Hoja 1

Grado en Ingeniería Informática
Universidad Autónoma de Madrid

Ejercicio 1

Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

1. $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$, (ley del paralelogramo).
2. $\|x-y\| \cdot \|x+y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.
3. $x \cdot y = 0$ si y sólo si $\|x+y\| = \|x-y\|$.
4. $x \cdot y = 0$ si y sólo si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$.

Interpretar dichos resultados geométricamente en términos del paralelogramo formado por los vectores x e y.

Antes de comenzar el ejercicio, recordamos que, dados $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ se define

$$x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

y se define

$$||x|| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Además, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$|x \cdot y| \leq ||x||||y||$$

que se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y también se cumple la desigualdad triangular

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Apartado 1

Demostrar que $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$, (ley del paralelogramo).

Por un lado, observamos que

$$||x+y||^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot(x+y) + y\cdot(x+y) =$$

$$= x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y = ||x||^2 + 2x\cdot y + ||y||^2.$$

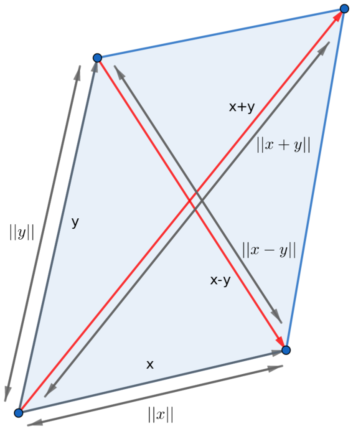
Por otro lado, observamos que

$$||x-y||^2 = (x-y)\cdot(x-y) = x\cdot(x-y) - y\cdot(x-y) =$$

$$= x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y = ||x||^2 - 2x\cdot y + ||y||^2.$$

Por tanto

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$



Este apartado demuestra que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

Apartado 2

Demostrar que $\|x-y\| \cdot \|x+y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

Para hacer este ejercicio necesitamos utilizar la siguiente desigualdad.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

¿Por qué es cierta esta desigualdad? Para ver por qué esto se cumple para dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ cualesquiera, basta observar que siempre tenemos que

$$(a-b)^2 \geq 0$$

y también que

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Por tanto

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

Utilizando esta desigualdad

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

con $a = ||x - y||$ y $b = ||x + y||$, obtenemos que

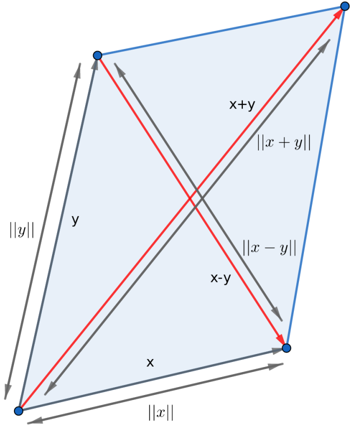
$$||x - y||||x + y|| \leq \frac{1}{2}||x - y||^2 + \frac{1}{2}||x + y||^2 = \frac{1}{2}(||x - y||^2 + ||x + y||^2).$$

Ahora observamos que por el apartado anterior

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

Por tanto

$$||x-y||||x+y|| \leq \frac{1}{2}(||x+y||^2+||x-y||^2) = \frac{1}{2}(2||x||^2+2||y||^2) = ||x||^2+||y||^2.$$



Este apartado demuestra que el producto de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es menor o igual a la suma del cuadrado de sus lados.

