Tema 5. Relación de equivalencia y clases de equivalencia

5.0. Contenido y documentación

H5a_RelacionesEquivalencia.pdf

H5b_Cardinalidad.pdf

5.1. Relación de equivalencia

*Definición. Dada una relación $\sim$ en un conjunto X. Decimos que la relación es **reflexiva** si todo elemento está relacionado consigo mismo, es decir, $x \sim x, \forall x \in X$.*

*Definición. Dada una relación binaria $\sim$ en un conjunto X. Decimos que $\sim$ es una **relación de equivalencia** si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*

*Definición. Dada una relación $\sim$ en un conjunto X. Decimos que la relación es **simétrica** si la relación entre dos elementos cualesquiera es conmutativa, es decir, $\forall x, y \in X$, si $x \sim y$, entonces $y \sim x$.*

*Definición. Dada una relación $\sim$ en un conjunto X. Decimos que la relación es **transitiva** si dados tres elementos de forma que el primero se relaciona con el segundo y el segundo con el tercero, entonces, el primero también se relaciona con el tercero, es decir, $\forall x, y, z \in X$ si $x \sim y \wedge y \sim z$, entonces $x \sim z$.*

Ejemplo 1. Sea $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ y $x, y \in \mathbb{Z}$. Definimos una **congruencia** en $\mathbb{Z}$ módulo n si $n|(x-y)$, es decir, si $x - y = kn$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Escribimos la congruencia como $x \equiv y\ (n)$. La congruencia en $\mathbb{Z}$ es una relación de equivalencia.

5.1.1. Clases de equivalencia

*Definición. Sea $(X, \sim)$ una relación de equivalencia y $x \in X$. Definimos la **clase de equivalencia** de x como el conjunto $\{y \in X : x \sim y\}$.*
Notación. C_x, $[x]$ o $\bar{x}$.

Ejemplo 2. $\sim$ es la igualdad en $\mathbb{R}$: $(\mathbb{R}, =)$.
Para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $[x] = \{y \in \mathbb{R} : x = y\} = \{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 3. $\sim$ es la igualdad entre cuadrados en $\mathbb{R}$: $(\mathbb{R}, x^2 = y^2)$.
Para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $[x] = \{y \in \mathbb{R} : x^2 = y^2\} = \{y \in \mathbb{R} : |x| = |y|\} = \{x, -x : x \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 4. $\sim$ es la congruencia en $\mathbb{Z}$ módulo n: $(\mathbb{Z}, \equiv (n))$.
Para todo $x \in \mathbb{Z}$ tenemos que $[x] = \{y \in \mathbb{Z} : y \equiv x\ (n)\} = \{y \in \mathbb{Z} : y = x + kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{x + \dot{n} : x \in \mathbb{Z}\}$.

5.1.2. Particiones y conjunto cociente

> Teorema. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X y $x \in X$. Entonces, las clases de equivalencia $[x]$ forman una partición. Es decir:
>
> 1. $X = \bigcup_{x \in X} [x]$, es decir, $\forall y \in X, \exists x \in X : y \in [x]$.
> 2. Si $[x] \neq [y]$, entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$, es decir, si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, entonces $[x] = [y]$.

Demostración 1.
Sabemos que $\bigcup_{x \in X} [x] \subset X$, ya que $[x] \subset X, \forall [x]$. Por otra parte, $\forall x \in X, x \in [x_i]$, para algún i.
Luego $X \subset \bigcup_{x \in X} [x]$. Como la inclusión en ambos sentidos implica la igualdad, $X = \bigcup_{x \in X} [x]$. $\square$
Demostración 2.
Suponemos que $\exists z \in X : z \in [x] \cap [y]$, de forma que $z \sim x \wedge z \sim y$. Por la propiedad de simetría, $x \sim z \wedge z \sim y$, y pode la propiedad transitiva $x \sim y$. Luego $x \in [y]$, de forma que $[x] \subset [y]$.
Equivalentemente, a partir de $y \sim x$ llegamos a que $[y] \subset [x]$ y, como la inclusión en ambos sentidos implica la igualdad, $[x] = [y]$. $\square$

---

*Definición. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Definimos el **conjunto cociente** determinado por $\sim$ como el conjunto de todas las clases de equivalencia respecto a $\sim$, es decir, $\{[x] : x \in X\}$.*
Notación. $X/\sim$.

