FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INFORMÁTICA

Curso : 2022/2023

1er curso Grado en Ingeniería Informática

Tema 2b

Capítulo 2b: Capacidad y condensadores & Circuitos RC

Capacidad y condensadores

Capacidad y condensadores. Introducción

¿Qué es un condensador? El conjunto de dos conductores iguales y próximos que reciben cargas iguales y opuestas

Condensador: Dispositivo utilizado para almacenar y ceder energía eléctrica de acuerdo a las necesidades del circuito.

La **Capacidad** de un condensador se define como la capacidad de almacenamiento de energía y viene dada por la cantidad de carga en sus placas para un voltaje aplicado.

- En un condensador, la carga *Q* que se almacena es proporcional al potencial *V* aplicado. Se define la **capacidad** de un condensador como:

$$\boxed{C \equiv \frac{Q}{V}}$$

1 C / 1 V = 1 F (Faradio)

- La Capacidad es una magnitud positiva, característica de cada condensador, que depende de su forma, distancia entre placas y define la facilidad de almacenar carga para un voltaje aplicado.
- No depende ni de la carga ni de la diferencia de potencial de los conductores

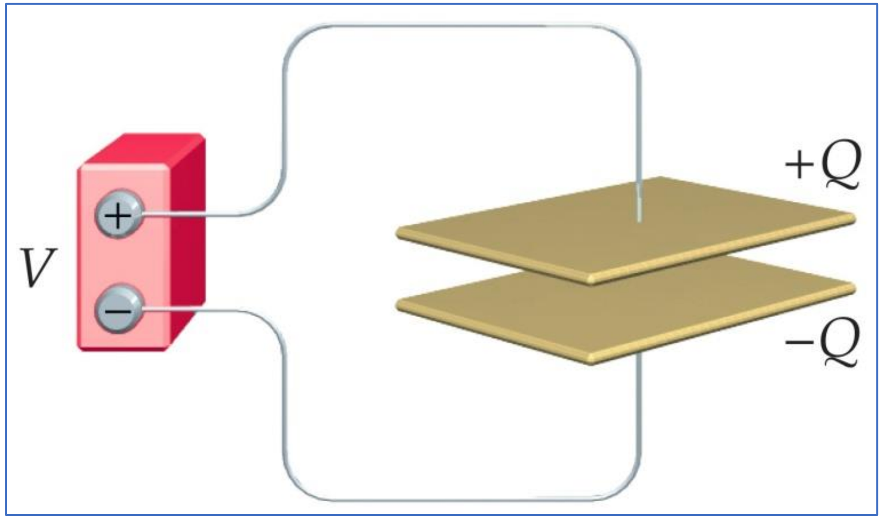
Capacidad y condensadores. Introducción

Varios tipos de condensadores

Hay condensadores planos, esféricos y cilíndricos. En este curso estudiaremos los condensadores planos

Capacidad y condensadores

• Cuando lo conectamos a una batería los portadores de carga se mueven de una placa a la otra hasta el equilibrio que es cuando el V coincide con el de la batería. Las cargas son iguales y de distinto signo siendo +Q y –Q las cargas de cada una de las placas.

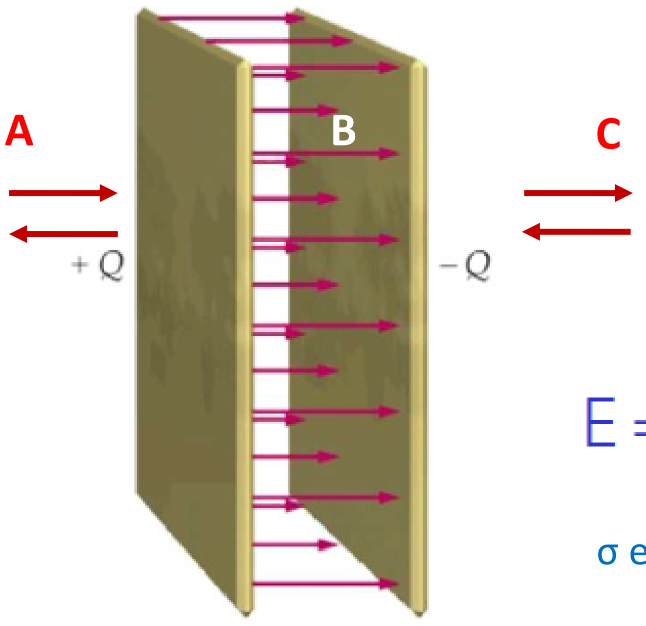


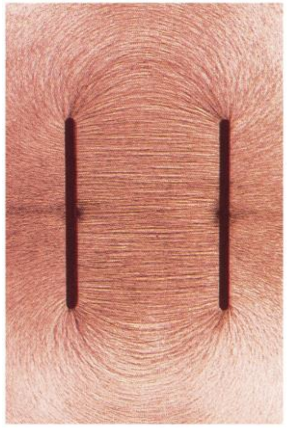
$$\boxed{C \equiv \frac{Q}{V}}$$

• La unidad del SI para la capacidad es el Faradio (F). Puesto que 1 F es un valor muy grande para condensadores usuales, se usan frecuentemente sus submúltiplos:

- Microfaradio: 1 μF = 10^{-6} F
- Nanofaradio: 1 nF = 10^{-9} F
- Picofaradio: 1 pF = 10^{-12} F

Condensador planoparalelo.