Apartado 3

Demostrar que $x \cdot y = 0$ si y sólo si $\|x + y\| = \|x - y\|$

Demostramos primero que si $x \cdot y = 0 \Rightarrow \|x + y\| = \|x - y\|$. Observamos que

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2x \cdot y + ||y||^2$$

y que

$$||x - y||^2 = ||x||^2 - 2x \cdot y + ||y||^2$$

Ahora bien, como $x \cdot y = 0$, tenemos que

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

y que

$$||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Por tanto

$$||x + y|| = ||x - y||.$$

Tratemos de ver ahora que si $||x + y|| = ||x - y|| \Rightarrow x \cdot y = 0$.
Observamos de nuevo que

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2x \cdot y + ||y||^2$$

y que

$$||x - y||^2 = ||x||^2 - 2x \cdot y + ||y||^2$$

Ahora bien, como $||x + y|| = ||x - y||$. Por tanto

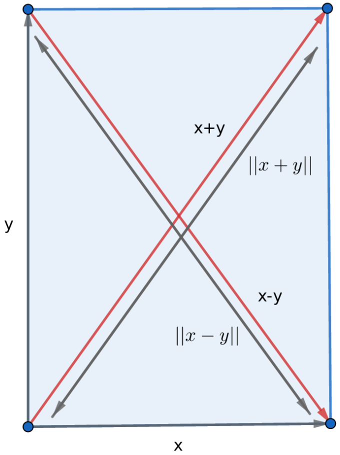
$$||x||^2 + 2x \cdot y + ||y||^2 = ||x||^2 - 2x \cdot y + ||y||^2.$$

Entonces

$$4x \cdot y = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0.$$

Por tanto

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \|x + y\| = \|x - y\|.$$



Este apartado demuestra un paralelogramo es un rectángulo sí y solo sí sus dos diagonales son iguales.

Apartado 4

Demostrar que $x \cdot y = 0$ si y sólo si $\|x + \lambda\, y\| \geq \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostraremos primero que $x \cdot y = 0 \Rightarrow \|x + \lambda\, y\| \geq \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$||x + \lambda y||^2 = ||x||^2 + 2x \cdot (\lambda y) + ||\lambda y||^2 = ||x||^2 + 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 ||y||^2.$$

Observamos que $x \cdot y = 0$, por tanto

$$||x + \lambda y||^2 = ||x||^2 + 2\lambda x \cdot y + |\lambda|^2 ||y||^2 =$$

$$= ||x||^2 + |\lambda|^2 ||y||^2 \geq ||x||^2.$$

Entonces

$$\|x + \lambda\, y\| \geq \|x\|.$$

Tratemos de ver ahora que $\|x + \lambda\, y\| \geq \|x\|$, $\forall\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot y = 0$.
Observamos de nuevo que

$$||x + \lambda y||^2 = ||x||^2 + 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 ||y||^2.$$

Además, $\|x + \lambda\, y\| \geq \|x\|$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto

$$||x||^2 + 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 ||y||^2 \geq ||x||^2 \Rightarrow 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 ||y||^2 \geq 0$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y entonces

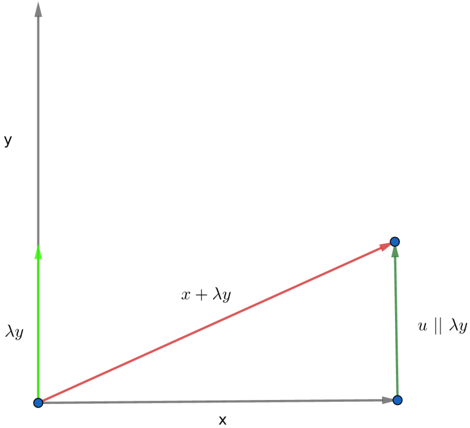
$$f(\lambda) = 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 ||y||^2 = (\lambda ||y|| + \frac{x \cdot y}{||y||})^2 - \frac{(x \cdot y)^2}{||y||^2} \geq 0$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
Elegimos $\lambda_0 = -\frac{x \cdot y}{||y||^2}$. Entonces, observamos que se cumple que

$$f(\lambda_0) = -\frac{(x \cdot y)^2}{||y||^2}.$$

Ahora bien, como $f(\lambda_0) \geq 0$, entonces

$$-\frac{(x \cdot y)^2}{||y||^2} \geq 0 \Rightarrow (\frac{(x \cdot y)}{||y||})^2 \leq 0 \Rightarrow x \cdot y = 0.$$



Este dibujo ilustra el significado de este apartado.

