TEMA $2c^{(1)}$: Derivadas de orden superior

Para una función f de una variable, sabemos que podemos calcular derivadas iteradas de f, a saber $\frac{d}{dx}f$, $\frac{d^2}{dx^2}f$, etc. Vamos a estudiar las operaciones análogas para funciones multivariables.

Empezamos con el caso particular de las derivadas de orden 2 para $f(x,y)$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Se pueden tomar las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Las derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se llaman a menudo **derivadas mixtas**.

Definición

Si todas estas derivadas existen en cada punto de $\mathbb{R}^2$ y son funciones continuas, se dice que f es una función **de clase** $\mathcal{C}^2$*, o se escribe $f \in \mathcal{C}^2$.*

Para estas funciones tenemos el resultado siguiente.

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$, entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Derivadas de orden superior (cont.)

Ejemplo: Sea $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$. Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(y + 2(x + 2y)) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x + 4(x + 2y)) = 8.$$

Por otra parte, las derivadas mixtas se calculan como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y + 2(x + 2y)) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 5y) = 5;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x + 4(x + 2y)) = \frac{\partial}{\partial x}(5x + 8y) = 5.$$

Encontramos también que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5$.

Derivadas de orden superior (cont).

Más generalmente, si la función es de más de 2 variables, podemos tomar de modo similar las derivadas parciales de orden 2, fijando $i, j \in 1, \ldots, n$ y tomando la derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$.

Notación: A menudo se escribe $f_{x_i x_j}$ para denotar $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definición

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$. Decimos que f es **de clase $\mathcal{C}^2$ en** U si para todo $i, j \in 1, \ldots, n$ la derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existe y es continua en U.

Como en el caso $n = 2$, tenemos en general lo siguiente.

Teorema

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en U, entonces para todo $i, j \in 1, \ldots, n$, para todo punto $x_0 \in U$, tenemos $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$.

Derivadas de orden superior (cont).

Ejemplo: Sea $f(x,y,z) = e^{xy} + z\cos(x)$. Las derivadas de orden 2 (o derivadas segundas) de f son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} - z\,\mathrm{sen}(x)) = y^2 e^{xy} - z\cos(x).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x^2 e^{xy}. \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\cos(x) = 0.$$

Verifiquemos que las derivadas cruzadas son iguales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy}, &\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - z\,\mathrm{sen}(x)) = e^{xy} + xye^{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\mathrm{sen}(x), &\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\mathrm{sen}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, &\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Demostración del Teorema sobre derivadas mixtas

Puesto que las derivadas no involucradas se consideran fijas, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f tiene solo dos variables. Así, suponiendo que $f \in \mathcal{C}^2$ queremos probar que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Para ello, fijados x, y, s, t llamamos

$$\begin{aligned} R_{s,t} &= (f(x+s, y+t) - f(x+s, y)) - (f(x, y+t) - f(x,y)) && (1)\\ &= g(x+s) - g(x) \qquad (\text{ con } g(x) = f(x, y+t) - f(x,y), \text{ fijados } y, t) && (2)\\ &= (f(x+s, y+t) - f(x, y+t)) - (f(x+s, y) - f(x,y)) && (3)\\ &= h(y+t) - h(y) \qquad (\text{ con } h(y) = f(x+s, y) - f(x,y), \text{ fijados } x, s) && (4) \end{aligned}$$

Utilizando el TVM dos veces en (2) queda, para ciertos $\quad 0 < s^* < s, \quad 0 < t^* < t$

$$R_{s,t} = g'(x+s^*)\, s = \left(\frac{\partial f(x+s^*, y+t)}{\partial x} - \frac{\partial f(x+s^*, y)}{\partial x} \right) s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x+s^*, y+t^*) st$$

Utilizando el mismo argumento ahora en (4), existen $\quad 0 < \bar{s} < s, \quad 0 < \bar{t} < t \quad$ tales que

$$R_{s,t} = h'(y+\bar{t})\, t = \left(\frac{\partial f(x+s, y+\bar{t})}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y+\bar{t})}{\partial y} \right) t = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\bar{s}, y+\bar{t}) ts.$$

Identificando ambos resultados queda $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x+s^*, y+t^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\bar{s}, y+\bar{t})$. Finalmente, usando la continuidad, al hacer $s \to 0$ y $t \to 0$ obtenemos $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

El Hessiano o la matriz Hessiana

- Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable dos veces, entonces se define la matriz Hessiana como la matriz de dimensiones $n \times n$ dada por

$$\mathbf{H}_f(x_0) = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \right|_{x=x_0},$$

  donde todas las derivadas están calculadas en el punto x_0.

- Obsérvese que el Hessiano equivale a la matriz de derivadas de la función vectorial dada por $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $F(x) = \nabla f(x)$. De esta forma, F tiene como funciones coordenadas $F_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$.

- Por último, hacemos notar que si la función es de clase $\mathcal{C}^2$ entonces la matriz Hessiana es simétrica: $H = H^T$ (es decir, la entrada $A_{i,j}$ coincide con la $A_{j,i}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$).

