Cálculo 2: Grado en Matemáticas y doble grado Mat/Inf.

SOLUCIONES:

1) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudia en qué direcciones existe la derivada direccional de f en el origen de coordenadas.

(b) Estudia la continuidad y diferenciabilidad de la función f.

SOL.: (a) Dado el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ de norma 1 (es decir $u_1^2 + u_2^2 = 1$) se define la derivada direccional de f en la dirección $\vec{u}$ en un punto (a,b) como

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a,b)}{t}.$$

En nuestro caso,

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t(t^2u_1^2 + t^2 u_2^2)} = u_1^2 u_2.$$

Luego f tiene derivadas direccionales en $(0,0)$, para todo vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$, de valor $D_{\vec{u}} f(0,0) = u_1^2 u_2$.

(b) f es diferenciable (y por tanto continua) en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ por ser cociente de funciones diferenciables (en este caso polinomios) donde el denominador solo se anula en $(0,0)$.

En $(0,0)$ f es continua, por cuanto

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = |y| \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq |y| \leq \|(x,y)\|.$$

Luego, dado $\epsilon > 0$, si elegimos $\delta = \epsilon$ y $\|(x,y)\| < \delta$ se tiene $|f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$.

En cambio, f no es diferenciable en $(0,0)$. Observamos primero que con $\vec{u} = (1,0)$ ó $(0,1)$ deducimos del apartado (a) que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ y se tiene

$$Q(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{1}$$

Esto representa una función homogénea de grado 0, de forma que su límite a lo largo de rectas que pasan por el origen puede variar en cada una de ellas. Por ejemplo, si elegimos la sucesión $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$ sobre el eje de las X, tenemos $Q(x_n, y_n) = 0, \forall n$, mientras que si consideramos $(\overline{x}_n, \overline{y}_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ sobre la semirecta $y = x$, $x > 0$, entonces $Q(\overline{x}_n, \overline{y}_n) = \frac{1}{2^{3/2}}, \forall n$. Luego el límite de la expresión en (1) no existe cuando $(x,y) \to 0$.

2) Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ dos funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Consideremos el cambio a coordenadas polares:

$$x(r,\theta) = r\,\cos\theta; \quad y(r,\theta) = r\,\operatorname{sen}\theta.$$

(a) Calcula $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial v}{\partial r}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$, en función de las derivadas parciales de u y v con respecto a x e y.

(b) Demuestra que las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

expresadas en coordenadas polares vienen dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

SOL.: Usando la regla de la cadena sobre $u(r\,\cos\theta, r\,\operatorname{sen}\theta)$ obtenemos

$$\begin{cases} i) & \frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta\, u_x + \operatorname{sen}\theta\, u_y \\ ii) & \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\,\operatorname{sen}\theta\, u_x + r\,\cos\theta\, u_y \\ iii) & \frac{\partial v}{\partial r} = \cos\theta\, v_x + \operatorname{sen}\theta\, v_y \\ iv) & \frac{\partial v}{\partial \theta} = -r\,\operatorname{sen}\theta\, v_x + r\,\cos\theta\, v_y \end{cases}$$

Usando i) y iv) se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \cos\theta\,(u_x - v_y) + \operatorname{sen}\theta\,(u_y + v_x)\,, \tag{2}$$

mientras que de ii) y iii) se deduce

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\operatorname{sen}\theta\,(u_x - v_y) + \cos\theta\,(u_y + v_x)\,. \tag{3}$$

Matricialmente, lo anterior se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x - v_y \\ u_y + v_x \end{pmatrix}.$$

Observando que

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

deducimos que

$$u_x - v_y = u_y + v_x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

No obstante, el problema consistía en probar solo la implicación “ $\Longrightarrow$ ” , es decir, las equaciones de Cauchy Riemann $u_x = v_y, \quad u_y = -u_x,$ implican que $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$. Esto se puede obtener directamente de las igualdades (2) y (3).

3) Determina la ecuación del plano tangente a la superficie S definida por $z = x(x+y)$ que sea perpendicular a los planos: $\pi_1 \equiv x + y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + z - 4 = 0$.

