TEMA 5: Integrales sobre superficies

Fernando Soria (UAM)

Curso 2022-23

Estructura del Tema 5:

- 5.1. Superficies parametrizadas. Plano tangente a una superficie parametrizada.
- 5.2. Área de una superficie parametrizada.
- 5.3. Integrales de funciones escalares sobre superficies parametrizadas.
- 5.4. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.
- 5.5. Teorema de Stokes, Teorema de Gauss.

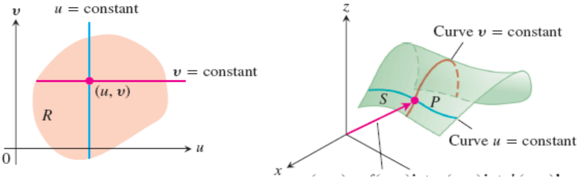
5.1. Superficies parametrizadas

Las curvas que hemos visto son funciones de un sólo parámetro t.
Ahora vamos a generalizar el estudio a superficies bidimensionales en $\mathbb{R}^3$, que dependen de *dos* parámetros.

Definición (Superficie parametrizada)

Una **superficie parametrizada** es una aplicación continua
$\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que puede escribirse como

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) .$$



Superficies parametrizadas

- Se suele identificar una superficie en $\mathbb{R}^3$ con su imagen $S = \Phi(D) \subset \mathbb{R}^3$, que es la idea "intuitiva" que se tiene de una "superficie".
- La región D será a menudo un conjunto compacto, o bien de la forma $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u_1 \leq u \leq u_2,\ v_1 \leq v \leq v_2\}$ donde los u_i, v_i pueden ser infinitos.
- Diremos que la **superficie** es **diferenciable** si la aplicación $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable.

- **Planos en $\mathbb{R}^3$:** plano que pasa por el punto $P \in \mathbb{R}^3$ y tiene vectores directores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(u, v) = P + u\vec{a} + v\vec{b}$$

- **Gráfica de una función en $\mathbb{R}^2$:** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La grafica de f es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido como

$$\text{Gráf}(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ y } z = f(x, y) \}$$

que puede parametrizarse como

$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(x, y) = (u, v, f(u, v)),$$

con $(u, v) \in D$.

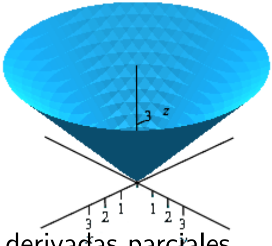
Superficies parametrizadas - ejemplos

- **Superficie cilíndrica alrededor del eje** OZ **y de radio** R**:**
  Es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ definido como
  $$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\},$$
  que puede parametrizarse como
  $$\Phi : [0, 2\pi] \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\theta, z) = (R\, cos(\theta),\ R \text{ sen}(\theta),\ z)$$

- **Superficie esférica de centro** $(0,0,0)$ **y radio** R**:** Este es el conjunto de puntos a distancia R del origen, esto es,
  $$\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \,\}$$
  que se puede parametrizar como $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$,
  $$\Phi(\theta, \phi) = (R \text{ sen}(\phi) cos(\theta),\ R \text{ sen}(\phi) sen(\theta),\ R \text{ cos}(\phi))$$

Ejemplo: sea $\Phi(u,v) = \big(u\cos(v),\ u\,\mathrm{sen}(v),\ u\big)$, $u \geq 0$. La superficie correspondiente es la gráfica de la función $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$.

Observamos que en $(0,0,0)$ esta superficie tiene un punto de tipo diferente de los demás puntos. Para precisar esto debemos definir la noción de *vectores tangentes* a una superficie.



Para definir los vectores tangentes, usamos las derivadas parciales.

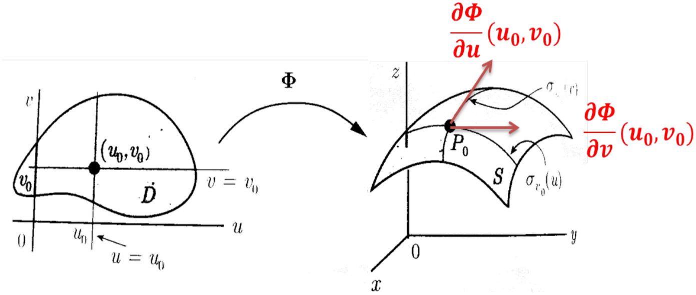
Definición (Vectores tangentes a una superficie)

Sea una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
Los **vectores tangentes** a S en un punto $\phi(u,v)$ se denotan por T_u, T_v, y se definen por las fórmulas $T_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$.

