

Hoja 8

Curvas. Integrales de línea. Fórmula de Green

- 1.- Hallar el vector tangente (normalizado) a la trayectoria $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe la recta tangente en el punto $(0, 0)$?
- 2.- Para las siguientes trayectorias, hallar la velocidad, la rapidez (es decir, la longitud del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente al valor de t dado:

$$(a) \gamma(t) = (e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t} \operatorname{cos} t), \quad t = 2\pi. \quad (b) \sigma(t) = (e^{-2t} \operatorname{sen}(2t), e^{-2t} \operatorname{cos}(2t), e^{-2t}), \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

- 3.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

$$(a) \sigma(s) = (s, 4s, s^2), \quad 0 \leq s \leq 4.$$

$$(b) \sigma(u) = (e^{-u} \operatorname{cos} u, e^{-u} \operatorname{sen} u), \quad 0 \leq u < +\infty.$$

- 4.- Dibujar el arco de cicloide descrito por $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1 - \operatorname{cos} t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$ y hallar su longitud.
- 5.- Hallar la longitud del arco de hipocicloide descrito por $x(t) = \operatorname{cos}^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
- 6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t, 3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \pi, \\ (-1, -t + \pi, 3t) & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

- 7.- Dada la curva γ mediante las ecuaciones paramétricas $x = t \operatorname{cos} t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcúlese la integral $\int_{\gamma} z \, ds$;

- 8.- Dibujar la curva descrita por la trayectoria σ dada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$, y hallar la integral $\int_{\sigma} f \, ds$, donde $f(x, y, z) = x + y + z$.

- 9.- Hallar la integral $\int_{\Gamma} F(x, y) \cdot ds$ del campo vectorial F a lo largo de la curva orientada Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

$$(a) F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2), \text{ a lo largo de la curva } y = 1 - |1 - x| \text{ desde } (0, 0) \text{ hasta } (2, 0).$$

$$(b) F(x, y) = (x + y, x - y), \text{ siendo } \Gamma \text{ la elipse } b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ recorrida en sentido antihorario.}$$

- 10.- Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sea $F(x, y)$ el vector unitario que apunta desde (x, y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a, 0)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

- 11.- Calcular la integral $\int_{\Gamma} y \, dx + x^2 \, dy$, cuando Γ es la curva :

$$(a) \quad x^2 + y^2 = a x$$

$$(b) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

recorrida en el sentido antihorario.

- 12.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x, y) = (y^2 + x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en sentido antihorario.

- 13.- Dados los puntos $A = (2, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (0, -1)$ y $D = (0, 0)$ en \mathbb{R}^2 , sea Γ el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1, y los segmentos de recta BC , CD , y DA .

Calcular el valor de la integral $\int_{\Gamma} (x^4 - x^3 e^x - y) dx + (x - y \arctan y) dy$, con Γ orientada en sentido horario.

- 14.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x, y)$ definidos en \mathbb{R}^2 , determinar si son gradientes de algún potencial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f .

$$(a) \quad F(x, y) = (3x^2y, x^3) \qquad (b) \quad F(x, y) = (\sin y - y \sin x + x, \cos x + x \cos y + y)$$

$$(c) \quad F(x, y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y) \qquad (d) \quad F(x, y) = (\sin(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy)).$$

- 15.- Evaluar $\int_{\Gamma} (2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$, donde Γ es el círculo unidad orientado en el sentido antihorario.

- 16.- Verificar el teorema de Green para el campo (P, Q) con $P(x, y) = 2x^3 - y^3$ y $Q(x, y) = x^3 + y^3$ y la región anular (corona) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2$.

- 17.- Sea A el área del recinto acotado por una curva γ de clase C^1 , simple y cerrada en el plano y orientada en sentido antihorario. Calcular la integral de línea $\int_{\gamma} x dy - 4y dx$ en función de A .