Relaciones de Orden

1. En cada uno de los siguientes casos, se da una relación entre elementos del conjunto correspondiente. Decidir cuáles son relaciones de orden; en caso de serlo, estudiar si es o no un orden total; de lo contrario, explicar qué propiedad le falla para ser un orden.

a) $|x| \leq |y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $a \leq c \ \wedge \ b \leq d$, $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$.

c) $a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}$, $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$.

2. Sea X un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define en X la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Demostrar que la relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden si y sólo si f es inyectiva.

3. Para la relación de orden dada en $\mathbb{N}$ por $x\mathcal{R}m$ si $n|m$, dar respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Tiene $\mathbb{N}$ un máximo y/o un mínimo para esta relación?

b) ¿Qué subconjuntos de $\mathbb{N}$ tienen un máximo y cuáles un mínimo?

c) Dado un intervalo $A = \{k \in \ \mathbb{N} : n \leq k \leq m\}$, ¿qué debe cumplir un $k \in A$ para ser un elemento maximal de A? ¿Y para ser minimal?

d) ¿Cuáles son los minimales de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$?

e) Calcular los elementos minimales de $I = \{k \in \ \mathbb{N} : 1 < k \leq 100\}$.

4. Probar que están bien ordenados los siguientes subconjuntos de $(\mathbb{R}, \leq)$:

a) La unión $X \cup Y$ de dos subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, si cada uno de ellos está bien ordenado.

b) El conjunto $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ donde $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones crecientes.

5. Probar la afirmación siguiente o dar un contraejemplo que la refute: *Si un conjunto ordenado A tiene un solo elemento minimal a, entonces a es el mínimo de A.*

6. Dar una biyección entre los conjuntos siguientes que transforme una en otra las relaciones de orden dadas sobre ellos:

a) $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(A, \leq)$ donde $A = \{1 \pm \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

b) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{R})$ donde $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si y sólo si $|a - c| \leq d - b$ y $(D, \subset)$ donde D el conjunto de los discos abiertos del plano, con su centro en el eje x.
($\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los números reales positivo)

7. ¿Existe una biyección entre $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$ que transforme una en otra las relaciones de orden?

8. En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos la siguiente relación: $x\mathcal{R}y$ si x e y tienen el mismo signo y $|x| \leq |y|$.

a) Demostrar que es una relación de orden, pero que no es de orden total.

b) Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo $[-3, 2)$.

9. Dado un alfabeto que, como el nuestro, tiene un orden total establecido, y llamando "palabras" a todas las posibles secuencias finitas de sus signos, se llama *orden lexicográfico* al usado en los diccionarios, listas de nombres, etc., para ordenar el conjunto de palabras.

a) Usando el signo ' $\leq$ ' para el orden de las "letras", dar una definición de cuándo la palabra '$a_1 a_2 \ldots a_n$' precede a la '$b_1 b_2 \ldots b_m$' : decir qué deben cumplir sus letras para ello.

b) Con esa definición, probar que este orden es total; en consecuencia, cada conjunto finito de palabras tendrá un mínimo.

c) ¿ es cierto el apartado anterior para cualquier conjunto infinito de palabras? (y por lo tanto se trataría de un *buen orden*). Demostrarlo o dar un contraejemplo.

10. Se define $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y se considera la función

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow f(n, m) = 2^n 3^m \end{aligned}$$

y a partir de ella se definen las siguientes relaciones en $\widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}}$:

$$(n, m)\mathcal{R}_1(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \leq f(n', m')$$
$$(n, m)\mathcal{R}_2(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \mid f(n', m')$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son ambas relaciones de orden. ¿Son relaciones de orden total?

b) Hallar los elementos distinguidos (elementos maximales, elementos minimales, supremos, ínfimos, máximos y mínimos) del conjunto $A = \{(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : 1 \leq n+m \leq 4\}$ para cada una de la relaciones de orden $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.