# TEMA 2b: Series de números reales

Fernando Soria

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid (UAM)

**Grado en Matemáticas y doble grado Mat-Ing Inf.**

# Series de números reales.

Con frecuencia aparece el problema de sumar los términos $a_n$ de una sucesión dada de números reales $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \ldots$. (Recordemos, p.e., que $1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \ldots$ nos da el número $e$).
A este procedimiento lo denominaremos *serie (infinita)*.

Para dar sentido a esto, consideramos *sumas parciales*, que no es más que ir sumando término a término los $a_n$'s. Así escribimos

- la suma $s_1 = a_1$;
- la suma $s_2 = a_1 + a_2$;
- la suma $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$;
- y en general $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

Estas sumas parciales forman una sucesión $\{s_n\}_n$ que puede tener un límite o no tenerlo.

# Series convergentes y criterio de Cauchy

## Definición

*Se dice que la serie $\sum_n a_n$ es* **convergente** *si la sucesión formada por las sumas parciales $s_1, s_2, s_3, \dots, s_N, \dots$ es convergente. Si* $\lim s_N = L$, *escribiremos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L.$$

Si la sucesión de sumas parciales $s_1, s_2, s_3, \dots, s_N, \dots$ no converge, entonces se dice que la serie $\sum_n a_n$ es divergente.

**CRITERIO DE CAUCHY**: Recordamos que una sucesión de números reales es convergente si y solo si es de Cauchy. Además observamos que

$$s_p - s_q = \sum_{n=q+1}^{p} a_n, \quad \text{si } p > q.$$

Por lo tanto se tiene el siguiente criterio, llamado de Cauchy,

## Teorema

*La serie $\sum_n a_n$ converge si y solo si dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que*

$$\left| \sum_{n=q+1}^{p} a_n \right| < \epsilon, \quad \text{si } p > q \geq N.$$

Dem.: Para probarlo basta observar que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_n$ es de Cauchy si y solo si dado $\epsilon$, existe $N$ tal que $|s_p - s_q| < \epsilon$, $\forall p, q \geq N$ y que, como ya se ha dicho anteriormente,

$$|s_p - s_q| = \left| \sum_{n=q+1}^{p} a_n \right|, \quad \text{si } p > q.$$

$\square$

# Criterios de convergencia/divergencia

A menudo las sumas parciales no se pueden calcular de forma sencilla, y esto hace necesario recurrir a criterios que nos digan si una serie dada converge o diverge. Una condición NECESARIA para que esto ocurra viene dada por el siguiente

**Teorema**

*Si una serie $\sum_n a_n$ converge, entonces $\lim a_n = 0$.*
*El recíproco no es cierto.*

Dem.: La demostración se sigue de la identidad

$$a_n = s_n - s_{n-1},$$

y, por tanto, si $\exists \lim_{n\to\infty} s_n$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$$

**Observación:**

De lo anterior SOLO se deduce que si en una serie $\sum_n a_n$, la sucesión de términos $\{a_n\}_n$ no tiene límite, o lo tiene pero $\lim a_n \neq 0$, entonces $\sum_n a_n$ diverge.

**El recíproco no es cierto en general**

Si en una serie $\sum_n a_n$ se tiene $\lim a_n = 0$, entonces **hay que usar otros criterios**, porque la serie puede converger o diverger.

**Ejemplo**: la *serie armónica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ cumple $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pero *diverge*.

Para demostrar la divergencia, basta comprobar que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2^n} - s_{2^{n-1}} = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k} = \left( \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) \geq \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Como

$$s_{2^n} = (s_{2^n} - s_{2^{n-1}}) + (s_{2^{n-1}} - s_{2^{n-2}}) + \cdots + (s_2 - s_1) + s_1 \geq \frac{1}{2} n,$$

las sumas parciales divergen a $\infty$.

# Ejemplos

**HOJA 3 de ejercicios, N. 2:**

Demostrar que las series siguientes divergen

$$A \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k+1}{k} \right)^k, \qquad B \equiv \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{k-2}}{3^k}.$$

En ambos casos el término general no tiende a 0:

A: si $a_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$, se tiene $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = e \neq 0$.

B: si $b_k = \frac{k^{k-2}}{3^k} = \frac{1}{9}\left(\frac{k}{3}\right)^{k-2}$, se tiene $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \infty \neq 0$.

# Algunos ejemplos de series

- La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente y su valor es $e$. (Obsérvese el comienzo en $n = 0$ en vez de en $n = 1$; esto es irrelevante para la convergencia).

- La serie geométrica, de razón $r$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n$ es convergente $\iff |r| < 1$.

  De hecho sabemos que $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a\, r^n = a\left(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\right)$, y el $\lim s_n$ existe $\iff |r| < 1$. Además, en ese caso, vale $\dfrac{a}{1 - r}$.