Ejemplo 5. $\sim$ es la igualdad en $\mathbb{R}$: $(\mathbb{R}, =)$.
Definimos el conjunto cociente como $X/\sim\, = \mathbb{R}/(=) = \{[x] : x \in \mathbb{R}\} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 6. $\sim$ es la igualdad de cuadrados en $\mathbb{R}$: $(\mathbb{R}, x^2 = y^2)$.
Definimos el conjunto cociente como $X/\sim\, = \mathbb{R}/(x^2 = y^2) = \{[x] : x \in \mathbb{R}\} = \{\{x, -x\} : x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} \cup \{0\}$.

Ejemplo 7. $\sim$ es la congruencia $\mathbb{Z}$ módulo n: $(\mathbb{Z}, \equiv (n))$.
Definimos el conjunto cociente como $X/\sim\, = \mathbb{Z}/(\equiv (n)) = \{[x] : x \in \mathbb{Z}\} = \{\{x + \dot{n}\} : x \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], ..., [n-1]\}$.

> Teorema. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una partición de una conjunto X. Entonces, podemos definir la relación de equivalencia $\sim$ en X como $x \sim y$ si y solo si $\exists i \in I : x, y \in X_i$. De esta forma, cada X_i representa a una clase equivalencia.

Demostración.
Por definición de partición, $\forall x \in X, \exists i \in I : x \in X_i$, de forma que $[x] = \{y \in X : y \sim x\} = \{y \in$

$X : \exists i \in I$ con $x, y \in X_i\} = \{y \in X : y \in X_i\} = X_i$.
Por tanto, $X/\sim = \{[x] : x \in X\} = \{X_i : i \in I\}$. $\square$

Ejemplo 8. Dada una función $f : X \to Y$ se pide:
1. Demostrar que la relación $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ es una relación de equivalencia.
- $\forall x \in X$ tenemos que $f(x) = f(x)$, por lo que $x \sim x$. Luego, $\sim$ es reflexiva.
- $\forall x_1, x_2 \in X$ si $x_1 \sim x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$, por lo que $x_2 \sim x_1$. Luego, $\sim$ es simétrica.
- $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ si $x_1 \sim x_2 \wedge x_2 \sim x_3$, entonces $f(x_1) = f(x_2) \wedge f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow f(x_1) = f(x_3)$, por lo que $x_1 \sim x_3$. Luego, $\sim$ es transitiva.

2. Demostrar que cada una de sus clases de equivalencia es la imagen inversa de un $y \in Y$.
Sea $x \in X$, definimos $[x] = \{x' \in X : x \sim x'\} = \{x' \in X : f(x) = f(x')\} = \{x' \in X : f(x') \in \{f(x)\}\} = f^{-1}(\{f(x)\}$. Sea $y = f(x) \in Y$, tenemos que $[x] = f^{-1}(y)$.

3. Establecer una biyección entre los conjuntos $X/\sim$ e $\mathrm{Im}\ f$.
Sea $\varphi : X/\sim \to \mathrm{Im}\ f$ tal que $\varphi([x]) = f(x)$. Comprobamos sus propiedades:
- $\forall [x_1], [x_2] \in X/\sim$ si $[x_1] = [x_2]$, entonces $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \varphi([x_1]) = \varphi([x_2])$. Luego, φ está bien definida.
- $\forall [x_1], [x_2] \in X/\sim$ si $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, entonces $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow [x_1] = [x_2]$. Luego, φ es inyectiva.
- $\forall y \in \mathrm{Im}\ f, \exists x \in X : y = f(x) = \varphi([x])$, por lo que $\varphi([x]) \in \mathrm{Im}\ f$. Luego, $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Im}\ \varphi$.
Como φ es inyectiva y sobreyectiva, φ es biyectiva.

Ejemplo 9. Sea $f : \{[0], [1], ..., [n-1]\} \to \mathbb{Z}$ una función definida como $f([m]) = m$. Determina si está bien definida.
Basta con ver que $[0] = [n]$, pero $f([0]) = 0$ y $f([n]) = n$, con $0 \neq n$. Luego, f no está bien definida.

