Hoja 3

Derivadas parciales y funciones diferenciables

1.- Halle todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

(*a*) $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(xy^2)} - \log^2 x$, definida para los (x,y) tales que $x > 0$.

(*b*) $f(x,y,z) = x^2 y e^z - y^2 \operatorname{sen}(xz)$, definida en $\mathbb{R}^3$.

(*c*) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, definida en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$.

(*d*) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x-y}{1+xy}$, definida para los (x,y) tales que $x\,y \neq -1$.

2.- Determine los puntos en los que existen las derivadas parciales de primer orden de la función $f(x,y) = |x|y^2$ y calcule dichas derivadas.

3.- Demuestre que la función definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy = 0 \\ 0 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen pero no es continua en ese punto.

4.- Considere la función definida en los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} \qquad \text{si } x \neq 0, \qquad\qquad f(0,y) = 0.$$

(*a*) Demuestre que existen las derivadas parciales en el origen y calcular su valor.

(*b*) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(*c*) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

(*d*) Halle la derivada direccional $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ para cada dirección unitaria $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

5.- Demuestre que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

es continua en todo el plano y tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero no es diferenciable en el origen.

6.- Demuestre que la función definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ que no son continuas en el punto $(0,0)$ y que, sin embargo, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

7.- Demuestre que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

es diferenciable en cualquier punto del plano $\mathbb{R}^2$.

8.- Estudie la diferenciabilidad en el origen de la función

(a) $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$;

(b) $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^2}$.

9.- Halle la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y)=(y,x,xy,y^2-x^2)$, $a=(1,2)$.

(b) $f(x,y)=(\operatorname{sen}(x+y),\cos(x-y))$, $a=(\pi,-\pi/4)$.

(c) $f(x,y,z)=z^2\,e^x\,\cos y$, $a=(0,\pi/2,-1)$.

(d) $f(x)=(e^x\,\operatorname{sen}x,e^x\,\cos x,x^2)$, $a=\pi/6$.

(e) $f(x,y,z,t)=(\sqrt{y^2+z^2},\sqrt{x^2+z^2},x^2+y^2+z^2-9\,t^2)$, $a=\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},3\Big)$.

10.- Sean $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ las funciones escalares dadas por $g(x)=\|x\|^2$ y $f(x)=\langle a,x\rangle$, siendo $a\in\mathbb{R}^n$ un vector fijo.

(a) Halle las derivadas direccionales $D_{\mathbf{v}}f(x)$ y $D_{\mathbf{v}}g(x)$ para cada $x,\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{v}\|=\mathbf{1}$.

(b) Tomando $n=2$, halle todos las direcciones unitarias $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ tales que $D_{\mathbf{v}}g(3,4)=10$.

(c) Tomando $n=3$, halle el lugar geométrico formado por todas las direcciones unitarias $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ tales que $D_{\mathbf{v}}f(1,2,3)=0$ cuando $a=(1,1,1)$.

11.- Sea $f(r,t)=t^n\,e^{-\frac{r^2}{4t}}$, definida en los $r\geq 0$ y $t>0$. Halle un valor de la constante n tal que $f(r,t)$ satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}\Big)\qquad (r,t>0)\,.$$

12.- Halle el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(a) $f(x,y)=e^{-y}\,\cos x$.

(b) $f(x,y,z)=\log(x^2+2\,y^2+3\,z^2)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0,)\}$.

(c) $f(x,y)=xy\,\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$.

13.- (a) Estudie la existencia de las derivadas parciales de $f(x,y)=\sqrt{3x^2+5y^2}$ en el origen.

(b) Compruebe que f es diferenciable en todos los demás puntos del plano.

(c) Calcule el vector $\nabla f(2,1)$.

14.- Halle los puntos (x,y) y las direcciones $\mathbf{v}=(u,v)$ unitarias en los cuales la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$ de la función $f(x,y)=3\,x^2+y^2$ tiene un máximo, sabiendo que (x,y) está en la circunferencia $x^2+y^2=1$.

15.- Halle los valores de a,b,c tales que la derivada direccional respecto de un vector unitario de la función

$$f(x,y,z)=a\,x\,y^2+b\,y\,z+c\,x^3z^2$$

en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo de 64 en la dirección paralela al eje $0Z$ (eje positivo de las Z's).

16.- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable en el punto $a\in\mathbb{R}^2$. Supongamos que $D_{\mathbf{u}}f(a)=1/\sqrt{13}$ y $D_{\mathbf{v}}f(a)=\sqrt{2}$, siendo $\mathbf{u}=(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}})$ y $\mathbf{v}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

(a) Calcule el gradiente $\nabla f(a)$.

(b) Halle las dos direcciones unitarias $\mathbf{w}$ para las cuales $D_{\mathbf{w}}f(a)=0$.

17.- Halle la derivada direccional de $f(x,y)=x^2-3\,xy$ a lo largo de la parábola $y=x^2-x+2$ en el punto $(1,2)$. *Nota: se sobreentiende que la derivada direccional es siempre con respecto a un vector unitario.*