Tema 4. Derivadas

4.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/11176ebf-fae0-4ae4-b736-aafcf099aee9/U4a_DerivadasDefinicion.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/89a625de-281f-45b1-81ba-84174eb6851f/U4b_DerivadasAplicaciones.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/a71d9f93-5107-43e0-967b-92006ff4da2e/U4c_PolinomiosTaylor.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/4a8a57b6-9911-45d0-bc27-fb797e51090f/H5_Limites.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/ce7d83e2-436b-4d7d-a43b-23beb7b98247/H6_Derivadas.pdf https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/80d02097-0cbb-4af2-9f6d-85d993dee04f/H7_Taylor.pdf

4.1. Derivada de una función

*Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$ un punto. Definimos la **derivada** de f en a como $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, siempre que dicho límite exista.*

Nota. Habitualmente, se sustituye $x = a + h$, de forma que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

> Proposición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$ un punto. La existencia de $f'(a)$ implica la existencia de $f(a)$ y su coincidencia con $\lim_{x \to a} f(x)$. En otras palabras si existe $f'(a)$, entonces f es continua en a.

4.1.1. Derivadas laterales

*Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto $a \in \mathbb{R}$. Definimos la **derivada por la derecha** de f en a como $f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.*

*Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto $a \in \mathbb{R}$. Definimos la **derivada por la izquierda** de f en a como $f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.*

> Teorema. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$ un punto. La derivada $f'(a)$ existe $\Leftrightarrow$ $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ existen y coinciden.

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es **derivable en** $a \in A$ si existe $f'(a)$.*

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es **derivable** si lo es en todo punto A.*

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Denotamos su **función derivada** como $f' : A \to \mathbb{R}$.*

4.1.2. Continuidad

> Lema. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $a \in A$. Entonces f es continua en a.

Demostración.

Tenemos que $\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$. Luego, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, f es continua en a. $\square$

El recíproco del lema no es cierto, es decir, f es continua en a no implica que f sea diferenciable en a. El ejemplo más común es la función $f(x) = |x|$, continua en todo punto. Sin embargo, podemos apreciar que:

- $f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{-h-0}{h} = -1$
- $f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{h-0}{h} = 1$

Luego, como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, no existe $f'(0)$ y f no es derivable en 0.

4.1.3. Cálculo operativo de derivadas

Dadas dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ tales que sus derivadas $f', g' : A \to \mathbb{R}$ existan, definimos las siguientes operaciones:

- Suma. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- Producto. $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Cociente. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

4.1.4. Regla de la cadena

> Regla de la cadena. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones continuas y diferenciables en a y $f(a)$ respectivamente. Entonces, la composición $g \circ f$ es derivable en a y $(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

En general, sea $F(x) = g(f(x))$, entonces $F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

4.1.5. Teorema de la función inversa

> Teorema de la función inversa. Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ una función diferenciable entre dos intervalos, donde $f((a,b)) = (c,d)$. Si $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces, f es biyectiva, $\exists$ la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$, que además es diferenciable, y su derivada viene dada como $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} =$, con $y = f(x)$.

4.2. Máximos y mínimos

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f tienen un **máximo** (resp. **mínimo**) **local** en el punto $c \in \operatorname{dom} f$ si existe un intervalo abierto $I \subset \operatorname{dom} f$ que contiene a c y tal que $f(x) \le f(c)$ (resp. $f(x) \ge f(c)$) para todo $x \in I$.*

> Lema. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $c \in (a,b)$. Entonces f tiene un máximo o mínimo local en c si $f'(c) = 0$.

Demostración.
Suponemos que f tiene un máximo en c, de forma que $f(c+h) - f(c) \le 0$ para todo h:

- si $h > 0$, entonces $f'(c^-) = \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0$

- si $h < 0$, entonces $f'(c^+) = \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$

De forma que, como f es derivable en c, existe $f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+)$. Así, $0 \leq f'(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0$. $\square$

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función derivable. Se denominan **puntos críticos** a todos aquellos valores c de su dominio tales que $f'(c) = 0$.*

4.2.1. Teorema de Rolle

> Teorema de Rolle. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Demostración.
Si $f(x) = k$ constante, entonces $f'(x) = 0$ para todo x.
Si $f(x) > f(a)$ para algún x, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \sup\limits_{[a,b]} f$. Como f es derivable en, $f'(c) = 0$.
Si $f(x) < f(a)$ para algún x, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \inf\limits_{[a,b]} f$. Como f es derivable en, $f'(c) = 0$. $\square$

> Proposición. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y g está acotada. Entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Demostración.
Que g esté acotada implica que $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R} : b_1 \leq g(x) \leq b_2, \forall x$. Luego, $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ siempre que $a \in [b_1, b_2]$. Como ambos límites existen, $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0L = 0$. $\square$

4.2.2. Teoremas del valor medio

> Teorema del valor medio de Lagrange. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces $\exists c \in (a, b) : f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
> .

