SOLUCIONES:

1) Calentamos una placa de modo que la temperatura en cada punto (x, y) viene dada por:

$$T(x,y) = \frac{64}{x^2+y^2+4}.$$

(a) Encuentra la tasa de cambio de temperatura en el punto $(2,1)$ en la dirección unitaria del vector $(3,4)$.

(b) Si nos situamos en el punto $(1,0)$, ¿en qué dirección crece la temperatura más rápidamente? ¿Cuál es la tasa de cambio en esa dirección unitaria?

SOL.: (a) En primer lugar observamos que T es una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ puesto que es el recíproco de un polinomio que no se anula. Calculamos su matriz de derivadas (en este caso, su gradiente) en el punto (2,1):

$$\nabla T(2,1) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{|(2,1)} = \left(\frac{-128x}{(x^2+y^2+4)^2}, \frac{-128y}{(x^2+y^2+4)^2}\right)_{|(2,1)} = \left(\frac{-256}{81}, \frac{-128}{81}\right).$$

Por otro lado, el vector unitario en la dirección de $(3,4)$ viene dado por $\vec{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, puesto que su norma es $\|(3,4)\| = 5$. Luego, por la relación entre derivada direccional y gradiente, obtenemos

$$D_{\vec{v}}T(2,1) = \nabla T(2,1)\cdot\vec{v} = \left(\frac{-256}{81}, \frac{-128}{81}\right)\cdot\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \frac{-256}{81}.$$

(b) Como sabemos, la dirección de mayor cambio se produce en la dirección del gradiente, en este caso en la dirección de $\nabla T(1,0) = (-\frac{128}{25}, 0)$ y la tasa de cambio correspondiente en la dirección unitaria es $\|\nabla T(1,0)\| = \frac{128}{25}$, ya que $\vec{v} = \frac{\nabla T(1,0)}{\|\nabla T(1,0)\|} = (-1,0)$ y

$$D_{\vec{v}}T(1,0) = \nabla T(1,0)\cdot\vec{v} = \|\nabla T(1,0)\|.$$

2) Definimos la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Determina si $f(x,y)$ es continua y diferenciable en $(0,0)$.

(b) Halla la derivada direccional $D_{(u,v)}f(0,0)$ en cada dirección unitaria $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Si $g(t) = (t, 2t), t \in \mathbb{R}$, calcula explícitamente la función compuesta $(f \circ g)$ y su derivada $(f \circ g)'(0)$. ¿Se podría calcular esta derivada utilizando la regla de la cadena?

SOL.: (a) La función es continua en $(0,0)$ ya que, usando que $x^2 + y^2 \geq y^2$, se tiene

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1, \quad \text{y por tanto} \quad |f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq |x|.$$

Luego, $0 \leq \lim_{(x,y)\to 0} |f(x,y) - f(0,0)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0.$

Sin embargo no es diferenciable en dicho punto porque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$, y el cociente

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} := L(x,y)$$

nos da una función homogénea de grado 0, sin límite para $(x,y)\to(0,0)$. Así, por ejemplo, si nos aproximamos al punto $(0,0)$ a lo largo de la semirecta $y = mx$, $x > 0$ vemos que

$$\lim_{x\to 0^+} L(x,mx) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3m^2}{x^3(1+m^2)^{3/2}} = \frac{m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$$

depende de los distintos valores que demos a m.

(b) Llamando $\vec{w} = (u,v)$ con $u^2+v^2 = 1$, tenemos por definición

$$D_{\vec{w}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{0}+t\vec{w})-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tu(tv)^2}{t((tu)^2+(tv)^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3uv^2}{t^3(u^2+v^2)} = uv^2.$$

(c) La función composición que nos piden viene dada por $(f\circ g)(t) = f(t,2t) = \frac{4t^3}{5t^2} = \frac{4}{5}t$, si $t \neq 0$, y $f(g(0)) = f(0,0) = 0$. Por tanto $(f\circ g)(t)) = \frac{4}{5}t$, $\forall t$ y $(f\circ g)'(0) = \frac{4}{5}$.

Este cálculo no se podría haber hecho utilizando la regla de la cadena por no ser f diferenciable en el punto $g(0) = (0,0)$. Es más, como $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$ y $g'(0) = (1,2)$ se tendría que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\cdot g'(0) = 0$ que no coincide con el valor esperado $\frac{4}{5}$.

