

Bloque III: Combinatoria



Permutaciones con objetos indistinguibles

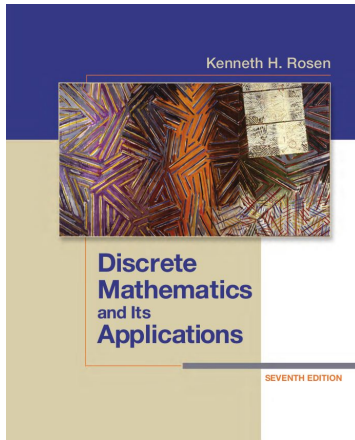
Contenidos

6.6. Permutaciones con objetos indistinguibles

Lecturas sugeridas

Rosen:

- 6.5. Generalized permutations and combinations



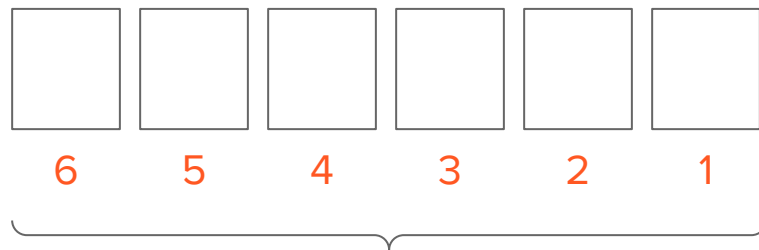
Tsun:

- 1.2.3. Multinomial coefficients



Fila de flores

¿Cuántas filas de flores diferentes podemos hacer con **6 flores** de **tipos distintos**?



6-permutaciones con 6 elementos

$$P(6, 6) = 6!$$

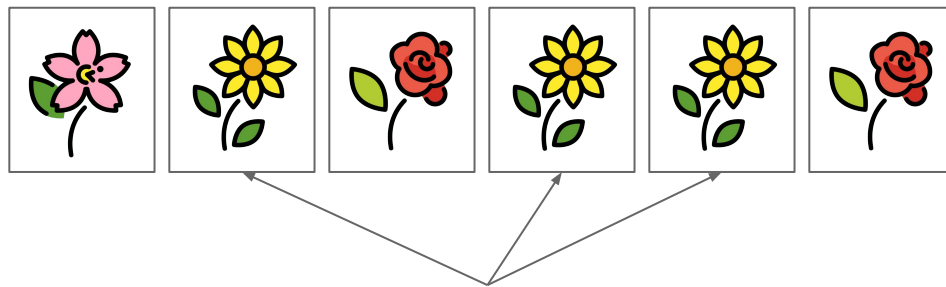
Fila de flores

¿Cuántas filas de flores diferentes podemos hacer con las siguientes **6 flores** (algunos tipos de flor están **repetidos**)?



6! permutaciones

Pero ahora algunas permutaciones son equivalentes



Permutar las margaritas entre sí no cambia la fila

$$6! / 3!$$

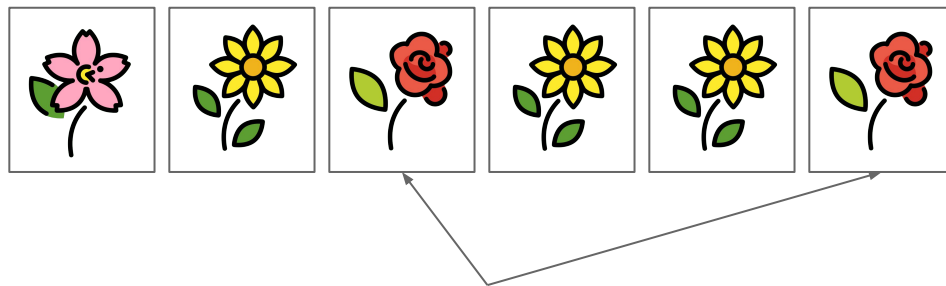
Fila de flores

¿Cuántas filas de flores diferentes podemos hacer con las siguientes **6 flores** (algunos tipos de flor están **repetidos**)?



