Tema 5. Estructura de endomorfismos

5.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/e75a6253-55f6-4583-91a1-ad450b72337c/H6_Diagonalizacin.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/41ed1065-c7dc-468a-a019-3700e62ca94b/H7_MatrizDeJordan.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/69cc34c3-1080-4c42-b34c-5fced843b438/H8_Diagonalizacin2.pdf

5.1. Diagonzalización de endomorfismos

Sea E^n un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f : E \to E$ un endomorfismo. Entonces, existe una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ existe una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ tal que $f(v_i) = \lambda_i v_i$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

*Definición. Decimos que $\vec{0} \neq v \in E$ es un **autovector** o vector propio de f con **autovalor** o valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ si $f(v) = \lambda v$.*

Definición. Decimos que $f \in \text{end}(E) = \{\text{endomorfismos}\}$ diagonaliza si E tiene una base formada por autovectores de f.

Ejemplo 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, y)$, buscamos valores propios de $\lambda \in \mathbb{K}$. Es decir, $\lambda \in \mathbb{K} : f(v) = \lambda v$ para algún $v \neq \vec{0}$.
$f(v) - \lambda v = \vec{0} \Leftrightarrow (f - \lambda id_E)v = \vec{0} \Leftrightarrow \ker(f - \lambda id_E) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow (f - \lambda_E id)$ que no es isomorfismo $\Leftrightarrow \det(f - \lambda id_E) = 0 \Leftrightarrow |M_C(f - \lambda id_E) = 0 \Leftrightarrow |M_C(f) - \lambda I| = 0$ en alguna base C de E.

5.1.1. Pasos para encontrar autovalor de f

1. Encontrar la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ de f en alguna base C de E.
2. Calcular el **polinomio característico** de f o de A. Las raices de este polinomio son los autovalores de f.

Definimos el **polinomio característico** de f como $P_f(x) = P_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$.

Ejemplo 2. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x+y,y)$.
1. $A = M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $p(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$.
3. Autovalores de f: $\lambda = 1$.
4. $v = (x,y)$ tal que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el único autovector.

Ejemplo 3. Sea $f:\mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = \mathbb{P}_2$ tal que $f(a+bx+cx^2) = (2a+b+c)+(3b+c)x+4cx^2$. Para la base canónica $C = \{1,x,x^2\}$ tenemos $M_C(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$, para el autovector $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ tenemos $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = J$. Entonces, $J = M_{BC}^{-1}\cdot A\cdot M_{BC}$.

5.2. Polinomio característico

Sea $f:E^n \to E^n$ un sobre $\mathbb{K}$. Los valores propios son las raíces del polinomio característico $P_f(\lambda)$ en $\mathbb{K}$. $P_f(\lambda) = \det(f-\lambda id) = P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$, ya que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = M_C(f)$.

$P(\lambda)$ es un polinomio de grado n: $P(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})\lambda^{n-1} + ... + |A|$. De forma que todos los coeficientes dependen de f y no de A (o C). En particular, $|A|$ y la $\mathrm{traza}(A) = a_{11}+a_{22}+...+a_{nn} = \mathrm{traza}(f)$.

> Proposición. Si $P_f(x)$ tiene raíces distintas en $\mathbb{K}$, entonces f diagonaliza.

Demostración.
Sea $f: E^n \to E^n$ sobre $\mathbb{K}$ y $P(x) = \pm(x-\lambda_1)\cdot ...\cdot (x-\lambda_n)$ con $\lambda_1, ..., \lambda_n$ distintos dos a dos.
Basta con probar que existe una base B formada por autovectores.
Sea $\vec{0} \neq v_1 \in E$ tal que $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $\vec{0} \neq v_2 \in E$ tal que $f(v_2) = \lambda_2 v_2$... Basta ver que $v_1, ..., v_n$ son linealmente independientes, pues entonces $B = \{v_1, ..., v_n\}$ será la base deseada.
Supongamos que $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \vec{0}$, con $a_i \in \mathbb{K}$, demostramos por inducción.
- Multiplicamos por λ_1: $\lambda_1 a_1 v_1 + ... + \lambda_1 a_n v_n = \vec{0}$.
- Aplicamos f: $a_1 f(v_1) + ... + a_n f(v_n) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ y $a_1\lambda_1 v_1 + ... + a_n \lambda_n v_n = \vec{0}$.
- Restamos los resultados: $a_1\lambda_1 v_1 + ... + a_n\lambda_n v_n - (a_1\lambda_1 v_1 + ... + a_n\lambda_1 v_n) = a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + ... + a_n(\lambda_n - \lambda_1)v_n = \vec{0}$.
Luego, por hipótesis de inducción, $a_2(\lambda_2-\lambda_1)v_2 = a_3(\lambda_3-\lambda_1)v_3 = ... = a_n(\lambda_n-\lambda_1)v_n = \vec{0} \Rightarrow a_2 = a_3 = ... = a_n = 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

> Proposición. Sea $f: E^n \to E^n$ un endomorfismo con polinomio característico $P(x) = (x-\lambda)^d q(x)$ con $q(\lambda) \neq 0$. Entonces $\dim(\ker(f - \lambda(d)) \leq d$.

