Tema 2. Conjuntos

2.0. Contenido y documentación

2.0. Contenido y documentación
2.1. Formas de especificar un conjunto
2.2. Relaciones de inclusión
2.3. Operaciones con conjuntos
  2.4.1. Propiedades básicas
  2.4.2. Producto cartesiano entre dos conjuntos
  2.4.3. Propiedades del producto cartesiano
2.5. Partes de un conjunto
  2.5.1. Cardinalidad
2.6. Números combinatorios
  2.6.1. Propiedades
  2.6.2. Fórmula del binomio de Newton
  2.6.3. Principio de inclusión-exclusión (P.I.E.)
2.7. Conjunto universal
  2.7.1. Propiedades
2.8. Álgebra de Boole

H2_Conjuntos.pdf

2.1. Formas de especificar un conjunto

Definición. Un ***conjunto*** *es una colección claramente definida de “objetos” que llamaremos* ***elementos del conjunto****.*

Hay dos formas de especificar un conjunto.

- **Explicativa** o explícita. Decimos exactamente cuáles son los elementos de conjunto (se admiten colecciones infinitas siempre que el patrón esté claro $(\mathbb{N})$).
- **Especificativa**. Se da una propiedad que cumplen todos los elementos del conjunto.

Si s es un elemento del conjunto S, escribimos $s \in S$ (s **pertenece** a S) ó $r \notin S$ (si r **no pertenece** a S).

Definición. Decimos que dos conjuntos A y B coinciden o ***son iguales*** *si tienen exactamente los mismos elementos, es decir $\forall(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.*
Notación. $A = B$.

Definición. Definimos el ***conjunto vacío*** *como aquel que no contiene ningún elemento.*
Notación. $\emptyset$

2.2. Relaciones de inclusión

Definición. Decimos que un conjunto A ***está contenido*** *en un conjunto B o que A es un* ***subconjunto*** *de B si todos los elementos de A son también elementos de B, es decir, $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.*

Notación. $A \subset B$.
Nota. $\forall A$ se tiene que $\emptyset \subset A$.

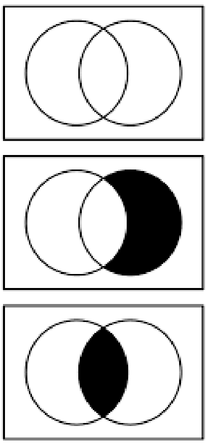
También podemos decir que dos conjuntos son iguales, $A = B$, si ambos están contenidos en el otro simultáneamente, es decir, $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

2.3. Operaciones con conjuntos

Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, podemos definir las siguiente operaciones:

1. **Unión**. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.
2. **Intersección**. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
3. **Diferencia**. $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Podemos visualizar estos conjuntos con los diagramas de Venn.



2.4.1. Propiedades básicas

Dados los conjuntos A, B y C cualesquiera, podemos definir las siguientes popiedades.

1. **Propiedad conmutativa**. $A \cap B = B \cap A$ y $A \cup B = B \cup A$.
2. **Propiedad asociativa**. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. **Propiedad distributiva**. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. **Elementos neutros**. $A \cap A = A \cup A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ y $A \cup \emptyset = A$.
5. **Unión e intersección de la inclusión**. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.
6. **Inclusión de la unión y la intersección**. $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$.

2.4.2. Producto cartesiano entre dos conjuntos

Definición. Llamamos ***par ordenado*** *a un par de elementos en el que distinguimos el primero del segundo, el orden importa.*
Notación. (a, b).
Nota. $(a, b) \neq (b, a)$.

Definición. Llamamos ***producto cartesiano*** *entre los conjuntos A y B al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.*
Notación. $A \times B$.

