TEMA 1: Introducción al espacio euclídeo de varias variables

Fernando Soria
UAM

Curso 2022/23

Estructura del Tema 1:

- Vectores, producto escalar, norma y distancia.
- Geometría de rectas y planos
- Conceptos métricos en el espacio euclídeo
- Topología en el espacio euclídeo
- Conjuntos abiertos y cerrados; interior, frontera y clausura de un conjunto
- Conjuntos conexos

Vectores en $\mathbb{R}^n$.

La **recta real** $\mathbb{R}$ es el conjunto de números $\{x \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

El **plano cartesiano** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ es el conjunto de puntos de la forma (x_1, x_2), con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

El **espacio euclídeo** $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos de la forma (x_1, x_2, x_3), con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^3 = \{\, (x_1, x_2, x_3) \ : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\,\}$$

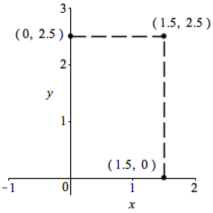
El **espacio *n*-dimensional** $\mathbb{R}^n$ (producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$) es el conjunto de puntos de la forma $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, con $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, 2 \cdots n$.

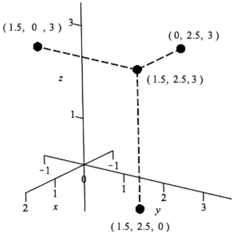
$$\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}, \ \forall i = 1, 2 \cdots n\,\}$$

Si $p = (x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, los valores x_i, $i = 1, \ldots, n$, se llaman las **coordenadas** del punto p.

Vectores en el plano y en el espacio

Podemos representar geométricamente los puntos del plano y del espacio, usando ejes perpendiculares de coordenadas (coordenadas cartesianas):





Para describir "movimiento" usaremos la noción de vector.

Definición (Vectores en $\mathbb{R}^n$)

Un **vector** en $\mathbb{R}^n$ es un segmento de recta orientado, determinado por un punto inicial en $\mathbb{R}^n$ y un punto final en $\mathbb{R}^n$.

Notación: si el punto inicial es A y el final es B, podemos denotar por $\overrightarrow{AB}$ el vector correspondiente, que va de A a B.

$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Identificamos cada punto $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con el *vector* que va desde el origen, $O = (0, \ldots, 0)$, a dicho punto P:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP}$$

Operaciones con vectores:

Dados vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos las operaciones

- **Suma:** formamos un nuevo vector en $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

- **Producto por un escalar:** formamos un nuevo vector en $\mathbb{R}^n$ como

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Con estas dos operaciones, $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales.

Base canónica/estándar de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2: \quad \{\vec{e}_1 = (1,0),\ \vec{e}_2 = (0,1)\}$

$\mathbb{R}^3: \quad \{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$

$\mathbb{R}^n: \quad \{\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{\vec{e}_1}, \underbrace{(0,1,\dots,0)}_{\vec{e}_2}, \dots, \underbrace{(0,0,\dots,1)}_{\vec{e}_n}\}$ En general, el vector $\vec{e}_i$ es el vector con todas sus entradas cero, salvo por la i-ésima que es un uno.

Todo vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse en función de la base canónica.

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

Nota: En $\mathbb{R}^3$ se suele usar también la notación

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0), \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

$\mathbb{R}^n$ como espacio afín

A veces nos interesa considerar vectores (flechas) cuyo origen no es necesariamente el punto $O = (0, \dots, 0)$.

Sea $P \in \mathbb{R}^n$ un punto. Un **vector** en $\mathbb{R}^n$ con origen P es un segmento de recta orientado, determinado por el punto inicial P, y un punto final $Q \in \mathbb{R}^n$. Lo denotaremos $\overrightarrow{PQ}$.

