TEMA 3: Funciones continuas

Fernando Soria

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid (UAM)

Grado en Matemáticas y doble grado Mat-Ing Inf.

Funciones: repaso

Definición

Una función f es una operación por la que se asigna a cada elemento x de un conjunto A de números un valor (y solo uno) $f(x) \in \mathbb{R}$. Se escribe $f : A \to \mathbb{R}$.

1. A se denomina el dominio de f y se denota Dom_f o $Dom(f)$.
2. $f(A) = \{ f(x) \,|\, x \in A\}$ se denomina la imagen de f, y se denota $\mathrm{Im}(f)$.

Si $f : A \to B$ es una función entre dos conjuntos A y B de números reales, se dice que

- f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ solo cuando $x = y$. En otras palabras, siempre que $x \neq y \in A$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$;
- f es sobreyectiva si $\mathrm{Im}(f) = B$;
- f es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Dominio natural de una función

Si una función viene definida por una determinada expresión algebraica sin ninguna indicación adicional, llamaremos dominio natural de definición de dicha función al conjunto de puntos donde la expresión algebraica tiene sentido.

EJEMPLOS

1. El dominio natural de $f(x) = \sqrt{x}$ viene dado por $A = Dom_f = [0, \infty)$.
2. El dominio natural de $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ viene dado por $A = Dom_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
3. El dominio natural de $H(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 1}$ coincide con el del caso anterior.
4. El dominio natural de $S(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ viene dado por $A = Dom_S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

OBSERVACIÓN: Las funciones de los ejemplos 3 y 4 tienen una extensión a ciertos puntos fuera de su dominio natural que es consistente con el resto de la definición. En concreto podemos definir $H(-1) = -1/2$ y $S(0) = 1$. Esta extensión está relacionada con el comportamiento de ambas funciones en dichos puntos.

Funciones: repaso (cont.)

Composición de funciones: Dadas funciones $f : A \to B$, $g : B \to C$, la *composición* de f y g es la función $g \circ f : A \to C$ definida como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Para calcular $g \circ f$ se sustituye $f(x)$ en la variable de g, y se lee como una función de x.

Inversa de una función: Si $f : A \to B$ es una función **biyectiva**, la *inversa de* f, denotada por f^{-1} es la función $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1} \circ f(x) = x$, y $f \circ f^{-1}(y) = y$.

En la práctica esto consiste en escribir $f(x) = y$ y despejar la y en función de x.

Funciones pares e impares: Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice

- **par** si $f(x) = f(-x)$;
- **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

Funciones: repaso (cont.)

Definición (Gráficas)

Dada $f : A \longrightarrow B$ *se define su gráfica como el subconjunto del producto cartesiano* $A \times B$ *dado por*

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

La gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el conjunto de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\,(x, f(x))\ :\ x \in A\,\}$.

Simetrías y grafos:

- Una función par es simétrica respecto al eje OY;
- una función impar es simétrica respecto al centro de coordenadas;
- una función inversa es la reflejada de la gráfica de la función original con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Traslaciones y grafos:

- La gráfica de la función $g(x) = f(x + c)$ se obtiene trasladando a la izquierda c unidades la gráfica de f;
- la gráfica de la función $h(x) = f(x) + c$ se obtiene subiendo c unidades la gráfica de f;
- la gráfica de la función $k(x) = c \cdot f(x)$ se obtiene dilatando por un factor de c la altura de cada punto en la gráfica de f.

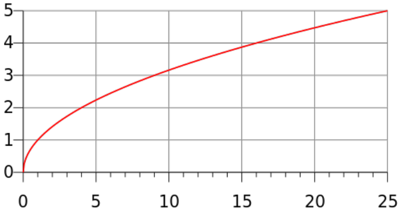
Traslaciones y grafos (continuación):

- La gráfica de la función $y = -f(x)$ se obtiene a partir de la de $f(x)$ sin más que reflejarla respecto al eje de las x's;
- la gráfica de la función $h(x) = f(-x)$ se obtiene a partir de la de $f(x)$ sin más que reflejarla con respecto al eje de las y's.

Algunas funciones elementales.