- La serie "p-armónica" $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente $\iff p > 1$

  (lo veremos más adelante)

# Series de términos positivos ($a_n \geq 0$)

Si todos los términos $a_n$ son positivos entonces la sucesión $\{s_n\}_n$ es creciente porque $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. Usando los resultados de convergencia de sucesiones deducimos entonces

**Teorema**

*Si $a_n \geq 0$, $\forall n$, entonces $\sum_n a_n$ converge $\iff$ la sucesión $\{s_n\}_n$ está acotada.*

(Esto se debe a que, como ya sabemos, una sucesión monótona tiene límite si y solo si está acotada)

Como consecuencia de lo anterior se obtiene el siguiente:

**CRITERIO DE COMPARACIÓN**:
Supongamos que tenemos dos series, $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ tal que $b_n \geq a_n \geq 0$, $\forall n$.

- si $\sum_n b_n$ es convergente, entonces $\sum_n a_n$ es convergente;
- si $\sum_n a_n$ es divergente, entonces $\sum_n b_n$ es divergente.

La demostración se sigue de que si denotamos las sumas parciales de cada serie por

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} b_n,$$

entonces las hipótesis nos dan que $s_n \leq S_n$ y, por tanto:

- si $S_n$ está acotada, entonces $s_n$ también lo está;
- si $s_n$ no está acotada, entonces $S_n$ tampoco lo está.

# Ejemplos

- La serie p-armónica $\sum_n \frac{1}{n^p}$ para $p < 1$ no es convergente.

  Para verlo, basta fijarse en que si $p < 1$ entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$. Como las sumas parciales de la serie armónica $\sum_n \frac{1}{n}$ no están acotadas, las de $\sum_n \frac{1}{n^p}$ tampoco lo están, luego es divergente.

- La serie $\sum_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ es convegente.

  Como $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2, \forall n$, se tiene $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n \cdot n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

  La convergencia de $\sum_n \frac{1}{2^n}$ y el criterio de comparación nos dan la convergencia de $\sum_n a_n$ también.

# Términos positivos: Criterio de comparación con límite

## Teorema

*Supongamos que tenemos dos series,* $\sum_n a_n$ *y* $\sum_n b_n$*, tal que* $a_n > 0$*,* $b_n > 0$*.*

1. *Si existe el límite* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = c$*, con* $c \neq 0$ *y* $c \neq \infty$*, entonces* $\sum_n a_n$ *y* $\sum_n b_n$ *son a la vez convergentes, o a la vez divergentes*
2. *si* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ *y* $\sum_n b_n$ *converge, entonces* $\sum_n a_n$ *converge;*
3. *si* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ *y* $\sum_n b_n$ *diverge, entonces* $\sum_n a_n$ *diverge.*

Dem. de 1): Como $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = c$ y $c \neq 0, \infty$, podemos encontrar un índice $N$ de forma que $\dfrac{c}{2} \leq \dfrac{a_n}{b_n} \leq 2c, \quad \forall n \geq N$. Luego, a partir de este índice, se tiene $\frac{c}{2} b_n \leq a_n \leq 2c\, b_n$. Por tanto, $\dfrac{c}{2} \displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq 2c \sum_{n=N}^{\infty} b_n$, lo que nos permite usar el criterio de comparación habitual.

**CRITERIO DEL COCIENTE:** Si $\sum_n a_n$ cumple

1. $a_n > 0$ para todo $n$,
2. y existe el límite $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$,

entonces

- si $L < 1$, la serie $\sum_n a_n$ es convergente;
  dem.: eligiendo $L < r < 1$, se tiene que la serie $\sum_n a_n$ está mayorada por la serie geométrica $a_N \sum_{k=N}^{\infty} r^{k-N}$ a partir de un índice $N$, (porque $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, $\forall n \geq N, \implies a_k \leq a_N r^{k-N}$)
- si $L > 1$ o $L = \infty$, la serie $\sum_n a_n$ es divergente;
  dem.: eligiendo $L > R > 1$, se tiene que la serie $\sum_n a_n$ está minorada por la serie geométrica $a_N \sum_{k=N}^{\infty} R^{k-N}$ a partir de un índice $N$, (porque $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq R$, $\forall n \geq N, \implies a_k \geq a_N R^{k-N}$)
- si $L = 1$ no se puede sacar una conclusión.
  Ejemplos: tanto $a_n = \frac{1}{n}$ como $a_n = \frac{1}{n^2}$ verifican $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$; sin embargo $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge y $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge

**CRITERIO DE LA RAÍZ:** Si $\sum_n a_n$ cumple

1. $a_n > 0$ para todo $n$,
2. y existe el límite $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$,

entonces

- si $L < 1$, la serie $\sum_n a_n$ es convergente;
- si $L > 1$ o $L = \infty$, la serie $\sum_n a_n$ es divergente;
- si $L = 1$ no se puede sacar una conclusión.

La demostración es semejante a la anterior sobre el cociente

**EJEMPLOS (de los criterios del cociente y de la raíz)**

- $\sum \frac{(k!)^2}{(2\,k)!}$ : converge por criterio del cociente.
- $\sum k \, \left(\frac{2}{3}\right)^k$: converge por criterio de la raíz.
- $\sum \frac{n!}{100^n}$: diverge por criterio del cociente (o porque $\frac{n!}{100^n} \not\to 0$, para $n \to \infty$).
- $\sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n$: converge por el criterio de la raíz.