Suponiendo cada placa como un plano infinito, el campo eléctrico creado por cada placa es $\sigma/2\varepsilon_0$, luego el campo total entre las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0\, A} = Cte \quad y \quad V = E\, d = \frac{q\, d}{\varepsilon_0\, A}$$

σ es la densidad superficial de carga (carga por unidad de superficie)

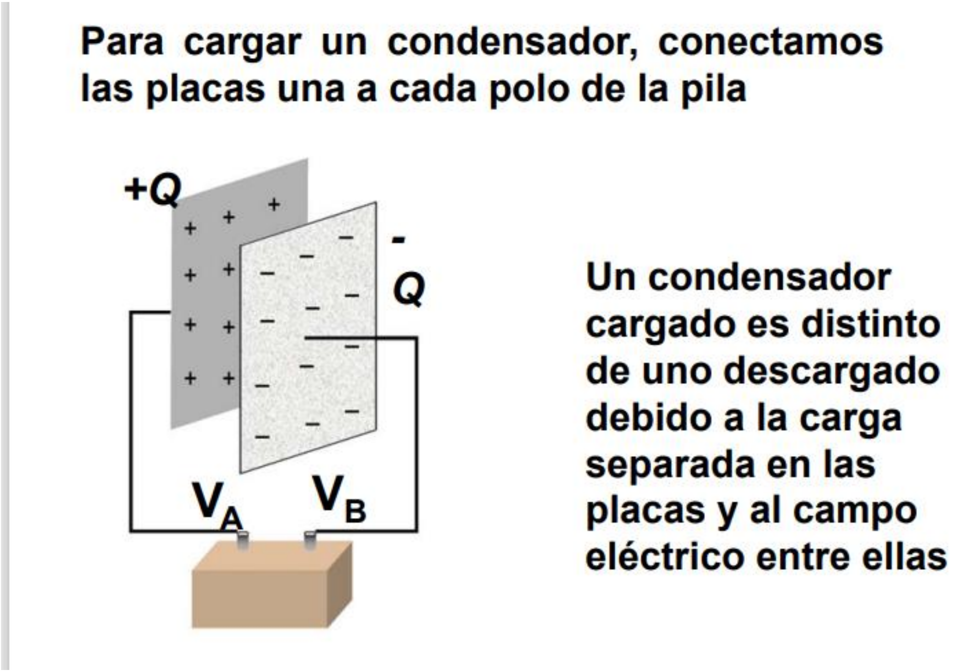
La capacidad será

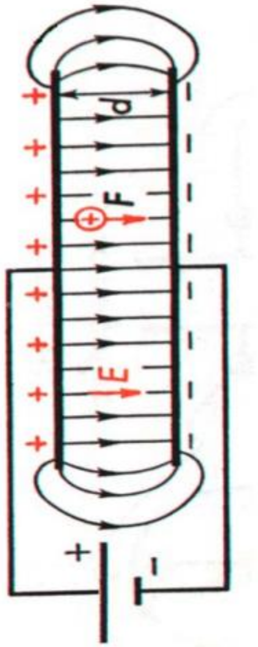
$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{q\, d/\varepsilon_0\, A} \qquad C = \frac{\varepsilon_0\, A}{d}$$

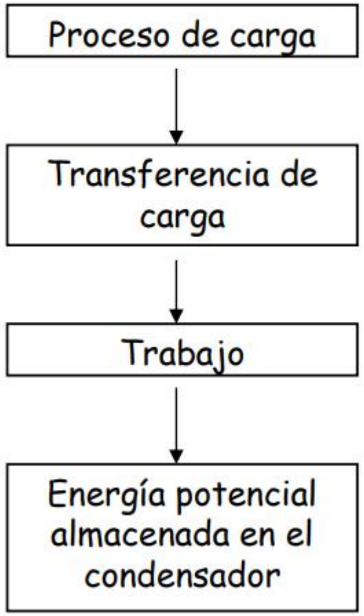
Fuera del condensador los Campos Eléctricos se anulan. A la derecha, fuera del condensador (**C**) tenemos + **σ/ε_0** de la placa izquierda y - **σ/ε_0** de la placa derecha y en la parte izquierda (**A**)tenemos + **σ/ε_0** de la placa izquierda y - **σ/ε_0** de la placa derecha.

Nota: Cuando **se carga un conductor,** la carga se sitúa siempre en la superficie, siendo la densidad superficial de carga σ y el vector Campo Eléctrico **$E = \sigma/\varepsilon_0$** vector siempre **perpendicular** a cada punto en la **Superficie**. No depende de la distancia

Energía electrostática almacenada por un condensador







La energía almacenada en un condensador proviene del trabajo realizado para ir situando cargas del mismo signo sobre la superficie de su armadura. Estas cargas, por el efecto de la repulsión, tienden a separarse devolviendo el trabajo realizado para juntarlas

Energía electrostática en un condensador

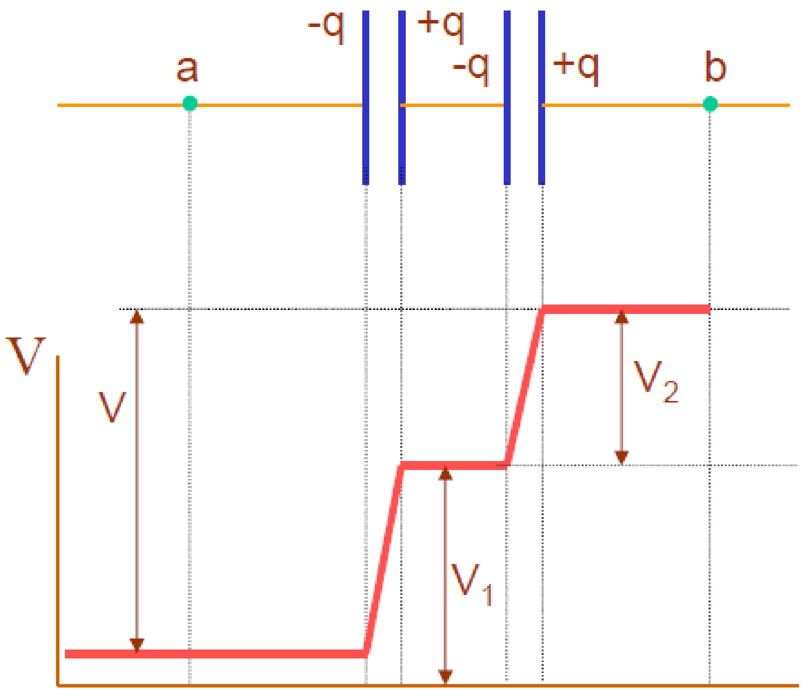
$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

