Ejercicio 5 (entrega el 16.05.23) **APELLIDOS, Nombre**: TARRASA MARTÍN, Alberto

(Para la respuesta usa solo la cara de una página)

1.- El potencial debido a una carga Q en $(0,0,0)$ viene dado por $\Phi(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ y el campo eléctrico correspondiente es $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.

1. Sea $\mathcal{S}_R$ la esfera de radio R centrada en el origen. Encuentra el flujo eléctrico del campo $\mathbf{E}$ hacia el exterior de la esfera $\mathcal{S}_R$ y comprueba que solo depende de la constante Q pero no del radio R.
2. Calcula la divergencia de $\mathbf{E}$ y explica por qué no se puede usar el Teorema de Gauss en este caso.

SOL.:

1. Para empezar, calculamos la expresión del campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = -\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)$$

A continuación, parametrizamos la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ con coordenadas esféricas:

$$\mathcal{S}_R = \gamma(\theta,\varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta), \text{ con } (\theta,\varphi) \in [0,\pi]\times[0,2\pi] = D \text{ y } R > 0$$

Por último, calculamos T_θ y T_φ:

$$T_\theta = \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, -R\sin\theta), \quad T_\varphi = \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} = (-R\sin\theta\sin\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

De forma que $T_\theta \times T_\varphi = (-R^2\sin^2\theta\cos\varphi, R^2\sin^2\theta\sin\varphi, R^2\sin\theta\cos\theta)$.
Así, el flujo eléctrico del campo eléctrico $\mathbf{E}$ hacia el exterior de la esfera $\mathcal{S}_R$ es:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot dA = \iint_D \mathbf{E}(\gamma(\theta,\varphi))\cdot(T_\theta\times T_\varphi)\ d\theta d\varphi =$$

$$= \iint_D \frac{Q}{4\pi R^2}(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\cdot R^2(-\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\theta)\ d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi \sin\theta\ d\theta\right)\ d\varphi = \frac{Q}{4\pi}[-\cos\theta]_0^\pi[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{Q}{4\pi}\cdot 2\cdot 2\pi = Q$$

2.Calculamos la divergencia de $\mathbf{E}$ como $\nabla\cdot\mathbf{E}$:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{-2x^2+y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}\right) = 0$$

No se puede aplicar el Teorema de Gauss ya que se requiere que el campo vectorial sea diferenciable. En este caso, el campo no es continuo en el punto $(0,0,0)$, ya que se anulan los denominadores, por lo que no puede ser diferenciable.