Bloque III: Combinatoria

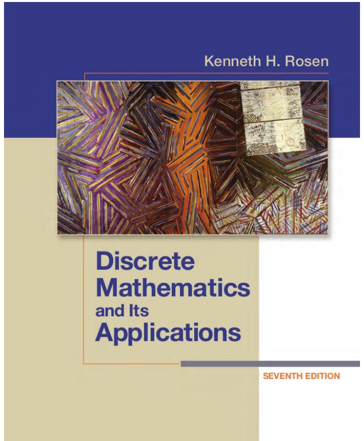
Permutaciones y combinaciones

Contenidos

Lecturas sugeridas

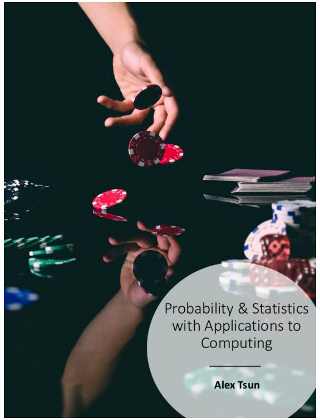
Rosen:

- 6.3. Permutations and combinations
- 6.4. Binomial coefficients and identities



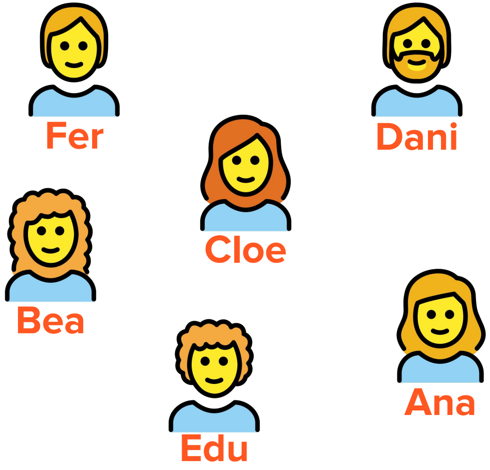
Tsun:

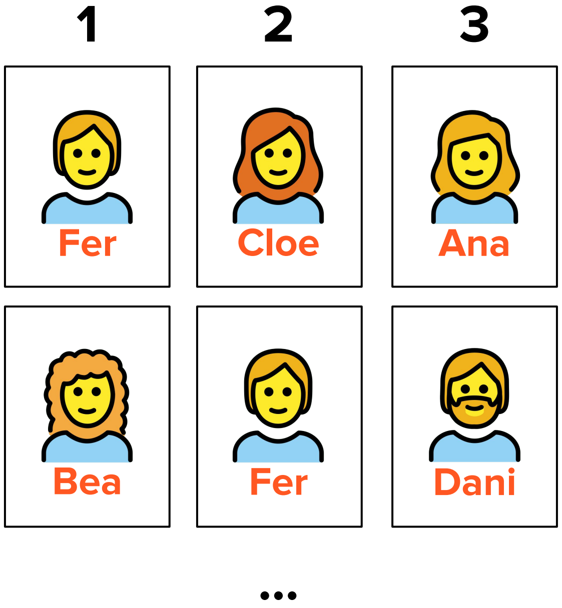
- 1.1.3. Permutations
- 1.1.4. Complementary counting
- 1.2.1. *k*-Permutations
- 1.2.2. *k*-Combinations (Binomial coefficients)
- 1.3.1. Binomial theorem



La fila

En un grupo de **6 personas**, ¿de cuántas maneras podemos **elegir a 3** de ellas para ponerlas en una **fila**?

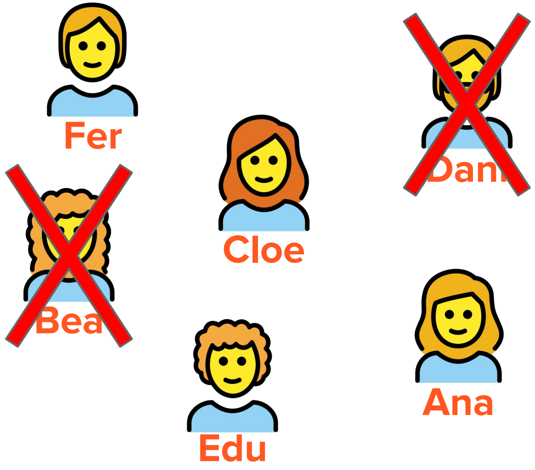


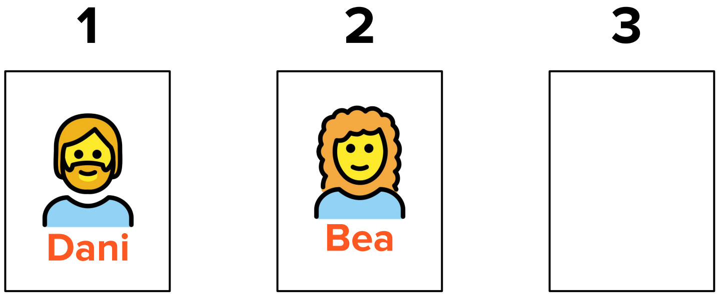


Dibujos de https://openmoji.org

La fila

En un grupo de **6 personas**, ¿de cuántas maneras podemos **elegir a 3** de ellas para ponerlas en una **fila**?