6! permutaciones

Pero ahora algunas permutaciones son equivalentes



Permutar las rosas entre sí no cambia la fila

$$6! / 3! 2!$$

Fila de flores

¿Cuántas filas de flores diferentes podemos hacer con las siguientes **6 flores** (algunos tipos de flor están **repetidos**)?



Otra forma de verlo: De las 6 posiciones disponibles, elegimos 3 para las margaritas



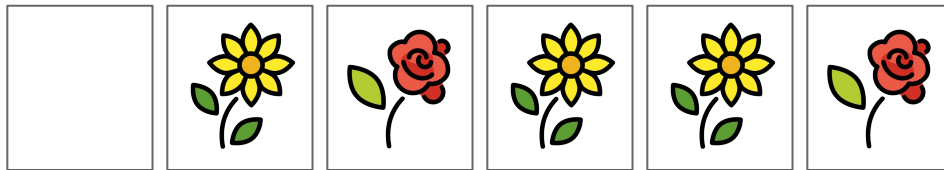
$$C(6, 3)$$

Fila de flores

¿Cuántas filas de flores diferentes podemos hacer con las siguientes **6 flores** (algunos tipos de flor están **repetidos**)?



De las 3 posiciones restantes, elegimos
2 para las rosas



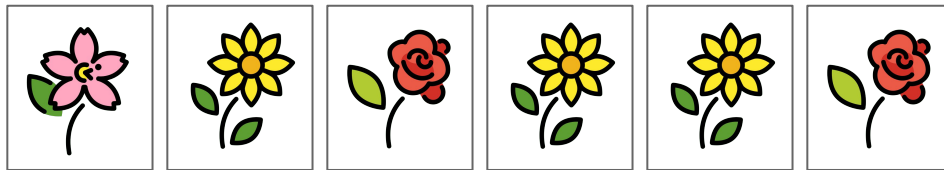
$$C(6, 3) \times C(3, 2)$$

Fila de flores

¿Cuántas filas de flores diferentes podemos hacer con las siguientes **6 flores** (algunos tipos de flor están **repetidos**)?



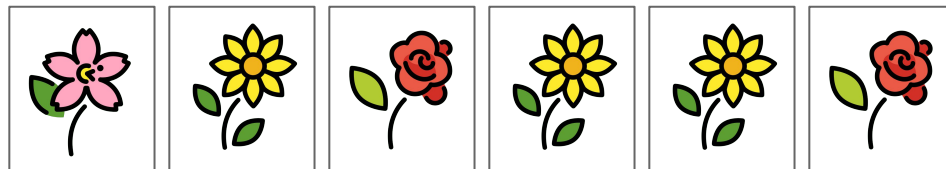
La última flor va en la única posición que queda libre



$$C(6, 3) \times C(3, 2) \times C(1, 1)$$

Fila de flores

¿Cuántas filas de flores diferentes podemos hacer con las siguientes **6 flores** (algunos tipos de flor están **repetidos**)?



$$C(6, 3) \times C(3, 2) \times C(1, 1) = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{1!}{1!0!} = \frac{6!}{3!2!1!}$$

Permutaciones con objetos indistinguibles

Dados n objetos pertenecientes a k tipos distintos, con n_1 objetos del tipo 1, n_2 objetos del tipo 2, ..., y n_k objetos del tipo k , $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, el número de permutaciones posibles es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Este número, que generaliza los coeficientes binomiales, se llama **coeficiente multinomial**.

Teorema multinomial

Dado un número entero positivo m y un número entero no negativo n , se tiene

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{t=1}^m x_t^{k_t}$$

con

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

Ejemplo 1

¿Cuántas palabras (cadenas) diferentes se pueden formar con las letras de la palabra PARASAUROLOPHUS?

Ejemplo 2

¿Cuál es el coeficiente del término $x^4y^2z^4$ en la expansión de $(x + y + z)^{10}$?

