Conjuntos y números 14/10

(5) n personas, amistad siempre mutua. Demostrar que hay 2 personas con el mismo número de amistades.

"Palomares" = número posible de amistades

$\square \quad \square \quad \dots \quad \square$

0 amigos 1 amigo n-1 amigos

Supongamos que no hay dos personas con el mismo nº de amigos. Entonces para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ hay una persona con i amigos.
Pero si hay una persona con $n-1$ amigos no puede haber alguien con 0, porque la amistad es mutua. #

■

(7) n enteros no necesariamente distintos $a_1, a_2, \dots, a_n$. Demostrar que $\exists k, l \in \mathbb{Z}$ $0 \leq k < l \leq n$ tq. $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$ es un múltiplo de n

Sean $\sigma_m := \sum_{i=1}^{m} a_i$ para $m \in \{1, \dots, n\}$. Tenemos n σ's y dos opciones:

$\square \quad \square \quad \dots \quad \square$

0 1 n-1 $\to$ restos de $\underline{|n}$

$\sigma_j = q \cdot n + \cancel{r}^{\,0}$

- Todos los σ_m tienen restos distintos. Luego hay un σ_j para $\in \{1, \dots, n\}$ tq. $\sigma_j \,\dot{:}\, n$. ($k = 0$ y $l = j$ en el enunciado)

- Hay dos con el mismo resto, digamos m y m', $m' > m$. Entonces $\sigma_{m'} - \sigma_m = a_{m+1} + \dots + a_{m'}$ es un múltiplo de n. ($k = m$ y $l = m'$) ■

$$\begin{cases} \sigma_{m'} = q'n + r \\ \sigma_m = qn + r \end{cases} \Rightarrow \sigma_{m'} - \sigma_m = q'n + r - qn - r = (q' - q)n.$$

(12.) $f, g : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to P = \{\text{primos}\}$

$f(n)$ = mayor primo que divide a n
$g(n)$ = menor primo que divide a n

a) ¿inyectivas y/o suprayectivas?

f no es inyectiva, $f(3) = f(9) = f(3^2) = 3$

f sí es suprayectiva: sea $p \in P$, entonces $f(p) = p$.

b) $f^{-1}(\{3\}) = \{2^i \cdot 3^j \mid j>0,\ i\geq 0\}$.

$n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ tiene una factorización en potencias de primos $n = p_1^{i_1} \cdots p_k^{i_k}$. Si el mayor primo que divide a n es 3, los dos únicos primos en la descomposición pueden ser 2 y 3. ■

(14) c) Si f ó g no son sobreyectivas, $g\circ f$ no tiene por qué serlo.
(Es decir, tengo que buscar un contraej. a que si f ó g no son sobre, $g\circ f$ es sobre)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ $\Rightarrow$ $g\circ f$ no es sobrey.

f sobre. g no sobre

$\boxed{f: X \to Y,\ g: Y \to Z}$

d) $g\circ f$ es inyectiva $\Rightarrow$ f es inyectiva.

Hacemos reducción al absurdo. Es decir, suponemos que f no es inyectiva.

Si f no es inyectiva, $\exists x_1, x_2 \in X$ distintos tq. $f(x_1) = f(x_2)$

Entonces $\underset{(g\circ f)(x_1)}{\underset{\shortparallel}{g(f(x_1))}} = g(f(x_2)) = (g\circ f)(x_2)$ # Contradicción, porque $g\circ f$ es inyectiva.

Reducción al absurdo →	$P \Rightarrow Q$, suponemos $\neg Q$ y vemos que $(\neg Q)\wedge P$ es una contrad.

f) $X = Z$, $f: X \to Y$, $g: Y \to X$. g biyectiva,

$f\circ g$ es iny./sobrey. $\Leftrightarrow$ f es iny./sobrey.

Caso sobrey.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

• $f\circ g$ es sobre. $\Rightarrow$ f sobre :

$f\circ g: Y \to Y$ es sobrey., luego $\forall y \in Y\ \exists y' \in Y$ tq. $(f\circ g)(y') = y$

$$(f\circ g)(y') = f(g(y'))$$

Es decir, $\exists x = g(y') \in X$ tq. $f(x) = y$. Es decir, f es sobrey.

- f sobre. $\Rightarrow$ $f \circ g$ es sobre.

  Como f es sobre., $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$.

  Como g es biyectiva, $\exists! \, y' \in Y$ tq. $g(y') = x$.

  Luego $(f \circ g)(y') = f(g(y')) = f(x) = y$. Luego $f \circ g$ es sobrey. $\blacksquare$

(15.) A y B finitos de m y n elementos respectivamente.