Derivadas de orden superior (cont).

En general, si todas las derivadas de orden k existen y son continuas en U, decimos que la función es **de clase $\mathcal{C}^k$ en U**. También podemos considerar la derivación k veces con respecto a las variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$ que pueden ser repetidas o no:

$$\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial}{\partial x_{j_2}} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} f(x)$$

En este caso, las derivadas de orden $\leq k$ conmutan, es decir que no importa el orden de las variables en que tomemos las derivadas, la función obtenida al final será la misma.

Recordad: A la hora de hacer derivadas mixtas de una función $\mathcal{C}^k$, podemos elegir el orden de derivación que nos convenga:

Ejemplo: Hallar la derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para la función $f(x, y) = x^2 y + \int_0^{y^2} \operatorname{sen} e^t \, dt$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x.$$

Repaso: Polinomio de Taylor en una variable

Polinomio de Taylor en una variable.

- Queremos aproximar una función, cerca de un punto dado x_0, por un polinomio.
- La idea es imponer que el polinomio comparta con la función el valor de las sucesivas derivadas en ese punto x_0.

El **polinomio de Taylor** de orden n de f alrededor del punto x_0 es

$$P_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

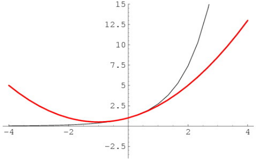
Idea: Cuando x está cerca de x_0, los valores del polinomio $P_{n,x_0}f(x)$ se aproximan a los de $f(x)$. Más aún, la aproximación mejora cuando n aumenta.

Queda caracterizado por la propiedad de ser el único polinomio Q de grado menor o igual que n que verifica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-Q(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Algunos ejemplos clásicos:

- $e^x, \quad x_0 = 0 \quad \to \quad 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} \cdots + \dfrac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$



Aqui aparecen las gráficas de $f(x) = e^x$ (gris) y de su segundo polinomio de Taylor (rojo)

- $\operatorname{sen} x, \quad x_0 = 0 \quad \to \quad x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- $\cos x, \quad x_0 = 0 \quad \to \quad 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

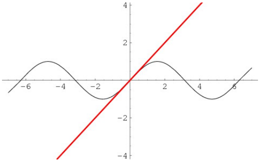
- $\log(1+x), \quad x_0 = 0 \quad \to \quad x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

Repaso: Polinomio de Taylor en una variable (cont.)

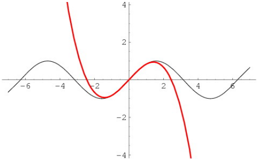
La aproximación mejora al aumentar el grado del polinomio:

Ejemplo: $f(x) = \text{sen}\, x$

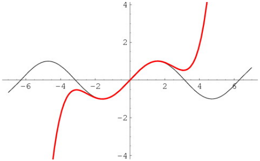
$$P_{1,0}f(x) = x$$



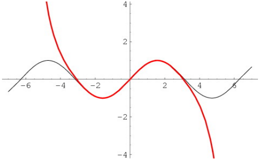
$$P_{3,0}f(x) = x - \frac{x^3}{6}\,.$$



$$P_{5,0}f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$



$$P_{7,0}f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$



Teorema (Fórmula de Taylor de 1$^{\text{er}}$ orden)

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *un abierto y* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciable en* $x_0 \in U$*. Entonces si* $h \in \mathbb{R}^n$ *con* $x_0 + h \in U$*,*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + R_1(x_0, h),$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{|R_1(x_0, h)|}{\|h\|} = 0, \qquad \textit{o también} \qquad R_1(x_0, h) = o(\|h\|), \ \textit{para} \ \|h\| \to 0.$$

Cuando $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el punto es (x_0, y_0), y $n = 1$, la fórmula queda

$$P_{1,x_0} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Esto coincide con la fórmula del plano tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

Ejemplo: fórmula de Taylor de orden 1

Escribe la fórmula de Taylor de orden 1 centrado en $(0,0,1)$ para la función

$$f(x,y,z) = ze^x + \cos(x+y).$$

Solución: Como piden orden 1, empezamos calculando

- el valor de la función en el punto $(0,0,1)$: $f(0,0,1) = 2$;
- el valor de las derivadas parciales de orden 1 en el mismo punto $(0,0,1)$:

$$f_x(0,0,1) = ze^x - \operatorname{sen}(x+y)|_{(0,0,1)} = 1, \quad f_y(0,0,1) = -\operatorname{sen}(x+y)|_{(0,0,1)} = 0,$$

$$f_z(0,0,1) = e^x|_{(0,0,1)} = 1$$

Con estos valores, solo hay que sustituir en la fórmula de Taylor:

$$f(x,y,z) = f(0,0,1) + f_x(0,0,1)(x-0) + f_y(0,0,1)(y-0) + f_z(0,0,1)(z-1) + R_1$$

$$= x + z + 1 + R_1$$

Fórmula de Taylor de 2º orden

Teorema

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $x_0 \in U$. Entonces la fórmula de Taylor de segundo orden de f en x_0 es