Este conjunto es un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^n$ con la identificación

$$\overrightarrow{PQ} \Longleftrightarrow Q - P \in \mathbb{R}^n$$

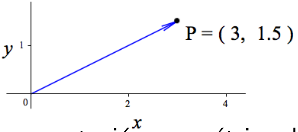
Esto nos permite definir una nueva operación:
Suma de un punto y un vector: formamos un nuevo punto en $\mathbb{R}^n$

$$Q = P + \vec{x} = (a_1 + x_1, a_2 + x_2, \dots, a_n + x_n)$$

Representación geométrica

Aparte de la notación $\vec{a}$, se suele también denotar un vector con letra en negrita, **a**.

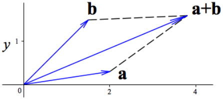
Representación geométrica de vectores: se pueden representar como flechas cuyo origen es el punto $\mathbf{0} = (0, 0)$.



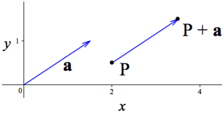
El vector $\overrightarrow{0P} = (3, 1{,}5)$ se denomina **vector de posición** del punto $P = (3, 1{,}5)$.

Representación geométrica de las operaciones entre puntos y vectores:

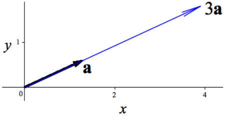
Suma:



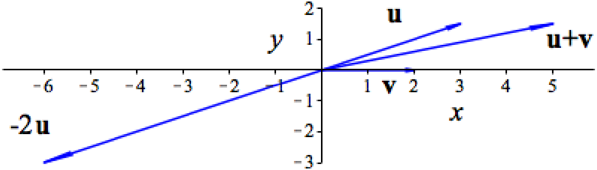
Suma de punto y vector:



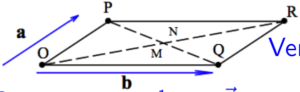
Producto por un escalar:



1) Sean $\vec{u} = (3, 1{,}5)$ y $\vec{v} = (2, 0)$. Dibujar $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$, y también $-2\vec{u}$.



2) Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan.



Dem.: Definimos $\vec{a} = \overrightarrow{0P}$, $\quad \vec{b} = \overrightarrow{0Q}$.

Vemos que $Q = P + \vec{b} - \vec{a}$, $\quad$ y que $R = 0 + \vec{a} + \vec{b}$.

Sean $M = 0 + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\quad N = P + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$. Necesitamos ver que $M = N$.

En efecto: $\quad N = P + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = 0 + \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = 0 + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = M$. $\quad \square$

Producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Dados los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se define el **producto escalar** de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como:

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{y} =< \vec{x}, \vec{y} > &=< (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) > \\ &= x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i .\end{aligned}$$

Propiedades del producto escalar:

1. Linealidad: $(\lambda\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{z}) + \beta(\vec{y} \cdot \vec{z})$
2. Conmutativa: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
3. Positividad:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0} \qquad \text{y} \qquad \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \text{ si y solo si } \vec{x} = \vec{0}$$

Norma (euclídea) en $\mathbb{R}^n$

Se define la **norma** de un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

Observación: En $\mathbb{R}$: $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$.

- La norma $\|\vec{x}\|$ mide la **longitud** del vector $\vec{x}$.
- Diremos que un vector $\vec{x}$ es **unitario** si $\|\vec{x}\| = 1$.
- Dado $\vec{x}$, llamamos **vector normalizado** de $\vec{x}$ al vector $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$.

Primeras propiedades de la norma:

1. $\|\vec{x}\| > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ y $\|\vec{x}\| = 0$ si y solo si $\vec{x} = \vec{0}$
2. $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$
3. $\|x - y\| = \|y - x\|$

Demostración.

Las identidades (1),(2) y (3) se siguen directamente de la definición. $\square$

Tres desigualdades importantes y función distancia

- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** Sean $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\ \|y\|.$$

Dem.: Supondremos que $y \neq 0$, porque en caso contrario no habría nada que probar. Entonces, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$0 \leq \|x+\lambda y\|^2 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2.$$

Eligiendo ahora $\lambda = \frac{-\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, se obtiene de lo anterior $0 \leq \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$, y por tanto $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$.