Asociación de condensadores en serie y en paralelo

1. Condensadores en serie.

Vamos a calcular la **Capacidad** para **tres tipos** de condensadores. En cada caso debemos encontrar la diferencia de potencial, V, entre las placas de dicho condensador.

Condensadores en serie



Regla general: La diferencia de potencial entre los extremos de un cierto número de dispositivos conectados en serie es la suma de las diferencias de potencial entre los extremos de cada dispositivo individual.

En este caso $V=V_b-V_a=V_1+V_2$ y la carga permanece constante, luego

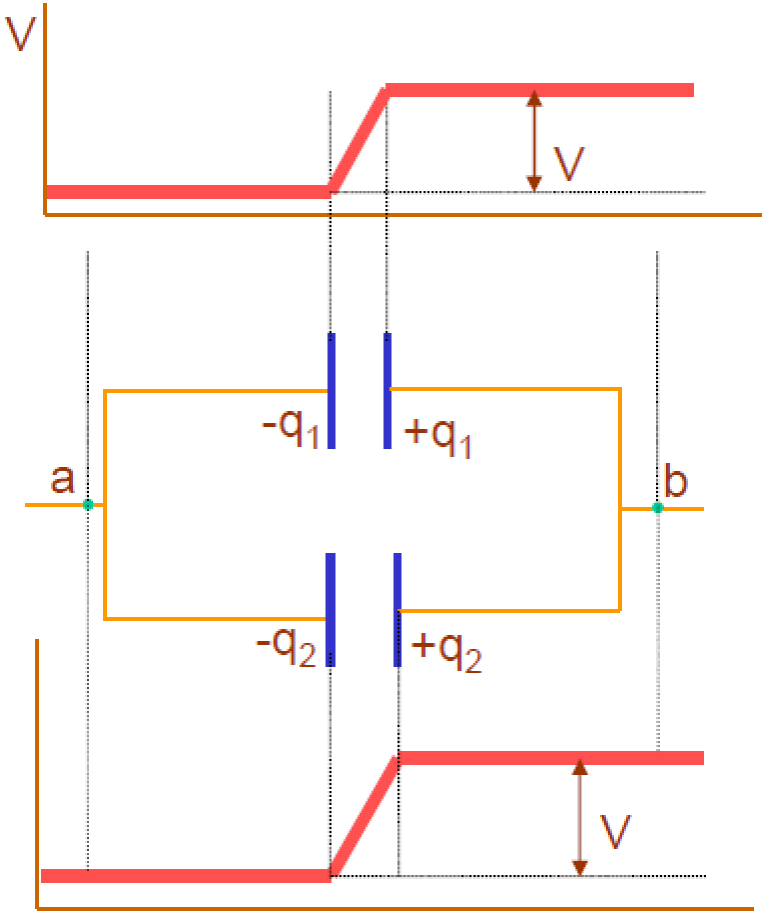
$$V_1 = \frac{q}{C_1} \quad y \quad V_2 = \frac{q}{C_2} \qquad V = V_1 + V_2$$

$$V = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow C_{eq} = \frac{q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

2. Condensadores en paralelo.

Vamos a calcular la **Capacidad** para **tres tipos** de condensadores. En cada caso debemos encontrar la diferencia de potencial, V, entre las placas de dicho condensador.



Regla general: La diferencia de potencial entre los extremos de un cierto número de dispositivos conectados en paralelo es la misma para todos ellos.

En este caso $q = q_1+q_2$ y es la diferencia de potencial la que permanece constante, luego

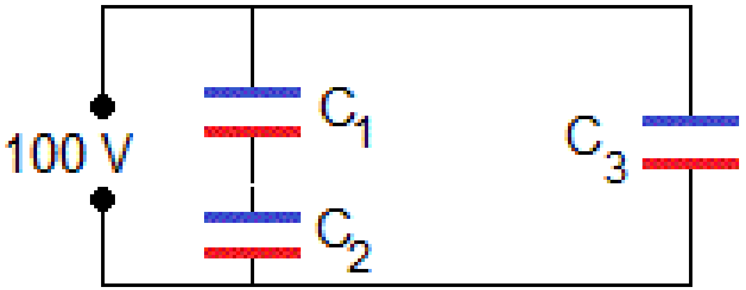
$$q_1 = C_1 V \quad y \quad q_2 = C_2 V \qquad q = q_1 + q_2$$