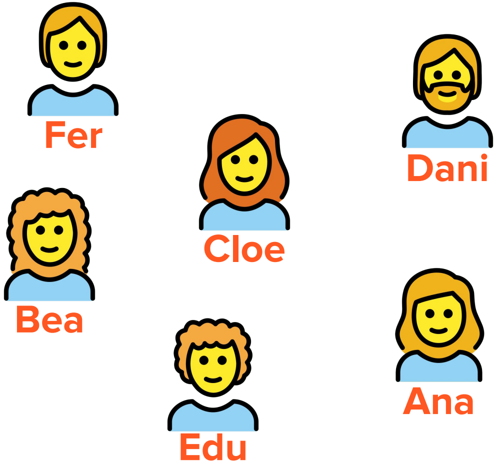
6 opciones | 5 opciones | 4 opciones

$$\underbrace{6 \times 5 \times 4}_{} = 120$$

Dibujos de https://openmoji.org

La fila

¿Y si quisiéramos hacer una fila de 4 personas?



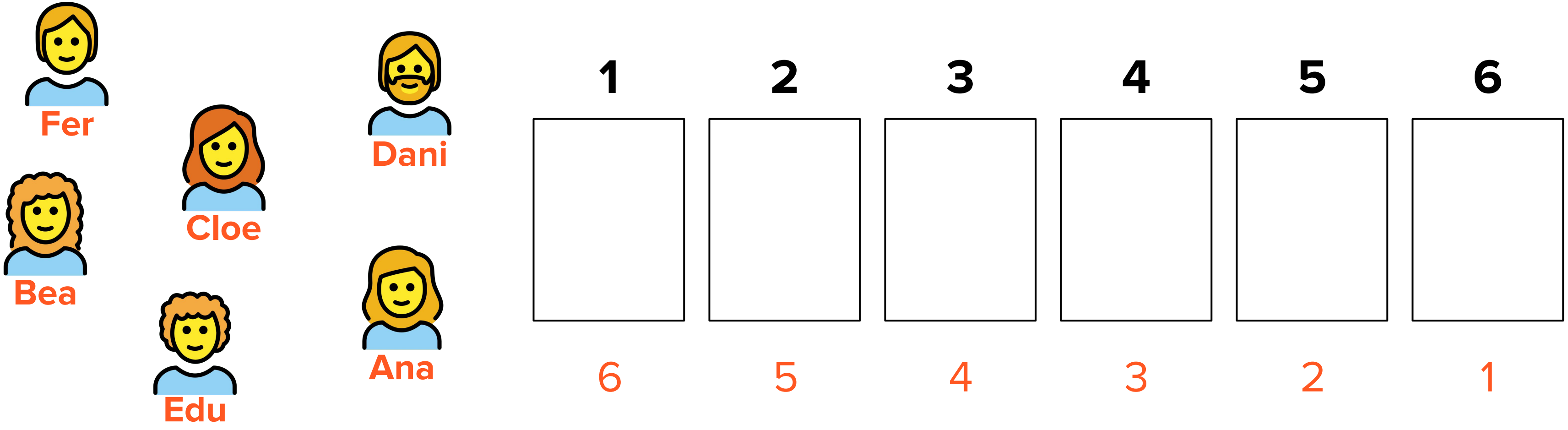
1	2	3	4
6	5	4	3

$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

Dibujos de https://openmoji.org

La fila

¿Y si quisiéramos hacer una fila con las 6 personas?

