# Tema 3. Funciones

## 3.0. Contenido y documentación



https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/f90ab8ee-be55-470a-8050-5059c1f28f03/U3_Funciones.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/376d8ebd-4cb8-44d9-b189-ccb1850d64e3/H4_Funciones.pdf

## 3.1. Funciones

*Definición. Una **función** $f$ es una operación por la que se asigna a cada elemento $x$ de un conjunto $A$ un único valor $f(x) \in \mathbb{R}$.*
Notación: $f : A \to \mathbb{R}$.

*Definición. Denominamos **dominio de** $f$ al conjunto $A$, y lo denotamos $\mathrm{Dom}\,(f)$.*

*Definición. Denominamos **imagen de** $f$ al conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, y lo denotamos $\mathrm{Im}\,(f)$.*

### 3.1.1. Propiedades de las funciones

Sea $f : A \to B$ una función definida entre dos conjuntos $A$ y $B$ de números reales, decimos que:

- $f$ es **inyectiva** si para todo $x, y \in A$ tenemos que $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.
- $f$ es **sobreyectiva** si $\mathrm{Im}\,(f) = B$.
- $f$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

*Definición. Dadas dos funciones $f : A \to B, g : B \to C$, definimos la **composición de** $f$ **y** $g$ como la función $g \circ f : A \to C$, de forma que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

*Definición. Dada una función $f : A \to B$ biyectiva, definimos la **inversa de** $f$ como la función $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1} \circ f(x) = x$ y $f \circ f^{-1}(y) = y$.*

*Definición. Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **par** si $\forall x \in \mathbb{R}$ tenemos que $f(x) = f(-x)$.*

*Definición. Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **impar** si $\forall x \in \mathbb{R}$ tenemos que $f(-x) = -f(x)$.*

# 3.2. Límites

*Definición. Decimos que a función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene límite $L$ cuando $x$ tiende a un cierto punto $a$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.*
Notación: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Nota. El punto $a$ no tiene por qué pertenecer a $A$, pero sí debe ser próximo a él.

*Definición. El límite de $f$ cuando $x$ tiende a $+\infty$ (resp. $-\infty$) es $L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $R > 0$ (resp. $R < 0$) tal que si $x \in A$ y $x > R$, (resp. $R > 0$), entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.*
Notación: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$).

## 3.2.1. Límites laterales

*Definición. Decimos que $L$ es el **límite por la derecha de** $f$ cuando $x$ tiende a un punto $a$ si los valores de $f(x)$ se aproximan a $L$ cuando $x$ se aproxima a $a$ de forma que $x > a$.*
Notación: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

*Definición. Decimos que $L$ es el **límite por la izquierda de** $f$ cuando $x$ tiende a un punto $a$ si los valores de $f(x)$ se aproximan a $L$ cuando $x$ se aproxima a $a$ de forma que $x < a$.*
Notación: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

> Teorema. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $L \in \mathbb{R}$ y $a \in A$ un punto. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

> Teorema. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A$, con $x_n \neq a$ y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ se tiene que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

## 3.2.2. Límites y acotación

> Teorema. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones y $a \in A$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $g$ es una función acotada en un entorno de $a$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

# 3.3. Funciones continuas

*Definición. Decimos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **continua** en un punto $a \in A$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = f(a)$.*
Nota. La suma o producto de dos o más funciones continuas también lo es.

> Teorema. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones continuas en $a$ y $f(a)$ respectivamente. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en $a$.

### 3.3.1. Discontinuidades

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. Decimos que $a$ es una **discontinuidad evitable** de $f$ si $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ y $\lim_{x\to a} f(x) \neq \pm\infty$.*

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. Decimos que $a$ es una **discontinuidad inevitable** de $f$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.*

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función $a \in A$. Decimos que $a$ es una **discontinuidad de tipos salto** si $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$.*

> Proposición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x_1 \geq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Entonces, $f$ solo puede tener discontinuidades de tipo salto no evitables.

