Alberto Tarrasa Martín

HOJA DE EJERCICIOS 4: Combinatoria EDyL 2022-2023

EJERCICIO 1. En esta versión del juego del ajedrez el rey se puede mover a cualquier casilla adyacente solo horizontal o verticalmente. Teniendo esto en cuenta:

a. ¿De cuántas maneras diferentes puede ir el rey desde la casilla A1 hasta la casilla H8 en exactamente 14 movimientos? RESULTADO $2 \cdot 3^{n-2}$

Para ir de la casilla A1 a la casilla H8 en exactamente 14 movimientos, el rey tiene que hacer 7 movimientos hacia la derecha y 7 movimientos hacia arriba, necesariamente. Así, las distintas variaciones serán el orden en el que se dan dichos movimientos.

Basta con considerar los 7 movimientos hacia arriba y ver cómo se pueden distribuir en los 14 movimientos que se realizan en total.

Así, la solución sería:

$$\binom{14}{7} = \frac{14!}{7!\,(14-7)!} = \frac{14!}{7! \cdot 7!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2^4 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9}{3 \cdot 2}$$
$$= 2^3 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3$$

b. ¿de cuántas maneras diferentes puede ir el rey desde la casilla A1 hasta la casilla H8 en exactamente 16 movimiento?

Para poder ir de la casilla A1 hasta la H8 en exactamente 16 movimientos, con las condiciones establecidas, es necesario que 15 de los movimientos sean hacia arriba o hacia la derecha, mientras que el restante debe ser hacia abajo o hacia la izquierda, para compensar el avance extra del movimiento 15 respecto al apartado a. Así, desde cada posición en la que se puede encontrar el rey, solo tiene dos posibles opciones de movimiento.

$$|T| = |T_1| \times |T_2| \times \ldots \times |T_{16}| = 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{16}$$

EJERCICIO 2. Un examen tipo test consta de 10 preguntas, con tres posibles <u>opciones</u> de respuesta cada una.

a. ¿De cuántas maneras diferentes se puede responder el test si solo se permite marcar una opción en cada pregunta (también se pueden dejar en blanco)?

En cada pregunta habría cuatro posibles opciones de respuesta (A, B, C, blanco).

$$|T| = |T_1| \times |T_2| \times \ldots \times |T_{10}| = 4 \times 4 \times \ldots \times 4 = 4^{10}$$

b. ¿De cuantas maneras diferentes se puede responder al test si se permite marcar cualquier número de opciones en cada pregunta?

Primero tenemos que calcular cuantas opciones hay para contestar cada una de las preguntas.

$$|O| = |O_0| + |O_1| + |O_2| + |O_3| = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

Después, lo aplicamos al total de las preguntas del test.

$$|T| = |T_1| \times |T_2| \times \ldots \times |T_{10}| = 8 \times 8 \times \ldots \times 8 = 8^{10}$$

c. Suponiendo que hay 100 estudiantes en clase, ¿de cuantas maneras diferentes pueden estos 100 estudiantes (considerados como individuos, no como grupo) responder al test en cada una de las situaciones?

$$|T_A| = |T_{A1}| \times |T_{A2}| \times \ldots \times |T_{A100}| = 4^{10^{100}}$$

$$|T_B| = |T_{B1}| \times |T_{B2}| \times \ldots \times |T_{B100}| = 8^{10^{100}}$$

EJERCICIO 3. Cien estudiantes reciben su nota en un examen, que es un número entero entre 0 y 10. Si cogemos las 100 notas y las ordenamos de menor a mayor en una lista.

a. ¿Cuántas listas diferentes puede haber?

Como se toman las notas de los 100 alumnos y se ordenan en una lista de menor a mayor, solo no interesa saber el número de alumnos que han obtenido cada uno de los posibles valores (enteros de 0 a 10), y no a quien corresponden, ya que las notas de los alumnos 1, 2 y 3 en el hipotético caso A: 7, 4 y 6, respectivamente; y en el hipotético caso B: 6, 7 y 4, respetivamente; nos darían como resultado la misma lista: 4, 6, 7.

Podemos decir que n_0 es el número de notas iguales a 0, n_1 el número de notas iguales a 1, y así hasta n_{10}; sabiendo que $n_0 + n_1 + \cdots + n_{10} = 100$. Así, podemos aplicar la codificación ****…||||||||||, con 100 * y 10 |. Luego, la solución sería:

$$\binom{110}{100} = \binom{110}{10}$$

b. ¿Cuántas listas diferentes puede haber si hay el mismo número de aprobados que de suspensos?

