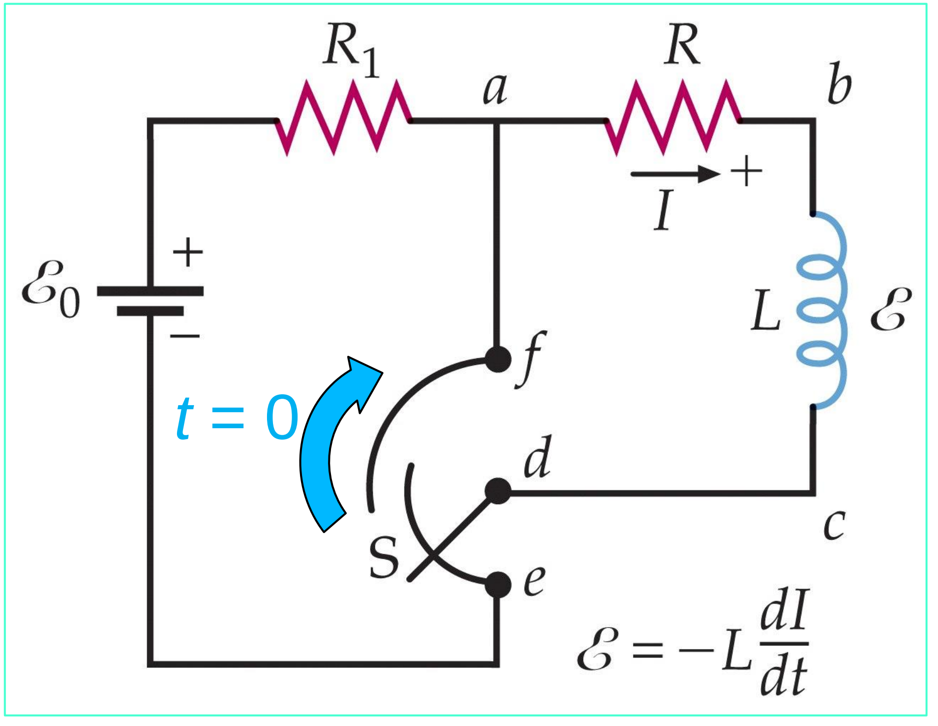
$$V_R - V_L = 0$$

$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L} I = 0 \\ I(0) = I_0 \end{array}}$$

Ecuación diferencial
+ condición inicial

Desconexión de una autoinductancia *L*



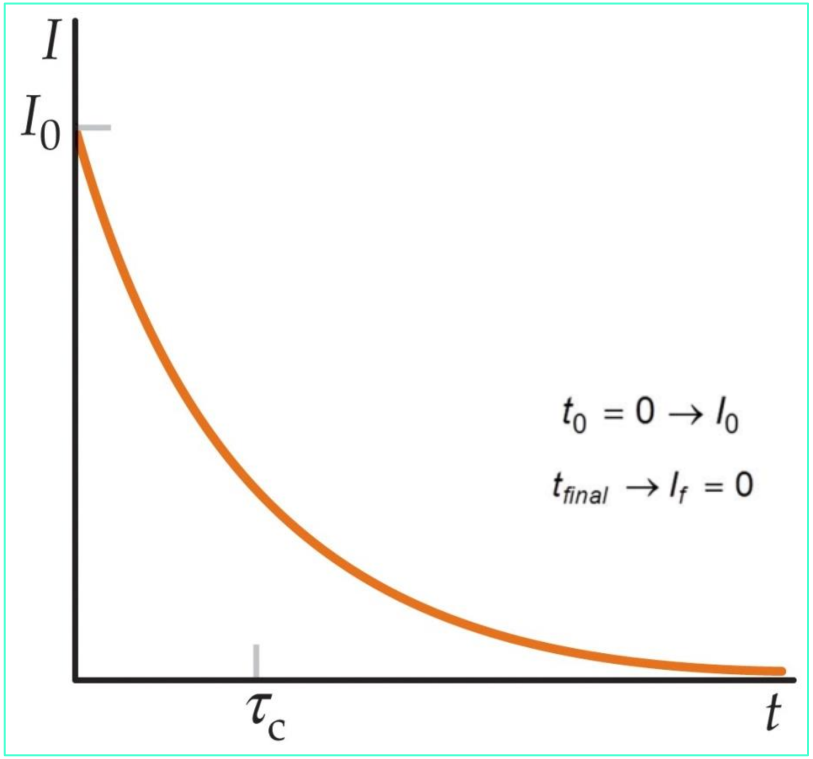
$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0$$

