Tema 4. Determinantes

4.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/65b737ee-8287-4686-9b50-8ccca0c15e37/H5_Determinantes.pdf

4.1. Aplicaciones multilineales

Sean V_1, V_2 espacios vectoriales sobre $\mathbb{K} \Rightarrow V_1 \times V_2$ también lo es:
- $(v_1, v_2), (v_1', v_2') \in V_1 \times V_2 \Rightarrow (v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$
- $\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$

Sea $\{u_1, ..., u_r\}$ una base de V_1^r y $\{w_1, ..., w_s\}$ una base de $V_2^s \Rightarrow \{(u_1, \vec{0}), ..., (u_r, \vec{0}), (\vec{0}, w_1), ..., (\vec{0}, w_s)\}$ es una base de $V_1 \times V_2$. Luego $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1^r + \dim V_2^s$.

Ejemplo 1. Demostramos que $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{M}_{2\times 2}$ tiene $\dim = 6$. Tomamos
$\left\{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1), w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$
$\{(u_1, \vec{0}), (u_2, \vec{0}), (\vec{0} w_1), ..., (\vec{0}, w_4)\}$ es una base.
$\forall \alpha \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{M}_{2\times 2} \Rightarrow \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, donde $\alpha_1 \in \mathbb{R}^2, \alpha_2 \in \mathbb{M}_{2\times 2}$.

Definición. Una ***aplicación multilineal*** *es una aplicación,* $D : E^n \to \mathbb{K}$*, que es lineal en cada variable, es decir, para cada* $v_2, ..., v_n \in V^n$*, la aplicación* $L : E \to \mathbb{K}$*, tal que* $v \to D(v, v_2, ..., v_n)$ *es lineal, y en general,* $D : V \to \mathbb{K}$*, tal que* $v \to D(v_1, ..., v_{i-1}, v, v_{i+1}, ..., v_n)$ *es lineal.*

Definición. La aplicación se llamará ***alternada*** *si* $v_i = v_j \Rightarrow D(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = 0$.

Ejemplo 2. Sea $E = \mathbb{K}$ y $D : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, tal que $((a,b),(c,d)) \to D((a,b),(c,d)) = ad - bc$. Para comprobar si D es multilineal fijamos (c,d) y consideramos la aplicación $L : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, tal que $(x,y) \to xd - yc$.
- $L((x,y) + (x',y')) = L(x + x', y + x') = (x + x')d - (y + y')c = xd + x'd - yc - y'c = (xd - yc) + (x'd - y'c) = L(x,y) + L(x',y')$.
- $L(\lambda(x,y)) = L(\lambda x, \lambda y) = \lambda xd - \lambda yc = \lambda(xd - yc) = \lambda L(x,y)$.
Después, comprobamos que es alternada: $D((a,b),(a,b)) = ab - ab = 0$. Luego, D es una aplicación multilineal alternada.

4.2. Determinantes

Sea E^n un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, definimos $\mathcal{A}(E) = \{\text{aplicaciones multilineales alternadas}\}$. De forma que $D \in \mathcal{A}(E) \Rightarrow D : E^n \to \mathbb{K}$ tal que $(v_1, ..., v_n) \to D(v_1, ..., v_n)$.

1. $D(au + bw, v_2, ..., v_n) = aD(u, v_2, ..., v_n) + bD(w, v_2, ..., v_n)$.
2. $D(v_1, v_2, v_3, ..., v_n) = -D(v_2, v_1, v_3, ..., v_n)$.
3. D está determinado por el valor que toma en una base de E.

Demostración.

3. Sea $\{e_1, e_2\}$ una base de E. Sean $v_1, v_2 \in E$, de forma que $v_1 = (a_{11}, a_{21}), v_2 = (a_{12}, a_{22})$. Entonces, $D(v_1, v_2) = D(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = a_{11}D(e_1, a_{12}e_1 + q_{22}e_2) + a_{21}D(e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = a_{11}a_{12}D(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}D(e_1, e_2) + a_{21}a_{12}D(e_2, e_1) + a_{21}a_{22}D(e_2, 2_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})D(e_1, e_2)$. $\square$

> Caso general. Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base de E y $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ la matriz de coordenadas de $v_1, ..., v_n \in E$. Entonces $D(e_1, ..., e_n) = \sum_{i_1,...,i_n \in S_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} D(e_1, e_2, ..., e_n)$, donde $\varepsilon i_1 \dots i_n = \pm 1$, dependiendo de la paridad del número de transposiciones necesarias para pasar de $(i_1, ..., i_n) \to (1, ..., n)$.