5.2. Conjuntos equipotentes

*Definición. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$. Decimos que X es **finito** si existe una biyección $f : X \to \{1, 2, ..., n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario, decimos que X es **infinito**.*

*Definición. Dado un conjunto universal U y dos subconjuntos $X, Y \subset U$. Decimos que X e Y son **equipotentes** si existe una biyección $f : X \to Y$.*

*Definición. Dado un conjunto universal U y dos subconjunto $X, Y \subset U$. Definimos la **relación de equipotencia** entre X e Y como la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(U)$ con $X \sim Y \Leftrightarrow \exists f : X \to Y$ biyectiva.*

Demostración.
Demostramos que la relación de equipotencia es una relación de equivalencia comprobando sus propiedades:
- $\forall X \in \mathcal{P}(U)$ tenemos que $id : X \to X$ es biyectiva, por lo que $X \sim X$. Luego $\sim$ es reflexiva.
- $\forall X, Y \in \mathcal{P}(U)$ si $X \sim Y$, entonces $\exists f : X \to Y$ biyectiva $\Leftrightarrow \exists f^{-1} : Y \to X$ también biyectiva, por lo que $Y \sim X$. Luego, $\sim$ es simétrica.
- $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(U)$ si $X \sim Y \wedge Y \sim Z$, entonces $\begin{cases} \exists f : X \to Y \\ \exists g : Y \to Z \end{cases}$ biyectivas $\Rightarrow \exists (g \circ f) : X \to Z$ biyectiva, por lo que $X \sim Z$. Luego, $\sim$ es transitiva.

*Definición. Dado un conjunto universal U y un subconjunto $X \subset U$. Decimos que el **cardinal** de U es la clase de equivalencia de X en $\mathcal{P}(U)$ respecto a la relación de equipotencia.*
Nota. Si dos conjuntos pertenecen a la misma clase de equivalencia, decimos que tienen el mismo cardinal.

Dado dos conjuntos X e Y, subconjuntos de un conjunto universal U podemos hacer las siguientes apreciaciones:
1. Si existe una función inyectiva $f : X \to Y$, entonces, el cardinal de X es menor o igual que el de Y, $|X| \leq |Y|$.
2. Si existe una función inyectiva $f : X \to Y$ que no es sobreyectiva, entonces, el cardinal de X es menor que el de Y, $|X| < |Y|$.

Ejemplo 10. Dados los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}\backslash\{1,2\}$, determinar si son equipotentes.
Basta con definir una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ tal que $f(n) = n + 2$ y comprobar sus propiedades:
- Si $n = m$, entonces $f(n) = n + 2$ y $f(m) = m + 2$, de forma que $f(n) = f(m)$. Luego, f está bien definida.
- Si $f(n) = f(m)$, entonces $n + 2 = m + 2$, de forma que $n = m$. Luego, f es inyectiva.
- $\forall m \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ tenemos que $m = f(n) = n + 2$, de forma que $n = m - 2 \geq 1 \in \mathbb{N}$, por lo que $m \in \operatorname{Im} f$ y $\mathbb{N}\backslash\{1,2\} \subset \operatorname{Im} f$. Luego, f es sobreyectiva.

Como f es inyectiva y sobreyectiva, f es biyectiva y los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ son equipotentes.

Ejemplo 11. Dados los conjuntos $\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}$, determinar si son equipotentes.
Basta con definir una función $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ tal que $f(n) = n + 2$ y comprobar sus propiedades:
- Si $n = m$, entonces $f(n) = 2n$ y $f(m) = 2m$, de forma que $f(n) = f(m)$. Luego, f está bien definida.
- Si $f(n) = f(m)$, entonces $2n = 2m$, de forma que $n = m$. Luego, f es inyectiva.
- $\forall m \in 2\mathbb{N}$ tenemos que $m = f(n) = 2n$, de forma que $n = \dfrac{m}{2} \in \mathbb{N}$, por lo que $m \in \operatorname{Im} f$ y $2\mathbb{N} \subset \operatorname{Im} f$. Luego, f es sobreyectiva.

Como f es inyectiva y sobreyectiva, f es biyectiva y los conjuntos $\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}$ son equipotentes.

