Matemáticas

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 8: Diagonalización de endomorfismos.

1. Dados los siguientes endomorfismos:

$$\begin{array}{ll}
f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & f_1(x,y) = (y,x), \\
f_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, & f_2(x,y) = (y,-x), \\
f_3 : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, & f_3(x,y) = (x-y/2, y-2x), \\
f_4 : \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2, & f_4(x,y) = (x, x+y), \\
f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & f_5(x,y,z) = (3y+9z, x/3+5z, x/9+y/3), \\
f_6 : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, & f_6(x,y,z) = (6x-7y-20z, -8z, x-y), \\
f_7 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, & f_7(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+2z, 4x+4y+3z), \\
f_8 : \mathbb{F}_2^3 \longrightarrow \mathbb{F}_2^3, & f_8(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z), \\
f_9 : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x], & f_9(p(x)) = p'(x), \\
f_{10} : M_2(\mathbb{F}_2) \longrightarrow M_2(\mathbb{F}_2), & f_{10}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a+b+d & b+c+d \end{pmatrix}, \\
f_{11} :: W \longrightarrow W, & f_{11}(x,y,z) = (3x+y, 2z, y-x), \quad \text{donde } W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}.
\end{array}$$

Se pide para cada uno de ellos lo siguiente:

(i) Calcular los autovalores y autovectores.

(ii) Estudiar si es diagonalizable o no sobre el cuerpo base.

(iii) En caso de que sea diagonalizable:

1. Encontrar una base $\mathcal{B}$ formada por autovectores.
2. Escribir la matriz diagonal D del endomorfismo con respecto a $\mathcal{B}$.
3. Dar explícitamente la relación entre la matriz D y la matriz del endomorfismo que hayas utilizado para calcular el polinomio característico.

2. Determina en cada caso una base de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{C}^n$) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ A_9 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Estudia según el parámetro $a \in \mathbb{R}$ la diagonalización del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices de $M_3(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

(i) Demostrar que ambas tiene los mismos autovalores.

(ii) ¿Pueden representar el mismo endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, quizás en bases distintas?

5. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcula:

(i) A_k^{10} para $k = 1, 2$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} A_k^n$ para $k = 1, 2$.

7. Sea A una matriz cuadradada con coeficientes en un cuerpo K. Demuestra que A y A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores (en K o en "el cierre algebraico de K").

8. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Demuestra que:

(i) f es biyectiva si y sólo si 0 no es valor propio de f.

(ii) λ es valor propio de f si y sólo si $-\lambda$ es valor propio de $-f$.

(iii) Si $f^2 = f$, entonces $\{\text{valores propios de } f\} \subset \{0, 1\}$.

(iv) Si $f^2 = f$ y f es biyectiva, entonces 1 es el único valor propio de f.

(v) Si $f^2 = id$, entonces $\{\text{valores propios de } f\} \subset \{1, -1\}$.