Tema 1. Los números reales y sus propiedades

1.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/46307180-926f-443c-950f-875b8b53e196/U1_NumerosReales.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/78933d66-d588-433e-b098-ab1ff17767ca/H1_Fundamentos.pdf

1.1. Números naturales e inducción matemática

Suponemos que $P(n)$ es una afirmación que depende de un número n que deseamos demostrar. El **principio de inducción** dice que para ello, basta con:

- Demostrar que $\mathcal{P}(1)$ es verdad.
- Suponer que $\mathcal{P}(n)$ es verdad, **hipótesis de inducción**, y a partir de eso demostrar que $\mathcal{P}(n+1)$ es verdad.

Ejemplo 1. Demostrar por inducción el sumatorio de Gauss: $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Primero, planteamos el caso base, $n=1$, y vemos que $\dfrac{1(1+1)}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.
A continuación desarrollamos el paso inductivo, con nuestra hipótesis de inducción: $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Comprobamos si nuestra hipótesis se cumple para $n+1$:
$1+2+...+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}=\dfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \square$

1.2. Números racionales y su insuficiencia

En el conjunto de números racionales, $\mathbb{Q}$, se definen dos operaciones, suma $+$ y producto $\cdot$, que verifican las siguientes propiedades algebraicas:

1. **Propiedad asociativa de la suma**. Para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$ se cumple $(x+y)+z = x+(y+z)$.
2. **Propiedad conmutativa de la suma**. Para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$ se cumple $x+y = y+x$.
3. **Existencia del elemento neutro de la suma**. Existe un elemento de $\mathbb{Q}$, que denominaremos 0, tal que para todo $x \in \mathbb{Q}$ se cumple $x+0 = x$.
4. **Existencia del elemento opuesto para la suma**. Para cada $x \in Q$ existe otro elemento, al que denominamos $-x$, tal que $x+(-x) = 0$.
5. **Propiedad asociativa del producto**. Para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$, se cumple $(xy)z = x(yz)$.
6. **Propiedad conmutativa del producto**. Para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$, se cumple $xy = yx$.
7. **Existencia del elemento neutro del producto**. Existe un elemento de $\mathbb{Q}$, que denominaremos 1, tal que para todo $x \in \mathbb{Q}$ se cumple $x \cdot 1 = x$.
8. **Propiedad distributiva del producto respecto de la suma**. Para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$ se tiene $x(y+z) = xy+xz$.
9. **Existencia del elemento inverso respecto del producto**. Para cada $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$, existe otro elemento, que denominaremos x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

> Sea $\mathbb{K}$ cualquier conjunto donde estén definidas las operaciones suma $+$ y producto $\cdot$. Se dice que $\mathbb{K}$ es un **cuerpo** si se cumplen los axiomas 1- 9.

1.3. Completitud de los números reales

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado con $A \subset \mathbb{K}, L \in \mathbb{K}$.

Definición. Decimos que L es una cota superior de A, $L \geq A$, si $L \geq a, \forall a \in A$.

Definición. Decimos que L es un máximo de A si $L \in A$ y $L \geq A$.

Definición. Decimos que A está acotado superiormente si tiene una cota superior.

Definición. Decimos que L es un supremo de A si L es la mínima cota superior de A.

> Axioma de completitud de $\mathbb{R}$. Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío, acotado superiormente, tiene un supremo en $\mathbb{R}$. Es decir: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A acotado superiormente $\Rightarrow \exists \sup A$

> Teorema. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado y $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$ y L una cota superior de A. Entonces $L = \sup A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : L - \varepsilon < a \leq L$.

Demostración.
$L = \sup A \Leftrightarrow \forall L' < L$, con $L' \ngeq A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ se tiene que $L - \varepsilon \ngeq A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : L - \varepsilon < a \leq L$. $\square$

1.3.1. Propiedad de Arquímedes

> Propiedad de Arquímedes. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado completo, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente si $\forall x \in \mathbb{K}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$

Suponiendo que $\exists L \in \mathbb{K} : \mathbb{N} \leq L$, debe $\exists n \in \mathbb{N} : L - 1 < n \leq L$, luego $L < n + 1 \in \mathbb{N}$, luego, L no es una cota superior de $\mathbb{N}$.

1.4. La unicidad del cuerpo de los números reales

> Sean $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$ dos cuerpos ordenados completos (se puede entender que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1$ y $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_2$). Entonces, $\exists \varphi : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$, una función biyectiva tal que:
>
> 1. $\varphi(q) = q$ si $q \in \mathbb{Q}$.
> 2. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ y $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \forall x, y \in \mathbb{K}_1$.
> 3. $x < y \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$.