TEMA 3: Integración en varias variables

Fernando Soria (UAM)

Curso 2022-23

Estructura del Tema 3:

- 3.1. Introducción y Principio de Cavalieri.
- 3.2. Integral de Riemann; Teorema de Fubini.
- 3.3. Teorema del cambio de variables.
- 3.4. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$. Supongamos $f : R \to \mathbb{R}$ con $f \geq 0$. Hay una región $S \subset \mathbb{R}^3$ acotada por:

- por arriba por la gráfica de f, y por abajo por el rectángulo R;
- por los planos $x = a$ y $x = b$,
- y por los planos $y = c$, e $y = d$:

Queremos encontrar el volumen de S. Cuando sea posible hacerlo[1], lo denotaremos por

$$\iint_R f(x, y)\, dA, \qquad \iint_R f(x, y)\, dxdy.$$

[1]Al igual que en dimensión 1, veremos que a la función

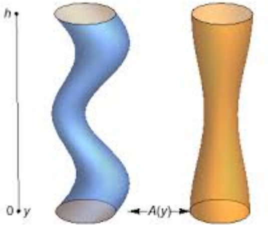
$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

no se le puede asociar un volumen en el sentido de Riemann

Principio de Cavalieri

Sea S un sólido, y, para $a \leq x \leq b$, sea P_x una familia de planos paralelos tal que

1. S está entre P_a y P_b;
2. el área de la sección transversal de S cortada por el plano P_x está dada por una función $A(x)$.



Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x)\,dx.$$

Demostración: Tomamos una partición de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Si $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$A(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

es el volumen de un cilindro que aproxima el volumen de la parte de S comprendida entre los planos P_{x_i} y $P_{x_{i+1}}$. La suma de todos esos cilindros es una suma de Riemann para la función $A(x)$ en en intervalo $[a, b]$, así que en el límite

$$V(S) = \text{lím} \sum A(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Integrales iteradas (I)

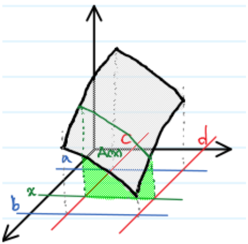
Usando el principio de Cavalieri podemos calcular el volumen de la región S de dos formas diferentes:

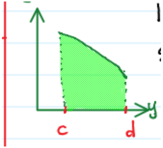
- Si seccionamos S con planos de la forma $x = x_0$, donde $a \leq x_0 \leq b$, el área de la sección es la integral de $y \to f(x_0, y)$ en el intervalo $[c, d]$, así que

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)\, dy,$$

y por el principio de Cavalieri,

$$V(S) = \int\int_R f(x,y)\, dxdy = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx.$$





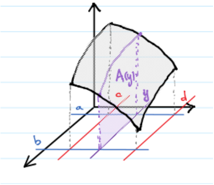
Integrales iteradas (II)

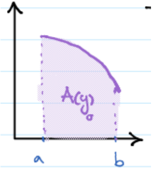
- Si seccionamos S con planos $y = y_0$, donde $c \le y_0 \le d$, el área de la sección es la integral de $x \to f(x, y_0)$ en el intervalo $[a, b]$, así que

$$B(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\, dx,$$

y por el principio de Cavalieri,

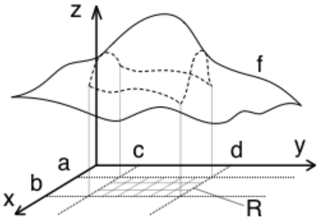
$$V(S) = \iint_R f(x,y)\, dxdy = \int_c^d B(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy.$$



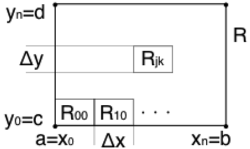


Integral de Riemann

Vamos a darle más rigor a la idea de calcular el volumen que hay "bajo" la gráfica de una función de dos variables: sea $f(x, y) \geq 0$ acotada, definida sobre R, un rectángulo con lados paralelos a los ejes, $R = \{(x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$. Queremos calcular el volumen de $B = \{(x, y, z) : (x, y) \in R,\ z \in [0, f(x, y)]\}$.



Decimos que una colección de rectángulos $\mathcal{P} = \{R_k\}$ es una partición de R si se cumple: 1) $R = \bigcup_k R_k$ y 2) si $k \neq k'$, $R_k^o \bigcap R_{k'}^o = \emptyset$. Asociada a $\mathcal{P}$ definimos
la suma superior: $S_{\mathcal{P}} = \sum_k sup_{R_k} f \times \text{área}(R_k)$.
la suma inferior: $s_{\mathcal{P}} = \sum_k \text{ínf}_{R_k} f \times \text{área}(R_k)$.
Estas sumas de volúmenes de paralelepípedos con base rectangular en R nos dan una aproximación por exceso y por defecto del volumen que buscamos.