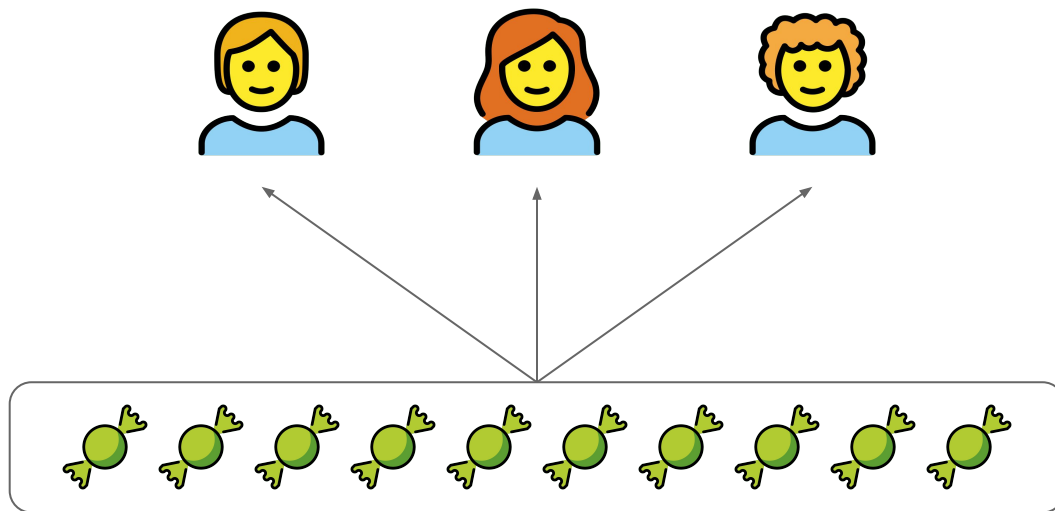
Extra: Cajas y objetos

¿De cuántas maneras diferentes podemos distribuir n objetos en k cajas en cada uno de los siguientes casos?

- Las cajas son distinguibles, los objetos no
- Tanto las cajas como los objetos son distinguibles
 - No sabemos cuántos objetos van en cada caja
 - Cada caja debe contener un número fijo de objetos
- ¿Cajas indistinguibles?

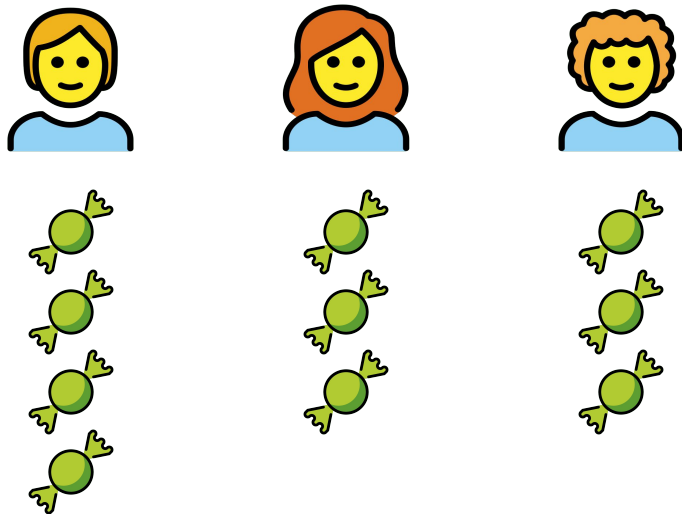
Cajas distinguibles, objetos indistinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños**?



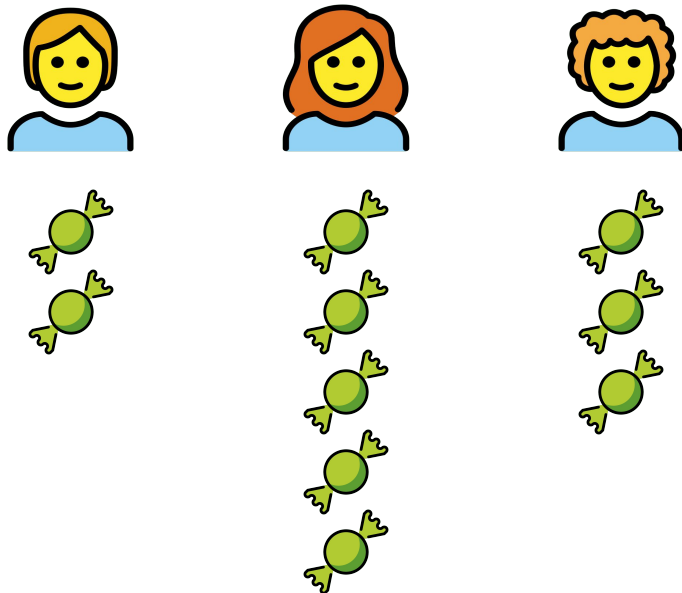
Cajas distinguibles, objetos indistinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños**?



