TEMA 4: Integrales curvilíneas

Fernando Soria (UAM)

Curso 2022-23

Estructura del Tema 4:

4.1. Curvas

Recordamos que una recta L en $\mathbb{R}^n$ se puede definir usando una parametrización, a saber, que dado un punto $P \in L$ y un vector director $\vec{v}$ de L, tenemos $L = \{P + t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$. Esto expresa L como la imagen de la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto P + t\vec{v}$.

Podemos ahora extender esta noción para expresar curvas más generales:

Definición (Curvas en el espacio euclídeo)

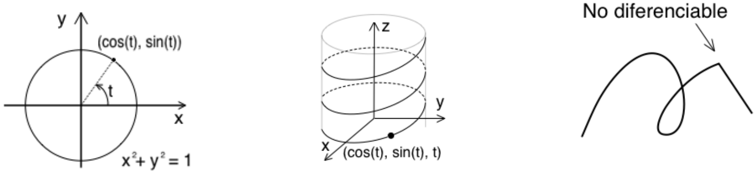
Una **curva** o **trayectoria** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\sigma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

También se puede usar la palabra "curva" para referirse a la *imagen* en $\mathbb{R}^n$ de la aplicación σ (i.e. el conjunto de puntos $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a, b]$). Para $n = 2$ la curva se halla en el plano; para $n = 3$ se halla en el espacio, etc.

Definición (Curva diferenciable, vector velocidad, y velocidad)

Una curva definida por $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es **diferenciable** si lo es la función σ en un abierto $U \supset [a, b]$. Si σ es diferenciable, el **vector velocidad** de σ en t es el vector $\sigma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\sigma(t+h)-\sigma(t)}{h}$. La **velocidad** de σ en t es $\|\sigma'(t)\|$. **El vector aceleración** es $\sigma''(t)$.

Ejemplos de curvas diferenciables y no diferenciables:



El **vector tangente** de una curva σ en t es el vector unitario $\frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$.

Si $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t))$, entonces $\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \ldots, \sigma_n'(t))$.

Ejemplo: sea la curva $\sigma(t) = (t, t^2, e^t)$. Calcular su velocidad en $t = 0$:
Tenemos $\sigma'(t) = (1, 2t, e^t)$, luego $\sigma'(0) = (1, 0, 1)$, luego $\|\sigma'(0)\| = \sqrt{2}$.

4.1. Curvas: notación y ejemplos

Una curva parametrizada $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es:

- **regular** si es diferenciable y
$$\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \ldots, \sigma_n'(t)) \neq \vec{0} \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$
- **de clase** $\mathcal{C}^k([a, b])$ si cada función σ_i está en $\mathcal{C}^k$ para todo $i = 1, \cdots, n$.
- **simple** si es inyectiva en $[a, b]$, es decir, si $\sigma(t_0) \neq \sigma(t_1)$ siempre que $t_0 \neq t_1$.
- **cerrada** si $\sigma(a) = \sigma(b)$.
- **cerrada y simple** si es cerrada (i.e., $\sigma(a) = \sigma(b)$) y es inyectiva en $[a, b)$.

EJEMPLOS:

- **Rectas en $\mathbb{R}^n$:** la recta que pasa por el punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en la dirección del vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se puede parametrizar como
$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad \sigma(t) = x_0 + t\vec{v}$$
- **Gráfica de una función en $\mathbb{R}^2$:** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La gráfica de f es el subconjunto $\text{Graf}(f) = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \}$. que se puede parametrizar como
$$\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad \text{dada por} \quad \sigma(t) = (t, f(t)).$$

- **Circunferencia de centro** $(0,0)$ **y radio r:**

$$C_r(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

Parametrizamos la circunferencia usando funciones trigonométricas:

$$c: \ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = (r\cos t,\ r\,\mathrm{sen}\ t)$$

- **Circunferencia de centro** (a,b) **y radio r:**

$$C_r(a,b) = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\,\},$$

$$c: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = (a + r\cos t,\ b + r\,\mathrm{sen}\ t)$$

- **Hélice circular:**

$$c: \ [0,\infty) \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = (r\cos t,\ r\,\mathrm{sen}\ t,\ bt)$$

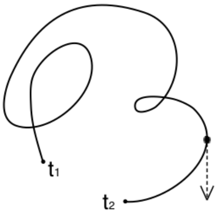
- **Elipse de centro** (a,b)**:**

$$E(a,b) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-a)^2}{p^2} + \frac{(y-b)^2}{q^2} = 1\right\}$$

$$c: \ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = (a + p\cos t,\ b + q\,\mathrm{sen}\ t)$$

Recta tangente y longitud de arco

Consideremos una curva definida entre dos instantes $a < b$:



Dos preguntas:

1. ¿Cuál es la recta tangente a la curva en un instante dado $t \in (a, b)$?
2. ¿Cuál es la longitud recorrida a lo largo de la curva σ entre $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$?

