Teoría de Números Elemental

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que los números $8n+3$ y $3n+1$ son coprimos.

2. Sabemos que, dados dos enteros positivos a y b, existen primos $p_1, \dots, p_s$ de modo que $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$ para algunos $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$ (Teorema fundamental de la aritmética). Se pide:

a) Expresar el $\mathrm{mcd}(a,b)$ y el $\mathrm{mcm}(a,b)$ en función de estas factorizaciones.

b) Demostrar que $ab = \mathrm{mcd}(a,b) \cdot \mathrm{mcm}(a,b)$.

c) Hallar el máximo común divisor de 1547 y 3059 usando dos procedimientos: el descrito en a) y el algoritmo de Euclides.

3. Sean a, b, m números naturales con a y b coprimos (primos entre sí). Demuestre que:

$$\text{Si} \quad a \mid m \quad \wedge \quad b \mid m \Longrightarrow ab \mid m$$

Encuentre un ejemplo que muestre que esto puede no ser cierto si a y b no son coprimos.

4. Encontrar todos los pares de enteros a, b tales que $\mathrm{mcd}(a,b) = 10$ y $\mathrm{mcm}(a,b) = 100$.

5. Sea $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ la descomposición de n en factores primos. Utilizando la unicidad de la descomposición en primos, demostrar que n tiene $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_s+1)$ divisores positivos.

6. Demostrar que existen infinitos enteros primos de la forma $4n-1$ y de la forma $6n-1$.

7. Se pide hallar el conjunto de soluciones de las siguientes ecuaciones diofánticas:
a) $110x + 55y = 22$, b) $111x + 36y = 15$, c) $10x + 26y = 1224$, d) $6x + 10y = 20$.

8. He comprado bolígrafos a 55 céntimos y rotuladores a 71 céntimos. Si me he gastado en total 20 euros, ¿cuántos he comprado de cada? Se pide justificar la respuesta.

9. Tengo una bolsa con 30 caramelos y los voy a repartir entre mis sobrinos, dándoles 2 caramelos a cada niño y 7 a cada niña. ¿Cuántos sobrinos tengo si la menor de mis sobrinas se llama Silvia y los mayores de mis sobrinos se llaman Pablo y Julián?

10. Se dice que un entero positivo es *perfecto* si es igual a la suma de sus divisores propios (todos menos él mismo). Demostrar que si $2^n - 1$ es primo entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es un número perfecto.

11. **a)** Probar la identidad $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$.

Utilizar esta identidad para demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo. Los primos de la forma $2^p - 1$ reciben el nombre de *primos de Mersenne*.

b) Probar la identidad $x^{2k+1} + 1 = (x+1)(x^{2k} - x^{2k-1} + \cdots - x + 1)$.
Utilizar esta identidad para demostrar que si $2^n + 1$ es primo, entonces n es una potencia de 2. Los primos de la forma $2^{2^k} + 1$ se denominan *primos de Fermat*.