Cálculo 2: Grado en Matemáticas y doble grado Mat/Inf.

Examen Parcial 1 **SOLUCIONES:**

1) a) Demuestra la **identidad de polarización**: para todo par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$4 < u, v >= \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2$, donde $< u, v >$ denota el producto escalar de u por v.

Solución:

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle =$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle - \big(\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle\big) = 4\langle u, v\rangle.$$

---

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}^2$ dos vectores no nulos. Demuestra que el vector dado por $v = \|b\|\, a + \|a\|\, b$ biseca el ángulo entre a y b.

Solución:

$$\begin{aligned}\cos(a, v) &= \frac{\langle a, v\rangle}{\|a\|\|v\|} = \frac{\langle a, \|b\|\, a + \|a\|\, b\rangle}{\|a\|\|v\|} = \frac{\|b\|\langle a, a\rangle + \|a\|\ \langle a, b\rangle}{\|a\|\|v\|}\\ &= \frac{\|b\|\|a\|^2 + \|a\|\ \langle a, b\rangle}{\|a\|\|v\|} = \frac{\|b\|\|a\| +\ \langle a, b\rangle}{\|v\|}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(b, v) &= \frac{\langle b, v\rangle}{\|b\|\|v\|} = \frac{\langle b, \|b\|\, a + \|a\|\, b\rangle}{\|b\|\|v\|} = \frac{\|b\|\langle b, a\rangle + \|a\|\ \langle b, b\rangle}{\|a\|\|v\|}\\ &= \frac{\|b\|\ \langle a, b\rangle + \|a\|\|b\|^2}{\|b\|\|v\|} = \frac{\|b\|\|a\| +\ \langle a, b\rangle}{\|v\|}.\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\cos(a, v) = \cos(b, v)$.

---

2) Se considera el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 2\} \bigcup \{(3, 3)\}$.

(*Recuerda que debes razonar las respuestas*)

a) Encuentra el interior, la frontera y los puntos de acumulación de A.

El interior de A.

Solución: int$(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\}$.

Demostración. En primer lugar observamos que el conjunto $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\} \subset A$ es abierto (porque es la preimagen del abierto $(-\infty, 2) \subset \mathbb{R}$ por la función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = |x|$). Como int$(A) \subset A$, para ver que $B =$ int(A) basta probar que

$$(A \setminus B) \cap \text{int}(A) = \emptyset.$$

(A.i) Los puntos de la forma $(2, y)$, $y \in \mathbb{R}$ no están en int(A) porque para cualquier $0 < \varepsilon < 1$, el disco $D((2, y), \varepsilon)$ contiene al punto $(2 + \frac{\epsilon}{2}, y)$ que no está en A. Argumentando de modo análogo concluimos que los puntos de la forma $(-2, y)$, $y \in \mathbb{R}$ tampoco están en int(A).

(A.ii) Para cualquier $0 < \varepsilon$, el disco $D((3,3),\varepsilon)$ contiene al punto $(3, 3 + \frac{\epsilon}{2})$ que no está en A.

Los apartados (A.i) y (A.ii) prueban que $(A \setminus B) \cap \text{int}(A) = \emptyset$.

La frontera de A.

Solución: $\partial(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2\} \cup \{(3,3)\}$.

Demostración. Sea $C := \{(\pm 2, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(3,3)\}$. Primero veamos que $C \subset \partial(A)$.

(B.i) Para los puntos $(\pm 2, y) \in C$ argumentamos como en (A.1) para probar que cualquier disco con radio $\varepsilon > 0$ contiene puntos que no están en A.

(B.ii) Para $(3,3)$ el argumento en (A.ii) nos dice que todo disco con centro $(3,3)$ contiene puntos que no pertenecen a A.

Los apartados (B.i) y (B.ii) prueban que C está contenido en $\partial(A)$. Para concluir veamos que no hay más puntos que los de C en $\partial(A)$.

(C.i) Si $(a,b) \in \text{int}(A)$ entonces $(a,b) \notin \partial(A)$.

(C.ii) Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, entonces tomando

$$r < \min\left\{a - 2, \sqrt{(3-a)^2 + (3-b)^2}\right\}$$

se tiene que $D((a,b),r) \cap A = \emptyset$.

Los puntos de acumulación de A.

Solución: Puntos acumulación$(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2\}$.

Demostración. Sea $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2\}$. Primero veamos que todos los puntos de F son puntos de acumulación de A.