Para 1., basta ver que dicha recta pasa por $\sigma(t)$ y tiene vector director $\sigma'(t)$:

La **recta tangente** a σ en t es $\{\sigma(t) + \lambda\sigma'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Para 2., usamos la velocidad de la parametrización, es decir, la norma de $\sigma'(t)$:

La **longitud de arco** de una curva $\sigma \in \mathcal{C}^1$ entre a y b es $\ell = \displaystyle\int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt$.

Dem.: Consideremos una partición de $[a, b]$, $\{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b\}$ de forma que la variación de $\|\sigma'(t)\|$ sea menor que un ϵ dado. Aproximamos la longitud de arco de σ por la longitud del polígono de vértices $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_m)$:

$\ell \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \|\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1}\| \sim \sum_{k=1}^{m} \|\sigma'(t_k)\|(t_k - t_{k-1})$, y esto representa una suma de Riemann de la integral $\displaystyle\int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt$

Ejemplos

Ejemplo 1: sean las curvas $c_1(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $\quad c_2(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$. Hallar la recta tangente en $t = 0$ y la longitud de arco entre $t = 0$ y $t = \pi$, para c_1 y c_2.

Calculamos primero $c_1'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$. El vector tangente en $t = 0$, es decir, en el punto $c_1(0) = (1, 0)$, es $c_1'(0) = (0, 1)$. Por lo tanto, la recta tangente es $\{(1, 0) + \lambda(0, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

La longitud de arco es $\quad \ell = \displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen}(t)^2 + \cos(t)^2}dt = \int_0^\pi 1dt = \pi.$

Para c_2 tenemos $c_2'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)$. La recta tangente en $t = 0$ (es decir, en el punto $c_2(0) = (1, 0, 0)$) es pues $\{(1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. La longitud de arco es

$$\ell = \int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen}(t)^2 + \cos(t)^2 + 1}dt = \int_0^\pi \sqrt{2}dt = \sqrt{2}\pi.$$

Ejemplo 2: hallar la longitud de arco de la curva $c(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$ en $\mathbb{R}^4$ entre $t = 0$ y $t = 2\pi$.

Calculamos el vector velocidad: como $c'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), -2\operatorname{sen}(2t), 2\cos(2t))$, la velocidad es $\qquad \|c'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}(t)^2 + \cos(t)^2 + 4\operatorname{sen}(2t)^2 + 4\cos(2t)^2} = \sqrt{5}$.

Por lo tanto, $\ell = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{5}dt = 2\sqrt{5}\,\pi.$

4.1 Reparametrizaciones de curvas (I)

Definición

Sea $h : [a, b] \to [a_1, b_1]$ una aplicación biyectiva y diferenciable. Si $\alpha : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ es una curva suave, entonces la curva

$$\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \qquad \beta(t) := \alpha(h(t)),$$

se llama **reparametrización** de α.

A menudo, se usa $s = h(t)$, y se entiende que s es el parámetro de α.

h debe ser una función solo creciente, o solo decreciente. En el primer caso, tenemos

$$h(a) = a_1, \quad h(b) = b_1.$$

En el segundo,

$$h(a) = b_1, \quad h(b) = a_1.$$

4.1 Reparametrizaciones de curvas (II)

- En el primer caso, β se deplaza en la misma dirección que se desplazaba α, esto es, de $\alpha(a_1) = \beta(a)$ a $\alpha(b_1) = \beta(b)$.
- En el segundo, β se desplaza en sentido opuesto al de α, esto es, de $\alpha(b_1) = \beta(a)$ a $\alpha(a_1) = \beta(b)$.

Definición

- Si h es creciente, diremos que la reparametrización **conserva la orientación**;
- Si h es decreciente diremos que la reparametrización **invierte la orientación**.

