Tema 1. Lógica Proposicional

1.0. Documentación

💡 Documentos Tema 1

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/8616112c-8861-4676-8070-ebf96c00d0f8/U1_LogicaProposicional.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/34db986b-6c92-4ade-9047-2eeeadd193ad/U1_LogicaProposicional_Enunciados.pdf

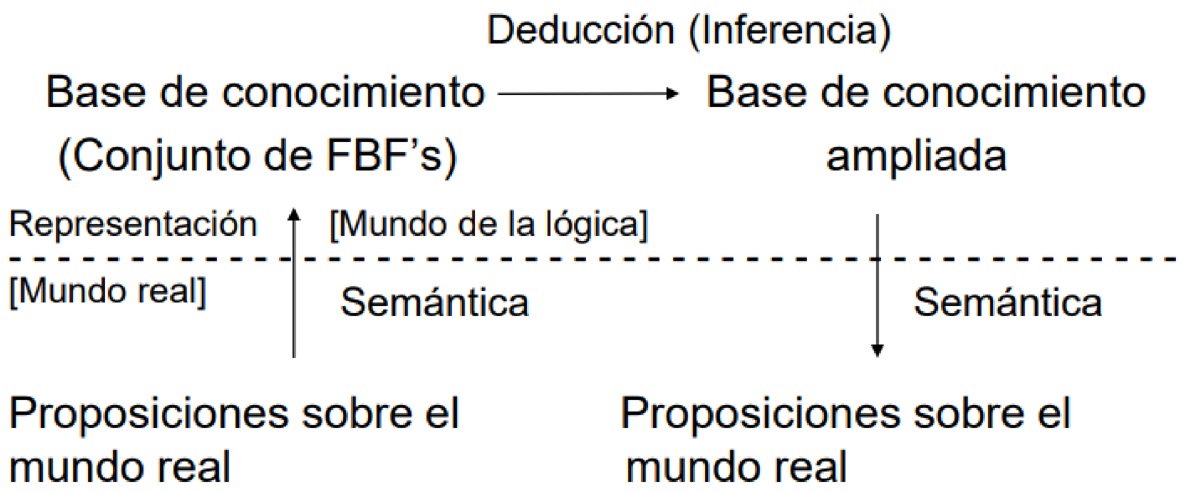
https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/082c72fc-6518-4ef8-a2a0-8df83eddc201/H1_AlbertoTarrasa.pdf

1.1. Agente Lógico

Un **agente lógico** tiene una **base de conocimiento**. Esta se compone de:

- Reglas: conocimiento general (si … entonces)
- Observaciones de la situación: determina x parámetros (¿si o no?)

Ante una situación se parte de una base de conocimiento Δ y se quiere comprobar si w es una consecuencia lógica $\models$ de Δ.



1.2. Fórmula Bien Formada

> Una **fórmula bien formada (FBF)** o proposición es aquella que cuenta con una sintaxis correcta de acuerdo con la gramática de la lógica proposicional.

La base de conocimiento `∆` es una colección de proposiciones, mientras que `w` es una única FBF. El agente lógico colecciona fórmulas con **valor de verdad** *verdadero* en la situación en la que se encuentra el mismo.

`¿∆ ⊨ w?` ¿Es el valor de verdad de la proposición `w` *verdadero* para todas las **interpretaciones** (posibles situaciones) que son modelo de `∆`?

Interpretación	A	B
I1	V	V
I2	V	F
I3	F	V
I4	F	F

A: la luz del aula está encendida; B: es de día

El agente lógico se encuentra en una situación en la que la luz del aula está encendida y es de día, por lo que coleccionaría la siguiente base: `∆={A, B}`.

El **modelo** es la interpretación para la cuál todas las proposiciones de `∆` tienen valor de verdad *verdadero*.

1.3. Inferencia

> La **inferencia o deducción lógica** `⊢` es el razonamiento mecánico por el que se llega a una conclusión, dando solución a un problema de deducción.

Conjunto de reglas de inferencia :

Sean w_1, w_2 dos FBFs

(1) *Modus ponens* : $\{w_1, w_1 \Rightarrow w_2\} \vdash_{M.P.} w_2$

(2) *Modus tollens*: $\{\neg w_2, w_1 \Rightarrow w_2\} \vdash_{M.T.} \neg w_1$

(3) Introducción de $\wedge$: $\{w_1, w_2\} \vdash_{\wedge\ INTRO} w_1 \wedge w_2$

(4) Conmutatividad de $\wedge$: $\{w_1 \wedge w_2\} \vdash_{\wedge\ CONMUTA} w_2 \wedge w_1$

(5) Eliminación de $\wedge$: $\{w_1 \wedge w_2\} \vdash_{\wedge\ ELIMIN} w_1$

(6) Introducción de $\vee$: $\{w_1\} \vdash_{\vee\ INTRO} w_1 \vee w_2$

$\{w_2\} \vdash_{\vee\ INTRO} w_1 \vee w_2$

(7) Eliminación de $\neg\neg$: $\{\neg\neg w_1\} \vdash_{\neg\neg ELIMIN} w_1$

1.4. Equivalencia

> Dos proposiciones distintas son equivalentes cuando tienen el mismo valor de verdad en todas las interpretaciones posibles, es decir, tienen la misma **tabla de verdad**.

