Tema 4. Integrales curvilíneas

4.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/e5c56568-3387-4d9d-8c42-f8c1bae40456/U4_IntegralesCurvilineas.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/85cc1945-a843-4096-aadb-4e972ece9023/H8_IntegralesCurvas.pdf

4.1. Curvas

*Definición. Una **curva** o trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\sigma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.*

*Definición. Una curva definida por $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es **diferenciable** si lo es la función σ en un abierto $U \supset [a,b]$. Si σ es diferenciable, el **vector velocidad** de σ en t es el vector $\sigma'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sigma(t+h)-\sigma(t)}{h}$. La **velocidad** de σ en t es $\|\sigma'(t)\|$. El **vector aceleración** es $\sigma''(t)$.*

*Definición. El **vector tangente** de una curva σ en t es el vector unitario $\dfrac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$.*

Una curva parametrizada $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se dice que es:

1. **Regular** si es diferenciable y $\sigma'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in [a,b]$.
2. **De clase** $\mathcal{C}^k([a,b])$ si cada función σ_i es de clase $\mathcal{C}^k$.
3. **Simple** si es inyectiva en $[a,b]$.
4. **Cerrada** si $\sigma(a) = \sigma(b)$.

*Definición. La **recta tangente** a σ en t es $\{\sigma(t) + \lambda\sigma'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

*Definición. La **longitud de arco** de una curva $\sigma \in \mathcal{C}^1$ entre a y b es $l = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \, dt$.*

Ejemplo 1. Sea la curva $c_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Hallar la recta tangente en $t = 0$ y la longitud de arco entre $t = 0$ y $t = \pi$.
Primero calculamos $c_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. El vector tangente en $t = 0$, es decir, en el punto

$c_1(0) = (1, 0)$, es $c_1'(0) = (0, 1)$. Por lo tanto, la recta tagente es $\{(1, 0) + \lambda(0, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
La longitud del arco es $l = \displaystyle\int_0^\pi \sqrt{(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2}\ dt = \int_0^\pi dt = \pi$.

4.1.1. Parametrización de curvas

*Definición. Sea $h : [a, b] \to [a_1, b_1]$ una aplicación biyectiva y diferenciable. Si $\alpha : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ es una curva suave, entonces la curva $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\beta(t) = \sigma(h(t))$ es la **parametrización** de α.*

*Definición. Si h es creciente, se dice que la parametrización **conserva la orientación**.*

*Definición. Si h es decreciente, se dice que la parametrización **invierte la orientación**.*

4.2. Integrales de funciones escalares sobre curvas

Definición. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\sigma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada. La integral de f a lo largo de σ es $\displaystyle\int_\sigma f\ ds = \int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\ dt$.

> Proposición. La integral de la función escalar f sobre la curva $\alpha : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ no depende de las reparametrizaciones de α.

Demostración.
Por la regla de la cadena $\beta'(t) = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t)$, $\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| \cdot |h'(t)|$.
Si h preserva la orientación, h es creciente y $h' > 0$, $h(a) = a_1, h(b) = b_1$.

$$\int_\beta f\ ds = \int_a^b f(\beta(t))\|\beta'(t)\|\ dt = \int_a^b f(\alpha(h(t))\|\alpha'(h(t))\| \cdot h'(t)\ dt$$

Si h invierte la orientación, h es decreciente y $h' < 0$, $h(a) = b_1, h(b) = a_1$.

$$\int_\beta f\ ds = \int_a^b f(\beta(t))\|\beta'(t)\|\ dt = -\int_a^b f(\alpha(h(t))\|\alpha'(h(t))\| \cdot h'(t)\ dt$$

En ambos casos, haciendo el cambio $r = h(t)$, queda $\displaystyle\int_{a_1}^{b-1} f(\alpha(r))\|\alpha'(r)\|\ dr = \int_\alpha f\ ds$. $\square$

4.3. Campos vectoriales

*Definición. Llamamos **campo vectorial** a toda función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

*Definición. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Llamamos **línea de flujo** de F a toda curva $\sigma(t)$ que verifique $F(\sigma(t)) = \sigma'(t)$.*

4.3.1. Integrales de línea

*Definición. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y supongamos que $F = (F_1, ..., F_n)$ es continuo sobre la curva $\mathcal{C}^1$ dada por $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Definimos la **integral de línea** de F sobre σ como $\displaystyle\int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma F_1 dx_1 + ... + F_n dx_n = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\ dt$.*

Nota. Si $F(\sigma(t)) \perp \sigma'(t), \forall t$, la integral de línea sería 0.