> Corolario. Sea $\mathcal{A}(E^n)$ un espacio vectorial con $\dim(\mathcal{A}(E^n)) = 1$, $\{D = \det_{(e_1,...,e_n)}(v_1, ..., v_n)\}$ es una base.

Sea $\{u_1, ..., u_n\}$ otra base de E, entonces $\det_{(u_1,...,u_n)} = \lambda \det_{(e_1,...,e_n)}$, ya que $\det_{(u_1,...,u_n)}(e_1, ..., e_n) = \lambda \det_{(e_1,...,e_n)}(e_1, ..., e_n) = \lambda$, puesto que $\det_{(e_1,...,e_n)}(e_1, ..., e_n) = 1$.

> Proposición. $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de $V \Leftrightarrow \det_{(e_1,...,e_n)}(v_1, ..., v_n) \neq 0$.

Demostración.
$\Rightarrow)$ $\det_{(v_1,...,v_n)} = \lambda \det_{(e_1,...,e_n)} \Rightarrow \det_{(v_1,...,v_n)}(v_1, ..., v_n) = \lambda \det_{(e_1,...,e_n)}(v_1, .., v_n) \Rightarrow \det_{(e_i)}(v_1, ..., v_n) \neq 0$.
$\Leftarrow)$ Suponemos que $\{v_1, ..., v_n\}$ no es una base, de forma que $v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + ... + \lambda_n v_n \Rightarrow \det_{(e_i)}(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n) = 0$ por ser $\det_{(e_i)} \in \mathcal{A}(E)$. $\square$

Definición. Sea A una matriz tal que $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se define el ***determinante*** *de A como $\det(A) = |A| = \det_{(e_i)} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right)$, donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$.*

En particular, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,...,i_n)\in S_n} \varepsilon_{i_1,...,i_n} a_{i_1 1} ... a_{i_n n}$.

4.2.1. Propiedades de los determinantes

Sea $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|A_{11}|$, donde denominamos **adjunto del lugar** $(1, 1)$ a $|A_{11}|$
.

Sea $|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -a_{21}|A_{21}|$, donde denominamos **adjunto del lugar** $(2, 1)$ a $|A_{21}|$.

De forma general, sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con $n - 1$ ceros en la primera columna, entonces, $|A| = (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}|$.

4.2.2. Desarrollo de un determinante por columna

Ejemplo 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 4 = 4 \\ -3\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4 \\ 2\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \end{cases}.$$

4.2.3. Desarrollo por filas

Ejemplo 4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -18 & 2 & -27 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 & -7 & 3 \\ -12 & -20 & -4 & -31 & 2 \\ -2 & -3 & -7 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $1\begin{vmatrix} 1 & -2 & -13 & 7 \\ -12 & -20 & 68 & -31 \\ -2 & -3 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & -20 & 7 \\ 20 & 37 & 31 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\left(3\begin{vmatrix} -20 & 7 \\ 37 & 31 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -20 \\ 20 & 37 \end{vmatrix}\right) = -(-2637 + 2370) =$ 267.

4.2.4. Propiedades de los determinantes

1. Si intercambiamos dos columnas, el determinante cambia de signo.
2. Si dos columnas son iguales, el determinante vale 0.
3. Si a una columna le sumamos un múltiplo de otra, el determinante no cambia.
4. Si multiplicamos una columna por $\lambda \in \mathbb{K}$, en entonces $\det \to \lambda \det$.

4.3. Determinante de un endomorfismo

> Proposición. Sea $D \in \det(E)$ una aplicación multilineal alternada, entoncecs $(f^*D) : E \times \ldots \times E \to \mathbb{K}$, tal que $(v_1, \ldots, v_n) \to D(f(v_1), \ldots, f(v_n))$, es también una aplicación multilineal alternada.

