TEMA 1: Números naturales, racionales y reales

Fernando Soria

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid (UAM)

Clases de números.

- **Naturales** $\mathbb{N}$**:** Los usados para contar

$$1, 2, 3, \dots$$

Con la operación suma tienen una estructura de "semigrupo".

- **Enteros** $\mathbb{Z}$**:** Los anteriores con signo, y con el 0:

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Con las operaciones suma y producto tienen una estructura de "anillo".

- **Racionales** $\mathbb{Q}$**:** Los obtenidos de los anteriores tras dividirlos entre sí,

$$p/q, \qquad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0.$$

Tienen "desarrollo decimal" periódico. Con las operaciones suma y producto tienen una estructura de "cuerpo" ordenado, pero no es "completo".

- **Reales** $\mathbb{R}$**:** Los obtenidos añadiendo a los anteriores aquellos con "desarrollo decimal" no periódico. Con las operaciones suma y producto tienen una estructura de "cuerpo" ordenado, que sí resulta ser "completo".

- **Complejos** $\mathbb{C}$**:** ...

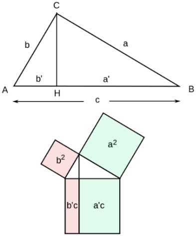
Demostraciones en matemáticas

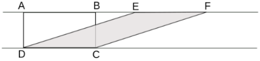
Se entiende por demostración un encadenamiento de afirmaciones cuya validez es fácil de comprobar en cada caso, que comienza a partir de una situación inicial (la Hipótesis) para terminar en un resultado anunciado (la Tesis). Esas afirmaciones intermedias deben respetar ciertas condiciones de estabilidad establecidas de antemano y denominadas axiomas

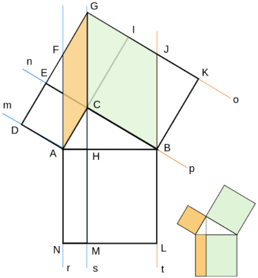
Algunos tipos de demostración con ejemplos (no es un listado exhaustivo):

- Demostración directa: el teorema de Pitágoras (ver página adicional)
- Demostración por reducción al absurdo: $\sqrt{2}$ no es un número racional (ver página adicional)
- El principio de inducción: cómo probar que $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050$

Teorema de Pitágoras

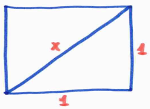






Demostración de Pappus: Los paralelogramos ADEC, AFGC y AHMN tiene la misma área. Lo mismo ocurre con los paralelogramos BCIK, BCGJ y BLMH

$\sqrt{2}$ es irracional



Definición

$x \equiv$ longitud de la diagonal del cuadrado unidad

Por tma. Pitágoras $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ $\quad (x = \sqrt{2})$

Afirmación (Teorema, proposición, lema, ...)

X no es número racional $\quad (x \notin \mathbb{Q})$

Demostración (por reducción al absurdo):

(*) Supongamos lo contrario..., i.e.,
$\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, primos entre sí, tal que

$$x = p/q$$

Pero entonces $2 = p^2/q^2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow \boxed{p \text{ es par}}$

$\Rightarrow \exists\, p' \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2p'$. Por tanto $4(p')^2 = 2q^2$

Luego $2(p')^2 = q^2$ y por tanto $\boxed{q \text{ es par}}$

Contradicción, porque habíamos dicho que p y q eran primos entre sí. Por tanto (*) no es cierto.

q.e.d.

Principio de inducción.

Para qué sirve: Sirve para demostrar propiedades y fórmulas que dependan de un número natural n.

Idea: Supongamos que $\mathcal{P}(n)$ es una afirmación que depende de un número n que deseamos demostrar.

