Tema 5. Integrales sobre superficies

5.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/0bff8148-0ab3-41d5-8ac0-0dc06c0133bc/U5_IntegralesSuperficies.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/4c305fdd-0a14-43c2-8486-bc02d28e33ae/H9_IntegraleSuperficies.pdf

5.1. Superficies parametrizadas

Definición. Una ***superficie parametrizada*** *es una aplicación continua $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que puede escribirse como $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.*
Nota. Decimos que la superficie es diferenciable si la aplicación $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable.

Ejemplo 1. Dada la gráfica de la función $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$, se puede parametrizar con la aplicación $\Phi(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), u)$, para $u \geq 0$.

Definición. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie definida por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Los ***vectores tangentes*** *a S en un punto $\phi(u, v)$ se denotan por T_u, T_v y se definen como $T_u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}$, $T_v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$.*

Definición. Decimos que una superficie S dada por $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es ***suave*** *o regular en un punto $\phi(u, v)$ si $T_u \times T_v \neq \vec{0}$.*
Nota. $T_u \times T_v$ define el vector normal del plano tangente a la superficie S en el punto $\phi(u, v)$.

Definición. Sea S una superficie $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, y sea $(u, v) \in D$ tal que la superficie es regular en $\phi(u, v)$:
1. El ***plano tangente*** *a la superficie en el punto $\phi(u, v)$ es el plano con vector normal $T_u \times T_v$ y que contiene a $\phi(u, v)$.*
2. El ***vector normal unitario*** *a la superficie en $\phi(u, v)$ es el vector $\dfrac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$.*

Ejemplo 2. Dada la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$.
1. Parametrizamos la superficie de la gráfica de S con coordenadas porlares mediante $\Phi_1(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z \geq 0$; o a partir de la gráfica con $\Phi_2(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Estudiamos la regularidad de la superficie tomando la parametrización Φ_1.

$$\vec{N}(\theta, z) = T_\theta \times T_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z).$$

En $(0,0,0)$, $z = 0$ y $\theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \vec{N}(\theta, 0) = (0,0,0) = \vec{0} \Rightarrow S$ no es regular en $(0,0,0)$.

En $(0,1,1)$, $z = 1$ y $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{N}\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right) = (0,1,-1) \neq \vec{0} \Rightarrow S$ es regular en $(0,1,1)$.

3. Hallamos el plano tangente a S en $(0,1,1)$.

Usamos la gráfica de S y definimos $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$z = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1) = y \Rightarrow z = y.$$

5.2. Cálculo de áreas y volúmenes

En el caso de las superficies en $\mathbb{R}^2$ bastará con calcular las integrales dobles del tipo $\displaystyle\iint_D 1\, dxdy$.

En el caso de las superficies en $\mathbb{R}^3$ tomaremos una parametrización $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de la superficie S y calcularemos la integral doble $\displaystyle\iint_D \|T_u \times T_v\|\, dudv$.

Ejemplo 3. Consideramos la región $D = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$, sea $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ y sea S la superficie correspondiente, hallamos el área de S.

Calculamos $T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r)$. De forma que $\|T_r \times T_\theta\| = r\sqrt{2}$.

Luego $\text{Área }(S) = \displaystyle\iint_D \|T_r \times T_\theta\|\, drd\theta = \sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} r\, d\theta dr = 2\pi\sqrt{2}\int_0^1 r\, dr = \pi\sqrt{2}$.

5.2.1. Áreas generales

Para algunos casos existen fórmulas generales que nos permiten calcular la integral concreta para cada uno.

1. **Gráficas**. Para superficies parametrizadas de la forma $(x,y,z) = (u,v,f(u,v))$ tenemos que
$$\text{Área }(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}\, dudv.$$
2. **Superficies de revolución**. Para superficies parametrizadas como $(x,y,z) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v)$, con $f \geq 0$, $u \in [a_0, a_1]$, $v \in [0, 2\pi]$ tenemos que $\text{Área }(S) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{a_0}^{a_1} f(u)\sqrt{f'(u)^2+1}\, dudv = \int_{a_0}^{a_1} 2\pi f(u)\sqrt{f'(u)^2+1}\, du$.

Ejemplo 4. Dado el cono de revolución definido por la recta $y = x$, hallamos el área del cono para $x \in [0,1]$, A_1, y el área de la región tronco-cónica para $x \in [1,2]$, A_2.

$$A_1 = 2\pi\int_0^1 u\sqrt{2}\, du = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

$$A_2 = 2\pi\int_1^2 u\sqrt{2}\, du = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 = 3\pi\sqrt{2}.$$

5.3. Integrales de funciones escalares sobre superficies

*Definición. Sea S una superficie en el espacio parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua con $U \supset S$. Definimos la **integral de f sobre S** como $\iint_S f(x, y, z)\, dA = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\|\, dudv$.*

> Teorema. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ y sean Φ_1, Φ_2 parametrizaciones de S cualesquiera. Entonces, para cualquier función continua $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $U \supset S$ tenemos $\iint_{\Phi_1} f\, dA = \iint_{\Phi_2} f\, dA$.

