Hoja 3 → relaciones.

A.S. = ($xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$)

T. = ((xRy) $\wedge$ (yRz) $\Rightarrow$ xRz)

① Estudiar si son relaciones de orden:

(Relación de orden = (R) + (A.S.) + (T))

- $x \geq y$; $x, y \in \mathbb{R}$

(R) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x \geq x$ ✓

(A.S) $x, y \in \mathbb{R}$. $(x \geq y) \wedge (y \geq x) \Rightarrow x \geq y \geq x$, $x = y$. ✓

(T) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $\quad (x \geq y) \wedge (y \geq z) \Rightarrow x \geq y \geq z$, $x \geq z$ ✓.

Si es orden total: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad (x \geq y) \vee (y \geq x)$. ✓

($\forall x, y \quad (xRy) \vee (yRx)$)

- $x > y$; $x, y \in \mathbb{R}$. No es una relación de orden.

(R) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x > x$ # No cumple (R).

- $A \subset B$; $A, B \in P(X)$ "$\subset$" incluye "=" por convenio. También se escribe "$\subseteq$"

(R). $\forall A \in P(X)$: $A \subset A$ ✓

(A.S) $((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Rightarrow A = B$ ✓

(T) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset B \subset C$, $A \subseteq C$. (Razonar con $x \in A \Rightarrow x \in B$, etc)

No es un orden total, sean A y B tq. $A \cap B = \emptyset$, ni $A \subset B$ ni $B \subset A$.

- $a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}$; $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}^2$.

(R). $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$: $a + b\sqrt{2} \leq a + b\sqrt{2}$ ✓

(A.S). Sean $a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}$ y $c + d\sqrt{2} \leq a + b\sqrt{2}$.

Entonces $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Escribimos, $\underbrace{(a-c)}_{\text{racional}} + \underbrace{(b-d)\sqrt{2}}_{\text{irracional si } b \neq d} = 0$

Con lo cual $b = d$ y $a = c$, es decir $(a,b) = (c,d)$.

(T.) $(a + b\sqrt{2} \geq c + d\sqrt{2}) \wedge (c + d\sqrt{2} \geq e + f\sqrt{2})$

Los $a + b\sqrt{2}$ etc. son números reales $\Rightarrow a + b\sqrt{2} \geq e + f\sqrt{2}$.

Es un orden total: dados $a + b\sqrt{2}$ y $c + d\sqrt{2}$, como son nºs reales,

o $a + b\sqrt{2} \geq c + d\sqrt{2}$ ó $c + d\sqrt{2} \geq a + b\sqrt{2}$. ∎

② X un conjunto no vacío, $f: X \to \mathbb{R}$. $x R y \iff f(x) \leq f(y)$.

R es una relación de orden $\iff$ f es inyectiva.

$\Rightarrow$) Demostramos el contrarrecíproco.

Si f no es iny., $\exists x', y' \in X$ distintos tq. $f(x') = f(y')$.

Entonces tenemos $x' R y'$ porque $f(x') \leq f(y')$ y además

$y' R x'$ porque $f(y') \leq f(x')$.

Sin embargo $x' \neq y'$, R no es antisimétrica. ■

$\Leftarrow$) Comprobamos las 3 propiedades:

(R) $x R x \iff f(x) \leq f(x)$ ✓

(A.S) $(x R y) \wedge (y R x) \iff (f(x) \leq f(y)) \wedge (f(y) \leq f(x)) \iff f(x) = f(y)$

Como f es iny., tenemos $x = y$.

(T) $(x R y) \wedge (y R z) \iff (f(x) \leq f(y)) \wedge (f(y) \leq f(z))$, luego $f(x) \leq f(z)$

$\Updownarrow$

$x R z$. ■

$(\mathbb{N}, R)$ ↱ a es mínimo si $\forall x \in X$ $a R x$ ↲ $a | x$

(3) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\quad n R m \iff n | m$.

a) ¿Hay máximo y/o mínimo en $\mathbb{N}$?

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $1 | n$, es decir, $1 R n$ para cualquier n.
Luego 1 es mínimo.

Supongamos que hay un elemento máximo $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $n R m$, es decir $n | m$. $\quad n = m + 1 \nmid m$, contradicción. No hay elemento máximo.

b) ¿Qué subconjuntos de $\mathbb{N}$ tienen máximo y cuáles tienen mínimo?

Sea $X \subseteq \mathbb{N}$.

- Supongamos que X tiene un máximo $m \in X$. Entonces $\forall n \in X$, tenemos $n | m$, es decir los elementos de X son divisores de m.
Es decir, X tiene que ser de la forma $X = \{\text{divisores de } m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{m\}$

- Supongamos que X tiene un mínimo $m \in X$. Entonces $\forall n \in X$: $m | n$, es decir n es un múltiplo de m.
Luego X con mínimo son de la forma
→ si $1 \in X$, cualquier X.
→ si $1 \notin X$, $X = \{\text{múltiplos de } m\} \cup \{m\}$

c) $A = \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq m\}$ $\quad n, m \in \mathbb{N}$.
¿Si tenemos $a \in A$, qué debe cumplir para ser maximal / minimal?

a es maximal $\iff (a | l \Rightarrow a = l)$. Es decir, no puede haber múltiplos de a (distintos de a).

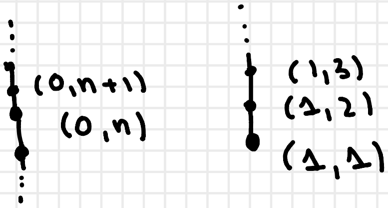
a es minimal $\iff (l | a \Rightarrow l = a)$. Es decir, A no tiene divisores de a (salvo el propio a)

d) ¿Elementos minimales $\mathbb{N} \setminus \{1\}$? → los primos.

(4) Sea A un conj. ordenado con un único elem. minimal $a \in A$.
¿Es a el mínimo de A?

Falso: $\{(0,n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(1,m) \mid m \in \mathbb{N}\}$

$(a,b) \, R \, (a',b') \iff (a = a') \wedge (b \leq b')$



→ minimal, pero no es mínimo. $\blacksquare$