1.- Decide de manera razonada si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ o no. Da una base cuando lo sean:

(a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, 2y = z + 7\}$

(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, 2y = z\}$

SOL:

(a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

- Elemento neutro: Sea $\vec{0} = (0, 0, 0)$, se tiene que $0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{0} \in V_1$.
- Suma: Sean $v_1, v_2 \in V_1$, entonces $v_1 + v_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, de forma que $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_1$.
- Producto: Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V_1$, entonces $\lambda v = \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, de forma que $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in V_1$.
Luego, V_1 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
Sea $v = (x, y, z) \in V_1$, entonces $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$. Sean los pares $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$ pares (x, y), tenemos la base $\mathcal{B}_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, 2y = z + 7\}$

- Elemento neutro: Sea $\vec{0} = (0, 0, 0)$, se tiene que $0 \neq 0 + 7 = 7 \Rightarrow \vec{0} \notin V_2$.
Luego, V_2 no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, 2y = z\}$

- Elemento neutro: Sea $\vec{0} = (0, 0, 0)$, se tiene que $0 = 0$ y $2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{0} \in V_3$.
- Suma: Sean $v_1, v_2 \in V_3$, entonces $v_1 + v_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, de forma que $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, ya que $x_i = y_i$, y $2(y_1 + y_2) = 2y_1 + 2y_2 = z_1 + z_2$, ya que $2y_i = z_i$, $\Rightarrow v_1 + v_2 \in V_3$.
- Producto: Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V_3$, entonces $\lambda v = \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, de forma que $\lambda x = \lambda y$, ya que $x = y$ y $2\lambda y = \lambda z$, ya que $2y = z$, $\Rightarrow \lambda v \in V_3$.
Luego, V_3 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Sea $v = (x, y, z) \in V_3$, entonces $x = y, 2y = z$. Sea $y = 1$, tenemos la base $\mathcal{B}_{V_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

2.- Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$. Se pide:

(a) Determinar si el vector $(0, 0, -37, -3)$ pertenece a W.

(b) Determinar para qué valores de α y β el vector $(\alpha, \beta, -37, -3)$ pertenece a W.

SOL:

(a) Determinar si el vector $(0, 0, -37, -3)$ pertenece a W.

$(0,0,-37,-3) \in W \Rightarrow \exists \lambda, \mu : (0,0,-37,-3) = \lambda(1,2,-5,3) + \mu(2,-1,4,7)$ A partir de esto, obtenemos el sistema: $\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = 0 \\ -5\lambda + 4\mu = -37 \\ 3\lambda + 7\mu = -3 \end{cases}$ imcompatible, por lo que $(0,0,-37,-3) \notin W$.

(b) Determinar para qué valores de α y β el vector $(\alpha, \beta, -37, -3)$ pertenece a W.

Usando el sistema del apartado anterior, tenemos $\begin{cases} \lambda + 2\mu = \alpha \\ 2\lambda - \mu = \beta \\ -5\lambda + 4\mu = -37 \\ 3\lambda + 7\mu = -3 \end{cases}$, con solución $(\lambda, \mu, \alpha, \beta) = \left(\frac{247}{47}, -\frac{126}{47}, -\frac{5}{47}, \frac{620}{47}\right)$. Luego, $(\alpha, \beta, -37, -3) \in W \Leftrightarrow \alpha = -\frac{5}{47}, \beta = \frac{620}{47}$.

3.- Consideramos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $W_2 = \langle v_4, v_5 \rangle$ con $v_1 = (1,-2,-1,3), v_2 = (0,2,1,-1), v_3 = (-2,6,3,-7), v_4 = (1,2,1,1), v_5 = (2,0,-1,1)$. Halla una base y calcula la dimensión de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$. Comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.

Comprobamos la independencia lineal de los vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De forma que $\mathcal{B}_{W_1} = \{v_1, v_2\}$ y $\dim W_1 = 2$; $\mathcal{B}_{W_2} = \{v_4, v_5\}$ y $\dim W_2 = 2$; $\mathcal{B}_{W_1+W_2} = \{v_1, v_2, v_5\}$ y $\dim(W_1 + W_2) = 3$; $\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{v_1\}$ y $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.
La fórmula de Grassmann dice que $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$. En este caso, verificamos que $2 + 2 = 4 = 3 + 1$.

4.- Sean $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ c-d & 5a \end{pmatrix} \text{ y } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, -c, d-a).$$

(a) Halla las matrices de f y g respecto a las bases estándar.

(b) Comprueba que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Halla la matriz de f y las coordenadas de $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

(c) Halla la matriz de g respecto a la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(d) Halla la matriz de $g \circ f$ respecto a las bases estándar y respecto a la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

(e) Relaciona las diferentes matrices obtenidas.

SOL:

(a) Halla las matrices de f y g respecto a las bases estándar.

$$f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix};f\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};f\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=(1,0,-1);g\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=(1,0,0);g\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=(0,-1,0);g\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=(0,0,1)$$

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}(f)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\\5&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}(g)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&-1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

(b) Comprueba que $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Halla la matriz de f y las coordenadas de $f\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

Son vectores linealmente independientes y $\dim\mathcal{B}=4=\dim\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\Rightarrow\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

$$f\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}-\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}+\frac{4}{5}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\frac{4}{5}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Luego, $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}f\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}=\left(1,-\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right)$.

(c) Halla la matriz de g respecto a la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$g\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}=(2,-1,4);g\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}=(3,-3,-1);g\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=(0,0,-1);g\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=(1,0,-1)$$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(g)=\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-1&-3&0&0\\4&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

(d) Halla la matriz de $g\circ f$ respecto a las bases estándar y respecto a la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}(f\circ g)=M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}(g)\cdot M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}(f)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&-1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\\5&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&-1&1\\4&-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f\circ g)=M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(g)\cdot M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}(f)=\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-1&-3&0&0\\4&-1&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\\5&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&0&0\\-1&-1&0&0\\3&4&-1&1\end{pmatrix}$$