SOLUCIONES:

1) Sean $u, v \in \mathbb{R}^n, n \geq 2,$ dos vectores. Demuestra que u y v son ortogonales si y sólo si $\|u+\lambda v\|^2 \geq \|u\|^2$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

SOL.: Por la definición de norma y las propiedades del producto escalar se tiene

$$\|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v\ , u+\lambda v\ \rangle = \langle u,u\rangle + 2\lambda\langle u,v\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle = \|u\|^2 + 2\lambda\langle u,v\rangle + \lambda^2\|v\|^2 \quad (1)$$

Supondremos que tanto u como v no son el vector cero, ya que en caso contrario la ortogonalidad no tiene sentido.

Si consideramos primero que u, v son ortogonales ($\langle u,v\rangle = 0$), entonces la identidad (1) nos da

$$\|u+\lambda v\|^2 = \|u\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2,$$

puesto que $\lambda^2\|v\|^2 \geq 0$. Recíprocamente, si $\|u+\lambda v\|^2 \geq \|u\|^2$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, eligiendo $\lambda = -\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ (que está bien definido porque hemos asumido $\|v\| \neq 0$) deducimos de (1)

$$\|u\|^2 \leq \|u+\lambda v\|^2 = \|u\|^2 - 2\frac{(\langle u,v\rangle)^2}{\|v\|^2} + \frac{(\langle u,v\rangle)^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{(\langle u,v\rangle)^2}{\|v\|^2}.$$

Despejando la desigualdad queda $(\langle u,v\rangle)^2 \leq 0$, es decir $\langle u,v\rangle = 0$ que nos dice que u y v son ortogonales.

2) Consideramos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$A := \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; y \in \mathbb{Q}\}.$$

(a) Calcula el interior y la frontera de A.

(b) Decide de manera razonada si A es compacto.

(*Recuerda que en ambos casos debes razonar las respuestas*)

SOL.: Responderemos a todo de forma simultánea. Para ello definimos el conjunto

$$H := \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$$

y probaremos que $\partial A = H$. Esto nos dirá que el interior de A, denotado Int(A), es vacío, ya que por definición el interior es disjunto de la frontera. Es decir, Int$(A) \subset A \subset H = \partial A \implies$ Int$(A) = \emptyset$.

Por otro lado, A no es cerrado ya que $\partial A \subset \overline{A}$ y en nuestro caso $H = \partial A$ no está contenido en A, luego $A \neq \overline{A}$. Esto nos dice que A no es compacto.

Nos falta por demostrar que $\partial A = H$. Probaremos primero $H \subset \partial A$: dado $(x_0, y_0) \in H$ y $r > 0$ queremos ver que $D_r(x_0,y_0) = \{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$ contiene puntos tanto de A como de A^c. Para ello nos fijamos en la intersección de intervalos $(y_0 - r, y_0 + r)\bigcap(0,1)$, que es un intervalo abierto no vacío. Elegimos ahora dos puntos de este intervalo, un racional y_1 y un irracional y_2. Formamos los vectores (x_0, y_1) y (x_0, y_2). Ambos pertenecen a $D_r(x_0, y_0)$ porque

$$\|(x_0,y_1) - (x_0,y_0)\| = |y_1 - y_0| < r \quad \text{y} \quad \|(x_0,y_2) - (x_0,y_0)\| = |y_2 - y_0| < r.$$

Además, $(x_0, y_1) \in A$, porque $0 \leq x_0, y_1 \leq 1$, $y_1 \in \mathbb{Q}$, mientras que $(x_0, y_2) \notin A$ porque $y_2 \notin \mathbb{Q}$.

Probamos ahora el otro contenido, $\partial A \subset H$, o mejor, el contrarecíproco. Si $(x, y) \notin H$ entonces, o bien x o bien y (o los dos) no está en el intervalo $[0, 1]$. Supongamos que es x el que no está. Existe un $r > 0$ de forma que $(x - r, x + r)$ no toca a $[0, 1]$. Veamos que entonces $D_r(x, y)$ no corta a A (ni siquiera a H) y por tanto $(x, y) \notin \partial A$. Eso se debe a que si $(x', y') \in D_r(x, y)$ entonces $|x' - x| < r$ y por tanto x' no puede estar en $[0, 1]$, luego $(x, y) \notin A$.

3) Para cada una de las siguientes afirmaciones, da una demostración si la consideras cierta o encuentra un ejemplo que lo incumpla en el caso de que sea falsa:

(a) La unión de dos compactos es siempre un compacto.

(b) Dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$, se cumple $\partial(A \bigcup B) = \partial A \bigcup \partial B$ (i.e. la frontera de la unión coincide con la unión de las fronteras)

SOL.: (a) La afirmación es cierta porque

i) La unión de dos cerrados es cerrado (visto en clase) y

ii) La unión de dos acotados es acotado (ya que si U y V son acotados, existen $R_1, R_2 > 0$ tales que $\|x\| \leq R_1$ si $x \in U$ y $\|x\| \leq R_2$ si $x \in V$. Por tanto,$\|x\| \leq \max\{R_1, R_2\}$ si $x \in U \bigcup V$ y esto nos dice que $U \bigcup V$ está acotado.)