Ejemplo 2. Sea $\sigma(t) = (\sin(t), \cos(t), t), t \in [0, 2\pi]$ y sea $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Aplicando la definición, tenemos que $\int_\sigma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\sin(t), \cos(t), t) \cdot (\cos(t), -\sin(t), 1)\ dt = \int_0^{2\pi} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$.

Teorema. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y supongamos que F es continuo sobre una curva de clase $\mathcal{C}^1$ dada por $\sigma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Sea ahora $\sigma_0 : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de σ_1. Entonces, $\int_{\sigma_0} F \cdot ds = \pm \int_{\sigma_1} F \cdot ds$. Manteniendo el signo cuando la reparametrización conserve la orientación de la trayectoria, o invirtiéndolo cuando esta se invierta.

Teorema fundamental de integracion sobre curvas. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ sobre una curva de clase $\mathcal{C}^1$ dada por $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ y consideremos el campo vectorial $F = \nabla f$. Entonces $\int_\sigma \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$.

Demostración.
Sea $G(t) = f(\sigma(t))$, entonces, aplicando la regla de la cadena: $G'(t) = \nabla f(\sigma(t))\sigma'(t)$.
$\int_a^b \nabla f(\sigma(t))\sigma'(t)\ dt = \int_a^b G'(t)\ dt = G(b) - G(a) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$. $\square$

Ejemplo 3. Sea $\sigma(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)^3, 0\right)$, $t \in [0, 1]$, y sea $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Observamos que $\int_c F \cdot ds = \int_\sigma y\ dx + x\ dy = \int_\sigma \nabla f \cdot ds$, con $f(x, y, z) = xy$. Por el teorema fundamental, $f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{4}$.

4.3.2. Campo gradiente y campo conservativo

*Definición. Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, diremos que es un **campo vectorial gradiente** si existe una función escalar de clase $\mathcal{C}^1$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $F = \nabla f$. En este caso, f se denomina **potencial** de F.*

*Definición. Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial, diremos que es **conservativo** si dadas dos curvas $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}^1$ cualesquiera de su dominio con el mismo origen y final, se tiene que $\int_{\sigma_1} F \cdot ds = \int_{\sigma_2} F \cdot ds$.*

Nota. Si F es un campo gradiente, entonces también es conservativo.

4.3.3. Divergencia y rotacional

*Definición. Sea $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial tal que las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i \in [1,n]$, existen en cada punto. La **divergencia** de F es la función escalar $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}$.*

Ejemplo 4. Dado el campo $F(x,y,z) = (x^2y, z, xyz)$:
$\operatorname{div} F = \dfrac{\partial(x^2y)}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial(xyz)}{\partial z} = 2xy + 0 + xy = 3xy$.

*Definición. Sea $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tal que las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1,2,3$, existen en cada punto. El **rotacional** de F es el campo vectorial $\overrightarrow{\text{rot}} = \nabla \times F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $(x_1, x_2, x_3) \to \left(\dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}, -\left(\dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}\right), \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$.*

Ejemplo 5. Dado el campo $F(x,y) = (y, -x)$:
$\overrightarrow{\text{rot}}\ F = \left(0, 0, \dfrac{\partial(-x)}{\partial x} - \dfrac{\partial y}{\partial y}\right) = (0,0,-1-1) = (0,0,-2)$.

> Teorema. Sean $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ambas funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Entonces tenemos:
> 1. $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$, el rotacional de cualquier gradiente es $\vec{0}$.
> 2. $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$, la divergencia de cualquier rotacional es 0.

Demostración.

1. Sea $\nabla \times (\nabla f) = \overrightarrow{\text{rot}}\ (\nabla f) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{vmatrix}$. Usando que las derivadas cruzadas son independientes del orden de las variables, deducimos que $\nabla \times (\nabla f) = (0,0,0)$. $\square$

Ejemplo 6. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en C^2. Demostramos que $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$:
Escribimos $\nabla f = (f_x, f_y, f_z), \nabla g = (g_x, g_y, g_z)$. Tenemos entonces
$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = (f_y g_z - f_z g_y, -(f_x g_z - f_z g_x), f_x g_y - f_y g_x)$.
Luego $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = \dfrac{\partial(f_y g_z - f_z g_y)}{\partial x} - \dfrac{\partial(f_x g_z - f_z g_x)}{\partial y} + \dfrac{\partial(f_x g_y - f_y g_x)}{\partial z} = (f_{xy} g_z + f_y g_{xz} - f_{xz} g_y - f_z g_{xy}) - (f_{yx} g_z + f_x g_{yz} - f_{yz} g_x - f_z g_{yx}) + (f_{zx} g_y + f_x g_{zy} - f_{zy} g_x - f_y g_{zx}) = 0$.