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + R_2(x_0,h)$$

$$= f(x_0) + < \nabla f(x_0), h > + \frac{1}{2} h \cdot H_f(x_0) \cdot h^T + R_2(x_0,h),$$

donde $H_f(x_0)$ es la matriz Hessiana de f en el punto x_0 y $\lim_{h \to 0} \frac{R_2(x_0,h)}{\|h\|^2} = 0.$

La demostración se sigue del caso de una dimensión: Dado $x_0 \in U$, de forma que $B(x_0, r) \subset U$ para cierto $r > 0$, elegido $\|h\| < r$ definimos la función de una variable

$$\varphi(t) = f(x_0 + th), \qquad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces φ es de clase $\mathcal{C}^2$ por ser la composición de la trayectoria $\sigma(t) = x_0 + th$ con f, i.e. $\varphi = f \circ \sigma$. Por tanto

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + R_\varphi,$$

y el uso de la regla de la cadena nos da $\varphi'(0) =< \nabla f(x_0), h >$ y $\varphi''(0) = h \cdot H_f(x_0) \cdot h^T$.

Ejemplo: fórmula de Taylor de orden 2

Calcula la fórmula de Taylor de grados 1 y 2 de la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(x\,y)$ en el punto $(1, \pi/2)$.

Solución: Tenemos primero $f(1,\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.

Las derivadas parciales de orden 1 son las siguientes:
$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi/2) = y\cos(xy)|_{(1,\pi/2)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi/2) = x\cos(xy)|_{(1,\pi/2)} = 0.$

Las derivadas parciales de orden 2 son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\pi/2) = -y^2\operatorname{sen}(xy)|_{(1,\pi/2)} = -\pi^2/4.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,\pi/2) = -x^2\operatorname{sen}(xy)|_{(1,\pi/2)} = -1.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,\pi/2) = -xy\operatorname{sen}(xy)|_{(1,\pi/2)} = -\pi/2.$$

La fórmula de Taylor de grado 1 es $f(x,y) = 1 + R_1$.

La fórmula de Taylor de grado 2 es

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi^2}{4}(x-1)^2 + \pi(x-1)(y-\frac{\pi}{2}) + (y-\frac{\pi}{2})^2\Big) + R_2.$$

Otro ejemplo: fórmula de Taylor de orden 2

Halla la fórmula de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ de la función: $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

Solución: Como antes, empezamos calculando todas las parciales hasta orden dos.

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= e^{x^2+y^2}|_{(0,0)} = 1 & f_{xx}(0,0) &= 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2)|_{(0,0)} = 2 \\
f_x(0,0) &= 2xe^{x^2+y^2}|_{(0,0)} = 0 & f_{yy}(0,0) &= 2e^{x^2+y^2}(1+2y^2)|_{(0,0)} = 2 \\
f_y(0,0) &= 2ye^{x^2+y^2}|_{(0,0)} = 0 & f_{xy}(0,0) &= f_{yx}(0,0) = 4xye^{x^2+y^2}|_{(0,0)} = 0
\end{aligned}
$$

Y ahora sustituimos en la fórmula sabiendo que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(0,0)(x-0)^2 + f_{yy}(0,0)(y-0)^2 + 2f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0)\Big) + R_2 \\
&= 1 + \frac{1}{2}(2x^2+2y^2) + R_2 = 1 + x^2 + y^2 + R_2
\end{aligned}
$$

Definición (Fórmula de Taylor de orden k)

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $f \in C^k$ en un entorno de $x_0 \in U$. Entonces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

$$+ \cdots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \cdots, i_k}^{n} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k} + R_n(x_0, h),$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_k(x_0, h)}{\|h\|^k} = 0$$

En los sumatorios, cada índice $i_1, \ldots, i_k$ va desde 1 hasta n. Esto implica que, por ejemplo, el último sumatorio que aparece en la fórmula anterior tendrá n^k sumandos (muchos de los cuales se podran agrupar).

Polinomio y resto de Taylor

El polinomio de Taylor es simplemente las fórmulas de Taylor sin el resto. Por ejemplo,

$$P_{k,x_0,f}(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

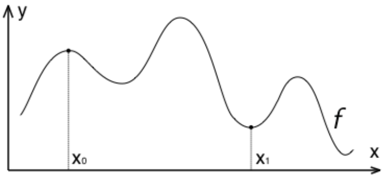
$$+ \cdots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\cdots,i_k}^{n} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

es el **polinomio de Taylor de grado** k **para la función** f **en el punto** x_0.

Cuando la función es C^{k+1} entonces el **resto de Taylor de orden** k se describe con fórmulas (bien la de Lagrange, bien la integral). (Ver el libro de texto).

Tema $2c^{(2)}$: Máximos, mínimos y extremos locales

En esta sección estudiamos cómo calcular máximos y mínimos de funciones multivariables. Empecemos recordando estas nociones para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



x_0 = máximo local: f toma un valor máximo en un entorno de x_0.

x_1 = mínimo local: f toma un valor mínimo en un entorno de x_1.