Ejemplo: Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, entonces $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ con

$$\beta(t) := \alpha(a + b - t)$$

invierte la orientación.

4.2. Integrales de funciones escalares sobre curvas

Damos aquí la definición de integral de una **función escalar** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua a lo largo de una trayectoria dada σ que supondremos de clase $\mathcal{C}^1$.

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\sigma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada. **La integral de f a lo largo de σ** es

$$\int_\sigma f\, ds = \int_a^b f\big(\sigma(t)\big)\, \|\sigma'(t)\|\, dt.$$

(Aquí "ds" indica la longitud de arco infinitesimal en cada punto de σ.)

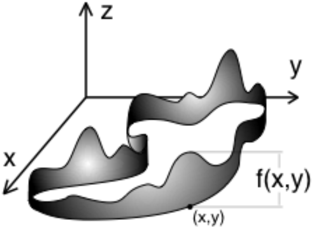
Ejemplo: sea $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ (un segmento de hélice) , y sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcular $\int_\sigma f\, ds$.

Tenemos $\sigma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, luego $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$ para todo t.

Por lo tanto

$$\int_\sigma f\, ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\Big[t + \frac{t^3}{3}\Big]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi(3 + 4\pi^2).$$

Un caso especial interesante es aquel en el que c representa una curva *plana*: $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$, y tenemos una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida sobre esta curva.



La integral de f a lo largo de la curva es entonces:

$$\int_\sigma f(x,y)\,ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Si $f \geq 0$, esto representa el área de la "pared" sobre σ definida por f.

El siguiente resultado aclara el rol que juegan las parametrizaciones:

Proposición

La integral de la función escalar f sobre la curva $\alpha : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ no depende de las reparametrizaciones de α; en otras palabras, si $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es $\beta(t) = \alpha(h(t))$, entonces

$$\int_\alpha f\, ds = \int_\beta f\, ds$$

Demostración: Por la regla de la cadena,

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t), \qquad \|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| \cdot |h'(t)|.$$

Si h preserva la orientación, h es creciente y $h' > 0$, $h(a) = a_1$, $h(b) = b_1$.

$$\int_\beta f\, ds = \int_a^b f(\beta(t))\|\beta'(t)\|\, dt = \int_a^b f(\alpha(h(t))\|\alpha'(h(t))\| \cdot h'(t) dt$$

Si h invierte la orientación, h es decreciente y $h' < 0$, $h(a) = b_1$, $h(b) = a_1$.

$$\int_\beta f\, ds = \int_a^b f(\beta(t))\|\beta'(t)\|\, dt = -\int_a^b f(\alpha(h(t))\|\alpha'(h(t))\| \cdot h'(t) dt$$

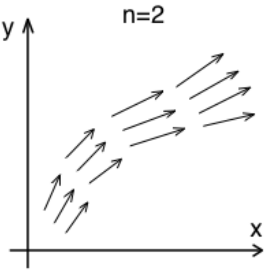
En ambos casos, haciendo el cambio $r = h(t)$, queda $= \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f(\alpha(r))\|\alpha'(r)\| dr = \int_\alpha f\, ds$

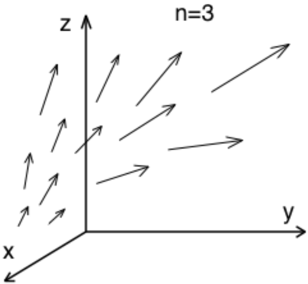
Campos vectoriales e integrales de línea

Toda función vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con igual número de variables que de componentes se denomina **campo vectorial**. Podemos darnos una idea de su comportamiento viendo cada valor de F como un vector.

En particular, para $n = 2$ hablamos de un campo vectorial en el plano, y para $n = 3$ hablamos de un campo vectorial en el espacio.

Para representar gráficamente los campos vectoriales (esbozarlos), se toma un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ suficientemente "representativo" y se dibuja en cada punto x del conjunto el vector que va de x hasta $x + \overrightarrow{F(x)}$, obteniendo así un conjunto de vectores representativo del campo vectorial.





Líneas de flujo

Definición (Líneas de flujo)

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Llamamos **línea de flujo** de F a toda curva $\sigma(t)$ que verifique $F(\sigma(t)) = \sigma'(t)$.

