

Conjuntos y Números, UAM

EXAMEN FINAL

17 DE ENERO DE 2022

APELLIDOS Y NOMBRE: _____ GRUPO: _____

--	--	--	--	--	--	--

Se pide razonar y justificar todas las respuestas

Tiempo disponible: 3 horas

- (1 punto) Demostrar que $2^{4n+2} + 7^{2n+1}$ es múltiplo de 11 para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- (1 punto) Sea $f : A \rightarrow B$ una función definida entre dos conjuntos arbitrarios no vacíos A y B . Demostrar la doble implicación
 f es inyectiva $\iff f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ para todo par de subconjuntos A_1, A_2 de A
- (2 puntos) Resolver el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{73} \\ x \equiv 5 \pmod{97} \end{cases}$$

- (2 puntos) Descomponer el polinomio $p(x) = x^7 + x^6 + x + 1$ en sus factores irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$. Usar (en la respuesta final) la forma $a + bi$ para los complejos.
- (2 puntos) En el conjunto \mathbb{R} definimos la relación de equivalencia

$$a \mathcal{R} b \iff |\cos a| = |\cos b|$$

- Describir la clase de equivalencia $\bar{x} := \{y \in \mathbb{R} : y \mathcal{R} x\}$ para $x = 0$ y $x = \pi/6$.
- Considera la función $f : \mathbb{R}/\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(\bar{x}) = 2 \cos^2 x - \lfloor 2 \cos^2 x \rfloor \quad \text{para toda clase } \bar{x} \in \mathbb{R}/\mathcal{R}$$

donde $\lfloor u \rfloor$ denota la parte entera del número real u . Comprueba que f está bien definida y determina el conjunto imagen de f . Estudia si f es o no inyectiva.

- (a)(1 punto) Sea A el conjunto formado por todas las funciones $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}$. Decidir (y justificar) si la cardinalidad de A coincide con la de \mathbb{N} o la de \mathbb{R} .
(b)(1 punto) Definir una función inyectiva de \mathbb{R} en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ y demostrar que ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad.

Debes definir mediante una fórmula las funciones y comprobar las propiedades de las mismas que te permitan concluir tus afirmaciones.