Ejercicio 4 (a entregar el 27.04.23) **APELLIDOS, Nombre**: TARRASA MARTÍN, Alberto

(Para la respuesta usa solo la cara de una página)

1.- (a) Sea $\overline{\mathbf{D}}$ la región del plano limitada por las parábolas $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Encuentra un cambio de variable $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ junto con un rectángulo R de modo que $T(R) = \overline{\mathbf{D}}$.

(b) Utiliza lo anterior para calcular el área de $\overline{\mathbf{D}}$.

Indicación: Comprueba y luego usa que la aplicación $L(x,y) = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}, \dfrac{x^2}{y}\right)$, $x, y > 0$, *transforma las parábolas anteriores en rectas paralelas a los ejes.*

SOL.:

(a) Sea $\overline{\mathbf{D}}$ la región del plano limitada por las parábolas anteriores, consideramos la aplicación $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $L(u,v) = \left(\dfrac{\sqrt{u}}{v}, \dfrac{u^2}{v}\right)$, $u, v > 0$, de forma que $L(\overline{\mathbf{D}}) = R$.

Buscamos una aplicación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(R) = \overline{\mathbf{D}}$, por definición, podemos decir que $T(x,y) = L^{-1}(u,v)$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{u}}{v} \Rightarrow u = x^2v^2 \\ \\ y = \dfrac{u^2}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x^2v^2 \\ y = x^4v^3 \Rightarrow v = \sqrt[3]{\dfrac{y}{x^4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x^2}} \\ \\ v = \sqrt[3]{\dfrac{y}{x^4}} \end{cases}$$

Luego, $T(x,y) = L^{-1}(u,v) = \left(\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x^2}}, \sqrt[3]{\dfrac{y}{x^4}}\right)$.

Aplicando L a cada una de las ecuaciones dadas convertimos las parábolas en rectas paralelas a los ejes X e Y:

$$L\left(x, x^2\right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x}, 1\right) \Rightarrow y = 1; \quad L\left(x, 4x^2\right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{4x^2}, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$L\left(x, \sqrt{x}\right) = \left(1, x\sqrt{x}\right) \Rightarrow x = 1; \quad L\left(x, \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = \left(2, 2x\sqrt{x}\right) \Rightarrow x = 2$$

Luego, el rectángulo R tal que $T(R) = \overline{\mathbf{D}}$ es $R = [1,2] \times [1/4, 1]$.

(b) Calculamos el jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial y} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{v^2}{u^5}} & \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{vu^2}} \\ -\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{v}{u^7}} & \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{v^2u^4}} \end{vmatrix} = \frac{2}{3u^3}$$

Calculamos la integral:

$$\int_{\overline{\mathbf{D}}} dxdy = \int_R \frac{2}{3u^3}\, dudv = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{4}}^1 dv\right) \frac{2}{3u^3}\, du = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$$

Luego, Área $\left(\overline{\mathbf{D}}\right) = \dfrac{3}{16}\mathrm{u}^3$.