ESTRUCTURAS DISCRETAS Y LÓGICA, 2022/2023

Examen final, 2022/12/02

Publicación de calificaciones: 2022/12/16

E4	E5	E6	TOTAL
Apellidos:			
Nombre:			

NOTA: Incluye explicaciones para tus respuestas. Un ejercicio cuya respuesta sea correcta pero que no incluya explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 4 (5/3 punto): Con las letras de la palabra COMBINATORIA:

a. ¿Cuántas palabras (cadenas) distintas se pueden formar?

b. ¿Cuántas palabras (cadenas) distintas se pueden formar que empiecen y acaben por la misma letra?

c. ¿Cuántas palabras (cadenas) distintas de sólo 11 letras se pueden formar?

SOLUCIÓN:

a. Permutación con elementos repetidos:

$$\frac{12!}{2! \times 2! \times 2!}$$

b. O bien empiezan y acaban con A, o bien con I, o bien con O. Para cada uno de estos casos tenemos:

$$\frac{10!}{2! \times 2!}$$

Multiplicamos por 3 para obtener el resultado final:

$$3 \times \frac{10!}{2! \times 2!}$$

c. Tenemos que descartar una letra, que puede ser de las que aparecen dos veces (A, I, O) o de las que aparecen sólo una vez (el resto). Sumando los resultados de cada caso obtenemos:

$$3 \times \frac{11!}{2! \times 2!} + 6 \times \frac{11!}{2! \times 2! \times 2!}$$

EJERCICIO 5 (5/3 punto): Si hay 11 jugadores en el campo y 15 jugadores en el banquillo, y cualquier jugador del banquillo puede sustituir a cualquier jugador del campo:

a. ¿De cuántas maneras diferentes se puede cambiar a un jugador? Por ejemplo, un posible cambio es la sustitución de Ferrán Torres por Morata.

b. ¿De cuántas maneras diferentes se puede cambiar simultáneamente a tres jugadores? No importa quién sustituye a quién, solo los tres que entran y los tres que salen.

c. ¿De cuántas maneras diferentes se puede cambiar simultáneamente a tres jugadores si importa quién sustituye a quién?

SOLUCIÓN:

a. 11×15

b. $C(11, 3) \times C(15, 3)$

c. $C(11, 3) \times C(15, 3) \times 3! = C(11, 3) \times 15 \times 14 \times 13$

EJERCICIO 6 (5/3 punto):

a. En el mundial de fútbol se juegan un total de 63 partidos, 48 en la fase de grupos y 15 en la fase final. Si sabemos que en ningún partido se marcarán más de 9 goles, ¿es posible asegurar que habrá al menos dos partidos con el mismo resultado? Nota: Dos resultados como 3-1 y 1-3 se consideran distintos.

b. ¿Cuántos esquemas de juego diferentes se pueden hacer con 10 jugadores (considerados indistinguibles) y tres posiciones del campo diferentes (defensa, medio-campo y delantera) si no puede haber más de 4 jugadores en la misma posición? Por ejemplo, un esquema 3-4-3 es válido, pero un esquema 3-5-2 no lo es. No se considerará correcta una solución obtenida por simple enumeración.

SOLUCIÓN:

a. Para saber cuántos resultados distintos se pueden dar marcando 9 o menos goles, podemos repartir 9 goles entre 3 cajas (goles del equipo A, goles del equipo B y goles no marcados por ninguno):

$$CR(3, 9) = C(11, 9) = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

Por el principio del palomar, si tenemos 63 partidos y sólo 55 resultados posibles, tiene que haber al menos dos partidos con el mismo resultado.

b. Del total, descontamos los casos en los que más de 4 jugadores están en la misma zona de juego:

$$CR(3, 10) - 3 \times CR(3, 5) + 3 = C(12, 10) - 3 \times C(7, 5) + 3 = 66 - 63 + 3 = 6$$