

Cardinalidad

1. Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$ y A equipotente a C (i.e. $\text{Card}(A) = \text{Card}(C)$). Utilizando los resultados del curso, demostrar que los tres conjuntos son equipotentes (i.e. $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = \text{Card}(C)$).
2. Definimos la siguiente relación en \mathbb{R} : $x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Es numerable el conjunto cociente?
3. Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.
4. Sea A un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1, \dots, a_n \in A$ son elementos de A , el conjunto $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ es equipotente a A .
5. Demostrar:
 - a) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.
 - b) Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.
 - c) Un conjunto A es infinito si existe un subconjunto $B \subset A$, $B \neq A$, y un biyección $f : B \rightarrow A$.
6. Determinar el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:
 - a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
 - b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$.
 - c) $(-\pi/2, \pi/2)$.
 - d) El intervalo $I = (0, 1)$ y más generalmente el intervalo (a, b) .
 - e) $I \times I$.
 - f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
 - g) El conjunto \mathbb{C} de los números complejos.
 - h) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
 - i) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
 - j) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
 - k) Los intervalos $[a, b]$ y $[a, b)$ en \mathbb{R} .
 - l) El conjunto de todas las raíces (rationales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama *conjunto de los números algebraicos*).
 - m) El conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} que tienen dos elementos.
 - n) El conjunto de los números reales $x \in [0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.