

ESTRUCTURAS DISCRETAS Y LOGICA
Parcial 1, 2022-10-14
Publicación de calificaciones: 2022-11-02

E1	E2	E3	TOTAL
Apellidos:			
Nombre:			

NOTA: Incluye explicaciones para tus respuestas. Un ejercicio cuya respuesta es correcta, pero que no incluye explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 1 (3 puntos).

Considera la base de conocimiento

$$\Delta = \{ (\neg A \wedge C) \Rightarrow B, A \vee \neg((\neg B \Rightarrow \neg C) \Leftrightarrow \neg A) \}$$

- (i) Utilizando reglas de equivalencia, transforma a forma normal conjuntiva la base de conocimiento Δ . Indica en cada paso la regla de equivalencia usada.

$$\begin{aligned}
 [1] \quad & (\neg A \wedge C) \Rightarrow B && [\text{def } \Rightarrow] \\
 & \equiv \neg(\neg A \wedge C) \vee B && [\text{De Morgan}] \\
 & \equiv \neg\neg A \vee \neg C \vee B && [\text{elim. } \neg\neg] \\
 & \equiv A \vee \neg C \vee B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [2] \quad & A \vee \neg((\neg B \Rightarrow \neg C) \Leftrightarrow \neg A) && [\text{def } \Leftrightarrow] \\
 & \equiv A \vee \neg([\neg B \Rightarrow \neg C] \Rightarrow \neg A \wedge [\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C)]) && [\text{def } \Rightarrow] \\
 & \equiv A \vee \neg([\neg(\neg B \vee \neg C) \vee \neg A] \wedge [\neg A \vee (\neg B \vee \neg C)]) && [\text{elim } \neg] \\
 & \equiv A \vee \neg([\neg(B \vee \neg C) \vee \neg A] \wedge (A \vee B \vee \neg C)) && [\text{De Morgan}] \\
 & \equiv A \vee [\neg(B \vee \neg C) \wedge \neg A] \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) && [\text{elim } \neg] \\
 & \equiv A \vee [(B \vee \neg C) \wedge A] \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) && [\text{dist. + idempot. } \wedge] \\
 & \equiv [(A \vee B \vee \neg C) \wedge A] \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) && [\text{dist.}] \\
 & \equiv (A \vee \neg B) \wedge (A \vee C) \\
 [2.1] \quad & A \vee \neg B \\
 [2.2] \quad & A \vee C
 \end{aligned}$$

- (ii) A partir de esta forma normal, determina si la base de conocimiento es UNSAT, SAT, pero no tautología, o una tautología. Explica por qué. En caso de que sea SAT, pero no tautología lista las interpretaciones que son modelo.

Es SAT, pero no tautología.

Las interpretaciones con $\mathbf{A} = \mathbf{True}$ son modelo de la base de conocimiento. No hay ninguna otra interpretación que sea modelo de dicha base de conocimiento.

- (iii) Utilizando inferencia directa, determina si la FBF $(\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{B}$ es consecuencia lógica de la base de conocimiento Δ .

La FBF está incluida en la base de conocimiento. Por lo tanto es consecuencia lógica de ella.

- (iv) Utilizando inferencia directa, determina si la FBF $(\neg \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})$ es consecuencia lógica de la base de conocimiento Δ .

$$[1] \quad \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{C} \vee \mathbf{B}$$

$$[2.1] \quad \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B}$$

$$[2.2] \quad \mathbf{A} \vee \mathbf{C}$$

$$[1] + [2.2] \quad \vdash_{\text{RES en C}} \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A} \vee \mathbf{B} & [\text{elim. } \neg\neg]^{-1} \\ \equiv \neg(\neg \mathbf{A}) \vee \mathbf{B} & [\text{def. } \Rightarrow]^{-1} \\ \equiv \neg \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} & \end{array}$$

EJERCICIO 2 (4 puntos).

[adaptado de <https://www.theguardian.com/science/2017/jan/30/did-you-solve-it-a-lewis-carroll-brainteaser-updated-for-todays-logic-lovers>]

Consideremos los siguientes átomos:

Átomos	Símbolo	Denotación
	Amo	Amo a una persona
	Barba	Tiene barba y las uñas largas
	Cereales	Come cereales para el desayuno
	Cine	Va al cine
	Huyo	Huyo de esa persona
	Lobo	Se convierte fácilmente en lobo
	Marciano	Es un marciano
	Pregunta	Pregunta si me gusta el cine o el teatro
	Presidente	Puede ser elegido presidente
	Zanahorias	Le gustan las zanahorias
	Zombi	Es zombi

- a. Escribe las fórmulas bien formadas (FBF's) en **lógica proposicional** de las que se compone la base de conocimiento.

Base de conocimiento		Aseveración	FBF
	[1]	Al cine solo van zombis.	$Cine \Rightarrow Zombi$
	[2]	Todos pueden ser elegidos presidente si les disgustan las zanahorias.	$\neg Zanahorias \Rightarrow Presidente$
	[3]	De quien amo, huyo.	$Amo \Rightarrow Huyo$
	[4]	Nadie puede convertirse fácilmente en lobo, a menos que tenga barba y las uñas largas.	$Lobo \Rightarrow Barba$
	[5]	Ningún zombi dejaría de tomar cereales para desayunar.	$\neg Cereales \Rightarrow \neg Zombi$
	[6]	Nadie me pregunta si me gusta el cine o el teatro, excepto los que van al cine.	$Pregunta \Rightarrow Cine$
	[7]	Los marcianos no pueden presentarse a las votaciones presidenciales.	$Marciano \Rightarrow \neg Presidente$
	[8]	Nadie, excepto los que se pueden convertir fácilmente en lobos, comería cereales para desayunar.	$Cereales \Rightarrow Lobo$
	[9]	Amo a quienes no me preguntan si me gusta el cine o el teatro.	$\neg Pregunta \Rightarrow Amo$
	[10]	A los que tienen barba y las uñas largas no les gustan las zanahorias.	$Barba \Rightarrow \neg Zanahorias$

- b. Partiendo de la base de conocimiento anterior, determina **mediante refutación**, utilizando únicamente **reglas de equivalencia y resolución entre cláusulas**, si huyo de los marcianos.