$$I(0) = I_0$$

- Ecuación diferencial *lineal*, con *coeficientes constantes* y homogénea. **Solución que cumple la condición inicial**:

$$I(t) = I_0 \, e^{-\frac{R}{L} t}$$

Desconexión de una autoinductancia *L*



Solución del problema (ec. dif + c. i.):

$$I(t) = I_0 \, e^{-\frac{R}{L}t}$$

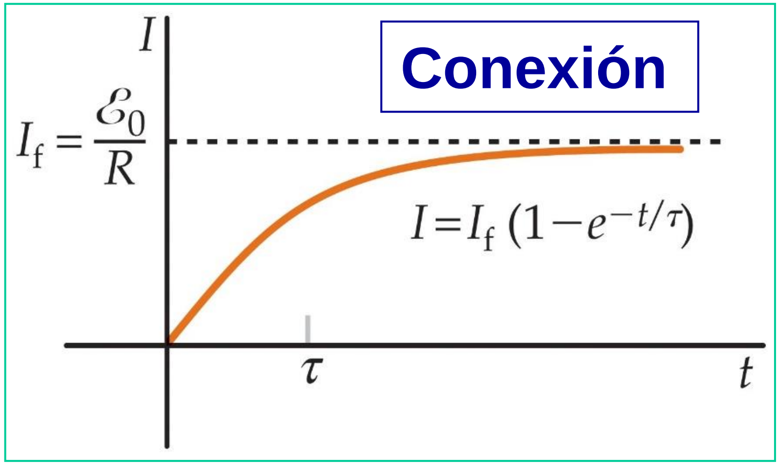
Desconexión de una autoinductancia: decaimiento exponencial con constante de tiempo τ

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Constante de tiempo τ: tiempo *característico* de conexión y desconexión de un circuito *RL*:

- tiempo para el que $I = e^{-1} I_0 \approx 0.37\, I_0$

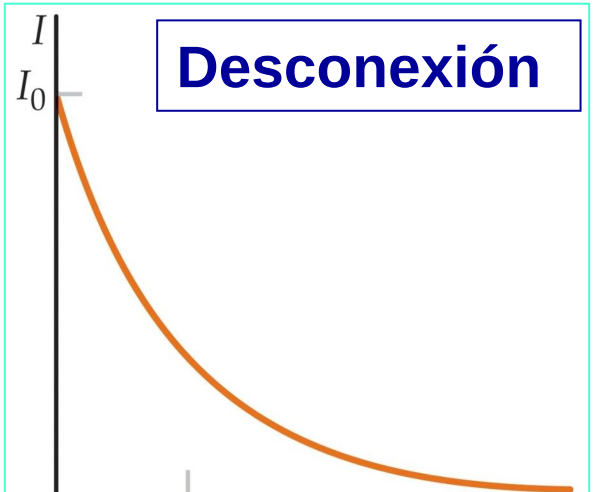
Resumen: Conexión y desconexión de una autoinductancia



$$I(t) = I_f\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

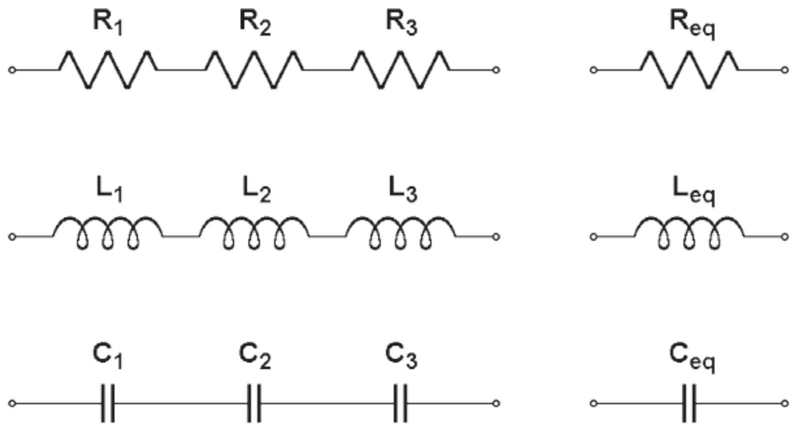
Conexión y **desconexión** de una **autoinductancia**: procesos **exponenciales** con **constante de tiempo τ**