Para cualquier selección de puntos $c_k \in R_k$, podemos definir un valor intermedio $\sum_k f(c_k) \times \text{área}(R_k)$, denominada suma de Riemann.

Dadas dos particiones de R, $\mathcal{P} = \{R_k\}$ y $\mathcal{P}' = \{R'_j\}$ diremos que $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ si cada R'_j de la primera está contenido en algún R_k de la segunda. Como en el caso de una variable, se cumple aquí también

$$s_{\mathcal{P}} \leq s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

Definición (Integrabilidad de Riemann para funciones de 2 variables)

Sea R un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es integrable en R si $\sup_{\mathcal{P}} s_{\mathcal{P}} = \inf_{\mathcal{P}} S_{\mathcal{P}} = S$, donde el supremo y el ínfimo se toma sobre todas las particiones de R. Este valor también coincide con el límite de las sumas de Riemann. Escribiremos $S = \iint_R f(x, y)dxdy$.

Se puede abreviar la notación escribiendo $\iint_R f\, dA$, o incluso $\int_R f$, si no ha lugar a confusión. (Aquí dA denota el elemento infinitesimal de área $dxdy$.)

Funciones Integrables Riemann

En la práctica necesitamos criterios simples para determinar si una función es integrable.

El siguiente resultado se demuestra de forma idéntica a como se hizo en el caso de una variable, usando simplemente que toda función continua sobre un compacto es uniformemente continua.

Teorema

Toda función continua $f(x, y)$ definida en un rectángulo cerrado es integrable.
Lo mismo es cierto si f es acotada y el conjunto de discontinuidades de f se puede cubrir por una unión de rectángulos cuya suma de áreas sea tan pequeña como se quiera.[a]

[a] Esta condición se describe diciendo que dicho conjunto tiene área 0. Esto es cierto, por ejemplo, cuando las discontinuidades se encuentran a lo largo de la gráfica de una función continua de una variable.

Algunas propiedades de la integral

Propiedades: Hemos definido la integral como límite de sumas de Riemann. De esta definición podemos deducir las siguientes propiedades de la integral:

- **Linealidad:** para $f, g : R \to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cualesquiera, tenemos $\displaystyle\iint_R (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \iint_R f dA + \beta \iint_R g dA.$
- **Monotonía:** $\big(\forall\,(x, y),\ f(x, y) \geq g(x, y)\big) \Rightarrow\ \displaystyle\iint_R f dA \geq \iint_R g dA.$
- **Aditividad:** si Q es una unión de rectángulos $Q = \bigcup_i R_i$ tales que $\forall\, i \neq j$, $R_i^{\circ} \cap R_j^{\circ} = \emptyset$, entonces tenemos $\displaystyle\iint_Q f dA = \sum_i \iint_{R_i} f dA.$

3.1.2. Teorema de Fubini

El siguiente teorema se deduce del principio de Cavalieri ya visto y nos permite evaluar una integral doble calculando dos integrales sucesivas.

Teorema de Fubini (para funciones continuas sobre rectángulos)

Sea $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Este teorema se extiende de forma natural a funciones más generales, siempre que el conjunto de discontinuidades se pueda cubrir con rectángulos cuya suma de áreas sea tan pequeña como se quiera.

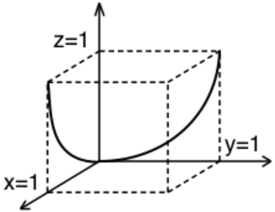
Ejemplo 1: calcular $\iint_R (x^2+y)dA$ para $R = [0,1] \times [0,1]$. Podemos hacerlo de dos formas distintas: por un lado, la integral es

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2+y)dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y\right) dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Ahora calculemos la integral en el otro orden:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2+ydy)dx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Ejemplo 2: calcular el volumen del sólido acotado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y la superficie $z = x^2 + y^4$.



$$\iint_R (x^2 + y^4)dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^4)dxdy$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^4 x\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^4\right) dy$$
$$= \left[\frac{y}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

Ejemplo 3: Dado $R = [0,1] \times [0,1]$, calcula $\displaystyle\iint_R y\, e^{x\,y}\, dA$.