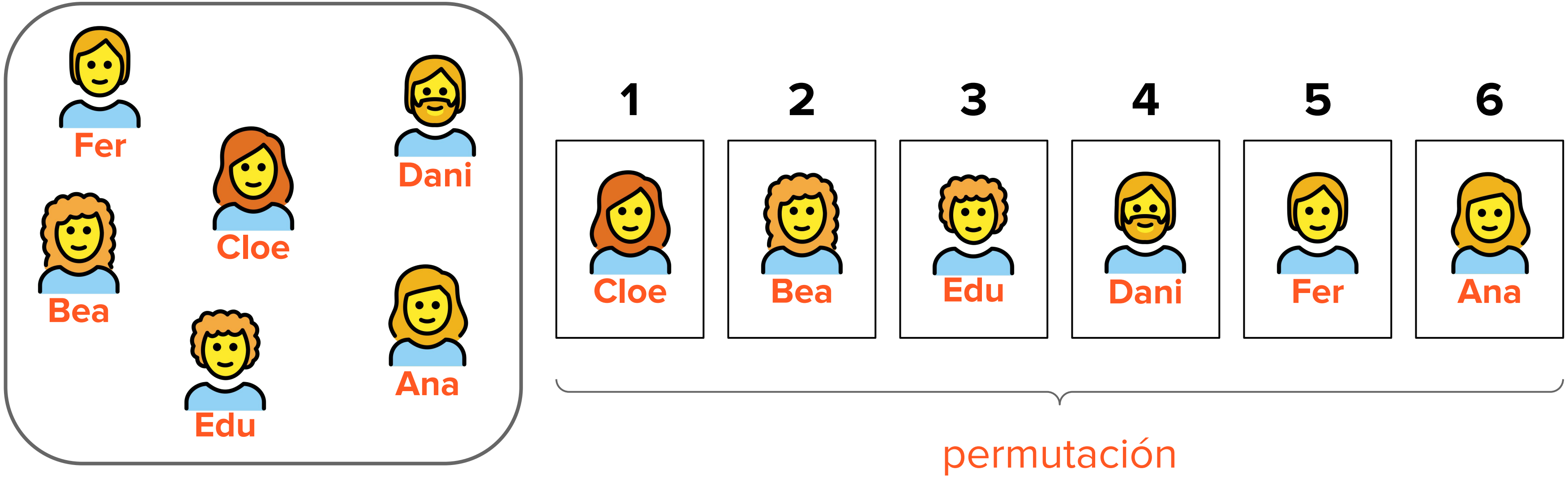


$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$

Dibujos de https://openmoji.org

Permutaciones

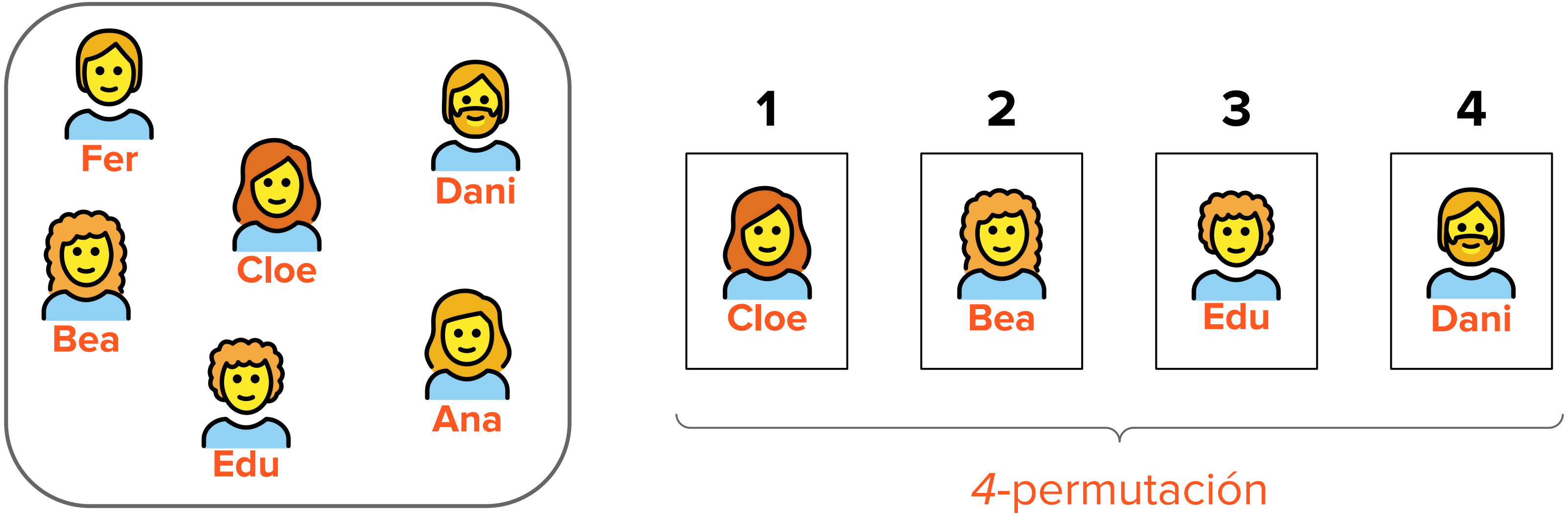
Una **permutación** de los elementos de un conjunto es una lista ordenada de los elementos del conjunto.