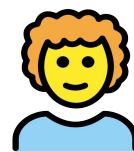
Cajas distinguibles, objetos indistinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños**?



Cajas distinguibles, objetos indistinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños**?



Cajas distinguibles, objetos indistinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños**?



...

Los niños son **cajas**, los caramelos **objetos indistinguibles**

Piedras y barras, combinaciones con repetición

Cajas distinguibles, objetos indistinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños**?



...

$$CR(3, 10) = C(3+10-1, 10) = C(12, 10) = 12! / 10! 2! = 66$$

Ejemplo 3

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños** si **ningún niño puede quedarse sin caramelos**?

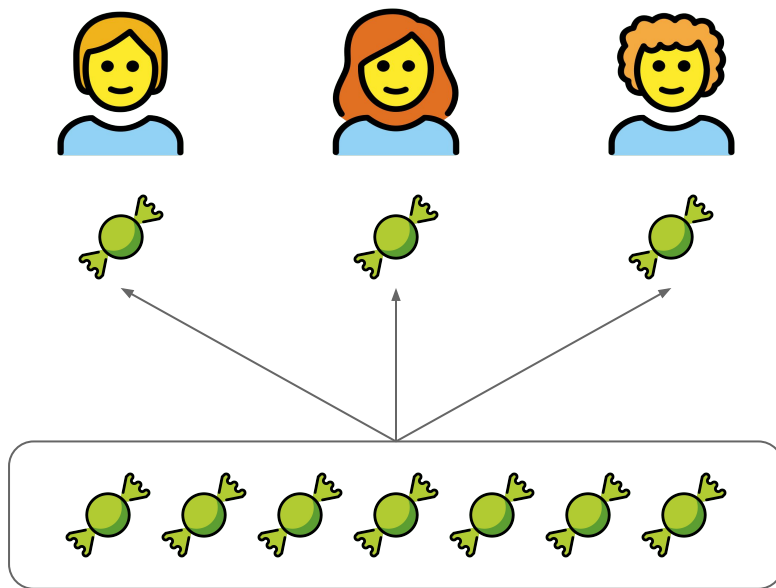


1. Le damos un caramelo a cada niño

2. Repartimos los 7 caramelos restantes sin ninguna restricción

Ejemplo 3

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños** si **ningún niño puede quedarse sin caramelos**?



Ejemplo 3

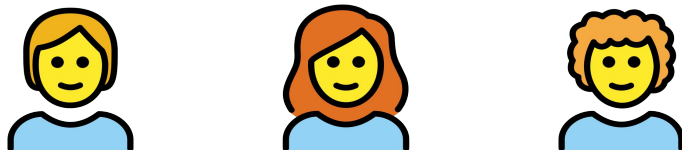
¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños** si **ningún niño puede quedarse sin caramelos**?



$$CR(3, 7) = C(3+7-1, 7) = C(9, 7) = 9! / 7! 2! = 36$$

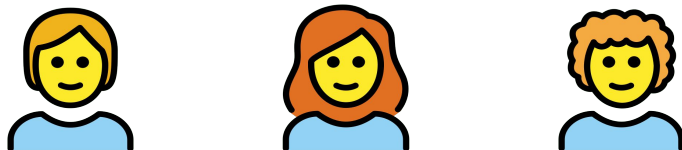
Ejemplo 4

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños** si **ningún niño puede acabar con más de 5 caramelos**?