Al igual que antes, usaremos el Teorema de Fubini para funciones continuas:

$$\iint_R y\, e^{x\,y}\, dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 y\, e^{x\,y}\, dx\right) dy = \int_0^1 [e^{x\,y}]_0^1\, dy$$
$$= \int_0^1 (e^y - 1)\, dy = [e^y - y]_0^1 = e - 2.$$

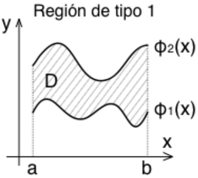
Observación: La integración en el otro orden nos llevaría a un camino más largo:

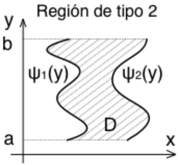
$$\iint_R y\, e^{x\,y}\, dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 y\, e^{x\,y}\, dy\right) dx = \ldots \qquad \text{(por partes)}.$$

3.1.3. Integrales sobre dominios más generales

Vamos a ver cómo la definición de integrales vista anteriormente se puede extender para tomar integrales sobre regiones (dominios) más generales que rectángulos. Para esto, estudiaremos regiones delimitadas por gráficas de *funciones continuas*.

Consideremos las funciones $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$, con $\phi_1 \leq \phi_2$,
o lo mismo cambiando x, y, es decir $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $\psi_1 \leq \psi_2$.





Las llamaremos respectivamente regiones elementales de tipo 1 y 2.

Es importante observar que en las regiones elementales, el borde de la región definida D, a saber ∂D, es una curva continua. Gracias a esto podremos aplicar los teoremas anteriores sobre integrales en un rectángulo, como explicamos a continuación.

1. Llamamos **regiones de Tipo 1** a aquellas que pueden escribirse como $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x \in [a,b], \ \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$. En ese caso:

$$\iint_{D_1} f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\,dx.$$

2. Llamamos **regiones de Tipo 2** a aquellas que pueden escribirse: $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ y \in [c,d], \ \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$. Aquí:

$$\iint_{D_2} f(x,y)dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\,dy.$$

3. Llamamos **regiones de Tipo 3** a aquellas que son de *Tipo 1* y *Tipo 2* simultáneamente.

Observación: Cuando una de las integrales iteradas es más fácil que la otra interesa aplicar un **cambio en el orden de integración** .

Sea $f(x, y)$ una función continua definida sobre una región elemental D.

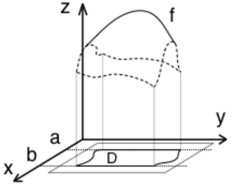
Sea R un rectángulo con $R \supset D$. Sea $f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$

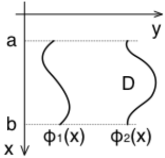
Los teoremas vistos implican que f^* es integrable en R (sus discontinuidades están sobre las gráficas de las funciones que definen a D). La propiedad de aditividad justifica entonces la definición siguiente:

Se define la integral $$\iint_D f dA = \iint_R f^*(x, y) dA.$$

Veamos ahora cómo hacer el cálculo de esta integral.

Vamos a centrarnos en el caso de regiones de tipo 1.



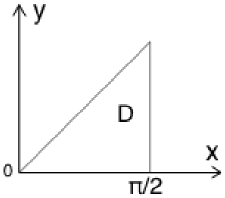


Para un x fijo en $[a, b]$, la variable y se mueve entre $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$.

Por tanto, $$\iint_D f dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

De modo similar, si es de tipo 2, la integral será de la forma $\int_a^b \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$.

Ejemplo : Hallar $\iint_D (x^3y + \cos(x))\, dA$, donde D es el triángulo $\{(x,y) : 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le x\}$. Dibujemos primero la región:



Para cada x fijado entre 0 y $\pi/2$, la variable y crece de 0 a x.

$$\iint_D (x^3y + \cos(x))\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x (x^3y + \cos(x))dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[x^3\frac{y^2}{2} + y\cos(x)\right]_0^x dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^5}{2} + x\cos(x)\right) dx = \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx = \frac{\pi^6}{2^8 \cdot 3} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx.$$

Integrando por partes, queda $\frac{\pi^6}{2^8 \cdot 3} + \left[x\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1.$

Ejercicio: Calcular $\iint_D e^{x^2} dxdy$ donde D es el triángulo de vértices $(0,0),(1,0),(1,1)$.

