12.- Calcular los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^3 + 3xy^2$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}$.
SOL:

1. Calculamos los puntos críticos de f en el interior de Ω.

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2, 6xy) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 0 \\ 6xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0) \in \Omega$$

2. Calculamos los puntos críticos de f en la frontera de Ω.

   2.1. Calculamos los puntos críticos de f cuando $x^2 + y^2 = 1, x \leq y$.
   Definimos $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ y buscamos los puntos (x,y) tales que $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = \lambda 2x \\ 6xy = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

   Obtenemos los puntos:

$$(x,y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \Omega, (x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \notin \Omega, (x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \Omega$$

$$(x,y) = (1,0) \notin \Omega, (x,y) = (-1,0) \in \Omega$$

   2.2. Calculamos los puntos críticos de f cuando $x = y, x^2 + y^2 \leq 1$. Definimos $h(x,y) = x - y$ y buscamos los puntos (x,y) tales que $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = \lambda \\ 6xy = -\lambda \\ x = y \end{cases}$$

   Obtenemos el punto:

$$(x,y) = (0,0)$$

3. Evaluamos f en cada uno de los puntos obtenidos y determinamos los valores máximos y mínimos.