HOJA DE EJERCICIOS 1: Lógica proposicional EDyL 2022-2023

[Fecha de publicación: 2022-09-xx]
[Fecha de entrega: 2022-09-xx, 09:00]
[Soluciones (en clase): 2022-09-27]

NOTA: Incluye explicaciones para tus respuestas. Un ejercicio cuya respuesta es correcta, pero que no incluye explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 1.

Considera la base de conocimiento

$$\Delta = \{A \Leftrightarrow ((\neg B \lor \neg C) \Rightarrow \neg A),\ B \Rightarrow (\neg A \land C)\}$$

(i) Sin utilizar reglas de equivalencia, escribe la tabla de verdad de la base de conocimiento Δ e indica qué interpretaciones son modelos de Δ.

Basándote en esta tabla de verdad, proporciona respuestas a las siguientes preguntas. Explica el razonamiento que justifica tu respuesta.

(ii) ¿Es la base de conocimiento UNSAT, SAT, pero no tautología o una tautología? Explica por qué.

(iii) ¿Es la FBF $(A \Leftrightarrow B)$ consecuencia lógica de la base de conocimiento Δ? Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN:

(i) Sin utilizar reglas de equivalencia, escribe la tabla de verdad de la base de conocimiento Δ e indica qué interpretaciones son modelos de Δ.

	A	B	C		$\neg B \vee \neg C$	$(\neg B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A$	$A \Leftrightarrow ((\neg B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A)$		$\neg A \wedge C$	$B \Rightarrow (\neg A \wedge C)$	Model
I_1	T	T	T		**F**	**T**	**T**		**F**	**F**	
I_2	T	T	F		**T**	**F**	**F**		**F**	**F**	
I_3	T	F	T		**T**	**F**	**F**		**F**	**T**	
I_4	T	F	F		**T**	**F**	**F**		**F**	**T**	
I_5	F	T	T		**F**	**T**	**F**		**T**	**T**	
I_6	F	T	F		**T**	**T**	**F**		**F**	**F**	
I_7	F	F	T		**T**	**T**	**F**		**T**	**T**	
I_8	F	F	F		**T**	**T**	**F**		**F**	**T**	

La base de conocimiento no tiene modelos (es UNSAT)

Basándote en esta tabla de verdad, proporciona respuestas a las siguientes preguntas. Explica el razonamiento que justifica tu respuesta.

(ii) ¿Es la base de conocimiento UNSAT, SAT, pero no tautología o una tautología? Explica por qué.
La base de conocimiento es UNSAT.
No hay interpretaciones que sean modelos de Δ.

(iii) ¿Es la FBF $(A \Leftrightarrow B)$ consecuencia lógica de la base de conocimiento Δ? Justifica tu respuesta.
Sí. Dado que la base de conocimiento no tiene ningún modelo, cualquier FBF puede ser derivada a partir de ella.

EJERCICIO 2

Without using equivalence rules,

(i) Write down the truth table of the knowledge base $\Delta = \{ A \Leftrightarrow \neg B, (A \Leftrightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow (A \vee \neg C) \}$.

(ii) Indicate the interpretations that are models of the knowledge base.

(iii) Is the knowledge base UNSAT, SAT, but not a tautology, or a tautology? Explain your answer.

(iv) Is $(A \wedge B) \Rightarrow C$ a logical consequence of the knowledge base? Explain your answer.

SOLUTION:

	A	B	C		$B \vee C$	$A \Leftrightarrow (B \vee C)$	$A \vee \neg C$		$(A \Leftrightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow (A \vee \neg C)$	$A \Leftrightarrow \neg B$	Model?	$(A \wedge B) \Rightarrow C$
I_1	T	T	T		T	T	T		**T**	**F**		
I_2	T	T	F		T	T	T		**T**	**F**		
I_3	T	F	T		T	T	T		**T**	**T**	**Yes**	**T**
I_4	T	F	F		F	F	T		**F**	**T**		
I_5	F	T	T		T	F	F		**T**	**T**	**Yes**	**T**
I_6	F	T	F		T	F	T		**F**	**T**		
I_7	F	F	T		T	F	F		**T**	**F**		
I_8	F	F	F		F	T	T		**T**	**F**		

The knowledge base is SAT, but not a tautology: Some (I_3, I_5) but not all interpretations are models.