Ejemplo 12. Dados los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, determinar si son equipotentes.
Basta con definir una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \in 2\mathbb{N} \\ -\left(\frac{n-1}{2}\right), & n \in 2\mathbb{N} - 1 \end{cases}$ y comprobar sus propiedades.
- Si $n = m$, entonces $f(n) = \dfrac{n}{2}$ y $f(m) = \dfrac{m}{2}$; o $f(n) = -\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$ y $f(m) = -\left(\dfrac{m-1}{2}\right)$, en ambos casos, $f(n) = f(m)$. Luego, f está bien definida.
- Si $f(n) = f(m)$, entonces $\dfrac{n}{2} = \dfrac{m}{2}$ o $-\left(\dfrac{n-1}{2}\right) = -\left(\dfrac{m-1}{2}\right)$, de forma que $n = m$. Si tuviésemos que $\dfrac{n}{2} = -\left(\dfrac{m-1}{2}\right)$, entonces $n = -m + 1$. Como $n \in 2\mathbb{N}$, $n = -m + 1 \geq 1 \Rightarrow m \leq 0$, y $m \notin 2\mathbb{N} - 1$, por lo que ese caso no se puede dar. Luego f es inyectiva.
- $\forall m \in \mathbb{Z}$ tenemos que $m = f(n) = \dfrac{n}{2}$ o $m = f(n) = -\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$, de forma que $n = 2m \in 2\mathbb{N}$ o $n = -2m - 1 \in 2\mathbb{N} - 1$, ya que $m < 0$, por lo que $m \in \operatorname{Im} f$ y $\mathbb{Z} \subset \operatorname{Im} f$. Luego, f es sobreyectiva.

Como $f$es inyectiva y sobreyectiva, f es biyectiva y los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son equipotentes.

5.2.1. Conjuntos numerables

Definición. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$. Decimos que X es numerables si $X \sim \mathbb{N}$, es decir, si existe una biyección $f : X \to \mathbb{N}$.
Nota. Entonces $|X| = |\mathbb{N}| = \chi_0$.

> Teorema. La cardinalidad de $\mathbb{N}$ es igual a la de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es decir, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \chi_0$.

Demostración.

Basta con definir la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n, m) = \dfrac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} + m$ y comprobar sus propiedades:

- Si $(n_1, m_1) = (n_2, m_2)$, entonces $f(n_1, m_1) = \dfrac{(n_1+m_1-1)(n_1+m_1-2)}{2} + m_1$ y $f(n_2, m_2) = \dfrac{(n_2+m_2-1)(n_2+m_2-2)}{2} + m_2$, de forma que $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2)$. Luego, f está bien definida.
- Si $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2)$, entonces $\dfrac{(n_1+m_1-1)(n_1+m_1-2)}{2} + m_1 = \dfrac{(n_2+m_2-1)(n_2+m_2-2)}{2} + m_2$, por lo que $(n_1, m_2) = (n_2, m_2)$. Luego, f es inyectiva.
- $\forall x \in \mathbb{N}$, $x = f(n, m) = \dfrac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} + m$, por lo que $x \in \operatorname{Im} f$ y $\mathbb{N} \subset \operatorname{Im} f$. Luego, f es sobreyectiva.

Como f es inyectiva y sobreyectiva, f es biyectiva y los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son equipotentes. $\square$

> Teorema. Sea X e Y dos conjuntos numerables. Entonces, los conjuntos $X \cup Y$ y $X \times Y$ también son numerables.

> Teorema. Sea X un conjunto infinito. Entonces, X tiene un subconjunto numerable. Luego, $|X| \geq |\mathbb{N}| = \chi_0$.

Demostración.
Si X es infinito, entonces $X \neq \emptyset$ y, por tanto, $\exists x_1 \in X$ (Axioma de Elección). Como X es infinito, entonces $X \backslash \{x_1\} \neq \emptyset$ y, por tanto $\exists x_2 \in X$. Repitiendo este procedimiento, se demuestra por inducción que $\exists \{x_1, x_2, ...\}$ un conjunto infinito pero numerable contenido en X. $\square$

5.2.2. Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein

> Lema. Sea X un conjunto y X_1 y X_2 dos subconjuntos tales que $X_2 \subset X_1 \subset X$. Si $X_2 \sim X$, entonces $X_1 \sim X$.