- **Desigualdad triangular** y **desigualdad triangular al revés:**

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|; \qquad \|x-y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|.$$

- **Desigualdad con las coordenadas**: Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\max_{j=1,2,\dots,n} |x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

- **Distancia (euclídea) entre dos puntos:** Se define como $d(x,y) = \|x-y\|$ y sus propiedades son
  - $d(x,y) \geq 0$; y $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
  - $d(x,y) = d(y,x)$.
  - $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$

Dados dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ diferentes de cero, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que

$$\frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \leq 1$$

Por lo tanto existe un único $\theta \in [0, \pi)$ tal que $\cos\theta = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$,

y se define como el **ángulo entre** $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Con esta definición, tenemos la fórmula

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$$

El motivo de esta definición hay que verlo en el contexto geométrico del espacio euclídeo: Puesto que los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}$ forman los lados de un triángulo, la fórmula del coseno nos da

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\| \cos\theta,$$

donde θ representa el ángulo opuesto al lado $\vec{x} - \vec{y}$, es decir, el ángulo entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Por otro lado se tiene $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}$, de donde se sigue $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$.

Ortogonalidad (perpendicularidad)

- Dos vectores no nulos, $\vec{x}$ e $\vec{y}$, son **ortogonales/perpendiculares**, denotado como $\vec{x} \perp \vec{y}$, si se tiene que el ángulo entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ es $\pi/2$, o lo que es equivalente, si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.
- Un conjunto de vectores no nulos $\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_m}\}$ es un **conjunto ortogonal** si se tiene que $\vec{u_i} \cdot \vec{u_j} = 0$, $\forall i \neq j$.
- Un conjunto de vectores no nulos $\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_m}\}$ es un **conjunto ortonormal** si es un conjunto ortogonal y además cada vector $\vec{u_i}$ es unitario.

Ejemplo 1.1: La base canónica $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ es un conjunto ortonormal.

Teorema (Teorema de Pitágoras)

Si $\vec{x} \perp \vec{y}$, entonces

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Dem.: Usando que $\vec{x} \perp \vec{y}$, es decir, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, se tiene
$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

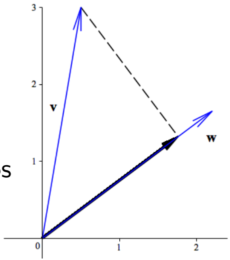
Proyección de un vector sobre otro

Definición (Proyección ortogonal)

La **proyección** *de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ (o sobre la recta determinada por $\vec{w}$) es el vector $\left(\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{w}\|}\cos(\theta)\right)\vec{w}$, donde θ es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.*

Observación: Esta proyección es un producto de $\vec{w}$ por un escalar; en particular, la proyección y $\vec{w}$ están en la misma recta.

Geométricamente, en el plano la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ es el vector cuyo punto final es la intersección entre la recta que contiene $\vec{w}$ y la recta que es perpendicular a $\vec{w}$ y contiene el punto final de $\vec{v}$.



Usando la relación entre ángulo y producto escalar, podemos expresar la proyección en términos del producto escalar:

$$\left(\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{w}\|}\cos\theta\right)\vec{w} = \left(\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{w}\|}\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}\right)\vec{w} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w}.$$

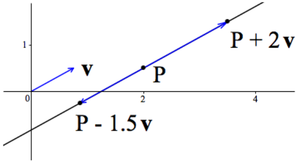
Ejercicio: Dados los vectores $\vec{x} = (1, 2)$ e $\vec{y} = (2, 0)$.