SOL.: Si definimos $F(x,y,z) = x(x+y) - z$, el plano tangente a la superficie anterior en un punto genérico (x,y,z) tiene como vector normal $\nabla F(x,y,z) = (2x+y, x, -1)$. Buscamos por tanto en qué punto o puntos este vector es perpendicular a su vez a los vectores normales de los planos π_1 y π_2 para los que elegimos, respectivamente,

$$\eta_1 = (1,1,-1) \qquad \text{y} \qquad \eta_2 = (2,-1,1).$$

Por las propiedades que conocemos esto es lo mismo que buscar los puntos para los que $\nabla F(x,y,z)$ es paralelo a producto vectorial

$$\eta_1 \times \eta_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-3,-3).$$

Se debe cumplir por tanto que, para cierta $\lambda \neq 0$, $\lambda(2x+y) = 0$, $\lambda x = -3$, $-\lambda = -3$. Esto nos da el único valor:

$$x = -1, \quad y = 2, \quad \text{y} \quad z = -1.$$

Como $\nabla F(-1,2,-1) = (0,-1,-1)$, el plano tangente buscado es

$$-(y-2) - (z+1) = 0, \qquad \text{es decir} \qquad \pi \equiv y + z - 1 = 0.$$

4) Encuentra los puntos de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ más próximos al punto $(3, 1, -1)$.

SOL.: La distancia del punto (x, y, z) a $(3, 1, -1)$ es

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}.$$

Por cuestiones prácticas (evitar la raíz cuadrada), minimizamos la misma función pero al cuadrado

$$f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 2z + 11,$$

bajo la condición $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Introduciendo esta información, la función a minimizar se simplifica y queda

$$F(x, y, z) = -6x - 2y + 2z + 15, \quad \text{sujeta de nuevo a} \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0.$$

Como la esfera es un compacto y F es continua, tenemos asegurado que F alcanza su máximo y mínimo en ese conjunto. Para encontrarlos, usaremos la teoría de multiplicadores de Lagrange. Buscamos una constante $\lambda \neq 0$ de forma que

$$\nabla F(x, y, x) = \lambda \nabla g(x, y, x), \quad \text{es decir} \quad (-6, -2, +2) = \lambda(2x, 2y, 2z).$$

Despejando queda $x = -\frac{3}{\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}, z = \frac{1}{\lambda}$. Usando la restricción a la esfera obtenemos

$$\frac{9}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 4, \quad \text{lo que implica} \quad \frac{1}{\lambda} = \pm\frac{2}{\sqrt{11}}.$$

Esto nos da los dos puntos $\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$ y $\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right)$. Finalmente, como

$$F\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right) = \frac{44}{\sqrt{11}} + 15 = 15 + 4\sqrt{11} \quad \text{y} \quad F\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right) = \frac{-44}{\sqrt{11}} + 15 = 15 - 4\sqrt{11},$$

deducimos que el punto de la esfera más cercano a $(3, 1, -1)$ es el punto $\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right)$.[1]

[1] El punto $\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$ es, por contra, el más alejado.

5) Responde de manera razonada a las siguientes dos preguntas:

(a) Consideramos una función f de clase C^3 en un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ que alcanza un mínimo local en $(3,7) \in \mathcal{U}$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,7) = 2$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,7) = 8$. ¿Qué posibles valores puede tomar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,7)$?

(b) Una función de clase C^3 en un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ tiene un punto crítico en $(a,b) \in \mathcal{U}$. Sabemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \neq 0 \quad \text{y que} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b).$$

¿Qué se puede concluir sobre este tipo de punto?

SOL.: (a) Llamemos $b = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,7)$. Entonces, la matriz hessiana de f en el punto $(3,7)$ es

$$Hf_{|(3,7)} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ b & 8 \end{pmatrix}.$$

Para que el punto $(3,7)$ sea un mínimo local se necesita que la matriz sea, al menos, semidefinida positiva. Con los datos que nos dan, solo necesitamos que el determinante de la matriz no sea negativo, es decir, $16 - b^2 \geq 0$. Por tanto la respuesta es que se cumpla $\quad -4 \leq b = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,7) \leq 4$.

(b) En este caso, llamando $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ y $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, la matriz hessiana correspondiente viene dada por

$$Hf_{|(a,b)} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}.$$

Aquí el punto clave es que su determinante es $-A^2 - B^2$, que es estrictamente negativo ya que $A \neq 0$. Por tanto el punto (a,b) es un punto silla.