$$\tau = \frac{L}{R}$$



$$I(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

Asociaciones en serie

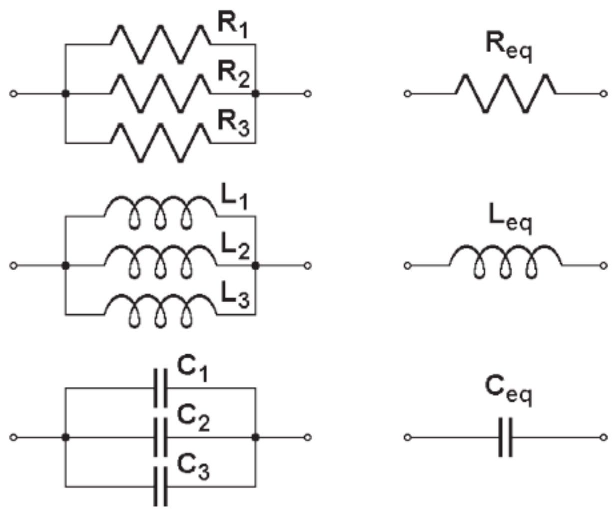


$$R_{eq} = \sum_k R_k$$

$$L_{eq} = \sum_k L_k$$

$$C_{eq} = \left(\sum_k \frac{1}{C_k}\right)^{-1}$$

Asociaciones en paralelo



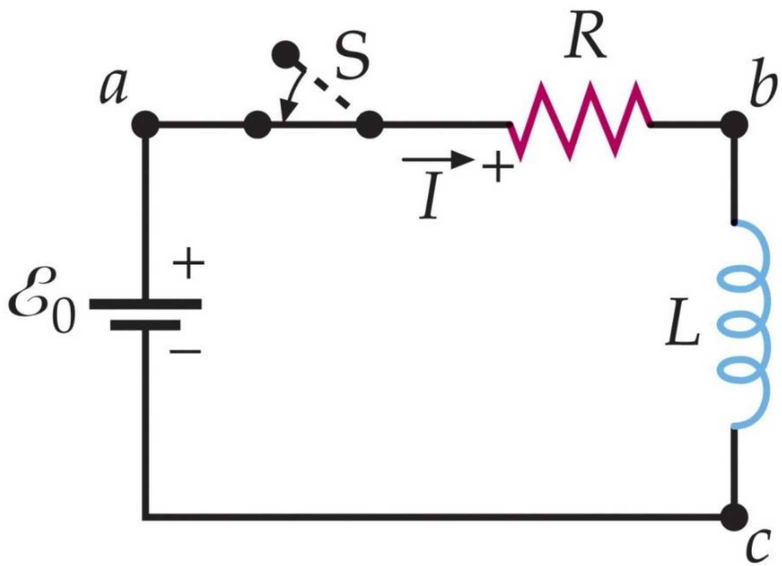
$$R_{eq} = \left(\sum_k \frac{1}{R_k}\right)^{-1}$$

$$L_{eq} = \left(\sum_k \frac{1}{L_k}\right)^{-1}$$

$$C_{eq} = \sum_k C_k$$

Ejemplo 1

Una bobina de autoinducción 5 mH y una resistencia de 15,0 Ω se sitúa entre los terminales de una batería de 12 V de resistencia interna despreciable. (*a*) ¿Cuál es la corriente final? (*b*) ¿Cuál es la constante de tiempo? (*c*) ¿Cuánto tiempo (medido en constantes de tiempo) debe transcurrir para que la corriente alcance el 99% de su valor final?

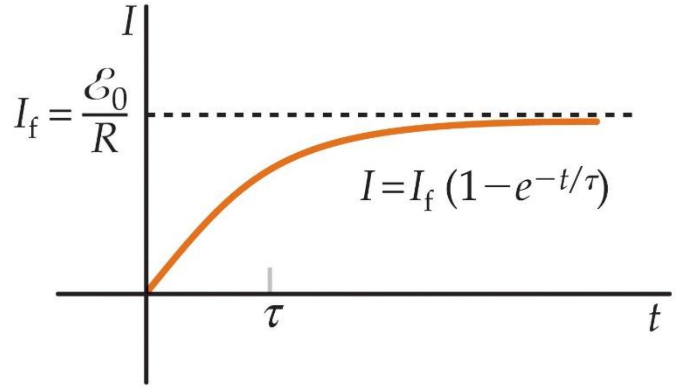


Solución

a) **Nos preguntan por la corriente final al situar la bobina en el circuito: ecuación de conexión**

$$\boxed{I(t) = I_f\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

corriente final → cuando ya no depende del tiempo I = I(t)
o dicho de otra forma cuando dI/dt =0



Aplicamos Kirchhoff

$$\mathcal{E}_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\mathcal{E}_0 - I_f R - 0 = 0$$