3) Consideramos la función $f(x,y) = (x+y)e^{(x+y)^2}$.

(a) Halla la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1,0,e)$.

(b) Dada una función derivable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de la que se conoce el valor $g'(e) = 1$, calcula $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(0,1)$.

SOL.: (a) El punto $(1,0,e)$ pertenece a la gráfica de f porque $f(1,0) = e$. Además, f es difrenciable en todo $\mathbb{R}^2$ por ser producto y composición de funciones con derivadas continuas. Por lo visto en clase, el plano tangente exite y tiene como vector normal

$$\vec{\eta} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0), -1\right).$$

Se tiene

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = e^{(x+y)^2}\left(1+2(x+y)^2\right)_{|(1,0)} = 3e$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = e^{(x+y)^2}\left(1+2(x+y)^2\right)_{|(1,0)} = 3e.$

Luego $\vec{\eta} = (3e,3e,-1)$ y, por tanto, la ecuación del plano viene dada por

$$0 = \vec{\eta}\cdot(x-1, y-0, z-e) = 3e(x-1)+3ey-(z-e); \qquad \text{es decir} \quad z = 3ex+3ey-2e$$

(b) Por la regla de la cadena, que podemos usar ya que ambas son diferenciables, se tiene

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(0,1) = g'(f(1,0)).\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = g'(e).\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3e.$$

4) La temperatura T en un punto del plano viene dada por $T(x,y) = 100 - xy + x^2 + y^2$.

(a) Encuentra y clasifica los puntos críticos de T.

(b) Encuentra las temperaturas máxima y mínima en la región:

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}\}.$$

SOL.: (a) Calculamos primero sus puntos críticos:

$$(0,0) = \nabla T(x,y) = (-y+2x, -x+2y), \quad \text{es decir ,} \quad \begin{cases} -y+2x = 0 & \Longrightarrow\ y = 2x, \\ -x+2y = 0, & \Longrightarrow\ x = 2y. \end{cases}$$

Deducimos que $x = 4x$, lo que implica $x = y = 0$. La matriz Hessiana en el punto $(0,0)$, de hecho en todos los puntos por ser T una forma cuadrática, es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, que tiene los dos menores principales (con valores 2 y 3 respect.) positivos. Luego A es definida positiva y esto nos dice que $(0,0)$ es un mínimo local de la función T.

(b) En el interior del dominio hemos encontrado como punto relevante el $(0,0)$ cuyo valor por T es $T(0,0) = 100$. Buscamos ahora los posibles valores máximo y mínimo en los puntos de la frontera, es decir, los extremos de la función T sujetos a la condición $G(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$. Para ello utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Este método nos pide encontrar los valores λ y los puntos (x,y) que verifican las condiciones

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} & = \lambda\, \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} & = \lambda\, \frac{\partial G}{\partial y} \\ G(x,y) & = 0, \end{cases} \qquad \text{es decir,} \qquad \begin{cases} -y+2x & = \lambda\, 2x \\ -x+2y & = \lambda\, 2y \\ \ \ x^2+y^2 & = 2. \end{cases}$$

De la primera ecuación deducimos $y = 2x(1-\lambda)$ y de la segunda $x = 2y(1-\lambda)$. Vemos que $\lambda \neq 1$, ya que en caso contrario se deduciría $x = y = 0$, y este punto no está en la frontera. Multiplicando la parte izquierda de una de las ecuaciones con la parte derecha de la otra, queda

$$2y^2(1-\lambda) = 2x^2(1-\lambda) \qquad \text{y, despejando,} \quad y^2 = x^2.$$

Poniendo esta relación a su vez en la tercera ecuación llegamos a $2x^2 = 2$, luego $x = \pm 1$. Hemos obtenido de esta manera cuatro puntos candidatos a albergar el máximo y el mínimo de T en la frontera, a saber, $P_1 = (1,1), P_2 = (1,-1), P_3 = (-1,1), P_4 = (-1,-1)$. Evaluando queda

$$T(P_1) = T(P_4) = 101; \qquad T(P_2) = T(P_3) = 103.$$

Uniendo esto a la información obtenida en el interior, llegamos a que la función T alcanza su máximo en la región Ω en los dos puntos de la frontera $P_2 = (1,-1)$ y $P_3 = (-1,1)$ con valor 103, y alcanza su mínimo en el punto interior $(0,0)$ con valor 100.