[1]	$\text{Cine} \Rightarrow \text{Zombi}$	$\equiv \neg \text{Cine} \vee \text{Zombi} (*)$
[2]	$\neg \text{Zanahorias} \Rightarrow \text{Presidente}$	$\equiv \text{Zanahorias} \vee \text{Presidente}$
[3]	$\text{Amo} \Rightarrow \text{Huyo}$	$\equiv \neg \text{Amo} \vee \text{Huyo} (*)$
[4]	$\text{Lobo} \Rightarrow \text{Barba}$	$\equiv \neg \text{Lobo} \vee \text{Barba} (*)$
[5]	$\neg \text{Cereales} \Rightarrow \neg \text{Zombi}$	$\equiv \text{Cereales} \vee \neg \text{Zombi} (*)$
[6]	$\text{Pregunta} \Rightarrow \text{Cine}$	$\equiv \neg \text{Pregunta} \vee \text{Cine} (*)$
[7]	$\text{Marciano} \Rightarrow \neg \text{Presidente}$	$\equiv \neg \text{Marciano} \vee \neg \text{Presidente}$
[8]	$\text{Cereales} \Rightarrow \text{Lobo}$	$\equiv \neg \text{Cereales} \vee \text{Lobo} (*)$
[9]	$\neg \text{Pregunta} \Rightarrow \text{Amo}$	$\equiv \text{Pregunta} \vee \text{Amo} (*)$
[10]	$\text{Barba} \Rightarrow \neg \text{Zanahorias}$	$\equiv \neg \text{Barba} \vee \neg \text{Zanahorias} (*)$

Meta: $\text{Marciano} \Rightarrow \text{Huyo}$ ("Huyo de los marcianos")

Negación de la meta:

$\neg (\text{Marciano} \Rightarrow \text{Huyo})$	[def \Rightarrow]
$\equiv \neg (\neg \text{Marciano} \vee \text{Huyo})$	[De Morgan + elim. \neg]
$\equiv \text{Marciano} \wedge \neg \text{Huyo}$	[11]
[11.1] Marciano	
[11.2] $\neg \text{Huyo}$	

[7]	+	[11.1]	RES en Marciano	$\neg \text{Presidente}$	[12]
[3]	+	[11.2]	RES en Huyo	$\neg \text{Amo}$	[13]
[2]	+	[12]	RES en Presidente	Zanahorias	[14]
[9]	+	[13]	RES en Amo	Pregunta	[15]
[10]	+	[14]	RES en Zanahorias	$\neg \text{Barba}$	[16]
[6]	+	[15]	RES en Pregunta	Cine	[17]
[4]	+	[16]	RES en Pregunta	$\neg \text{Lobo}$	[18]
[1]	+	[17]	RES en Cine	Zombi	[19]
[8]	+	[18]	RES en Lobo	$\neg \text{Cereales}$	[20]
[8]	+	[19]	RES en Zombi	Cereales	[21]
[20]	+	[21]	RES en Cereales	\square [la cláusula vacía]	

Dado que la base de conocimiento que incluye la base de conocimiento original y la negación de la meta es UNSAT (se puede derivar por resolución la cláusula vacía a partir de la forma normal conjuntiva de la base de conocimiento original), la meta ("Huyo de los marcianos") es consecuencia lógica de la base de conocimiento original.

EJERCICIO 3 (3 puntos). Consideremos la ontología:

Constantes: NIL (la lista vacía)

Variables: x, y, \dots (números reales)
 lst (lista de números)

Predicados:

- Ordenada^1 : $\text{Ordenada}(lst)$ evalúa a Verdadero si y solo si (sii) los números en la lista lst aparecen en orden no decreciente.
- \leq^2 : $(x \leq y)$ evalúa a Verdadero sii x es menor que o igual a y .
- Entero^1 : $\text{Entero}(x)$ evalúa a Verdadero sii el número real x es entero.

Funciones:

cons^2 : $\text{cons}(x, lst)$ es una referencia a una lista cuyo primer elemento es x y cuyo resto es lst .

Por ejemplo, $\text{cons}(1, [2, 3])$, $\text{cons}(1, \text{cons}(2, [3]))$, $\text{cons}(1, \text{cons}(2, \text{cons}(3, \text{NIL})))$, son referencias a la lista $[1, 2, 3]$.

No se pueden utilizar otras constantes, predicados, o funciones.

Utilizando esta ontología formaliza en lógica de predicados las siguientes FBFs:

[1] "La lista vacía está ordenada"

$\text{Ordenada}(\text{NIL})$

[2] "Una lista con un único elemento está ordenada".

$\forall x \text{ Ordered}(\text{cons}(x, \text{NIL}))$

[3] "Una lista con dos o más elementos está ordenada si (y solo si) el primer elemento es menor o igual que el segundo y el resto de la lista está ordenado".

$$\forall x, y, l [\text{Ordered}(\text{cons}(x, \text{cons}(y, l))) \Leftrightarrow ((x \leq y) \wedge \text{Ordered}(\text{cons}(y, l)))]$$

[4] "Siempre existe un entero mayor que un entero dado".

$\forall x [\text{Entero}(x) \Rightarrow \exists y [\text{Entero}(y) \wedge \neg(y \leq x)]]$