(D.i) Los puntos en $\text{int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\}$ son todos de acumulación por estar en el interior.

(D.ii) Para cada $\epsilon > 0$, y para cada punto de la forma $(2,y)$, el disco $D((2,y),\varepsilon)$ contiene al punto $(2 - \varepsilon/n, y)$ que es distinto de $(2,y)$ y que tiene la propiedad de que si tomamos n suficientemente grande, $|2 - \varepsilon/n| \leq 2$, por lo que $(2 - \varepsilon/n, y) \in A$. Esto prueba que $(2,y)$ es punto de acumulación de A. Un argumento similar nos permite probar lo mismo para los puntos de la forma $(-2,y)$.

Los puntos (D.i) y (D.ii) prueban que todos los puntos de F son puntos acumulacioń de A. Para concluir veamos que no hay más.

(E.i) El punto $(3,3)$ no es de acumulación porque el disco $D((3,3),1/2)$ no contiene ningún punto de A salvo el punto $(3,3)$.

(E.ii) Los puntos de la forma (x,y) con $|x| > 2$ distintos de $(3,3)$ son exactamente los del conjunto:

$$D := \{(x,y) : |x| > 2\} \cap \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(3,3)\}\right)$$

que es abierto por ser intersección de dos abiertos (el primero es la preimagen del abierto $(2,\infty)$ de $\mathbb{R}$ por la función continua $f(x,y) = |x|$ y el segundo es la preimagen del abierto $(0,\infty)$ de $\mathbb{R}$ por la función continua $g(x,y) = (x-3)^2 + (y-3)^2$). Como D es abierto y $D \cap A = \emptyset$, ningún punto de D puede ser punto de acumulación de A.

b) Determina si A es compacto.

Solución. Para que un conjunto sea compacto debe ser cerrado y acotado. El conjunto A es cerrado (como hemos visto en el apartado anterior contiene a todos sus puntos de acumulación). Pero no es acotado porque A contiene a todos los puntos de la forma $(2, y) \in A$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Si A estuviera acotado, existiría $R > 0$ tal que $A \subset D((0,0), R)$. Pero $(2, R+1) \in A$ y $(2, R+1) \notin D((0,0), R)$. Por lo tanto A no es compacto.

---

3) Para las siguientes funciones, describe las curvas de nivel indicadas:

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x, y) = e^{xy}$, para $c = 1, 2, 3$.

Solución. Las curvas de nivel son:

$N_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, que son las rectas $\{x = 0\} \cup \{y = 0\}$;

$N_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \ln(2)\}$, que es la hipérbola $\{y = \ln(2)/x\}$;

$N_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \ln(2)\}$, que es la hipérbola $\{y = \ln(3)/x\}$.

b) $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(x, y) = \log(x^2 + 2y^2)$, para $c = 1, 2, 3$.

Solución. Las curvas de nivel son:

$N_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(x^2 + 2y^2) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = e\}$, que es la elipse $\{x^2 + 2y^2 = e\}$;

$N_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(x^2 + 2y^2) = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = e^2\}$, que es la elipse $\{x^2 + 2y^2 = e^2\}$;

$N_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = e^3\}$, que es la elipse $\{x^2 + 2y^2 = e^3\}$.

---

4) Determina si existen los siguientes límites y, en caso afirmativo, encuentra su valor:

$$(A): \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^3 + xy^2}; \qquad (B): \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Solución. $(A): \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^3+xy^2}$.
Como

$$(x^2 + y^2)^{x^3+xy^2} = e^{(x^3+xy^2)\ln(x^2+y^2)}$$

y como la exponencial es una función continua,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{(x^3+xy^2)\ln(x^2+y^2)} = e^{\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^3+xy^2)\ln(x^2+y^2)}.$$

Por lo tanto, podemos comenzar por calcular el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^3 + xy^2)\ln(x^2 + y^2).$$

Ahora,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^3 + xy^2)\ln(x^2 + y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2).$$

Por un lado observamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0.$$

Por otro, utilizando la regla de L'Hôpital, sabemos que $\lim_{r\to 0} r\ln(r) = 0$.

Esto nos dice que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists r_0 > 0$ de forma que si $0 < r < r_0$ tenemos $|r\ln(r)| < \varepsilon$.