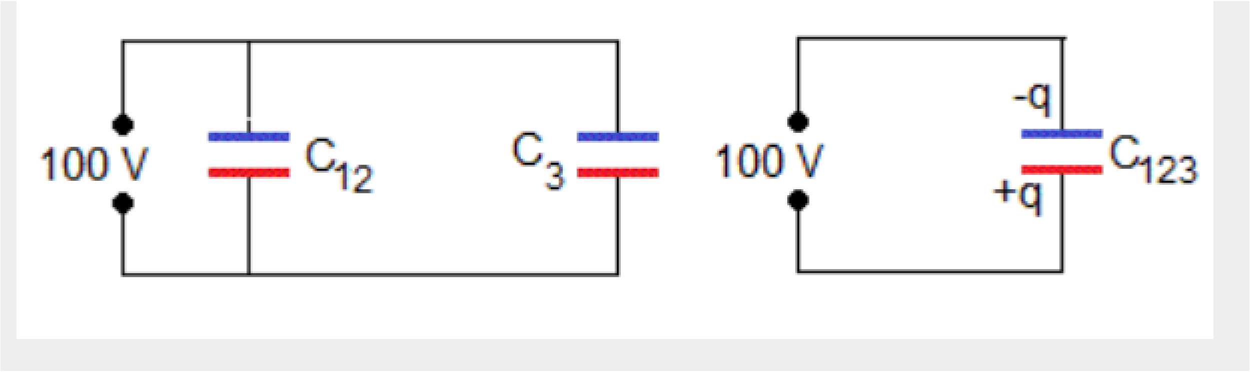
$$q = V(C_1 + C_2) \Rightarrow C = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

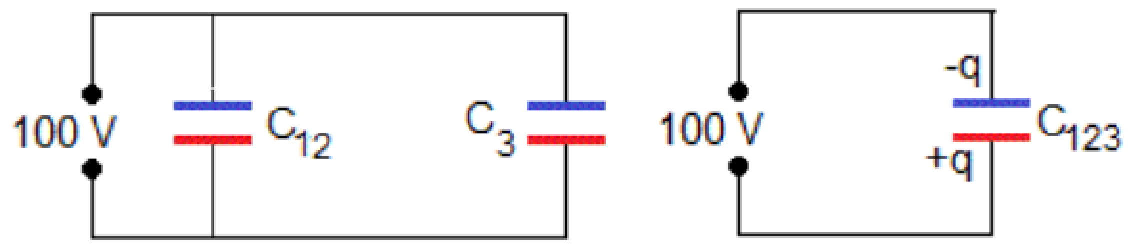
Condensadores en serie y en paralelo

Ejemplo-Sean C_1=8 μF, C_2=4 μF, y C_3=3 μF. Calcula
- Las cargas q_1, q_2 y q_3 de cada condensador
- La diferencia de potencial entre sus placas
- La energía almacenada en cada condensador





Condensadores en serie y en paralelo



La capacidad equivalente de C_1 y C_2 que están en serie es

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad C_{12} = 2.667 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$$

La capacidad equivalente de C_{12} y C_3 que están en paralelo es

$C_{123}=C_3+C_{12}$, $C_{123}=5.667 \cdot 10^{-6}$ F

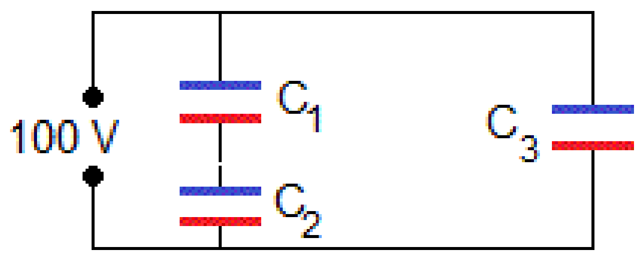
- Carga de cada condensador

  La carga del condensador equivalente es, $q=C_{123} \cdot 100=5.667 \cdot 10^{-4}$ C

  La carga del condensador C_3, $q_3=C_3 \cdot 100=3 \cdot 10^{-6} \cdot 100=3 \cdot 10^{-4}$ C

  La carga de los condensadores en serie C_1 y C_2 son iguales, $q_1=q_2=q-q_3=2.667 \cdot 10^{-4}$ C. O bien, $q_1=q_2=q_{12}=C_{12} \cdot 100=2.667 \cdot 10^{-4}$ C

Condensadores en serie y en paralelo



- Diferencias de potencial entre las placas de cada condensador

  La diferencia de potencial de C_3, V_3=100 V

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = 33.33\,\mathrm{V}$$
$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = 66.66\,\mathrm{V}$$