- **Elemento neutro:** $(w_1 \wedge V) \equiv w_1$; $(w_1 \vee F) \equiv w_1$
- **Leyes de absorción:** $(w_1 \vee (w_1 \wedge w_2)) \equiv w_1$
  $(w_1 \wedge (w_1 \vee w_2)) \equiv w_1$
- **Ley de contradicción / ley del medio excluido:**
  $(w_1 \wedge \neg w_1) \equiv F$; $(w_1 \vee \neg w_1) \equiv V$
- **Leyes de dominación:**
  $(w_1 \wedge F) \equiv F$; $(w_1 \vee V) \equiv V$
- **Idempotencia:** $(w_1 \wedge w_1) \equiv w_1$; $(w_1 \vee w_1) \equiv w_1$
- **Eliminación de la doble negación:** $\neg\neg w_1 \equiv w_1$
- **Leyes de De Morgan:**
  $\neg(w_1 \vee w_2) \equiv \neg w_1 \wedge \neg w_2$; $\neg(w_1 \wedge w_2) \equiv \neg w_1 \vee \neg w_2$
- **Conmutatividad:** $w_1 \vee w_2 \equiv w_2 \vee w_1$; $w_1 \wedge w_2 \equiv w_2 \wedge w_1$
- **Leyes asociativas:**
  $(w_1 \wedge w_2) \wedge w_3 \equiv w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3) \equiv w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$ [conjunción]
  $(w_1 \vee w_2) \vee w_3 \equiv w_1 \vee (w_2 \vee w_3) \equiv w_1 \vee w_2 \vee w_3$ [disyunción]
- **Leyes distributivas:**
  $w_1 \wedge (w_2 \vee w_3) \equiv (w_1 \wedge w_2) \vee (w_1 \wedge w_3)$
  $w_1 \vee (w_2 \wedge w_3) \equiv (w_1 \vee w_2) \wedge (w_1 \vee w_3)$.
- **Definición de condicional:** $w_1 \Rightarrow w_2 \equiv \neg w_1 \vee w_2$
- **Contraposición:** $w_1 \Rightarrow w_2 \equiv \neg w_2 \Rightarrow \neg w_1$
- **Def. de bicondicional:** $w_1 \Leftrightarrow w_2 \equiv (w_1 \Rightarrow w_2) \wedge (w_2 \Rightarrow w_1)$
  $\equiv (w_1 \wedge w_2) \vee (\neg w_1 \wedge \neg w_2)$

1.5. Tablas de verdad

Una **tabla de verdad**, siguiendo una definición basada en el álgebra booleana, está compuesta por átomos (variables booleanas que solo pueden tomar valores V o F) y fórmulas bien formadas (expresiones booleanas).

- Nor

w1	¬w1
V	F
F	V

- Or inclusivo

w1	w2	w1 ∨ w2
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- And

w1	w2	w1 ∧ w2
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Implica

w1	w2	w1 ⇒ w2
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Doble implica

w1	w2	w1 ⇔ w2
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Interpretaciones

> Una interpretación es (1) la posible asignación de **valores de verdad** a las **variables booleanas** (átomos); o (2) las posibles situaciones en las que se puede encontrar un agente.

Un **modelo** es una interpretación en la que todas las fórmulas bien formadas de la base de conocimiento tienen valor de verdad V.

Reglas de inferencia

1.6. Interpretaciones

> Una interpretación es (1) la posible asignación de **valores de verdad** a las **variables booleanas** (átomos); o (2) las posibles situaciones en las que se puede encontrar un agente.

Un **modelo** es una interpretación en la que todas las fórmulas bien formadas de la base de conocimiento tienen valor de verdad V.

1.7. Satisfacibilidad

Una base de conocimiento puede ser:

- **Satisfacible (SAT)**: cuando algunas de sus interpretaciones son modelos, pero no todas.
- **Tautología (SAT)**: cuando todas sus interpretaciones son modelos.
- **Insatisfacible (UNSAT)**: cuando no tiene ningún modelo, es una contradicción.

Que `w` sea consecuencia lógica de `Δ` implica que todos los modelos `Δ` son modelos de `w`. En la tabla de verdad solo compruebo si el valor de verdad de `w` es V en las interpretaciones que son modelo de `Δ`. No todos los modelos de `w` tienen que ser modelos de `Δ`.