Por lo tanto, dada una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, **los vectores tangentes** a S en un punto $\Phi(u_0, v_0)$ son

$$T_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\Big|_{(u_0,v_0)}$$

$$T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)\Big|_{(u_0,v_0)}$$



Superficies parametrizadas

Recordamos: el producto vectorial de $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, denotado por $\vec{v} \times \vec{w}$, se define por la fórmula $\vec{v} \times \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$.

Con estas nociones, podemos ahora dar una definición que permite distinguir si una superficie tiene o no tiene puntos "problemáticos" como en el ejemplo anterior.

Definición (Superficie suave)

Decimos que una superficie S dada por $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es **suave (o regular)** en un punto $\phi(u, v)$ si $T_u \times T_v \neq \vec{0}$.

Si una superficie S es suave en $\phi(u, v)$, entonces el vector $T_u \times T_v$ define un vector ortogonal a S en el punto $\phi(u, v)$. Más precisamente, podemos usar $T_u \times T_v$ para definir un *plano tangente* a la superficie en ese punto, tomando $T_u \times T_v$ como vector normal a este plano.

Superficies parametrizadas

Recogemos las últimas nociones en una definición.

Definición (Plano tangente y normal unitaria)

Sea S una superficie $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, y sea $(u, v) \in D$ tal que la superficie es regular en $\phi(u, v)$.

- El **plano tangente** a la superficie en el punto $\phi(u, v)$ es el plano con vector normal (ortogonal) $T_u \times T_v$ y que contiene $\phi(u, v)$.
- El **vector normal unitario** a la superficie en $\phi(u, v)$ es el vector $\frac{T_u \times T_v}{\| T_u \times T_v \|}$.

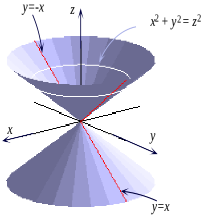
Si la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es regular en un punto $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, con $(u_0, v_0) \in D$, la **fórmula del plano tangente a S en el punto** $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$ es

$$\langle T_u \times T_v|_{(u_0,v_0)}, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0\rangle$$

Más adelante veremos que usando el vector $T_u \times T_v$ se puede calcular el área de la superficie.

Ejemplo: Dada la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \geq 0\}$

1. Da un par de parametrizaciones de S.
2. Comprueba que S no es regular en $(0, 0, 0)$ pero sí en $(0, 1, 1)$.
3. Hallar la ecuación del plano tangente a S en $(0, 1, 1)$.



1) Una superficie se puede parametrizar por diferentes aplicaciones. En este caso podemos usar tanto una parametrización que involucre las coordenadas polares, Φ_1, como otra que utilice la gráfica de una función, Φ_2:

$$\Phi_1(\theta, z) = (z\cos\theta, z\,\mathrm{sen}\,\theta, z) \text{ con } \theta \in [0, 2\pi], z \geq 0$$

$$\Phi_2(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \text{ con } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Superficies parametrizadas - ejemplo

2) Para estudiar la regularidad de S empezamos hallando los vectores tangentes. Para ello, elegimos una de las dos parametrizaciones anteriores, por ejemplo $\Phi_1(\theta, z) = (z\cos\theta, z\,\text{sen}\,\theta, z)$:

$$T_\theta = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = (-z\,\text{sen}\,\theta, z\cos\theta, 0)$$
$$T_z = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$$

$$\vec{N}(\theta, z) = T_\theta \times T_z = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -z\,\text{sen}\,\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 1 \end{pmatrix} = (z\cos\theta, z\,\text{sen}\,\theta, -z)$$

Ahora veamos qué valores de θ y z corresponden al punto $(0,0,0)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} z\cos\theta & = 0 \\ z\,\text{sen}\,\theta & = 0 \\ z & = 0 \end{array}\right. \Rightarrow z = 0 \text{ y cualquier } \theta \in [0, 2\pi]$$

Como $\vec{N}(\theta, 0) = (z\cos\theta, z\,\text{sen}\,\theta, -z)|_{(\theta,0)} = (0,0,0)$, S no es regular en $(0,0,0)$.

