ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 5: Determinantes.

1. Sabiendo que $58786, 30628, 12831, 80743$ y 16016 son divisibles por 13, demuestra que

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

es también divisible por 13.

2. Sea A una matriz cuadrada cuyo deteminante vale 9. Determina, si es posible, el determinante de las matrices A^5, A^{-1} y $7A$.

3. El determinante de un endomorfismo.

(i) Calcula el determinante del endomorfismo de $\mathbb{M}_{2\times 2}$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}$$

(ii) Calcula la matriz A de f respecto de la base

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

así como su determinante.

4. (Determinante de Vandermonde) Sean $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$, demuestra la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

(Sugerencia: Razona por inducción. Empieza restando a cada columna la anterior multiplicada por x_1)

5. a) Siendo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P(x)$ un polinomio de grado 3, hallar sus coeficientes para que $P(0) = 2$, $P(1) = 1$, $P(2) = -1$, $P(3) = 0$. Sugerencia: usar el determinante de Vandermonde.

Sol: $2 + \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$.

b)Demostrar que se puede encontrar un polinomio de grado 3 que cumpla las condiciones $\{P(x_i) = y_i\}_{i=1}^4$ siempre que todos los $x_1, \ldots, x_4$ sean distintos.

c) Generalizar el resultado b): dados n+1 pares de puntos $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n+1}$ con $x_1, \ldots, x_{n+1}$ distintos, hay un único polinomio $P(x)$ de grado n que cumple $P(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n+1$.

Obsérvese que la parte c) nos indica cómo hallar una función polinómica de grado n que pase por $n+1$ puntos del plano siempre y cuando no haya dos puntos en la misma vertical.

6. Sea A la matriz definida por $a_{ij} = |i-j|$. Calcula $|A|$.
(Sugerencia: Empieza restando a cada columna la anterior. Sol: $(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$).

7. Demuestra la igualdad

$$\begin{vmatrix} A & \shortmid & C \\ - & - & - \\ 0 & \shortmid & B \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} & \shortmid & c_{11} & .. & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \shortmid & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & .. & a_{nn} & \shortmid & c_{n1} & .. & c_{nm} \\ - & - & - & \shortmid & - & - & - \\ 0 & .. & 0 & \shortmid & b_{11} & .. & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \shortmid & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & .. & 0 & \shortmid & b_{m1} & .. & b_{mm} \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

razonando como sigue:

(i) Prueba que la aplicación $D : \mathbb{K}^n \times .. \overset{n}{\smile} .. \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definida por

$$D\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x_{11} & .. & x_{1n} & \shortmid & c_{11} & .. & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \shortmid & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & .. & x_{nn} & \shortmid & c_{n1} & .. & c_{nm} \\ - & - & - & \shortmid & - & - & - \\ 0 & .. & 0 & \shortmid & b_{11} & .. & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \shortmid & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & .. & 0 & \shortmid & b_{m1} & .. & b_{mm} \end{vmatrix}$$

es multilineal alternada, luego $D = \lambda \det_{(e_1,...,e_n)}$, con $\lambda = D(e_1, ..., e_n) = |B|$, siendo $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

(ii) Si ponemos

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, ..., v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{vmatrix} A & \shortmid & C \\ - & - & - \\ 0 & \shortmid & B \end{vmatrix} = D\left(v_1, ..., v_n\right) = |B| \det_{(e_1,...,e_n)}\left(v_1, ..., v_n\right) = |A|\,|B|\,.$$

8. Calcula

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 4 & .. & n-1 & n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n+1 \end{vmatrix}.$$

(Sugerencia: suma primero todas las columnas. Sol: $\frac{n(n+1)+2}{2}$.)

9. Sea $f : \mathbb{M}_{2\times 3} \to \mathbb{M}_{2\times 3}$ el endomorfismo definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 3a' & 3b' & 4c' \end{pmatrix}.$$

Se pide:

(i) Si F es el subespacio $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \Big/ \begin{array}{c} a+b=0 \\ a'+b'=0 \\ c+c'=0 \end{array} \right\}$, demostrar que f induce un endomorfismo $f_{|F} : F \to F$ definido por la misma fórmula que f. Calcula su determinante.

(ii) Probar que f induce también un endomorfismo $\overline{f}$ del espacio cociente $\mathbb{M}_{2\times 3}/F$. Calcula su determinante.

(iii) Relacionar los determinantes de f, $\overline{f}$ y $f_{|F}$.

(iv) En general, observa que si $F : V \to V$ es una aplicación lineal y $F \subset V$ es un subespacio invariante[1], entonces en una base adecuada, la matriz de f toma la forma de una matriz por cajas, una de las cuales corresponde a la restriccin, otra a la aplicacin inducida del espacio cociente y otra fuera de la diagonal. Entonces se puede aplicar el ejercicio 6 para encontrar la relación entre f, $\overline{f}$ y $f_{|F}$.

10. Sea

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times n}(K).$$

Se denota por $A_{i,j} \in \mathbb{M}_{(n-1)\times(n-1)}(K)$ la matriz obtenida suprimiendo la fila i-ésima y la columna j-ésima. La matriz $A_{i,j}$ recibe el nombre de *adjunto de la entrada* (i,j)*-ésima*. Se define la *matriz adjunta de* A, como la matriz

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} |A_{1,1}| & -|A_{1,2}| & \dots & (-1)^{n+1}|A_{1,n}| \\ -|A_{2,1}| & |A_{2,2}| & \dots & (-1)^{n+2}|A_{2,n}| \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|A_{n,1}| & (-1)^{n+2}|A_{n,2}| & \dots & |A_{n,n}| \end{pmatrix}.$$

(i) Demuestra que

$$A \cdot \mathrm{adj}(A)^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}.$$

(ii) Deduce que A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$, y que en tal caso,

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)^t}{|A|}.$$

11. Regla de Cramer.

[1]Se dice que $F \subset V$ es un subespacio invariante por f si para todo $u \in F$ se tiene que $f(u) \in F$.

(i) Escribe el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1\\
&\vdots\\
&a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n
\end{aligned}$$

en la forma

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

para cierta matriz $A \in \mathbb{M}_n(K)$.

(ii) Supongamos que $|A| \neq 0$, de modo que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Escribe $A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{|A|}$ y realiza la multiplicación anterior

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

para obtener las siguientes fórmulas:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_n & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|};\ \ldots;\ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}.$$

(iii) Resuelve de esta manera los siguientes sistemas:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 4z + t = 1 \\ 2x - y + z - 3t = 6 \\ x + 2y + 3z - t = 1. \end{array} \right.$$