Tema 3. Funciones

3.0. Contenido y documentación

H3_Funciones.pdf

3.1. Concepto de función

*Definición. Dados dos conjunto no vacíos X e Y. Decimos que una **función** de X en Y es una aplicación que asigna a cada elemento de X un elemento de Y.*
Notación. $f : X \to Y$
$$x \mapsto f(x) = y$$

*Definición. Dada una función $f : X \to Y$. Decimos que X es el **domininio** o conjunto de salida de f.*
Notación. $\operatorname{Dom}(f)$.

*Definición. Dada una función $f : X \to Y$. Decimos que Y es el **codominio** o conjunto de llegada de f.*

*Definición. Dada una función $f : X \to Y$. Definimos el recorrido o **conjunto imagen** de f como el conjunto de elementos de Y que son imagen de algún elemento de X, es decir, los $f(x) \in Y : x \in X$.*
Notación. $\operatorname{Im}(f) = f(X)$.

Algunas observaciones:

1. Por definición, el conjunto $Im(f) \subset Y$.
2. Se admite que dados $x_1, x_2 \in X$ tal que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$.
3. No es posible que $f(x) = y \wedge f(x) = z$ con $y \neq z$.
4. Entendemos por función una terna ordenada (f, X, Y).

Ejemplo 1. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^2 + 1$. Podemos determinar que $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} = [1, \infty)$.

Ejemplo 2. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (función parte entera). Podemos determinar que $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{Z}$.

3.1.1. Gráficas

*Definición. Dada una función $f : X \to Y$. Definimos la **gráfica** de f como el subconjunto de $X \times Y$ formado por los pares ordenados $(x, f(x))$ con $x \in X$.*
Notación. $\operatorname{Graf}(f)$.

3.2. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición. Dada una función $f : X \to Y$*. Decimos que* f *es* ***inyectiva*** *si* $\forall x_1, x_2 \in X$ *tales que* $x_1 \neq x_2$*, tenemos que* $f(x_1) \neq f(x_2)$*. Equivalentemente, si* $f(x_1) = f(x_2)$*, entonces* $x_1 = x_2$*.*

Definición. Dada una función $f : X \to Y$*. Decimos que* f *es* ***sobeyectiva*** *si* $\forall y \in Y, \exists x \in X$ *tal que* $f(x) = y$*. Equivalentemente,* $\mathrm{Im}\,(f) = f(X) = Y$*.*
Nota. Por definición, $\mathrm{Im}\,(f) \subset Y$, luego, basta con ver que $Y \subset \mathrm{Im}\,(f)$.

Definición. Dada una función $f : X \to Y$*. Decimos que* f *es* ***biyectiva*** *si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.*

Ejemplo 3. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$. Determinamos sus propiedades:
- Tenemos que $f(1) = f(-1) = 0$, pero $1 \neq -1$. Luego, f no es inyectiva.
- Tenemos que $y = f(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+1}$, de forma que $y + 1 < 0$, f no está definida. Luego, f no es sobreyectiva.
- Como f no es ni inyectiva ni sobreyectiva, f no es biyectiva.

Ejemplo 4. Dada una función $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Determinamos sus propiedades:
- Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $\dfrac{x_1}{x_1+1} = \dfrac{x_2}{x_2+1} \Leftrightarrow x_1(x_2+1) = x_2(x_1+1) \Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Luego, f es inyectiva.
- Tenemos que $y = f(x) = \dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = x \Leftrightarrow xy + y = x \Leftrightarrow x - xy = y \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1-y}$. Sabemos que $\dfrac{y}{1-y} > -1$, de forma que $y < y - 1$, lo cual no es posible. Luego, f no es sobreyectiva.
- Como f es inyectiva pero no sobreyectiva, f no es biyectiva.

3.3. Composición de funciones y función inversa

Definición. Dadas dos funciones $g : U \to X$ *y* $f : X \to Y$*. Definimos la composición de las funciones* f *y* g *como la función* $h(u) = f(g(u)), \forall u \in U$*.*
Notación. $f \circ g : U \to Y$.
Nota. En general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Ejemplo 5. Dada dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 1$. Podemos definir las composiciones:
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$.

Definición. Definimos la ***función identidad*** *en* X *como* $id_X : X \to X$ *tal que* $id_X(x) = x, \forall x \in X$*.*

Definición. Dada una función $f : X \to Y$*. Definimos la* ***función inversa*** *de* f *como aquella función* $g : Y \to X$ *tal que* $(g \circ f) = id_X$ *y* $(f \circ g) = id_Y$*.*
Notación. f^{-1}.

Ejemplo 6. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x + 2$. La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \dfrac{x-2}{3}$ verifica que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x-2}{3}\right) = 3\left(\dfrac{x-2}{3}\right) + 2 = x - 2 + 2 = x$, de forma que $(f \circ g)(x) = id_{\mathbb{R}}$. Luego, $f^{-1} = g$.

> Proposición. Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces, f tiene inversa si y solo si f es biyectiva.

Demostración.
$\Rightarrow)$ Suponemos que $\exists f^{-1}$.
- Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$. Luego, f es inyectiva.
- Tenemos que $\forall y \in Y, \exists f^{-1}(y) = x \in X$, de forma que $f(f^{-1}(y)) = f(x) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y \in \mathrm{Im}\ (f)$, por lo que $Y \subset \mathrm{Im}\ (f)$. Luego, f es sobreyectiva.

Como f es inyectiva y sobreyectiva, f es biyectiva.
$\Leftarrow)$ Suponemos que f es biyectiva.
Como f es biyectiva podemos decir que $\forall y \in Y, \exists! x \in X : y = f(x)$. Definimos una función $g : Y \to X$ como aquella que asocia a cada elemento $y \in Y$ el único elemento de X que llega a él por f, es decir, $g(y) = x \in X$, donde $y = f(x)$. Entonces:
- $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$, de forma que $f \circ g = id_Y$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$, de forma que $g \circ f = id_X$.