Superficies parametrizadas - ejemplo

Ahora veamos qué valores de θ y z corresponden al punto $(0,1,1)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} z\cos\theta & = 0 \\ z\,\mathrm{sen}\,\theta & = 1 \\ z & = 1 \end{array} \right. \Rightarrow z = 1 \text{ y } \theta = \pi/2$$

Como $\vec{N}(\pi/2, 1) = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)|_{(\pi/2,1)} = (0,1,-1) \neq \vec{0}$, S sí es regular en $(0,1,1)$.

3) En este caso, podemos usar tres métodos para calcular el plano tangente a S en el punto pedido.

Primer método: Usando la gráfica de una función $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en $(0,1)$

$$z = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1)\,.$$

$$z = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}|_{(0,1)}(x-0) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}|_{(0,1)}(y-1) \Rightarrow \boxed{z = y}$$

Superficies parametrizadas - ejemplo

Segundo método: Viendo S como una superficie de nivel de la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ en $(0, 1, 1)$:

$$\nabla F(0, 1, 1) \cdot (x, y - 1, z - 1) = 0,$$

esto es,

$$(0, 2, -2) \cdot (x, y - 1, z - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{z = y}$$

Tercer método: Viendo S como una superficie parametrizada en $(0, 1, 1)$

$$\vec{N}(\pi/2, 0) \cdot (x, y - 1, z - 1) = 0,$$

que, sustituyendo, queda

$$(0, 1, -1) \cdot (x, y - 1, z - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{z = y}$$

5.2. Áreas y volúmenes

En esta sección aplicaremos las nociones vistas anteriormente para calcular varios volúmenes y áreas.

1) Áreas: distinguiremos entre áreas en $\mathbb{R}^2$ y áreas en $\mathbb{R}^3$.

En el caso de $\mathbb{R}^2$, se trata de calcular doble integrales de tipo $\iint_D 1\, dxdy$. Podremos evaluar estas integrales usando técnicas que ya hemos visto en el capítulo anterior.

En el caso $\mathbb{R}^3$, se trata de calcular áreas de superficies en el espacio. Para ello, tomaremos una parametrización $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de la superficie S que queremos estudiar. Entonces, el área de la superficie es igual a la integral siguiente:

$$A(S) = \int\int_D \|T_u \times T_v\| dudv.$$

Aquí, como vimos anteriormente, T_u, T_v son los vectores tangentes a la superficie en el punto correspondiente a los parámetros u, v. La norma $\|T_u \times T_v\|$ es por tanto el área del paralelogramo definido por T_u, T_v. Integrando esta área para $(u, v) \in D$ se obtiene esta fórmula para $A(S)$.

Ejemplo: consideremos la región $D = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$, sea $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r)$, y sea S la superficie correspondiente (es un cono). Hallar el área de S.

Tenemos $T_r = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$, $T_\theta = (-r\sin(\theta), r\cos(\theta), 0)$.

Tenemos pues

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \big(- r\cos(\theta), -r\sin(\theta), r\big).$$

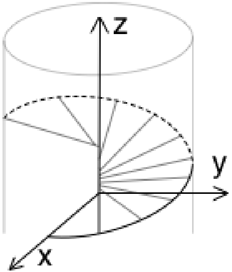
Por lo tanto $\| T_r \times T_\theta \| = r\sqrt{2}$. Deducimos que

$$A(S) = \iint_D \| T_r \times T_\theta \| dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r d\theta dr = 2^{\frac{3}{2}}\pi \int_0^1 r dr$$

$$= 2^{\frac{3}{2}}\pi \big[r^2/2\big]_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

Cálculo de áreas y volúmenes

Ejemplo: consideremos de nuevo la región $D = \{(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]\}$. Esta vez sea S la superficie dada por la parametrización $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta), \theta)$. Superficies de este tipo se llaman *helicoides*.