$\Delta \models (A \wedge B) \Rightarrow C$

All the models of Δ are also models of $(A \wedge B) \Rightarrow C$.

EXERCISE 3.

Utilizando únicamente una tabla de verdad (no se permite el uso de reglas de equivalencia), determina si la formula bien formada $w = \{\neg A \Rightarrow B\}$ es consecuencia lógica de la base de conocimiento $\Delta = \{\neg(B \wedge C) \Rightarrow \neg(B \Leftrightarrow A),\ B \vee \neg C\}$.

A	B	C		$\neg(B \Leftrightarrow A)$	$B \wedge C$	$\neg(B \wedge C) \Rightarrow \neg (B \Leftrightarrow A)$	$B \vee \neg C$	Δ		$\neg A \Rightarrow B$
T	T	T		F	T	T	T			T
T	T	F		F	F	F	T			
T	F	T		T	F	T	F			
T	F	F		T	F	T	T			T
F	T	T		T	T	T	T			T
F	T	F		T	F	T	T			T
F	F	T		F	F	F	F			
F	F	F		F	F	F	T			

Δ has 4 models.
All models of Δ are models of w.
$\Delta \models w$

EJERCICIO 4.

Sean w_1, w_2 y w FBFs en lógica formal para las que se cumple

$\{w_1, w_2, w\}$ es SAT,
$\{w_1, w_2, \neg w\}$ es SAT.

Indica cuáles de las siguientes aseveraciones son correctas, cuáles son incorrectas y para cuáles de ellas no es posible determinar con la información disponible si son correctas o incorrectas. Explica tus respuestas.

a. $\{w_1, w_2\} \models w$.
b. $\{w_1, w_2\} \models \neg w$.
c. Ni w ni ¬w son consecuencia lógica de la base de conocimiento $\{w_1, w_2\}$.
d. $w_1 \wedge w_2$ es una tautología.
e. w es una tautologia.

SOLUTION:

$\{w_1, w_2, \neg w\}$ is SAT means that $\{w_1, w_2\} \not\models w$
$\{w_1, w_2, w\}$ is SAT means that $\{w_1, w_2\} \not\models \neg w$

a. $\{w_1, w_2\} \models w$.
   Incorrect.

b. $\{w_1, w_2\} \models \neg w$.
   Incorrect.

c. Neither w nor ¬w is a logical consequence of the knowledge base $\{w_1, w_2\}$
   Correct.

d. $w_1 \wedge w_2$ is a tautology.
   Cannot be determined.

e. w is a tautology.
   Incorrect. Otherwise ¬w would be UNSAT and, in consequence, $\{w_1, w_2, w\}$ would be UNSAT as well.

EXERCISE 5.

Consideremos la base de conocimiento $\Delta_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, la cual es UNSAT, y la base de conocimiento $\Delta_2 = \{w_1, w_2, \neg w_3, \neg w_4\}$, que es SAT.
Determina cuáles de las siguientes frases son correctas, incorrectas o para cuáles no es posible determinar si son correctas o incorrectas con la información dada. Justifica tus respuestas y proporciona ejemplos que las ilustren utilizando fórmulas bien formadas que involucren únicamente a los átomos A y B.

