Inicial primer apellido

Cálculo II

1º del Grado en Matemáticas

1º de Doble titulación en Ingeniería Informática-Matemáticas

Curso 2020-2021

Grupo mañana ☐

Grupo tarde ☐

5 de marzo de 2021

Parcial 1

Apellidos y Nombre ______________________________ D.N.I. ______________

Justifique todas las respuestas.

---

1. Consideramos la función

$$f(x,y) = \min\left\{ \frac{1}{|x|}, \frac{1}{|y|} \right\}$$

1. (1 pt) Determine el dominio de f.
2. (2 pts) Determine y dibuje las curvas de nivel de f correspondiente a los niveles $c = 0$ y $c = 1$.

---

2. (3 pts) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

---

3. (2 pts) En $\mathbb{R}^n$ consideramos los dos vectores

$$\mathbf{u} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right), \qquad \mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, \ldots, n)\,.$$

Elija (y justifique) la opción correcta entre las siguientes respuestas: Los vectores **u** y **v**

1. son paralelos para algún $n \geq 2$;
2. son paralelos si n es impar;
3. son perpendiculares para todo $n \in \mathbf{N}$;
4. son perpendiculares si n es par;
5. ninguna de las anteriores.

---

4. (2 pts) Sea E el conjunto en $\mathbb{R}^2$ definido como

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \operatorname{sen}(\pi y) = 0 \right\}.$$

Halle el conjunto de puntos límite de E. ¿Es E cerrado? ¿Es E compacto?

Soluciones:
1. El dominio de la función son todos aquellos puntos donde la expresión dada en la definición de f tenga sentido. Como no se puede dividir por cero,

$$\mathrm{Dom}(f) = \{\,(x, y) \,:\, x \neq 0, y \neq 0\,\}\,.$$

Esto es, todo el plano salvo por la unión de los dos ejes coordenados.

La curva de nivel correspondiente al nivel $c = 0$ son aquellos $(x, y) \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x, y) = 0$. Pero esto requeriría que al menos uno de los valores $1/|x|$ o $1/|y|$ se anulara, lo que es imposible. Por lo tanto esa curva de nivel es el conjunto vacío.

La curva de nivel correspondiente al nivel $c = 1$ son aquellos puntos $(x, y) \in \mathrm{Dom}(f)$ con $f(x, y) = 1$. Esto da dos posibilidades:

1. O bien $\min\left\{\frac{1}{|x|}, \frac{1}{|y|}\right\} = \frac{1}{|x|} = 1$, en cuyo caso

   $$\frac{1}{|y|} \geq \frac{1}{|x|} = 1, \Rightarrow |y| \leq |x| = 1, \text{ con } y \neq 0,$$

   lo que deja los dos casos

   - $$x = 1, \quad -1 \leq y < 0, \qquad \text{y} \qquad x = 1, \quad 0 < y \leq 1.$$
   - $$x = -1, \quad -1 \leq y < 0, \qquad \text{y} \qquad x = -1, \quad 0 < y \leq 1;$$

2. o bien $\min\left\{\frac{1}{|x|}, \frac{1}{|y|}\right\} = \frac{1}{|y|} = 1$, en cuyo caso

   $$\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{|y|} = 1, \Rightarrow |x| \leq |y| = 1, \text{ con } x \neq 0,$$

   lo que deja los dos casos

   - $$y = 1, \quad -1 \leq x < 0, \qquad \text{y} \qquad y = 1, \quad 0 < x \leq 1.$$
   - $$y = -1, \quad -1 \leq x < 0, \qquad \text{y} \qquad y = -1, \quad 0 < x \leq 1.$$

La gráfica es el borde del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ salvo por los cuatro puntos $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$.

2. Acercándonos al punto $(0,0)$ por el eje de las x's, tenemos

$$\text{lím}\, x \to 0 \frac{x^3 - 0^3}{x^2 + 0^2} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

así que el límite, caso de existir debe ser cero. Probando algunas formas más de acercarse a $(0,0)$ se sigue obteniendo cero, así que lo intentamos calcular directamente de la definición. Para ellos, estimamos, usando $|x^3 - y^3| \le |x^3| + |y^3|$

$$\left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2 + y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2 + y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^3}{y^2}\right| = |x| + |y|.$$

Pero

$$|x| \le \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$$

Así que, si $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon/2$, tenemos que siempre que $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| \le |x| + |y| \le \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} < \delta + \delta = \epsilon,$$

por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

---

3. La respuesta correcta es la (4). Las dos primeras son claramente falsas, ya que si $n = 3$, por ejemplo, tenemos los vectores

$$\mathbf{u} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \qquad \mathbf{v} = (1,2,3),$$

que no son paralelos al no ser uno múltiplo del otro.

La respuesta (3) también es falsa: por ejemplo, para el caso $n = 3$, tenemos

$$\langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{v}\,\rangle = 1\cdot 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\cdot\frac{1}{3} = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0.$$

Finalmente, la (4) es correcta, ya que

$$\langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{v}\,\rangle = 1\cdot 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\cdot\frac{1}{3} + \cdots + n\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 = 0,$$

ya que al ser n par, hay el mismo número de 1's que de (-1)'s.

---

4. $\operatorname{sen}\pi y = 0$ si y solo si $y \in \mathbb{Z}$, así que E se puede escribir como el conjunto

$$E = \{\, (x,k)\, :\, x \in \mathbb{R},\, \ell \in \mathbb{Z}\,\}\,.$$

Si (x_0, y_0) es un punto límite de E, entonces hay una sucesión de puntos $p_k = (x_k, y_k) \in E$ con $\lim_{k\to\infty} p_k = (x_0, y_0)$. Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0, \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = y_0.$$

Pero todos los $y_k \in \mathbb{Z}$, así que si converge a algún y_0, debe haber un natural N tal que para todo $k > N$ $y_k = y_0$. Esto es inmediato de la definición de límite: tomando $\epsilon = 1/4$, tendríamos un N natural tal que para todo $k > N$, $|y_k - y_0| < 1/4$; como el único entero en el intervalo $(y_0 - 1/4, y_0 + 1/4)$ es el mismo y_0, y todos los y_k son enteros, entonces $y_k = y_0$ para todo $k > N$.

Observamos que E contiene entonces todos sus puntos límites, por lo que gracias a lo visto en clase, es un conjunto cerrado.

Finalmente, observamos que E no es acotado (pero no recurriendo al dibujo, o diciendo que k es muy grande, u otra razón poco justificada). Lo demostramos viendo que, no importa que $R > 0$ tomemos, hay algún punto en E que no está en la bola $B((0,0), R)$ de centro el origen y rradio R. El punto $(R+1, 0)$ está en E, pero su distancia al origen es $\sqrt{(R+1-0)^2 + 0^2} = R + 1 > R$, por lo que no está en esa bola.