Apartado 5

Demostrar que $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$.

Por un lado, observamos que utilizando la desigualdad triangular

$$||x|| = ||y + (x - y)|| \leq ||y|| + ||x - y||.$$

Por tanto

$$||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$$

Por otro lado, observamos que

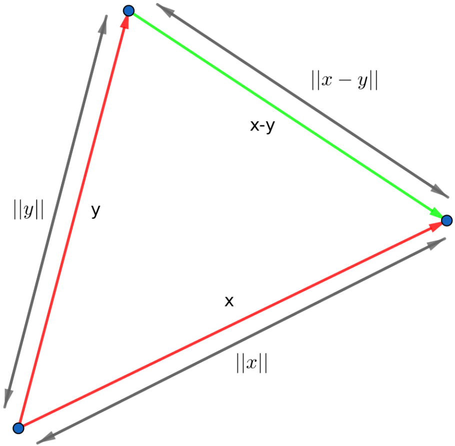
$$||y|| = ||x + (y - x)|| \leq ||x|| + ||y - x|| = ||x|| + ||x - y||.$$

Entonces

$$||y|| - ||x|| \leq ||x - y||.$$

Por tanto

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \text{máx}\{||x|| - ||y||, ||y|| - ||x||\} \leq \|x - y\|.$$



Este dibujo ilustra el significado de este apartado.

Ejercicio 2

1. Determinar todos los valores posibles del parámetro real λ para que los vectores $\lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}$ (en $\mathbb{R}^3$) sean ortogonales.
2. Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $\mathbf{x} = (4, b, 1)$ e $\mathbf{y} = (a, b, 0)$ sean ortogonales en $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál es el lugar geométrico, en el plano ab, determinado por tales a y b?
3. Hallar dos vectores ortogonales a $(1, 1, 1)$ que no sean paralelos entre sí. ¿Se pueden elegir dos que sean también mutuamente ortogonales?

Apartado 1

Determinar todos los valores posibles del parámetro real λ para que los vectores $\lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}$ (en $\mathbb{R}^3$) sean ortogonales.

Observamos que los vectores $\lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}$, si y solo sí

$$(\lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}) = 0.$$

Además

$$(\lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}) = \lambda^2 + 2 - 3\lambda$$

Entonces, los vectores son ortogonales si y solo sí

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

y por tanto, si $\lambda = 1$ o $\lambda = 2$.

Apartado 2

Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $\mathbf{x} = (4, b, 1)$ e $\mathbf{y} = (a, b, 0)$ sean ortogonales en $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál es el lugar geométrico, en el plano ab, determinado por tales a y b?

Observamos que los vectores $\mathbf{x} = (4, b, 1)$ e $\mathbf{y} = (a, b, 0)$, si y solo sí

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (4, b, 1) \cdot (a, b, 0) = 4a + b^2 = 0.$$

Por tanto, los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x \cdot y = 0$ son el conjunto de los $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $4a + b^2 = 0$. El lugar geométrico estos puntos en el plano ab es la parábola $a = -\frac{1}{4}b^2$.

Apartado 3

Hallar dos vectores ortogonales a $(1,1,1)$ que no sean paralelos entre sí. ¿Se pueden elegir dos que sean también mutuamente ortogonales?

Para hallar dos vectores ortogonales a $(1,1,1)$, podemos elegir por ejemplo $u=(1,-1,0)$ y $v=(1,0,-1)$.
Siempre, sea cual sea el vector que nos de el ejercicio, en nuestro caso es $(1,1,1)$, será posible hallar dos vectores que sean ortogonales a un vector dado y ortogonales entre sí. Veamos cómo hallarlos.
Primero elegimos un vector, $u=(x,y,z)$ que sea ortogonal a $(1,1,1)$.
Observamos que u es ortogonal a este vector, sí y solo sí

$$u\cdot(1,1,1)=x+y+z=0.$$

Por tanto, cualquier solución de esta ecuación nos dará un vector ortogonal a $(1,1,1)$. Elegimos uno cualquiera, por ejemplo $u=(1,-1,0)$.