Con el cambio de variable $r = x^2 + y^2$, deducimos que si $\delta = \sqrt{r_0}$ y $\|(x,y)\| < \delta$ entonces $x^2 + y^2 < \delta^2 = r_0$ y concluimos

$$|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)| < \varepsilon, \qquad \text{es decir} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0, \qquad \text{y así} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^3+xy^2} = 1.$$

Solución. (B) : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Este límite no existe, porque si nos aproximamos al origen por las curvas de la forma $x = my^2$, con $m \in \mathbb{R}$, obtenemos que:

$$\lim_{y\to 0} \frac{my^4}{y^4(m^2+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{m}{m^2+1} = \frac{m}{m^2+1}$$

que depende de m.

IMPORTANTE. Fijaos que como $x^2 < x^2 + y^4$ (y esto pasa sean cuales sean los valores de $x, y \in \mathbb{R}$) sí es verdad que

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{xy^2}{x^2}\right|.$$

SIN EMBARGO NO ES VERDAD que

$$\left|\frac{xy^2}{x^2}\right| \leq \left|\frac{x^2y^2}{x^2}\right|.$$

Para esta última desigualdad hemos multiplicado por x al término de la derecha. Y como estamos mirando al límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ se supone que $|x| \ll 1$, por lo que la anterior desigualdad **NO ES CIERTA**. Como estamos multiplicando por un número con valor absoluto menor que 1 el resultado es menor que el número del que partíamos. Es decir en este caso **LO QUE SÍ ES VERDAD ES**

$$\left|\frac{xy^2}{x^2}\right| \geq \left|\frac{x^2y^2}{x^2}\right|.$$

TAMPOCO PODEMOS decir que

$$\left|\frac{xy^2}{x^2}\right| \leq \left|xy^2\right|.$$

De nuevo, estamos mirando a valores muy pequeños de x^2, por lo que

$$\frac{1}{x^2} > 1$$

y en particular,

$$\left|\frac{xy^2}{x^2}\right| \geq \left|xy^2\right|.$$

Recuerda cómo es la gráfica de la función $h(x) = 1/x^2$ en los intervalos $(-1,0)$ y $(0,1)$.

5) Definimos la función $f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-y}\right)$.

a) Encuentra el dominio (natural) de f en $\mathbb{R}^2$ e indica si es continua en él.

Solución. Las funciones $g(x,y) = x$ y $h(x,y) = \operatorname{sen}(x)$ están definidas en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$. La función $l(x,y) = \frac{1}{x-y}$ no está definida en los puntos que anulan el denominador. Por lo tanto el dominio de f es el conjunto de puntos en los que $\frac{1}{x-y}$ está definido, es decir, el dominio de la función f es el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = y\}$.

Las funciones $g(x,y) = x$ y $h(x,y) = \operatorname{sen}(x)$ son continuas en $\mathbb{R}^2$. La función $l(x,y) = \frac{1}{x-y}$ es cociente de funciones continuas (una constante y una función polinómica) por lo tanto es continua en todos los puntos en los que el denominador no se anule, es decir en $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = y\}$. Y la función f es el resultado de hacer el producto de g con $h \circ l$ que son funciones continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = y\}$, por lo tanto f es continua en su dominio.

b) Demuestra que existe el límite de f en el punto $\mathbf{u} = (0,0)$ pero no existe en cambio en $\mathbf{v} = (1,1)$.

Solución. Basta observar que:

$$0 \leq \left| \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-y}\right) \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-y}\right) \right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0.$$

Por lo tanto podemos concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-y}\right) = 0.$$

En cambio, para $\mathbf{v} = (1,1)$, observamos que el límite no existe porque si nos aproximamos a $(1,1)$ a través de la sucesión

$$(x_n, y_n) = \left(1, 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

entonces

$$f(x_n, y_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \longrightarrow 1, \text{ cuando } n \to \infty,$$

y en cambio, si nos acercamos a $(1,1)$ a través de las sucesión

$$(x_n, y_n) = \left(1, 1 - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n)}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

entonces

$$f(x_n, y_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \longrightarrow -1, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Importante. Aquí no vale argumentar que si nos acercamos a $(1,1)$ con las rectas $y = mx$ el límite depende de m o no existe: cuando $(x,y) \to (1,1)$ los puntos de la recta $y = mx$ son de la forma (x, my) y tienden a $(1, m)$, por lo tanto, a menos que $m = 1$ **NO** nos acercamos a $(1,1)$. Es decir, con estas rectas **NO NOS ACERCAMOS A** $(1,1)$.