El principio de inducción dice que para ello, basta con comprobar las dos cosas siguientes:

1. Demostramos que $\mathcal{P}(1)$ es verdad (suele ser fácil);
2. suponemos que $\mathcal{P}(n)$ es verdad -hipótesis de inducción (h.i.)- y ayudándonos de ella, demostramos que $\mathcal{P}(n+1)$ es verdad;

Por qué: $\mathcal{P}(1)$ es verdad; $\mathcal{P}(2)$ será verdad porque lo es $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(3)$ lo será porque $\mathcal{P}(2)$ lo es, etc... (ver ejemplo a continuación)

Un ejemplo del principio de inducción

Hoja 1 : Ejercicio 2 (1)

Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene $\mathcal{P}(n) \equiv 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Paso 1 : caso $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Parte izda. de } \mathcal{P}(1) : \ 1 \\ \text{Parte dcha de } \mathcal{P}(1) : \ \frac{1(1+1)}{2} = 1 \end{array}\right\} \text{luego } \mathcal{P}(1) \text{ es cierta}$$

Paso 2 : caso $n \Rightarrow$ caso $n+1$

Damos por cierta $\mathcal{P}(n)$, que llamaremos hipótesis de inducción (h.i.)

Ahora P.I. de $\mathcal{P}(n+1) = \underbrace{1+2+\cdots+n}+(n+1) \underset{\text{h.i.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$\underset{\text{cálculo}}{=} \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \text{P.D. } \mathcal{P}(n+1)$$

Luego $\mathcal{P}(n+1)$ es cierta y hemos terminado.

El principio de inducción (cont.).

Variante 1: En algunas situaciones sólo nos piden demostrar $\mathcal{P}(n)$ para $n \geq n_0$, donde n_0 es un número natural fijo que no necesita ser 1.

En este caso basta con

1. demostrar que $\mathcal{P}(n_0)$ es verdad,
2. suponer que $\mathcal{P}(n)$ es verdad y ayudándonos de ella, demostrar que $\mathcal{P}(n+1)$ es verdad.

(ver ejemplo a continuación)

Variante 2: A veces para demostrar $\mathcal{P}(n+1)$ hacen falta $\mathcal{P}(n)$ **y** $\mathcal{P}(n-1)$.

En ese caso, hay que

1. demostrar que $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ son verdad,
2. suponer que $\mathcal{P}(n-1)$ y $\mathcal{P}(n)$ son verdad, y demostrar que $\mathcal{P}(n+1)$ es verdad.

Otro ejemplo del principio de inducción

Hoja 1: <u>Ejercicio 2(5)</u>

Probar que $\forall n \geq 10$, se tiene $2^n \geq n^3 \equiv \mathcal{P}(n)$

Paso 1: caso $n=10$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{P.I. de } \mathcal{P}(10): & 2^{10} = 1024 \\ \text{P.D. de } \mathcal{P}(10): & 10^3 = 1000 \end{array}\right\} \text{ luego } \mathcal{P}(10) \text{ es cierta.}$$

Paso 2: caso $n \Rightarrow$ caso $n+1$ (con $n \geq 10$) $\quad 1 \leq n/10$

Damos por cierta $\mathcal{P}(n)$ (h.i.)

Ahora, P.I. de $\mathcal{P}(n+1) = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\text{h.i.}}{\geq} 2n^3$

mientras que P.D. de $\mathcal{P}(n+1) = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$$\leq n^3 + 3\,n^3/10 + 3\,n^3/100 + n^3/1000$$

$$= n^3\left(1 + 3/10 + 3/100 + 1/1000\right) = 1{,}331\, n^3$$

$$\leq 2n^3 \quad \text{Luego } \mathcal{P}(n+1) \text{ es cierta}$$

Relación de orden $\leq$ en los números racionales y reales.