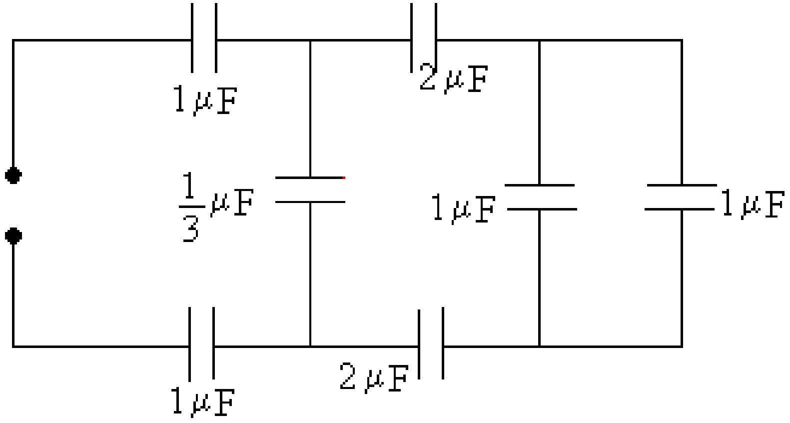
  La suma V_1+V_2=100 V

- Energías de cada condensador y energía total de la agrupación

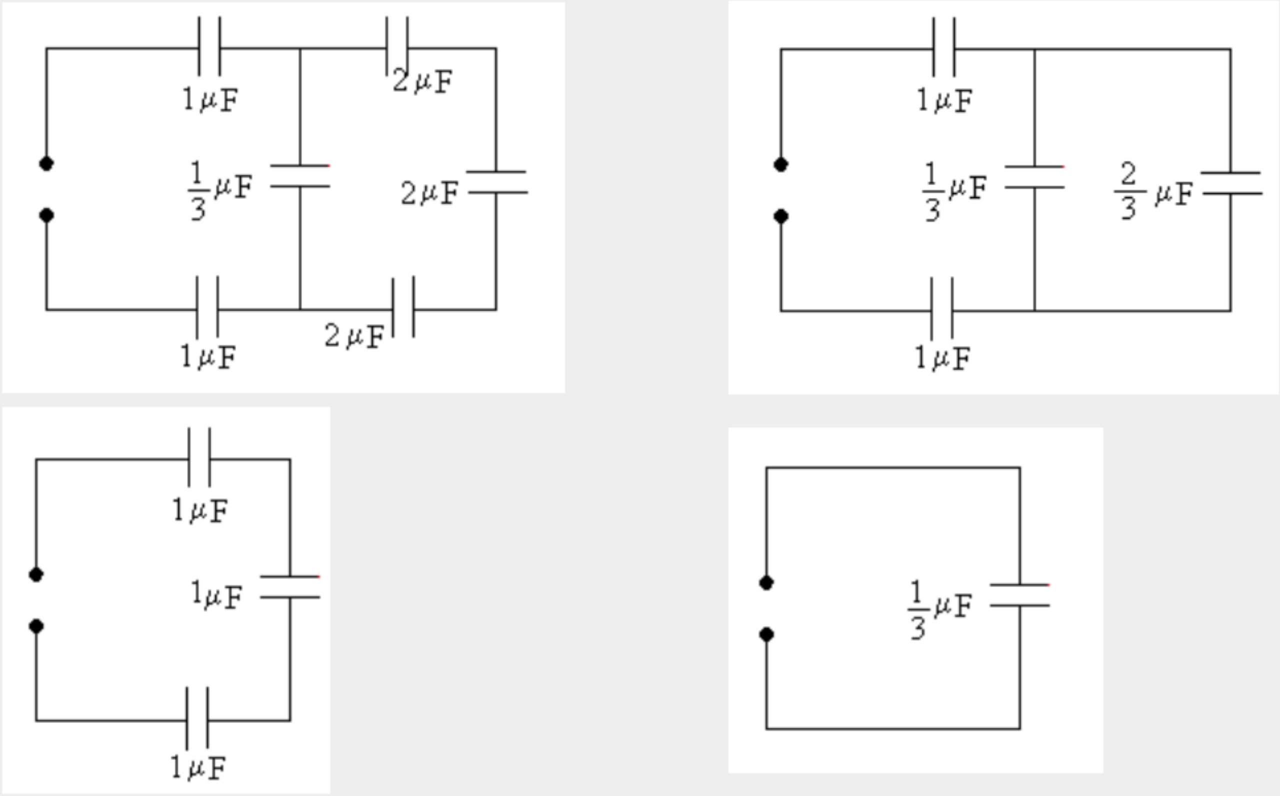
$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} = 0.00444\,\mathrm{J}$$
$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2} = 0.00889\,\mathrm{J}$$
$$U_3 = \frac{1}{2}\frac{q_3^2}{C_3} = 0.015\,\mathrm{J}$$
$$U = U_1 + U_1 + U_1 = 0.02833\,\mathrm{J}$$
$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_{123}} = 0.02833\,\mathrm{J}$$

Condensadores en serie y en paralelo

Ejemplo: Calcular la Capacidad equivalente del sistema de la figura.



Las figuras nos muestran los pasos a seguir para resolver el problema



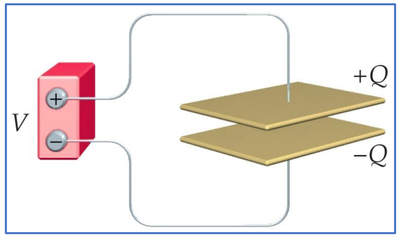
Resumen

- En un condensador, la carga *Q* que se almacena es proporcional al potencial *V* aplicado. Se define la **capacidad** de un condensador como:

$$C \equiv \frac{Q}{V}$$

- Condensador plano-paralelo:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$