Resumen

Interpretación de la integral doble como área de una región:
Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada. Entonces

$$\text{Área}\,(D) = |D| = \iint_D 1\, dA$$

Interpretación de la integral doble como volumen de un śolido: Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \geq 0$, y el sólido $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in R, \ z \in [0, f(x, y)]\}$

$$\text{Volumen}(W) = \iint_D f(x, y)\, dA$$

Teorema del valor medio para integrales dobles:
Sea f continua en la región compacta y conexa $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces existe un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)\, |D|$$

Ejemplo 1: Dibuja y halla el área de la región D delimitada por las parábolas $y = 3x^2$ e $y = 4 - x^2$, con $x, y \geq 0$.

Solución: Hallamos primero los puntos de corte entre las gráficas $y = 3x^2$ e $y = 4 - x^2$:

$$3x^2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

como nos han dicho que $x, y \geq 0$, la solución válida es $x = 1$ y, por el tanto, el punto de corte buscado es $(x, y) = (1, 3)$.

Región de Tipo 1:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1\,, \quad 3x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

$$\begin{aligned}
\text{Área}\,(D) &= \iint_D dA = \int_0^1 \left(\int_{3x^2}^{4-x^2} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(4 - 4x^2\right) dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Halla el volumen del tetraedro T acotado por el plano $x+y+z=1$ y los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Solución: El plano $x+y+z=1$ lo escribimos como la gráfica de la función $z=f(x,y)=1-x-y$, entonces T se describe como:

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \quad (x,y)\in R,\ z\in[0,\underbrace{1-x-y}_{f(x,y)}]\}$$

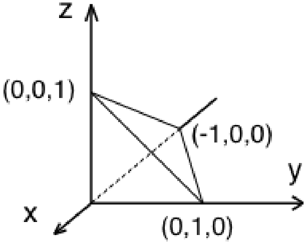
donde: $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad 0\le x\le 1\,, \quad 0\le y\le 1+x\}$.

$$\text{Volumen}(T)=\iint_R f(x,y)\,dA=\iint_R(1-x-y)\,dA=$$

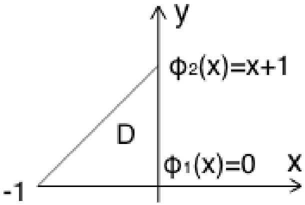
$$=\int_0^1\left(\int_0^{1+x}(1-x-y)\,dy\right)\,dx=\int_0^1\left[y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1+x}\,dx=$$

$$=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}\,dx=\frac{-1}{2}\left[\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

Ejemplo 3: halla el volumen V del tetraedro acotado por los cuatro planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$, $y - x + z = 1$.



Región de integración $\to$



El volumen V es la integral de la función $z = f(x, y) = x - y + 1$ sobre D. Por tanto

$$V = \iint_D (1 - y + x) dA = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{1+x} (1 - y + x) dy dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[y - \frac{y^2}{2} + xy\right]_0^{1+x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^2}{2} dx = \left[\frac{(1+x)^3}{6}\right]_{-1}^{0} = 1/6.$$

Integración en $\mathbb{R}^3$

Sea f una función real en las variables x, y, z, definida y acotada sobre una región de la forma $B = [a_0, a_1] \times [b_0, b_1] \times [c_0, c_1]$. . Decimos que una colección de paralelepípedos de lados paralelos a los ejes $\mathcal{P} = \{R_k\}_k$ forma una partición de B si $\bigcup_k R_k = B$ y $R_k^o \bigcap R_j^o = \emptyset$, $\forall k \neq j$. Las sumas superior e inferior asociadas a $\mathcal{P}$ se definen por

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_k (\sup f)_{R_k} \, vol(R_k) \quad \text{y} \quad s_{\mathcal{P}} = \sum_k (\text{ínf } f)_{R_k} \, vol(R_k),$$

que nos dan una aproximación por exceso y por defecto (respect.) del volumen (en 4 dimensiones) de la figura encerrada por la gráfica de f en B.

Definición: Diremos que f es integrable en B cuando se cumpla $\sup_{\mathcal{P}} s_{\mathcal{P}} = \inf_{\mathcal{P}} S_{\mathcal{P}}$, con el supremo y el ínfimo tomados sobre todas las particiones de B. Cuando coincidan ambos valores los denotaremos por

$$\int_B f \, dV = \iiint_B f(x, y, z) dxdydz.$$

Funciones integrables

Del mismo modo que para la integral doble, tenemos un resultado que nos justifica la integrabilidad de funciones continuas y ciertas funciones discontinuas:

Teorema

Sea $B = [a_0, a_1] \times [b_0, b_1] \times [c_0, c_1]$ un paralelepípedo rectangular cerrado en $\mathbb{R}^3$. Entonces, toda función $f : B \to \mathbb{R}$ continua es integrable.

