Hoja 5

Derivadas de orden superior. Polinomios de Taylor. Máximos y mínimos

1.- Definamos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la existencia de las siguientes derivadas parciales y, en su caso, calcular sus valores:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

2.- Sea

$$f(x,y) = x\,y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \qquad (x,y) \neq (0,0), \qquad\qquad f(0,0) = 0\,.$$

Compruébese que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de las derivadas de segundo orden en el origen?

3.- El cambio de variable $x = u+v$, $y = u\,v^2$ transforma $f(x,y)$ en $g(u,v)$. Calcular $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1,1)$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = 1$$

4.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x,y) = x\,e^{x+y}$. $\qquad (b)\quad f(x,y) = \operatorname{sen} x\,y + \cos x\,y$. $\qquad (c)\quad f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

5.- Comprobar que la función $f(x,y) = e^y \cos x$ no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$.

6.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x\,y - 2\,x - 4\,y + 10$. $\qquad (b)$ $f(x,y) = 3\,x^2 - 4\,y^2 + x\,y$.

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. $\qquad (d)$ $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 - x^4y^2$.

(e) $f(x,y) = x\log(x^2+y^2)$. $\qquad (f)$ $f(x,y) = x\,y\,e^{x-y}$.

(g) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. $\qquad (h)$ $f(x,y) = e^{xy} + x^2$.

7.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x,y) = (x+y)^2$. $\qquad (b)\quad f(x,y) = \log(2 + \operatorname{sen} x\,y)$. $\qquad (c)\quad f(x,y) = x^2y^2$.

8.- Considérese el polinomio $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$ y la función $g(t) = f(t, c\,t)$ de $t \in \mathbb{R}$ con $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que g tiene un mínimo en $t = 0$, pero el punto $(0,0)$ no es un mínimo local de f.

9.- (a) Demostrar que, para dos números no negativos arbitrarios, a y b, se cumple la desigualdad

$$\frac{a+b+1}{3} \geq \sqrt[3]{a\,b}$$

y que la igualdad es posible si y sólo si $a = b = 1$.

(b) Deducir del apartado anterior que las medias aritmética y geométrica de tres números no negativos x, y y z satisfacen la desigualdad

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x\,y\,z}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $x = y = z$.

10.- Escribir un número dado $a > 0$ como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

11.- Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse dada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$.

12.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f(x,y) = x^3 + 3\,xy^2$ en la región

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\big\}.$$

13.- Hallar los extremos de la función $f(x,y) = x^2 - 3\,x\,y + y^2$ bajo la restricción $x^2 + y^2 \leq 2$.

14.- Hallar los extremos de la función $f(x,y) = x^4 + x^2 + 2y^2$ en $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + y^2 \leq 25\}$.

15.- Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + (x-2)^2 + y^2} \qquad \text{en} \qquad K = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

16.- Para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 + a(2x^2 + y^2)$, se pide:

(a) Hallar sus máximos y mínimos relativos (locales) según los distintos valores del parámetro a.

(b) Hallar los valores máximo y mínimo de la función sobre el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ en los casos $a = -1$ y $a = 5$.

17.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo V_0. Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

18.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

19.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?

20.- (a) Comprobar de forma razonada que la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = x^2 + y^2(1-x)^3$ posee un único punto crítico, que resulta ser además un mínimo local. Demostrar por otro lado que F no tiene mínimo global en $\mathbb{R}^2$

(b) Demostrar que esta situación de "un único punto crítico, que es mínimo local pero no global" no es posible en funciones de una sola variable.