Demostración.
Definimos la función auxiliar $F(x) = f(x) - \alpha x$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Queremos aplicar el Teorema de Rolle, de forma que necesitamos que $F(a) = F(b)$, luego, $f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b \Rightarrow \alpha = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$.
Así, por el Teorema de Rolle, sabemos que $\exists c \in (a, b) : F'(c) = f'(c) - \alpha = 0$. A partir de esto, vemos que $\alpha = f'(c)$.
Combinando ambos resultados, llegamos a que $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$. $\square$

> Teorema del valor medio de Cauchy. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b) con $g' \neq 0$. Entonces, $\exists c \in (a, b) :$ $\dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Demostración.
Definimos la función auxiliar $F(x) = f(x) - \alpha g(x)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Queremos aplicar el Teorema de Rolle, de forma que necesitamos que $F(a) = F(b)$, luego, $f(a) - \alpha g(a) = f(b) - \alpha g(b) \Rightarrow \alpha =$

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

.
Así, por el Teorema de Rolle, sabemos que $\exists c \in (a, b) : F'(c) = f'(c) - \alpha g'(c) = 0$. A partir de esto, deducimos que $f'(c) = \alpha g'(c) \Rightarrow \alpha = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
Combinando ambos resultados, llegamos a que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$. $\square$

4.2.3. Regla de L'Hopital

> Teorema. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ o ∞. Entonces, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4.3. Crecimiento y decrecimiento

Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Se dice que f es ***creciente*** *(resp.* ***decreciente****) en el intervalo I si para todo $x, y \in I$ tales que $x \leq y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$).*

Esto es una consecuencia del Teorema del valor medio de Lagrange, donde que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$ implica que f es creciente y que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 0$ implica que f es decreciente.

> Teorema. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo I. Entonces $f'(x) \geq 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ es creciente; y $f'(x) \leq 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ es decreciente.

Demostración.
Tomando la apreciación anterior, basta con tomar x e y como puntos muy cercanos, de forma que $y = x + h$ y haciendo que se aproximen infinitesimalmente, de forma que, si f es creciente, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$, equivalentemente, $f'(x) \geq 0$. $\square$

Si para los casos de crecimiento y decrecimiento se cambian las desigualdades por desigualdades estrictas, $f'(x) > 0$ o $f'(x) < 0$, decimos que f es **estrictamente** creciente o decreciente.

4.3.1. Puntos críticos

Definición. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Decimos que c es un ***punto crítico*** *de f en el intervalo I si $f'(c) = 0$.*

> Análisis de extremos. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y $c \in \mathbb{R}$ un punto tal que $f'(c) = 0$. Dado un $h > 0$:
>
> - Si $f'(c-h) > 0$ y $f'(c+h) < 0$, entonces c es un máximo local de f.
> - Si $f'(c-h) < 0$ y $f'(c+h) > 0$, entonces c es un mínimo local de f.
> - Si $f'(c-h), f'(c+h) > 0$ o $f'(c-h), f'(c+h) < 0$, entonces c es un punto de silla (no es máximo ni mínimo).

> Teorema. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces y $a \in I$ un punto crítico de f. Entonces:
>
> - Si $f''(a) < 0$, entonces a es un máximo local de f.
> - Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f.
> - Si $f''(a) = 0$, entonces no se puede decir nada de a.

4.3.2. Concavidad y convexidad

Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Decimos que f es ***convexa*** *si $f'(x)$ es creciente, es decir, si $f''(x) \geq 0$.*

Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Decimos que f es ***cóncava*** *si $f'(x)$ es decreciente, es decir, si $f''(x) \leq 0$.*

Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces y $c \in \mathbb{R}$ un punto. Decimos que c es un ***punto de inflexión*** *de f si $f''(c) = 0$.*

4.4. Polinomios de Taylor

Definición. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable n veces en el punto $a \in I$. Definimos el ***polinomio de Taylor de f de grado n en*** *a como $P_{n,a,f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$.*

> Proposición. El polinomio de Taylor de grado n en a tiene las mismas derivadas que f en dicho punto. Además, $P'_{n,a,f}(x) = P_{(n-1),a,f}(x)$.

> Proposición. Sea f una función con n derivadas en a. Entonces se cumple que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

*Definición. Sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Decimos que g es **o-pequeña** de h cuando x tiende a a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{h(x)} = 0$.*
Notación. $g(x) = o(h(x)), x \to a$.

> Corolario. Sea f una función con n derivadas en $a \in \mathbb{R}$. Entonces, $f(x) = P_{n,a,f}(x) + o((x-a)^n), x \to a$.

*Definición. Sean g y h dos funciones de variable real y, $G(x)$ y $H(x)$ sus respectivas gráficas. Decimos que g y h tienen **orden de contacto superior a** n **en** a si se cumple que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{G(x) - H(x)}{(x-a)^n} = 0$.*

4.4.1. Teorema de Taylor

> Teorema. Sea f una función para la que existen $n+1$ derivadas. Entonces $f(x) = P_{n,a,f}(x) + R_{n,a,f}(x)$ donde $R_{n,a,f}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, para algún c en el intervalo entre a y x. $R_{n,a,f}(x)$ se denomina **resto de Taylor**.

*Definición. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con infinitas derivadas. Definimos su **serie de Taylor** como $f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, siendo $f^{(0)}(x) = f(x)$.*

Ejemplo 1. Expresa la serie de Taylor de la función en el punto $f(x) = e^x$ en el punto $a = 0$.
- $f(0) = e^0 = 1$
- $f'(0)(x-0) = e^0 \cdot x = x$
- $\dfrac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = \dfrac{e^0}{2!}x^2 = \dfrac{x^2}{2!}$
- $\dfrac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 = \dfrac{e^0}{3!}x^3 = \dfrac{x^3}{3!}$

Podemos apreciar que en todos los casos, tenemos términos de la forma $\dfrac{x^n}{n!}$. Luego, la serie de Taylor de e^x en $a = 0$ es $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.