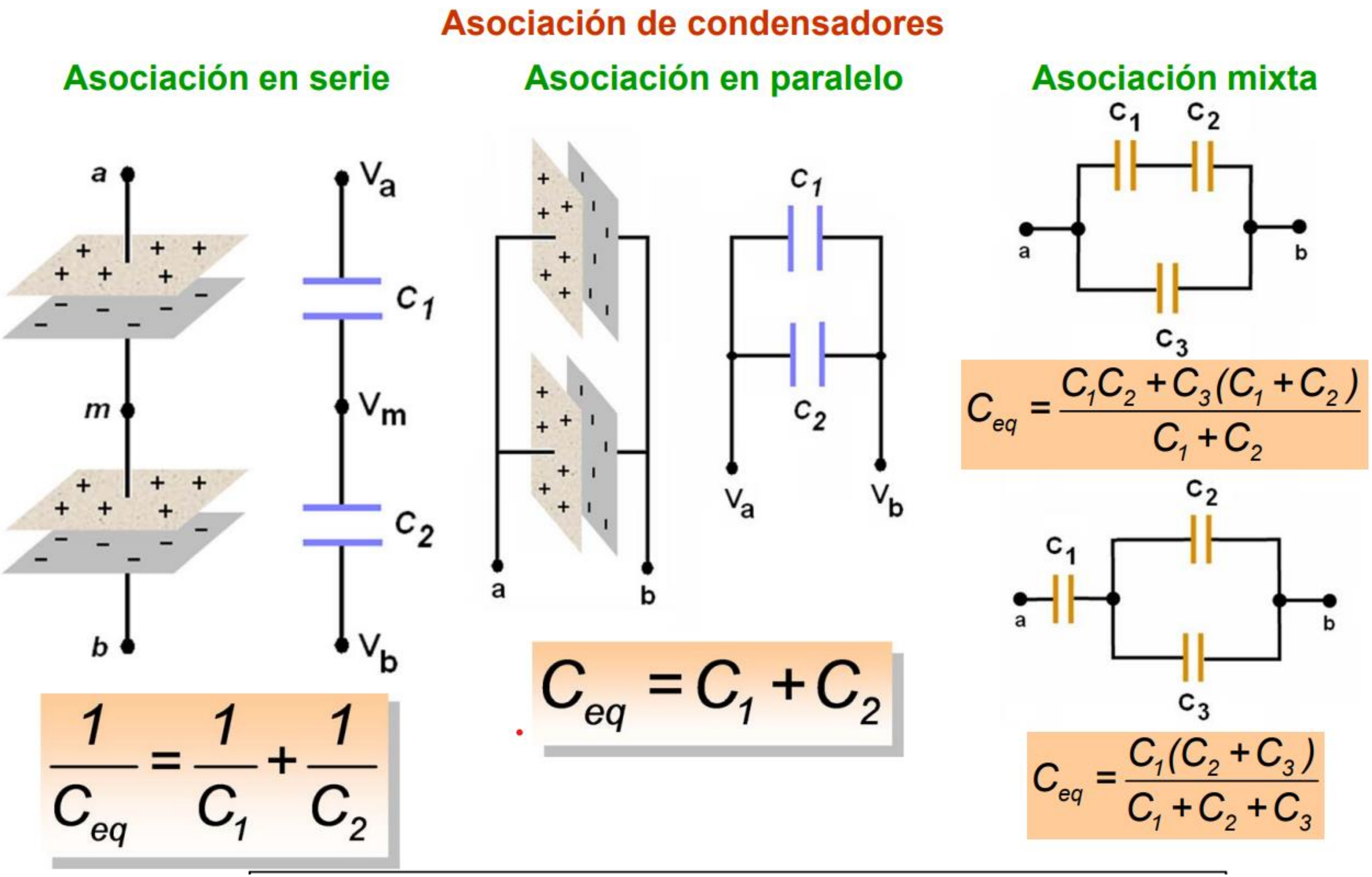
- Energía electrostática en un condensador

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

- Asociaciones de condensadores en serie y en paralelo: capacidad equivalente

Resumen

- Asociaciones de condensadores en serie y en paralelo: capacidad equivalente

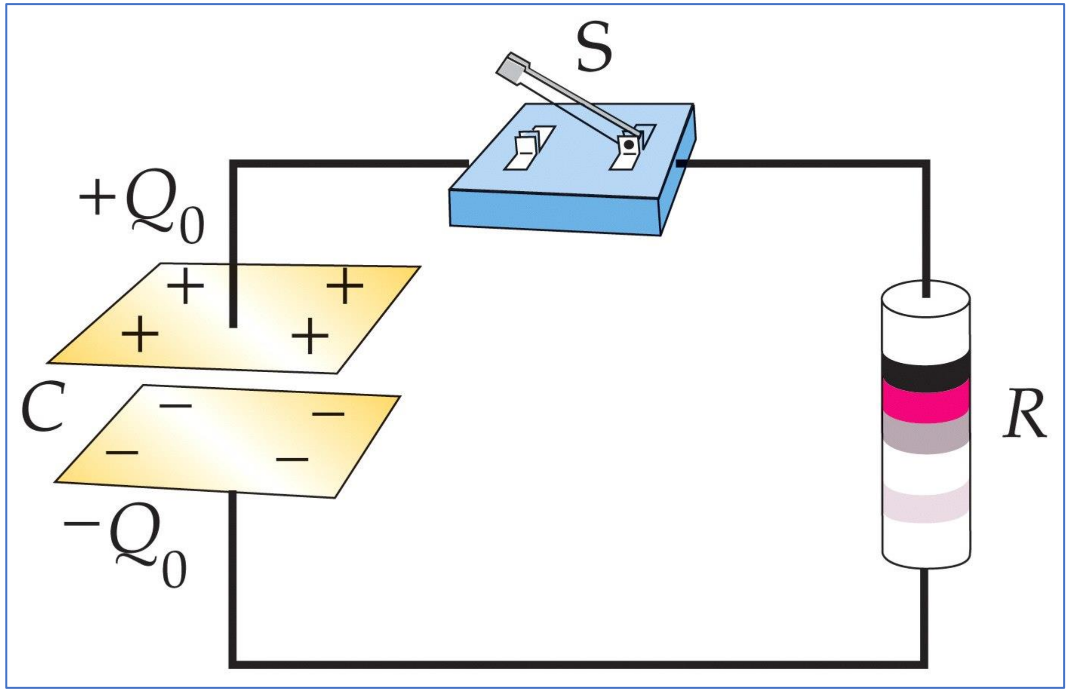


Circuitos RC

CONDENSADORES

- Vamos a estudiar ahora la presencia de CONDENSADORES en un circuito junto con RESISTENCIAS
- Recordemos que un CONDENSADOR era un elemento para almacenar carga.
- Así mismo tendremos que manejar las Leyes de Kirchhoff que vimos en la sección anterior
- Comenzaremos con un circuito sencillo donde tendremos una fuente, una resistencia, un condensador y, como novedad, un interruptor