(b) La afirmación aquí no es cierta en general. Basta con encontar un conjunto que contenga parte de la frontera del otro en su interior. Por ejemplo, si $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 2\}$ se tiene $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ y $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 2\}$, que son conjuntos disjuntos. Por otro lado, como $A \subset B$ obtenemos

$$\partial(A \bigcup B) = \partial B \neq \partial A \bigcup \partial B.$$

4) Describe las curvas de nivel que se indican para las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = \cos(x - y^2), \quad c = 0.$

(b) $g(x, y) = \sqrt[3]{25 - x^2 - y^2}, \quad c = 0, 1, 2.$

SOL.:

(a) Por definición, la curva de nivel de la función f de altura $c = 0$ es

$$N_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x - y^2) = 0\}.$$

Por otro lado, sabemos que $\cos w = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ de forma que $w = (2k+1)\pi/2$ (múltiplos impares de $\pi/2$). Esto nos da como resultado

$$N_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 + (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Es la unión por tanto de todas las parábolas trasladadas de $x = y^2$, con eje de simetría en el eje X y vértices en los puntos $((2k + 1)\pi/2,\ 0), \quad k \in \mathbb{Z}$ (ver Figura 1 más abajo).

(b) En este caso las curvas de nivel de g de altura $c = 0, 1, 2$ vienen dadas por

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 25 - x^2 - y^2 = c^3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25 - c^3\}.$$

Es decir, N_0, N_1, N_2 representan, respectivamente, las circunferencias de radio $5, \sqrt{24}$ y $\sqrt{17}$ centradas en el origen (ver Figura 1 más abajo).

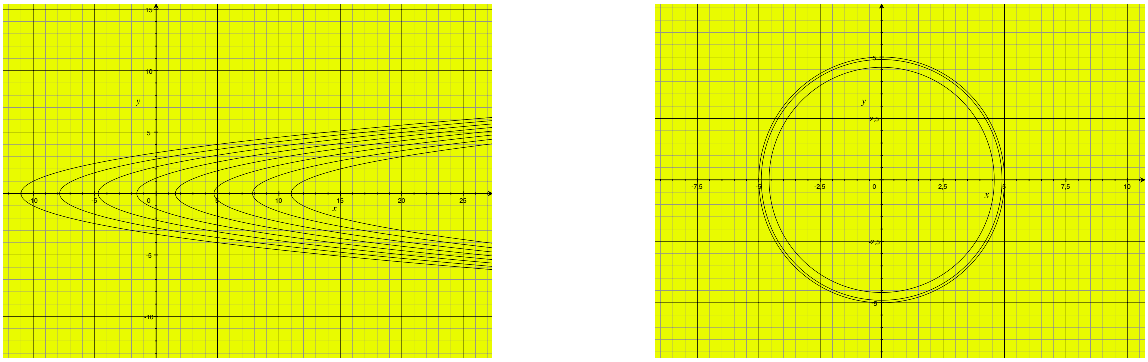

Figura 1: Curvas de nivel de f a la izquierda y de g a la derecha

5) Determina si existen los siguientes límites:

(a): $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$; (b): $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \operatorname{sen}^2 y}{(x-1)^4+y^2}$.

SOL.:

(a) El límite existe y vale 0 ya que

$$\left|(x+y)^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})\right| \leq \left|(x+y)^3\right| \leq (2\|(x,y)\|)^3 = 8(\|(x,y)\|)^3.$$

Así, dado $\epsilon > 0$, si elegimos δ de forma que $8\delta^3 = \epsilon$ (es decir, $\delta = \frac{\sqrt[3]{\epsilon}}{2}$) se tiene que

$$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \implies \left|(x+y)^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - 0\right| < 8\delta^3 = \epsilon.$$

(b) En este caso, el límite no existe, ya que si $F(x,y) = \frac{x \operatorname{sen}^2 y}{(x-1)^4+y^2}$, las aproximaciones al punto $(1,0)$ a lo largo de la recta $y=0$ nos dan el valor $F(x,0)=0$ mientras que a lo largo de la recta $x=1$ nos dan

$$F(1,y) = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y^2}, \quad \text{cuyo límite cuando} \quad y \to 0 \quad \text{da } 1.$$

Con más precisión, las sucesiones $\{(1+\frac{1}{n},0)\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ y $\{(1,\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ están en el dominio de F y convergen ambas a $(1,0)$, pero sus imágenes por F dan sucesiones con límites distintos:

$$0 = \lim_{n\to\infty} F(1+\frac{1}{n},0) \neq \lim_{n\to\infty} F(1,\frac{1}{n}) = 1.$$