En general el problema de hallar si un campo F dado tiene líneas de flujo requiere la teoría de las *ecuaciones diferenciales*, y no lo trataremos aquí. Sin embargo, podemos querer verificar que una curva *c dada* es una línea de flujo de F.

Ejemplo: Calcular las líneas de flujo del campo vectorial constante $F(x, y, z) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

Solución: Queremos hallar la familia de curvas $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tales que $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) & = 2 \\ y'(t) & = 3 \\ z'(t) & = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x(t) & = 2t + x_0 \\ y(t) & = 3t + y_0 \\ z(t) & = t + z_0 \end{array} \right. \Rightarrow \gamma(t) = (2t + x_0, 3t + y_0, t + z_0).$$

En general, las líneas de flujo de un campo vectorial constante son rectas.

4.4. Integrales de campos vectoriales sobre curvas

Definición (Integral de línea)

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y supongamos que $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ es continuo sobre la curva $\mathcal{C}^1$ dada por $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Definimos la **integral de línea** de F sobre σ por la fórmula

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_n dx_n = \int_a^b F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t)\, dt,$$

donde el punto " $\cdot$ " indica el producto escalar entre los vectores $F\big(\sigma(t)\big)$ y $\sigma'(t)$.

Interpretación física: La integral de línea de un campo F sobre una trayectoria representa el trabajo realizado por una partícula que transcurre por dicha trayectoria sujeta a la fuerza ejercida por el campo F.

Observaciones: Si el campo de fuerza fuera perpendicular en cada punto a la trayectoria, es decir, si $F\big(\sigma(t)\big) \perp \sigma'(t), \forall t$, entonces la integral de línea y, por tanto, el trabajo realizado serían cero.

Por otro lado, si $\sigma(t)$ resulta ser una línea de flujo del campo F, entonces

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b \|\sigma'(t)\|^2 dt,$$

Ejemplos

Ejemplo 1: sea $\sigma(t) = \big(\sin(t), \cos(t), t\big)$, $t \in [0, 2\pi]$, y sea $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular $\displaystyle\int_\sigma F \cdot ds$.

Aplicando la definición tenemos

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \big(\sin(t), \cos(t), t\big) \cdot \big(\cos(t), -\sin(t), 1\big)\, dt = \int_0^{2\pi} t\, dt = \big[t^2/2\big]_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

Ejemplo 2: sea $\sigma(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0, 1]$, y sea $F(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$. Calcular $\displaystyle\int_\sigma F \cdot ds$.

En este caso tenemos

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_0^1 (t^2, t^3, 1) \cdot (1, 2t, 0) dt = \int_0^1 t^2 + 2t^4 dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

Integrales de línea y reparametrizaciones

Al igual que antes, vamos a estudiar en qué medida la integral vectorial a lo largo de una curva depende de la parametrización dada. El resultado siguiente nos lo precisa.

Teorema

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y supongamos que F es continuo sobre una curva de clase $\mathcal{C}^1$ dada por $\sigma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$. Sea ahora $\sigma_0 : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de σ_1. Entonces tenemos

$$\int_{\sigma_0} F \cdot ds = \pm \int_{\sigma_1} F \cdot ds,$$

donde el signo en "$\pm$"depende de si la reparametrización conserva la orientación de la trayectoria, en cuyo caso el signo es "$+$", o si invierte la orientación de la trayectoria, en cuyo caso el signo es "$-$".

El hecho de que haya esta dependencia en el signo, cuya demostración es similar a la anterior para funciones escalares, se debe a la presencia del producto escalar. En el caso de funciones escalares, como integramos la cantidad positiva $\|\sigma'(t)\|$, no ocurre este cambio de signo, y por tanto no cambia el valor de la integral bajo reparametrizaciones de la curva.

Teorema fundamental de integración sobre curvas

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ sobre una curva de clase $\mathcal{C}^1$ dada por $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ y consideremos el campo vectorial $F = \nabla f$. Entonces se tiene

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds = f\big(\sigma(b)\big) - f\big(\sigma(a)\big).$$

En particular, si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial conservativo, y este es el motivo de la nomenclatura que definiremos a continuación, entonces una integral de línea de F a lo largo de σ sólo depende de los puntos extremos de $\sigma(a), \sigma(b)$ (no del camino particular que toma σ entre estos puntos).