Demostración.
Sea $\{v_1, ..., v_r\}$ una base de $\ker(f - \lambda id)$, tenemos que probar que $r \leq d$.

Sea $B = \{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ una base de E, entonces $M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & x \\ 0 & \lambda & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$p(x) = \begin{vmatrix} \lambda - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - x \end{vmatrix} = (\lambda - x)^r \cdot g(x). \square$$

5.2.1. Diagonalización

Sea $f: E^n \to E^n$ un endomorfismo, con E^n sobre $\mathbb{K}$, $p(x) = (x-\lambda)^d \cdot q(x)$ su polinomio característico, con $q(\lambda) \neq 0$ y $E_\lambda = \ker(f - \lambda id) = \{\text{subconjunto de autovectores con autovalor } \lambda\}$, entonces, $\dim E_\lambda = d$.

> Corolario. Sea $p(x) = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdot ...\cdot (x-\lambda_i)^{d_i}$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y $\sum d_i = n$, entonces, f diagonaliza $\Leftrightarrow \dim(f - \lambda_i) = d_i$.

Demostración.
$\Leftarrow$) $\sum_{i=1}^{r} d_i = n \Rightarrow$ se obtiene una base de autovectores de E uniendo bases de los subespacios.

$\Rightarrow$) $\exists$ una base $B : M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$, de forma que $t_i \leq d_i$, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Luego $n = \sum t_i \leq \sum d_i = n$. $\square$

Ejemplo 4. Sea $A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ tal que $f(X) = AX$, con $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Determina si A diagonaliza.

1. $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 7 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)^2 \Rightarrow$ los autovalores de A son 0 y 2.

Para $\lambda = 0$ tenemos que $(A - 0I) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = 2$ tenemos que $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Conclusión: A no diagonaliza en la base $B = \{v_1, v_2, w\}$, pero sea $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ sí diagonaliza en la base $B = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (3,0,1), v_3 = (-7,1,0)\}$ y con la matriz diagonal $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, tal que $X \to AX$. Determina si A digonaliza para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Calculamos el polinomio característico: $p(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 2 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix} = (3-x)(x^2+1)$.

2a. Calculamos los valores propios de λ en $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = 3$.

3a. Calculamos los vectores propios o autovectores:

$\ker(A - 3I) : A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Debe ocurrir que $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, pero A no digonaliza.
2b. Calculamos los valores propios de λ en $\mathbb{C}$: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$.
3b. Calculamos los vectores propios o autovectores:

$\lambda_1 = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = i \Rightarrow A - iI = \begin{pmatrix}3-i & 1 & 2\\ 0 & -i & 1\\ 0 & -1 & -i\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{1+2i}{3-1} z_2 \\ z_3 = iz_2 \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}-1-2i\\ 3-i\\ 1+3i\end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = -i \Rightarrow A + iI$, luego, v_3 es el conjugado de $v_2 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix}-1+2i\\ 3+i\\ 1-3i\end{pmatrix}$.

A sí diagonaliza sobre $\mathbb{C}$ en la base $B = \{(1,0,0), (-1-2i, 3-i, 1+3i), (-1+2i, 3+i, 1-i)\}$ y la matriz diagonal es $J = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{pmatrix}$.

5.2.2. Polinomio mínimo de un endomorfismo

Sea $f : E^n \to E^n$ un endomorfismo, $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $A = M_C(f)$.

Definición. Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r \in \mathbb{K}[x]$. *Se define* $p(f) = a_0 f^0 + a_1 f + ... + a_r f^r \in \mathrm{End}(E)$, *con* $f^0 = id, f^2 = f \circ f, ...$

Definición. El ***polinomio mínimo*** *de* f *es el polinomio no nulo de menor grado que anula a* f.

Ejemplo 6. Sea $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, el polinomio mínimo es $m_A(x) = x - 1$, ya que $m_A(A) = A - I = \vec{0}$.

Ejemplo 7. Sea $A = \begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, el polinomio mínimo es $m_A(x) = (x-1)^2$, ya que $m_A(A) = (A - I)^2 = \begin{pmatrix}0 & 7\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2 = \vec{0}$.

