Funciones

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? ¿Cuáles sobreyectivas? ¿Es alguna de ellas biyectiva? (Comenzar comprobando que todas ellas son funciones y que lo son entre los conjuntos que se indican).

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(m) = m + 2.$

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(m) = 2m - 7.$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - x^3.$

d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2 + 4x.$

e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n(n + 1).$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$

g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n^2 + n + 1.$

h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(t) = t/(t + 1).$

2. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |2x+1/2|-1/2$, hallar su imagen y también $f(\mathbb{Z})$. Demostrar que f no es ni sobreyectiva ni inyectiva. Probar que, sin embargo, se da una biyección entre $\mathbb{Z}$ y su imagen.

3. Sea $f : X \to Y$ una función. Dados subconjuntos $Z, W \subset Y$, demostrar:

a) $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W).$

b) $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W).$

c) $f(f^{-1}(Z)) = f(X) \cap Z.$

d) $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z).$

4. Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = \{(n + 1)/2 : (n \in A) \wedge (n \text{ es impar})\}$ para $A \subset \mathbb{N}$. Estudiar si la función es inyectiva y/o sobreyectiva. ¿Quién es $f^{-1}(\emptyset)$?

5. Sean $f, g : \mathbb{N} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{P} = \{primos\}$ las funciones definidas por

$f(n) =$ `el mayor primo que divide a` n

$g(n) =$ `el menor primo que divide a` n.

a) Decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.

b) ¿Quién es $f^{-1}(\{3\})$? ¿Quién es $g^{-1}(\{3\})$?

6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1, \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ (x - 1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Dibujar los gráficos de las funciones $f,\ g,\ g \circ f$ y $f \circ g$.

b) Encontrar las imágenes de cada una de las cuatro funciones anteriores y decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.

7. Dadas funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, probar las siguientes afirmaciones:

a) f inyectiva y g inyectiva $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva.

b) f sobre y g sobre $\Rightarrow g \circ f$ sobre.

c) Si falta alguna de las dos hipótesis en los casos anteriores, la conclusión puede ser falsa.

d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

e) Si g es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si lo es f, y es sobre si y sólo si lo es f. **f)** Si además $X = Z$, la afirmación del apartado anterior también es cierta para $f \circ g$.

8. Sean A y B dos conjuntos finitos de m y n elementos respectivamente.

a) Hallar el número de funciones $f : A \longrightarrow B$.

b) Hallar el número de funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$.

9. Sea X un conjunto finito con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene $X \times X$? ¿Cuántas funciones hay de X en $X \times X$?

10. Demostrar que dados n enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, no necesariamente distintos, existen enteros k y l con $0 \leq k < l \leq n$ tales que la suma $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ es un múltiplo de n.

11. Considerando que la amistad es siempre mutua, demostrar que en un grupo de n personas $(n \geq 2)$ siempre existen dos con el mismo número de amistades.

12. Demostrar que si elegimos 7 números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$, entre ellos siempre habrá dos que sumen 12.