Estas nociones se generalizan fácilmente a funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definición (Máximo local)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Decimos que $x_0 \in U$ es un **máximo local** *de f si existe una bola abierta V con $x_0 \in V \subset U$ tal que $\forall\, x \in V$, $f(x) \leq f(x_0)$.*

Definición (Mínimo local)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Decimos que $x_1 \in U$ es un **mínimo local** de f si existe una bola abierta V con $x_1 \in V \subset U$ tal que $\forall\, x \in V$, $f(x) \geq f(x_1)$.

Diremos que $x_0 \in U$ es un **extremo local** si es un máximo local o un mínimo local.

Máximos y mínimos locales

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$. Si x_0 es un extremo local, entonces $\nabla f(x_0) = \vec{0}$.

Los puntos en los que se anula el gradiente se denominan **puntos críticos**

Dem.: La demostración se deduce a partir del caso 1-dimensional. Para ello basta ver que si f tiene un extremo local en $x = 0$, entonces para cada vetor $\vec{e}_j$ de la base canónica, la función en la variable t dada por

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{e}_j),$$

tiene un extremo local en el punto $t = 0$. Luego $\varphi'(0) = 0$. Ahora bien, esto nos dice que

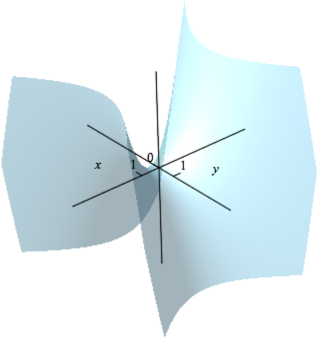
$$0 = \varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Como esto es cierto para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, deducimos $\nabla f(x_0) = (0, 0, \ldots, 0)$ q.e.d.

Máximos y mínimos locales (cont.)

Ejemplo 1: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$. Se tiene $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$, que se anula en $(0,0)$, luego es un punto crítico. En este caso es fácil ver que se trata de un mínimo.

Ejemplo 2: Sea $f(x,y) = x^2 - y^2$. Aquí se tiene $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y)$, que de nuevo se anula en $(0,0)$. Sin embargo, si nos acercamos a $(0,0)$ por $y = 0$, tenemos un máximo en $x = 0$, mientras que si nos acercamos a $(0,0)$ por $x = 0$, tenemos un mínimo en $y = 0$. Un tal punto crítico se llama un *punto de silla*.



Tipos de extremos

Supongamos que $x_0 \in U$ es un extremo de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces x_0 puede ser de tres tipos:

- un **máximo** local;
- un **mínimo** local;
- un **punto de silla**, si no es ni máximo ni mínimo local.

Los puntos críticos los hallamos resolviendo $\nabla f(x_0) = 0$; una vez hecho esto, **¿cómo sabemos a cuál de los tres tipos de arriba pertenece?**

En el caso de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la segunda derivada f'' nos da el criterio deseado, a saber, que x_0 es un máximo local si $f''(x_0) < 0$ y es un mínimo local si $f''(x_0) > 0$.

El criterio equivalente en el caso de funciones de varias variables viene dado por la matriz Hessiana, algunas de cuyas propiedades revisamos a continuación.

Formas cuadráticas definidas positivas o negativas

Dada una matriz A de dimensiones $n \times n$ definimos la forma cuadrática asociada por medio de

$$F_A(x) = x \cdot A \cdot x^T.$$

Observaciones:

- F_A coincide con un polinomio homogéneo de grado 2, es decir, $F_A(tx) = t^2 F_A(x)$.
- F_A es continua entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$.

Definiciones y propiedades:

- Diremos que la matriz A es **definida positiva** si, con la notación anterior, se tiene $F_A(x) > 0, \forall x \neq 0$
- Diremos que la matriz A es **definida negativa** si se tiene $F_A(x) < 0, \forall x \neq 0$

- Si la matriz A es **definida positiva** (respectivamente **definida negativa**) existen dos valores $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ tales que

$$\lambda \|x\|^2 \leq F_A(x) \leq \Lambda \|x\|^2. \tag{5}$$

(respectivamente $(\lambda \|x\|^2 \leq -F_A(x) \leq \Lambda \|x\|^2.)$)

Formas cuadráticas definidas positivas o negativas (cont.)

Dem.: Demostramos solo el primer caso, (5): Fijado $x \neq \vec{0}$, se tiene por un lado

$$F_A(x) = F_A\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 F_A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \tag{6}$$

Como F_A es continua y la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ es un compacto, F_A alcanza su máximo y su mínimo sobre S. Si llamamos $\lambda = \text{mín}_{y \in S} F_A(y)$ y $\Lambda = \text{máx}_{y \in S} F_A(y)$, usando que F_A es definida positiva, deducimos que $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ y que $\lambda \leq F_A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \Lambda$. Llevando esta estimación a (6) obtenemos (5) tal y como queríamos.

