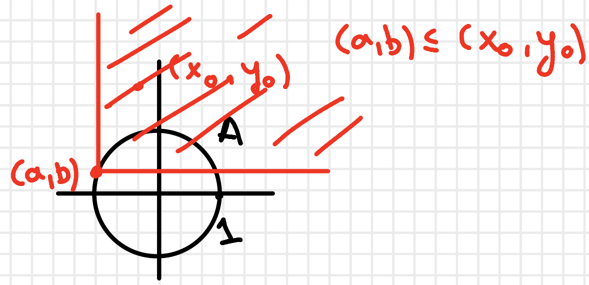
Conjuntos y números 26/10



6. $\mathbb{R}^2$: $(a,b) \, R \, (c,d) \iff a \leq c$ y $b \leq d$

$A := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$

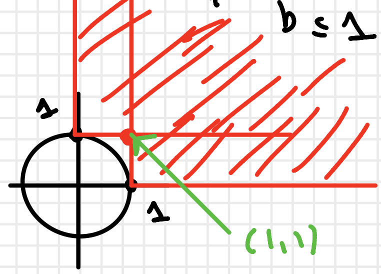
a) Dos cotas superiores de A:

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es una cota superior para A si $\forall (a,b) \in A$ se verifica $(a,b) \leq (x,y)$.

Por ejemplo: $(2,3)$ y $(3,5)$ son cotas superiores, porque si $(a,b) \in A$, $a \leq 1$, $b \leq 1$.

b) El supremo de A:

Supremo = cota superior más pequeña



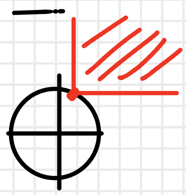
El candidato a supremo es $(1,1)$. Tenemos que comprobar que si tenemos otra cota superior (x,y), entonces $(1,1) \leq (x,y)$.

Supongamos que existe una cota sup. más peq. es decir $(x,y) < (1,1)$
$((x,y) \leq (1,1) \wedge (x,y) \neq (1,1))$

Si $(x,y) \leq (1,1)$, por definición $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$ Si $x < 1$, $(1,0) \nleq (x,y)$
Si $y < 1$, $(0,1) \nleq (x,y)$

Luego no sería una cota superior. (contrad.) ∎

c) Elementos maximales de A.



Afirmo que los elementos maximales de A son
$M = \{ (x,y) \in A : (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \}$

- Vemos que todos los elementos de M son maximales:

Sea $(m_1, m_2) \in M$. Supongamos que $\exists (a,b) \in A$ tq. $(m_1, m_2) \leq (a,b)$.

Por def., $\begin{cases} 0 \leq m_1 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq m_2 \leq b \end{cases}$. $1 = m_1^2 + m_2^2 = a^2 + b^2 = 1$, es decir $\underbrace{(a^2 - m_1^2)}_{\geq 0} + \underbrace{(b^2 - m_2^2)}_{\geq 0} = 0$

$\Rightarrow a^2 - m_1^2 = 0$ y $b^2 - m_2^2 = 0$ $\overset{\text{como son } \geq 0}{\Rightarrow}$ $a = m_1$, $b = m_2$. ∎

• Ej.: ver que todos los elementos maximales están en M. (Fácil) ■

(7) $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$. $(n,m) R_2 (n',m')$
$(n,m) \longmapsto 2^n \cdot 3^m$ $\Updownarrow$
$f(n,m) \mid f(n',m')$

a)

• R_2 es una relación de orden:

