TEMA 4a: la derivada de una función

La derivada de una función en un punto

Definición

La derivada de la función f en el punto a, denotada $f'(a)$, se define como

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

siempre que ese límite exista. También se denota por $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Sustituyendo $x = a + h$, obtenemos una definición equivalente dada por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Para que f tenga derivada en $x = a$ debe estar definida y ser continua en dicho punto.
- Obsérvese que el límite nos da siempre una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

La derivada es la pendiente de la recta tangente

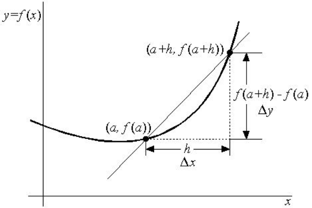

Figura: Recta secante por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$.

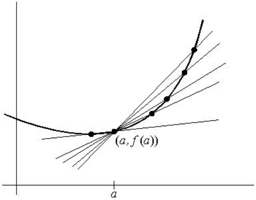

Figura: La recta tangente como límite de las rectas secantes cuando $h \to 0$

Las rectas secantes tienen pendientes $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$; la tangente, al ser límite de las secantes, tendrá pendiente $f'(a)$.

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ **en el punto** $(a, f(a))$**:** $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. (Ver ejercicio 10 de la hoja 5).

Interpretación física: cambio instantáneo de una función en un punto a

- $f(a+h) - f(a)$ representa el cambio f cuando la variable a cambia al valor $a+h$;
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mide el cambio medio, o el cambio por unidad;
- $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mide el cambio medio instantáneo de la función en a.

Si $f(t)$ mide la posición de una partícula en el tiempo t, por ejemplo, $f'(a)$ medirá la velocidad de la partícula en el momento a.

Derivadas laterales en un punto

Definición

La derivada por la derecha de la función f en el punto a, denotada $f'(a^+)$, viene dada por

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Definición

La derivada por la izquierda de la función f en el punto a, denotada $f'(a^-)$, viene dada por

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Teorema

La derivada de f en a existe si y sólo si existen las derivadas laterales de f en a y coinciden.

Función derivada de $f(x)$.

Definición

1. *Se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A$ si existe $f'(a)$;*
2. *Se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable si lo es en todo punto de A*
3. *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable, denotamos por $f' : A \to \mathbb{R}$ a su función derivada.*

Notación:

- Si $y = f(x)$ es la función, $y' = f'(x)$ denota su derivada;
- las derivadas sucesivas se denotan con mas apóstrofes: $y'' = f''(x)$, $y''' = f'''(x)$, etc; para no recargar la notación, a veces se indica con un número: $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ indica que se han tomado n-derivadas;
- si $a \in A$, entonces $f'(a)$, $f''(a)$, $\ldots$, $f^{(n)}(a)$ son el valor de las derivadas primera, segunda, $\ldots$, n-ésima, en el punto a.
- (Leibniz) f' también se puede denotar por $\dfrac{dy}{dx}$ o por $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{|x=a}$ (este último para indicar el punto donde se deriva).

Derivada implica continuidad (pero no al revés)

Lema

Si f es una función diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Dem.: Se tiene

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \quad \xrightarrow{x \to a} \quad f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Luego $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, f es continua en a.

El recíproco no es cierto. Contraejemplo:
La función $f(x) = |x|$ es continua en todo punto, pero no es diferenciable en el punto $a = 0$, como se puede ver intentando calcular el límite de $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ cuando h tiende a 0:

- el límite lateral por la izquierda en 0 es

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1,$$

- pero el límite lateral por la derecha en 0 es

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h - 0}{h} = 1.$$

Cálculo operativo para las derivadas

1. Suma: $(f+g)' = f' + g'$;
2. Resta $(f-g)' = f' - g'$;
3. Producto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
4. División: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, siempre que el denominador no se anule.
5. **Regla de la cadena:** Si f es derivable en $x = a$ y g es derivable en $y = b = f(a)$ entonces la composición $g \circ f$ es derivable en $x = a$ y $(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$. En general, si $F(x) = g(f(x))$, entonces $F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Teorema (de la función inversa)

Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ una función diferenciable entre dos intervalos donde $f((a,b)) = (c,d)$. Supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces

- *f es biyectiva;*
- *existe la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ (que denotamos $f^{-1}(y)$);*
- *f^{-1} es diferenciable*
- *su derivada está dada por la fórmula* $\quad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Derivadas de las funciones más usuales

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x = e^{x \log a}$	$f'(x) = (\log a)\, a^x$
$f(x) = \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$	$f'(x) = \frac{1}{x \log a}$
$f(x) = x^r = e^{r \log x}$	$f'(x) = r\, x^{r-1}$