Siguiendo los pasos del apartado anterior, que haya el mismo número de aprobados que de suspensos significa que $n_0 + n_1 + \cdots + n_4 = n_5 + n_6 + \cdots + n_{10} = 50$. Luego, podemos dividir el cálculo en dos tareas.

Primero calculamos las combinaciones de la lista de suspensos, codificando como en el ejemplo anterior. El resultado sería:

$$\binom{54}{50} = \binom{54}{4}$$

Después, calculamos las combinaciones de la lista de aprobados, codificando como en el ejemplo anterior. El resultado sería:

$$\binom{55}{50} = \binom{55}{5}$$

Por último, aplicamos la regla del producto para combinar ambas listas en todas sus posibilidades:

$$\binom{54}{50} \cdot \binom{55}{50}$$

EJERCICIO 4. Suponiendo que los números de teléfono móvil tienen 9 cifras y empiezan siempre con un 6.

a. ¿Cuántos números de teléfono móvil diferentes tienen todas las cifras distintas?

$$|T| = |T_1| \times |T_2| \times \ldots \times |T_8| \times |T_9| = 1 \times 9 \times 8 \times \ldots \times 2 = 9!$$

b. ¿Cuántos números de teléfono móvil diferentes tienen exactamente 4 cincos?

Teniendo en cuenta que el primer número es un 6, habría que distribuir 4 cincos y algunos de los otros números (excluyendo al 5) entre las 8 cifras restantes. Podemos dividir el cálculo en dos tareas.

Primeros vemos qué posiciones podrían ocupar los 4 cincos. Podrían tomar 4 de las 8 posiciones posibles, luego, el resultado sería:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2^2 \cdot 7 \cdot 5}{3}$$

Después, en las 4 posiciones restantes, podemos poner cada uno de los 9 números posibles (del 0 al 9 excluyendo el 5). Luego el resultado sería:

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4$$

Por último, combinamos ambos cálculos aplicando la regla del producto:

$$\frac{2^2 \cdot 7 \cdot 5}{3} \cdot 9^4 = 2^2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^7$$

c. ¿Cuántos números de teléfono móvil diferentes tienen todas sus cifras ordenadas de manera creciente?

El primer número siempre va a ser 6, por lo que los otros 8 pueden tomar valores entre 6 y 9. Como están ordenados, las distintas combinaciones dependerán de la cantidad de cifras que haya con cada uno de estos números. Así, podemos decir que n_6 es el número de 6s que hay (sin contar el primero), n_7 el de 7s, y así sucesivamente; de forma que $n_6 + n_7 + n_8 + n_9 = 8$.

Podemos aplicar la codificación ********|||, obteniendo como resultado:

$$\binom{11}{8} = \binom{11}{3}$$

EJERCICIO 5. Sea un grupo de 15 personas.

a. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir en dos salas distintas si en cada sala puede haber cualquier número de personas?

Como en cada sala puede haber cualquier número de personas, trabajamos únicamente con las personas que estarían en la primera sala, asumiendo que el resto estarían en la segunda. Así, podríamos no tener ninguna persona en la primera sala ($C(15,0)$), tener una persona ($C(15,1)$), dos personas ($C(15,2)$),… y así sucesivamente hasta las 15 personas ($C(15,15)$). Luego, aplicando la regla de la suma tendríamos:

$$|T| = |T_0| + |T_1| + \cdots + |T_{15}| = \binom{15}{0} + \binom{15}{1} +..+ \binom{15}{15} = \sum_{n=0}^{15} \binom{15}{n} = 2^{15}$$

b. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir en dos salas distintas si en la primera sala de haber exactamente 5 personas?

Como en la primera sala tiene que haber exactamente 5 personas, calculamos las distintas combinaciones que se podrían dar entre esas 5 personas, asumiendo que el resto estarían en la segunda sala.

$$|T| = |T_1| \times |T_2| \times |T_3| \times |T_4| \times |T_5| = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$$

c. ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir en dos salas distintas si en ninguna de las salas puede haber menos de 5 personas?