Lo mismo es cierto si f es acotada y el conjunto de discontinuidades de f se puede cubrir por una unión de paralelepípedos rectangulares cuya suma de volúmenes sea tan pequeña como se quiera.[a]

[a] Esta condición se describe diciendo que dicho conjunto tiene volumen 0. Esto es cierto, por ejemplo, cuando las discontinuidades se encuentran a lo largo de la gráfica de una función continua de dos variables.

Teorema de Fubini

También se tiene la correspondiente versión del Teorema de Fubini, es decir, del método de integraciones sucesivas:

Teorema de Fubini

Si $f : Q = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en Q y continua en salvo por un conjunto finito de superficies como antes, entonces f **es integrable** y se verifica

$$\begin{aligned}\iiint_Q f(x, y, z)dV &= \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dx\,dy\,dz \\ &= \int_e^f \int_a^b \int_c^d f(x, y, z)dy\,dx\,dz = \cdots\end{aligned}$$

Los puntos suspensivos incluyen cualquiera de los seis posibles órdenes en que queramos hacer las integrales iteradas.

Ejemplo 1: Si B es el paralelepípedo $B = [0,1] \times [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$, queremos evaluar

$$\iiint_B (x + 2y + 3z)^2 dxdydz.$$

Por el teorema de Fubini, esta integral es igual a

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_0^1 (x + 2y + 3z)^2 dxdydz,$$

que, iterando integrales, queda

$= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left[\frac{(x+2y+3z)^3}{3}\right]_0^1 dydz = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{3}\left((1+2y+3z)^3 - (2y+3z)^3\right) dydz$

$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{24}\left[(1 + 2y + 3z)^4 - (2y + 3z)^4\right]_{-\frac{1}{2}}^0 dz$

$= \frac{1}{24} \int_0^{\frac{1}{3}} \left((3z + 1)^4 - 2(3z)^4 + (3z - 1)^4\right) dz$

$= \frac{1}{24 \cdot 15}\left[(3z + 1)^5 - 2(3z)^5 + (3z - 1)^5\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{24 \cdot 15}(2^5 - 2) = 1/12.$

Ejemplo 2: integrar e^{x+y+z} sobre $B = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Se tiene, de nuevo por Fubini,

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z}\, dxdydz \;=\; \int_0^1 \int_0^1 \left[e^{x+y+z}\right]_0^1 dydz \\
=\;& \int_0^1 \int_0^1 \left(e^{1+y+z} - e^{y+z}\right) dydz \;=\; \int_0^1 \left[e^{1+y+z} - e^{y+z}\right]_0^1 dz \\
=\;& \int_0^1 \left(e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^{z}\right) dz \;=\; \left[e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^{z}\right]_0^1 \\
=\;& e^3 - 2e^2 + e - e^2 + 2e - 1 \;=\; e^3 - 3e^2 + 3e - 1 \;=\; (e-1)^3.
\end{aligned}
$$

Regiones de integración más generales (I)

Como hicimos con integrales dobles, vamos a ver ahora como calcular integrales triples en regiones más generales que los paralelepípedos rectangulares. Más precisamente, vamos a definir lo que llamaremos regiones elementales en $\mathbb{R}^3$. Estas son regiones que se obtienen restringiendo sucesivamente cada una de las tres variables.

Llamamos **regiones de Tipo 1** a aquellas que pueden escribirse:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D, \ \ \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

$$\iiint_{W_1} f(x, y, z) dV = \iint_D \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \, dA(x, y)$$

Llamamos **regiones de Tipo 2** a aquellas que pueden escribirse:

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (y, z) \in D, \ \ \chi_1(y, z) \leq x \leq \chi_2(y, z)\}$$

$$\iiint_{W_2} f(x, y, z) dV = \iint_D \int_{\chi_1(y,z)}^{\chi_2(y,z)} f(x, y, z) dx \, dA(y, z)$$

Llamamos **regiones de Tipo 3** a aquellas que pueden escribirse:

$$W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, z) \in D, \ \ \gamma_1(x, z) \leq y \leq \gamma_2(x, z)\}$$

$$\iiint_{W_3} f(x, y, z) dV = \iint_D \int_{\gamma_1(x,z)}^{\gamma_2(x,z)} f(x, y, z) dy \, dA(x, z)$$

Regiones de integración más generales (II)

Del mismo modo que para integrales dobles, si D es ahora una región elemental del tipo visto anteriormente en el plano, por ejemplo

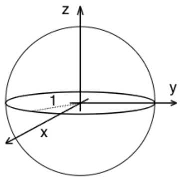
$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)\},$$

para ciertas funciones continuas Φ_1, Φ_2, se tiene

$$\iiint_W f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) dzdydx.$$

En particular, si ponemos $f = 1$ en todo W, entonces esta integral es el volumen de W.