Calculamos los vectores tangentes:

$T_r = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$,

$T_\theta = (-r\sin(\theta), r\cos(\theta), 1)$. Luego

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin(\theta), -\cos(\theta), r).$$

Tenemos pues $\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{1 + r^2}$. Por lo tanto,

$$A(S) = \iint_D \|T_r \times T_\theta\| dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + r^2} d\theta dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} dr.$$

Para calcular esta integral podemos usar el cambio $r = \tan t$.

Cálculo de áreas y volúmenes

Vamos a ver ahora que en varios casos se puede establecer una fórmula general que permite calcular todas las integrales concretas en estos casos.

Gráficas:

1) Superficie parametrizada de la forma $(x, y, z) = \big(u, v, f(u, v)\big)$.

Tenemos $T_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$, $T_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$.

Por lo tanto $T_u \times T_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = (-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1)$.

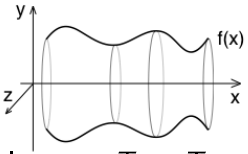
En este caso tenemos pues la fórmula

$$A(S) = \int\!\!\int_D \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial v}\Big)^2}\, dudv.$$

Superficie de revolución

2) (alrededor del eje de x), dada por

$$(x,y,z) = \big(u, f(u)\cos(v), f(u)\sin(v)\big),\ f \geq 0,\quad u \in [a_0,a_1],\ v \in [0,2\pi].$$



Tenemos

$$T_u = \big(1, f'(u)\cos(v), f'(u)\sin(v)\big),$$
$$T_v = \big(0, -f(u)\sin(v), f(u)\cos(v)\big).$$

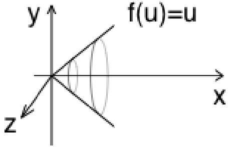
Por lo tanto $T_u \times T_v$ es

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & f'(u)\cos(v) & f'(u)\sin(v) \\ 0 & -f(u)\sin(v) & f(u)\cos(v) \end{vmatrix} = \big(f'(u)f(u), -f(u)\cos(v), -f(u)\sin(v)\big).$$

Tenemos pues $\|T_u \times T_v\| = |f(u)|\sqrt{f'(u)^2+1}$, de donde sigue la fórmula

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_{a_0}^{a_1} f(u)\sqrt{f'(u)^2+1}\,dudv = \int_{a_0}^{a_1} 2\pi\, f(u)\sqrt{f'(u)^2+1}\,du.$$

Ejemplo: hallar el área A_1 del cono de revolución definido por la recta $y = x$, para $x \in [0, 1]$, y también el área A_2 de la región tronco-cónica $x \in [1, 2]$.



Tenemos

$$A_1 = 2\pi \int_0^1 u\sqrt{2}du = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \pi\sqrt{2},$$
$$A_2 = 2\pi \int_1^2 u\sqrt{2}du = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2$$
$$= 3\pi\sqrt{2}.$$

En cuanto a volúmenes, calcularemos el volumen de regiones limitadas por gráficas de superficies, o de intersecciones de estas.

Integrales de funciones escalares sobre superficies

En esta sección extendemos los métodos que hemos visto para integrales sobre curvas a integrales sobre superficies.

Definición (Integral de una función escalar sobre una superficie)

Sea S una superficie en el espacio parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua con $U \supset S$. Definimos la *integral de f sobre S* por la fórmula siguiente:

$$\iint_S f(x,y,z)dA = \iint_D f(\Phi(u,v)) \|T_u \times T_v\| dudv.$$

Como vimos con integrales sobre curvas, la integral en que aparece sólo la norma del vector director es invariante bajo reparametrizaciones. Para integrales sobre superficies ocurre algo similar.

Teorema

Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ y sean Φ_1, Φ_2 parametrizaciones de S cualesquiera. Entonces para cualquier función continua $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $U \supset S$ tenemos

$$\iint_{\Phi_1} fdA = \iint_{\Phi_2} fdA.$$

Flujo de un campo vectorial

Definición (Integral de un campo vectorial sobre una superficie)

Sea S una superficie en el espacio parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo con $U \supset S$. Definimos la **integral de** F sobre S por la fórmula siguiente:

$$\iint_S F \cdot dA = \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot (T_u \times T_v) dudv.$$