5.4. Flujo de un campo vectorial

*Definición. Sea S una superficie en el espacio parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo con $U \supset S$. Definimos la **integral de F sobre S** como $\iint_S F \cdot dA = \iint_D F(\Phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v)\, dudv$.*

Ejemplo 5. Dada la semiesfera definida como $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$, calculamos $\iint_S z\, dA$.

1. Parametrizamos con coordenadas esféricas como $\Phi_1(\theta, \varphi) = (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$, de forma que $dA = \sin\varphi\, d\theta d\varphi$, con $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2/\pi]$.
Luego, $\iint_S z\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\theta d\varphi = \left[2\pi \frac{1}{2} \sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$.
2. Parametrizamos utilizando la gráfica como $\Phi_2(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$, con $u^2 + v^2 \leq 1$, de forma que $dA = \left(\sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)^{-1}$.
Luego, $\iint_S z\, dA = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \frac{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\, dudv = \int_{u^2+v^2 \leq 1} 1\, dudv = \pi$.

5.4.1. Superficies orientables

*Definición. Se dice que S es una **superficie orientable** si posee dos caras, cada una de ellas determinada por un **vector normal continuo**.*

Nota. Si $\vec{\eta}_1$ y $\vec{\eta}_2$ son dichos vectores, entonces necesariamente $\vec{\eta}_1 = -\vec{\eta}_2$.

Decimos que dos parametrizaciones Φ_1, Φ_2 de una misma superficie orientable tienen la misma orientación si el vector $T_u \times T_v$ para Φ_1 sigue la misma orientación que el vector $T_{u'} \times T_{v'}$ para Φ_2, en todo punto.

> Teorema. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ y sean Φ_1, Φ_2 dos parametrizaciones de S. Sea F un campo vectorial continuo definido sobre $U \supset S$. Entonces $\iint_{\Phi_1} F \cdot dA = \pm \iint_{\Phi_2} F \cdot dA$, teniendo el mismo signo si Φ_1 y Φ_2 tienen la misma orientación o distinto, de lo contrario.

5.5. Teoremas de Stokes y Gauss

> Teorema de Stokes. Sea S una superficie orientable en $\mathbb{R}^3$ definida por una parametrización $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$, donde D es una región en la que se cumple el Teorema de Green. Sea ∂S la frontera orientada de S y sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $U \supset S$. Entonces $\displaystyle\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \int_{\partial S} F \cdot ds$.

Nota. Si S no tiene frontera, $\partial S = \emptyset$, entonces la integral vale 0.
Nota. La orientación que se debe tomar para ∂S es la que induce la regla de la mano derecha teniendo en cuenta el vector normal a S.

Ejemplo 6. Dada la superficie S con frontera $\partial S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ y orientación en sentido antihorario, queremos hallar $\displaystyle\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA$, con $F = (y, -x, e^{xz})$.

Parametrizamos ∂S como $\sigma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, de forma que $\displaystyle\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\sin\theta, -\cos\theta, e^0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = -\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = -2\pi$.

> Teorema de la divergencia de Gauss. Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ compacto y tal que su frontera topológica $\partial\Omega$ se puede parametrizar por una función diferenciable con la normal exterior. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $U \supset \Omega$. Entonces, $\displaystyle\iiint_\Omega (\nabla \cdot F)\, dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot dA = \iint_{\partial\Omega} (F \cdot \vec{\eta})\, dA$.

Ejemplo 7. Dado el cilindro $\Omega : x^2 + y^2 = 1$, calculamos $\displaystyle\iint_S F \cdot dA$, con $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$, donde S es la superficie de Ω acotada por los planos $z = -1$, $z = 1$ e incluyendo los discos $x^2 + y^2 \leq 1$ para $z = \pm 1$.

Para el cálculo de la integral aplicamos el teorema de Gauss. Calculamos $\nabla \cdot F = \dfrac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \dfrac{\partial y}{\partial z} = y^2 + x^2$. De forma que $\displaystyle\iiint_\Omega (\nabla \cdot F)\, dV = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, dV$. Hacemos un cambio de variables a coordenadas cilíndricas como $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, con r como jacobiano.

Así, $\displaystyle\iint_S F \cdot dA = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3\, dr d\theta dz = 4\pi \int_0^1 r^3\, dr = 4\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \pi$.