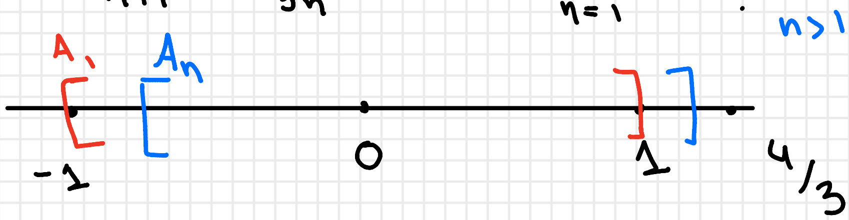
Conjuntos y números 5/10

(21) $A_n = \left[-\frac{2}{n+1} , \frac{4n-1}{3n} \right]$ $\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$?

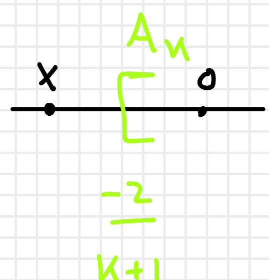


$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ \ x \in A_n \}$$

- Afirmo que si $x < 0$, entonces $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Por la propiedad de Arquímedes, sea $K \in \mathbb{N}$ tq. $K + 1 > \frac{-2}{x}$. Entonces $\frac{1}{K+1} < \frac{-x}{2} \iff x < \frac{-2}{K+1}$

Luego $x \notin A_n$, con lo cual $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$



- Afirmo que si $x > 1$ entonces $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Claramente si $x > 1$, $x \notin A_1 = [-1, 1]$ con lo cual de nuevo $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Deducimos $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [0, 1]$.

Sea $x \in [0,1]$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\frac{-2}{n+1} < 0 \leq x \leq 1 \leq \frac{4n-1}{3n}, \text{ luego } \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos que $x \in A_n$, es decir $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Deducimos que $[0,1] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, y concluimos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1] \quad \blacksquare$$

22 c) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$

$(x,y) \in (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$

$\Updownarrow$

$((x,y) \in (S \times U)) \wedge ((x,y) \notin (S \times V) \cup (T \times U))$

$\Updownarrow$

$(x \in S) \wedge (y \in U) \wedge ((x,y) \notin (S \times V)) \wedge ((x,y) \notin (T \times U))$

$\Updownarrow$

$(x \in S) \wedge (y \in U) \wedge ((x \notin S) \vee (y \notin V)) \wedge ((x \notin T) \vee (y \notin U))$

$\wedge$ F $\wedge$ F

$\Updownarrow$

$(x \in S) \wedge (y \in U) \wedge (y \notin V) \wedge (x \notin T)$

$\Updownarrow$

$(x \in S \setminus T) \wedge (y \in U \setminus V) \iff (x,y) \in (S \setminus T) \times (U \setminus V) \quad \blacksquare$

$P \wedge V \iff P$, $P \vee F \iff P$, contrarrecíproco

(Esto del final era una pregunta sobre ejemplos de tautologías

$A \subset A \cup B$ $\quad$ ($x \notin A \cup B$ es falso)

$\overset{\in}{x}$ $\Rightarrow x \in A \cup B$

(25) a) $P(A \cup B) \overset{?}{=} P(A) \cup P(B)$. FALSO

Sí que es verdad que $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

Contraejemplo para ver que $P(A \cup B) \not\subset P(A) \cup P(B)$: A, B tq. $A \not\subset B$, $B \not\subset A$

- $A \cup B \subseteq A \cup B$, luego $A \cup B \in P(A \cup B)$
- ¿$A \cup B \in P(A) \cup P(B)$? No hay subconjuntos en $P(A) \cup P(B)$ que contengan elementos de $A \setminus (A \cap B)$ y $B \setminus (A \cap B)$ ■

---

(26) a) A, B, C $\quad$ $B \subset A$. Encontrar los conj. X

tq. $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$ $\quad$ (si sabemos $A \subset C$)

$B \subset A \subset C$

- $A \cap \underset{\cup\!\mid}{\overset{X}{}}X = B$: deducimos $\boxed{B \subseteq X}$ y que $\boxed{X \subseteq B \cup A^c}$.

¿Por qué? Supongamos que $\exists z \in X$ tq. $z \notin B \cup A^c$.