Observación. Sea $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, entonces $p(A)q(A) = q(A)p(A)$.

> Propiedad. Sea $m(x)$ el polinomio mínimo de f, entonces $p(f) = 0 \Rightarrow p(x)$ es múltiplo de $m(x)$.

Demostración.
Utilizamos el Algoritmo de Euclides: $0 = p(f) = d(f)m(f) + r(f) \Rightarrow r(f) = 0$, recordamos que $\deg r(x) < \deg m(x)$. Como $m(x)$ es el polinomio de menor grado que anula a f, entonces $r = 0$ y $p(x)$ es múltiplo de $m(x)$. $\square$

> Proposición. Sea $f : E^n \to E^n$ y $m_f(x) = m(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (x - \lambda_r)^{m_r}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ocurre siempre). Entonces, $E = \ker(f - \lambda_1 id)^{m_1} \oplus ... \oplus \ker(f - \lambda_r id)^{m_r}$ y, además, cada subespacio $\ker(f - \lambda_i id)^{m_i}$ es invariante, es decir, $f(\ker(f - \lambda_i)^{m_i}) \subseteq \ker(f - \lambda_i)^{m_i}$.

Ejemplo 8. Sea $f = A : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determina si A diagonaliza.

1. Calculamos el polinomio característico: $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow$
$(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2 \Rightarrow$ los autovalores son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$
2. Calculamos los autovectores de f:
$\lambda_1 = 1 \Rightarrow A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
$\lambda_2 = 2 \Rightarrow A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$
A no diagonaliza, pues $\ker(A - \lambda_i)$ solo tiene $\dim 1$.
3. Calculamos el polinomio mínimo:$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$B_{\ker(A-I)^2} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}.$

5.3. Teorema de Hamilton-Cayley

> Teorema de Hamilsto-Cayley. Sea $f : E^n \to E^n$ un endomorfismo. Entonces $m_f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{m_r} \Rightarrow p_f(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{n_r}$, con $m_i \le n_i$.

Demostración.
1. Vemos que λ_i es un autovalor: $m(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_1)^{m-1}(x-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{m_r} = (x-\lambda_1) \cdot q(x)$. Afirmo que $\exists v \neq \vec{0} : q(f)(v) \neq \vec{0}$ pues de lo contrario el polinomio mínimo sería $q(x)$ y no $m(x)$.
Pongamos $u = q(f)v \in E$, entonces $(f - \lambda_1 id)(u) = (f - \lambda_1 id) \cdot q(f)(v) = m_f(x)(v) = \vec{0} \Rightarrow u$ es un autovector con autovalor λ_1.
2. Vemos que $m_1 \le n_1$: Debe existir $v \in \ker(f - \lambda_1 id)^{m_1} \setminus \ker(f - \lambda_1 id)^{m_1 - 1}$, pues de lo contrario, el polinomio mínimo sería $q(x)$ o un divisor suyo, es decir, $q(f)w = \vec{0}$, $\forall w \in E$.
$w = v_1 + v_2 + \ldots + v_r$, con $v_i \in \ker(f - \lambda_i id)^{m_i} \Rightarrow q(f)w = (f - \lambda_1 id)^{m_1 - 1}(f - \lambda_2 id)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (f - \lambda_r id)^{m_r}(v_1 + v_2 + \ldots + v_r)$, como $(f - \lambda_i id)^{m_i}(v_i) = \vec{0}$, luego $q(f)w = \vec{0}$.
Podemos afirmar que para $v \in \ker(f - \lambda_1 id)^{m_1} \setminus \ker(\lambda_1 id)^{m_1 - 1}$, $(f - \lambda_1 id)v, (f - \lambda_1 id)^2, \ldots, (f - \lambda_1 id)^{m_1 - 1}$ son linealmente independientes. $\square$