Una vez hecho esto ahora nuestro objetivo es encontrar otro vector $v = (a, b, c)$, que sea ortogonal a $u = (1, -1, 0)$ y a $(1, 1, 1)$. Para ello, podemos utilizar varios métodos. Uno de ellos es tomar $v = (1, -1, 0) \times (1, 1, 1) = (-1, -1, 2)$, que como vemos es ortogonal a ambos vectores. Otra forma es plantear el sistema de ecuaciones que debe satisfacer v para ser ortogonal a u y a $(1, 1, 1)$ y hallar una solución. En nuestro caso $v = (a, b, c)$ debe satisfacer que

$$u \cdot v = (a, b, c) \cdot (1, -1, 0) = a - b = 0$$

$$v \cdot (1, 1, 1) = (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = a + b + c = 0$$

y hallando una solución cualquiera de este sistema, habremos obtenido el vector pedido.

Ejercicio 3

1. Sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Determinar el ángulo entre los vectores $u = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $v = \sqrt{5/3}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
2. Lo mismo para el ángulo entre los vectores $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, -1)$.
3. Explicar la diferencia entre los valores $\|3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\| \cdot \|2\mathbf{j} + \mathbf{k}\|$ y $|(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} + \mathbf{k})|$. ¿Puede decidirse que ambos valores son diferentes, sin necesidad de calcularlos explícitamente?

Apartado 1

Sean $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Determinar el ángulo entre los vectores $u = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $v = \sqrt{5/3}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Sea θ el ángulo formado por los vectores u y v. Observamos que

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{||u||||v||}.$$

Además, $u \cdot v = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$ y también

$$||u|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$
$$||v|| = \sqrt{\frac{5}{3} + 1} = \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Entonces

$$\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{\frac{5}{3}}}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{5}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por tanto $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Apartado 2

Lo mismo para el ángulo entre los vectores $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, -1)$.

Sea $u = (1, -1, 0)$ y $v = (0, 1, -1)$. Sea θ el ángulo formado por los vectores u y v. Observamos que

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{||u||\,||v||}.$$

Además

$$u \cdot v = -1$$
$$||u|| = \sqrt{2}$$
$$||v|| = \sqrt{2}.$$

Entonces

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Apartado 3

Explicar la diferencia entre los valores $\|3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\| \cdot \|2\mathbf{j} + \mathbf{k}\|$ y $|(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} + \mathbf{k})|$. ¿Puede decidirse que ambos valores son diferentes, sin necesidad de calcularlos explícitamente?

La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$|u \cdot v| \leq ||u||||v||$$

lo que no implica necesariamente que se de la igualdad, y eso explica que los valores $\|3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\| \cdot \|2\mathbf{j} + \mathbf{k}\|$ y $|(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} + \mathbf{k})|$ no coincidan. Además, es posible afirmar sin necesidad de calcular ambos valores que no son iguales ya que la desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

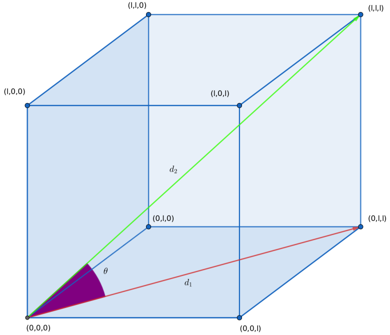
$$|u \cdot v| \leq ||u||||v||$$

y la igualdad se da sí y solo sí $u = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ o $v = 0$, en otras palabras cuando los vectores son proporcionales, lo que no ocurre en con los vectores $u = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$ y $v = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