Un ejemplo: consideremos la bola unidad en $\mathbb{R}^3$, es decir, $W \equiv x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.



Aquí la región D es el disco $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Así que podríamos definir W como la región

$$\{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1,$$
$$-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2},$$
$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

Ejemplo 1: Calcular el volumen de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Se trata de calcular $\iiint_W 1\, dxdydz$ con W la región vista anteriormente, es decir

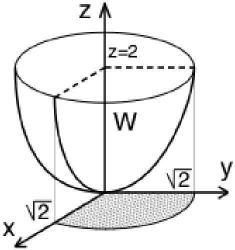
$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\, dzdydx = 2 \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dydx.$$

Para calcular la primitiva de $\sqrt{1-x^2-y^2}$, nótese que para todo $a \in \mathbb{R}$ tenemos $\int_{-a}^{a} (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{a^2\pi}{2}$, pues esta integral es el área del semidisco de radio a centrado en $(0,0)$.

Sustituyendo $a^2 = 1 - x^2$, obtenemos que la integral $\iiint_W 1\, dxdydz$ es igual a $2\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)\pi}{2} dx = \pi \int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx = \pi[x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}$.

Ejemplo 2: sea W la región acotada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=2$ y la superficie $z=x^2+y^2$, y contenida en el primer octante $(x,y,z\geq 0)$. Calcular $\iiint_W x\,dxdydz$; dibujar la región W.

Representemos primero la región.



Se tiene así

$W=\{(x,y,z): 0\leq x\leq \sqrt{2},$

$0\leq y\leq \sqrt{2-x^2},\ x^2+y^2\leq z\leq 2\}.$

Por tanto,

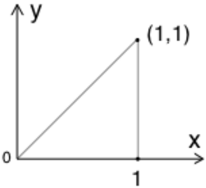
$$\iiint_W x\,dxdydz=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2} x\,dzdydx$$

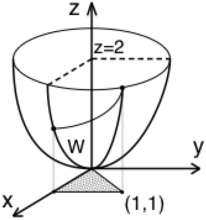
$$=\int_0^{\sqrt{2}} x\int_0^{\sqrt{2-x^2}}(2-x^2-y^2)dydx=\int_0^{\sqrt{2}} x\Big[(2-x^2)y-\frac{y^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{2-x^2}}dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2x}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{2}{3}\Big[-\frac{1}{5}(2-x^2)^{5/2}\Big]_0^{\sqrt{2}}=\frac{2^{7/2}}{15}.$$

Ejemplo 3: Calcular $\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dzdydx$, y representar la región de integración.

Representemos primero la región.





La región es
$W = \{(x, y, z) :$
$0 \le x \le 1,$
$0 \le y \le x,$
$x^2 + y^2 \le z \le 2\}.$

Se tiene

$$\iiint_W 1dV = \int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dzdydx = \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2)dydx$$

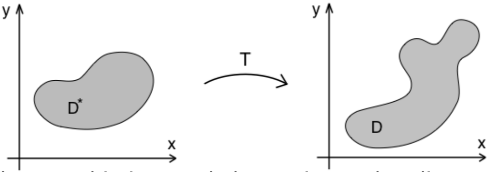
$$= \int_0^1 [2y - x^2y - \frac{y^3}{3}]_0^x dx = \int_0^1 (2x - x^3 - \frac{x^3}{3})dx$$

$$= [x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{12}]_0^1 = 2/3.$$

3.2. La fórmula del cambio de variables

Hasta ahora hemos podido calcular integrales tomadas sobre regiones elementales. A continuación veremos como se puede calcular integrales más generales, usando cambios de variables.

Para describir esto, sea D^* un abierto en $\mathbb{R}^2$, sea una función $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ diferenciable, y escribamos $D = T(D^*)$. $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.



Se dice que T es *biyectiva* si $\forall (x,y) \in D$, $\exists! (u,v) \in D^*$ tal que $T(u,v) = (x,y)$.

Nuestro objetivo es, dada una integral, aplicar una transformación T de este tipo para transformar la región de integración en una más simple.

Dicho de otro modo, dadas dos regiones elementales D, D^* en $\mathbb{R}^2$ tales que $T(D^*) = D$ para una función diferenciable T, y dada $f : D \to \mathbb{R}$, queremos expresar $\displaystyle\iint_D f(x,y)dA$ como una integral de $f \circ T$ sobre D^*: $\displaystyle\iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\, d\bar{A}$.