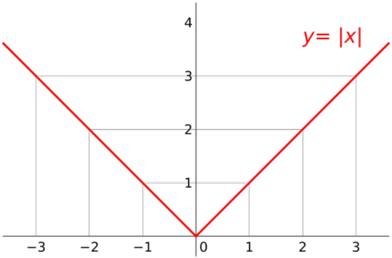
Función : $f(x) = \sqrt{x}$;

- dominio $[0, \infty)$, imagen $[0, \infty)$;
- es la función inversa de $x \to x^2$;
- se aproxima a ∞ cuando $x \to \infty$;



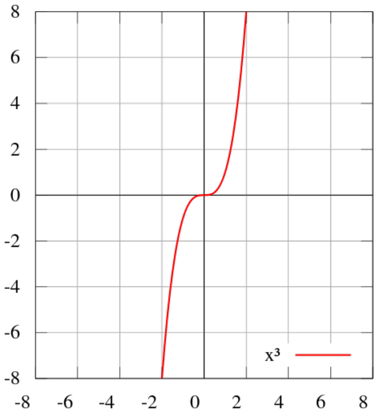
Función : $f(x) = |x|$;

- dominio $(-\infty, \infty)$, imagen $[0, \infty)$;
- es par;
- se aproxima a ∞ cuando $x \to \infty$ ó $-\infty$;



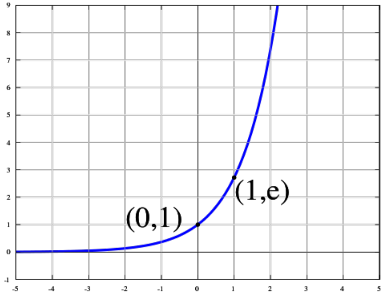
Función : $f(x) = x^3$;

- dominio $\mathbb{R}$, imagen $\mathbb{R}$;
- es una función impar;
- se aproxima a $-\infty$ cuando $x \to \infty$;
- se aproxima a ∞ cuando $x \to \infty$;



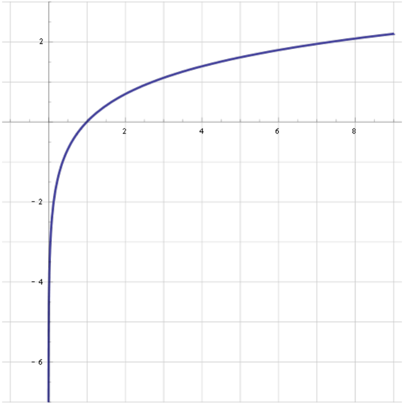
Exponencial: $f(x) = e^x$;(estudiaremos sus propiedades detenidamente en el siguiente capítulo)

- dominio $\mathbb{R}$, imagen $(0, \infty)$;
- ni par, ni impar, ni periódica;
- $f(x) > 0$;
- se aproxima a 0 cuando $x \to -\infty$;
- se aproxima a ∞ cuando $x \to \infty$;



Funciones elementales (cont.)

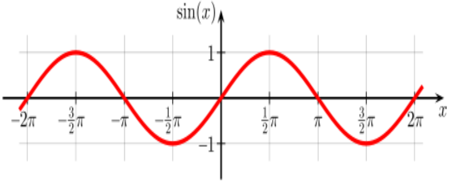
Logaritmo: $f(x) = \log x$;



- dominio $(0, \infty)$, imagen $\mathbb{R}$;
- es la función inversa de e^x;
- se aproxima a $-\infty$ cuando $x \to 0$;
- se aproxima a ∞ cuando $x \to \infty$;

Función seno: $f(x) = \operatorname{sen} x$;

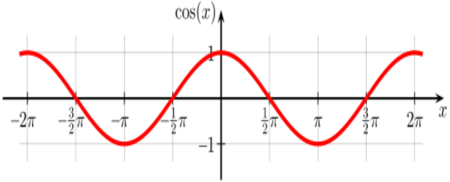
- dominio $(-\infty, \infty)$, imagen $[-1, 1]$;
- periódica con periodo 2π;
- es una función impar;
- se anula en puntos de la forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- toma el valor 1 en $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- toma el valor -1 en $\dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;



Función : $f(x) = \cos x$;

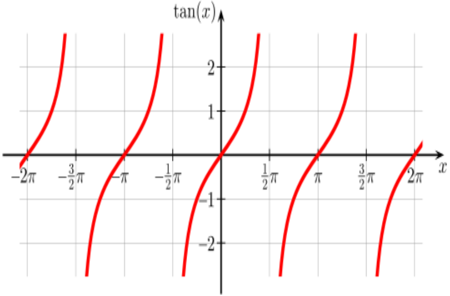
- dominio $(-\infty, \infty)$, imagen $[-1, 1]$;
- periódica con periodo 2π;
- es una función par;
- se anula en puntos de la forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- toma el valor 1 en $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- toma el valor -1 en $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- trasladada del seno por $\frac{\pi}{2}$ unidades:

$$\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}).$$



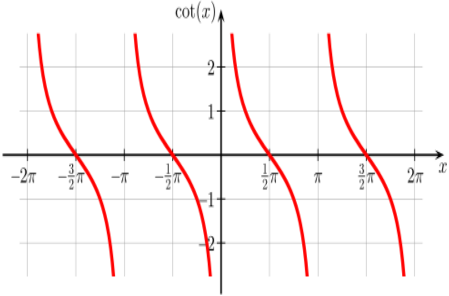
Función : $f(x) = \tan x$;