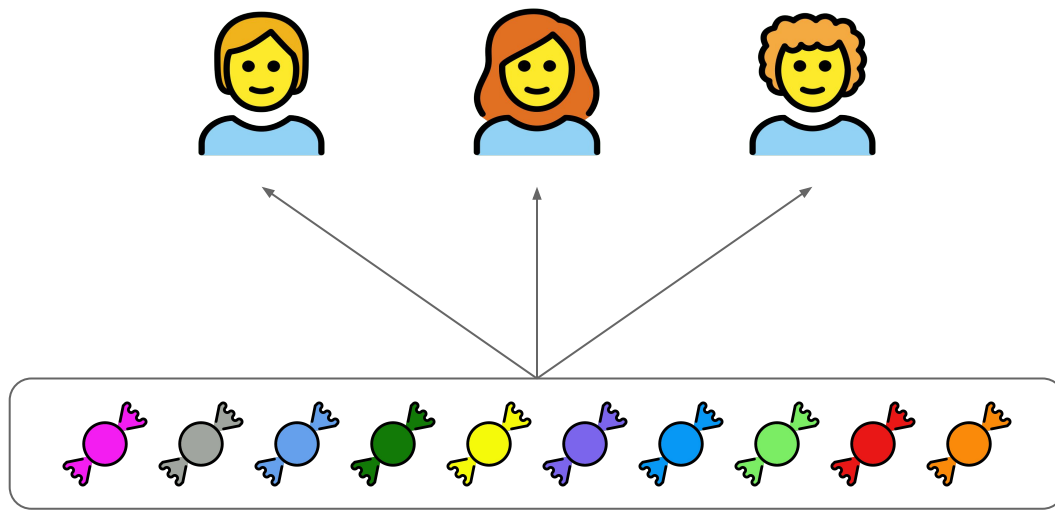
Ejemplo 5

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos** iguales entre **3 niños** si **ningún niño puede quedarse sin caramelos ni acabar con más de 5 caramelos**?



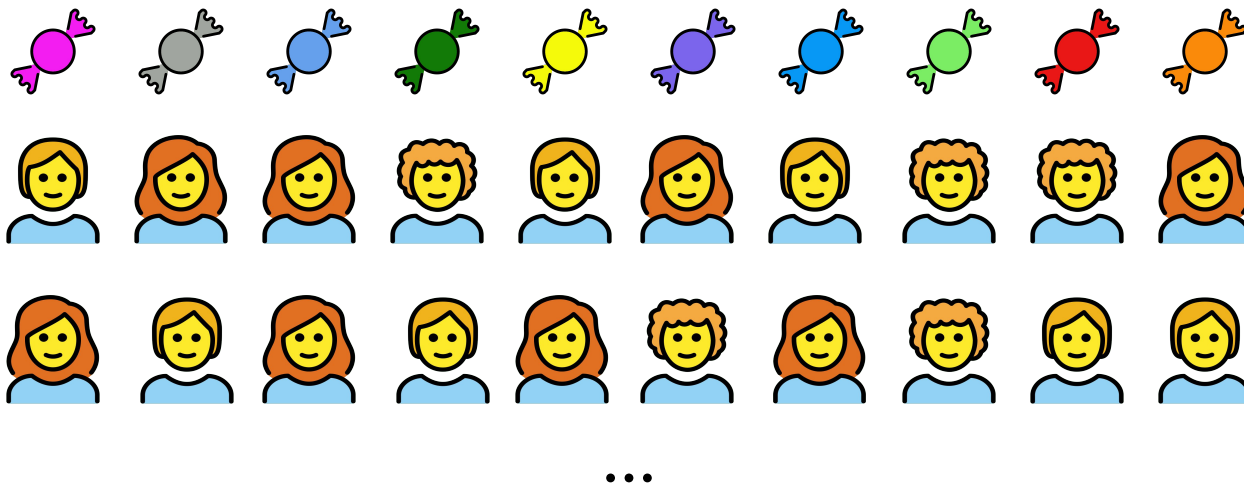
Cajas distinguibles, objetos distinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos diferentes** entre **3 niños**?