1.8. Métodos de mecanización

1. Tablas de verdad

	Átomos					Base de conocimiento Δ					w
	A	B	D	P		(A∧B∧P)⇒D	A	B	¬ D		¬ P
I_1	V	V	V	V		V	V	V	F		
I_2	V	V	V	F		V	V	V	F		
I_3	V	V	F	V		F	V	V	V		
I_4	V	V	F	F		V	V	V	V		V
I_5	V	F	V	V		V	V	F	F		
I_6	V	F	V	F		V	V	F	F		
I_7	V	F	F	V		V	V	F	V		
I_8	V	F	F	F		V	V	F	V		
I_9	F	V	V	V		V	F	V	F		
I_{10}	F	V	V	F		V	F	V	F		
I_{11}	F	V	F	V		V	F	V	V		
I_{12}	F	V	F	F		V	F	V	V		
I_{13}	F	F	V	V		V	F	F	F		
I_{14}	F	F	V	F		V	F	F	F		
I_{15}	F	F	F	V		V	F	F	V		
I_{16}	F	F	F	F		V	F	F	V		

2. Inferencia directa

$$\{A, B, \neg D\} \vdash_{\wedge INTRO} A \wedge B \wedge \neg D \quad [w_5]$$

$$(A \wedge B \wedge P) \Rightarrow D$$

$$\equiv \neg(A \wedge B \wedge P) \vee D \quad \text{[def. de } \Rightarrow]$$

$$\equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg P \vee D \quad \text{[ley de De Morgan]}$$

$$\equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg\neg D \vee \neg P \quad \text{[conmutativa + doble negación]}$$

$$\equiv \neg(A \wedge B \wedge \neg D) \vee \neg P \quad \text{[asociativa +ley de De Morgan]}$$

$$\equiv (A \wedge B \wedge \neg D) \Rightarrow \neg P \quad \text{[def. de } \Rightarrow]$$

$$\{(A \wedge B \wedge \neg D), (A \wedge B \wedge \neg D) \Rightarrow \neg P\} \vdash_{M.P.} \neg P$$

3. Refutación por inferencia: Se plantea un conclusión negando la demostración esperada y se intenta llegar a una contradicción.

¿$\Delta \models w$?

- Sí. $\Delta \models w \Rightarrow \alpha \equiv \{\Delta, \neg w\}$ es UNSAT.
- No. $\Delta \models w \Rightarrow \alpha \equiv \{\Delta, \neg w\}$ es SAT.

1.9. Estructuras lógicas

- **Átomos simbólicos**.
- **Literales**: pueden ser positivos (átomos) o negativos (negaciones de átomos).
- **Cláusula**: es la disyunción de literales.
- **Forma normal conjuntiva**: es la conyunción o conjunto de cláusulas.

Las cláusulas pueden contener varios literales, un único literal (cláusula unitaria) o ningún literal (cláusula vacía $\square$).

1.9.1. Resolución entre cláusulas (regla de inferencia)

Sea λ un literal positivo.
Sean K_1 y K_2 dos cláusulas de la forma

$$K_1 = (\lambda \vee \lambda_{11} \vee \lambda_{21} \dots \vee \lambda_{i1})$$
$$K_2 = (\neg\lambda \vee \lambda_{12} \vee \lambda_{22} \dots \vee \lambda_{j2}),$$

La derivación
$\{K_1 , K_2\} \vdash_{[\mathtt{RES\ en\ }\lambda]} \lambda_{11} \vee \lambda_{21} \dots \vee \lambda_{i1} \vee \lambda_{12} \vee \lambda_{22} \dots \vee \lambda_{j2}$
es una regla de inferencia correcta

1.10. Demostraciones por inferencia

R: conjunto de reglas de inferencia.

- Correcto. Si $\forall\Delta, w\ \Delta \vdash_{R^+} w$, entonces $\Delta \models w$.
- Completo. Si $\forall\Delta, w\ \Delta \models w$, entonces es posible que $\Delta \vdash_{R^+} w$.

La secuencia de FBFs es una prueba de w_n a partir de un conjunto de FBFs Δ si mediante el uso de reglas de inferencia, cada w_i está en Δ o puede deducirse a partir de $\{w_1, w_2, ..., w_{i-1}\}$.

1.11. Algoritmo para resolución

Se intenta llegar a la cláusula vacía a través de :

1.11.1. Inferencia con NFC

$\Delta \equiv \Delta_{FNC} \vdash_{RES*} w_{FNC}$

Ej. $\binom{\lambda \vee k_1}{\neg\lambda \vee k_2} \vdash_{RES\lambda} k_1 \vee k_2$

1.11.2. Refutación + Resolución

¿$\Delta \models w$?

- Sí. $\Delta \models w \Rightarrow \alpha_{FNC} \equiv \{\Delta_{FNC}, (\neg w)_{FNC}\}$ es UNSAT. Se puede derivar la cláusula vacía.

- No. $\Delta \not\models w \Rightarrow \alpha_{FNC} \equiv \{\Delta_{FNC}, (\neg w)_{FNC}\}$ es SAT. No se puede derivar la cláusula vacía.