Demostración.
Como $X_2 \sim X$, existe una función biyectiva $f : X \to X_2$. Si restringimos f a X_1 tenemos una función biyectiva $f_{|X_1} : X_1 \to X_3$, con $X_3 = f(X_1) \subset f(X) = X_2$.
Similarmente, restringimos f a X_2, quedando $f_{|X_2} : X_2 \to X_4$, con $X_4 = f(X_2) \subset f(X_1) = X_3$.
Así, nos queda que ... $\subset X_4 \subset X_3 \subset X_2 \subset X_1 \subset X$, de forma que $X \sim X_2 \sim X_4 \sim$ ... y $X_1 \sim X_3 \sim$ ....

A continuación, tenemos que $X \sim X_2$ y $X_1 \sim X_3$, con $X_3 \subset X_2 \subset X_1 \subset X$. Consideramos f restringida a $X \backslash X_1$, con lo que tenemos $f_{|X \backslash X_1} : X \backslash X_1 \to X_2 \backslash X_3$.
i) Como $f_{|X \backslash X_1}$ es una restricción de f y f es una función inyectiva, $f_{|X \backslash X_1}$ también lo es.
ii) $\forall y \in f(X \backslash X_1)$ tenemos que $\exists x \in X \backslash X_1$, es decir, $x \in X \wedge x \not\in X_1$, ta que $y \in f(x)$. De forma que $y \in f(X) = X_2 \wedge y \not\in f(X_1) = X_3$, por lo que $y \in X_2 \backslash X_3$ y $f(X \backslash X_1) \subset X_2 \backslash X_3$. Por otra parte, suponemos que $\forall y \in X_2 \backslash X_3, \exists x \in X : y = f_{|X \backslash X_1}(x)$. Si $x \in X_1$, entonces $y = f_{|X \backslash X_1}(x) \in f(X_1) = X_3$, lo que nos lleva a una contradicción, por lo que $X_2 \backslash X_3 \subset \operatorname{Im} f_{|X \backslash X_1}$.
Luego, $f_{|X \backslash X_1}$ es sobreyectiva.
Como $f_{|X \backslash X_1}$ es inyectiva y sobreyectiva, $f_{|X \backslash X_1}$ es biyectiva, por lo que $X \backslash X_1 \sim X_2 \backslash X_3$.

Proseguimos considerando el conjunto $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ como la intersección de todos los conjuntos X_i, para así poder expresar los conjuntos X y X_1 como la unión de conjuntos disjuntos, es decir:
- $X = X_0 = B \cup (X_0 \backslash X_1) \cup (X_1 \backslash X_2) \cup$ ....
- $X_1 = B \cup (X_1 \backslash X_2) \cup (X_2 \backslash X_3) \cup$ ....

De esta forma, podemos establecer una función biyectiva f entre X_0 y X_1, definida como $f(x) = \begin{cases} x, & x \in B \cup (X_{2k-1} \backslash X_{2k}) \\ f_{2k}(x), & x \in X_{2k} \backslash X_{2k+1}) \end{cases}$, con $f_{2k} : X_{2k} \backslash X_{2k+1} \to X_{2(k+1)} \backslash X_{2(k+1)+1}$. Tenemos que $f(x) = x$ es biyectiva de forma trivial y $f(x) = f_{2k}(x)$ es biyectiva por lo demostrado anteriormente.
Luego f es biyectiva y $X_1 \sim X$. $\square$

> **Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein**. Sean X e Y dos conjuntos infinitos, tales que existen dos funciones inyectivas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$. Entonces, existe una biyección $h : X \to Y$. Es decir, si $|X| \leq |Y|$ y $|Y| \leq |X|$, entonces $|X| = |Y|$.

Demostración.
Consideramos los subconjuntos $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$, de forma que, aplicando la hipótesis del Teorema, tenemos que $X \sim Y_1$ y $Y \sim X_1$ suponemos que existe una función $g : Y \to X_1$.
A continuación, definimos el conjunto $X_2 = g(Y_1)$, de forma que $X_2 \subset g(Y) = X_1 \subset X$, consiguiendo la primera hipótesis del Lema. Después, vemos que $X \sim Y_1 \wedge Y_1 \sim X_2$ y aplicando la propiedad tranistiva, llegamos a que $X \sim X_2$, consiguiendo la segunda hipótesis del Lema. Por tanto, concluimos que $X \sim X_1$.
Como tenemos que $X \sim X_1 \wedge Y \sim X_1$, aplicamos nuevamente la propiedad transitiva y llegamos a que $X \sim Y$. $\square$

Ejemplo 13. Usamos el Teorema de C-S-B para demostrar que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
- Consideramos la función identidad $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definida como $id(n) = (n, n)$, trivialmente inyectiva. Luego, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.
- Definimos una función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n, m) = 2^n \cdot 3^m$, también trivialmente inyectiva. Luego, $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$.