Carga y descarga de un condensador



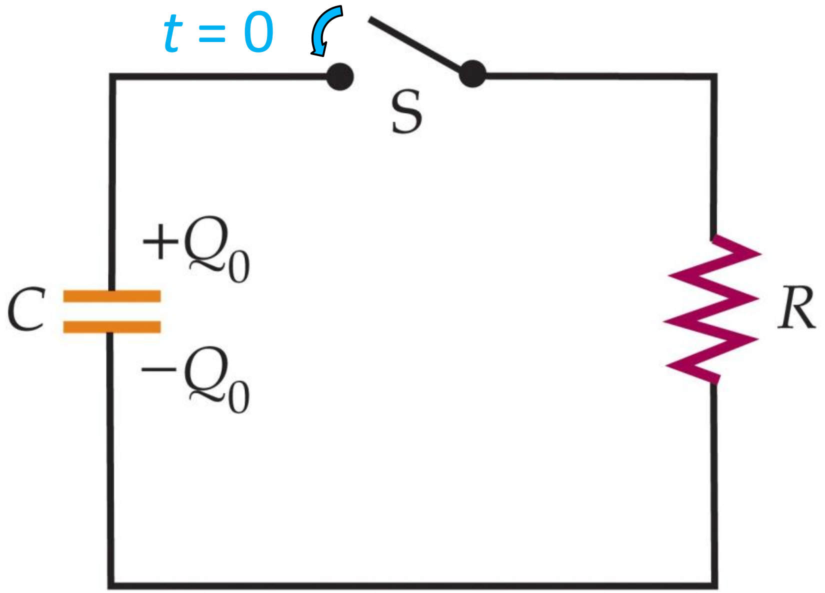
Suponemos que comenzamos con el condensador inicialmente con carga Q_0 , en t = 0 se cierra el circuito a través de una resistencia R:

Pregunta: ¿Cómo evolucionan Q, I con el *tiempo, es decir: Q(t), I(t)*?

- ¿Qué sucede al **conectar** o **desconectar** un circuito formado por una resistencia R y un condensador C (circuito RC)?

  •El **condensador** tarda un cierto tiempo en **cargarse** o **descargarse**: *régimen transitorio*: *Q(t), I(t)*

Descarga de un condensador



• Vamos a analizar en primer lugar el Proceso de **DESCARGA**:

- *Existe una Carga inicial* : Q_0
- En $t = 0$ se *cierra* el circuito (bajamos el interruptor S) y *comienza la descarga.*
- *Atención: no hay pila o fuente en este caso*

•Aplicamos Ley de Kirchhoff→ A lo largo de cualquier **malla** (circuito cerrado), la **suma de las caídas de potencial es cero**.

$$V_C + V_R = 0$$

•Usamos las relaciones para el voltaje en un condensador en base a la definición de capacidad C=Q/V→ V= Q/C y para la resistencia según la ley de Ohm→ V=I·R

$$\frac{Q}{C} + IR = 0$$

Descarga de un condensador

$$\frac{Q}{C} + IR = 0$$

•Ahora nos acordamos de la definición de la corriente (I =dQ/dt) y reescribimos la ecuación, agrupando y dividiendo todo por R

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{RC} Q = 0 \\ Q(0) = Q_0 \end{array}}$$

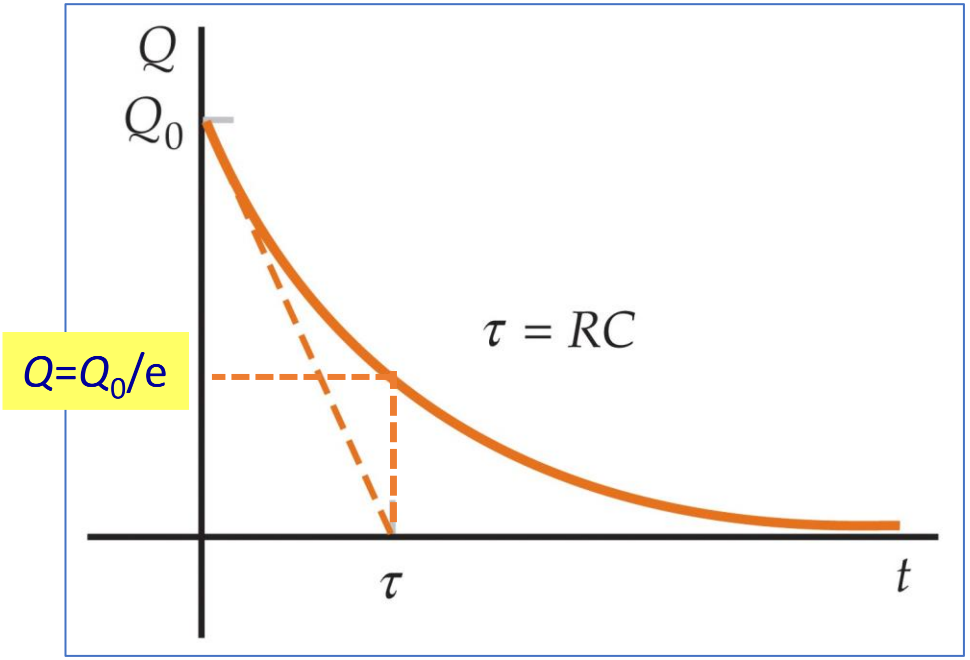
•Esto es una ecuación diferencial con una condición inicial (en el instante inicial, t=0, la carga inicial era Q_0)

- Se trata de una ecuación diferencial *lineal*, con *coeficientes constantes* y *homogénea*.