Frase	**Correcta / incorrecta / No puede ser determinado**	**Ejemplo:**
$\{w_1, w_2\} \models \neg w_3 \vee \neg w_4$	Correct $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \equiv$ $\{w_1, w_2, \neg(\neg w_3 \vee \neg w_4)\}$ UNSAT Implies $\{w_1, w_2\} \models \neg w_3 \vee \neg w_4$	{A, A ∨ B, B , ¬A } UNSAT {A, A ∨ B, ¬B ,¬(¬A) } SAT {A, A ∨ B} ⊨ (¬B ∨ A)
$\{w_1, w_2\} \models w_3 \wedge w_4$	Incorrect $\{w_1, w_2, \neg w_3, \neg w_4\} \equiv$ $\{w_1, w_2, \neg(w_3 \vee w_4)\}$ SAT Implies $\{w_1, w_2\} \models\backslash= w_3 \vee w_4$ Neither w_3 nor w_4 can be a logical consequence of $\{w_1, w_2\}$	{A, A ∨ B, B , ¬A } UNSAT {A, A ∨ B, ¬B ,¬(¬A) } SAT {A, A ∨ B} ⊨\= (¬B ∧ A)
$\{w_1, w_2\}$ is UNSAT	Incorrect	If that were the case, both of the above knowledge bases would be UNSAT.
If $\{w_1, w_2\} \models \neg w_3 \vee w_4$ Then $\{w_1, w_2\} \models \neg w_3$	Correct $\{w_1, w_2\} \models \neg w_3 \vee \neg w_4$ $\equiv w_3 \Rightarrow \neg w_4$ [1] $\{w_1, w_2\} \models \neg w_3 \vee w_4$ $\equiv w_3 \Rightarrow w_4$ [2] Proof of $\neg w_3$ by contradiction:	{¬A, ¬B, A ∨ B, A } UNSAT {¬A, ¬B, ¬(A∨B), ¬A} SAT {¬A, ¬B} ⊨ ¬(A∨B) ∨ ¬A

	Negation of the goal: $\neg\neg w_3 \equiv w_3$ [3] [1] + [3] $\vdash$ [MP] $\neg w_4$ [2] + [3] $\vdash$ [MP] w_4 Since, by inference we derive a contradiction, $\{w_1, w_2\} \models \neg w_3$	$\{\neg A, \neg B\} \models \neg(A \vee B) \vee A$ $\{\neg A, \neg B\} \models \neg(A \vee B)$

EJERCICIO 6.

En una isla remota coexisten de manera pacífica criaturas de dos especies distintas. Las especies son los "*verosus*", quienes siempre dicen la verdad, y los "*falacius*", quienes siempre mienten. En un encuentro con seis de estas criaturas oímos las siguientes aseveraciones:

> A: B es *falacius* o D es *falacius*.
> B: D y G son de la misma especie.
> C: A es *verosus* o G es *falacius*.
> D: B es *verosus*.
> E: A es *verosus*.
> G: B y yo o bien somos ambos *verosus* o bien *falacius*.

Para obtener la solución solo es posible utilizar inferencia; no está permitido utilizar razonamiento natural, semiformal, o basado en casos.

a. Indica los átomos necesarios para formalizar esta base de conocimiento (tantos como sea necesario).

	Símbolo	Denotación
Atomos	**A**	**A: A is *Verosus*; ¬A: A is Falacius**
	B	**B: B is *Verosus*; ¬B: B is *Falacius***
	C	**C: C is *Verosus*; ¬C: C is *Falacius***
	D	**D: D is *Verosus*; ¬D: D is *Falacius***
	E	**E: E is *Verosus*; ¬E: E is *Falacius***
	G	**G: G is *Verosus*; ¬G: G is *Falacius***

b. Escribe las fórmulas bien formadas (FBF's) en lógica proposicional de las que se compone la base de conocimiento (tantas como sean necesarias).

		Aseveración	FBF
Base de conocimiento	[1]	A: B is *Falacius* or D is *Falacius*.	$A \Leftrightarrow (\neg B \lor \neg D)$
	[2]	B: D and G are the same kind.	$B \Leftrightarrow (D \Leftrightarrow G)$
	[3]	C: A is *Verosus* or G is *Falacius*.	$C \Leftrightarrow (A \lor \neg G)$
	[4]	D: B is a *Verosus*.	$D \Leftrightarrow B$
	[5]	E: A is a *Verosus*.	$E \Leftrightarrow A$
	[6]	G: B and myself are both *Verosus* or both *Falacius*.	$G \Leftrightarrow ((B \land G) \lor (\neg B \land \neg G))$

c. Transforma las FBF's de la base de conocimiento en forma normal conjuntiva (FNC) indicando en cada paso la regla de equivalencia utilizada.

[1] $A \Leftrightarrow (\neg B \vee \neg D)$ [def. $\Leftrightarrow$ + $\wedge$ elim.]

$\equiv$ [1.1] $A \Rightarrow (\neg B \vee \neg D)$ [def. $\Rightarrow$]

$\equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg D$ [1.1]

[1.2] $(\neg B \vee \neg D) \Rightarrow A$ [def. $\Rightarrow$]

$\equiv \neg(\neg B \vee \neg D) \vee A$ [De Morgan's + elim. $\neg\neg$]

$\equiv (B \wedge D) \vee A$ [distrib. + $\wedge$ elim.]