Nótese en particular que si $\sigma(b) = \sigma(a)$ entonces $\displaystyle\int_\sigma \nabla f \cdot ds = 0$.

Ejemplo: sea $\sigma(t) = (\frac{t^4}{4}, \sin(\frac{\pi}{2}t)^3, 0)$, $t \in [0, 1]$, y sea $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Calcular $\displaystyle\int_c F \cdot ds$. Observamos que la integral se puede escribir como

$$\int_\sigma ydx + xdy = \int_\sigma \nabla f \cdot ds,$$

con $f(x, y, z) = xy$. Por lo tanto, el teorema fundamental implica que la integral vale $f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = 1/4$.

Campo gradiente y campo conservativo

- Diremos que $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un **campo vectorial gradiente** si existe una función escalar de clase $\mathcal{C}^1$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $F = \nabla f$. En este caso, f se denomina el **potencial** de F.
- Diremos que un campo vectorial $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es **conservativo** si dadas dos curvas $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}^1$ cualesquiera de su dominio con el mismo origen y final se tiene $\displaystyle\int_{\sigma_1} F \cdot ds = \int_{\sigma_2} F \cdot ds$.

Nota: Tal y como hemos visto, si F es un campo gradiente en $\mathbb{R}^n$ entonces es también un campo conservativo.

Ejemplo: ¿Es $F(x, y) = (y, -x)$ un campo conservativo?

Solución: Si lo fuera, existiría una función escalar, f, diferenciable tal que:

$$F = \nabla f \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & = -1 \end{cases} \quad \text{¡contradicción!}$$

La contradicción se debe a que $f \in \mathcal{C}^2$ (las derivadas parciales son polinomios, por tanto, continuas y derivables) y, por lo tanto, debería ocurrir $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Observación: Por la misma razón, si $F \in \mathcal{C}^2$ es conservativo, entonces se debe cumplir $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$

Divergencia y rotacional

De forma forma simbólica, trataremos $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ como un vector.

Definición (Divergencia de un campo vectorial)

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial tal que las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i \in [1, n]$ existen en cada punto. La **divergencia** de F es la función escalar

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

La noción siguiente se define para campos vectoriales en el espacio.

Definición (Rotacional de un campo vectorial $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tal que las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$ existen en cada punto. El **rotacional** de F es el campo vectorial $\overrightarrow{rot}\, F = \nabla \times F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por la fórmula

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right), \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).$$

Podemos definir el rotacional en $\mathbb{R}^2$ como sigue: dado $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ se considera F como un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ escribiendo $\overline{F}(x, y, z) = (P(x, y),\ Q(x, y),\ 0)$. De esta forma $\overrightarrow{rot}\, \overline{F} = \left(0,\ 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

Significado físico de los operadores diferenciales "div" y "rot":

- **La divergencia** *mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente*.
  Si el campo tiene "fuentes" entonces div $F > 0$, si tiene "sumideros" entonces div $F < 0$, si se compensa div $F = 0$.

- **El rotacional** es un operador vectorial que muestra la tendencia del campo a inducir *rotación alrededor de un punto*.

Si $\overrightarrow{rot}\, F = 0$ en un punto, el flujo no tiene "remolinos" en dicho punto, y se dice que el campo es **irrotacional**.

Ejemplo: Dado el campo $F(x, y, z) = (x^2y, z, xyz)$, calcular div F.
Solución: div $F = \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial(z)}{\partial y} + \frac{\partial(xyz)}{\partial z} = 3xy$

Ejemplo: Dado el campo $F(x, y) = (y, \ -x)$, calcular $\overrightarrow{rot}\, F$.
Solución: $\overrightarrow{rot}\, F = \left(0, \ 0, \ \dfrac{\partial(-x)}{\partial x} - \dfrac{\partial(y)}{\partial y}\right) = (0, 0, -2)$

Las dos operaciones que hemos definido, "div" y $\overrightarrow{rot}$, están relacionadas en particular por el siguiente resultado.

Teorema

Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ambas funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Entonces tenemos

1) $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$. (El rotacional de cualquier gradiente es $\vec{0}$.)

2) $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$. (La divergencia de cualquier rotacional es 0.)

($F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase $\mathcal{C}^2$ si cada uno de sus componentes es una función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$.)