Ejemplo: supongamos que la superficie en cuestión es la gráfica de una función $g(x, y)$, con (x, y) en una regón D. Entonces tenemos $T_x \times T_y = (-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1)$ y deducimos que $\iint_\Phi F \cdot dA = \iint_D \left(-F_1 \frac{\partial g}{\partial x} - F_2 \frac{\partial g}{\partial y} + F_3 \right) dxdy.$

Nota: Obsérvese que $\iint_S F \cdot dA = \iint_S (F \cdot \vec{\eta})\, dA$, donde $\vec{\eta}$ denota el vector normal unitario $\frac{T_u \times T_v}{\| T_u \times T_v \|}$ (i.e., la integral vectorial de F coincide con la integral escalar de $F \cdot \vec{\eta}$). En particular, si F fluye de forma tangencial a S entonces la integral es 0.

Ejemplos:

1. Calcular $\iint_S z\,dA$, donde S representa la semiesfera unidad superior, es decir
$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ z > 0\}.$$
Parametrizaremos S de dos maneras
   1.1 En coordenadas esféricas: $\Phi_1(\theta,\varphi) = (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)$, en cuyo caso se tiene $dA = \operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\varphi$, con $(\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,\pi/2]$.
$$\iint_S z\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \pi.$$
   1.2 Como la gráfica que es: $\Phi_2(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$, con $u^2 + v^2 \leq 1$. En este caso $dA = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}du\,dv$ y por tanto
$$\iint_S z\,dA = \iint_{u^2+v^2\leq 1} \frac{\sqrt{1-u^2-v^2}}{\sqrt{1-u^2-v^2}}du\,dv = \int_{u^2+v^2\leq 1} 1du\,dv = \pi.$$
2. Dada $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcular $\iint_S \nabla T \cdot\, dA$, donde S representa la esfera unidad parametrizada hacia el exterior. Como el vector normal a la esfera unidad es $\vec{\eta}(x,y,z) = (x,y,z)$, se tiene $\nabla T \cdot \vec{\eta} = (2x, 2y, 2z)\cdot(x,y,z) = 2$. Luego
$$\iint_S \nabla T \cdot\, dA = \iint_S 2\,dA = 2\ (\text{área de la esfera}) = 8\pi.$$

Superficies orientables

Definición

Se dice que S es una superficie orientable si posee dos caras, cada una de ellas determinada por un vector normal contínuo. Si $\vec{\eta}_1$ y $\vec{\eta}_2$ son dichos vectores (más concretamente, $\vec{\eta}_j = \vec{\eta}_j(u, v), j = 1, 2$), entonces necesariamente $\vec{\eta}_1 = -\vec{\eta}_2$

La cinta de Möbius

Ejemplo de superficie no orientable:

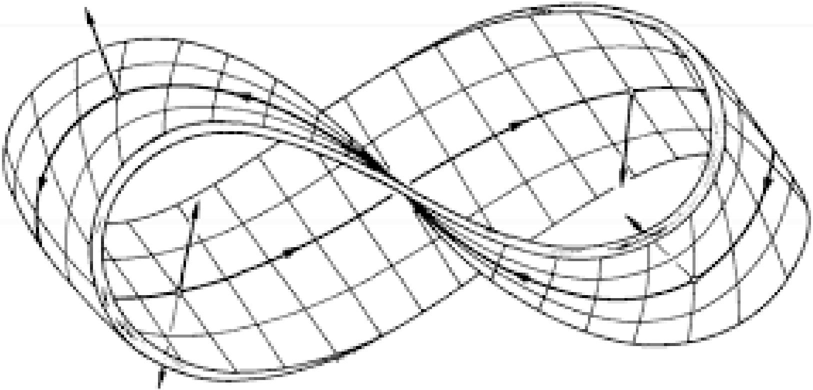
Decimos que dos parametrizaciones Φ_1, Φ_2 de una misma superficie orientable tienen la misma orientación si el vector $T_u \times T_v$ para Φ_1 sigue la misma dirección que el vector $T_{u'} \times T_{v'}$ para Φ_2, en todo punto.

Teorema

Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ y sean Φ_1, Φ_2 dos parametrizaciones de S. Sea F un campo vectorial continuo definido sobre $U \supset S$. Entonces $\iint_{\Phi_1} F \cdot dA = \pm \iint_{\Phi_2} F \cdot dA$, con signo "$+$" si Φ_1, Φ_2 tienen la misma orientación, y "$-$" en caso contrario.