- dominio: $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, imagen: $\mathbb{R}$;
- es una función impar;
- periódica de periodo π;
- se aproxima a $\pm\infty$ cuando $x \to k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ dependiendo de que lo haga por la izquierda o la derecha (ver gráfica);



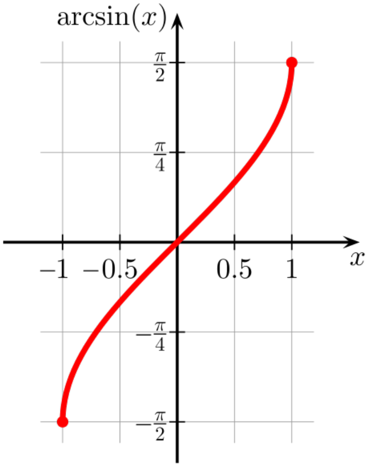
Función : $f(x) = \cot x$;

- dominio: $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$,
  imagen: $\mathbb{R}$;
- es una función impar;
- periódica de periodo π;
- se aproxima a $\pm\infty$ cuando $x \to k\pi$ dependiendo de que lo haga por la izquierda o la derecha (ver gráfica);



Función : $f(x) = \arcsin x$;

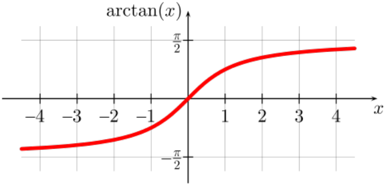
- dominio $[-1, 1]$, imagen $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- es la función inversa de $\operatorname{sen} x$;
- es una función impar;
- a veces se toma la función con imagen en otro intervalo de la forma $[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}]$;



Funciones elementales (cont.)

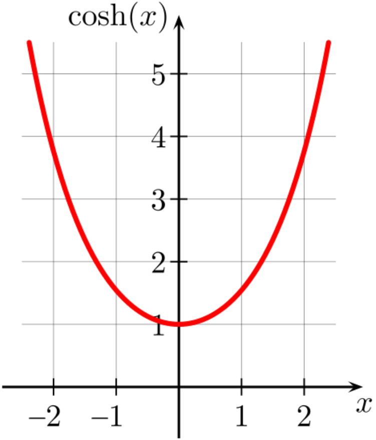
Función : $f(x) = \arctan$;

- dominio $\mathbb{R}$, imagen $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
- es la función inversa de $\tan x$;
- es una función impar;
- a veces se toma la función con imagen en otro intervalo de la forma $\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$;



Función : $f(x) = \cosh x$; (coseno hiperbólico)

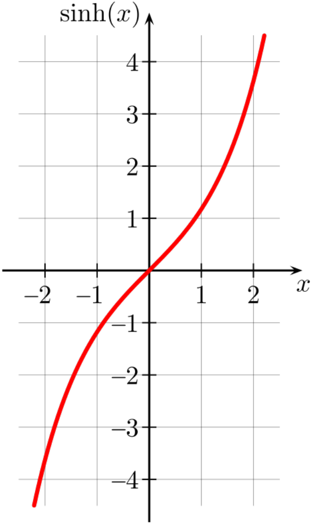
- se define como $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;
- dominio $\mathbb{R}$, imagen $[1, \infty)$;
- es una función par;
- se aproxima a ∞ cuando $x \to \pm\infty$;



Funciones elementales (cont.)

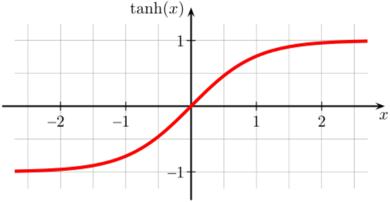
Función : $f(x) = \sinh x$; (seno hiperbólico)

- se define como $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;
- hay una relación $(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = 1$;
- dominio $\mathbb{R}$, imagen $\mathbb{R}$;
- es una función impar;
- se aproxima a $-\infty$ cuando $x \to -\infty$;
- se aproxima a ∞ cuando $x \to \infty$;



Función : $f(x) = \tanh x$; (tangente hiperbólica)

- se define como $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$;
- dominio $\mathbb{R}$, imagen $(-1, 1)$;
- es una función impar;
- se aproxima a -1 cuando $x \to -\infty$;
- se aproxima a 1 cuando $x \to \infty$;