1. Calcular $\vec{x} \cdot \vec{y}$.
2. Calcular $\|\vec{x}\|$ y $\|\vec{y}\|$.
3. Calcular el ángulo, θ, formado por ambos vectores.
4. Escribe los vectores unitarios de igual dirección y sentido que los dados.
5. Calcular el vector proyección de $\vec{x}$ sobre $\vec{y}$.

Repaso: rectas en el plano

Definición

Una **recta** en el plano es un conjunto de la forma $\{P + \lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, donde $P = (p_1, p_2)$ es un punto del plano y $\vec{v}$ es un vector, llamado **vector director** de la recta.



Para cada valor de λ, tenemos un punto (x, y) distinto de la recta, determinado por la ecuación siguiente: $(x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(v_1, v_2)$.

Esta expresión es equivalente al sistema de ecuaciones siguiente, que expresa cada coordenada del punto: $\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases}$.

Repaso: rectas en el plano (cont.)

Partiendo del sistema $\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases}$, queremos expresar la recta en **una sola ecuación** que relaciona y con x:

- Tomamos la primera ecuación multiplicada por v_2,
- la segunda ecuación multiplicada por v_1,
- las restamos.

Ecuación de una recta en $\mathbb{R}^2$

La ecuación de la recta que pasa por $P = (p_1, p_2)$ y tiene vector director (v_1, v_2) es

$$v_2 x - v_1 y = p_1 v_2 - p_2 v_1. \tag{1}$$

Observaciones:
i) Si la recta en $\mathbb{R}^2$ tiene la ecuación $ax + by = c$ un vector director es $(-b, a)$.
ii) La recta expresada por una ecuación $ax + by = c$ no cambia si se multiplica la ecuación por un escalar no-nulo. Es decir que la ecuación $ax + by = c$ expresa la misma recta que $\lambda ax + \lambda by = \lambda c$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Repaso: rectas en el plano (cont.)

iii) Dos ecuaciones $ax + by = c$, $ax + by = c'$ expresan rectas paralelas (en efecto, el vector $(-b, a)$ es un vector director para ambas rectas).

iv) Dado un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, el vector $(-v_2, v_1)$ es ortogonal a $\vec{v}$: tenemos $(v_1, v_2) \cdot (-v_2, v_1) = -v_1 v_2 + v_1 v_2 = 0$. Por lo tanto, toda recta con ecuación $ax + by = c$ es perpendicular a toda otra recta con ecuación $-bx + ay = c'$.

v) Una ecuación de recta $ax + by = c$ se puede escribir de una otra forma, muy común también, en términos de *pendiente* y *ordenada en el origen*.

- Si $b \neq 0$, podemos aislar la variable y a un lado de la ecuación:

$$y = mx + h, \text{ donde } m = -\frac{a}{b}, \quad h = \frac{c}{b}$$

  m es la pendiente, h la altura de su corte con el eje OY.

- Si $b = 0$, $a \neq 0$, entonces la recta es vertical, de ecuación $x = c/a$.
- Si $a = 0$, $b \neq 0$, entonces tenemos una recta horizontal, de ecuación $y = h$.

Repaso: rectas en el plano (cont.)

<u>Ejemplo</u>: sean los puntos $A = (1, 5)$ y $B = (2, 3)$. Se pide hallar las ecuaciones de

- la recta que pasa por A y B,
- y de la recta que pasa por $(0, 1)$ y es perpendicular a la primera recta.

Primera recta: $\vec{v} = B - A = (1, -2) \Rightarrow$ los puntos (x, y) de la recta son de la forma $A + \lambda\vec{v} = (1, 5) + \lambda(1, -2)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Obtenemos así el sistema $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$. La combinación $2(\text{ecuación } 1) + (\text{ecuación } 2)$ elimina λ.

Obtenemos así la ecuación $2x + y = 7$.