Como en ambas salas tiene que haber un mínimo de 5 personas, en ambas salas de haber un máximo de 10 personas, luego, podemos ver las posibles combinaciones de la primera sala y asumir que el resto estarían en la segunda.

$$|T| = |T_5| + |T_6| + \cdots + |T_{10}| = \binom{15}{5} + \binom{15}{6} + \binom{15}{7} + \binom{15}{8} + \binom{15}{9} + \binom{15}{10}$$
$$= 2 \cdot \left[\binom{15}{5} + \binom{15}{6} + \binom{15}{7}\right]$$

EJERCICIO 6. La baraja española está formada por 40 cartas, 10 de cada uno de los 4 palos diferentes (oros, copas, espadas y bastos). Por simplicidad supondremos que las 10 cartas de un mismo palo están numeradas del 1 al 10. Llamaremos mano a un conjunto no ordenado de 5 cartas tomadas de la baraja.

a. ¿Cuántas manos distintas tienen exactamente 3 oros y ningún basto?

Primero calculamos cuantos conjuntos distintos de 3 cartas podemos formar solamente con los oros.

$$|T_O| = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8$$

Después calculamos cuantos conjuntos distintos de 2 cartas podemos formar con las copas y las espadas.

$$|T_{CP}| = \frac{20!}{18!} = 20 \times 19$$

Por último, aplicamos la regla del producto para combinar ambas condiciones.

$$|T| = |T_O| AND |T_{CP}| = |T_O| \times |T_{CP}| = 10 \times 9 \times 8 \times 20 \times 19$$

b. ¿Cuántas manos distintas tienen cartas con todos los números consecutivos, posiblemente de palos distintos?

Si consideramos solo los números de las cartas, tendríamos las combinaciones $1,2,3,4,5; 2,3,4,5,6; 3,4,5,6,7; 4,5,6,7,8; 5,6,7,8,9; 6,7,8,9,10,$ los que sumarían un total de 6 combinaciones posibles.

En cada una de estas combinaciones cada número puede pertenecer a cualquiera de los 4 palos, sin restricciones, ya que al no haber números repetidos no puede haber cartas repetidas. Luego, para la combinación 1,2,3,4,5 podríamos calcular cuantas combinaciones se pueden dar cambiando los palos.

$$|T_1| = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$$

Como ya hemos visto que hay 6 posibles combinaciones numéricas, aplicamos la regla de la suma.

$$|T| = |T_1| OR |T_2| OR \ldots OR |T_6| = |T_1| + |T_2| + \cdots + |T_6| = 4^5 + 4^5 + \cdots + 4^5 = 6 \cdot 4^5$$

c. ¿Cuántas manos distintas tienen al menos una pareja 1-2 del mismo palo?

Las posibles combinaciones de parejas 1-2 del mismo palo son 4 (1O-2O, 1C-2C, 1E-2E, 1B-2B).

Podemos calcular el número de manos que tienen una pareja 1-2 concreta, por ejemplo, 1O-2O. Simplemente tendríamos que ver de cuantas formas distintas se pueden seleccionar otras 3 cartas.

$$|T_1| = 38 \cdot 37 \cdot 36$$

Esto se daría para cada una de las parejas 1-2. Después tenemos que calcular cuantas combinaciones hay con dos parejas 1-2, ya que estas las estaríamos contando dos veces.

Ponemos de ejemplo la mano con las parejas 1O-2O y 1C-2C. Existen 36 combinaciones que contienen esta pareja, una por cada carta que puede ocupar el quinto lugar. Esta situación se daría 6 veces, luego el resultado final es:

$$4 \cdot (38 \cdot 37 \cdot 36) - 6 \cdot 36$$

EJERCICIO 7. Las matrículas de los coches están formadas por un número de 4 dígitos seguido de 3 letras consonante mayúsculas. Teniendo en cuenta solo las 21 consonantes del alfabeto inglés:

a. ¿Cuántas matrículas diferentes contienen exactamente un 0 y al menos una B?

Como la matrícula está formada por 4 dígitos y 3 letras, podemos dividir los cálculos en dos.

Primero tratamos los números. El 0 puede estar en cada una de las 4 posiciones distintas, y las otras 3 contendrían a cualquiera de los números entre el 1 y el 9. Luego, las combinaciones numéricas serían:

$$4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^6$$

Después, tratamos las letras. Para garantizar la existencia de al menos una B, consideramos que esta pueda estar en alguna de las 3 posiciones distintas, dejando que en las otras 2 estén cualquiera de las letras (incluida la B).

$$3 \cdot 21 \cdot 21 = 3^3 \cdot 7^2$$

Por último, aplicamos la regla del producto y combinamos ambas condiciones:

$$|T| = |T_1| AND |T_2| = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 3^3 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 3^9 \cdot 7^2$$

b. Cuantas matrículas diferentes cumplen que la suma de sus 4 dígitos e 15?