2.4.3. Propiedades del producto cartesiano

A partir de un producto cartesiano entre dos conjuntos se pueden definir las siguientes propiedades:

1. Producto cartesiano del conjunto vacío. $A \times \emptyset = \emptyset$

Demostración.
Suponemos que $A \times \emptyset \neq \emptyset$, por lo que debe existir algún elemento $(a, b) \in A \times \emptyset$, con $a \in A$ y $b \in \emptyset$. Pero b no puede pertenecer al conjunto vacío, llegando a una contradicción. $\square$

---

2. Propiedad distributiva. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ y $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demostración.
$\forall (x, y) : (x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. $\square$

2.5. Partes de un conjunto

Definición. Dado un conjunto A. Definimos el conjunto “partes de A” con conjunto formado por todos los subconjunto de A, es decir, todos los conjuntos $S : S \subset A$.
Notación. $\mathcal{P}(A)$.
Nota. Los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son los elementos de A si no los subconjuntos que los contienen.

Ejemplo 1. Dado el conjunto $A = \{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$, vemos que A está formado por tres elementos: 1, $\{2\}$ y $\{2, 3\}$. Podemos hacer algunas apreciaciones:
- $1 \in A$
- $2 \notin A$, ya que $2 \neq \{2\}$, pero $\{2\} \in A$
- $\{2, 3\} \in A$
- $\{1\} \subset A$
- $\{2, 3\} \not\subset A$, ya que $2, 3 \notin A$, pero $\{\{2, 3\}\} \subset A$
- $\{2\} \subset \{2, 3\}$, ya que $2 \in \{2\}$ y $2 \in \{2, 3\}$

Ejemplo 2. Sea $A = \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$.

Ejemplo 3. Sea $A = \{a\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, A\}$.

Ejemplo 4. Sea $A = \{a, b\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$.

Ejemplo 5. Sea $A = \{a, b, c\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$.

En el Ejemplo 5 vemos que A tiene 3 elementos, mientras que $\mathcal{P}(A)$ tiene 8 elementos. Así, vemos que A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

2.5.1. Cardinalidad

*Definición. Sea A un conjunto finito de n elementos, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Definimos el **cardinal** de A como dicho número de elementos, es decir, n.*
Notación. $\text{card}\,(A) = |A|$.

> Proposición. Sea A un conjunto finito de n elementos, es decir $|A| = n$.
> Entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

2.6. Números combinatorios

Dado un conjunto A de n elementos, para cada número entero k con $0 \leq k \leq n$, se define $\binom{n}{k}$, como la cantidad de subconjuntos de k elementos distintos en un conjunto con n elementos. Dicho de otra forma, el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k.

Veremos que $\binom{n}{k} = C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Tener en cuenta que $\binom{0}{0} = 0! = 1! = 1$.

Ejemplo 6. $\binom{n}{0}$ es el número de subconjuntos con 0 elementos: solo 1, el conjunto vacío, de forma que $\binom{n}{0} = 1$.

Ejemplo 7. $\binom{n}{1}$ es el número de subconjuntos con 1 elemento, de forma que $\binom{n}{1} = n$.

Ejemplo 8. $\binom{n}{n}$ es el número de subconjuntos con n elementos, de forma que $\binom{n}{n} = 1$.

Ejemplo 9. $\binom{120}{3} = \dfrac{120!}{(120-3)! \cdot 3!}$.

2.6.1. Propiedades

Algunas de las propiedades más relevantes de los números combinatorios son:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ con $0 \leq k \leq n$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ con $n \geq 2 \wedge 1 \leq k \leq n-1$.

2.6.2. Fórmula del binomio de Newton

A partir de los número combinatorios se define la fórmula del **binomio de Newton** como $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Demostración.

Demostramos por inducción.

- Caso base ($n = 1$): $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a + b$.
- Paso inductivo (n): $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + ... + \binom{n}{n} a^n b^0$.