$\equiv B \vee A$ [1.2.1]

$D \vee A$ [1.2.2]

[2] $B \Leftrightarrow (D \Leftrightarrow G)$ [def. $\Leftrightarrow$ + $\wedge$ elim.]

$\equiv$ [2.1] $B \Rightarrow [(D \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow D)]$ [def. $\Rightarrow$]

$\equiv \neg B \vee [(\neg D \vee G) \wedge (\neg G \vee D)]$ [distrib. + $\wedge$ elim.]

$\equiv \neg B \vee \neg D \vee G$ [2.1.1]

$\neg B \vee \neg G \vee D$ [2.1.2]

[2.2] $[(D \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow D)] \Rightarrow B$ [def. $\Rightarrow$]

$\equiv \neg[(\neg D \vee G) \wedge (\neg G \vee D)] \vee B$ [De Morgan's + elim. $\neg\neg$]

$\equiv (D \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg D) \vee B$ [distrib. + $\wedge$ elim.]

$\equiv D \vee G \vee B$ [2.2.1]

$\neg G \vee \neg D \vee B$ [2.2.2]

[3] $C \Leftrightarrow (A \vee \neg G)$ [same as [1], $A \rightarrow C$; $B \rightarrow \neg A$; $D \rightarrow G$]

$\equiv \neg C \vee A \vee \neg G$ [3.1]

$\neg A \vee C$ [3.2.1]

$G \vee C$ [3.2.2]

[4] $D \Leftrightarrow B$ [def. $\Leftrightarrow$]

$\equiv (D \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow D)$ [def. $\Rightarrow$ + $\wedge$ elim.]

$\neg D \vee B$ [4.1]

$\neg B \vee D$ [4.2]

[5] $E \Leftrightarrow A$

$\neg E \vee A$ [5.1]

$\neg A \vee E$ [5.2]

[6] $G \Leftrightarrow ((B \wedge G) \vee (\neg B \wedge \neg G))$ [def. $\Leftrightarrow$ + $\wedge$ elim.]

$\equiv$ [6.1] $G \Rightarrow ((B \wedge G) \vee (\neg B \wedge \neg G))$ [def. $\Rightarrow$]

$\equiv \neg G \vee ((B \wedge G) \vee (\neg B \wedge \neg G))$ [distrib. + $\wedge$ elim.]

$\equiv \neg G \vee B$ [6.1]

$\equiv$ [6.2] $((B \wedge G) \vee (\neg B \wedge \neg G)) \Rightarrow G$ [def. $\Rightarrow$]

$\equiv \neg((B \wedge G) \vee (\neg B \wedge \neg G)) \vee G$ [De Morgan's + $\neg\neg$ elim.]

$\equiv ((\neg B \vee \neg G) \wedge (B \vee G)) \vee G$ [distrib. + $\wedge$ elim.]

$\equiv B \vee G$ [6.2]

The knowledge base in CNF is

[1.1]	$\neg A \vee \neg B \vee \neg D$	
[1.2.1]	$B \vee A$	
[1.2.2]	$D \vee A$	
[2.1.1]	$\neg B \vee \neg D \vee G$	
[2.1.2]	$\neg B \vee \neg G \vee D$	(subsumed by [4.2])
[2.2.1]	$D \vee G \vee B$	(subsumed by [6.2])
[2.2.2]	$\neg G \vee \neg D \vee B$	(subsumed by [4.1])
[3.1]	$\neg C \vee A \vee \neg G$	
[3.2.1]	$\neg A \vee C$	
[3.2.2]	$G \vee C$	
[4.1]	$\neg D \vee B$	
[4.2]	$\neg B \vee D$	
[5.1]	$\neg E \vee A$	
[5.1]	$\neg A \vee E$	
[6.1]	$\neg G \vee B$	
[6.2]	$B \vee G$	

d. Utiliza refutación basada en resoluciones para determinar si A es *verosus* o *falacius*.