Podemos considerar n_1 como el primer dígito, n_2 como el segundo… y así sucesivamente, de forma que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 15$. Esto lo podemos codificar usando ***…|||, de forma que el resultado sería:

$$\binom{18}{15} = \binom{18}{3}$$

En las combinaciones anteriores no estamos teniendo en cuenta que n_1, n_2, n_3, n_4 deben estar entre 0 y 9, de forma que tenemos que ver cuántas de las combinaciones anteriores incluyen números mayores que 9.

Para ello, consideramos solo 3 números: n_A, n_B, n_C, ya que el primero sería, 10, 11, 12, 13, 14 o 15, haciendo que la suma de $n_A + n_B + n_C$ sea 5, 4, 3, 2, 1 o 0. Así, consideramos todas las distintas opciones, codificándolas igual que antes y restándolas. El resultado final sería:

$$\binom{18}{3}-\binom{7}{2}-\binom{6}{2}-\binom{5}{2}-\binom{4}{2}-\binom{3}{2}-1$$

Por último, habría que añadir todas las posibles combinaciones de letras:

$$\left(\binom{18}{3}-\binom{7}{2}-\binom{6}{2}-\binom{5}{2}-\binom{4}{2}-\binom{3}{2}-1\right)\cdot 10^3$$

c. ¿Cuántas matrículas diferentes cumplen que la suma de sus dígitos es 15, siendo todos distintos?

Tendríamos que considerar todas las combinaciones del apartado anterior y restar aquellas en las que haya dos o más dígitos iguales.

EJERCICIO 8. ¿De cuantas maneras diferentes se puede colocar a 10 personas en dos filas en cada uno de los casos siguientes?

a. Las dos filas son distinguibles y en cada una de ellas hay 5 personas.

Para resolver el problema, en vez de considerar dos filas de 5 personas, podemos considerar una única fila de 10, donde el orden importa. Existen $10!$ formas de colocar a estas 10 personas en nuestra de fila, de forma que basta con considerar que de la posición 6 en adelante se forma la segunda fila, manteniendo el orden.

b. Las dos filas son indistinguibles y en cada una de ellas hay 5 personas.

Podemos aplicar el razonamiento anterior, teniendo en cuenta que si no se distingue una fila de la otra, cada combinación se repetiría dos veces, por lo que basta con dividir el resultado entre 2: $5\cdot 9!$

c. Las dos filas son distinguibles y en cada una de ellas puede haber cualquier número de personas.

También podemos aplicar el razonamiento del apartado a), añadiendo las posibles combinaciones del número de personas por fila.

Para ello consideramos n_1 el número de personas de la primera fila, y n_2 el número de personas de la segunda. Así, podemos codificar todas las opciones posibles utilizando **********|:

$$\binom{11}{10}=\binom{11}{1}$$

Combinando ambos pasos, obtenemos el siguiente resultado:

$$\binom{11}{10}\cdot 10! = \frac{11!\cdot 10!}{10!\,(11-10)!} = 11!$$

EJERCICIO 9. Se genera una lista aleatoria de 10 números lanzando un dado (de 6 caras) 10 veces y anotando el resultado de cada tirada.

a. ¿Cuántas listas diferentes se pueden obtener?

En cada una de las 10 tiradas se pueden obtener 6 posibles resultados, luego existen 6^{10}

posibles combinaciones de resultados, y por tanto, 6^{10} posibles listas.

b. ¿Cuántas listas diferentes se pueden obtener si se ordenan de menor a mayor los resultados de las 10 tiradas?

Como vamos a ordenar los resultados obtenidos de menor a mayor, lo único que nos interesa saber es la cantidad de veces que hemos obtenido cada uno de los resultados. Podemos decir que n_1 es el número de vece que ha salido la cara 1, n_2 el número de veces que ha salido la cara dos, y así sucesivamente hasta n_6. De forma que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 10$. Esto lo podemos codificar usando **********|||||, de forma que el resultado sería:

$$\binom{15}{10} = \binom{15}{5} = \frac{15!}{10!\,(15-10)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11$$

EJERCICIO 10. Las matrículas de los coches están formadas por una serie de 4 dígito y 3 consonantes mayúsculas. Teniendo en cuenta solo las 21 consonantes del alfabeto inglés:

a. ¿Cuántas matrículas diferentes contienen la letra B?