5.4. Forma de Jordan

Ejemplo 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4\times 4}(\mathbb{K})$, con $A : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$.
Primero, calculamos el polinomio característico: $p(x) = |A - xI| = (1-x)^3(2-x)$.
Después, calculamos el polinomio mínimo: $m(x) = (1-x)^d(2-x)$, con $1 \leq d \leq 3$.
Entonces, $\mathbb{K}^4 = \ker(A-2I) \oplus \ker(A-I)^d$, de forma que A diagonaliza si $d = 1$.
Estudiamos el autovalor $\lambda = 2$: $(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
autovector $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Estudiamos el autovalor $\lambda = 1 : (A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
autovectores $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego, A no diagonaliza, ya que $d > 1$.
$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Base de $\ker(A-I)^2 = \{w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
Luego, $B_1 = \{v_1, w_1, w_2, w_3\}$, de forma que $M_{B_1}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ya que $Aw_3 = (2, -1, 1, 0) = 2w_1 - w_2 + w_3$.
Debe ocurrir que $|M_{B_1}| = |A|$ y que $\text{traza}(M_{B_1}) = \text{traza}(A)$.
$B_1 = \{v_1, w_1, w_2, w_3\} \Rightarrow B_2 = \{v_1, w_1, (A-I)w_3, w_3\}$ (también podríamos tomar w_2 en lugar de w_1), de forma que B_2 es una base de autovectores.
Finalmente, la base de Jordan es $B = \{v_1, w_1, (A-I)w_3, w_3\}$, luego la matriz de Jordan es $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

> Lema. Sea $f : E^n \to E^n$ un endomorfismo y λ un autovalor de f. Entonces, $\ker(f - \lambda id)^r = \ker(f - \lambda id)^{r+1} \Rightarrow \ker(f - \lambda id)^r = \ker(f - \lambda id)^{r+k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Tenemos que ver que $v \in \ker(f-\lambda id)^{r+2} \Rightarrow v \in \ker(f-\lambda id)^{r} \Rightarrow (f-\lambda id)^{r+1}(f-\lambda id)v = \vec{0} \Rightarrow (f-\lambda id)v \in \ker(f-\lambda id)^{r+1} \Rightarrow (f-\lambda id)v \in \ker(f-\lambda id)^{r} \Rightarrow (f-\lambda id)^{r}(f-\lambda id)v = \vec{0} \Rightarrow (f-\lambda id)^{r+1}v = \vec{0} \Rightarrow v \in \ker(f-\lambda id)^{r+1} = \ker(f-\lambda id)^{r}$. $\square$

Ejemplo 10. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos el polinomio característico: $p(x) = |A - xI| = (1-x)^5$.

Calculamos el polinomio mínimo: $m(x) = (1-x)^d$, con $1 \leq d \leq 5$.

1. $\ker(A - \lambda id)$:

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. $(\ker(A - \lambda id))^2$:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B' = \left\{ v_1, v_2, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. $(\ker(A - \lambda id))^3$:

$$B'' = \mathbb{K}^5 = \left\{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

En la base B'' sustituimos v_3 por $(A-I)v_5$. Elegimos v_3 sobre v_4 ya que v_3 no es linelamente independiente con $\{v_1, v_2, (A-I)v_5, v_5\}$, mientras que v_4 sí lo es.

En la base B'' sustituimos v_1 por $(A-I)^2 v_5$. Elegimos v_1 sobre v_2 ya que v_1 no es linealmente independiente con $\{(A-I)^2 v_5, v_4, (A-I)v_5, v_5\}$, mientras que v_2 sí lo es.

En la base B'' sustituimos v_2 por $(A-I)v_4$.

De esta forma, la base de Jordan queda: $J = \{(A-I)^2 v_5, (A-I)v_5, v_5 \mid (A-I)v_4, v_4\}$.

Luego, la matriz de Jordan queda: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde los elementos de la diagonal son los autovalores de f y los elementos inmediatamente superiores a la diagonal en los vectores que no son autovectores son 1.

Ejemplo 11. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, calcula su matriz de Jordan.

Calculamos el polinomio característico: $p(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2-x & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2-x & -1 \\ -4 & -2 & -4 & -2-x \end{vmatrix} = x^4$.

Solo hay un autovalor, $x = 0$. Para que A diagonalizase tendría que haber 4 autovectores con valor propio 0, es decir, 4 autovectores en el núcleo de A. Como esto no es posible, no diagonaliza.
Calculamos el polinomio mínimo: x^d, con $2 \leq d \leq 4$ (si d fuese 1, A diagonalizaría).
1. $\ker(A - \lambda id)$:

$(A - 0id) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Base de $\ker(A) =$
$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

2. $(\ker(A - \lambda id))^2$:

$(A - 0id)^2 = A^2 = \mathbb{K}^4 \Rightarrow$ Base de $\ker(A^2) = \left\{ v_1, v_2, v_3, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En la base de $\ker(A^2)$ sustituimos v_3 por Av_4. Elegimos v_3 sobre v_1 y v_2 ya que v_3 no es linealmente independiente con $\{Av_4, v_4\}$, mientras que v_1 y v_2 sí lo son.
De esta forma, la base de Jordan queda $B = \{v_1 \mid v_2 \mid Av_4, v_4\}$.

Luego, la matriz de Jordan queda: $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.