(R) $(n,m) R_2 (n,m) \iff 2^n \cdot 3^m \mid 2^n \cdot 3^m$ ✓

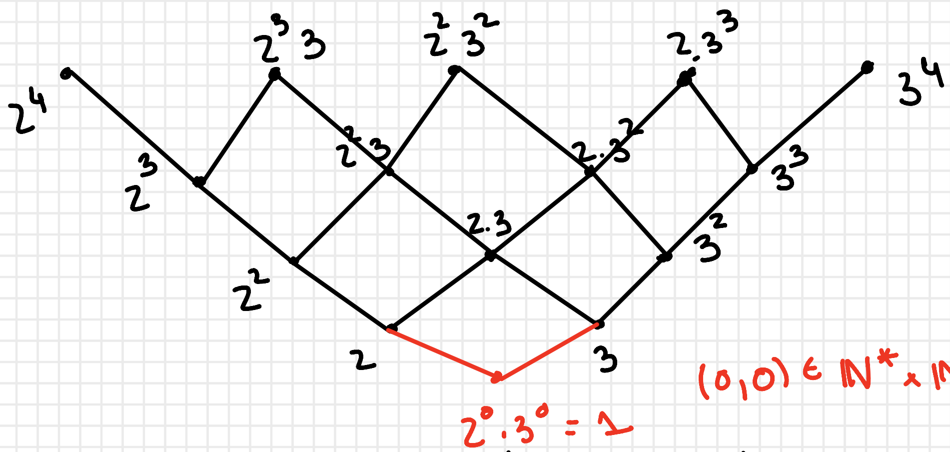
(A.S). $\begin{cases} (n,m) R_2 (n',m') \\ (n',m') R_2 (n,m) \end{cases} \iff \begin{matrix} 2^n \cdot 3^m \mid 2^{n'} 3^{m'} \\ 2^{n'} \cdot 3^{m'} \mid 2^n \cdot 3^m \end{matrix} \iff \begin{matrix} n \leq n' ;\ m \leq m' \\ n' \leq n ;\ m' \leq m \end{matrix} \iff \begin{matrix} n = n' \\ m = m' \end{matrix}$. ■

(T.) $\begin{cases} (n,m) R_2 (n',m') \\ (n',m') R_2 (n'',m'') \end{cases} \iff \begin{matrix} n \leq n' \leq n'' \\ m \leq m' \leq m'' \end{matrix}$, $(n,m) \leq (n'',m'')$

¿Es un orden total? → no, $\underset{2}{\overset{(1,0)}{\downarrow f}}$ y $\underset{3}{\overset{(0,1)}{\downarrow f}}$ no están relacionados.
(ni $2 \mid 3$ ni $3 \mid 2$)

b) $A = \{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : 1 \leq n+m \leq 4\}$, $f(A) = \{2^n 3^m \mid \hat{n}+m \leq 4\}$

f(A):



$(0,0) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \setminus A$.

• Elementos maximales: $(4,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, $(0,4)$.

• Elementos minimales: $(1,0)$, $(0,1)$

• Máximo / mínimo → no hay. (ningún elem. está relac. con todos)

• Supremo → cotas superiores para A son de la forma (a_0, b_0).
con $a_0 \geq 4$
$b_0 \geq 4$

Luego $\sup A = (4,4)$

• Ínfimo → la única cota inferior de A es $(0,0)$; con lo cual $(0,0)$ es el ínfimo. ■
(tiene que dividir a 2^1 y 3^1)

8. R en X es un buen orden si para $\underset{\neq \emptyset}{A \subset X}$, existe min. A.

- Comprobar que si $X, Y \subset \mathbb{R}$ bien ordenados (con "$\leq$"), entonces $X \cup Y$ está bien ordenada.

Sea $\mathcal{U} \subseteq X \cup Y$, puedo escribir $\underbrace{(\mathcal{U} \cap X)}_{\subseteq X} \cup \underbrace{(\mathcal{U} \cap Y)}_{\subseteq Y} = \mathcal{U}$

Como X e Y son bien ordenados, $\exists\, x_0 = \min(\mathcal{U} \cap X)$ y $y_0 = \min(\mathcal{U} \cap Y)$.
Si encojo $\min(x_0, y_0)$, obtengo el mínimo de $\mathcal{U}$. ■

20 ¿Existe una biy. entre $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$ que preserve el orden?

