1.- (a) Sea $\overline{\mathbf{D}}$ la región del plano limitada por las parábolas $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Encuentra un cambio de variable $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ junto con un rectángulo R de modo que $T(R) = \overline{\mathbf{D}}$.

(b) Utiliza lo anterior para calcular el área de $\overline{\mathbf{D}}$.

Indicación: Comprueba y luego usa que la aplicación $L(x, y) = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}, \dfrac{x^2}{y}\right)$, $x, y > 0$, *transforma las parábolas anteriores en rectas paralelas a los ejes.*

SOL.: (a) Comenzamos con la indicación que nos dan: como $L(x, cx^2) = \left(\dfrac{1}{c}x^{-3/2}, \dfrac{1}{c}\right)$, vemos que cualquier segmento de la parábola de la forma $y = cx^2$ se transforma en un segmento de la linea $y = 1/c$. Por otro lado, como $L(x, cx^{1/2}) = \left(\dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{c}x^{3/2}\right)$, vemos que cualquier segmento de la parábola de la forma $y = cx^{1/2}$ se transforma en un segmento de la linea $x = 1/c$. Además, L es biyectiva sobre el primer cuadrante. La inyectividad sale de que $L(x_1, y_1) = L(x_2, y_2) \implies \frac{y_1}{y_2} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$, luego $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} = 1$. Es decir, $y_1 = y_2$ y $x_1 = x_2$. La sobreyectividad se verá más abajo.

Llamamos ahora (ver dibujo)

i) A: punto de corte de $y = 4x^2$ con $y = \frac{1}{2}x^{1/2}$, es decir $A = (4^{-1}, 4^{-1})$.

ii) B: punto de corte de $y = x^2$ con $y = \frac{1}{2}x^{1/2}$, es decir $B = (4^{-1/3}, 4^{-2/3})$.

iii) C: punto de corte de $y = x^2$ con $y = x^{1/2}$, es decir $C = (1, 1)$.

iv) D: punto de corte de $y = 4x^2$ con $y = x^{1/2}$, es decir $D = (4^{-2/3}, 4^{-1/3})$.

De esta forma se tiene:

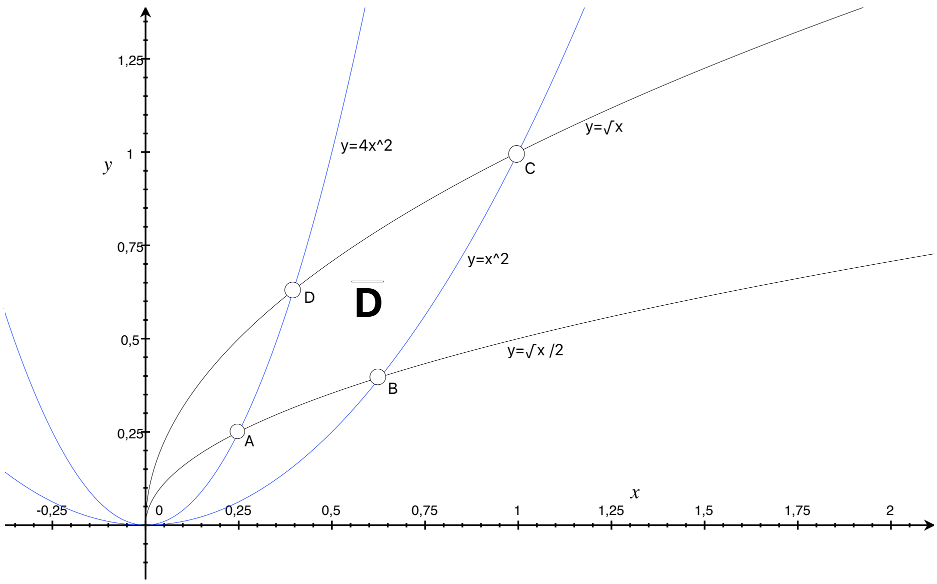
$L(A) = (2, 4^{-1})$

$L(B) = (2, 1)$

$L(C) = (1, 1)$

$L(D) = (1, 4^{-1})$.

Luego L transforma la figura que nos dan, $\overline{\mathbf{D}}$, en el rectángulo R de vértices $(2, 4^{-1}), (2, 1), (1, 1), (1, 4^{-1})$, es decir, $R = [1, 2] \times [4^{-1}, 1]$. Si llamamos $T = L^{-1}$ obtenemos $T(R) = \overline{\mathbf{D}}$.



Calculamos de forma explícita T (y de paso probamos la sobreyectividad de L):

$$u = \frac{\sqrt{x}}{y}, \quad v = \frac{x^2}{y} \implies \frac{v}{u} = x^{3/2}, \quad \frac{v}{u^4} = y^3. \qquad \text{Luego} \quad x = u^{-2/3}v^{2/3}, \quad y = u^{-4/3}v^{1/3}.$$

Así llegamos a $T(u, v) = (u^{-2/3}v^{2/3}, u^{-4/3}v^{1/3})$.

(b) Calculamos el jacobiano de T:
$$|DT(u, v)| = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}u^{-5/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-2/3}v^{-1/3} \\ -\frac{4}{3}u^{-7/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{-4/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\,u^{-3}.$$

Por el teorema del cambio de variables

$$\text{área}(\overline{\mathbf{D}}) = \iint_{\overline{\mathbf{D}}} 1\,dx\,dy = \iint_R |DT(u, v)|\,du\,dv = \int_{1/4}^{1} \left(\int_1^2 \frac{2}{3}\,u^{-3}\,du\right) dv = \frac{3}{16}.$$