Dibujos de https://openmoji.org

Permutaciones

Una ***r*-permutación** de los elementos de un conjunto es una lista ordenada de ***r*** elementos tomados del conjunto.

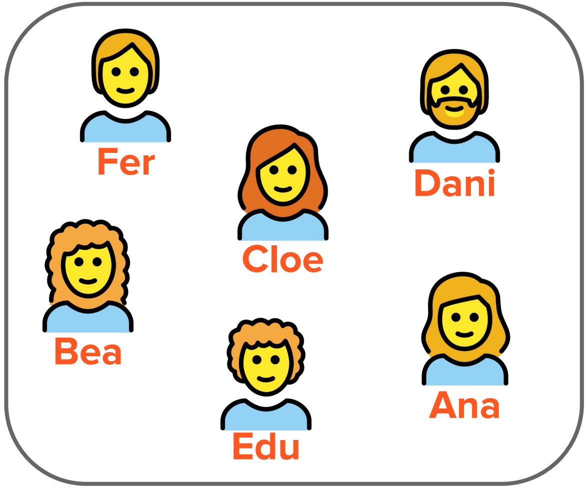


Dibujos de https://openmoji.org

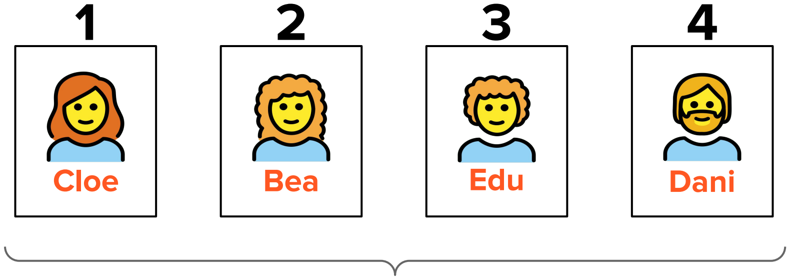
Número de *r*-permutaciones

Sea n un número entero positivo y r un número entero con $0 \leq r \leq n$. El número de ***r*-permutaciones** de un conjunto de ***n* elementos** es

$$P(n, r) = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times (n - r + 1)$$



Número de *4*-permutaciones



$P(6, 4) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

Dibujos de https://openmoji.org

Truco

$$P(6, 4) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \frac{2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

Sea n un número entero positivo y r un número entero con $0 \leq r \leq n$. El número de ***r*-permutaciones** de un conjunto de ***n* elementos** es

$$P(n, r) = n! \,/\, (n - r)!$$

Ejemplo 1

[Adaptado de Rosen] En una carrera en la que participan 25 personas se entregan medallas de oro, plata y bronce al primero, segundo y tercero en llegar a la meta. ¿De cuántas maneras se pueden entregar las medallas si no hay empates?

Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 2

[Adaptado de Rosen] Un viajero debe visitar 8 ciudades en un orden arbitrario. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

Ejemplo 3

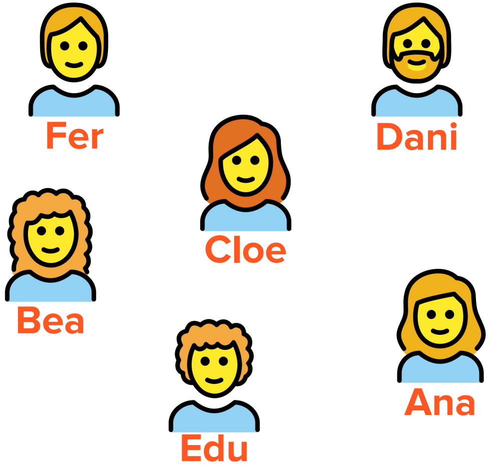
[Adaptado de Rosen] ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEFGH contienen la cadena ABC?

Algunas permutaciones válidas: ABCEGDHF, GHABCDFE, DHEABCGF

Algunas permutaciones inválidas: ABECGDHF, GHADBFEC, DHBECGAF

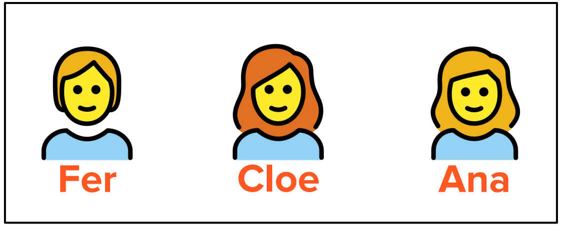
Los representantes

En un grupo de **6 personas**, ¿de cuántas maneras podemos **elegir a 3** de ellas para representar al resto (todos los cargos de representante son equivalentes)?