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que $f$ es **continua** si lo es en todo punto $a \in A$.*

### 3.3.2. Continuidad uniforme

*Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que es uniformemente continua si $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 :$ $\forall x, y \in A$ si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

> Lema. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua sobre un intervalo cerrado. Entonces, $f$ es uniformemente continua.

## 3.4. Teorema de Bolzano

> Teorema de Bolzano. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$. Entonces, $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.

---

Demostración.
Suponemos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, y definimos por inducción intervalos $[a_n, b_n] \subset [a, b]$, de forma que $[a_0, b_0] \subset [a_1, b_1] \subset ....$
Definimos $d_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Si $\exists n$ tal que $f(d_n) = 0$, ya hemos encontrado una raíz de $f$.
Si $f(d_n) \neq 0, \forall n$, entonces, $c = \lim_{n\to\infty} a_n \in [a_n, b_n]$ y $b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \dfrac{b - a}{2^n} = c$. De esta forma, $f(a_n) < 0, \forall n \Rightarrow f(c) \leq 0$ y $f(b_n) > 0, \forall n \Rightarrow f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$.
Así, tenemos que $f(c) \leq 0$ y $f(c) \geq 0$. Luego, $f(c) = 0$. $\square$

## 3.5. Teorema de Weierstrass

> Teorema de Weierstrass. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ . Entonces, se puede afirmar que $f$ está acotada y alcanza un máximo y un mínimo en $[a, b]$.

---

Demostración.
Sea $L = \sup_{[a,b]} f \in (-\infty, +\infty]$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $x_n \in [a,b], \forall n$. Entonces, $\exists$ una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n = f(x_n)$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = L$.
Sea $\{x_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente tal que $x_n \in [a,b], \forall n$ y $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c \in [a,b]$. Entonces, $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = L$.
Por otro lado, como $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ y $f$ es continua en $c$. Entonces, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$. Luego, $f(c) = L$, por lo que, como $L = \sup_{[a,b]} f = f(c)$, $f$ alcanza un máximo en el punto $c$. $\square$

# 3.6. Teorema de valores intermedios

> Teorema de Bolzano de valores intermedios. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $t \in \mathbb{R}$ un valor contenido entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, $\exists c \in [a,b] : f(c) = t$.

---

Demostración.
Definimos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $g(x) = f(x) - t$, continua por ser la suma de una función continua y una constante, de forma que $g(a)g(b) = (f(a)-t)(f(b)-t) < 0$. Aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in [a,b] : g(c) = 0$, lo que implica que $g(c) = f(c) - t = 0 \Rightarrow f(c) = t$. $\square$

---

> Corolario. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, la imagen $f([a,b])$ es un intervalor cerrado y finito.

---

Demostración.
Sabemos que la imagen $f([a,b]) \subset [\min f, \max f]$. Por el Teorema del valor intermedio, $f$ toma en $[a,b]$ cualquier valor entre $\min f$ y $\max f$.

---

> Teorema. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente monótona. Entonces, la función inversa $f^{-1}$ es continua en $f([a,b])$.

---

Demostración.
Suponemos que $f$ es estrictamente creciente, de forma que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Por el Teorema del valor intermedio, tenemos que para todo $L \in (f(a), f(b))$, existe un único valor $c \in (a,b) : f(c) = L \Rightarrow c = f^{-1}(L)$.
Dado un $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $y \in (L-\delta, L+\delta) \subset [f(a), f(b)]$, entonces $f^{-1}(y) \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, para demostrar que $f^{-1}(L)$ es continua en $L$.
Sabemos que $c \in (a,b)$, de forma que $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset (a,b)$. Sea $\delta = \min\{|L - f(c-a)|, |L - f(c+a|\}$. Entonces, para cualquier $y \in (L-\delta, L+\delta)$ tenemos que $y \in (f^{-1}(c-\varepsilon), f^{-1}(c+\varepsilon))$, por lo que $f^{-1}$ es estrictamente creciente y $f^{-1}(y) \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Luego, efectivamente, $f^{-1}$ es continua en $L$. $\square$