Segunda recta: como hemos observado antes, toda recta perpendicular a la primera tiene vector director ortogonal a $(1, -2)$, luego un vector director de una tal recta es $(2, 1)$. Sabemos que toda recta con este vector director tiene ecuación $-x + 2y = c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. ¿Qué valor de c nos da la segunda recta deseada? Este valor lo va a determinar la condición de que esta recta contenga el punto $(0, 1)$. Tenemos pues $-0 + 2 = c$, luego la segunda recta tiene ecuación $-x + 2y = 2$.

Producto vectorial y sus propiedades

Dados los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbb{R}^3$, se define el **producto vectorial** de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como:

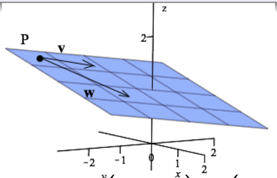
$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\,\vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\vec{e}_3.$$

1. Interpretación geométrica: $\vec{x} \times \vec{y}$ es un vector *ortogonal* a $\vec{x}, \vec{y}$, con dirección dada por la *regla de la mano derecha*.
2. Anticonmutatividad: $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
3. **Área del paralelogramo de lados $\vec{x}$ e $\vec{y}$**:
$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sin\theta.$$
4. $\vec{x} \times \vec{y} = 0$ si y solo si $\vec{x}, \vec{y}$ son *colineales*.
5. Linealidad: $(\lambda\vec{x}) \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\lambda\vec{x}) \times \vec{y} + (\lambda\vec{x}) \times \vec{z} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}) + \lambda(\vec{x} \times \vec{z})$
6. Dados los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$, se tiene que $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$

Planos en $\mathbb{R}^3$

Definición (Planos en $\mathbb{R}^3$)

Un **plano** en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos de la forma $\{P + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, donde $P = (p_1, p_2, p_3)$ es un punto en el espacio y donde $\vec{v}, \vec{w}$ se llaman **vectores directores** del plano.



Para cada par distinto de números (α, β), tenemos un punto (x, y, z) distinto del plano, determinado por la ecuación:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha(v_1, v_2, v_3) + \beta(w_1, w_2, w_3).$$

De nuevo, esto equivale a un sistema de ecuaciones:
Combinando estas ecuaciones se puede eliminar α, β y obtener una única ecuación que relaciona x, y, z.

$$\begin{cases} x = p_1 + \alpha v_1 + \beta w_1 \\ y = p_2 + \alpha v_2 + \beta w_2 \\ z = p_3 + \alpha v_3 + \beta w_3 \end{cases}$$

Planos en $\mathbb{R}^3$ (cont.)

Ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$

La ecuación general de un plano en $\mathbb{R}^3$ es de la forma

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \tag{2}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son coeficientes fijos.

Distintas formas de hallar la ecuación: Asumimos que $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, es un punto dado, y $P = (x, y, z)$ es cualquier otro punto arbitrario en el plano.

- Si $\vec{n} = (a, b, c)$ es un **vector normal** al plano :

$$\langle P - P_0, \vec{v}\rangle = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0;$$

- Si tenemos **dos vectores directores** $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$, el vector $\overrightarrow{PP_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ debe ser combinación lineal de v y w, luego

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0,$$

y desarrollando, obtenemos la ecuación.

Planos en $\mathbb{R}^3$ (cont.)

- Si conocemos **tres puntos no colineales del plano,** $P_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$**,** los tres vectores $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_2P}$ y $\overrightarrow{P_3P}$ deben ser *coplanarios* (i.e., linealmente dependientes):

$$\det \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Conviene recordar: Si la ecuación del plano es

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

entonces un vector normal al plano es (a, b, c), el formado por los coeficientes de x, y, z.