¿Permutaciones? P(6, 3) = 6! / 3! = 120

Pero...



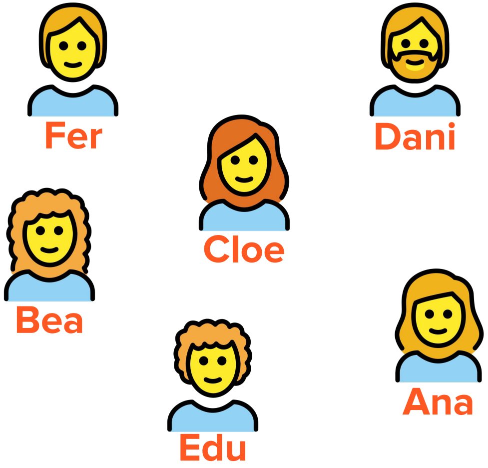
F, C, A
F, A, C
C, F, A
C, A, F
A, F, C
A, C, F

6 permutaciones equivalentes

Dibujos de https://openmoji.org

Los representantes

En un grupo de **6 personas**, ¿de cuántas maneras podemos **elegir a 3** de ellas para representar al resto (todos los cargos de representante son equivalentes)?



¿Permutaciones? $P(6, 3) = 6! / 3! = 120$

Regla de la división: $120 / 6 = 20$

ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF

BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF

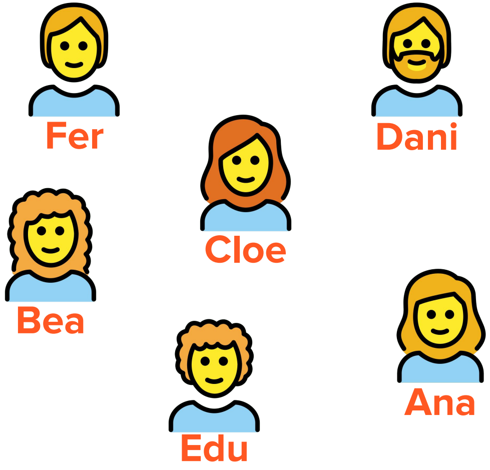
CDE, CDF, CEF

DEF

Dibujos de https://openmoji.org

Los representantes

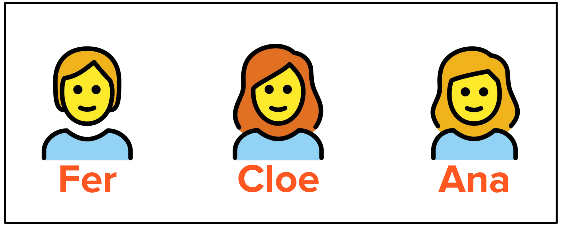
En un grupo de **6 personas**, ¿de cuántas maneras podemos **elegir a 3** de ellas para representar al resto (todos los cargos de representante son equivalentes)?



Otra forma de verlo:

Para calcular las permutaciones:

1. Hago grupos no ordenados
2. Permuto cada grupo

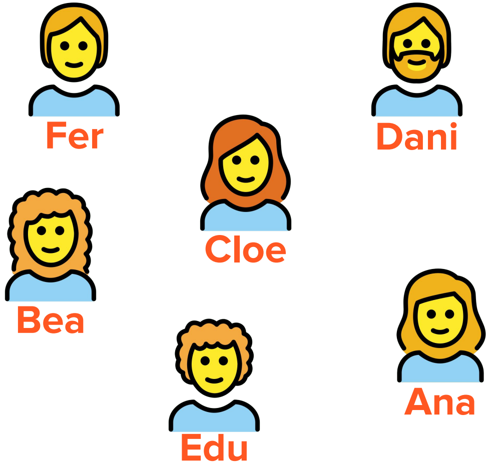


F, C, A
F, A, C
C, F, A
C, A, F
A, F, C
A, C, F

Dibujos de https://openmoji.org

Los representantes

En un grupo de **6 personas**, ¿de cuántas maneras podemos **elegir a 3** de ellas para representar al resto (todos los cargos de representante son equivalentes)?