d.1 GOAL: A; NEGATION OF THE GOAL ¬A

[1.1]	¬A ∨ ¬B ∨ ¬D
[1.2.1]	B ∨ A
[1.2.2]	D ∨ A
[2.1.1]	¬B ∨ ¬D ∨ G
[3.1]	¬C ∨ A ∨ ¬G
[3.2.1]	¬A ∨ C
[3.2.2]	G ∨ C
[4.1]	¬D ∨ B
[4.2]	¬B ∨ D
[5.1]	¬E ∨ A
[5.2]	¬A ∨ E
[6.1]	¬G ∨ B
[6.2]	B ∨ G
[7]	¬A

[7] + [1.2.1]	├RES on A	B	[8]
[7] + [1.2.2]	├RES on A	D	[9]
[7] + [5.1]	├RES on A	¬E	[10]
[7] + [3.1]	├RES on A	¬C ∨ ¬G	[11]
[2.1.1] + [8]	├RES on B	¬D ∨ G	[12]
[9] + [12]	├RES on D	G	[13]
[11] + [13]	├RES on G	¬C	[14]

Therefore, the extended knowledge base is SAT.
A is not a logical consequence of the original knowledge base.

d.2 GOAL: ¬A; NEGATION OF THE GOAL ¬¬A ≡ A

[1.1]	¬A ∨ ¬B ∨ ¬D
[1.2.1]	B ∨ A
[1.2.2]	D ∨ A
[2.1.1]	¬B ∨ ¬D ∨ G
[3.1]	¬C ∨ A ∨ ¬G
[3.2.1]	¬A ∨ C
[3.2.2]	G ∨ C
[4.1]	¬D ∨ B
[4.2]	¬B ∨ D

[5.1]	$\neg E \lor A$
[5.2]	$\neg A \lor E$
[6.1]	$\neg G \lor B$
[6.2]	$B \lor G$
[7′]	A

[7′] + [3.2.1]	$\vdash_{\text{RES on A}}$	C	[8′]
[7′] + [5.2]	$\vdash_{\text{RES on A}}$	E	[9′]
[6.1] + [6.2]	$\vdash_{\text{RES on G}}$	B	[10′]
[4.2] + [10′]	$\vdash_{\text{RES on B}}$	D	[11′]
[1.1] + [11′]	$\vdash_{\text{RES on D}}$	$\neg A \lor \neg B$	[12′]
[7] + [12′]	$\vdash_{\text{RES on A}}$	$\neg B$	[13′]
[10′] + [12′]	$\vdash_{\text{RES on A}}$	$\varnothing$	[contradiction]

Therefore, the extended knowledge base is UNSAT.
¬A is a logical consequence of the original knowledge base.

e. Utiliza resolución directa sobre las cláusulas obtenidas para determinar si las otras criaturas son *verosus* o *falacius*.

Collecting the unit clauses of (d.1), we get

$\neg A$	[7]
B	[8]
D	[9]
$\neg E$	[10]
G	[13]
$\neg C$	[14]

B,D,G are *Verosus;*
A,C,E are *Falacius*.

EJERCICIO 7. [adaptado del puzle 20 "*Alice in Puzzleland*" R. Smullian, 1984]
Alguien se comió la mayor parte de la tarta que el padre de Mira había hecho para su cumpleaños. Los únicos amigos que podrían haberlo hecho son Kieran, Diana, o Coco. Cuando Mira les preguntó, Diana dijo: "La culpa es de Coco". "Sí, claro que me la comí", respondió Coco con enigmática sonrisa. Kieran exclamó: "Te prometo que yo no fui".
Sabiendo que la persona que comió la tarta miente, que al menos uno de los otros dice la verdad y que podrían haber sido varios, ¿quién comió la tarta?
Utilizando únicamente inferencia directa en lógica proposicional (no se pueden usar tablas de verdad, razonamiento basado en casos, natural o semiformal), ¿puedes deducir quién comió la tarta, quien mintió y quién dijo la verdad?

a. Especifica los átomos necesarios para formalizar el problema en lógica proposicional.

	Símbolo	Denotación
Átomos	C	"Coco comió la tarta"
	D	"Diana comió la tarta "
	K	"Kieran comió la tarta
	CC	"Coco dijo la verdad"
	DD	"Diana dijo la verdad"
	KK	"Kieran dijo la verdad"

b. Formaliza en lógica proposicional la base de conocimiento. Utiliza para ello tantas filas como sean necesarias.