Si además de ser positivos, los términos $a_n$ forman una sucesión decreciente como en el caso anterior, $a_n \geq a_{n+1}$, entonces se tiene la siguiente estimación en los bloques de índices diádicos $2^k < n \leq 2^{k+1}$

- $2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_n \leq 2^k a_{2^k}$, de donde deducimos el siguiente:

## Teorema

*Para términos $a_n$ positivos, que forman una sucesión decreciente,*

*la serie $\sum_n a_n$ converge $\iff$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.*

**Ejemplo**: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente porque $a_n = \frac{1}{n^2}$ es decreciente y $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ es una serie geométrica de razón $< 1$.

# MÁS EJEMPLOS

1. La serie p-armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\iff$ $p > 1$ porque $a_n = \frac{1}{n^p}$ es decreciente y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{pk}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)k}}$ es una serie geométrica de razón $< 1$, $\iff$ $p > 1$.

2. La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ converge $\iff$ $p > 1$ porque $a_n = \frac{1}{n(\log n)^p}$ es decreciente y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p(\log 2)^p}$ es la serie p-armónica.

3. La serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p}$ converge $\iff$ $p > 1$ porque $a_n = \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p}$ es decreciente y $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} 2^k a_{2^k} \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ es como la serie del apartado anterior.

# Términos positivos: Criterio de la integral [1]

Si cada uno de los términos $a_n$ es la imagen de una función positiva y decreciente $f$ (i.e., $f(n) = a_n$), entonces se tienen las estimaciones

- $$\int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(x)dx,$$

de donde deducimos el siguiente criterio:

## Teorema

*Si los términos $a_n$ son imágenes $f(n) = a_n$ de una función positiva y decreciente, $f$, entonces la serie $\sum_n a_n$ converge $\iff$ la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ es convergente.*

**Ejemplo**: La serie "p-armónica" $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ es convergente si y solo si $p > 1$ porque la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ es convergente si y solo si $p > 1$.

[1] **Este criterio tendrá más sentido cuando veamos el capítulo de integración. Lo vemos ahora por ser muy intuitivo.**

# Convergencia absoluta y condicional (I)

Los criterios anteriores sólo se usan para series con términos positivos. En el caso en que una serie $\sum_n a_n$ tenga términos de ambos signos, hay que usar otros argumentos.

A veces es posible utilizar el siguiente resultado

**Teorema (convergencia absoluta)**

*Si $\sum_n a_n$ es una serie para la que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces la serie original $\sum_n a_n$ también es convergente.*

Dem.: Basta usar el criterio de Cauchy, observando que

$$\left| \sum_{n=q+1}^{p} a_n \right| \leq \sum_{n=q+1}^{p} |a_n|.$$

# Convergencia absoluta y condicional (II)

## Definición

*Sea $\sum_n a_n$ una serie cuyos términos pueden ser positivos y negativos:*

- *es* **absolutamente convergente** *si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge;*
- *es* **condicionalmente convergente** *si* $\sum_n a_n$ *converge pero no absolutamente.*

- Si una serie converge absolutamente, entonces converge;
- Una serie que diverge no converge ni absoluta ni condicionalmente.

# Criterio de Leibniz

Las series de la forma $\sum_n (-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0$, se llaman alternadas porque el signo de sus términos va alternando entre positivo y negativo.

## Teorema

*Si $\sum_n (-1)^n a_n$ es una serie tal que*

- $a_n \geq 0$,
- $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n$, *y*
- $\lim a_n = 0$

*entonces la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ es convergente.*

Dem.: Se usa el criterio de Cauchy observando que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=q+1}^{p} (-1)^n a_n\right| &= a_{q+1} - a_{q+2} + a_{q+3} - a_{q+4} + a_{q+5} + \cdots \pm a_p \\ &= a_{q+1} - (a_{q+2} - a_{q+3}) - (a_{q+4} - a_{q+5}) + \cdots \pm a_p \leq a_{q+1} + a_p,\end{aligned}$$

debido a la monotonía de la sucesión, y que $a_{q+1} + a_p \leq 2a_{q+1} \xrightarrow{q\to\infty} 0$.

Ejemplo: La sucesión

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

converge ... y su límite vale $\log 2$.

Observación: El error cometido al sustituir $\log 2$ por $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es del orden de $\dfrac{1}{N}$, así que para obtener un valor de $\log 2$ con 3 decimales exactos necesitamos sumar $N = 10^4$ términos. Sin embargo, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n}$ también converge a $\log 2$ con un error, tras sumar $N$ factores, inferior a $\dfrac{1}{(N+1)2^N}$. Luego se obtienen 3 decimales exactos con sumar $(N+1)2^N \geq 10^4$ términos; $N = 10$ es suficiente.

(De hecho, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n\,2^n} = 0,693064856150793$ mientra que $\log 2 = 0,693147\dots$)