ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 4: Cocientes, primer teorema de isomoría y aplicaciones.

1. Sea F el subespacio de $E=\mathbb{R}^4$ definido por

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ \begin{array}{c} x+y=0 \\ z+t=0 \end{array}\right\}.$$

Se pide:

(i) Encuentra una base de F, complétala para obtener una de E y utiliza esta última para calcular una base de E/F.

(ii) Encuentra las cordenadas de los vectores

$$[(2,-2,0,0)] \text{ y } [(3,4,0,0)]\in E/F$$

respecto de la base de E/F encontrada en el apartado anterior.

2. Sea $E=\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y F el subespacio vectorial definido por

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c'\end{pmatrix}:\ \begin{array}{c} a+b=0 \\ a'+b'=0 \\ c+c'=0 \end{array}\right\}.$$

Encuentra una base de E/F y las coordenadas del vector $[v]$, con $v=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, respecto a dicha base.

3. Sea

$$f: V_1=\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})\to V_2=\{\text{polinomios de grado}\le 2\}$$

la aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c'\end{pmatrix}=(a+b)+(c+c')x+(a'+b')x^2.$$

(i) Demuestra que su núcleo es el subespacio F del ejercicio anterior.

(ii) Demuestra que la expresión

$$\overline{f}([v])=f(v)$$

define un isomorfismo entre $\mathcal{M}_{2\times 3}/F$ y $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$. **(Primer teorema de isomorfía)**.

(iii) Decide si esta misma expresión define una función cuando F es el subespacio generado por los vectores

$$v_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \text{ y } v_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(iv) Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales arbitrarios definidos sobre el mismo cuerpo k y sea $f: V_1\to V_2$ un homomorfismo. Demuestra que f induce una aplicación $\overline{f}: V_1/F\to V_2$ (que además es un homomorfismo) si y sólo si $F\subset \operatorname{Ker}(f)$.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea G un subespacio vectorial de V.

(i) Demuestra que la aplicación canónica $\pi : V \to V/G$ definida por $\pi(v) = [v]$ es un epimorfismo. Calcula su núcleo y aplica el primer teorema de isomorfía.

(ii) Demuestra que existen bases de V y de V/G respecto a las cuales la matriz de π es de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdot\cdot & 0 & 1 & \cdot\cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I} \end{array}\right)$$

5. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(p(x)) = p(i)$.

(i) Demuestra que f es un homomorfismo suprayectivo entre espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

(ii) Demuestra que $\mathrm{Ker}(f) = \{(x^2+1)p(x) \mid p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. (Sugerencia: habrá que dividir por x^2+1).

(iii) Concluye que se tiene un isomorfismo

$$\mathbb{R}[x]/\mathrm{Ker}(f) \overset{\sim}{\longmapsto} \mathbb{C}$$

(iv) Da bases de los espacios vectoriales reales $\mathbb{R}[x]/\mathrm{Ker}(f)$ y $\mathbb{C}$ respectivamente.