		Fórmula bien formada	Frase en lenguaje natural
Base de conocimiento	[1]	$DD \Leftrightarrow C$	Diana said: "It's Coco' fault".
	[2]	$CC \Leftrightarrow C$	"I sure ate it", replied Coco with an enigmatic smile.
	[3]	$KK \Leftrightarrow \neg K$	Kieran exclaimed: "I certainly did not do it".
	[4]	$C \Rightarrow [\neg CC \wedge (KK \vee DD)]$	"If Coco ate the cake, then he lied and at least one of the other two told the truth."
	[5]	$D \Rightarrow [\neg DD \wedge (CC \vee KK)]$	" If Diana ate the cake, then she lied and at least one of the other two told the truth.".
	[6]	$K \Rightarrow [\neg KK \wedge (CC \vee DD)]$	"If Kieran ate the cake, then he lied and at least one of the other two told the truth.".

	[7]	$C \lor D \lor K$	"Coco, Diana or Kieran is the thief (or two or all of them)”.

c. Transforma la base de conocimiento a forma normal conjuntiva, indicando en cada paso la regla de equivalencia utilizada.

$$
\begin{array}{lll}
[1]\ DD \Leftrightarrow C & \equiv [(DD \Rightarrow C) \land (C \Rightarrow DD)] & [\text{Def. Of } \Leftrightarrow] \\
 & \equiv [(\neg DD \lor C) \land (\neg C \lor DD)] & [\text{Def. Of } \Rightarrow] \\
 & \equiv \neg DD \lor C \quad [1.1] & [\land \text{ elimination}] \\
 & \quad \neg C \lor DD \quad [1.2] &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
[2]\ CC \Leftrightarrow C & \equiv [(CC \Rightarrow C) \land (C \Rightarrow CC)] & [\text{Def. Of } \Leftrightarrow] \\
 & \equiv [(\neg CC \lor C) \land (\neg C \lor CC)] & [\text{Def. Of } \Rightarrow] \\
 & \equiv \neg CC \lor C \quad [2.1] & [\land \text{ elimination}] \\
 & \quad \neg C \lor CC \quad [2.2] &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
[3]\ KK \Leftrightarrow \neg K & \equiv [(KK \Rightarrow \neg K) \land (\neg K \Rightarrow KK)] & [\text{Def. Of } \Leftrightarrow] \\
 & \equiv [(\neg KK \lor \neg K) \land (\neg\neg K \lor KK)] & [\text{Def. Of } \Rightarrow] \\
 & \equiv [(\neg KK \lor \neg K) \land (K \lor KK)] & [\neg\neg \text{ elimination}] \\
 & \equiv \neg KK \lor \neg K \quad [3.1] & [\land \text{ elimination}] \\
 & \quad K \lor KK \quad [3.2] &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
[4]\ C \Rightarrow [\neg CC \land (KK \lor DD)] & & & \\
 & \equiv \neg C \lor [\neg CC \land (KK \lor DD)] & & [\text{Def. Of } \Rightarrow] \\
 & \equiv (\neg C \lor \neg CC) \land (\neg C \lor KK \lor DD)] & & [\text{Distributive}] \\
 & ^\circ \quad \neg C \lor \neg CC & [4.1] & [\land \text{ elimination}] \\
 & \quad \neg C \lor KK \lor DD & [4.2] &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
[5]\ D \Rightarrow [\neg DD \land (CC \lor KK)] & & & \\
 & \equiv \neg D \lor [\neg DD \land (CC \lor KK)] & & [\text{Def. Of } \Rightarrow] \\
 & \equiv (\neg D \lor \neg DD) \land (\neg D \lor CC \lor KK)] & & [\text{Distributive}] \\
 & \equiv \quad \neg D \lor \neg DD & [5.1] & [\land \text{ elimination}] \\
 & \quad \neg D \lor CC \lor KK & [5.2] &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
[6]\ K \Rightarrow [\neg KK \land (CC \lor DD)] & & & \\
 & \equiv \neg K \lor [\neg KK \land (CC \lor DD)] & & [\text{Def. Of } \Rightarrow] \\
 & \equiv (\neg K \lor \neg KK) \land (\neg D \lor CC \lor DD)] & & [\text{Distributive}] \\
 & \equiv \quad \neg K \lor \neg KK & [6.1] & [\land \text{ elimination}] \\
 & \quad \neg K \lor CC \lor DD & [6.2] &
\end{array}
$$

