# ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 1: Matrices y Sistemas Lineales

**1.** Siendo $A$ y $B$ las matrices dadas a continuación, calcular los productos $AB$ y $BA$ cuando sea posible y comparar los resultados. 2

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 50 \\ 1 & 60 \\ 1 & 86 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

**2.** ¿Es cierta para matrices cuadradas la relación $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Probar la relación, o suministrar un contraejemplo. Determinar que sucede en el caso especial de las matrices $2 \times 2$ de la forma $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$. ¿Es el producto de tales matrices conmutativo?

**3.** Comprobar que el producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sean ninguno de los factores, hallando $AB$, donde $A$ y $B$ son las matrices dadas a continuación:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.** Hallar las matrices $2 \times 2$ reales tales que su cuadrado es $-I$.

**5.** Calcular $CD$ y $DC$, donde

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

¿Cuáles son las matrices diagonales que conmutan con todas las demás?

Demostrar que una matriz cuadrada que no es diagonal no conmuta con todas las demás. Deducir de este ejercicio y del anterior la forma de las matrices que conmutan con todas las demás.

**6.** ¿Es cierto que $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$ ?

**7.** Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de eliminación de Gauss.

$$\text{i)}\quad \left.\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{array}\right\} \qquad \text{ii)}\quad \left.\begin{array}{cl} x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{iii)}\quad \left.\begin{array}{cl} x + y + z + t & = 0 \\ y - z & = 5 \\ x + z + 2t & = 1 \\ x + 2y & = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{iv)}\quad \left.\begin{array}{cl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{v)}\quad \left.\begin{array}{clcc} 2x_1 - 4x_2 & = 10 & | & -8 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 & = -4 & | & -2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 & = 4 & | & 9 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 & = -11 & | & -15 \end{array}\right\}$$

$$\text{vi)}\quad \left.\begin{array}{cl} x_1 + x_2 & = 5 \\ x_1 - x_2 & = 3 + 6i \end{array}\right\} \qquad \text{vii)}\quad \left.\begin{array}{cl} x + y + iz + t & = 0 \\ 2x - y + 2z - t & = 1 \\ x + iy - z + it & = 2 \\ x + y + z - t & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{viii)}\quad \left.\begin{array}{clcc} 2x_1 - 4x_2 & = 10 & | & -8 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 & = -4 & | & -2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 & = 4 & | & 9 \end{array}\right\} \qquad \text{ix)}\quad \left.\begin{array}{clcc} 2x_1 - 4x_2 & = 10 & | & -8 \\ x_1 - 3x_2 & = -4 & | & -2 \\ x_1 - x_3 & = 4 & | & 9 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 & = 10 & | & -15 \end{array}\right\}$$

**Soluciones:** i)$\{x_1 = 2, x_2 = 8, x_3 = 21\}$, ii)$\{x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0\}$,

iii) $\{z = -1, y = 4, t = 5, x = -8\}$, iv)$\{x_2 = 0, x_3 = 1, x_1 = -1\}$

v)$\left\{x_4 = -\frac{101}{13}, x_3 = -\frac{157}{13}, x_1 = \frac{97}{13}, x_2 = \frac{16}{13}\right\}$ y $\{x_1 = 0, x_3 = -1, x_4 = 4, x_2 = 2\}$

vi)$\{x_1 = 4 + 3i, x_2 = 1 - 3i\}$ vii)$\left\{x = 1 + i, y = -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i, z = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i, t = -\frac{11}{10} + \frac{3}{10}i\right\}$

viii)$\{x_1 = 23 + 2x_4, x_2 = 9 + x_4, x_3 = 19 + 4x_4\}$ y

$\{x_1 = -8 + 2x_4, x_2 = -2 + x_4, x_3 = -17 + 4x_4\}$

ix) $\{x_1 = 23, x_2 = 9, x_3 = 19\}$ y no hay solución respectivamente.

**8.** Calcula, si existe, la inversa de la matriz $A$ en los siguientes casos

$$\text{i)}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \ \text{ii)}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \ \text{iii)}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

i.e. encuentra una matriz $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ tal que $AB = I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Solución:** La resolución dará lugar a tres sistemas de Gauss con la misma parte homogénea (similar a los apartados viii) y ix) del ejercicio anterior). Se obtendrá:

i) $B = \begin{pmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{pmatrix}$ ii) no existe, iii) $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

**9.** Sea $A$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra el valor de $A^n$ y demuestra el resultado utilizando el método de inducción.