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{12{,}0\ \text{V}}{15{,}0\ \Omega} = \boxed{0{,}800\ \text{A}}$$

b) constante de tiempo

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5{,}00 \times 10^{-3}\,\text{H}}{15{,}0\ \Omega} = \boxed{333\ \mu\text{s}}$$

c) tiempo para que $I = 0{,}99 \cdot I_{final}$

$$I = I_f(1 - e^{-t/\tau}),$$

así

$$e^{-t/\tau} = \left(1 - \frac{I}{I_f}\right)$$

tomando Logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{I}{I_f}\right)$$

Entonces,

$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{I}{I_f}\right) = -\tau \ln(1 - 0{,}990)$$

$$= -\tau \ln(0{,}010) = \tau \ln 100 = \boxed{4{,}61\tau}$$

Ejemplo circuitos LR. *Aquí como sucedía en los circuitos con condensadores hay que tener muy claro qué sucede nada más cerrar/abrir interruptores (transitorios) y qué sucede pasado un tiempo largo (estacionarios)*

Determinar las corrientes I_1, I_2 e I_3

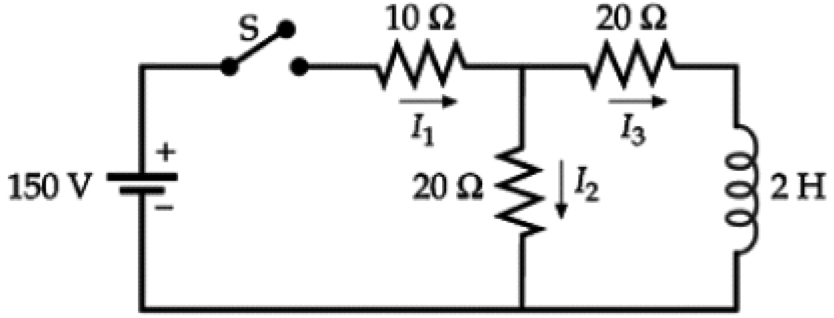
a) inmediatamente después de cerrar S

b) al cabo de un largo tiempo después de cerrar S

Pasado ese largo tiempo se abre el interruptor S de nuevo. Calcular de nuevo las tres corrientes

c) inmediatamente después de abrir S

d) un largo tiempo después de abir S



IMPORTANTE ENTENDER LOS CONCEPTOS

a) Lo importante es entender que la **<u>corriente en una bobina no puede cambiar de forma abrupta.</u>**

Por ese motivo la corriente en la bobina debe ser cero nada más cerrar el interruptor porque era cero antes!!

a). En $t=0$ después de cerrar S la I por el inductor todavía es cero,

Así $I_3 = 0 \longrightarrow I_1 = I_2$

Aplicando Kirchoff $\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$. $(I_1 = I_2 = I)$

$$\longrightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{150}{10+20} = 5 \text{ Amp}$$

b) Cuando pasa un **<u>largo tiempo</u>**, la corriente ha aumentado su valor desde 0 hasta alcanzar su valor final (estado estacionario). Ahora lo que sucede es que la corriente no varía con el tiempo (dI/dt =0). Por lo tanto, ahora no se produce una caída de potencial en la bobina→ **<u>la bobina actúa como un cortocircuito, es decir un cable sin resistencia</u>**

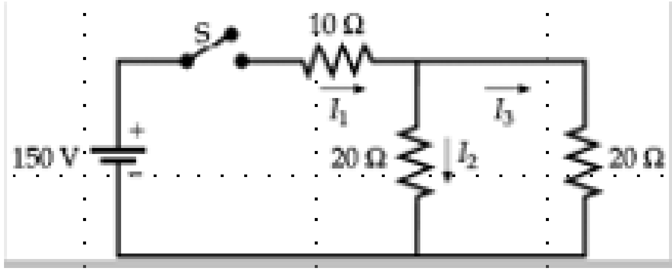
calculamos la resistencia equivalente

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$R_{eq} = 10\ \Omega$$

$$I_1 = \frac{150\ \text{V}}{10\ \Omega + 10\ \Omega} = 7.5\ \text{A}$$

$$I_2 = I_3 = 3.75\ \text{A}$$



c) De nuevo, recordar que la **<u>corriente en una bobina no puede cambiar de forma abrupta.</u>**

Por ese motivo nada más abrir el interruptor la corriente en la bobina debe tener el mismo valor que en el apartado anterior (que en el instante anterior a la apertura de S)

$$I_1 = 0$$

$$I_3 = 3.75 \text{ A}$$

$$I_2 = -I_3 = -3.75 \text{ A}$$

d) Pasado un largo período de tiempo, alcanzamos el estado estacionario. En este caso recordamos la expresión de la desconexión de una bobina, donde la **<u>corriente final en la bobina es cero</u>**

$$I_1 = I_2 = I_3 = 0$$