Cajas distinguibles, objetos distinguibles

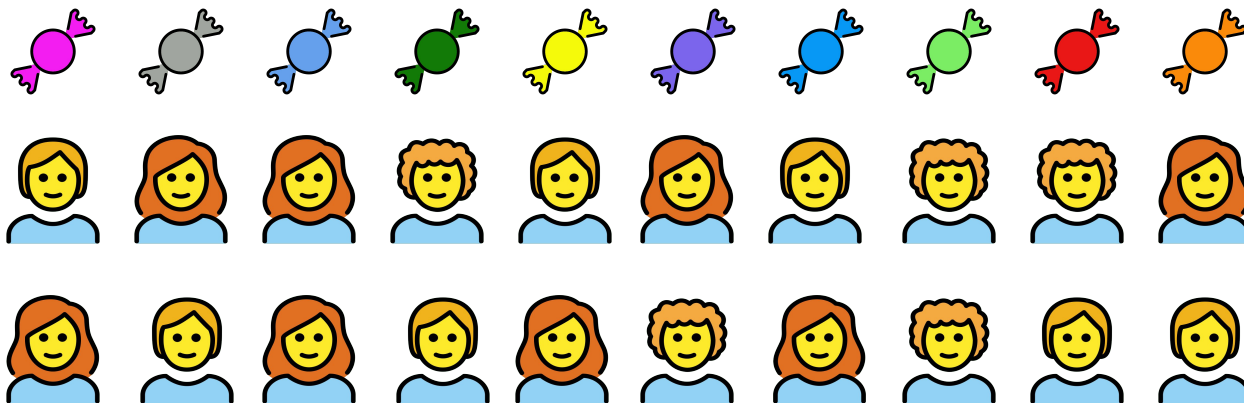
¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos diferentes** entre **3 niños**?



Permutaciones con elementos repetidos

Cajas distinguibles, objetos distinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos diferentes** entre **3 niños**?

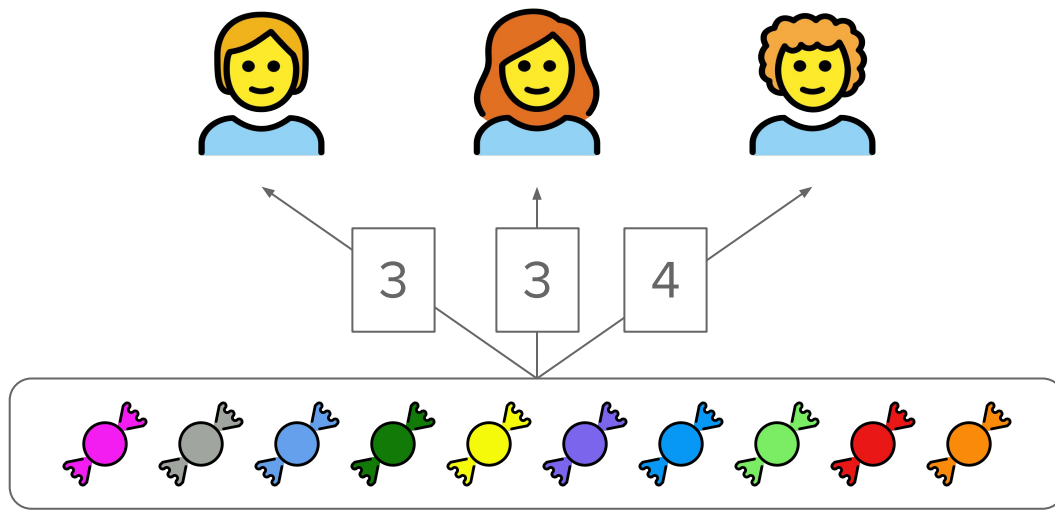


...

$$PR(3, 10) = 3^{10}$$

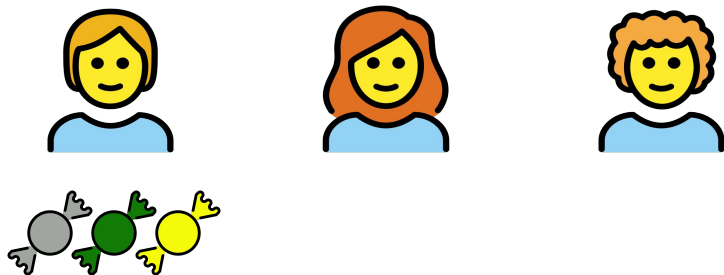
Cajas distinguibles, objetos distinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos diferentes** entre **3 niños**, si le damos 3 caramelos al primer niño, 3 al segundo y 4 al tercero?



