Inicial primer apellido

Cálculo II

1º del Grado en Matemáticas
1º de Doble titulación en Ingeniería Informática-Matemáticas
Curso 2020-2021

Grupo mañana ☐
Grupo tarde ☐

9 de abril de 2021

Parcial 2

Apellidos y Nombre ____________________ D.N.I. __________

Justifique todas las respuestas.

---

1. (3 pts) Sea k un entero positivo y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^k \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. ¿Para qué valores de k la función f es continua en todo $\mathbb{R}^2$?
2. Halle $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en $(0,0)$.
3. Determine los valores de k para que la función f sea diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

Solución:

La función va a ser continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, f es continua en (x_0, y_0) porque es igual al cociente de funciones continuas en una vecindad de (x_0, y_0) (como es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

En $(0,0)$ tenemos que ver la continuidad estudiando el límite de f cuando $(x,y) \to (0,0)$ y viendo si es igual a $f(0,0) = 0$. Para ello, observamos que

$$|xy|^k |\cos x| \leq (x^2+y^2)^k,$$

así que

$$\left| \frac{(xy)^k \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^k}{\sqrt{x^2+y^2}} = (x^2+y^2)^{k-\frac{1}{2}} \to 0$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$ ya que $k \geq 1$.

Para el segundo apartado, tenemos que usar la definición de derivada parcial como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

e igual para la otra.

Para la diferenciabilidad en el $(0,0)$ tenemos que recurrir otra vez al límite que aparece en la definición; como las parciales en $(0,0)$ son ambas nulas, queda comprobar si

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{(xy)^k \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^k \cos x}{x^2+y^2}.$$

Para $k=1$, si nos aproximamos a $(0,0)$ por puntos de la forma $x=y$, nos queda un límite de la forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

con lo que para $k=1$, f no es diferenciable ahí.

Para $k\geq 2$, ese límite existe y va a ser cero. Para ver esto, observamos que

$$|xy|^k|\cos x| \leq (x^2+y^2)^k,$$

así que

$$\left|\frac{(xy)^k\cos x}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)^k}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{k-1} \to 0,$$

cuando $(x,y)\to(0,0)$, ya que $k-1\geq 1$.

---

2. (1.5 pts) Se considera la función $f(x,y) = x^2+y^4+e^{xy}$. Calcule la derivada direccional de la función en el punto $(1,0)$ en la dirección de máximo crecimiento de la función (nota: la derivada direccional se considera respecto a direcciones v con $\|v\|=1$).

Solución: La dirección de máximo crecimiento está dada por el gradiente de f, así que empezamos calculándolo:

$$\nabla f(x,y) = (2x+ye^{xy}, 4y^3+xe^{xy}).$$

En el punto $(1,0)$, $\nabla f(1,0) = (2,1)$; la dirección unitaria de máximo crecimiento es, entonces, $\vec{v} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. La derivada direccional en esa dirección es

$$D_{\vec{v}}f(1,0) = \langle \nabla f(1,0), \vec{v}\rangle = \left\langle (2,1), (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\right\rangle = 5/\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

También podíamos habernos dado cuenta inmediatamente de que esa dereivada direccional tenía que coincidir con la norma del gradiente en ese punto por lo visto en clase.

---

3. (2 pts) Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,0) = -1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,0) = 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,0) = 2.$$

Sea $h(u,v) = f(\mathrm{sen} u, \cos v, uv)$. Use la regla de la cadena para calcular $\frac{\partial h}{\partial u}(0,0)$ y $\frac{\partial h}{\partial v}(0,0)$.