Ejemplos:

- Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ es simétrica y $\det A = ad - b^2 > 0$ entonces
  - si $a > 0$, A es definida positiva,
  - si $a < 0$, A es definida negativa.

Dem.: Dado $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene $F_A(x, y) = ax^2 + 2bxy + dy^2$. Por hipótesis $a \neq 0$, luego

$$F_A(x, y) = a\left[(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{y^2}{a^2}(ad - b^2)\right].$$

La conclusión se obtiene observando que el término entre corchetes es siempre positivo.

Formas cuadráticas definidas positivas o negativas (cont.)

- Si $n = 3$ y $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es simétrica, entonces
  - $a > 0$, $\begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} = ad - b^2 > 0$ y $\det A > 0 \quad \Longrightarrow \quad A$ es definida positiva,
  - $a < 0$, $\begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} = ad - b^2 > 0$ y $\det A < 0 \quad \Longrightarrow \quad A$ es definida negativa.

Con más generalidad se tiene el siguiente

Criterio de Silvester

Dada una matriz M cuadrada de tamaño $n \times n$, para cada $i \in 1 \dots n$ se define el *menor principal i-ésimo* de M como el determinante de la submatriz $M_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ cuyas filas y columnas son las primeras i filas y columnas de M. Supongamos que cada menor de la matriz M es no nulo. Entonces

1. si todos los menores principales de M son positivos, entonces M es **definida positiva**
2. si los menores principales i-ésimos de M son negativos para i impar y positivos para i par, entonces M es **definida negativa**

Uso de la Hessiana para distinguir extremos

Clasificación de puntos críticos

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ en U. Sea $x_0 \in U$ un punto crítico de f, y supongamos que cada menor de la matriz Hessiana $H = H_f(x_0)$ es no nulo.

1) x_0 es un **mínimo local** si $H_f(x_0)$ es **definida positiva**.

2) x_0 es un **máximo local** si $H_f(x_0)$ es **definida negativa**.

3) Si los menores principales son todos no nulos y no se da ni 1) ni 2), entonces x_0 es un **punto de silla** (en algunas direcciones es un mínimo y en otras un máximo).

(Si algún menor de $H_f(x_0)$ es nulo, no podemos decir nada en general.)

Dem.: Demostramos solo el caso 1). Al ser x_0 un punto crítico, es decir $\nabla f(x_0) = \vec{0}$, el teorema de Taylor nos dice que

$$\lim_{h \to \vec{0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot H \cdot h^T}{\|h\|^2} = 0. \tag{7}$$

Por lo visto anteriormente, s H es definida positiva, $\exists \lambda > 0$ tal que $h \cdot H \cdot h^T \geq \lambda \|h\|^2$. Por otro lado, de (7) deducimos que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ de forma que $\|h\| < \delta \implies$
$-\epsilon \|h\|^2 \leq f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot H \cdot h^T$. Eligiendo $\epsilon = \lambda/2$ queda

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq h \cdot H \cdot h^T - \epsilon/2\|h\|^2 \geq \lambda\|h\|^2 - \lambda/2\|h\|^2 = \lambda/2\|h\|^2 > 0,$$

$\forall \|h\| < \delta$. Luego x_0 es un mínimo local estricto.

EL caso $n = 2$

Definición

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^2$*. El* **discriminante** *de* f *en* (x_0, y_0) *(denotado por* D*) es el determinante del Hessiano de* f *en* (x_0, y_0)*, esto es,* $D := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ *todo ello evaluado en el punto* (x_0, y_0)*.*

Teorema (clasificación de puntos críticos)

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función de clase* C^2 *en un abierto* U*.*

- *Un punto* $(x_0, y_0) \in U$ *es un* **mínimo local estricto** *de* f *si se tiene que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0, \qquad D > 0 \text{ en } (x_0, y_0).$$

- *Un punto* $(x_0, y_0) \in U$ *es un* **máximo local estricto** *de* f *si se tiene que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0, \qquad D > 0 \text{ en } (x_0, y_0).$$

- (x_0, y_0) *es un* **punto de silla** *si* $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0), \qquad D < 0.$

Observación: Si $D = 0$, **no podemos decir nada** de (x_0, y_0)

Ejemplo de cálculo y clasificación de extremos

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$. Calculemos los puntos críticos de f.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y$. Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$.

Encontramos el punto crítico $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Calculamos la hessiana en $(0, 0)$: $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Los menores principales son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\quad \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4$.

Por lo tanto $(0, 0)$ es un mínimo local.

Observación: Este ejemplo es un caso muy especial ya que se tiene

$$f(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es decir, f es en sí misma una forma cuadrática asociada a la matriz $A = \frac{1}{2} H$.