[7]   C ∨ D ∨ K

d. Aplica resolución para derivar nuevas cláusulas. Proporciona una interpretación para las cláusulas resultantes.

```
[1.1] ¬DD ∨ C
[1.2]  ¬C ∨ DD
[2.1] ¬CC ∨ C
[2.2]  ¬C ∨ CC
[3.1] ¬KK ∨ ¬K
[3.2]   K ∨ KK
[4.1]  ¬C ∨ ¬CC
[4.2]  ¬C ∨ KK ∨ DD [subsumed by [1.2]]
[5.1]  ¬D ∨ ¬DD
[5.2]  ¬D ∨ CC ∨ KK
[6.1]  ¬K ∨ ¬KK
[6.2]  ¬K ∨ CC ∨ DD
[7]     C ∨ D ∨ K
```

[2.1] + [4.1]	$\vdash_{\text{RES on C}}$	¬CC	[8]
[2.2] + [4.1]	$\vdash_{\text{RES on CC}}$	¬C	[9]
[1.1] + [9]	$\vdash_{\text{RES on C}}$	¬DD	[10]
[6.2] + [8]	$\vdash_{\text{RES on CC}}$	¬K ∨ DD	[11]
[10] + [11]	$\vdash_{\text{RES on DD}}$	¬K	[12]
[3.2] + [12]	$\vdash_{\text{RES on K}}$	KK	[13]
[7] + [9]	$\vdash_{\text{RES on C}}$	D ∨ K	[14]
[12] + [14]	$\vdash_{\text{RES on C}}$	D	[15]

Diana ate the cake (D) and has lied (¬DD).
Coco is innocent (¬C) and has lied (¬CC).
Kieran is innocent (¬K) and has told the truth (KK).

EJERCICIO 8. [adaptado de https://www.math.uci.edu/~mathcircle/materials/Propositional_Logic_Nov24_2014.pdf]

Dos líneas rectas no son paralelas si se intersecan. Si dos líneas rectas se intersecan no están a una distancia constante la una de la otra. La suma de los ángulos internos entre dos líneas rectas es la suma entre los dos ángulos que se obtienen al dibujar una línea recta que cruza ambas líneas. Si la suma de los ángulos internos es diferente de π, entonces no están a una distancia constante la una de la otra. La suma de los ángulos internos entre las líneas rectas A y B es distinto a π.

Utilizando únicamente inferencia en lógica proposicional (no se pueden utilizar tablas de verdad, razonamiento natural, seminatural o basado en casos), determina si las líneas A y B son paralelas o no.

e. Especifica los átomos necesarios para formalizar el problema en lógica proposicional.

	Símbolo	Denotación
Átomos	P	A y B son paralelas
	I	A y B se intersecan
	S	La suma de los ángulos interiores entre A y B es igual a π
	C	A y B están a una distancia constante la una de la otra.

f. Escribe las fórmulas bien formadas (FBF) en lógica proposicional que constituyen la base de conocimiento (tantas como sean necesarias).

		FBF	Denotación
Base de conocimiento	[1]	$I \Leftrightarrow \neg P$	A and B are not parallel if they intersect.
	[2]	$I \Leftrightarrow \neg C$	If A and B intersect, then they are not at a constant distance from each other.
	[3]	$\neg S \Leftrightarrow \neg C$	If the sum of the interior angles between A and B is different from π, then they are not at constant distance from each other.
	[4]	$\neg S$	The sum of the interior angles between A and B is not π.

g. Deriva la solución utilizando únicamente la definición de la doble implicación (⇔) en término de la implicación (⇒), eliminación de ∧, modus ponens y modus tollens como reglas de inferencia.