En los racionales y en los reales se puede definir un orden natural a partir de la noción de número positivo, de forma que

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \geq 0.$$

Propiedad arquimediana de los números reales:

1. si $y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces existe un número natural n tal que $y < nx$.
2. equivalentemente, si $\varepsilon > 0$, existe un natural n tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$;

Algunas propiedades útiles:

- si $p < q$, hay números $r \in \mathbb{Q}$ y $s \notin \mathbb{Q}$ con $p < r, s < q$;
- para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $x^2 \geq 0$; y si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$;
- si $x \leq y$ y $a > 0$, entonces $ax \leq ay$;
- si $x \leq y$ y $a < 0$, entonces $ax \geq ay$;
- si $x, y > 0$ y $x \leq y$, entonces $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$;
- si $x, y > 0$, entonces $x \leq y$ si y sólo si $x^2 \leq y^2$.

Conjuntos de números reales.

Hay muchas formas de escribir conjuntos de números reales, y es importante reconocer cuál es el conjunto y saber pasar de unas a otras. Por ejemplo:

$$\{ (-1)^n n \,:\, n \in \mathbb{Z} \}.$$

El $(-1)^n n$ de la izquierda nos dice lo que está en el conjunto, mientras que el $n \in \mathbb{Z}$ de la derecha indica que n's se pueden usar para calcular los $(-1)^n n$ anteriores.

Algunos conjuntos que aparecen a menudo son intervalos (abiertos, cerrados, etc.).

$$\{ x \in \mathbb{R} \,:\, 2 < x \leq 9 \} = (2, 9]$$

Para tratar con desigualdades es útil recordar que:

- las desigualdades se preservan si se multiplican o dividen en ambos lados por un <u>número positivo</u>,
- PERO cambian de sentido si se multiplican o dividen en ambos lados por un <u>número negativo</u>.

El valor absoluto y sus propiedades

A menudo, los conjuntos se describen con la ayuda del **valor absoluto.**

Definición

El **valor absoluto** $|x|$ *de un número* x *es*

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{si } x \geq 0; \\ -x, & \textit{si } x < 0. \end{cases}$$

PROPIEDADES:

1. $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$;
3. geométricamente, el valor absoluto $|a - b|$ es la distancia entre a y b;
4. el intervalo abierto $(a - r, a + r)$ es igual que el conjunto de puntos x con $|x - a| < r$;
5. el intervalo cerrado $[a - r, a + r]$ es igual que el conjunto de puntos x con $|x - a| \leq r$;
6. $|x| \leq y$ si y sólo si $-y \leq x \leq y$;
7. $|x| < y$ si y sólo si $-y < x < y$;
8. si $r \geq 0$ entonces $r|a| = |ra|$, y en general, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
9. (Des. triangular)$|x + y| \leq |x| + |y|$, con igualdad si y sólo si x e y tienen el mismo signo;
10. (Des. tri. al revés)$||x| - |y|| \leq |x - y|$ con igualdad si y sólo si x e y tienen el mismo signo.

Cotas inferiores y superiores de un conjunto.

Definición

Sea A un conjunto de números reales.

- *Una* **cota inferior de un conjunto** *A es cualquier número r tal que $r \leq a$ para cualquier $a \in A$.*
- *Una* **cota superior de un conjunto** *A es cualquier número r tal que $r \geq a$ para cualquier $a \in A$.*

Si un conjunto tiene alguna cota inferior (superior), se dice que está acotado inferiormente (superiormente).

Si el conjunto está acotado superior e inferiormente, se dice que está acotado.

Ínfimo y supremo. Mínimo y máximo de un conjunto.

- Si un conjunto A está acotado superiormente, tiene cotas superiores.

$\boxed{\textbf{La menor cota superior de } A \text{ se llama el } \textbf{supremo de } A\text{, y se denota } \sup A}$

- Si un conjunto A está acotado inferiormente, tiene cotas inferiores.

$\boxed{\textbf{La mayor cota inferior de } A \text{ se llama el } \textbf{infimo de } A\textbf{, y se denota } \inf A}$

- Si $\sup A$ pertenece a A, se llama **el máximo de** A;
- Si $\inf A$ pertenece a A, se llama **el mínimo de** A.