4.4. Teorema de Green

> Teorema de Green. Sea D una región elemental en $\mathbb{R}^2$, sea ∂D la frontera de D, y supongamos que ∂D está parametrizada por una curva diferenciable de modo que se recorra en el sentido que deja D a la izquierda del vector director

> (sentido antihorario). Sean $P, Q : D \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces tenemos $\displaystyle\int_{\partial D} (P, Q) \cdot ds = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dxdy.$

Demostración.
Suponemos dominios de tipo 1 y 2, tales que $\exists \alpha_1, \alpha_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\exists \beta_1, \beta_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$, todas de clase $\mathcal{C}^1$, de forma que $D = \{(x, y) : x \in [a, b], \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)\} = \{(x, y) : y \in [c, d], \beta_1(y) \leq x \leq \beta_1(y)\}$.
Así, obtenemos $\displaystyle\iint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdy = \int_a^b (P(x, \alpha_2(x)) - P(x, \alpha_1(x)))\, dx = -\int_{\partial D_+} P\, dx$ y $\displaystyle\iint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdy = \int_c^d (Q(\beta_2(y), y) - Q(\beta_1(y), y))\, dy = \int_{\partial D_+} Q\, dy$.
Luego, $\displaystyle\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\, dxdy = \int_{\partial D_+} P\, dx + Q\, dy$. $\square$

Ejemplo 7. Sean $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = yx$ y el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, verificamos el Teorema de Green.
Por una parte, $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos(\theta), y = \sin(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$.
De forma que $\displaystyle\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \int_{\partial D} (x, yx) \cdot (dx, dy) = \int_0^{2\pi} (\cos(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta)) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta))\, d\theta = \int_0^{2\pi} -\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)^2\, d\theta = \left[\frac{\cos(\theta)^2}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos(\theta)^3}{3}\right]_0^{2\pi} = 0.$
Por otro lado, $\displaystyle\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dxdy = \iint_D y\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \sin(\theta)\, dr d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin(\theta)\, d\theta = \frac{1}{3} = [-\cos(\theta)]_0^{2\pi} = 0.$

> Corolario. Sea D una región donde podemos aplicar el Teorema de Green. Entonces el área de D es $\displaystyle\text{Área }(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y, x)\, ds.$

Demostración.
Tomamos $P(x, y) = -y$ y $Q(x, y) = x$. Entonces, aplicando el Teorema de Green, tenemos $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\partial D} x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\, dxdy = \frac{1}{2}\iint_D 2\, dxdy = \text{Área }(D).$

Ejemplo 8. Sea $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, tal que $P(x, y) = x^2 - y$, $Q(x, y) = x + xy + y^2$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Verificamos el Teorema de Green.
Parametrizamos ∂D como $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$. De esta forma $\displaystyle\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy =$

$\int_0^{2\pi} \left(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta), \cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)^2\right) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta))\ d\theta =$
$\int_0^{2\pi} -\sin(\theta)\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2\cos(\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} 1 +$
$\sin(\theta)^2\cos(\theta)\ d\theta = \left[\theta + \frac{\sin(\theta)^3}{3}\right]_0^{2\pi} = 2\pi.$

Por otra parte, $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D ((1+y) - (-1))\ dxdy = \iint_D 2 + y\ dxdy.$

Hacemos el cambio de variables a coordenadas polares $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ y vemos que la integral es $\int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + r\sin(\theta))r\ d\theta dr = 4\pi \int_0^1 r\ dr + \int_0^1 r^2[-\cos(\theta)]_0^{2\pi}\ dr = 2\pi.$

> Teorema. Dado el campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con funciones coordenadas $F = (P, Q)$, se cumple que:
>
> 1. F es un campo gradiente.
> 2. Se cumple que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
> 3. F es un campo conservativo.