Otro ejemplo de cálculo de mínimos

Queremos encontrar los puntos de **la gráfica de** $f(x,y) = 1/(xy)$ que minimizan la distancia al origen $(0,0,0)$. Esta distancia se da por la fórmula siguiente:

$$\big\|(x,y,f(x,y)) - (0,0,0)\big\| = \big(x^2 + y^2 + 1/(x^2y^2)\big)^{1/2}.$$

Por lo tanto, el problema consiste en encontrar los mínimos de la función $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1/(x^2y^2)$. Calculemos los puntos críticos.

$$\tfrac{\partial g}{\partial x} = 2x - \tfrac{2y^2x}{x^4y^4} = 2x - \tfrac{2}{x^3y^2}, \quad \tfrac{\partial g}{\partial y} = 2y - \tfrac{2}{x^2y^3}.$$

Está claro que los puntos críticos tienen x, y ambos no nulos.

Tenemos pues que resolver el sistema $\begin{cases} 2x^4y^2 = 2 \\ 2x^2y^4 = 2 \end{cases}$. Encontramos cuatro puntos críticos, a saber $(x_0, y_0) = (\pm 1, \pm 1)$. Confirmemos que son mínimos locales:

$$\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 + \tfrac{6y^2x^2}{x^6y^4} = 2 + \tfrac{6}{x^4y^2}, \quad \tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2 + \tfrac{6}{x^2y^4}, \quad \tfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \tfrac{4yx^3}{x^6y^4} = \tfrac{4}{x^3y^3}.$$

Tenemos $H_g\big(\pm(1,1)\big) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $H_g\big(\pm(1,-1)\big) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, luego $(\pm 1, \pm 1)$ son mínimos locales, por la teoría desarrollada.

Otro ejemplo de cálculo de mínimos globales (cont.)

Por otra parte, en esos puntos $(\pm 1, \pm 1)$, $g(\pm 1, \pm 1) = 3$.

Para asegurarnos de que g no puede tomar valores más pequeños en $\mathbb{R}^2$, observamos que si (x, y) se halla fuera del disco cerrado de radio 2 (por ejemplo)

$$x^2 + y^2 \geq 2^2 = 4,$$

y

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2} \geq 4.$$

Por lo tanto el mínimo global de g se alcanza en el **interior** del disco $x^2 + y^2 \leq 4$, y como ahí los puntos críticos son $(\pm 1, \pm 1)$, corresponden a los mínimos de g en todo su dominio.

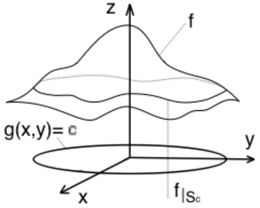
Tema $2c^{(3)}$: Extremos condicionados

El problema que trataremos aquí es el de hallar extremos de una función bajo ciertas condiciones o restricciones, llamados **extremos condicionados**.

El método principal que estudiaremos para hacer esto es el llamado método de los **multiplicadores de Lagrange**.

Vamos a describir el problema más precisamente:

Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en U. Denotemos por S_c el conjunto de nivel c de g, a saber $S_c = \{x : g(x) = c\}$. Denotemos por $f|_{S_c}$ la *restricción* de f a S_c, es decir la función cuyo dominio es $S_c \to \mathbb{R}$, dada por $x \in S_c \mapsto f(x)$.



Nuestra idea ahora es estudiar los extremos de $f|_{S_c}$, es decir, los extremos de f sujetos a la condición de pertenecer a S_c.

Extremos condicionados: multiplicadores de Lagrange

El método se basa en el resultado central siguiente.

Teorema (Multiplicadores de Lagrange)

Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y denotemos por S_c el conjunto de nivel c de g. Supongamos que $x_0 \in S_c$ es tal que $\nabla g(x_0) \neq 0$. Si $f|_{S_c}$ tiene un extremo en x_0, entonces existe un número real λ_0 tal que $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$. (Demo en clase)

¿Cómo se usa?:
Para hallar los máximos y los mínimos de $f(x)$ sujetos a la restricción $g(x) = c$, donde $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

- Hay que hallar los $\lambda \in \mathbb{R}$ y los puntos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0), \qquad \text{con la condición} \quad g(x_0) = c.$$

  Para ello, se construye la función $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$. Sus puntos críticos (en x y λ) son los que vamos buscando:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -g(x) = 0.$$

- Después hay que calcular $f(x)$ en todos los puntos encontrados anteriormente; el mayor sera el máximo, el menor el mínimo.

Extremos condicionados: multiplicadores de Lagrange

Para hallar los máximos y los mínimos de $f(x)$ sujetos a más de una restricción, $g_1(x) = c$, $g_2(x) = c_2, \ldots, g_k(x) = c_k$ donde

$$f, g_1, \ldots, g_k : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ y } c_i \in \mathbb{R} :$$

(esto a veces se pide como maximizar y minimizar f en la superficie de nivel $S_c = \{g_1(x) = c_1, \ldots, g_k(x) = c_k\}$)

- hay que resolver el sistema

$$\begin{gathered}\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(x_0), \\ g_1(x_0) = c_1, \quad g_2(x_0) = c_2, \quad \ldots, \qquad g_k(x_0) = c_k,\end{gathered}$$

  donde a menudo hay que hallar tanto las λ's como los x_0's, pero prestando especial atención a estos últimos;

- después evaluamos f en los x_0's encontrados; el mayor valor será el máximo de f, y el menor, el mínimo.