Using the rules [definition of ⇔] and [∧ elimination],

[1] $I \Leftrightarrow \neg P$	$\equiv [(I \Rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \Rightarrow I)]$		[Def. Of ⇔]
	$\equiv I \Rightarrow \neg P$	[1.1]	[∧ elimination]
	$\neg P \Rightarrow I$	[1.2]	
[2] $I \Leftrightarrow \neg C$	$\equiv [(I \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \Rightarrow I)]$		[Def. Of ⇔]
	$\equiv I \Rightarrow \neg C$	[2.1]	[∧ elimination]
	$\neg C \Rightarrow I$	[2.2]	
[3] $\neg S \Leftrightarrow \neg C$	$\equiv [(\neg S \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg S)]$		[Def. Of ⇔]
	$\equiv \neg S \Rightarrow \neg C$	[3.1]	[∧ elimination]
	$\neg C \Rightarrow \neg S$	[3.2]	

[4] $\neg S$

[4] + [3.1]	$\vdash_{MP} \neg C$	[5]
[5] + [2.2]	$\vdash_{MP} I$	[6]
[6] + [1.1]	$\vdash_{MP} \neg P$	[7]

A and B are not parallel

h. Transforma las FBFs de la base de conocimiento a forma normal conjuntiva (FNC) indicando las reglas de equivalencia utilizadas en cada paso.

[1] $I \Leftrightarrow \neg P$	$\equiv [(I \Rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \Rightarrow I)]$		[Def. Of $\Leftrightarrow$]
	$\equiv [(\neg I \vee \neg P) \wedge (\neg\neg P \vee I)]$		[Def. Of $\Rightarrow$]
	$\equiv [(\neg I \vee \neg P) \wedge (P \vee I)]$		[$\neg\neg$ elimination]
	$\equiv \neg I \vee \neg P$	[1.1]	[$\wedge$ elimination]
	$P \vee I$	[1.2]	

[2] $I \Leftrightarrow \neg C$	$\equiv [(I \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \Rightarrow I)]$		[Def. Of $\Leftrightarrow$]
	$\equiv [(\neg I \vee \neg C) \wedge (\neg\neg C \vee I)]$		[Def. Of $\Rightarrow$]
	$\equiv [(\neg I \vee \neg C) \wedge (C \vee I)]$		[$\neg\neg$ elimination]
	$\equiv \neg I \vee \neg C$	[2.1]	[$\wedge$ elimination]
	$C \vee I$ [2.2]		

[3] $\neg S \Leftrightarrow \neg C$	$\equiv [(\neg S \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg S)]$		[Def. Of $\Leftrightarrow$]
	$\equiv [(\neg\neg S \vee \neg C) \wedge (\neg\neg C \vee \neg S)]$		[Def. Of $\Rightarrow$]
	$\equiv [(S \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg S)]$		[$\neg\neg$ elimination]
	$\equiv S \vee \neg C$	[3.1]	[$\wedge$ elimination]
	$C \vee \neg S$	[3.2]	

[4] $\neg S$

KNOWLEDGE BASE:

[1.1]	$\neg I \vee \neg P$
[1.2]	$P \vee I$
[2.1]	$\neg I \vee \neg C$
[2.2]	$C \vee I$
[3.1]	$S \vee \neg C$
[3.3]	$C \vee \neg S$

[4] $\neg S$

i. Deriva la solución mediante refutación por resolución.

KNOWLEDGE BASE:

GOAL: ¬P [NEGATED GOAL ¬(¬P)]

EXTENDED KNOWLEDGE BASE:

[1.1] $\neg I \vee \neg P$
[1.2] $P \vee I$
[2.1] $\neg I \vee \neg C$
[2.2] $C \vee I$
[3.1] $S \vee \neg C$
[3.3] $C \vee \neg S$
[4] $\neg S$
[5] $\neg(\neg P) \equiv P$ [¬¬ elimination]

[5] + [1.1] $\vdash_{\text{RES on P}}$ $\neg I$ [6]

[6] + [2.2] $\vdash_{\text{RES on I}}$ C [7]

[7] + [3.1] $\vdash_{\text{RES on C}}$ S [8]

[8] + [4] $\vdash_{\text{RES on S}}$ $\square$ (empty clause)

We have reached a contradiction. Therefore, ¬P (A and B are not parallel) is a logical consequence of the knowledge base.

[5] + [2.2] $\vdash_{\text{MP}}$ I [6]

[6] + [2.1] $\vdash_{\text{MP}}$ $\neg C$ [5]