El máximo y el mínimo de A se denotan por $\max A$ y $\min A$ respectivamente.

Un conjunto de números racionales acotado superiormente (respect., inferiormente) no tiene por qué tener supremo (respect., ínfimo) racional. En los reales, sin embargo, sí es cierto. Esta situación caracteriza completamente a los reales y se describe diciendo que $\mathbb{R}$ es completo.

Propiedades de ínfimos y supremos.

- Si queremos probar que un número real c verifica que $\sup A \leq c$, lo que tenemos que hacer es probar que c es una cota superior de A;
- si queremos probar que un número real c verifica que $c \leq \inf A$, lo que tenemos que hacer es probar que c es una cota inferior de A

Sea A un conjunto no vacío y acotado de números reales.

- Si un número real c verifica que $c < \sup A$, entonces c no puede ser cota superior de A, así que tiene que haber algún $a \in A$ tal que $c < a$;
- si un número real c verifica que $c > \inf A$, entonces c no puede ser cota inferior de A, así que tiene que haber algún $a \in A$ tal que $c > a$.

Estrategia para calcular el supremo y el ínfimo

Si quiero ver que un número c es el supremo de A, puedo seguir estos dos pasos:

1. Primero compruebo que c es una cota superior para A, i.e, veo que para todo $a \in A$ tenemos que $a \leq c$;
2. una vez hecho esto, comprobamos que dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay algún número $a \in A$ con $a > c - \varepsilon$.

Para lo segundo puede ser útil recordar la propiedad arquimediana.

Si quiero ver que un número c es el ínfimo de A, puedo seguir estos dos pasos:

1. Primero compruebo que c es una cota inferior para A, i.e, veo que para todo $a \in A$ tenemos que $a \geq c$;
2. una vez hecho esto, comprobamos que dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay algún número $a \in A$ con $a \leq c + \varepsilon$.

Para lo segundo puede ser útil recordar la propiedad arquimediana.

Un buen atajo que no siempre se puede aplicar

Sea A un conjunto de números reales.

- Si c es una cota inferior de A **que pertenece a** A, entonces c es el ínfimo (y el mínimo) de A;
- si c es una cota superior de A **que pertenece a** A, entonces c es el supremo (y el máximo) de A.

La razón en el primer caso es que si $r \in \mathbb{R}$ es otra cota inferior de A, entonces $r \leq c$ ya que c está en A; el segundo caso es similar.

Cuidado: no os olvidéis de comprobar que c es cota inferior (o superior en su caso) de A si usáis este atajo.

Cotas, supremo, ínfimo: RESUMEN

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

- $C \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A si $\forall x \in A$ se tiene $x \leq C$.
  Si existe una cota superior, se dice que A está acotado superiormente.
- Se define $S = \sup A$ (supremo de A) a la menor de las cotas superiores; es decir,
  1. S es una cota superior de A
  2. Si C es otra cota superior de A entonces $S \leq C$
     (equivalentemente: si $C < S$ entonces C **NO** es una cota superior; es decir, $\exists x \in A$ tal que $C < x \leq S$)

Todo $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente tiene supremo

- Si además se tuviera que $S \in A$, entonces lo llamaríamos máximo ($S = \max A$)

****

- $c \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A si $\forall x \in A$ se tiene $x \geq c$.
  Si existe una cota inferior, se dice que A está acotado inferiormente.
- Se define $s = \inf A$ (ínfimo de A) a la mayor de las cotas inferiores; es decir,
  1. s es una cota inferior de A
  2. Si c es otra cota inferior de A entonces $s \geq c$
     (equivalentemente: si $s < c$ entonces c **NO** es una cota inferior; es decir, $\exists x \in A$ tal que $s \leq x < c$)

Todo $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo

- Si además se tuviera que $s \in A$, entonces lo llamaríamos mínimo ($s = \min A$)