Prácticas Conjuntos y números 14/09

- Funcionamiento ideal de las clases:

intentar los problemas en casa.

- Todo lo que yo escriba estará en Moodle en PDF.
- Para hacer preguntas, encender webcam.

¿Cómo? → 1 Abrir micro y preguntar.
→ 2 "Levantar la mano" en Teams.

- Agradecería ver alguna cara.
- Tutorías: pedir por email. Individuales o grupales.

Sobre la cuestión de F => V:

1 $p \wedge (\neg p)$ (contradicción)

2 p

3 $p \vee q$

4 $\neg p$

5 q

(Esto es para demostrar que partiendo de una contradicción, podemos deducir cualquier cosa)

(x es divisible por 4)

$x \vdots 4 \Rightarrow x \vdots 2$

$x = 12$ $V \Rightarrow V$

$x = 6$ $F \Rightarrow V$

$x = 5$ $F \Rightarrow F$

Pero en todas la implicación es cierta!!

Verdad vacua:

"$\forall x \in \emptyset$ se cumple $P(x)$" Siempre es verdadero

$$\textcircled{1}\quad \Sigma_n := 1+2+\dots+(n-1)+n$$

(sigma)

$n+1$ $n+1$ etc.

$$2\Sigma_n = (1+2+\dots+(n-1)+n) + (1+2+\dots+(n-1)+n)$$

$n+1$

$$2\Sigma_n = (n+1)n \Rightarrow \Sigma_n = \frac{n.(n+1)}{2} \quad \blacksquare$$

Ante la pregunta: ¿si no se me hubiera ocurrido hacerlo multiplicando por 2, qué podría haber intentado?
Respuesta: intentar llegar a la misma idea partiendo de casos particulares pequeños.

$$\Sigma_6 = 1+2+3+4+5+6$$

7
7
7

$$\Sigma_6 = \frac{7.6}{2}$$

Y podríamos intentar demostrar una fórmula general para el caso par como esa utilizando (por ejemplo) inducción.

Después de demostrar la fórmula para el caso par, uno podría darse cuenta de que si n es impar, (n-1) es par y escribir:

$$\Sigma_n = \Sigma_{n-1} + n = \dots = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Para las progresiones aritm. :

$$\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} a+kd \ , \quad a \text{ y } d \text{ son naturales.}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a + \sum_{k=1}^{n} kd = n.a + d\sum_{k=1}^{n} k = n.a + d\,\Sigma_n$$

$$= n.a + d\,\frac{(n+1)n}{2}. \quad \blacksquare$$

(y simplificar)

Dos convenios $\to \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\to \boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}}$

Nuestro convenio: empezar en 1

(3) $n \,\vdots\, 6$

$A \Rightarrow B$	A es suficiente para B
	B es necesario para A

$n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m} \cdot 2^i \cdot 3^j$

$\Updownarrow$

$n^2 = p_1^{2n_1} \cdots p_m^{2n_m} \cdot 2^{2i} \cdot 3^{2j}$

a) $n \,\vdots\, 3 \Leftarrow n \,\vdots\, \underset{3.2}{6}$ (necesaria)

b) $n = 24 \Rightarrow n \,\vdots\, 6$ (suficiente)

c) $n^2 \,\vdots\, 6 \Leftrightarrow n \,\vdots\, 6$ (necesario y suficiente)

d) $n \,\vdots\, \underset{2.6}{12} \Rightarrow n \,\vdots\, 6$ (suficiente)

e) $(n \,\vdots\, 2) \wedge (n \,\vdots\, 3) \Leftrightarrow n \,\vdots\, 6$ (nec. y suficiente)

f) $(n \,\vdots\, 2) \vee (n \,\vdots\, 3) \Leftarrow n \,\vdots\, 6$ (necesario)

Consejo que ha ayudado a Pedro a decidir: ver el contrapositivo

---

(2) Calcular $\Sigma_n := r^0 + r^1 + \dots + r^{n-1} = 1 + r^1 + \dots + r^{n-1}$

$-\; r\Sigma_n = r + r^2 + \dots + r^n$

$\Sigma_n (1 - r) = 1 - r^n \underset{(r \neq 1)}{\Rightarrow} \boxed{\Sigma_n = \dfrac{1 - r^n}{1 - r}}$

⑤

S	R	T	S	∨	(¬R)	⇒	T	(¬T)	⇒	((¬S)	∧	R)
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1

Otros métodos de hacer tablas de verdad también son válidos (si dan el resultado correcto).

Vale sin tabla de verdad → porque es la contraposición

⑧ (En $\mathbb{R}$)

"El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva"

$$\exists x \text{ tq. } ((x^2=5) \wedge (x>0))$$

"Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas"

$$\forall x \in \mathbb{R}^{>0} \; \exists y,z \in \mathbb{R} \text{ tq. } ((y^4=x) \wedge (z^4=x) \wedge (y \neq z)).$$

⑩ a) $\forall x \, \exists y \, , \, y < x$ (Falso)

Contraejemplo $x=1$

Negación: $\boxed{\exists x \text{ tq } \forall y \quad y \geq x}$ $\boxed{x = 1}$

$\forall x \ P(x) \xrightarrow{\text{neg.}} \exists x \ \neg(P(x))$

Sobre contenidos y perteneces: (ejemplo)

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{A, 4, 5, \{7, 8\}\}$

$2 \in A$

$4 \notin A$

$\{1\} \subseteq A$

$A \in B$

$\{A\} \subseteq B$

$7 \notin B$