Hoja 1

Introducción al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

1.- Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$.

(b) $\|x-y\| \cdot \|x+y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(c) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x+y\| = \|x-y\|$.

(d) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x+\lambda\, y\| \geq \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|$.

2.- (a) Determinar todos los valores posibles del parámetro real λ para que los vectores $\lambda\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ y $\lambda\mathbf{i}+\mathbf{j}-\lambda\mathbf{k}$ (en $\mathbb{R}^3$) sean ortogonales.

(b) Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $\mathbf{x} = (4, b, 1)$ e $\mathbf{y} = (a, b, 0)$ sean ortogonales en $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál es el lugar geométrico, en el plano ab, determinado por tales a y b?

(c) Hallar dos vectores ortogonales a $(1, 1, 1)$ que no sean paralelos entre sí. ¿Se pueden elegir dos que sean también mutuamente ortogonales?

3.- (a) Sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Determinar el ángulo entre los vectores $u = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $v = \sqrt{5/3}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) Lo mismo para el ángulo entre los vectores $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, -1)$.

(c) Explicar la diferencia entre los valores $\|3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\| \cdot \|2\mathbf{j} + \mathbf{k}\|$ y $|(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} + \mathbf{k})|$. ¿Puede decidirse que ambos valores son diferentes, sin necesidad de calcularlos explícitamente?

4.- Calcúlese el coseno del ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.

5.- Halle el área (positiva) del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\mathbf{x} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{y} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

6.- Halle el volumen (positivo) del parelelepípedo con lados $\mathbf{i}$, $3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

7.- Halle una ecuación para el plano que es perpendicular al vector $(1, 2, 3)$ y pasa por el punto $(1, 1, 1)$.

8.- Demuestre que los siguientes conjuntos son abiertos:

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 2 < x^2 + y^2 < 4 \,\} \qquad B = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ xy \neq 0 \,\}$$

9.- Halle, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^2$ cuando

$$x_k = \left(\frac{\ln k}{k}\,,\, k^{1/k}\right), \quad x_k = \left(\sqrt{k^2+2} - k\,,\, \frac{(-1)^k}{k}\right), \quad x_k = \left(\frac{\operatorname{sen} k}{k}, k(e^{1/k} - 1)\right).$$

10.- Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, decida si es abierto o cerrado, y halle su frontera.

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\big\}\,, \quad B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\big\}\,.$$

11.- Determinar el cierre, el interior y la frontera de los siguientes conjuntos:

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < 1\big\}\,, \qquad B = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}\,.$$

12.- Demuestre que la unión arbitraria de abiertos es abierta. Mediante un ejemplo, compruebe que aunque sea abierto cada A_i de una familia infinita $\{A_i\}_i$, la intersección $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ no es necesariamente un conjunto abierto. ¿Qué ocurre con las familias de conjuntos cerrados?

13.- Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto arbitrario. Si $r > 0$, definimos *su entorno de radio* r al conjunto de puntos

$$D_r(A) := \{\, p \in \mathbb{R}^2 \;:\; \text{ existe algún } a \in A \text{ tal que } \|p - a\| < r \,\}.$$

Use el problema anterior para demostrar que $D_r(A)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

14.- Un conjunto A se dice *compacto* si es simultáneamente cerrado y acotado. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son compactos? Razonar la respuesta.

$$A = \big\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1,\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big\}, \qquad B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\big\}, \qquad C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\big\}.$$