Solución: Denotamos $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dada como $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (\mathrm{sen}\, u, \cos u, uv)$, con lo que $h = (f\circ g)(u,v)$. Observamos que $g(0,0) = (0,1,0)$, con lo que, según la regla de la cadena,

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1,0)\frac{\partial x}{\partial u}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,0)\frac{\partial y}{\partial u}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,0)\frac{\partial z}{\partial u}(0,0).$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos u, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\operatorname{sen} u, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = v,$$

que en $(u,v) = (0,0)$ valen

$$\frac{\partial x}{\partial u}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u}(0,0) = 0.$$

Sustituyendo, queda

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = (-1)\cdot 1 + 3\cdot 0 + 2\cdot 0 = (-1).$$

De forma similar,

$$\frac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 0.$$

Si se quiere usar la regla de la cadena en forma matricial, solo hay que notar que

$$Dh(0,0) = Df(0,1,0)\cdot Dg(0,0),$$

y que

$$Df(0,1,0) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad Dg(u,v) = \begin{bmatrix} \cos u & 0 \\ -\operatorname{sen} u & 0 \\ v & u \end{bmatrix}, \quad Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por la regla de la cadena,

$$Dh(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1,0), \qquad \frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = -1, \quad \frac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 0$$

---

4. (2 pts) Se considera la función $f(x,y) = e^{ax+y^2} + b\operatorname{sen}(x^2+y^2)$. Determine los valores de a y b para que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y el polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen tome el valor 6 en el punto $(1,2)$.

Solución: Empezamos calculando las parciales (todo existe porque f es suma y composición de funciones con un número infinito de derivadas parciales continuas).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ae^{ax+y^2} + b\cdot 2x\cos(x^2+y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{ax+y^2} + b\cdot 2y\cos(x^2+y^2).$$

Sustituyendo en $(0,0)$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

con lo que necesariamente $a = 0$ y $f(x,y) = e^{y^2} + b\operatorname{sen}(x^2+y^2)$.

Para calcular el polinomio de Taylor de segundo orden, continuamos tomando derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = b(2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\operatorname{sen}(x^2+y^2)), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2ye^{y^2} + b(-4xy\operatorname{sen}(x^2+y^2)),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{y^2} + 4y^2e^{y^2} + b(2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\operatorname{sen}(x^2+y^2)), \tag{1}$$

así que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2 + 2b,$$

y el polinomio de Taylor de segundo orden de f en $(0,0)$ es

$$P_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(2bx^2 + (2+2b)y^2) = 1 + bx^2 + (1+b)y^2.$$

Para que $P(1,2) = 6$, necesitamos que

$$6 = 1 + b + (1+b)4, \quad 5b = 1, \quad b = 1/5.$$

---

5. (1.5 pts) Se considera la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = x^3 - y + z^3$ y la superficie de nivel de F correspondiente al valor $c = 0$ que denotamos por S_0. Si P_α es el plano tangente a S_0 por el punto $(\alpha, 0, -\alpha)$, halle la ecuación de una recta comprendida en todos los P_α para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución: El vector gradiente de F es $(3x^2, -1, 3z^2)$. Para un α fijo, $\nabla F(\alpha, 0, -\alpha) = (3\alpha^2, -1, 3\alpha^2)$, y el plano tangente a la superficie S_0 por el punto $(\alpha, 0, -\alpha)$ es el de ecuación

$$\langle \nabla F(\alpha, 0, -\alpha), (x-\alpha, y, z+\alpha) \rangle = 0,$$

esto es,

$$\Big\langle (3\alpha^2, -1, 3\alpha^2), (x-\alpha, y, z+\alpha) \Big\rangle = 0.$$

Desarrollando queda

$$3\alpha^2(x-\alpha) - y + 3\alpha^2(z+\alpha) = 3\alpha^2 x - y + 3\alpha^2 z = 0,$$

esto es, la ecuación de P_α es

$$3\alpha^2(x+z) - y = 0,$$

y es obvio que la recta $x + z = 0, y = 0$ se halla en todos esos planos. También se puede tomar α_0, α_1 en $\mathbb{R}$, y ver los puntos comunes de intersección de P_{α_0}, y de P_{α_1}.