Rectas en $\mathbb{R}^3$

Dado un punto P, y un vector $\vec{v}$, la recta que pasa por P_0 con vector director $\vec{v}$ es

$$\{P + \lambda \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

ó

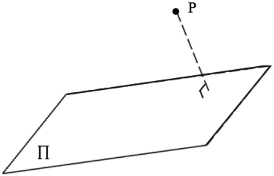
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Combinando estas ecuaciones para eliminar λ, podemos poner la recta como intersección de dos planos. Por ejemplo,

$$v_2(x - x_0) = v_1(y - y_0), \qquad v_3(y - y_0) = v_2(z - z_0).$$

Distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$

Sea un plano Π con ecuación $ax + by + cz + d = 0$. El vector (a, b, c) es perpendicular a Π. Lo normalizamos, esto es, lo dividimos por su norma para obtener un vector unitario $\vec{n}$, que es también ortogonal (o *normal*) a Π:



$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right).$$

La **distancia** de P a Π es el valor absoluto del número real λ tal que el punto $P + \lambda\vec{n}$ está en el plano Π.

Queremos pues que $a(p_1 + \lambda n_1) + b(p_2 + \lambda n_2) + c(p_3 + \lambda n_3) + d$ sea 0, es decir $ap_1 + bp_2 + cp_3 + d + \lambda(an_1 + bn_2 + cn_3) = 0$. Esto nos da la fórmula

$$|\lambda| = \frac{|a\,p_1 + b\,p_2 + c\,p_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

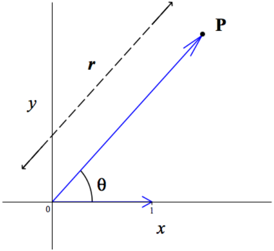
Coordenadas polares en el plano $\mathbb{R}^2$

Otras parametrizaciones:

Hasta ahora hemos expresado puntos en coordenadas *cartesianas*, que determinan los puntos usando ejes perpendiculares de coordenadas x, y.

Otro sistema de coordenadas: **coordenadas polares**. Un punto P se determina por números $r \in [0, \infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, donde

- r es el **radio** del único círculo en el plano con centro en el orígen $\vec{0}$ y que contiene P,
- θ es el ángulo entre el vector $(1, 0)$ y el vector $\overrightarrow{0P}$.



Cambio entre coordenadas cartesianas y polares de un mismo punto:

$$\text{de } (x, y) \text{ a } (r, \theta) : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}$$

$$\text{de } (r, \theta) \text{ a } (x, y) : \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}.$$

Otras coordenadas en el espacio $\mathbb{R}^3$

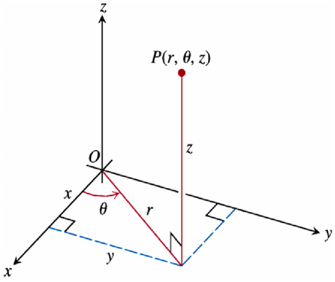
Coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : \; x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$**:**
$\mathbb{R}^3 = \{(r, \theta, z) : \quad r \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}\}$

Cambio entre coordenadas cartesianas y cilíndricas de un mismo punto:

$$(r, \theta, z) \to (x, y, z) \; \begin{cases} x &= r \cos\theta \\ y &= r \sin\theta \\ z &= z \end{cases}$$

$$(x, y, z) \to (r, \theta, z) \; \begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan(y/x) \\ z &= z \end{cases}$$



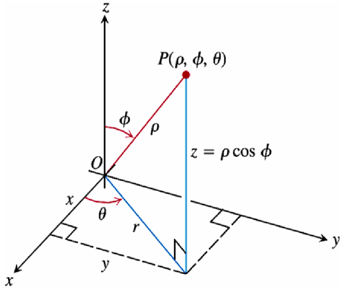
Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$

Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(\rho,\theta,\phi): \quad \rho \in (0,\infty), \quad \theta \in [0,2\pi), \quad \phi \in [0,\pi)\}$$

Cambio entre coordenadas cartesianas y esféricas de un mismo punto:

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \rho \cos\theta \sin\phi \\ y & = \rho \sin\theta \sin\phi \\ z & = \rho \cos\phi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \rho & = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta & = \arctan(y/x) \\ \phi & = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{array}\right.$$