Aplicando el Teorema de C-S-B tenemos que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Ejemplo 14. Usamos el Teorema de C-S-B para demostrar que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.
- Consideramos la función identidad $id : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, definida como $id(n) = n$, trivialmente inyectiva. Luego $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$.

- Definimos la funciones $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que $f(n,m) = \dfrac{n}{m}$, sobreyectiva trivialmente, y $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, biyectiva en este caso. Luego, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.
Aplicando el Teorema de C-S-B tenemos que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ y, a partir del ejemplo 13, vemos que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

> Proposición. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces, $\mathbb{R} \sim (a,b) \sim [a,b) \sim [a,b] \sim [a,+\infty) \sim (-\infty,b] \sim ...$. Es decir, todos los intervalos de $\mathbb{R}$, excepto $[a,a] = \{a\}$, son equipotentes a $\mathbb{R}$.

Demostración.
Caso 1. Definimos una función lineal $f : [0,1] \to [a,b]$ como $f(x) = a + (b-a)x$, biyectiva trivialmente. Luego $[a,b] \sim [0,1]$, de forma que $[a,b] \sim [c,d]$ para todo $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$.
Caso 2. Tomamos la función del Caso 1 restringida a $(0,1)$, de forma que $f : (0,1) \to (a,b)$. Luego, $(a,b) \sim (0,1)$ y $(a,b) \sim (c,d)$ para todo $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$.
Caso 3. Tomamos la función tangente $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \operatorname{tg} x$, biyectiva por definición. Luego $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$ y, en general $(a,b) \sim \mathbb{R}$ para todo $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.
Caso 4. Definimos la función $f : [0,1) \to [a,\infty)$ como $f(x) = \dfrac{a}{1-x}$, biyectiva trivialmente. Luego $[0,1) \sim [a,\infty)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
Caso 5. Por una parte, tomamos la función identidad $id : [a,b] \to (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ como $f(x,y) = (x,y)$, inyectiva por definición. Luego $|[a,b]| \leq |(a-\varepsilon, b+\varepsilon)|$. Por otra parte, tomamos la función identidad $id : (a,b) \to [a,b]$ como $f(x,y) = (x,y)$, inyectiva por definición. Luego $|(a,b)| \leq |[a,b]|$. Aplicando el Teorema de C-S-B tenemos que $|(a,b)| = |[a,b]| = |\mathbb{R}|$.

5.3. Conjuntos no numerables

> Teorema (**Diagonalización de Cantor**). El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, no es numerable, es decir, $|\mathbb{R}| \geq \chi_0$.

Notación. $|\mathbb{R}| = \chi_1$.

Demostración.
Suponemos que $(0,1)$ es numerable, es decir, $(0,1) \sim \mathbb{N}$, de forma que sus elementos se pueden ordenar como una sucesión infinita.
Suponemos los elementos de esta sucesión como aquellos de la forma $x_n = 0, a_{n1}a_{n2}...$, con $a_{ij} \in \{0,1,...,9\}$.
Ahora, construimos otro elemento $x = 0, a_1a_2...$, de forma que $a_i \neq a_{ii}, \forall i$ y ponemos $a_n = \begin{cases} 1, & a_{nn} \neq 1 \\ 0, & a_{nn} = 1 \end{cases}$. Así, x no pertenece a la sucesión que hemos creado, pero $x \in (0,1)$, llegando a una contradicción, por lo que $(0,1) \nsim \mathbb{N}$. Como sabemos que $\mathbb{R} \sim (0,1)$, concluimos que $|\mathbb{R}| \geq |\mathbb{N}|$. □

Definición. Dados dos conjuntos A y B. Definimos el B^A como el conjunto de funciones que van de A a B, es decir, $\{f : A \to B\}$.