Otra forma de verlo:

Para calcular las permutaciones:

1. Hago grupos no ordenados
2. Permuto cada grupo

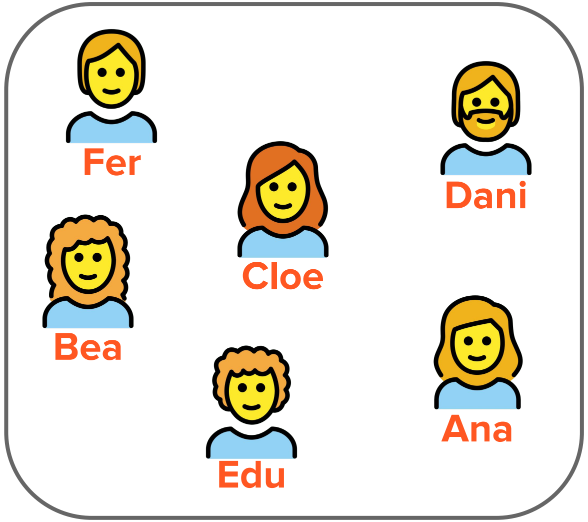
P(6, 3) = C(6, 3) x P(3, 3)

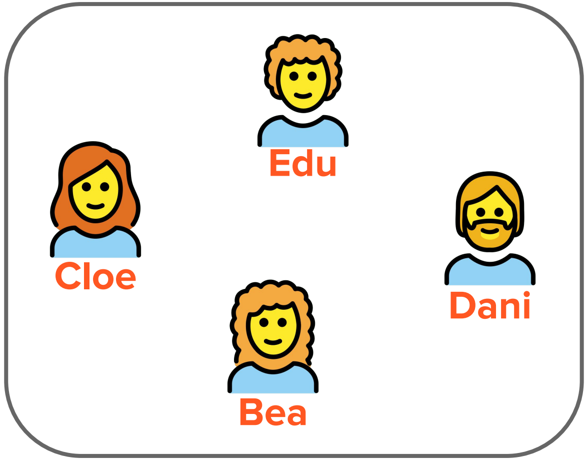
C(6, 3) = P(6, 3) / P(3, 3) = 6! / 3! 3! = 20

Dibujos de https://openmoji.org

Combinaciones

Una ***r*-combinación** de los elementos de un conjunto es un grupo no ordenado de ***r*** elementos tomados del conjunto.





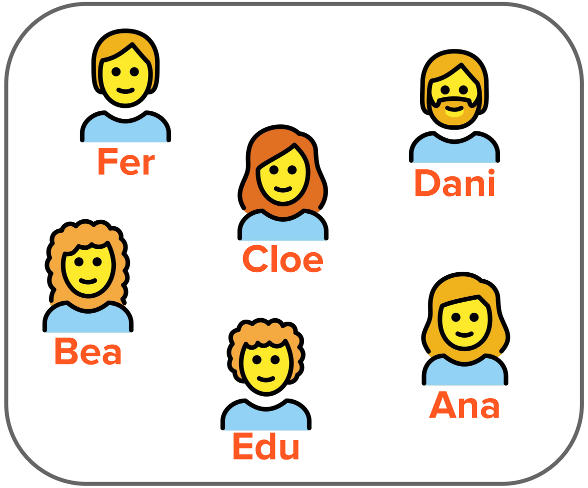
4-combinación

Dibujos de https://openmoji.org

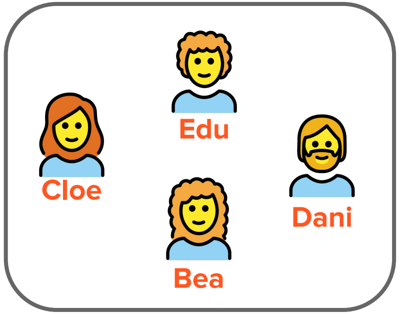
Número de *r*-combinaciones

Sea n un número entero positivo y r un número entero con $0 \leq r \leq n$. El número de ***r*-combinaciones** de un conjunto de ***n* elementos** es

$$C(n, r) = P(n, r) \mathbin{/} P(r, r) = n! \mathbin{/} (n-r)!\, r!$$



Número de *4*-combinaciones



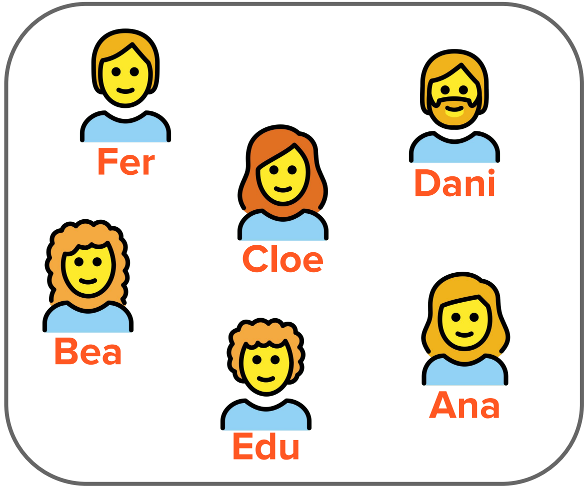
$C(6, 4) = 6! \mathbin{/} 2!\, 4! = 15$

Dibujos de https://openmoji.org

Número de *r*-combinaciones

En un conjunto con n elementos el número de ***r*-combinaciones** es igual al número de **(*n-r*)-combinaciones**:

$$C(n, r) = C(n, n - r)$$



Número de *4*-combinaciones

$C(6, 4) = 6! / 2!\ 4! = 15$

Número de *2*-combinaciones

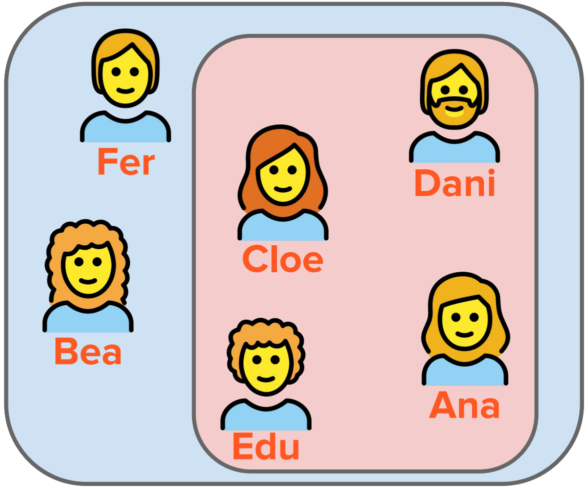
$C(6, 2) = 6! / 4!\ 2! = 15$

Dibujos de https://openmoji.org

Número de *r*-combinaciones

En un conjunto con *n* elementos el número de ***r*-combinaciones** es igual al número de ***(n-r)*-combinaciones**:

$$C(n, r) = C(n, n - r)$$



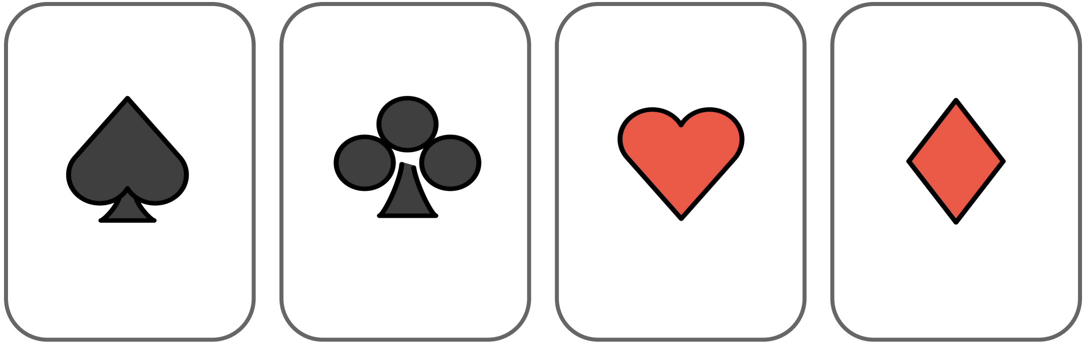
Cada vez que elijo un grupo de *r* elementos...

estoy eligiendo (implícitamente) un grupo de los restantes *n* - *r* elementos.

Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 4

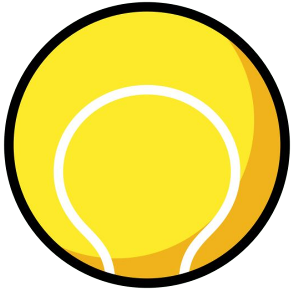
[Adaptado de Rosen] ¿Cuántas manos diferentes de 5 cartas se pueden repartir con una baraja francesa de 52 cartas?



Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 6

[Adaptado de Rosen] ¿De cuántas maneras diferentes se puede elegir a 5 jugadores de un club de tenis con 10 jugadores para participar en un torneo?



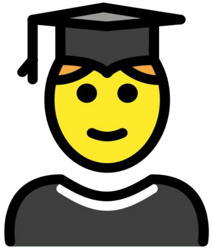
Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 7

[Adaptado de Rosen] ¿Cuántas cadenas distintas de n bits contienen exactamente r unos?

Ejemplo 8

[Adaptado de Rosen] Hay 9 profesores en el departamento de matemáticas, y 11 profesores en el departamento de informática. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar una comisión con 3 profesores del departamento de matemáticas y 4 profesores del departamento de informática?



