Tema 5. Integrales

5.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/532a0d48-ae6b-4e88-b0cd-b76523569012/U5_IntegralRiemann.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/20adf6ce-997b-4d94-bd0a-ac1b41a962f9/H8_Integrales.pdf

5.1. Sumas y particiones

*Definición. Dado un intervalo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Decimos que una **partición** de $[a, b]$ es un conjunto de puntos $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$ que dividen el intervalo $[a, b]$ en n **subintervalos** $[t_i, t_{i+1}]$.*

*Definición. Sean dos particiones Π y Π' de $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Decimos que Π' es **más fina** que Π si $\Pi \subset \Pi'$.*

*Definición. Sea f una función y $\Pi \in \mathbb{R}$ una partición. Definimos la **suma inferior de Riemann** de f en Π como $s(f, \Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i)$, con $m_i = \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f$.*

*Definición. Sea f una función y $\Pi \in \mathbb{R}$ una partición. Definimos la **suma superior de Riemann** de f en Π como $\mathcal{S}(f, \Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i)$, con $m_i = \sup_{[t_i, t_{i+1}]} f$.*

> Lema. Sean Π y Π' dos particiones de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tales que Π' es más fina que Π. Entonces, $s(f, \Pi) \leq s(f, \Pi')$ y $\mathcal{S}(f, \Pi) \geq \mathcal{S}(f, \Pi')$.

> Lema. Sea f una función acotada en $[a, b]$ y Π, Π' dos particiones de $[a, b]$ cualesquiera. Entonces, $s(f, \Pi) \leq \mathcal{S}(f, \Pi')$.

Demostración.
Sea $\Pi'' = \Pi \cup \Pi'$, de forma que Π'' es más fina que Π y Π'. Por el lema anterior, tenemos que

$s(f,\Pi) \leq s(f,\Pi'') \leq \mathcal{S}(f,\Pi'') \leq \mathcal{S}(f,\Pi')$. $\square$

5.2. Integración de Riemann

Definición. Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Decimos que f es integrable si el supremo de las sumas inferiores y ínfimo de las sumas superiores coinciden.

Notación. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es la **integral definida** de f entre a y b.

> Teorema. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, f es integrable si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \Pi : \mathcal{S}(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Suponemos que f es integrable, es decir, $\inf \mathcal{S}(f,\Pi) = \sup s(f,\Pi)$. Entonces:
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \Pi' \subset \Pi : \inf \mathcal{S}(f,\Pi) + \dfrac{\varepsilon}{2} > \mathcal{S}(f,\Pi')$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \Pi' \subset \Pi : \sup s(f,\Pi) - \dfrac{\varepsilon}{2} > s(f,\Pi')$

Luego, $\forall \varepsilon > 0, \exists \Pi' \subset \Pi : \varepsilon > \mathcal{S}(f,\Pi') - s(f,\Pi')$.
$\Leftarrow$) Suponemos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \Pi : \mathcal{S}(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon$. Entonces, sea $\Pi' \subset \Pi$:$\inf \mathcal{S}(f,\Pi') \leq \mathcal{S}(f,\Pi)$ y $\sup s(f,\Pi') \leq s(f,\Pi)$
Luego, $\forall \varepsilon > 0, \inf \mathcal{S}(f,\Pi') - \sup s(f,\Pi') \leq \mathcal{S}(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon$. $\square$

> Teorema. Toda función f continua en $[a,b]$ es integrable.

Demostración.
Si f es continua en $[a,b]$, entonces es uniformemente continua y, por tanto, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Si Π es una partición de forma que la longitud $\Delta x_i < \delta, \forall \delta > 0$. Para cada i se cumple que $\sup\limits_{[x_i,x_{i+1}]} - \inf\limits_{[x_i,x_{i+1}]} \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ y, por tanto, $\mathcal{S}(f,\Pi) - s(f,\Pi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_i,x_{i+1}]} - \inf_{[x_i,x_{i+1}]} \right) \Delta x_i \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$. Luego, f es integrable. $\square$

> Teorema: Toda función $f$monótona es integrable.

5.2.1. Propiedades de la integral de Riemann

Sean f, g dos funciones integrables en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ constantes. Podemos definir las siguientes propiedades:

- Sea $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$, entonces $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.
- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$.
- Sea $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
- Sea $a < c < b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

5.3. Teorema Fundamental del Cálculo

> Proposición. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable. Entonces, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua.

Demostración.
Como f está acotada, podemos decir que $|f(x)| \leq M$, para algún $M \geq 0$. Entonces, $0 \leq |F(x+h) - F(x)| \leq M|h|$. Si hacemos tender h a 0, tenemos que $0 \leq \lim_{h\to 0} |F(x+h) - F(x)| \leq \lim_{h\to 0} M|h| = 0$. Luego F es continua. $\square$

> Teorema Fundamental del Cálculo. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.

Demostración.
Como está acotada, podemos decir que $|f(x)| \leq M$, para algún $M \geq 0$. De forma que $|F(x+h) - F(x)| \leq M|h| \Rightarrow M \geq \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|$.
Como f es continua, $\lim_{x\to x_0} M = f(x_0)$, mientras que, por el lema del sándwich, $\exists \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = F'(x_0)$. Luego $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

> Corolario (Regla de Barrow). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y g una función primitiva de f en el intervalo $[a,b]$, es decir, $g'(x) = f(x)$. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$.