Para garantizar la existencia de al menos una B, consideramos que esta pueda estar en alguna de las 3 posiciones distintas, dejando que en las otras 2 estén cualquiera de las letras (incluida la B).

$$3 \cdot 21 \cdot 21 = 3^3 \cdot 7^2$$

A este resultado habría que restarle las combinaciones repetidas que dan como resultado BB-, B-B, -BB; y multiplicarlo por todas las combinaciones numéricas.

$$\left(3^3 \cdot 7^2 - \left(\frac{3 \cdot 21}{2}\right)\right) \cdot 9^3$$

b. ¿Cuántas matrículas diferentes contienen dos 1s y una B?

Primer consideramos las combinaciones numéricas con dos 1s. Consideramos las posiciones que pueden ocupar dichos 1s y los posibles números que pueden ocupar las demás posiciones:

$$\binom{4}{2} \cdot 9^2$$

Después, consideramos las combinaciones que contienen una B.

$$3 \cdot 21^2$$

Por último, aplicamos la regla del producto a ambas condiciones:

$$|T| = \binom{4}{2} \cdot 9^2 \cdot 3 \cdot 21^2$$

c. ¿Cuántas matrículas diferentes empiezan con un 5 o acaban con una B?

Consideramos todas las combinaciones numéricas que empiezan por 5 y todas las combinaciones de letras que acaban con una B.

$$|T_5| = 9^3 \cdot 21^3$$

$$|T_B| = 9^4 \cdot 21^2$$

Después consideramos todas las posibilidades en las que se dan ambas condiciones:

$$|T_{5B}| = 9^3 \cdot 21^2$$

Por último, aplicamos la regla de la suma, sumando ambas posibilidades y restando la intersección:

$$|T| = |T_5| + |T_B| - |T_{5B}| = 9^3 \cdot 21^3 + 9^4 \cdot 21^2 - 9^3 \cdot 21^2 = 9^3 \cdot 21^2(21 + 9 - 1)$$
$$= 9^3 \cdot 21^2 \cdot 29$$

EJERCICIO 11.

a. ¿Cuántas aristas tiene un grafo simple no dirigido completo de N nodos?

Que un grafo sea completo implica que cada nodo está unido a todos los demás, es decir, el grado de cada nodo es $N - 1$. Luego, el resultado sería:

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

b. Suponiendo que los nodos son distinguibles, ¿cuántos grafos simples no dirigidos distintos hay como N nodos?

El resultado sería $N!$

c. ¿De cuántas maneras diferentes se puede repartir a N personas en dos grupos (ninguno vacío)?

El problema se puede codificar usando N * y | |, luego, el resultado sería:

$$\binom{N+2}{N} = \binom{N+2}{2} = \frac{(N+2)!}{N!\,(N+2-N)!} = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

EJERCICIO 12. Lanzamos 7 dados (distinguibles).

a. ¿Cuántos resultados diferentes contienen exactamente cuatro 6s?

Primero calculamos cuantas posibilidades habría de obtener como resultado exactamente cuatro 6s, sin tener en cuenta cuáles son.

$$|R| = |R_1| \times |R_2| \times |R_3| = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

Después vemos como se podrían distribuir cada una de las posibilidades en los 7 dados, aplicando la codificación $****$ |||.

$$|P| = \binom{7}{4}$$

Por último, aplicamos la regla del producto para combinar ambas condiciones.

$$|T| = |R|AND|P| = 5^3 \cdot \binom{7}{4}$$

b. ¿Y si los dados son indistinguibles?

Si los dados son indistinguibles solo tendríamos que tener en cuenta la primera parte del apartado a).

$$|R| = |R_1| \times |R_2| \times |R_3| = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

c. ¿Cuántos resultados diferentes contienen seis números distintos (dados distinguibles)?

Primero calculamos cuántas combinaciones tienen seis números distintos, sin distinguir unos dados de otros.

$$|R| = |R_1| \times |R_2| \times \ldots \times |R_6| \times |R_7| = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6 = 6! \cdot 6$$

Después aplicamos la distinción entre unos dados y otros, obteniendo como resultado:

$$(6! \cdot 6)^7$$