La cinta de Möbius ...

... no posee un campo vectorial unitario contínuo.



Ver también https://matematicas.uam.es/~fernando.soria/

Teorema de Stokes

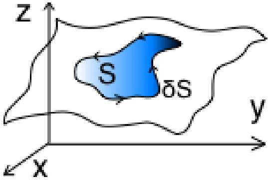
Supongamos que S es una superficie orientable en $\mathbb{R}^3$ y $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización. Podemos parametrizar a su vez el borde o frontera 1-dimensional de S, denotada por ∂S, por la restricción de Φ a la frontera de D. Con estas premisas obtenemos el siguiente teorema de Stokes (o Kelvin-Stokes) que, de nuevo, es reminiscente del TFC:

Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientable en $\mathbb{R}^3$ definida por una parametrización $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$, donde D es una región en la que se cumple el Teorema de Green. Sea ∂S la frontera orientada de S y sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $U \supset S$. Entonces

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \int_{\partial S} F \cdot ds.$$

Si S no tiene frontera, por ejemplo si es una esfera, entonces la integral vale 0.

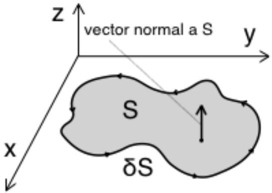


Interpretación geométrica:

Nótese que, habiendo fijado una curva cerrada σ en $\mathbb{R}^3$, podemos tener distintas posibilidades para la elección de la superficie S con frontera σ. Esto puede facilitar su cálculo.

Observación: la orientación que debemos tomar para ∂S es la que induce la regla de la mano derecha tomando en cuenta el vector normal a S. Dicho en términos intuitivos, si estamos sobre la superficie con la dirección hacia arriba marcada por este vector, entonces la orientación deseada para ∂S es la que la recorre en sentido antihorario.

Veamos qué nos da la aplicación del teorema de Stokes en el caso en que $S \subset \mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Aquí $\Phi(u, v) = (u, v, 0)$, $\forall (u, v) \in D$.



Sea $F = (P, Q, R)$ el campo vectorial en cuestión. Tenemos entonces

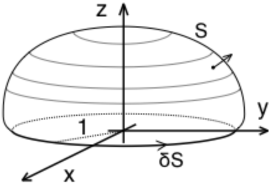
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Vemos que $T_u \times T_v = e_3$, luego $\displaystyle\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

Por otro lado, tenemos $\displaystyle\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial S} Pdx + Qdy$. En este caso pues, el teorema de Stokes se reduce al teorema de Green.

Ejemplo: sea S la superficie siguiente, con borde $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ y la orientación indicada en el dibujo:



Hallar $\displaystyle\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA$, con $F = (y, -x, e^{xz})$.

Nótese que no es necesario parametrizar S, basta aplicar el teorema de Stokes sobre ∂S.

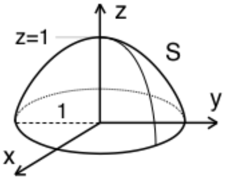
Parametrizando el borde como $\sigma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, tenemos así

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\sin(\theta), -\cos(\theta), e^0) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} 1 d\theta = -2\pi.$$

Ejemplo: sea S la parte del paraboloide de ecuación $z = 1 - x^2 - y^2$ que tiene $z \geq 0$, y sea $F(x, y, z) = (y, z, x)$. Transformar la integral de superficie $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA$, con la normal exterior, en una integral de línea, y calcularla.

Usamos de nuevo el Teorema de Stokes.
La superficie S tiene como borde
la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en $z = 0$.



Tras la aplicación del teorema, parametrizando de nuevo el borde como $\sigma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, tenemos

$$\iint_S \nabla \times F dA = \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\sin(\theta), 0, \cos(\theta)) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin(\theta)^2 d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = -\pi.$$

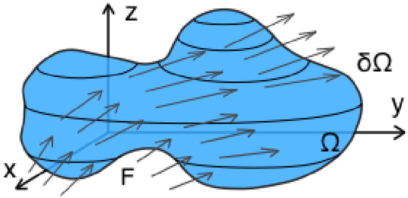
Teorema de Gauss de la divergencia

El teorema de la divergencia es otro ejemplo importante de resultado que relaciona la integral de cierta derivada (en este caso, la divergencia) de un campo vectorial F sobre una región con la integral de superficie del campo F sobre la frontera de la región.