Demostremos el apartado 1): Tenemos $\nabla \times (\nabla f) = \overrightarrow{rot}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{vmatrix}$.

Usando que las derivadas cruzadas son independientes del orden de las variables (teorema visto anteriormente), deducimos que esto es $(0, 0, 0)$.

El apartado 2 también es inmediato, ya que $\nabla \cdot (\nabla \times F) = div\, \overrightarrow{rot}\, F$ nos da una combinación de segundas derivadas cruzadas de F que se anulan.

En relación con el segundo apartado, estudiamos el siguiente

Ejemplo: sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{C}^2$. Demostrar que $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$.

Escribamos $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$, $\quad \nabla g = (g_x, g_y, g_z)$. Tenemos entonces

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = \big(f_y g_z - f_z g_y, -(f_x g_z - f_z g_x), f_x g_y - f_y g_x\big).$$

Por lo tanto

$$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = \tfrac{\partial}{\partial x}(f_y g_z - f_z g_y) - \tfrac{\partial}{\partial y}(f_x g_z - f_z g_x) + \tfrac{\partial}{\partial z}(f_x g_y - f_y g_x)$$

Aplicando la fórmula del producto, desarrollamos esto, obteniendo que es igual a

$$\begin{aligned} &(f_{xy} g_z + f_y g_{xz} - f_{xz} g_y - f_z g_{xy}) \\ -&(f_{yx} g_z + f_x g_{yz} - f_{yz} g_x - f_z g_{yx}) \\ +&(f_{zx} g_y + f_x g_{zy} - f_{zy} g_x - f_y g_{zx}) = 0. \end{aligned}$$

Caracterización de campos conservativos

Consideramos un campo vectorial $F = (F_1, \ldots, F_n)$ de clase $\mathcal{C}^1$ (e.g, todas las F_i tienen derivadas parciales continuas).

Si $n = 2, 3$ **y** F **es conservativo,** entonces

$$F = \nabla f, \text{ y } \quad \overrightarrow{rot}\, F = \overrightarrow{rot}\, \nabla f = 0$$

En particular, **si** $\overrightarrow{rot}\, F \neq 0$**, entonces** F **no es conservativo.**

El recíproco es cierto (para campos que sean $\mathcal{C}^1$ en **todo** el espacio euclídeo):

- En $\mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \in \mathcal{C}^1$ es conservativo si y solo si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
- En $\mathbb{R}^3$, $F \in \mathcal{C}^1$ es conservativo si y solo si $\overrightarrow{rot}\ F = \vec{0}$.

Ejemplo (cont.): ¿Es $F(x, y) = (y, \ -x)$ conservativo?

Solución: Tal y como hemos dicho, para que un campo en $\mathbb{R}^2$ sea conservativo debe cumplir $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. En nuestro caso

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (y)}{\partial y} = 1, \qquad \text{pero} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (-x)}{\partial x} = -1, \quad \text{luego no lo es.}$$

4.5. Teorema de Green

En esta sección estudiamos un resultado importante que nos da una herramienta para calcular integrales de funciones sobre ciertas regiones en $\mathbb{R}^2$.

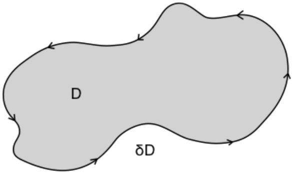
El resultado es reminiscente del Teorema Fundamental del Cálculo por cuanto reduce la integral sobre una región de cierta derivada de un campo, a una integral de la función original calculada sobre la *frontera* de la región.

Teorema de Green

Sea D una **región elemental** en $\mathbb{R}^2$, sea ∂D el borde de D, y supongamos que ∂D está parametrizado por una curva diferenciable de modo que se recorra en el sentido que deja D a la izquierda del vector director (sentido antihorario).

Sean $P, Q : D \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces tenemos

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$



Recordamos que $\int_{\partial D} P dx + Q dy$ es otra manera de escribir la integral de línea $\int_{\partial D} (P, Q) \cdot ds$.