Demostración.
1) $(f^*D)(\lambda v_1 + \lambda' v_1', v_2, \ldots, v_n) = D(f(\lambda v_1 + \lambda' v_1'), f(v_2), \ldots, f(v_n)) = D(f(\lambda v_1) + f(\lambda' v_1'), f(v_2), \ldots, f(v_n)) = \lambda(f^*D)(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \lambda'(f^*D)(v_1', v_2, \ldots, v_n) \Rightarrow (f^*D)$ es una aplicación multilineal.
2) $(f^*D)(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = D(f(v_1), \ldots, f(v_i), \ldots, f(v_j), \ldots, f(v_n)) = -D(f(v_1), \ldots, f(v_j), \ldots, f(v_i), \ldots, f(v_n)) = -(f^*D)(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \Rightarrow (f^*D)$ es alternada. □

> Corolario. Sea $D \neq 0 \Leftrightarrow D = \lambda \det_{(e_1, \ldots, e_n)}, \lambda \neq 0$, entonces $(f^*D) = \lambda_f D$. Luego, $\det(f) = \lambda_f$.

Observación. λ_f no depende de $0 \neq D \in \mathrm{Alt}(E)$. Pues si $0 \neq D' \in \mathrm{Alt}(E)$, entonces $D' = \mu D$ con $\mu \neq 0$. Entonces $(f^*D')(v_1, \ldots, v_n) = D'(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \mu D(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \mu(f^*D)(v_1, \ldots, v_n) = \mu\lambda_f D'(v_1, \ldots, v_n) = \lambda_f D'(v_1, \ldots, v_n) \Rightarrow \lambda_f$ no depende de elegir D o D'.

4.3.1. Cálculo de λ_f

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E, tomamos $D = \det_{(e_1, \ldots, e_n)} \Rightarrow (f^*D) = \lambda_f D \Rightarrow (f^*D)(e_1, \ldots, e_n) = \lambda_f D(e_1, \ldots, e_n)$, es decir, $(f^* \det\limits_{(e_1, \ldots, e_n)})(e_1, \ldots, e_n) = \lambda_f \det\limits_{(e_1, \ldots, e_n)}(e_1, \ldots, e_n) = \lambda_f \cdot 1 \Rightarrow \lambda_f = \det(f) = (f^* \det\limits_{(e_1, \ldots, e_n)}) = \det\limits_{(e_1, \ldots, e_n)}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Ejemplo 5. Sea $f : \mathbb{M}_{2\times 3} \to \mathbb{M}_{2\times 3}$ un endomorfismo, tal que $f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ 4a' & 5b' & 6c' \end{pmatrix}$ y C la base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 3}$. Dada $M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ y la base $B =$ $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Comprobamos que B es una base: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, como $|P| = 1 \neq 0 \Rightarrow B$ es una base. Calculamos $f(v_i)$, para $i = 1, 2, ..., 6$, y los expresamos en función de B, de forma que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $|M_B(f)| = 6! \neq 0$.
Luego, $M_B(f) = M_{BB}(f) = M_{BB}(id \cdot f \cdot id) = M_{CB} \cdot M_C(f) \cdot M_{BC} = P^{-1} \cdot M_C(f) \cdot P$.

> Lema. Sea $D \in \det(E)$, con $D \neq 0$, entonces $(g \circ f)^* D = f^*(g^* D)$.

Demostración.
$(g \circ f)^* D(v_1, ..., v_n) = D(g \circ f(v_1), ..., g \circ f(v_n)) = D(g(f(v_1)), ..., g(f(v_n))) = (g^* D)(f(v_1), ..., f(v_n)) = f^*(g^* D)(v_1, ..., v_n)$. $\square$

> Proposición. $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f) \Leftrightarrow |AB| = |A||B|$

Aplicando el lema vemos que $(g \circ f)^* D = \det(g \circ f) D$.

Demostración.
$(g \circ f)^* D = f^*(\det(g) D) = \det(g) \cdot f^* D = \det(g)\det(f) D \Rightarrow \det(g \circ f) D = \det(g)\det(f) D$, con $D \neq 0$, $\Rightarrow \det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$. $\square$

Ejemplo 6. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, de forma que $|A| = 3$ y $|B| = 6$, luego $|A||B| = 18$. Comprobamos que $|AB| = 18$:$|AB| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18$.

4.4. Volúmenes

Sean $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ y $P(v_1, ..., v_n) = \{(t_1 v_1, ..., t_n v_n) : 0 \leq t_i \leq 1\}$.

- $n = 1 \Rightarrow P(1) = \{t : t \in [0, 1]\}$
- $n = 2 \Rightarrow P(v, w) = \{(t_1 v, t_2 w) : 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$

Luego, vol $P(v_1, ..., v_n) = |\det_{(e_1, ..., e_n)}(v_1, ..., v_n)|$.