Probamos para $n+1$: $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a[\binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + ... + \binom{n}{n} a^n] + b[\binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + ... + \binom{n}{n} a^n] = [\binom{n}{0} ab^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^3 b^{n-2} + ... + \binom{n}{n} a^{n+1}] + [\binom{n}{0} b^{n+1} + \binom{n}{1} ab^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + ... + \binom{n}{n} a^n b] = [\binom{n}{0} + \binom{n}{1}] ab^n + [\binom{n}{1} + \binom{n}{2}] a^2 b^{n-1} + ... +$

$[\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}]a^{n-1}b^2 + [\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}]a^n b + a^{n+1} + b^{n+1} = \binom{n+1}{1}ab^n + \binom{n+1}{2}a^2b^{n-1} + ... + \binom{n+1}{n}a^n b + a^{n+1} + n^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$. $\square$

2.6.3. Principio de inclusión-exclusión (P.I.E.)

*Definición. Sean A y B dos conjuntos finitos. Decimos que son **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$.*

> Principio de inclusión-exclusión. Sean A y B dos conjuntos finitos:
>
> - si son disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.
> - si no son disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Demostración.
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \cup B \backslash A$, donde A y $B \backslash A$ son disjuntos. Luego, $|A \cup B| = |A| + |B \backslash A|$. Podemos definir B como $B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$. Luego, $|B| = |B \backslash A| + |A \cap B|$. De forma que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. $\square$

Ejemplo 10. De un grupo de 60 estudiantes, 29 estudian matemáticas, 37 estudian informática y 10 estudian ambas. ¿cuántos estudiantes no estudian ni matemáticas ni informática?
- Estudiantes de matemáticas: $|A| = 29$
- Estudiantes de informática: $|B| = 37$
- Estudiantes de informática y matemáticas: $|A \cap B| = 10$
- Estudiantes de informática o matemáticas: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 29 + 37 - 10 = 56$.

Luego, hay 4 estudiantes que no estudian ni matemáticas ni informática.

Ejemplo 11. ¿Cuántos números naturales menores o iguales que 60 son divisibles por 2, 3 o 5? ¿Cuántos no tienen divisores comunes con 60?
Definimos el conjunto de números menores o iguales que 60 divisibles por 2, 3 y 5 como A, B y C respectivamente.
- Números divisibles por 2: $|A| = \frac{60}{2} = 30$.
- Números divisibles por 3: $|B| = \frac{60}{3} = 20$.
- Números divisibles por 5: $|C| = \frac{60}{5} = 12$.
- Números divisibles por 6 (2 y 3): $|A \cap B| = \frac{60}{6} = 10$.
- Números divisibles por 10 (2 y 5): $|A \cap C| = \frac{60}{10} = 6$.
- Números divisibles por 15 (3 y 5): $|B \cap C| = \frac{60}{15} = 4$.
- Números divisibles por 30 (2, 3 y 5): $|A \cap B \cap C| = \frac{60}{30} = 2$.

Luego, el número total de números menores que 60 divisibles por 2, 3 o 5 es: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 30 + 20 + 12 - 10 - 6 - 4 + 2 = 44$.
Luego, el número total de números menores que 60 no divisibles por 2, 3 o 5 es 16.

2.7. Conjunto universal

*Definición. Dado un conjunto universal U y un subconjunto $C \subset U$. Definimos el **conjunto complementario** de C relativo a U como $U \setminus C = \{x \in U : x \notin C\}$.*
Notación. C^c.

2.7.1. Propiedades

Dado el conjunto universal U y $C \subset U$, tenemos:

1. Relación con el vacío. $\emptyset^c = U$ y $U^c = \emptyset$.
2. Unión e intersección con el complementario. $C \cap C^c = \emptyset$ y $C \cup C^c = U$.
3. Complementario del complementario. $(C^c)^c = C$.
4. Leyes de De Morgan. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2.8. Álgebra de Boole

En el **Álgebra de Boole** se definen las siguientes propiedades y relaciones:

1. Existencia de un elemento neutro. $C \cup \emptyset = C$ y $C \cap U = C$.
2. Conmutatividad. $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$.
3. Asociatividad. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. Complementario. $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$ y $(A^c)^c = A$.