Luego, g es la función inversa de f, $g = f^{-1}$. $\square$

3.4. Comportamiento respecto la unión, la intersección y el complementario

Dados los conjuntos X, Y, U y V no vacíos y tales que $U, V \subset X$, y la función $f : X \to Y$. Entonces, definimos las siguientes propiedades:

1. $U \subset V \Rightarrow f(U) \subset f(V)$.
2. $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$.
3. $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$, de forma general, $f(U) \cap f(V) \not\subset f(U \cap V)$.

Demostración 1.
Si $y \in f(U)$, entonces $\exists x \in U : f(x) = y$. Como $x \in U \subset V$, entonces $x \in V$ e $y = f(x) \subset f(V)$. $\square$

Demostración 2.
Tenemos que $y \in f(U \cup V) \Leftrightarrow \exists x \in U \cup V : f(x) = y$, de forma que:
- $x \in U$ con $f(x) = y \Rightarrow y \in f(U)$ ó
- $x \in V$ con $f(x) = y \Rightarrow y \in f(V)$.

En cualquier caso, $y \in f(U) \cup f(V)$. $\square$

Demostración 3.
Si $y \in f(U \cap V)$, entonces $\exists x \in U \cup V : f(x) = y$, de forma que:
- $x \in U$ con $f(x) = y \Rightarrow y \in f(U)$ y
- $x \in V$ con $f(x) = y \Rightarrow y \in f(V)$.

Luego, $y \in f(U) \cap f(V)$.

3.4.1. Preimagen de una función

*Definición. Dada una función $f : X \to Y$ y el conjunto V tal que $V \subset Y$. Definimos la **preimagen** o imagen inversa de V por f como el conjunto de los $x \in X$ tales que $f(x) \in V$.*

Notación. $f^{-1}(V)$.
Nota. Tenemos que $f^{-1}(V) \subset X$, y puede ocurrir que $f^{-1}(V) = \emptyset$.

Ejemplo 7. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Definimos la preimagen del conjunto $\{0, 4\}$ como $f^{-1}(\{0,4\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \{0,4\}\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0 \vee x^2 = 4\} = \{-2, 0, 2\}$.

Dada una función $f : X \to Y$ y dos subconjuntos $U, V \subset X$. Definimos las siguientes propiedades:

1. Si $U \subset V$, entonces $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$.
2. $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.
3. $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
4. $f^{-1}(Y \backslash V) = X \backslash f^{-1}(V)$, es decir $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$.

Demostración 1.
Si $x \in f^{-1}(U)$, entonces $\exists y \in U : y = f(x)$. Como $y \in U \subset V$, entonces $y \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$. $\square$

Demostración 2.
Si $x \in f^{-1}(U \cup V)$, entonces $\exists y \in U \cup V : y = f(x)$, de forma que:
- $y \in U$ y $x \in f^{-1}(U)$ ó
- $y \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$.

En cualquier caso, $x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. $\square$

Demostración 3.
Si $x \in f^{-1}(U \cap V)$, entonces $\exists y \in U \cap V : y = f(x)$, de forma que:
- $y \in U$ y $x \in f^{-1}(U)$, y
- $y \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$.

Luego, $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. $\square$

Demostración 4.
Si $x \in f^{-1}(Y \backslash V)$, entonces $f(x) \in Y \backslash V$, de forma que $f(x) \notin V$ y $x \notin f^{-1}(V)$. Luego, $x \in X \backslash f^{-1}(V)$. $\square$

3.5. Conjuntos finitos y Principio del Palomar

Definición. Dado un conjunto X no vacío. Decimos que X es ***finito*** *si existe una función biyectiva $f : X \to \{1, 2, ..., n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*
Nota. En este caso, diremos que X tiene n elementos o que su cardinal es n, $|X| = n$.

Algunas observaciones respecto al cardinal de conjuntos finitos:

1. Por convenio, se establece que $|\emptyset| = 0$.
2. Dada una función $f : X \to Y$ con $|X| = m \wedge |Y| = n$. Entonces:
   - Si $m < n \Rightarrow f$ no puede ser sobreyectiva.
   - Si $m > n \Rightarrow f$ no puede ser inyectiva (Principio de Palomar).

3.5.1. Principio del Palomar

> **Principio del Palomar**. Si $kn + 1$ palomas comparten n nidos. Entonces, hay, al menos, un nido con $k + 1$ palomas.

Ejemplo 8. Demostramos que entre $n+1$ enteros arbitrarios existen dos cuya diferencia es divisible por n, es decir, $\exists a, b \in \mathbb{Z} : n|(a-b)$.
Definimos enteros de la forma $a = qn + r$, con $r \in \{0, 1, ..., n-1\}$. De forma que, por el Principio del Palomar, teniendo $n+1$ enteros y tan solo n posibles valores distintos para r, deben existir dos r_i, r_j tales que $r_i = r_j$ para algunos enteros a_i, a_j.
Así, tenemos que $a_i - a_j = q_i n + r_i - (q_j n + r_j) = q_i n - q_j n + r_i - r_j = n(q_i - q_j)$ que, evidentemente, es divisible por n.

Ejemplo 9. Demostramos que entre 731 personas que acuden a un concierto, hay, al menos, 3 que cumplen años el mismo día.
Descomponemos $731 = 365 \cdot 2 + 1$. Luego, por el Principio del Palomar, teniendo $365 \cdot 2 + 1$ personas y 365 días en un año, debe haber, al menos, 3 personas que cumplen años el mismo día.