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}$

$a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$

Supongamos que existe tal f. En particular,

$0 \leq 1 \Rightarrow \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\in}{f(0)}} \leq \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\in}{f(1)}}$. Sea $r \in \mathbb{Q}$ tq. $f(0) < r < f(1)$

Pero no $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tq. $0 < n < 1$. Contradicción. ■

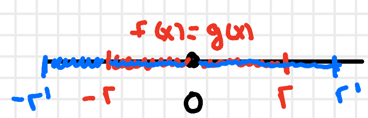
Hoja 4

2. $F := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $f \, R \, g \iff \exists\, r > 0$ tq. $f(x) = g(x)$ si $|x| < r$. ($r \in \mathbb{R}$)

Demostrar que R es una relación de equiv. $\to$ (R) + (S) + (T).

(S) $aRb \iff bRa$

- (R) $f R f \iff \exists\, r > 0$ tq. $f(x) = f(x)$ para $|x| < r$. Puedo encoger cualquier r. ✓
- (S) $f R g \iff \exists\, r > 0$ " $f(x) = g(x)$ para $|x| < r$. $\iff \exists\, r > 0$ tq. $g(x) = f(x)$ para $|x| < r$ $\iff g R f$.
- (T) $\begin{cases} f R g \iff \exists\, r > 0 \text{ tq. } f(x) = g(x) \text{ si } |x| < r \\ g R h \iff \exists\, r' > 0 \text{ tq. } g(x) = h(x) \text{ si } |x| < r' \end{cases}$



$g(x)=h(x)$

Luego $f R h$ porque para $|x| < \min(r,r')$, $f(x)=h(x)$. ■

③ $B \subseteq A$, B finito. En $P(A)$ definimos: $X R Y \iff |X \cap B| = |Y \cap B|$.

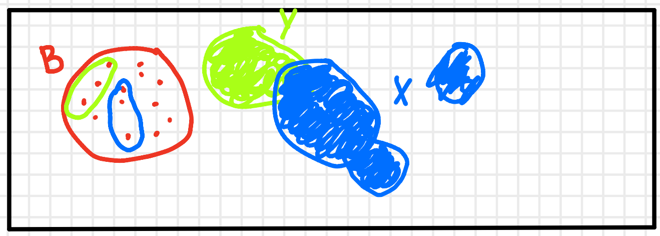
- R es rel. de equiv.:
  - (R) $X R X \iff |X \cap B| = |X \cap B|$ ✓
  - (S) $X R Y \iff |X \cap B| = |Y \cap B| \iff Y R X$.
  - (T) $\begin{cases} X R Y \\ Y R Z \end{cases} \iff \begin{array}{l} |X\cap B| = |Y \cap B| \\ |Y \cap B| = |Z \cap B| \end{array} \Rightarrow |X \cap B| = |Z \cap B|$, es decir $X R Z$.

$|B| = n$

A

- $¿\ |P(A)/R|\ ?$

$\overset{\shortparallel}{|B|+1}$



$[X]=[Y]$

Las posibles clases de equiv. son:

0 elem. + " " ... "
1 elem. de B + cualq. cosa de $A \setminus B$
2 elem. de B + cualq. cosa de $A \setminus B$
⋮
n elem. + " " " ".

④ $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$, R en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $\overset{a/b}{(a,b)} \sim (c,d) \iff ad = b.c$.

$\Updownarrow$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

- Comprobar que R es una rel. de equiv. (Ejercicio)
- $¿\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} / R\ ?$

$[(2a,2b)]$

$\shortparallel$

Clase de equiv. de (a,b): $[(a,b)] = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{n}{m} = \frac{a}{b}\}$

$\downarrow$

$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N}/R \longrightarrow \mathbb{Q}^+$

$a/b \in \mathbb{Q}^+$

Ej.: escribir por qué está bien definida.

$(x \in A \vee x \in \emptyset) \iff (x \in A)$

$\Sigma = \{p_1, \dots, p_n\}$, q $\qquad$ $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \wedge \bar{q} \Rightarrow F$

$\Sigma \models q$ $\qquad$ $x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C$

$A \subset C \Rightarrow (x \in A^c) \vee (x \in C)$

$(x \in A) \wedge (x \in C)$