CÁLCULO 2: GRADO EN MATEMÁTICAS Y DOBLE GRADO MAT/INF. **Convocatoria extraordinaria**

APELLIDOS: **Nombre:**

(*Este examen consta de 5 ejercicios, todos con el mismo valor y tiene una duración de 3 horas*)
(*Todas las afirmaciones que se realicen deberán estar debidamente justificadas*)

	Inicial primer apellido

1	2	3	4	5	

1) Consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{xy}\right), & \text{si } x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0. \end{cases}$$

a) Demuestra una de las dos siguientes afirmaciones:

i) no existe la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ en los puntos de la forma $(a,0)$ con $a \neq 0$

ii) no existe la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ en los puntos de la forma $(0,b)$ con $b \neq 0$.

b) Determina si f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución

a) Demostramos la afirmación i). La demostración de ii) es análoga. Sea $a \neq 0$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,h)-f(a,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{ah}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} a\left(\operatorname{sen}\frac{1}{ah}\right)$$

Veamos que este límite no existe. Si elegimos la sucesión $h_n = \frac{1}{2\pi n a}$ para todo $n \geq 1$, obtenemos que $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} a\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{ah_n}\right) = 0$. Sin embargo, si elegimos la sucesión $\tilde{h}_n = \frac{1}{a\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$, obtenemos que $\lim_{n\to\infty}\tilde{h}_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} a\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{a\tilde{h}_n}\right) = a \neq 0$.

b) Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Por tanto, las derivadas parciales existen en el punto $(0,0)$. Además,

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{xy}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0,$$

y por tanto f es diferenciable en $(0,0)$. La última desigualdad viene de que $(|x|-|y|)^2 \geq 0$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, por lo que $2|xy| \leq x^2+y^2$, y por tanto $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2) a) Dada $u(x, y)$, una función con derivadas parciales de orden 2, consideramos la función correspondiente en coordenadas polares, $w(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Utiliza la regla de la cadena para demostrar la identidad

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1}$$

b) Comprueba que la función $u(x, y) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ verifica la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

en la región $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Indicación: Utiliza la identidad (1) anterior.*

Solución

a) Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta, \\
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta.
\end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena otra vez (junto con la regla del producto), tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} =& \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta\right) \\
=& \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\operatorname{sen}\theta \\
=& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\theta, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} =& \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta\right) \\
=& -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) r\operatorname{sen}\theta - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta \\
&+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y} r\operatorname{sen}\theta \\
=& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2\operatorname{sen}^2\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta \\
&- \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2\cos^2\theta - \frac{\partial u}{\partial y} r\operatorname{sen}\theta \\
=& r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\operatorname{sen}^2\theta - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\theta\right) \\
&- r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

b) Sea $w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, como en el apartado anterior. Tenemos que

$$w(r,\theta) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}\right) = \ln\left(\frac{1}{r}\right) = -\ln(r).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}, \qquad \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0,$$

y $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + 0 = 0$. El resultado se sigue de la identidad demostrada en el apartado anterior.

3) Utilizando un cambio de variables adecuado, calcula el volumen del sólido bajo la superficie

$$z = \frac{xy}{1+x^2y^2},$$

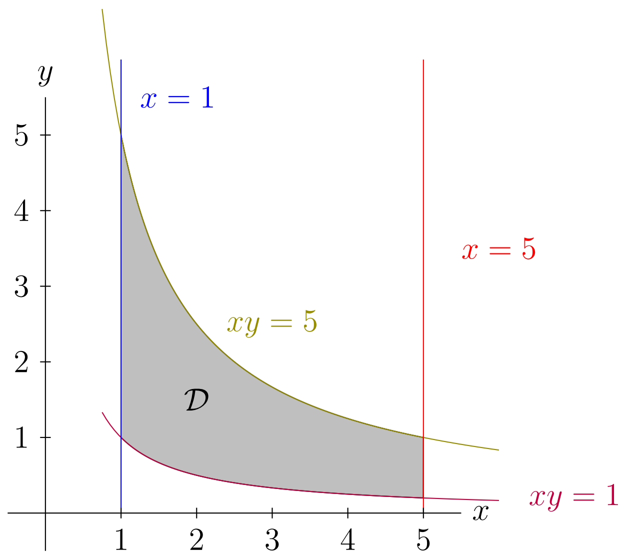
sobre la región acotada por $xy = 1$, $xy = 5$, $x = 1$ y $x = 5$.

