Conjuntos y números 11/11

(11.) En $\mathbb{R}$ tenemos la relación $x R y \iff x-y \in \mathbb{Q}$.

- Dem. que R es relación de equiv.

(R) $x R x \iff x-x=0 \in \mathbb{Q}$, es verdad $\forall x \in \mathbb{R}$.

(S) $x R y \iff \underset{-(y-x)}{x-y} \in \mathbb{Q}$. Si multiplico por -1: $y-x \in \mathbb{Q}$, luego $y R x$.

(T) $\left.\begin{array}{l} x R y \\ y R z \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} x-y \in \mathbb{Q} \\ y-z \in \mathbb{Q} \end{array}$. $x-z = (\underbrace{x-y}_{\in \mathbb{Q}}) + (\underbrace{y-z}_{\in \mathbb{Q}}) \in \mathbb{Q}$.

- ¿$|[x]|$? Vamos a demostrar $[x] = \{x+\mathbb{Q}\} (=\{x+q \mid q \in \mathbb{Q}\})$

Si $x-y \in \mathbb{Q}$, puedo escribir $y = x - \underbrace{(x-y)}_{\in \mathbb{Q}} \in x+\mathbb{Q}$

Si $y = x+q$ con $q \in \mathbb{Q}$, $x-(x+q) = -q \in \mathbb{Q}$.

Luego $|[x]| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

- ¿ Es $\mathbb{R}/_R$ es numerable? (En el futuro $\mathbb{R}/_R$ "=" $\mathbb{R}/_\mathbb{Q}$)

Supongamos que $\mathbb{R}/_R$ es numerable. Todo $x \in \mathbb{R}$ tiene que estar en algún $[y]$, es decir $x = y+q$ con $q \in \mathbb{Q}$. Escogiendo un representante de cada clase (A.E.), podríamos escribir todo número real como un par (y, q), donde ambos conj. son numerables. Luego $\mathbb{R}$ sería numerable, contradicción. ∎

(12) Demostrar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable.

Supongamos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es numerable. $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ sería unión de dos conj. numerables, luego sería también numerable. Contradicción ∎

(10) Utilizar C.S.B.

(14) Hallar cardinales:

e) $I = (0,1)$, $|I \times I|$. Afirmo que $|I \times I| = |I|$

Claramente $\begin{array}{l} I \to I \times I \\ x \mapsto (x,x) \end{array}$ es inyectiva, $|I| \leq |I \times I|$.

¿ Cómo construir $I \times I \to I$ inyectiva? Dados $\begin{array}{l} a = 0'a_1 a_2 a_3 \ldots \\ b = 0'b_1 b_2 b_3 \ldots \end{array}$

Puedo enviar $(a,b) \longmapsto 0'a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots$

Problema: la expansión decimal no es única. $0'5 = 0'4\bar{9}$. Con lo cual, vamos a evitar las expansiones que terminan en $\bar{9}$. Haciendo esto, es fácil ver que la función es inyectiva.

Luego $|I \times I| \leq |I| \overset{C.S.B}{\Rightarrow} |I| = |I \times I| = c$

f) $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = ?$

Sea $f: \mathbb{R} \to I$ una biyección. Entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to I \times I$ es una biy.
$(x, y) \mapsto (f(x), f(y))$

$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |I \times I| \overset{e)}{=} |I| = c$

g) $|\mathbb{N} \times \mathbb{R}| = ?$ Afirmo que $|\mathbb{N} \times \mathbb{R}| = c$, por un lado $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{R}|$ porque

$\mathbb{R} \to \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ es inyectiva
$x \mapsto (1, x)$

Por otro lado $|\mathbb{N} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$ porque $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
$(n, r) \mapsto (n, r)$

$c = |\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = c \Rightarrow |\mathbb{N} \times \mathbb{R}| = c.$

$2^{\aleph_0} = c$

h) $|P(\mathbb{N})| = ?$ Afirmo que $|P(\mathbb{N})| = c$.

Como $\mathbb{N}$ es numerable, sea $a_1, a_2, a_3, \dots$ una enumeración de $\mathbb{N}$.

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Defino $r = 0'b_1 b_2 b_3 \dots$, donde $b_i := \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in A \\ 0 & \text{si } a_i \notin A \end{cases}$.

Por ejemplo, $a_i = i$ $\quad 1, 2, 3, 4, \dots$ $\quad$ pos 54

$A = \{1, 3, 54\} \longmapsto r = 0'1010\dots01000\dots$

Esto es una función $P(\mathbb{N}) \to I$ inyectiva por el Ppio. de extensionalidad.