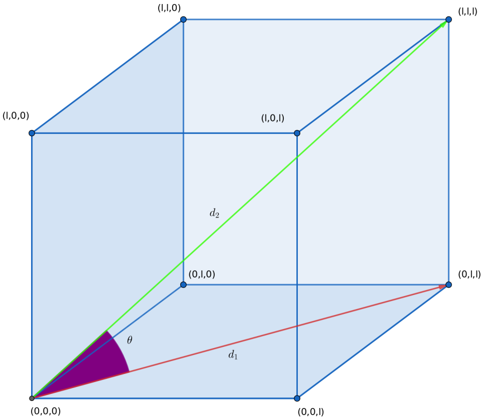
Ejercicio 4

Calcúlese el coseno del ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.

Consideramos el cubo en $\mathbb{R}^3$ de lado l determinado por los vértices $(0,0,0)$, $(l,0,0)$, $(0,l,0)$, $(0,0,l)$, $(l,l,0)$, $(l,0,l)$, $(0,l,l)$, (l,l,l).



Elegimos la cara del cubo generada por los vértices $(0,0,0)$, $(0,l,0)$, $(0,0,l)$ y $(0,l,l)$. La diagonal de esta cara es el vector que une los puntos $(0,0,0)$ y $(0,l,l)$, es decir, el vector $d_1 = (0,l,l)$.
La diagonal del cubo es el vector que une los puntos $(0,0,0)$ y (l,l,l) es decir el vector $d_2 = (l,l,l)$.



Sea θ el ángulo formado por ambas diagonales, entonces

$$\cos(\theta) = \frac{d_1 \cdot d_2}{||d_1||||d_2||}.$$

Observamos que

$$d_1 \cdot d_2 = 2l^2$$
$$||d_1||_= \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2}l$$
$$||d_2||_= \sqrt{l^2 + l^2 + l^2} = \sqrt{3}l$$

Por tanto

$$\cos(\theta) = \frac{2l^2}{\sqrt{2}l\sqrt{3}l} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Observación: El valor del ángulo no depende de la longitud del lado.

Ejercicio 5

Halle el área del paralelogramo generado por los vectores $(1,2,3)$ y $(-1,0,1)$.

El área de un paralelogramo generado por dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ viene dada por la fórmula

$$A = ||u \times v||.$$

En nuestro caso $u = (1,2,3)$, $v = (-1,0,1)$. Por tanto

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - \mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Entonces $u \times v = (2,-4,2)$. Por tanto

$$A = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Ejercicio 6

Halle el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores $\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

El volumen de el paralelepípedo generado por los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, donde $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$ y $w = (w_x, w_y, w_z)$, viene dado por la fórmula

$$V = |u \cdot (v \times w)| = \left| \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \right|.$$

En nuestro caso $u = \mathbf{i} + 3\mathbf{k} = (1, 0, 3)$, $v = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (2, 1, -2)$, $w = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{k} = (5, 0, 4)$. Por tanto

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} \right| = |4 - 15| = 11.$$

Ejercicio 7

Halle una ecuación para el plano que es perpendicular al vector $(1, 1, 1)$ y que pasa por el punto $(1, 0, 0)$.

Halle una ecuación para el plano que es perpendicular al vector $(1, 1, 1)$ y que pasa por el punto $(1, 0, 0)$.

Comenzamos observando que si $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ es un punto de un plano y $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ es el vector normal a este plano, entonces su ecuación viene dada por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0.$$

Por tanto si un plano es perpendicular al vector $(1, 1, 1)$ y pasa por el punto $(1, 0, 0)$, la ecuación de dicho plano viene dada por

$$(x - 1, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0$$

Entonces

$$(x - 1, y, z) \cdot (1, 1, 1) = x - 1 + y + z = 0.$$

Por tanto, la ecuación del plano es

$$x + y + z - 1 = 0.$$