Ejemplo 15. $\{0,1\}^A = \{f : A \to \{0,1\}\}$ es el conjunto de funciones tales que $\forall a \in A$ se tiene que $f(a) = 0$ o $f(a) = 1$.

> Lema. Sea A un conjunto. El cardinal del conjunto $\mathcal{P}(A)$ tiene el mismo cardinal que el conjunto de funciones $\{0,1\}^A$.

Demostración.
Tenemos que definir una función biyectiva entre los conjuntos $\mathcal{P}(A)$ y $\{0,1\}^A$. Para cada elemento $B \in \mathcal{P}(A)$ definimos la función característica χ_B como $\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$. Es evidente que $\chi_B \in \{0,1\}^A$, de forma que podemos considerar la función $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ definida como $\varphi(B) = \chi_B$.
- Si $\varphi(B) = \varphi(C)$ con $B, C \in \mathcal{P}(A)$, entonces $\chi_B = \chi_C$, de forma que $\forall x \in A$, si $\chi_B(x) = 1$, entonces $\chi_C(x) = 1$, es decir, si $x \in B$, entonces $x \in C$, por lo que $B = C$. Luego, φ es inyectiva.
- $\forall f \in \{0,1\}^A$ definimos un conjunto $B = \{x \in A : f(x) = 1\}$, de forma que $f = \chi_B = \varphi(B)$. Luego, φ es sobreyectiva.

Como φ es inyectiva y sobreyectiva, φ es biyectiva y $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$. $\square$

> Teorema de Cantor. Sea U un conjunto universal y A un subconjunto de U. Entonces, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Demostración.
Tomamos la función identidad $id : A \to \mathcal{P}(A)$ definida como $id(a) = \{a\}$, inyectiva de forma trivial. Luego, $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.
Dada una función $f : A \to \{0,1\}^A$, para cada $a \in A$ tenemos que $F_a = f(a) \in \{0,1\}^A$, es decir, $F_a : A \to \{0,1\}^A$ con $F_a(x) \in \{0,1\}$. Si definimos $F(a) = \begin{cases} 0, & F_a(a) = 1 \\ 1, & F_a(a) = 1 \end{cases}$. Por lo tanto, $F \neq F_a$, de forma que $F \neq \mathrm{Im}\, f = f(A)$. Luego, f no es sobreyectiva y, por tanto, tampoco biyectiva. De forma que $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.
Luego $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. $\square$

> Teorema. El cardinal del conjunto partes de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

Demostración.
Definimos una función $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to (0,1)$, de forma que $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f(F_n) \in (0,1)$. Es decir, $F_i = 0, F_{i1}F_{i2}\ldots$. Si $F_i \neq F_j$, entonces $\exists N \in \mathbb{N} : F_{iN} \neq F_{jN}$, de forma que $f(F_i) \neq f(F_j)$. Luego, f es inyectiva y $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |(0,1)|$, equivalentemente, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.
Después, definimos otra función $g : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ tal que $f(x) = (-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$. Si $x_1 \neq x_2$, entonces $(-\infty, x_1) \cap \mathbb{Q} \neq (-\infty, x_2) \cap \mathbb{Q}$ trivialmente. Luego, g es inyectiva y $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$, equivalentemente, $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
Por el Teorema de C-S-B, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. $\square$

> Corolario. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera tales que $A \sim B$. Entonces $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$. Es decir, si existe una función biyectiva $f : A \to B$, entonces existe una función biyectiva $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, tal que $\forall c \in \mathcal{P}(A)$ se tiene que $g(c) = f(c)$.

Demostración.
- Si $g(C) = g(D)$, con $C, D \in \mathcal{P}(A)$, entonces $f(C) = f(D)$ y $C = D$. Luego, g es inyectiva.
- $\forall E \in \mathcal{P}(B)$ si $C = f^{-1}(E) \subset A$, entonces $C \in \mathcal{P}(A)$ y $g(C) = f(f^{-1}(E)) = E$. Luego, es g es sobreyectiva.

Como g es inyectiva y sobreyectiva, es g es biyectiva. $\square$

> Corolario. $\chi_0 < 2^{\chi_0} = \chi_1$.

> **Hipótesis del continuo**. No existe ningún conjunto A con cardinalidad mayor que los naturales y menor que los reales, es decir, $\chi_0 < |A| < \chi_1$.