Conjuntos y números 21/09

Sobre el ejercicio 3 del otro día:

Nos dan A y B; tenemos que decidir si B es nec./suf./nec. y suf. para A

Lo que realmente nos piden es que decidamos

- $A \Rightarrow B$ (B necesaria para A)
- $A \Leftarrow B$ (B es suficiente para A)
- $A \Leftrightarrow B$ (B es nec. y sufic.)

$A = n \vdots 6$

a) $B = n \vdots 3$

- $n \vdots 6 \Rightarrow n \vdots 3$ ✓ (necesaria)
- $n \vdots 6 \not\Leftarrow n \vdots 3$ X (no es suf.)

11) a) $\log_3(1215)$ es irracional.

$1215 = 5 \cdot 3^5$

Asumimos que es racional, es decir:

$$\log_3(1215) = \frac{a}{b} \qquad a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \qquad mcd(a,b) = 1$$

$$3^{a/b} = 1215 \Rightarrow \underbrace{3^a}_{\text{no tenemos ningun factor de 5 (Sería } b=0)} = 1215^b = \underbrace{5^b \cdot 3^{5b}}_{\vdots 5} \quad \#$$

(Contradicción)

b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, asumimos que es racional:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{a}{b} \; ; \; a,b \in \mathbb{Z},\ b\neq 0$$
$$\text{mcd}(a,b)=1$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2+3+2\sqrt{6}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}=\frac{\frac{a^2}{b^2}-5}{2} \quad \#$$

($\sqrt{6}$ es irracional, el lado derecho es racional)

---

c) $$\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}=\frac{a}{b}$$ (mismas condiciones que antes en a y b)

$$\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2+2\sqrt{5-4}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\parallel$$

$$2\sqrt{5}+2\sqrt{1}=a^2/b^2$$

Despejamos $$\sqrt{5}=\frac{a^2/b^2-2}{2} \quad \#$$ (irracional = racional)

(12) Si $a \in \mathbb{N}$, a a^2 le llamamos cuadrado perfecto, demostrar que si $n = a^2$ es cuadrado perf., entonces ni $n+1$ ni $n+2$ lo pueden ser.

Asumimos que $n+1$ es un cuadrado perfecto:

$n+1 = b^2$ $\quad (n+1) - n = 1 = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

$b \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b-a) = 1 \\ b+a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 1+a \\ 1+a+a = 1 \Rightarrow a = 0 \end{matrix}$$

$0 \notin \mathbb{N}$

Contradicción.

$n+2 = c^2 \quad \Rightarrow (n+2) - n = 2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c+a = 2 \\ c-a = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow c = 2-a, \text{ luego} \\ 2-a-a = 1 \\ \Rightarrow -2a = -1 \end{matrix}$$

#

No tiene soluciones en $\mathbb{Z}$ ∎

---

(13) b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Base de inducción: $n = 1$

$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ OK.

Asumimos que se cumple para un determinado n:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$ es verdad. (H.I)

Lo tenemos que demostrar para $n+1$

Queremos demostrar $$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}_{\overset{\text{H.I}}{=} \; n/_{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{?}{=} \frac{n+1}{n+2}$$

$$\underbrace{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{=\; \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}} \overset{?}{=} \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$ OK. ∎

---

14 b) Para $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 4^n + 6n - 1 \, \vdots \, 9$

Base de la inducción $n=1$:

$a_1 = 4 + 6 - 1 = 9 \, \vdots \, 9$ OK.

