Cálculo II 27 de mayo de 2020

1º del Grado en Matemáticas

1º de Doble titulación en Ingeniería Informática-Matemáticas

Curso 2019-2020

Convocatoria ordinaria (modelo A)

Apellidos y Nombre ______________________________ D.N.I. ____________

Debes resolver este modelo si tu DNI termina en un número par.

La realización de la convocatoria ordinaria es individual pero se permite el uso de apuntes o libros durante la misma.

Debes justificar todas tus respuestas.

1. (3 puntos) Considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

   b) Determina la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$.

2. (3 puntos)

   a) Calcula el valor de la siguiente integral

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_{2y}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx \right) dy \, .$$

   b) Calcular el volumen del sólido S dentro del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ y sobre la hoja superior, es decir $z > 0$, del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.

3. (2 puntos) Calcula el valor de la integral de línea

$$\int_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})dx + (7x + \sqrt{y^4+1})dy$$

   donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ orientada en sentido antihorario.

4. (2 puntos)

   a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene : $f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$. Demuestra que

$$\int_S f \;\, dS = 0,$$

   donde S es la esfera unidad.

   b) Sea Ω la región en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$, es decir con $x > 0$ e $y > 0$, limitada por las curvas: $y = -x + 2$, $y = -x + 8$, $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 2$. Demuestra que para $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua

$$\int_\Omega g(x^2 - y^2) \, dx \, dy = \log 2 \int_1^2 g(u) \, du \, .$$