Ejercicio 3 (a entregar el 28.03.23) **APELLIDOS, Nombre**: TARRASA MARTÍN, Alberto

(Para la respuesta usa solo la cara de una página)

1.- La intensidad de la luz en el plano viene dada por la función $f(x, y) = A - 2x^2 - y^2 + 4x$ para cierta constante positiva $A \in \mathbb{R}$.

a) ¿En qué punto del plano se encuentra el foco de luz, es decir, el de mayor intensidad?

b) Demuestra que una partícula que siga, desde el punto $(2, 1)$, la trayectoria $\sigma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (e^{-4t} + 1, e^{-2t})$ se dirige con la mayor eficacia en intensidad hacia el punto de luz.

c) Una determinada especie de insecto es sensible a los cambios de luz. Si parte del punto $(1, 1)$, describe la trayectoria que debería seguir para que no sufra cambios durante la misma.

---

a) Para calcular en qué punto del plano se encuentra el foco de luz, hallamos el máximo global de f. Primero, hallamos el vector gradiente de f y lo igualamos a 0:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (-4x + 4, -2y)$$

De forma que

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \Rightarrow (x_0, y_0) = (1, 0)$$

De esta forma, en el punto $(1, 0)$ la función f tiene un extremo relativo, con un valor de $f(1, 0) = A - 2(1)^2 - (0)^2 + 4(1) = A + 2$.

Por último, comprobamos que es un máximo mediante el cálculo de las derivadas parciales de orden 2 de f, para poder calcular la matriz Hessiana, $H_f(1, 0)$:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como la función es de clase $\mathcal{C}^2$ y el determinante de la matriz $H_f(1, 0)$ es positivo, confirmamos que f tiene un máximo en $(1, 0)$ que, al ser el único, es máximo global. Luego, el foco de luz se encontraría en el punto $(1, 0)$ del plano.

b) Para comprobar que la trayectoria $\sigma(t) = (e^{-4t} + 1, e^{-2t})$ es la que se aproxima con mayor eficacia en intensidad al punto de luz, tenemos que ver que el vector velocidad de dicha trayectoria es paralelo al gradiente de la función que define la intensidad en cada punto de la trayectoria. Por su definidión, calculamos el vector velocidad como:

$$\frac{d\sigma}{dt} = (-4e^{-4t}, -2e^{-2t})$$

Luego, calculamos el gradiente de f en cada punto de la trayectoria, como:

$$\nabla f(x, y) = (-4x + 4, -2y) \Rightarrow \nabla f \circ \sigma = \nabla f(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) =$$
$$\nabla f(e^{-4t} + 1, e^{-2t}) = (-4e^{-4t} - 4 + 4, -2e^{-2t}) = (-4e^{-4t}, -2e^{-2t})$$

De forma que no solo son paralelos, sino que ambos vectores coinciden, por lo que la trayectoria definida por σ se aproxima con mayor eficacia en intensidad al punto de luz.

c) Calculamos la intensidad de luz percibida en el punto (1,1) para determiar el conjunto de puntos con la misma intensidad (la curva de nivel $N_{f(1,1)}$):

$$f(1, 1) = A - 2(1)^2 - (1)^2 + 4(1) = A + 1 \Rightarrow N_{A+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = A + 1\} =$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2x^2 - y^2 + 4x = 1\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{-2x^2 + 4x - 1}\right\}$$

Luego, basta con definir la trayectoria $t(x) = \left(x, \sqrt{-2x^2 + 4x - 1}\right)$.