Demostración.
Definimos la función F como $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. De forma que $F'(x) = f(x) = g'(x)$, luego $F(x) = g(x) + C$.
A partir de esto, vemos que $g(a) + C = F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \Rightarrow C = -g(a)$. Luego, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = g(x) - g(a)$. $\square$

> Regla de Leibniz. Sea $F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\, dt$ una función continua y derivable. Entonces $F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x)$.

Demostración.
Sea g una función tal que $g'(x) = f(x)$. Si aplicamos la Regla de Barrow, tenemos que $F(x) = g(h(x)) - g(a)$.
Derivando a ambos lados, llegamos a que $F'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x)$. $\square$

5.4. Integrales impropias

*Definición. Sea f una función continua. Decimos que $\int_a^b f(x)\, dx$ es un **integral impropia** cuando se puede definir aunque la función no esté acotada en (a, b) o el propio intervalo de integración no esté acotado.*

*Definición. Sea $\int_a^b f(x)\, dx$ una integral impropia. Decimos que la integral es **convergente** si y solo si $\lim_{r \to b} \int_a^r f(x)\, dx < \infty$.*

*Definición. Sea $\int_a^b f(x)\, dx$ una integral impropia. Decimos que la integral es **divergente** si y solo si $\lim_{r \to b} \int_a^r f(x)\, dx = \infty$.*

3.4.1. Criterios de convergencia

Cuando existe una función primitiva de f, basta con aplicar las definiciones anteriores; pero podría darse el caso de que no existiese una función primitiva de f. Para poder determinar la convergencia de f en esos casos existen una serie de criterios, basados en la comparación de f con otras funciones de las que sí se conocen funciones primitivas.

> Criterio de comparación. Sean f, g dos funciones integrables en un intervalo $[a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$ un valor real, tal que $f(x) \leq kg(x), \forall x \in [a, b]$. Entonces:
>
> - Si $\int_a^b g(x)\, dx$ converge , $\int_a^b f(x)\, dx$ también lo hace.
> - Si $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge, $\int_a^b g(x)\, dx$ también lo hace.

Nota. Los recíprocos no son ciertos.

> Criterio de comparación por paso al límite. Sean f, g dos funciones integrables en un intervalo $[a, b]$ tales que $\alpha = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x} < \infty$. Entonces:

> - Para $\alpha = 0$. Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, $\int_a^b f(x)\,dx$ también lo hace.
> - Para $\alpha \neq 0$. Si $\int_a^b f(x)\,dx$ o $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen o divergen igual.

También existen otros criterios independientes.

> Criterio de Cauchy (I). Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si y solo si dado un $\varepsilon > 0$, existe un $R_0 > a$ tal que si $R' \geq R_0$, se cumple que $\left|\int_R^{R'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon, \forall R$.

> Criterio de Cauchy (II). Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Entonces, la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si y solo si la integrales parciales $\int_a^R f(x)\,dx$ están acotadas para todo $R > a$.

> Criterio de la integral para series. Sea $f : (k, \infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva y monótona creciente, con $k \in \mathbb{N}$. Entonces, la serie $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ converge si y solo si la integral impropia $\int_k^\infty f(x)\,dx$ converge.

Demostración.
Como f es monótona creciente, en cada intervalo $(n, n+1)$ tenemos que $f(n) = f(n) \cdot ((n+1) - 1) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1) \cdot ((n+1) - n) = f(n+1)$.
Luego, $\sum_{n=k}^{\infty} f(n) \geq \sum_{n=k}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=k+1}^{\infty} f(n)$. Por lo que el comportamiento de la serie coincide con el de la integral. $\square$

ANEXO. Primitivas

*Definición. Sea f una función. Llamamos **primitivas** de f a todas las funciones g tales que $g' = f$.*
Notación. Denotamos al conjunto de primitivas de f como $\int f(x)\,dx$, siendo estas de la forma $g(x) + C$, con C una constante.

Integración por partes

Sea f una función que se puede descomponer como producto de dos funciones u y v, tenemos que $f'(x) = (u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, de forma que $u(x)v'(x) = (u \cdot v)'(x) - u'(x)v(x)$. Integrando en ambas partes de la desigualdad, llegamos a la expresión $\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)$.

Por simplificar, podemos tomar $u = u(x)$, $du = u'(x)\ dx$, $v = v(x)$ y $dv = v'(x)\ dx$, resultando en $\int u\ dv = uv - \int v\ du$.

Este método se puede aplicar de forma recurrente sobre una misma integral, tratando de simplificarla al máximo.

Ejemplo 1. Calcular $\int x^2 e^x\ dx$.

Aplicamos el método de integración por partes: $\int x^2 e^x\ dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2x\ dx \\ v = e^x & dv = e^x\ dx \end{bmatrix} = x^2 e^x - \int e^x 2x\ dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ v = e^x & dv = e^x\ dx \end{bmatrix} = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\ dx\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C = e^x\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + C$.

Cambio de variable

Sean f, g dos funciones para las que podemos definir una tercera función $F(x) = f(g(x))$, al aplicar la regla de la cadena tenemos que $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Si tomamos la integral $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx$ y sustituimos $u = g(x)$ y $du = g'(x)$, nos queda $\int f(u)\ du$.

Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{1}{x \ln x}\ dx$.

Aplicamos un cambio de variable con $u = \ln x$, de forma que $du = \frac{1}{x}\ dx$, de forma que $\int \frac{1}{x \ln x}\ dx \equiv \int \frac{1}{xu} x\ du = \int \frac{1}{u}\ du = \ln|u| + C \equiv \ln|\ln x| + C$.