# Entrega 2

1. Se define la función $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right) & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$.

**APARTADO A.** Decide, de manera razonada, si $f$ tiene derivadas parciales en los puntos de la forma $(a,0)$ con $a \neq 0$ y $(0,b)$ con $b \neq 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,b)-f(0,b)}{h} = \frac{hb\sin\left(\frac{1}{h}\right)\cos\left(\frac{1}{b}\right) - 0}{h} = b\sin\left(\frac{1}{h}\right)\cos\left(\frac{1}{b}\right)$. De forma que, si $k = b\cos\left(\frac{1}{b}\right), b \neq 0 \Rightarrow k \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \lim_{h\to 0} k\sin\left(\frac{1}{h}\right) = k\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{1}{h}\right)$.
Luego $\nexists \lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{1}{h}\right) \Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}$.

Análogamente, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{h\to 0} k\cos\left(\frac{1}{h}\right) = k\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{1}{h}\right)$. Luego $\nexists \lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{1}{h}\right) \Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y}$.

En conclusión, $\nexists$ las derivadas parciales de $f$ en puntos de la forma $(a,0)$ con $a \neq 0$ y $(0,b)$ con $b \neq 0$
.

**APARTADO B.** Demuestra que $f$ tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero no son continuas.

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists$ derivadas parciales de $f$ en $(0,0)$.

Para comprobar la continuidad de la derivada parcial en $x$ en el punto $(0,0)$, estudiamos el límite de dicha derivada en el punto:
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[y\cos\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$. Si nos aproximamos por la recta $y = x$, entonces, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\left[\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]$, que no existe, ya que $\nexists \lim_{x\to 0}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
Análogamente, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}$, ya que $\nexists \lim_{y\to 0}\left(-\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right)$s.

En conclusión, $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, pero como $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}, \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}$, las derivadas parciales no pueden ser continuas en dicho punto.

**APARTADO C.** Determina si $f$ es diferenciable o no en el punto $(0,0)$.

Ya sabemos que las derivadas parciales existen en el punto $(0,0)$, luego basta analizar

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k\right|}{\|(h,k)-(0,0)\|} =$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|hk\sin\left(\frac{1}{h}\right)\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right|}{\|(h,k)\|} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2+k^2}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2} = 0.$$

En conclusión, $f$ es diferenciable en $(0,0)$ ya que $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y el límite anterior es igual a $0$.

ALBERTO TARRASA MARTÍN