CONJUNTOS Y NÚMEROS (19-9-2022)	Grado en Matemáticas Curso 2022–23	Hoja nº 2

Conjuntos

1. Sean $S = \{1,2,3,4,5\}, T = \{3,4,5,7,8,9\}, U = \{1,2,3,4,9\}, V = \{2,4,6,8\}$ subconjuntos del conjunto $\mathbb{N}$ (de números naturales). Calcular:

a) $S \cap U$.

b) $(S \cap T) \cup U$.

c) $(S \cup U) \cap V$.

d) $(S \cup V) \setminus U$.

e) $(U \cup V \cup T) \setminus S$.

f) $(S \cup V) \setminus (T \cap U)$.

g) $S \times T$.

h) $(S \times V) \setminus (T \times U)$.

i) $(S \setminus T) \times (V \setminus U)$.

2. Para cada número natural n, sea $A_n = [-\frac{2}{n+1}, \frac{4n-1}{3n}] \subset \mathbb{R}$. Determinar

$$\cap_{n=1}^{7} A_n\,, \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

3. Demostrar las siguientes igualdades para conjuntos arbitrarios S, T, U y V.

a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$.

b) $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$.

c) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$.

d) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$.

Observación: Los diagramas de Venn pueden ser útiles para orientarse, pero la demostración no debe depender de ellos.

4. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones: $\{e\} \subset \{e, \{e^2\}\}$, $\emptyset \subset \{e, \{\emptyset\}\}$, $\emptyset \in \{e, \{\emptyset\}\}$ son ciertas y por qué?

5. Sea $A = \{a, b, 1, 2\}$. Dar una descripción explícita del conjunto $\mathcal{P}(A)$.

6. Sea $A = \{1, 2\}$. Dar una descripción explícita del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

7. Sean S y T dos conjuntos. Demostrar que $S \subset T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$. Concluir que $S = T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T)$.

8. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

c) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

9. Sean A, B, C conjuntos dados tales que $B \subset A$. Se pide describir en cada caso los conjuntos X que satisfacen las ecuaciones:

a) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$, si sabemos que $A \subset C$.

b) $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$, si sabemos que $A \cap C = \emptyset$.

10. Para todo $n, k \in \mathbb{Z}$, con $0 \leq k \leq n$. Demostrar

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

b) $\sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}$.

11. Para todo $n, k \in \mathbb{Z}$, con $0 \leq k \leq n$, derivando k veces la igualdad polinómica $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ y evaluando en $x = 0$ obtener la igualdad $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

12. Utilizar el *principio de inclusión–exclusión* para responder a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos números naturales coprimos con 77 hay entre 1 y 77?

b) ¿Cuántos números naturales coprimos con 1000 hay entre 1 y 1000?

c) ¿Cuántos números naturales coprimos con 360 hay entre 1 y 360?

13. En una reunión de 4 personas, cada uno ha venido con su paraguas y lo ha dejado en un mismo paragüero. Al final de la reunión, cada persona escoge un paraguas de forma aleatoria.

a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los paraguas de forma que nadie se quede con el suyo?

b) Responder a la misma pregunta para el caso de n personas y n paraguas.

14. Sean $A_1 \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Dado un conjunto finito B, denotamos por $|B|$ su cardinal. Demostrar

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \right| &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|. \end{aligned}$$