Para ello, deberemos tener en cuenta las siguientes cuestiones:

1. Cómo se describen f y el dominio D^* en términos de la nuevas variables.
2. Cómo afecta el cambio a los elementos infinitesimales de área $dA \to d\overline{A}$.
3. El cambio estará justificado si bien la nueva expresión $f(x(u,v), y(u,v))$, bien el nuevo dominio D^* o ambos son más manejables que los originales.

Para entender mejor el segundo apartado, supongamos que T es una transformación afín: $T(u,v) = (a_0, b_0) + B \cdot (u,v)$ con B una matriz 2×2 de determinante no nulo. Si D fuera por ejemplo el cuadrado unidad, entonces $D^* = T^{-1}(D)$ sería un paralelogramo de área $|det\ B|^{-1}$. Si tomamos ahora $f \equiv 1$ entonces la identidad

$$\text{área}(D^*) \text{ por } d\overline{A} = \iint_{D^*} 1\, d\overline{A} = \iint_{D} 1\, d\, A = \text{ área}(D) \text{ por } dA = 1,$$

nos dice que $|det\ B|^{-1} d\overline{A} = dA$. Equivalentemente, $d\overline{A} = |det\ B|\, dA$

En el caso general, recordamos que, de la definición de diferenciabilidad se deduce que si T en una función diferenciable, entonces se puede aproximar localmente en cada punto $(u_0, v_0) \in D^*$ por la transformación afín (Polinomio de Taylor de orden 1) definida por

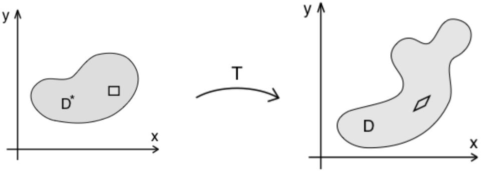
$$T(u_0, v_0) + DT(u_0, v_0) \cdot (u - u_0, v - v_0) = (a_0, b_0) + DT(u_0, v_0) \cdot (u, v),$$

donde $DT(u_0, v_0)$ es la matriz jacobiana dada por $DT(u_0, v_0) = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u} & \frac{\partial T_1}{\partial v} \\ \frac{\partial T_2}{\partial u} & \frac{\partial T_2}{\partial v} \end{pmatrix} \right|_{(u_0, v_0)}$.

Por lo tanto, localmente, a la hora de tomar sumas superiores e inferiores de Riemann, el elemento infinitesimal $d\overline{A}$ en (u_0, v_0) cambia por un factor dado por $|\det(DT)((u_0, v_0))|$, es decir

$$d\overline{A} = |det(DT)|dA.$$

De forma gráfica:



$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \Rightarrow$ el *determinante jacobiano* $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \det(DT(u, v))$ es la función que nos permite tomar en cuenta cómo cambia el elemento de área, es decir cómo es su distorsión.

3.2. La fórmula del cambio de variables en $\mathbb{R}^2$

Definición (Determinante jacobiano)

Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ una transformación de clase $\mathcal{C}^1$ dada por $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. El **jacobiano** de T, denotado por $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es el determinante de DT, a saber $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Con esto ya podemos enunciar el resultado principal acerca de cambios de variables.

Teorema (Cambio de variables para una integral doble)

Sean D, D^* dos regiones elementales en $\mathbb{R}^2$, y sea $T : D^* \to D$ una aplicación biyectiva de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces, para cualquier función integrable $f : D \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv,$$

donde $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ es el valor absoluto del determinante jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

3.2. La fórmula del cambio de variables en $\mathbb{R}^3$

Para integrales triples podemos también querer hacer un cambio de variables. La teoría es similar a la de integrales dobles, pero ahora hay que tomar en cuenta cómo cambia el elemento infinitesimal de *volumen* dV bajo el cambio. Como en el caso de integrales dobles, este cambio de dV se toma en cuenta con un determinante jacobiano, que aquí será un determinante de una matriz 3×3. Obtenemos ahora el teorema siguiente.

Teorema (Cambio de variables para una integral triple)

Sean D, D^* dos regiones elementales en $\mathbb{R}^3$, y sea $T : D^* \to D$ una aplicación biyectiva de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces, para cualquier función integrable $f : D \to \mathbb{R}$, tenemos que $\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$ es igual a

$$\iiint_{D^*} f\left(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dudvdw,$$

donde $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ es el **determinante jacobiano** $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$ y $\left|\cdot\right|$ su valor absoluto.