Límites

Definición

Se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ *tiende a* L *(o tiene límite* L*) cuando* x *tiende al cierto punto* b *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in A$ *y* $0 < |x - b| < \delta$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *(puntos próximos a* b *tienen imágenes próximas a* L*. Se denota*

$$\lim_{x \to b} f(x) = L.$$

El punto b no tiene por qué estar en el dominio A pero si se necesita que esté *próximo* a él (e.g., $A = (0, 1]$, con $b = 0$)

Definición (Límite cuando $x \to \infty$)

El límite de f *cuando* x *tiende hacia* ∞ *es* L *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un* $R > 0$ *tal que si* $x \in A$ *y* $x > R$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$*. Se escribe* $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Definición (Límite cuando $x \to -\infty$)

El límite de f *cuando* x *tiende hacia* $-\infty$ *es* L *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un* $R < 0$ *tal que si* $x \in A$ *y* $x < R$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$*. Se escribe* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Límites laterales

Estos son como en el límite $\lim_{x\to b} f(x)$ pero tomando x acercándose hacia b sólo desde un lado, o desde el otro.

Definición

El límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a b es L si los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando x se aproxima hacia b satisfaciendo $x > b$.

Se escribe $\lim_{x\to b^+} f(x)$.

Definición

El límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a b es L si los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando x se aproxima hacia b satisfaciendo $x < b$.

Se escribe $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Límites laterales

Teorema

$\lim_{x \to a} f(x)$ *existe si y sólo si existen los dos límites laterales y coinciden. Esto es,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \textit{si y solo si} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

También hay versiones de límites laterales tendiendo a $\pm\infty$; por ejemplo,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

si para todo $M > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo x con $0 < x - a < \delta$, se tiene que $f(x) > M$, y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

si para todo $M < 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo x con $0 < x - a < \delta$, se tiene que $f(x) < M$

Límites con sucesiones y cálculo operativo.

Teorema

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función, y $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si para toda sucesión $x_n \to a$, con $\{x_n\}$ en el dominio de f y donde $x_n \neq a$, se tiene que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$

(Ver demostración en los apuntes manuscritos de la clase del 21 de octubre).

Hay versiones similares para cuando $x \to \pm\infty$ y para límites laterales.

CÁLCULO OPERATIVO con límites:

- Es muy parecido al cálculo de límites de sucesiones.
- los límites respetan las operaciones elementales: el límite de una suma (o de un producto) es la suma (o el producto) de los límites (si estos existen), e igual con la división, salvo si aparece una división por cero;

Funciones continuas

Definición

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $a \in A$ si:

- $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *existe y además*
- $L = f(a)$.

Algunos ejemplos de funciones continuas: los polinomios, $\sin x$, $\cos x$, e^x, y sumas y productos de éstas y el resto de funciones elementales vistas anteriormente (en sus respectivos dominios naturales). Por ejemplo, $\log x$ es continua en puntos $x > 0$.

Teorema (composición de funciones continuas)

Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a

Ver apuntes manuscritos de las clases del 25 y 26 de octubre sobre cálculo operativo para funciones continuas y la definición de las distintas singularidades.

Tres teoremas (fuertes) sobre funciones continuas

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

1. **Teorema de Bolzano:** Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos diferentes, debe haber un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
2. **Teorema de acotación:** f está acotada en $[a, b]$, i.e, existe una $M \in R$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in [a, b]$.
3. **Teorema de Weierstrass** La función alcanza un máximo y un mínimo; i.e, existen x_m, x_M en $[a, b]$ tal que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ para todo $x \in [a, b]$.

(Ver apuntes manuscritos de la clase del 27 de octubre).

Dem.: La demostración del primer teorema se hace por el método de la bisección (o bipartición) que se muestra en la siguiente página.

La demostración del segundo se hace por reducción al absurdo y el uso del teorema de Bolzano-Weirstrass para encontrar una subsucesión convergente.

La demostración del tercero se hace directamente a partir del teorema de Bolzano-Weirstrass para encontrar una subsucesión convergente a partir de la sucesión de imágenes que converge al supremo (respectivamente ínfimo).

Método de la bisección

El método de la bisección permite encontrar una solución aproximada de la ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$ para el que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos.

- $f(\frac{a+b}{2})$ tendrá signo opuesto bien a $f(a)$, bien a $f(b)$. En el primer caso, tomamos el intervalo $[a, \frac{a+b}{2}]$ en el que f toma signos opuestos; en el segundo tomamos el intervalo $[\frac{a+b}{2}, b]$.
- Repetimos el procedimiento tomando el punto medio del intervalo en cada paso y quedándonos con el intervalo donde f tome signos opuestos en los extremos;
- Tras n pasos tendremos un intervalo de longitud $\frac{b-a}{2^n}$ donde por el teorema de Bolzano debe haber un cero de f.