Tenemos que $z \in B^c \cap A$. $\quad \begin{cases} z \in X \\ z \in A \cap B^c \end{cases} \Rightarrow z \in X \cap A \cap B^c$

$X \cap A = B$, $\quad B \cap B^c = \emptyset$ #

- $A \cup \overset{X}{X} = \underset{(C \setminus A) \cup A}{C}$: deducimos $\boxed{X \subset C}$ y que $\boxed{(C \setminus A) \subseteq X}$

$$\left\{\begin{array}{l} B \subseteq X \\ (C\setminus A) \subseteq X \end{array}\right. \Rightarrow \quad B \cup (C\setminus A) \subseteq X$$

$$\left\{\begin{array}{l} X \subseteq B \cup A^c \\ X \subseteq C \end{array}\right. \Rightarrow \quad X \subseteq (B\cup A^c) \cap C = \underbrace{(B \cap C) \cup (A^c \cap C)}_{= B \cup (C\setminus A)}$$

$$B \cup (C\setminus A) \subseteq X \subseteq B \cup (C\setminus A)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X = B \cup (C\setminus A)}$$

■

H2. 1 d) $\displaystyle\sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}$

Considerando $\{1,2,3,\dots,n,n+1\}$.

Sea X un subconjunto de $l+1$ elementos, cuyo mayor elemento es k.

- Si $k = l+1$ solo hay una posibilidad para $X = \{1,2,\dots,l+1\}$ $\binom{l}{l}$
- si $k = l+2$, tenemos $\binom{l+1}{l}$ conjuntos posibles
- si $k = l+3$, tenemos $\binom{l+2}{l}$ conjuntos posibles.

$\vdots$

- si $k = n+1$, tenemos $\binom{n}{l}$ conjuntos posibles.

$$\binom{n+1}{l+1} = \binom{l}{l} + \binom{l+1}{l} + \dots + \binom{n}{l} = \sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l}$$ ■

2 $\displaystyle(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \dots + \binom{n}{n} x^n$

(Derivamos

$$n\cdot(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot k\cdot x^{k-1}$$

$\downarrow$ ⋮ Derivamos en total K veces

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(1+x)^{n-k} = \binom{n}{k}k! + \left[\binom{n}{k+1}(k+1)k\ldots 2\, x^{1} + \ldots + \binom{n}{n} n\cdot(n-1)\ldots(n-k)\, x^{n-k+1}\right]$$

sé que puedo sacar x factor común

$\downarrow$ Evaluando en $x=0$

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \binom{n}{k}k!$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

■

(3) a) $77 = 11\cdot 7$

$A = \{n \in [1,77]\cap\mathbb{N} \mid n \,\vdots\, 7\}$

$B = \{n \in [1,77]\cap\mathbb{N} \mid n \,\vdots\, 11\}$

$|\{n\in\mathbb{N}\cap[1,77] \mid mcd(n,77)=1\}| = |\{1,\ldots,77\}| - |A\cup B|$

$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = 11 + 7 - 1 = 17$

$|\{n\in\mathbb{N}\cap[1,77] \mid mcd(n,77)=1\}| = 77 - 17 = 60$

■

c) $360 = 3^2\cdot 2^3\cdot 5$

$A = \{n\in[1,360]\cap\mathbb{N} \mid n \,\vdots\, 3\}$

$B = \{$ " " " $\mid n \,\vdots\, 2\}$

$C = \{$ " " " $\mid n \,\vdots\, 5\}$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 120 + 180 + 72 - 60 - 24 - 36 + 12 = 264$$

Luego $|\{ n \in \mathbb{N} \cap [1,360] \mid mcd(n,360) = 1 \}| = 360 - 264 = 96$ ■

4

"n° de distribuciones tq. ninguno se queda con el suyo" = "total permutaciones" − "n° permutaciones con un elemento fijo" $= X$

$A_i := \{ i \text{ se queda su paraguas} \}$ $i = 1, 2, 3, 4$

$$X = \left| \bigcup_{i=1}^{4} A_i \right| \overset{PIE}{=} \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - 1$$

$$= \binom{4}{1} |A_1| - \binom{4}{2} |A_1 \cap A_2| + \binom{4}{3} |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - 1$$

$$= \binom{4}{1} 3! - \binom{4}{2} 2! + \binom{4}{3} 1! - 1$$

Obs. $\binom{n}{i} \cdot (n-i)! = \dfrac{n!}{i!}$ ← *

"Total permutaciones" $- X = \binom{4}{0} 4! - \binom{4}{1} 3! + \binom{4}{2} 2! - \binom{4}{3} 1! + \binom{4}{4} 0!$

$$= \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} (4-i)! \, (-1)^i \overset{*}{=} \sum_{i=0}^{4} \frac{4!}{i!} (-1)^i$$

$$= 4! \sum_{i=0}^{4} \frac{(-1)^i}{i!}$$

9 ■

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, análogamente:

$$(-1)^0 n! \binom{n}{0} - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} 1! - (-1)^n$$

$$= n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \quad ■$$

$x \in A$, $y \in B$

$\underline{\forall x \, \exists y \text{ tq } P(x,y)} \overset{?}{\Rightarrow} \forall y \, \exists x \text{ tq } P(x,y)$ (Falso)

$A = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ $\qquad P(x,y) = x < y$ $\qquad$ Contraej.

$B = \{0, 1\}$