Teorema de la divergencia

Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ compacto y tal que su frontera topológica $\partial\Omega$ se puede parametrizar por una función diferenciable con la normal exterior. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $U \supset \Omega$. Entonces

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot F)\, dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot dA = \iint_{\partial\Omega} (F \cdot \vec{\eta}) dA.$$



Ejemplo: usar el teorema de la divergencia para calcular el flujo exterior $\iint_{\partial W} F ds$, donde W es la bola cerrada $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ y $F(x, y, z) = (x, 0, 0)$.

En este caso la aplicación del teorema de Gauss es sencilla:

Tenemos $\nabla \cdot F = 1$. Luego $\iint_{\partial W} F \cdot dA = \iiint_{W} \nabla \cdot F dV = \iiint_{W} 1 dV = \frac{4}{3}\pi$.

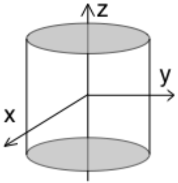
NOTA: El teorema de Green también se puede interpretar como un teorema de la divergencia: si D es un dominio en el plano cuya frontera se recorre en el sentido antihorario por una parametrización $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces $\vec{\eta} = (\sigma_2'(t), -\sigma_1'(t))/\|\sigma'\|$ es un vector normal a la trayectoria. Si $F = (P, Q)$ entonces

$$\int_{\partial D} (F \cdot \vec{\eta}) ds = \int_{\partial D} P\, dy - Q\, dx = \int_{\partial D} (-Q, P)\, ds \overset{Green}{=} \iint_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Por tanto,

$$\int_{\partial D} (F \cdot \vec{\eta}) ds = \iint_{D} (Div\ F)\, dx\, dy$$

Ejemplo: calcular $\displaystyle\iint_S F \cdot dA$ con $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$, donde S es la superficie del cilindro $\Omega : x^2 + y^2 = 1$ acotado por los planos $z = -1$, $z = 1$, e incluyendo los discos $x^2 + y^2 \leq 1$ para $z = -1$, $z = 1$.



Para el cálculo de esta integral usamos el teorema de Gauss.

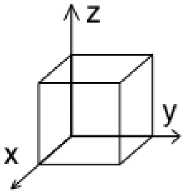
Tenemos $\nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}xy^2 + \frac{\partial}{\partial y}x^2y + \frac{\partial}{\partial z}y$
$= y^2 + x^2$.

Tenemos $\displaystyle\iiint_\Omega (\nabla \cdot F)\, dV = \iiint_\Omega (x^2 + y^2) dV$. Cambiamos a coordenadas cilíndricas: $(x, y, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$, recordando que este cambio tiene jacobiano r.

Con este cambio la integral es

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} r^3 dr d\theta dz = 4\pi \int_0^1 r^3 dr = 4\pi \left[r^4/4\right]_0^1 = \pi.$$

Ejemplo: sea S la superficie del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$, con la orientación dada por la normal exterior, y sea $F = (x^2, y^2, z^2)$. Calcular $\iint_S F \cdot dA$.



Calculamos la integral de dos maneras:

1) Directamente

2) Usando el teorema de Gauss.

1) Calculamos las 6 integrales correspondientes a las caras del cubo.

i) Cara $z = 1$: la integral es $\int_0^1 \int_0^1 (x^2, y^2, 1) \cdot (0, 0, 1) dxdy = 1$.

ii) Cara $z = 0$: la integral es $\int_0^1 \int_0^1 (x^2, y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) dxdy = 0$.

iii) Cara $y = 1$: la integral es $\int_0^1 \int_0^1 (x^2, 1, z^2) \cdot (0, 1, 0) dxdz = 1$.

Seguimos así con las otras 3 caras. Obtenemos $\iint_S F \cdot dA = 3$.

2) Tenemos $\nabla \cdot F = 2(x + y + z)$. El teorema nos dice que $\iint_S F \cdot dA$ es

$$\iiint_V (\nabla \cdot F)\, dV = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) dxdydz = 2 \int_0^1 3x\, dx = 3.$$