Extremos condicionados: ejemplo 1

Ejemplo: encontrar el máximo de $f(x, y, z) = x + z$ con la condición que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Para un parámetro real λ, utilizamos la función auxiliar $F = f(x, y, z) - \lambda(g(x, y, z) - 1)$, con $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Consideramos λ como una nueva variable, y buscamos los puntos críticos de la función de *cuatro* variables $F(x, y, z, \lambda)$.

Tenemos $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2\lambda y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - 2\lambda z$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 - z^2 + 1$.

Para que se anulen las tres primeras derivadas parciales, se necesita $\lambda \neq 0$, $y = 0$, $x = z = 1/(2\lambda)$. Por lo tanto la cuarta se anula también si $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$, i.e. si $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$.

Substituimos λ en $x = z = 1/(2\lambda)$, obteniendo los puntos críticos condicionales $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (máximo), y $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ (mínimo).

Extremos condicionados: ejemplo 2

<u>Ejemplo:</u> hallar los extremos de $f(x, y) = xy$ en $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Aquí haremos como en la clase anterior, a saber, estudiar primero los extremos en el interior D°, y luego mirar si hay extremos en la frontera ∂D.

1) Estudio en D°: aquí aplicamos el análisis de extremos visto anteriormente. Tenemos
$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$
Tenemos pues $(0, 0)$ como punto crítico en D°, y $H_f(0, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tiene determinante negativo, luego $(0, 0)$ es un punto de silla.

2) Estudio en $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$: aquí, podemos usar el método de los multiplicadores. Ponemos $F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2\lambda x \\ x(1 - (2\lambda)^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

$\lambda = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad (x, y) = \pm(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}),$ máximos.

$\lambda = -1/2 \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad \Rightarrow \quad (x, y) = \pm(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}),$ mínimos.

Extremos condicionados: ejemplo 3

<u>Ejemplo:</u> hallar los extremos de $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ en $D : \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$.

De nuevo, dividimos el análisis en dos partes.

1) Estudio en D°: calculamos los extremos locales. Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Tenemos pues $(0,0)$ como punto crítico en D°, y $H_f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene determinante positivo, luego $(0,0)$ es un mínimo local.

2) Estudio en $\partial D = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 = 2\}$: de nuevo usamos multiplicadores. Sea $F(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \lambda(\frac{x^2}{2} + y^2 - 1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = x - \lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = y - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{2} + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = \pm 1, \ \lambda = 1/2, \text{ o bien} \\ y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}, \ \lambda = 1 \end{array}$$

Obtenemos cuatro puntos críticos, a saber $(0,\pm 1)$, $(\pm\sqrt{2},0)$.

Conclusión: $f(0,\pm 1) = \frac{1}{2}, \quad f(\pm\sqrt{2},0) = 1, \quad f(0,0) = 0$. Por tanto, en D tenemos máximos globales en $(\pm\sqrt{2},0)$, y un mínimo global en $(0,0)$.

Extremos condicionados: ejemplo 4

En el ejemplo siguiente veremos que el método de multiplicadores se puede aplicar también en casos en que hay más de una condición.

Ejemplo: hallar los extremos de $f(x,y,z) = x + y + z$ bajo las dos condiciones $x^2 + y^2 = 2, \quad x + z = 1.$

Sea $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = (x+y+z) - \lambda_1(x^2+y^2-2) - \lambda_2(x+z-1).$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2 - x^2 - y^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 1 - x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda_1 x + 1 = 2\lambda_1 y = 1 \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 \neq 0, \quad x = 0, \quad y = 1/(2\lambda_1) \\ \Rightarrow \quad x = 0, \quad y = \pm\sqrt{2}, \quad z = 1. \end{cases}$$

Obtenemos pues dos puntos críticos, a saber

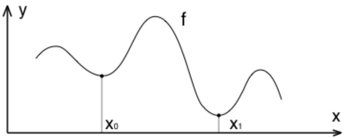
$$(0, \sqrt{2}, 1) \quad (\text{máximo}), \qquad (0, -\sqrt{2}, 1) \quad (\text{mínimo}).$$

Máximos y mínimos globales

Definición (Máximo y mínimo global)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in U$ es un **máximo global** (resp. **mínimo global**) de f en U si $\forall\, x \in U$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Recordemos lo que ocurre para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



En x_0, tenemos un mínimo local de f.
En x_1, tenemos un mínimo *global*. Con los métodos vistos, detectamos que x_1 es un mínimo local, pero *no* que es global.

Para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ más generalmente, se da el mismo problema de detección. El resultado siguiente nos da por lo menos la existencia de extremos globales bajo ciertas condiciones.