Vamos a estudiar algunos de los cambios de variables más habituales.

1) Cambio a **coordenadas polares**: dado por el sistema $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$.

El jacobiano es $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$.

Ejemplo: Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x, y \geq 0 \text{ y } a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ con $a < b$. Halla $\iint_D e^{x^2+y^2} dA$.

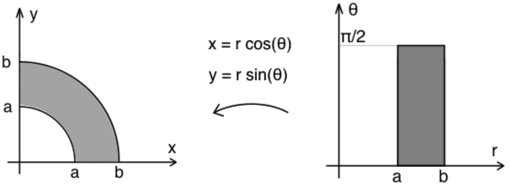
Solución: La región D está dada en polares como $r \in [a,b]$ y $\theta \in [0, \pi/2]$.

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dA = \int_0^{\pi/2} \int_a^b \underbrace{e^{r^2}}_{f(T(r,\theta))} \underbrace{r}_{|JT|} \, dr\, d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) \left(\int_a^b e^{r^2} r\, dr\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} [e^{r^2}]_a^b = \frac{\pi}{4}(e^{b^2} - e^{a^2})$$

Ejemplo: evaluar $\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy$, donde

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, a^2\leq x^2+y^2\leq b^2\}$, con $0<a<b$.



Esta segunda región es de un tipo que sabemos tratar facilmente.

Tenemos

$$\iint_D \log(x^2+y^2)dydx = \int_a^b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(r^2)\, r\, \mathrm{d}\theta dr = \frac{\pi}{2}\int_a^b r\log(r^2)dr = \pi\int_a^b r\log(r)dr.$$

Usando integración por partes, vemos que esta integral es

$$\pi\left(\left[\frac{r^2}{2}\log(r)\right]_a^b - \int_a^b \frac{r}{2}dr\right) = \pi\left[\frac{r^2}{2}\log(r) - \frac{r^2}{4}\right]_a^b$$

$$= \pi\left(\frac{b^2}{2}\log(b) - \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2}\log(a) + \frac{a^2}{4}\right).$$

3.3. Coordenadas cilíndricas y esféricas

2) Cambio a **coordenadas cilíndricas:** sistema $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{array} \right.$.

El jacobiano esta vez es el determinante de una matriz 3×3:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = r.$$

3) Cambio a **coordenadas esféricas:** dado por $\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{array} \right.$.

De nuevo el jacobiano $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}$ es el determinante de una matriz 3×3:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}\,\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\phi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\cos\phi(\rho^2\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\cos^2\theta + \rho^2\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}^2\,\theta) + \rho\,\mathrm{sen}\,\phi(\rho\,\mathrm{sen}^2\,\phi\cos^2\theta + \rho\,\mathrm{sen}^2\,\phi\,\mathrm{sen}^2\,\theta)$$
$$= \rho^2\cos^2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi + \rho^2\,\mathrm{sen}^3\,\phi \qquad = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

Ejemplo: Resolver $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} dV$ donde $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1/2 \leq z \leq 1,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ usando:

1. el cambio a *cilíndricas*.
2. el cambio a *esféricas*.

Cilíndricas: donde $1/2 \leq z \leq 1,\ \theta \in [0, 2\pi]$ y $0 \leq r \leq \sqrt{1-z^2}$

$$
\begin{aligned}
&\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\, dV \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \underbrace{(r^2+z^2)^{-1/2}}_{f(T(r,\theta,z))} \underbrace{r}_{|JT|}\, dr\, dz\, d\theta \\
&\quad = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_{1/2}^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (r^2+z^2)^{-1/2} r\, dr\, dz\right) \\
&\quad = 2\pi \int_{1/2}^{1} \left[\frac{1}{2} \frac{(r^2+z^2)^{1/2}}{1/2}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} dz = 2\pi \int_{1/2}^{1} (1-z) dz = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Esféricas: donde $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi/3]$ y $\dfrac{1}{2\cos\phi} \leq \rho \leq 1$

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\frac{1}{2\cos\phi}}^{1} \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{f(T(\rho,\phi,\theta))} \underbrace{(\rho^2 \operatorname{sen}\phi)}_{|JT|}\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^{\pi/3} \int_{\frac{1}{2\cos\phi}}^{1} \rho \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\right)$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8\cos^2\phi}\right) \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2}[-\cos\phi]_0^{\pi/3} + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{-\cos\phi}\right]_0^{\pi/3}\right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{1/2} + 1\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$