Dibujos de https://openmoji.org

Coeficientes binomiales

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

2 ***x***s 1 ***x*** 0 ***x***s

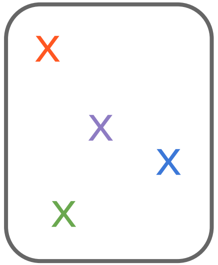
$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = \boxed{xx} + \boxed{xy + yx} + \boxed{yy} = \boxed{x^2} + \boxed{2xy} + \boxed{y^2}$

- De cada paréntesis elegimos una ***x*** o una ***y***
- Cada término es un monomio de grado 2 con r ***x***s y 2-r ***y***s, r = 0, 1, 2
- El coeficiente es el número de formas diferentes de elegir r ***x***s
    - Hay una única forma de elegir 2 ***x***s: xx
    - Hay dos formas de elegir 1 x: xy o yx
    - Hay una única forma de elegir 0 ***x***s: yy

Coeficientes binomiales

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) = x^4 + ?x^3y + ?x^2y^2 + ?xy^3 + y^4$$

¿De cuántas maneras podemos elegir 3 ***x***s?



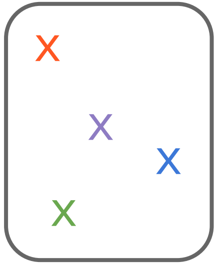
{xxx, xxx, xxx, xxx}

C(4, 3) = 4! / 3! 1! = 4

Coeficientes binomiales

$$(x + y)^4 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y) = x^4 + 4x^3y + ?x^2y^2 + ?xy^3 + y^4$$

¿De cuántas maneras podemos elegir 2 ***x***s?



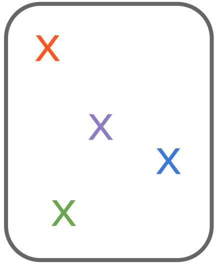
{xx, xx, xx, xx, xx, xx}

$C(4, 2) = 4! \,/\, 2!\, 2! = 6$

Coeficientes binomiales

$$(x + y)^4 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + ?xy^3 + y^4$$

¿De cuántas maneras podemos elegir 1 ***x***?



$\{x, x, x, x\}$

$C(4, 1) = 4! \,/\, 3!\, 1! = 4$

Coeficientes binomiales

$$(x + y)^4 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

¿De cuántas maneras podemos elegir 4 ***x***s?

x

x

x

x

$\{xxxx\}$

$C(4, 4) = 4! \,/\, 4!\, 0! = 1$

Coeficientes binomiales

$$(x + y)^4 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

¿De cuántas maneras podemos elegir 0 ***x***s?

x

x

x

x

{ }

$C(4, 0) = 4! \;/\; 4!\,0! = 1$

Teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Los términos $\binom{n}{j}$ se llaman **coeficientes binomiales**:

$$\binom{n}{j} = C(n,j)$$

Corolario 1

Sea *n* un número entero no negativo. Entonces se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Corolario 2

Sea n un número entero no negativo. Entonces se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Corolario 3

Sea n un número entero no negativo. Entonces se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

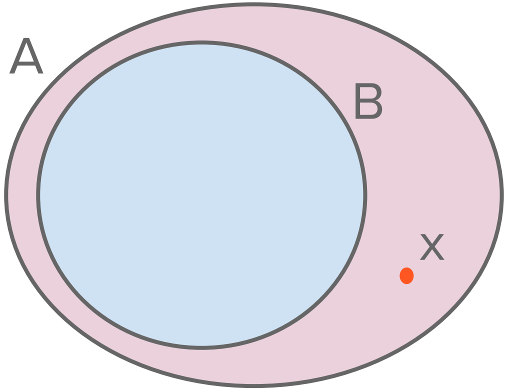
Ejemplo 9

[Adaptado de Rosen] ¿Cuál es el coeficiente del término $x^{12}y^{13}$ en la expansión de $(x + y)^{25}$?

La identidad de Pascal

Sean n y k números enteros positivos con $k \leq n$. Entonces se tiene que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$



A = B U {x}

|B| = n

|A| = n + 1

k-combinaciones con los elementos de A $\binom{n+1}{k}$

Las que contienen a x $\binom{n}{k-1}$

Las que no contienen a x $\binom{n}{k}$

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

...

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

...

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & 1 & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & 1 & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
1 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

...

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & 1 & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & 1 & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
1 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

...

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$1$$

$$1 \qquad 1$$

$$1 \qquad \binom{2}{1} \qquad 1$$

$$1 \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad 1$$

$$1 \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad 1$$

...

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \binom{2}{1} & & 1 & & \\
 & 1 & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & 1 & \\
1 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & 1 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}$$

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & 1 & \\
1 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & 1 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}$$

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1}$$

1

1 1

1 2 1

1 $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ 1

1 $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ 1

...

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & \binom{3}{2} & & 1 & \\
1 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & 1 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad \binom{3}{2} \quad 1$$

$$1 \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad 1$$

$$\cdots$$

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ 1

...

El triángulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$$

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

...