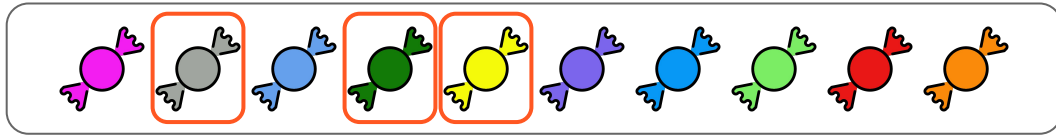
Cajas distinguibles, objetos distinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos diferentes** entre **3 niños**, si le damos 3 caramelos al primer niño, 3 al segundo y 4 al tercero?



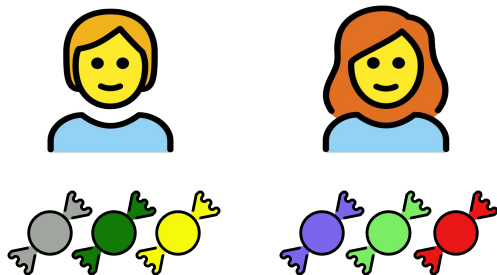
1. Elegir 3 caramelos para el primer niño

$$C(10, 3)$$



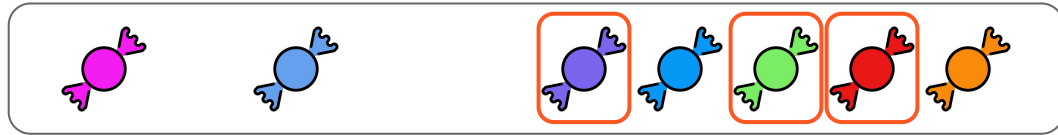
Cajas distinguibles, objetos distinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos diferentes** entre **3 niños**, si le damos 3 caramelos al primer niño, 3 al segundo y 4 al tercero?



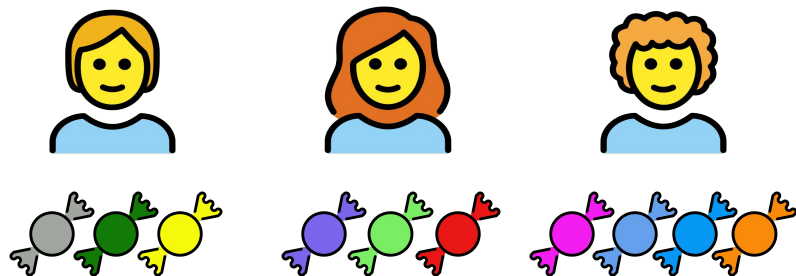
2. Elegir 3 caramelos para el segundo niño

$$C(7, 3)$$



Cajas distinguibles, objetos distinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos diferentes** entre **3 niños**, si le damos 3 caramelos al primer niño, 3 al segundo y 4 al tercero?



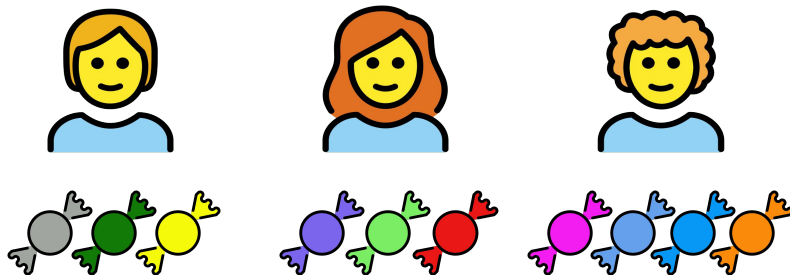
3. Elegir 4 caramelos para el tercer niño

$$C(4, 4)$$



Cajas distinguibles, objetos distinguibles

¿De cuántas maneras diferentes podemos repartir **10 caramelos diferentes** entre **3 niños**, si le damos 3 caramelos al primer niño, 3 al segundo y 4 al tercero?



$$C(10, 3) \times C(7, 3) \times C(4, 4) = \frac{10!}{3!3!4!}$$

¡De nuevo los **coeficientes multinomiales**!

Ejemplo 6

[Adaptado de Rosen] ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir 5 cartas de un mazo de 52 cartas a cada uno de 4 jugadores?