Ejemplo: verificar el teorema de Green para $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = yx$, con D el disco unitario $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Por un lado tenemos $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, que podemos parametrizar por $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \int_{\partial D} (x, yx) \cdot (dx, dy) \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta)) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[\frac{\cos(\theta)^2}{2}\Big]_0^{2\pi} + \Big[\frac{-\cos(\theta)^3}{3}\Big]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy = \iint_D ydxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \sin(\theta) drd\theta \\ = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\big[-\cos(\theta)\big]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Cálculo de áreas usando el Tma. de Green

Una consecuencia interesante del teorema de Green es que podemos calcular el área de una región conociendo únicamente la frontera de esta región.

Corolario

Sea D una región donde podemos aplicar el teorema de Green. Entonces el área de D es

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y, x) \cdot ds.$$

Demostración. Tomemos $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$. Entonces, aplicando el teorema de Green, tenemos

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\int_{D} \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{D} 2dxdy = A(D).$$

□

Ejemplo: verificar el teorema de Green para $F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ donde $P(x,y) = x^2 - y$, $Q(x,y) = x + xy + y^2$, con D el círculo de radio 1, i.e. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Parametrizamos de nuevo ∂D con $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$. De esta forma

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta), \cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)^2\big) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta))\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin(\theta)\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2\cos(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 + \sin(\theta)^2\cos(\theta)\, d\theta = \big[\theta + \frac{\sin(\theta)^3}{3}\big]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Por otro lado tenemos

$$\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \iint_D \big((1+y) - (-1)\big) dxdy = \iint_D 2 + ydxdy.$$

Hacemos el cambio de variables a polares $(x,y) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$ y encontramos que esta integral es

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + r\sin(\theta))\, rd\theta dr = 4\pi \int_0^1 rdr + \int_0^1 r^2[-\cos(\theta)]_0^{2\pi} dr = 2\pi.$$

Ejemplo: hallar la integral de $F(x,y) = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big)$, con $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, a lo largo del círculo ∂D centrado en el origen y de radio r (parametrizado con orientación positiva, es decir dejando el disco D a la izquierda).

Comprobar que no se verifica la conclusión del teorema de Green en este caso

Tenemos por un lado

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \frac{-r\sin(\theta)}{r^2}(-r\sin(\theta)) \;+\; \frac{r\cos(\theta)}{r^2}(r\cos(\theta))d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Tenemos por otro que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad$ (puesto que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$).

De modo que no se da la conclusión del teorema de Green.

La razón es que P y Q no son de clase $\mathcal{C}^1$ sobre D, puesto que las derivadas parciales no son continuas en el origen.

Nota: Se puede ver fácilmente que F es un campo gradiente ($F = \nabla f$ con $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$)) por lo que se tendrá $\displaystyle\int_c F \cdot ds = 0$ para toda curva cerrada diferenciable que no contenga al $(0,0)$ en su interior.

Demostración del teorema fundamental de integración sobre curvas: Definimos $\varphi(t) = f(\sigma(t))$ y observamos que $\varphi'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$.

Demostración del teorema de Green: Lo hacemos para dominios de tipo 1 y 2, es decir, $\exists \alpha_1, \alpha_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\exists \beta_1, \beta_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$, todas de clase $\mathcal{C}^1$, de forma que

$$D = \Big\{(x, y) : x \in [a, b], \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)\Big\} = \Big\{(x, y) : y \in [c, d], \beta_1(y) \leq x \leq \beta_2(y)\Big\}$$

Así se obtiene $\displaystyle\iint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy = \int_a^b \Big(P(x, \alpha_2(x)) - P(x, \alpha_1(x))\Big) dx = -\int_{\partial D_+} P\, dx$, y por otro lado $\displaystyle\iint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy = \int_c^d \Big(Q(\beta_2(y), y) - Q(\beta_1(y), y)\Big) dy = \int_{\partial D_+} Q\, dy$. Luego

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dx\, dy = \int_{\partial D_+} P\, dx + Q\, dy$$

Teorema

Dado un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con funciones coordenadas $F = (P, Q)$, las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. F es un campo gradiente.
2. Se cumple $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.
3. F es un campo conservativo.

Dem.: La implicación $1 \implies 2$ ya está vista y $2 \implies 3$ es el Teorema de Green. Solo hace falta probar $3 \implies 1$. Para ello, basta elegir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y considerar cualquier curva $\sigma \in \mathcal{C}^1$ que una el origen con dicho punto. Entonces se define $f(x, y) = \displaystyle\int_\sigma F \cdot ds$. Es fácil ver entonces que $F = \nabla f$.