Nomenclatura:
La **bola abierta**, $B(\vec{x}_0, r)$, de centro $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a *distancia* menor que r del punto $\vec{x}_0$:

$$B(\vec{x}_0, r) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \; \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r \right\}.$$

La **bola cerrada**, $\overline{B}(\vec{x}_0, r)$, de centro $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a *distancia* menor o igual que r del punto $\vec{x}_0$:

$$\overline{B}(\vec{x}_0, r) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \; \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r \right\}.$$

Definición

- *Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es* **abierto** *si para todo $\vec{x} \in U$ existe un $r > 0$ (que puede depender de $\vec{x}$) tal que $B(\vec{x}, r) \subseteq U$.*
- *Un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es* **cerrado** *si su complementario $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto.*
- *Un* **entorno** *de un punto de $\mathbb{R}^n$ es cualquier (conjunto) abierto que contiene a dicho punto.*

Definición

- *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es* **acotado** *si existe un $R > 0$ tal que se verifica $E \subseteq B(\mathbf{0}, R)$, es decir, $\|x\| < R, \forall x \in E$.*
- *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es* **compacto** *si es cerrado y acotado.*

Ejercicios:

1. Toda bola abierta es un conjunto abierto (y toda bola cerrada es cerrada).
2. El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0\}$ es un abierto.
3. Un conjunto F es cerrado si y solo si toda sucesión de F que sea convergente tiene su límite en F ("nada escapa de F").
4. Un conjunto F es compacto si y solo si toda sucesión de F posee una subsucesión convergente con límite en F.

Para (3) y (4) ver más adelante

Definición

- *El* **interior** *de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el subconjunto de puntos:*

$$\mathring{E} := \{\vec{x} \in E : \ \exists\, r > 0 : \ B(\vec{x}, r) \subseteq E\} \subseteq E.$$

- *La* **frontera** *de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos:*

$$\partial E := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \ \forall\, r > 0 : \ B(\vec{x}, r) \cap E, \ B(\vec{x}, r) \cap E^c \neq \varnothing\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- *La* **clausura** *de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto: $\overline{E} := E \cup \partial E$.*

Teorema

Se tiene que:

- *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto si y sólo si $\mathring{E} = E$.*
- *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si $\partial E \subseteq E$.*
- *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si $\overline{E} = E$.*

Observaciones:

- Hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.
- Por convención, $\varnothing$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados simultáneamente (y son los únicos con esta propiedad).
- El interior de un conjunto es un conjunto abierto; la clausura de un conjunto es un conjunto cerrado.

Ejercicio: Dibuja el conjunto A y responde cualitativamente a las siguientes cuestiones: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$

1. ¿Es abierto el conjunto A? ¿es cerrado?
2. Indica cuáles son los conjuntos $\mathring{A}$, $\overline{A}$ y ∂A.

Lema

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $p \in \bar{E}$ si y sólo si toda bola con centro p interseca a E.

Sucesiones en $\mathbb{R}^n$.

Una **sucesión** en $\mathbb{R}^n$ es una colección de puntos de $\mathbb{R}^n$ indexada por $\mathbb{N}$; i.e,

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}, \cdots \subset \mathbb{R}^n$$

Cada punto $p_k \in \mathbb{R}^n$, así que

$$p_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n),$$

donde x_k^1 es la primera coordenada de p_k, x_k^2 es la segunda coordenada de $p_k i$, y así hasta la última.
Fijándonos en una coordenada determinada (por ejemplo, la tercera), tenemos una sucesión usual de números reales

$$x_1^3, x_2^3, \ldots, x_k^3, x_{k+1}^3, \ldots$$

Por ello también podemos definir una sucesión en $\mathbb{R}^n$ como un conjunto de n-sucesiones en $\mathbb{R}$, una para cada coordenada.