- ¿ nº de funciones $f: A \to B$?

Para cada elemento de A (m en total), tengo que elegir una imagen de entre n posibilidades.

Es decir, hay en total n^m funciones $f: A \to B$

$a_1 \to$ n posib.

$A = \{a_2\} \to$ n pos. n^m

$\vdots \qquad \vdots$

$a_m \to$ n pos.

- ¿ nº de funciones inyectivas $f: A \to B$?

  - Si $n < m$: por el principio del palomar puedo deducir que hay dos elementos de A con la misma imagen.

  - Si $n = m$: para conjuntos finitos con el mismo número de elem., f iny. $\Leftrightarrow$ f es sobrey. $\Leftrightarrow$ f biy.

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \longrightarrow \{b_1, \ldots, b_n\}$

Para a_1, tengo n posibilidades.

Para a_2, tengo $n-1$ posibilidades

$\vdots$

Para a_n solo queda 1 posibilidad.

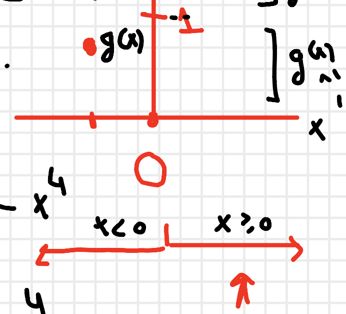
Luego existen $n \cdot (n-1) \ldots 1 = n!$ funciones inyectivas.

  - Si $n > m$: para cada m elementos de B, podemos repetir el argumento anterior. Es decir $\binom{n}{m} m!$ funciones inyectivas.

$\{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_m, \ldots, b_n\}$ coger m elem. de B

(13) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f \circ g \to$ dibujar + decidir si es iny. y/ó sobreyectiva.



$x<0,\ g(x)>1$

- Si $\boxed{x < -1} \Rightarrow g(x) = x^2 > 1 \Rightarrow f(g(x)) = f(x^2) = 1 - x^4$

$x<0,\ g(x) \leq 1$

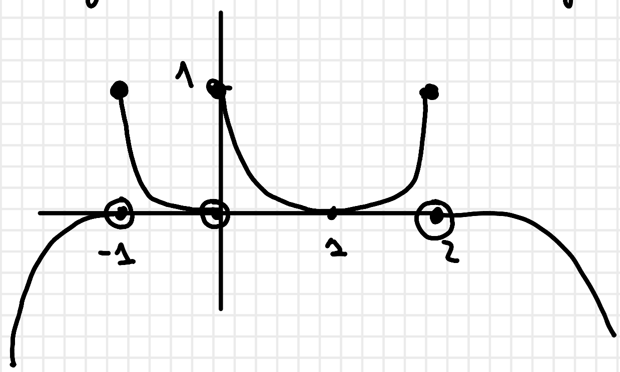
- Si $\boxed{x \in [-1, 0)} \Rightarrow g(x) = x^2 \in (0, 1] \Rightarrow f(g(x)) = f(x^2) = x^4$

$x \geq 0,\ g(x) \leq 1$

- Si $\boxed{x \in [0, 2]} \Rightarrow g(x) = (x-1)^2 \in [0, 1] \Rightarrow f(g(x)) = f((x-1)^2) = (x-1)^4$

$x \geq 0,\ g(x) > 1$

- Si $\boxed{x > 2} \Rightarrow g(x) = (x-1)^2 > 1 \Rightarrow f(g(x)) = f((x-1)^2) = 1 - (x-1)^4$



(Aprox.)

- Decidir si $f \circ g$ es iny. y/ó sobrey.

No es iny. porque $(f \circ g)(0) = (f \circ g)(2)$

No es sobrey. porque $\operatorname{Im}(f \circ g) = (-\infty, 1]$. ■

(16) X un conjunto finito con elem.

- ¿Cuántos subconjuntos tiene $X \times X$?

  "

  ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(X \times X)$?

¿Cuántos elementos tiene $X \times X$? $\to n^2$ elementos

"

$\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X\}$

Luego $\mathcal{P}(X \times X)$ tiene 2^{n^2} elementos.

- ¿Cuántas funciones existen $f: X \to X \times X$?

$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$ cada x_i con $i \in \{1, \dots, n\}$ tiene n^2 posibles imagenes. Luego en total hay $(n^2)^n = n^{2n}$ posibles funciones.

- ¿Cuántas funciones existen $f: X \to P(X \times X)$? $\left(2^{n^2}\right)^n$ ■