

---

Relaciones de Equivalencia

1. Considerar la relación definida sobre  $\mathbb{R}$  por:

$$x \sim y \iff x^4 = y^4.$$

Se pide comprobar que es una relación de equivalencia y describir las clases de equivalencia.

2. Consideremos la relación definida en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  por:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Se pide demostrar que es una relación de equivalencia y describir el conjunto cociente, identificándolo con un subconjunto conocido de  $\mathbb{R}$ .

3. Considerar la relación definida sobre el plano  $\mathbb{R}^2$  por:

$$(x, y) \mathcal{R}(x', y') \iff xy = x'y'.$$

Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

4. Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.

a)  $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f([m]) = m.$

b)  $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad g(m) = [m].$

c)  $G : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad G([m], [k]) = [m + k].$

d)  $H : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad H([m], [k]) = [mk].$

5. Definimos en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  la relación

$$(n, m) \mathcal{R}(n', m') \iff \max\{n, m\} = \max\{n', m'\}.$$

a) Demuestra que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.

b) Describe la clase de equivalencia del elemento  $(2, 2)$ .

c) Describe el conjunto cociente.

d) ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

6. Sea  $F$  el conjunto de todas las funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . En  $F$  se define la siguiente relación:

$$f \mathcal{R} g \iff \text{existe } r \in \mathbb{R}, r > 0 \text{ tal que } f(x) = g(x) \text{ para } |x| < r.$$

Demostrar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia sobre  $F$ .

7. Considerar las relaciones en  $\mathbb{Z}$  definidas por:

$$m \mathcal{R}_1 n \iff 5 \mid (m + 2n),$$

$$m \mathcal{R}_2 n \iff 4 \mid (9m + 3n).$$

a) Decidir si  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  son relaciones de equivalencia.

b) En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.

8. Sea  $B$  un subconjunto finito de un conjunto  $A$ . En  $\mathcal{P}(A)$  definimos la relación:

$$X\mathcal{R}Y \iff \text{Card}(X \cap B) = \text{Card}(Y \cap B).$$

- a) Demostrar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.
- b) Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

9. En  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$  se define la siguiente relación:  $X\mathcal{R}Y \iff \min X = \min Y$ .

- a) Demostrar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.
- b) ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?
- c) ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?