Límite de una sucesión en $\mathbb{R}^n$

Definición

Decimos que una sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^n$ **converge** *a un punto* $L \in \mathbb{R}^n$, *escrito como* $\lim_{k\to\infty} p_k = L$, *si para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $k > N$, *se tiene que* $\|p_k - L\| < \varepsilon$.

Teorema

El límite de una sucesión, si existe, es único.

Lemma

Dada una sucesión $\{p_k\}_k = \{(x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)\}_k \in \mathbb{R}^n$ *y un punto* $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}^n$, *se tiene que*

$$\lim_{k\to\infty} p_k = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k^i = L_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Conjuntos cerrados y sucesiones

Definición

Si $E \subset \mathbb{R}^n$*, un punto* p *se llama un* **punto límite, o punto de acumulación, de** E*, si existe una sucesión* p_k *de puntos en* E *con* $\lim p_k = p$*.*

Teorema

Un conjunto E *en* $\mathbb{R}^n$ *es cerrado si y solamente si el límite* L *de toda sucesión* $\{p_k\}$ *convergente de puntos en* E *permanece en* E*.*

- **Consecuencia**: Para ver que un conjunto no es cerrado, basta encontrar una sucesión $p_k \in E$ con $\lim_{k\to\infty} p_k \notin E$.

Teorema

La clausura de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ *coincide con la unión del conjunto y de sus puntos límites.*

Corolario

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ *es un conjunto, entonces* $\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus E}$*.*

A modo de resumen

DEFINICIONES (dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$)

- Puntos interiores: $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \subset A\}$.
- Puntos exteriores: $\mathrm{Ext}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \cap A = \emptyset\}$.
- Puntos frontera: $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0,\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset,\ B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset\}$.
- Puntos aislados: $\mathrm{Ais}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \cap A = \{x\}\}$.
- Puntos de adherencia, clausura: $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0,\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$.
- Puntos límite o de acumulación: $A' = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0,\ B_r^*(x) \cap A \neq \emptyset\}$, donde $B_r^*(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$, (bola *perforada*).

RELACIONES Y CARACTERIZACIONES ($\uplus$ denota unión disjunta):

- $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$; $\quad \mathrm{Ais}(A) \subset \partial A$; $\quad \mathrm{Ext}(A) = (A^c)^\circ$.
- $\overline{A} = A \cup \partial A = \mathring{A} \uplus \partial A = A' \uplus \mathrm{Ais}(A)$.
- A es abierto $\iff A = \mathring{A}$; $\quad A$ es cerrado $\iff A^c$ es abierto $\iff A = \overline{A}$.
- A es cerrado $\iff$ toda sucesión de puntos de A convergente tiene su límite en A
- $x \in A' \iff$ existe una sucesión de puntos de A, todos distintos a x, que converge a x.

Conjuntos conexos

Definición

Se dice que el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es **conexo** *si no existen dos conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos, E_1, E_2 de forma que se tenga $D \subset E_1 \cup E_2$ con $D \cap E_1 \neq \emptyset$ y $D \cap E_2 \neq \emptyset$ (i.e., D no tiene componentes separadas por conjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos).*

En $\mathbb{R}$, un conjunto es conexo si y solo si es un intervalo (abierto, cerrado, finito o no). En dimensiones superiores, la topología de estos conjuntos puede llegar a ser muy complicada.

Definición

Se dice que el conjunto no vacío $D \subset \mathbb{R}^n$ es **conexo por arcos** *si dados $x, y \in D$ cualesquiera existe una función continua $\varphi : [0,1] \to D$ de forma que $\varphi(0) = x, \quad \varphi(1) = y$.*

Un conjunto conexo por arcos es siempre conexo pero el recíproco no es cierto: un ejemplo viene dado por la gráfica de la función sen $\frac{1}{x}$ unión el punto $(0,0)$, es decir,

$$D = \left\{ \left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) : x \in (0,1] \right\} \bigcup \{(0,0)\}$$