Luego $|P(\mathbb{N})| \leq |I| = c$. Además, por Tma de Cantor, $|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$,

Luego $\aleph_0 < |P(\mathbb{N})| \leq c$. Por la Hipótesis del continuo, concluyo que $|P(\mathbb{N})| = c$.

i) Sea $\mathbb{O}$ el conjunto de raíces (en $\mathbb{R}$) de todos los polinomios con coef racionales. ("Conjunto de números algebraicos").

$$\mathbb{O} = \bigcup_{p(x) \in \mathbb{Q}[x]} \{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\}$$

Dividimos la demostración en dos partes: ① $|\mathbb{Q}[x]| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$
② T.F.A.

1: Claramente $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[x]$ es inyectiva
$q \mapsto q$

Ahora, dado $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ le asociamos $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$.

El conjunto S de sucesiones finitas es $S = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}^n$ luego S es numerable.

Luego existe una biy. $S \xrightarrow{F} \mathbb{Q}$. Es fácil ver que

$$\mathbb{Q}[x] \to S \xrightarrow{F} \mathbb{Q}$$ es iny. (si dos polinomios tienen de imagen la misma suc., tienen los mismos coef.)

Luego $|\mathbb{Q}[x]| = |\mathbb{Q}|$. Ahora, cada $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tiene un número finito de raíces (T.F. Álg.). Luego $\mathcal{O}$ es una unión numerable de conj. finitos. Concluimos $\mathcal{O}$ es numerable. ■

m) $A = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = 2\}$. $\{m, n\}_{m<n} \longmapsto 2^m 3^n$. (Ej.)

(8) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(m,n) \, R \, (m', n') \Leftrightarrow \max\{m,n\} = \max\{m', n'\}$

b) $[(2,2)] = \{(2,2); (2,1); (1,2)\}$

c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R \longrightarrow \mathbb{N}$ a una biyección:

$[(m,n)] \longmapsto \max\{m,n\}$

- Vemos que está bien definida. Sean $(a,b), (a',b') \in [(a,b)]$. Por definición, $(a,b) \, R \, (a',b')$; luego $\max\{a,b\} = \max\{a',b'\}$.
- Inyectividad: sean $[(a,b)], [(m,n)] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$. Si $\max\{(a,b)\} = \max\{(m,n)\}$, entonces $(a,b) \, R (m,n) \Rightarrow [(a,b)] = [(m,n)]$.
- Sobreyectividad: sea $n \in \mathbb{N}$, la clase $[(1,n)]$ verifica que $[(1,n)] \mapsto n$.

d) ¿Tienen todas las clases de equiv. el mismo cardinal? $\to$ NO.

$|[(m,n)]|_{m \geq n} = 2m - 1$

(6) En $\mathbb{Z}$: $m R_2 n \Leftrightarrow 4 \mid (9m + 3n)$

- Dem. que es una rel. de equiv.

(R) $m R_2 m \Leftrightarrow 4 \mid (9m + 3m) = 12m$ ✓

(S) $m R_2 n \Leftrightarrow 4 \mid (9m + 3n)$. Escribimos $9m + 3n = (3m + 9n) + 6m - 6m$

$$\Rightarrow 3m + 9n = \underbrace{(9m + 3n)}_{\vdots 4} - \underbrace{6(m-n)}_{?}$$

Bastaría ver que $m-n \equiv 0$ (2). Supongamos $m \not\equiv n$ (2), es decir $m = n+2k+1$ para $k \in \mathbb{Z}$.

$$4 \mid (9(n+2k+1)+3n) = 12n+18k+9 = 3(4n+6k+3) = \underbrace{3}_{\text{impar}}(\underbrace{2(2n+3k+1)+1}_{\text{impar}})$$

Contradicción, luego $m-n \equiv 0$ (2), es decir $2 \mid m-n$ y $(3m+9n) \vdots 4$ y nRm.

(T) Ej. Fácil

- Cociente: hemos visto que $mRn \Rightarrow m \equiv n$ (2), pero podemos afinar más:

$m = n+2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$4 \mid (9(n+2k)+3n) = 12n+18k = 6(3k+2n), \text{ es decir}$$

$2 \mid 3k+2n$, que ocurre s.s.i. $k \vdots 2$. Es decir $k = 2k'$, $k' \in \mathbb{Z}$.

Luego $m-n = 4k'$, es decir $m \equiv n \mod (4)$

Concluimos $m R_2 n \Leftrightarrow m \equiv n \mod 4$ ($\Leftarrow$ es fácil)

$[m] = [m+4n \mid n \in \mathbb{Z}]$, es decir $\mathbb{Z}/R_2 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ■