CÁLCULO 2: GRADO EN MATEMÁTICAS Y DOBLE GRADO MAT/INF.
Examen final convocatoria ordinaria **Soluciones:**

1) (2 puntos) Consideramos la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, \text{ si}(x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0, \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad y diferenciabilidad de la función en todo el plano.

La función f es suma, producto y cociente de funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$ salvo quizás en $(0,0)$. Por lo tanto f es continua en $\mathbb{R}^2$ salvo quizás en $(0,0)$. Podemos analizar la continuidad en el $(0,0)$ o pasar directamente a estudiar la diferenciabilidad en dicho punto. Para comprobar la diferenciabilidad en $(0,0)$ aplicamos la definición:

(i) Existencia de las derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(ii) Condición de diferenciabilidad. Veamos si el siguiente límite es igual a 0:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - (0,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}. \qquad (1)$$

Ahora,

$$0 \leq \left| \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| \leq$$
$$\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left| \frac{h_1^3h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| + \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left| \frac{h_1h_2^3}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| \leq$$
$$\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left| \frac{h_1^3h_2}{h_1^2\sqrt{h_1^2}} \right| + \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left| \frac{h_1h_2^3}{h_2^2\sqrt{h_2^2}} \right| = 0.$$

Por lo tanto, el límite (1) existe y vale 0. En consecuencia $f(x,y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto también es continua en $\mathbb{R}^2$.

(b) Determina si f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Calculamos de manera explícita $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en todo $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^3+x^4y-y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si}(x,y)\neq(0,0), \\ \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Al tratarse de suma, producto y cociente de funciones continuas, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$ salvo quizás en $(0,0)$. Veamos:

$$0 \leq \left| \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{4x^2y^3+x^4y-y^5}{x^4+y^4+2x^2y^2} \right| \leq$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left| \frac{4x^2y^3}{x^4+y^4+2x^2y^2} \right| + \left| \frac{x^4y}{x^4+y^4+2x^2y^2} \right| + \left| \frac{-y^5}{x^4+y^4+2x^2y^2} \right| \right) \leq$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left| \frac{4x^2y^3}{2x^2y^2} \right| + \left| \frac{x^4y}{x^4} \right| + \left| \frac{-y^5}{y^4} \right| \right) = 0.$$

Por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - y^4x}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Y argumentando de modo similar a como lo hicimos con la otra derivada parcial se concluye que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ es también continua en $\mathbb{R}^2$. En consecuencia $f(x,y)$ es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

(c) Demuestra que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

Usando los cálculos para las derivadas parciales de f del apartado anterior,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1.$$

Mientras que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1.$$

2) (2 puntos) Sea $f(x,y,z) = xyz$ y sea $P \subset \mathbb{R}^3$ la porción del plano de ecuación $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$ situado en la región $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

(a) Demuestra que P es un conjunto cerrado y acotado.

Consideramos las funciones definidas en $\mathbb{R}^3$:

$$h_1(x,y,z) = x, \quad h_2(x,y,z) = y, \quad h_3(x,y,z) = z, \quad h_4(x,y,z) = \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z.$$

Entonces

$$P = h_1^{-1}([0,\infty)) \cap h_2^{-1}([0,\infty)) \cap h_3^{-1}([0,\infty)) \cap h_4^{-1}(\{1\}),$$

donde los cuatro conjuntos de la derecha son cerrados por ser preimágenes por funciones continuas de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Por lo tanto P es cerrado.

Por otro lado, como los puntos de P están en el plano $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$ y además $x, y, z \geq 0$, necesariamente,

$$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

En consecuencia, para todo $(x,y,z) \in P$ se tiene que

$$\|(x,y,z)\| < \sqrt{14},$$

por lo que P está acotado.

Como P es cerrado y acotado es compacto.

(b) Demuestra que f es constante a lo largo del borde de P.

El borde de P es:

$$\left\{(x,0,z) : \frac{x}{3} + z = 1\right\} \cup \left\{(0,y,z) : \frac{y}{2} + z = 1\right\} \cup \left\{(x,y,0) : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1\right\},$$

por lo que $f(x,y,z) = 0$ en todos los puntos del borde de P.

(c) Justifica por qué f alcanza su máximo y su mínimo sobre P y encuentra ambos valores.

La función f es continua y P es compacto. Por lo tanto f alcanza un mínimo y un máximo absolutos en P. Como $x, y, z \geq 0$ en P, tenemos que $f(x, y, z) \geq 0$ en P. Por lo tanto, su valor mínimo es 0 y se alcanza en todos los puntos del borde de P.

Para calcular el máximo podemos usar el método de los multiplicadores de Lagrange con $g(x, y, z) = \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z$. Calculamos:

$$\nabla f = (yz, xz, xy)\,; \quad \nabla g = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

lo que nos conduce al sistema:

$$\begin{aligned} yz &= \lambda/3 \\ xz &= \lambda/2 \\ xy &= \lambda \\ \tfrac{x}{3} + \tfrac{y}{2} + z &= 1, \end{aligned}$$

con soluciones son $(3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1), (1, 2/3, 1/3)$. Las tres primeras están en el borde de P y ahí la función f toma el valor 0. Por otro lado $f(1, 2/3, 1/3) = 2/9$ que es necesariamente el valor máximo de f sobre P.

También se puede resolver este apartado de otro modo. Como nos restringimos al plano P, tenemos que $z = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$, podemos trabajar con la función de dos variables:

$$h(x, y) = xy\left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) = xy - \frac{x^2 y}{3} - \frac{xy^2}{2},$$

y buscar sus extremos en la región de $\mathbb{R}^2$,

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \geq 0,\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq 1\}.$$

En el borde de Ω, h toma el valor 0. Y para estudiar los extremos el interior de Ω buscamos los puntos críticos de h. Resolvemos:

$$\nabla h = \left(y - \frac{2xy}{3} - \frac{y^2}{2}, x - \frac{x^2}{3} - xy\right) = (0, 0),$$

de donde obtenemos: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(3, 0)$ y $(1, \frac{2}{3})$. Los puntos $(0, 0)$, $(0, 2)$ y $(3, 0)$ están en el borde de Ω donde ya sabemos que h vale 0. Por otro lado, la matriz Hessiana de h es:

$$H(h)(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y & 1 - \frac{2x}{3} - y \\ 1 - \frac{2x}{3} - y & -x \end{pmatrix}.$$

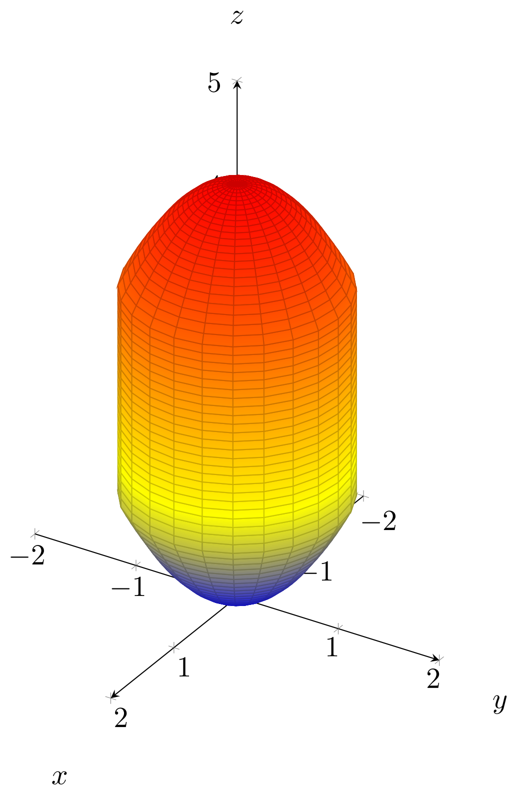
Y tenemos que $H(h)(1, \frac{2}{3})$ es definida negativa, por lo que h alcanza un máximo local en $(1, \frac{2}{3})$. Tenemos que $h(1, \frac{2}{3}) = \frac{2}{9}$, por lo que éste último es un máximo global en Ω.

3) (2 puntos) Dada la integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} (2 + x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx$$

(a) Dibuja, de forma esquemática, el recinto de integración.

El recinto se corresponde con el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cerrado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el también paraboloide invertido $z = 4 - x^2 - y^2$.



(b) Halla el valor de la integral.

Hacemos un cambio a coordenadas cilíndricas, lo que nos deja:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2}(2+x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{4-r^2}(2+r^2)r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{22\pi}{3}.$$

4) (2 puntos) Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por:

$$F(x,y) = (xy\,\cos(xy)+\operatorname{sen}(xy), x^2\cos(xy)).$$

Contesta, de manera razonada, a las siguientes preguntas.

(a) Demuestra que F es un campo conservativo.

El campo $F(x,y) = (xy\,\cos(xy)+\operatorname{sen}(xy), x^2\cos(xy)) = (P(x,y), Q(x,y))$ es conservativo porque es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2y\operatorname{sen}(xy).$$

(b) Calcula una función potencial para F.

Buscamos una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con $\nabla f = F$. Como $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(xy)$, integrando respecto a y tenemos que:

$$f(x,y) = x\operatorname{sen}(xy) + c(x)$$

donde $c(x)$ es una función de x. Y ahora como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy) + c'(x) = P(x,y)$$

tenemos que

$$f(x, y) = x \operatorname{sen}(xy) + k$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

(c) Calcula el valor de la integral de línea

$$\int_C (xy \ \cos(xy) + \operatorname{sen}(xy))\, dx + (x^2 \cos(xy))\, dy$$

donde C es cualquier trayectoria con extremo inicial en $(0, \pi/18)$ y final en $(1, \pi/6)$.

Como el campo F es conservativo para calcular la integral basta encontrar una función potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\nabla f = F$ y aplicar la generalización del Teorema Fundamental del Cálculo que nos dice que para cualquier trayectoria C simple orientada con extremos inicial en $(0, \pi/18)$ y final en $(1, \pi/6)$ se tiene que:

$$\int_C (xy \ \cos(xy) + \operatorname{sen}(xy))\, dx + (x^2 \cos(xy))\, dy = f(1, \pi/6) - f(0, \pi/18) = \operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}.$$

5) (2 puntos) Sea S la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ situada en la región $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{2}\}$.

(a) Halla una parametrización de S en función de las coordenadas esféricas φ y θ especificando su dominio de definición.

El valor de z está acotado inferiormente por $\sqrt{2}$. Por lo tanto:

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\varphi, \theta) & \mapsto & (2 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, 2 \cos \varphi). \end{array}.$$

(b) Supongamos que S está orientada según la normal que apunta hacia el origen y que su borde, C, está orientado a partir de la orientación de S con la regla de la mano derecha. Calcula: $\int_C F \cdot ds$, donde $F(x, y, z) = (-y, x, \arccos(\frac{z}{3}) + e^{z^3} + \ln(1 + z^2))$.

Con la orientación pedida para S, el borde de S se puede parametrizar como:

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \theta & \mapsto & (\sqrt{2} \cos \theta, -\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta, \sqrt{2}). \end{array}.$$

Para calcular la integral pedida podemos hacer elegir dos caminos:

(i) Calcular directamente la integral:

$$\int_C F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\sigma(t))\sigma'(t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta, \sqrt{2} \cos \theta, \arccos \frac{\sqrt{2}}{3} + e^{\sqrt{2}^3} + \ln(3)) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \\ -\sqrt{2} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} dt = -4\pi.$$

(ii) O podemos usar el Teorema de Stokes,

$$\int_C F \cdot ds = \int_S \text{Rot}(F)\, dS,$$

observando que podemos usar S o también otra superficie suave a trozos con el mismo borde, por ejemplo la superficie S^* parametrizada por:

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta) & \mapsto & (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, \sqrt{2}). \end{array}$$

Así:

$$\int_C F \cdot ds = \int_{S^*} \text{Rot}(F)\, dS.$$

Por un lado:

$$\text{Rot}(F) = \nabla \times F = (0, 0, 2).$$

Y por otro:

$$T_\theta \times T_r = (0, 0, -r),$$

tenemos que:

$$\int_{S^*} \text{Rot}(F)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (0, 0, 2) \cdot T_\theta \times T_r \, dr\, d\theta =$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r\, dr\, d\theta = -2\text{Área}(S^*) = -4\pi.$$

Por supuesto, como se indica más arriba, también se puede hacer la integral sobre S con la parametrización dada en el apartado (a):

$$\int_C F \cdot ds = \int_S Rot(F) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} (0, 0, 2) \cdot (T_\theta \times T_\varphi) d\varphi d\theta$$

$$= -8 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi d\varphi d\theta = -4\pi.$$