Teorema

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto (i.e. cerrado y acotado), y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe al menos un mínimo global de f en D y al menos un máximo global de f en D.

Máximos y mínimos globales

En otras palabras, existen puntos del cerrado y acotado D en los cuales f *alcanza sus extremos globales* en D.

¿Cómo se hallan el máximo y el mínimo global de f en un compacto C?
Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua.
Los valores máximo y mínimo de f en C se alcanzan en puntos pertenecientes a alguno de los siguientes conjuntos:

1. Los puntos críticos de f en el interior de C, denotado usualmente como $\mathring{C}$.
2. Los puntos donde f no sea diferenciable.
3. Los puntos máximo y mínimo de f en la frontera de C : $f|_{\partial C}$. En este punto, a veces se pueden usar extremos condicionados, pero a veces es más fácil otros argumentos.

Una vez hallados todos, se calcula f sobre ellos. El mayor valor será el **maximo global**, y el menor valor será el **mínimo global**.

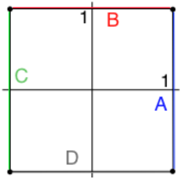
Cálculo de máximos y mínimos globales

Ejemplo 1: encontrar los mínimos y máximos globales de la función $f(x,y) = xy$ en el rectángulo $D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$.

Calculamos primero los puntos críticos $x_0 \in \mathring{D}$: tenemos $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, luego $x_0 = (0,0)$. Calculando, $f(0,0) = 0$.

f es diferenciable en todos puntos, así que no hay que considerar puntos de no diferenciabilidad. Queda estudiar f en la frontera de D .

A: $f(1,y) = y$, con $-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow$ mín $= -1$, máx $= 1$.
B: $f(x,1) = x$, con $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ mín $= -1$, máx $= 1$.
C: $f(-1,y) = -y$, $-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow$ mín $= -1$, máx $= 1$.
D: $f(x,-1) = -x$, $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ mín $= -1$, máx $= 1$.



El mínimo global es -1 y se alcanza en los puntos $(1,-1)$ y $(-1,1)$. El máximo global es 1 y se alcanza en los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

Cálculo de máximos y mínimos globales

Ejemplo 2: encontrar los mínimos y máximos globales de la función
$f(x,y) = \operatorname{sen}(x) + \cos(y)$ en $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$.

Como antes, calculamos primero los puntos críticos en el *interior* D°. Tenemos $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen}(y)$. En D°, estas derivadas se anulan respectivamente en $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, $y = \pi$. En estos puntos, $f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = 0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = -2$.

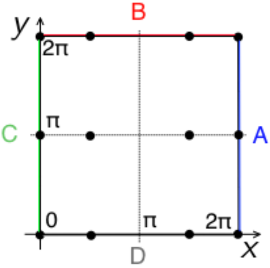
Cuidado: queda estudiar lo que pasa en la *frontera* ∂D.

A: $f(2\pi, y) = \cos(y) \Rightarrow \begin{cases} \text{máx } 1 \text{ en } y = 0, 2\pi \\ \text{mín -1 en } y = \pi \end{cases}$

B: $f(x, 2\pi) = \operatorname{sen}(x) + 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{máx } 2 \text{ en } x = \pi/2 \\ \text{mín } 0 \text{ en } x = 3\pi/2 \end{cases}$

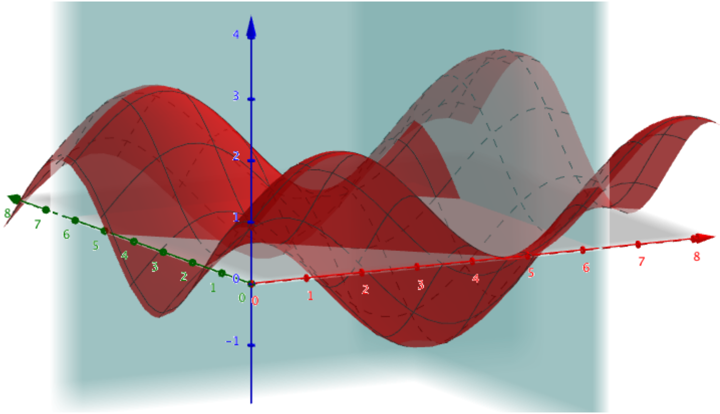
C: $f(0, y) = \cos(y) \Rightarrow \begin{cases} \text{máx } 1 \text{ en } y = 0, 2\pi \\ \text{mín -1 en } y = \pi \end{cases}$

D: $f(x, 0) = \operatorname{sen}(x) + 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{máx } 2 \text{ en } x = \pi/2 \\ \text{mín } 0 \text{ en } x = 3\pi/2 \end{cases}$



Cálculo de máximos y mínimos globales

Conclusión del estudio: en $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$, la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x) + \cos(y)$ alcanza su máximo global 2 en los puntos $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$, y alcanza su mínimo global -2 en el punto $(\frac{3\pi}{2}, \pi)$.



Ejercicio de cálculo de extremos globales

Encuentra los extremos globales de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

en el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$