Hoja 9

Superficies parametrizadas. Integrales sobre superficies. Teoremas de Stokes y Gauss.

1.- Hallar la ecuación del plano tangente a las siguientes superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u,v) = (4\,u, 3\,u^2+v, v^2+5)$ en $(0,1,6)$.

(b) $\Phi(u,v) = (u^2, e^{v^2}, v^2+1)$ en $(0,1,1)$.

(c) $\Phi(u,\theta) = (\cosh u\,\cos\theta, \cosh u\,\operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} u)$ en $(0,1,0)$.

(d) $\Phi(u,v) = (u^2+1, v^2+1, u^2+v^2)$ en $\Phi(1,1)$.

2.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u,v) = (\cos u\,\operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u\,\operatorname{sen} v, \cos v)$ con $0 < u < 2\,\pi$, $0 < v < \pi$.

(b) $\Phi(r,\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, r)$ con $0 < r < 5$, $0 < \theta < \pi$.

3.- Dada la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$ considerándola como:

(a) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta,\varphi) = (2\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi, 2\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi, 2\,\cos\varphi)$ con $0 < \theta < 2\,\pi$, $0 < \varphi < \pi$.

(b) Superficie de nivel 4 de la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

(c) Gráfica de la función $g(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ con $(x,y) \in D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\big\}$.

4.- (a) Hallar un parametrización para el hiperboloide $x^2+y^2-z^2 = 25$

(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0,y_0,0)$, donde $x_0^2+y_0^2 = 25$.

(d) Demostrar que las rectas $(x_0,y_0,0)+t(-y_0,x_0,5)$ y $(x_0,y_0,0)+t(y_0,-x_0,5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en (c).

5.- Hallar el área del helicoide definido por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ donde $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$ y D es la región donde $0 \le r \le 1$ y $0 \le \alpha \le 2\pi$.

6.- Un toro T se puede representar como el conjunto $\Phi(D)$ con $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ dada por las funciones coordenadas $x = (R+\cos\theta)\cos\phi$, $y = (R+\cos\theta)\operatorname{sen}\phi$, $z = \operatorname{sen}\theta$, y $D = \{(\theta,\phi) \;:\; 0 < \theta < 2\pi\,, 0 < \phi < 2\pi\,\}$. Calcular el área de T.

7.- Demuéstrese que la superficie $z = 1/\sqrt{x^2+y^2}$, donde $1 \le z < \infty$, "se puede llenar pero no se puede pintar" y explíquese el significado de esta frase.

8.- Calcular la integral de superficie $I = \displaystyle\int_S (x+z)\,dS$, donde S es la porción del cilindro $y^2+z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$, perteneciente al primer octante, de dos maneras:

(a) considerando S como la gráfica de una función de las variables x e y y expresando I como una integral doble;

(b) parametrizando la superficie de otra manera (por ejemplo, usando como parámetros la coordenada x y el ángulo θ de las coordenadas polares en el plano yz.

9.- Hallar la integral de superficie $\displaystyle\int_S F\cdot dS$, siendo $F(x,y,z) = (x^3, y^3, -3z)$ y donde S denota la esfera unidad $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ orientada hacia el exterior.

10.- Hallar la integral del campo

$$F(x,y,z) = (x + \cos y - \log(1+z^2), y + \operatorname{sen}\sqrt{1+x^2+z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad con la orientación inducida por normal exterior.

11.- Sea S la superficie del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcular la integral

$$\int_S F \cdot dS\,.$$

12.- Transformar la integral de superficie

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS\,,$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

a) $F(x,y,z) = (y^2, x\,y, x\,z)$, donde S es el hemisferio $x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* 0.

b) $F(x,y,z) = (y, z, x)$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* $-\pi$.

c) $F(x,y,z) = (y - z, y\,z, -x\,z)$, donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x, y, z \leq 2$ no situadas en el plano xy y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* -4.

13.- Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.

a) Siendo C la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ y el plano $x+y+z = 0$,

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi\,R^2\sqrt{3}\,.$$

b) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2+y^2 = 2\,y$ y el plano $y = z$,

$$\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0\,, \qquad \int_C y^2\,dx + x\,y\,dy + x\,z\,dz = 0\,.$$

c) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2+y^2 = a^2$ y el plano $x/a + z/b = 1$, con $a, b > 0$,

$$\int_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = 2\pi\,a(a+b)\,.$$

14.- Sea S la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y del semicono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con $x^2+y^2 \leq 1/2$. Calcular $\int_S F \cdot dS$ (con la orientación inducida por la normal exterior) donde

$$F(x,y,z) = (x\,z + e^{y \operatorname{sen} z}, 2\,y\,z + \cos(xz), -z^2 + e^x \cos y).$$

15.- Hallar la integral de superficie

$$\int_S F \cdot dS \qquad \text{siendo} \qquad F(x,y,z) = (x^3, y^3, -a\,b\,z),$$

cuando S es el elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,$$

orientado hacia el exterior.