Solución

La integral que calcula el volumen que nos piden es

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{xy}{1+x^2y^2}\, dA,$$

donde $\mathcal{D}$ es la región



Haciendo el cambio de variable $u = x$, $v = xy$, la región

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \le x \le 5; 1 \le xy \le 5\}$$

se transforma en el cuadrado $\mathcal{D}^* = [1,5] \times [1,5]$ (en coordenadas (u,v)). Despejando x e y, obtenemos que $x = u$, $y = \frac{v}{u}$. Por tanto, $\frac{xy}{1+x^2y^2}$ es $\frac{v}{1+v^2}$ en las nuevas coordenadas. Como u es positivo en la región D^*, tenemos que

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{u}$$

Por tanto,

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{xy}{1+x^2y^2}\, dA = \int_1^5 \int_1^5 \frac{v}{1+v^2}\frac{1}{u}\, du\, dv = \int_1^5 \frac{v}{1+v^2} \left[\ln(u)\right]_{u=1}^{u=5}\, dv = \ln(5)\int_1^5 \frac{v}{1+v^2}\, dv$$
$$= \ln(5)\left[\frac{\ln(1+v^2)}{2}\right]_{v=1}^{v=5} = \ln(5)\frac{\ln(26)-\ln(2)}{2} = \frac{\ln(5)\ln(13)}{2}$$

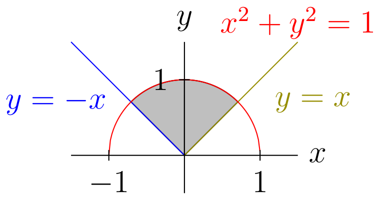
4) Sea γ la frontera de la región

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1;\ y \geq x;\ y \geq -x\right\},$$

orientado en el sentido contrario a las agujas del reloj. Calcula la integral: $\displaystyle\int_\gamma x^3dy - y^3dx$.

Solución

Empezamos dibujando la región D.



Por el teorema de Green para el campo vectorial $F(x,y) = (-y^3, x^3)$,

$$\int_\gamma x^3dy - y^3dx = \int_D 3(x^2+y^2)\, dA$$

En coordenadas polares, la región D viene dada por $0 \leq r \leq 1$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, así que

$$\int_\gamma x^3dy - y^3dx = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 3r^2 \cdot r\, d\theta\, dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 3r^3\, dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{3}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{3\pi}{8}.$$

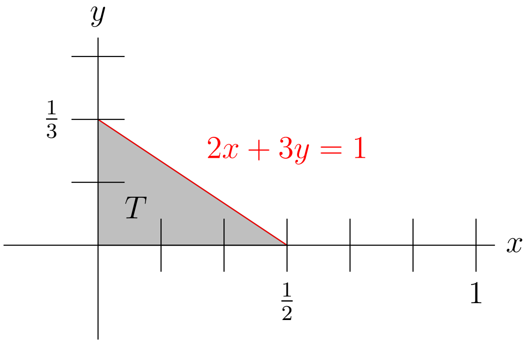
5) Calcula el valor de la integral

$$\iint_S (-x^2+\ln(1+yz))\, dx + (e^{\operatorname{sen} x}z+y)\, dy + (xy)\, dz,$$

donde S es la superficie del tetraedro acotado por el plano $2x+3y+z=1$ y los planos de coordenadas en el primer octante, orientada hacia el exterior.

Solución

Sea Ω el tetraedro sólido que nos describe el problema. El plano $2x+3y+z=1$ corta a los ejes coordenados en $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $\left(0,\frac{1}{3},0\right)$ y $(0,0,1)$. Por tanto, Ω es el sólido que se encuentra encima del triángulo T situado en el plano $z=0$ y debajo del plano $2x+3y+z=1$, donde T viene dado por el siguiente dibujo,



es decir, $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \ 0 \leq y \leq \frac{1-2x}{3}\right\}$.
El teorema de la divergencia aplicado al campo $F(x, y, z) = (-x^2 + \ln(1 + yz), e^{\operatorname{sen} x}z + y, xy)$ nos dice que

$$\iint_S (-x^2 + \ln(1 + yz)) \ dx + (e^{\operatorname{sen} x}z + y) \ dy + (xy) \ dz = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\right) \ dz \ dy \ dx$$

$$= \iiint_\Omega (1 - 2x) \ dz \ dy \ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1-2x}{3}} \int_0^{1-2x-3y} (1 - 2x) \ dz \ dy \ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1-2x}{3}} (1 - 2x)(1 - 2x - 3y) \ dy \ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) \left[\frac{-(1 - 2x - 3y)^2}{6}\right]_{y=0}^{y=\frac{1-2x}{3}} \ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - 2x)^3}{6} \ dx = \frac{1}{6} \left[\frac{-(1 - 2x)^4}{8}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{48}.$$