Asumimos que para un determinado n es verdad:

$$a_n = 4^n + 6n - 1 \,\vdots\, 9 \qquad (H.I.)$$

Lo tenemos que demostrar para $n+1$:

$$a_{n+1} = 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 \,\vdots\, 9$$

$$\shortparallel$$

$$4\left((4^n + 6n - 1) - 6n + 1\right) + 6(n+1) - 1$$

$$\shortparallel$$

$$4 \cdot a_n - 24n + 4 + 6n + 6 - 1 = \underbrace{4 \cdot a_n}_{(H.I.)\,\vdots\, 9} - \underbrace{18n}_{\vdots\, 9} + \underbrace{9}_{\vdots\, 9} \qquad \blacksquare$$

Lo hemos demostrado para $n+1$

$$a_n = 4^n + 6n - 1 = 9K \Rightarrow 4^n = 9K - 6n + 1$$

$$4 \cdot 4^n = 4(9K - 6n + 1)$$

Solución de Pablo

$$4^{n+1} = 36K - 24n + 4, \text{ luego:}$$

$$6n + 5 + 4^{n+1} = 6n + 5 + 36K - 24n + 4$$

$$4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 36K - 18n + 9$$

$$= 9(4K - 2n + 1) \,\vdots\, 9 \qquad \blacksquare$$

18 Desigualdad de Bernoulli:

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

(Todos los x_k tienen el mismo signo, $x_k \geq -1$)

Base de inducción: $n=1$

$(1+x_1) \geq 1+x_1$ OK

Hipótesis de inducción: para un cierto n,

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+\dots+x_n \qquad (HI)$$

Tenemos que demostrarlo para $n+1$

$$\underbrace{(1+x_1)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)}_{\substack{\vee\!\shortmid \;(H.I)\\ 1+x_1+\dots+x_n}}(1+x_{n+1}) \overset{HI}{\geq} (1+x_1+\dots+x_n)(1+x_{n+1})$$

$$= (1+x_1+\dots+x_n)+x_{n+1}+\underbrace{x_1x_{n+1}+\dots+x_nx_{n+1}}_{\substack{\vee\!\shortmid\\ 0}}$$

Como todos tienen el mismo signo, $x_ix_{n+1} \geq 0$, $i=1,\dots,n$

$$\vee\!\shortmid$$

$$1+x_1+\dots+x_n+x_{n+1} \quad \blacksquare$$

(19) b) $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n \geq 2, \; n \in \mathbb{N}$$

Base de la inducción: $n=2$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{4}{12}+\frac{3}{12} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24} \quad \text{OK}$$

Hipotesis de inducción: se cumple para un n

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad \leftarrow \text{(fórmula para } n\text{)}$$

Queremos demostrarlo para $n+1$:

$$\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2(n+1)} = \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}}_{\geq \ 13/24 \quad (H.I)}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

suma para $n+1$

$$\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n+2} \geq \overbrace{\frac{13}{24}+\underbrace{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}}_{\text{Queremos ver } \geq\ 0}}^{(*)\ =} \overset{?}{\geq} \frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\overset{?}{\geq}\frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2n+1}\geq \underbrace{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+2}}_{=}$$

$$\frac{\cancel{n+1}}{(2n+2)\cancel{(n+1)}} = \frac{2n+2-(n+1)}{(2n+2)(n+1)}$$

De lo cual deducimos $(*) \geq 13/24$ ■

14a) $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$ demostrar que $2^n > n^2 + 1$

- Base de la inducción $\underline{n=5}$

$$2^5 = 32 > 5^2 + 1 = 26 \quad \text{OK.}$$

- Suponemos que es verdad para un cierto n:

$$2^n > n^2 + 1 \qquad \text{(H.I)}$$

- Queremos demostrarlo para $n+1$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(n^2+1) = \underline{2n^2+2}$$

(Queremos llegar a $2^{n+1} \geq (n+1)^2 + 1 = n^2 + 1 + 2n + 1 = \underline{n^2 + 2n + 2}$)

Nos valdría demostrar $2n^2 + 2 \geq n^2 + 2n + 2$

(Recordatorio $n > 4$) $\boxed{n^2 \geq 2n}$, lo cual

es verdad para $n > 4$

(o directamente : $n^{\cancel{2}} > 2\cancel{n}$)
dividir por n,

ya que $n > 0$