- **Vamos a ver la solución que cumple la condición inicial**

Descarga de un condensador

Solución del problema (ec. dif + c. i.):



$$Q(t) = Q_0 \, e^{-\frac{t}{RC}}$$

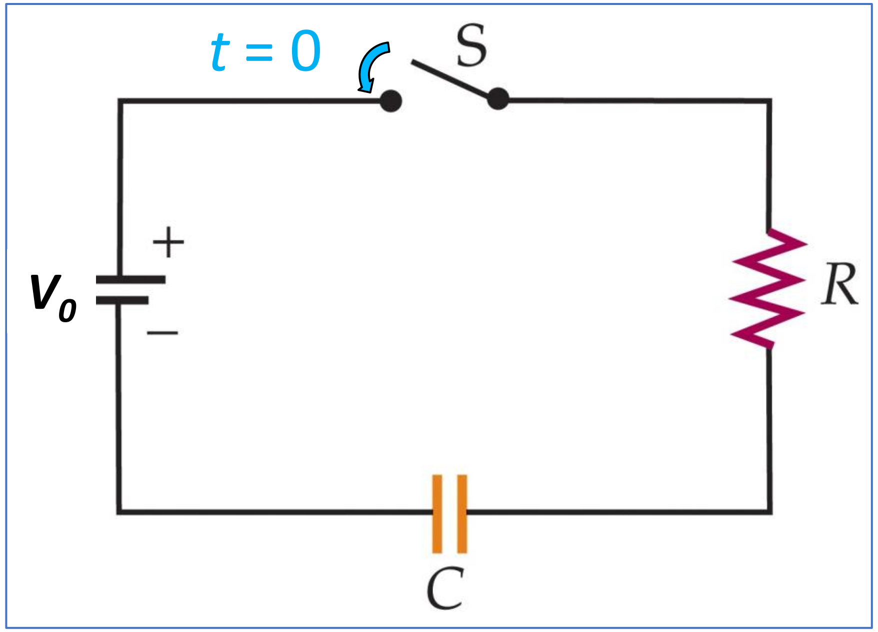
Descarga de un condensador: decaimiento exponencial con constante de tiempo τ

$$\tau = RC$$

τ : **constante de tiempo**: tiempo *característico* de carga y descarga de un circuito *RC* :

τ se define como el tiempo para el que $Q = e^{-1} Q_0 \approx 0.37\, Q_0$

Carga de un condensador



Vamos a analizar ahora el Proceso de **CARGA**:

Atención: AHORA SÍ hay fuente

- *La carga inicial en este caso es*: 0
- En t = 0 se *cierra* el circuito (bajamos interruptor) y *comienza la carga.*

- Aplicamos Ley de Kirchhoff→ A lo largo de cualquier **malla** (circuito cerrado), la **suma de las caídas de potencial es cero**. (Fijarse en los signos)

$$-V_0 + V_C + V_R = 0$$

- Usamos las relaciones para el voltaje en un condensador en base a la definición de capacidad C=Q/V→ V= Q/C y para la resistencia según la ley de Ohm→ V=I·R

$$\frac{Q}{C} + IR = V_0$$

Carga de un condensador

$$\frac{Q}{C} + IR = V_0$$

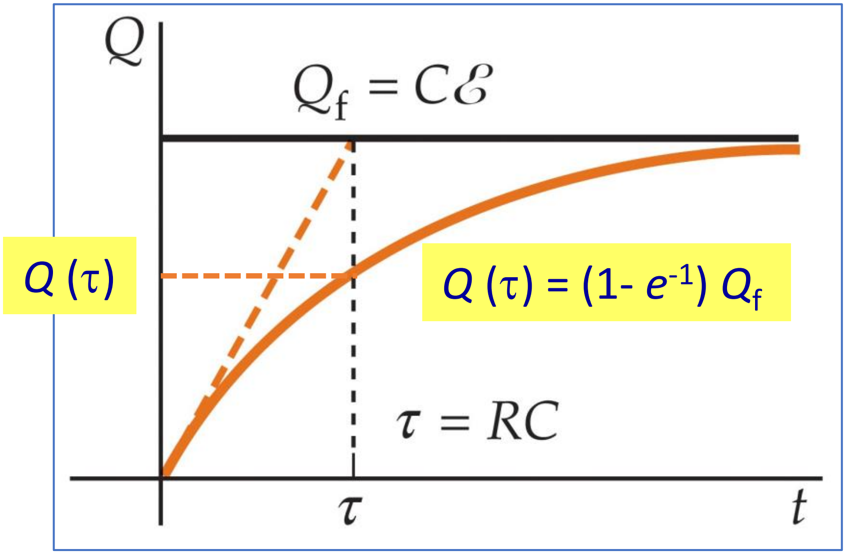
•Ahora nos acordamos de la definición de la corriente (I =dQ/dt) y reescribimos la ecuación, agrupando y dividiendo todo por R

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{V_0}{R}\\ Q(0) = 0\end{gathered}}$$

•Esto es una ecuación diferencial con una condición inicial (en el instante inicial, t=0, la carga inicial era Q =0)

• Ecuación diferencial *lineal*, con *coeficientes constantes* e *inhomogénea*.
Veamos la solución que cumple la condición inicial
(con carga máxima o final $Q_f = CV_0$)

Carga de un condensador



Solución del problema (ec. dif + c. i.):

$$Q(t) = Q_f \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

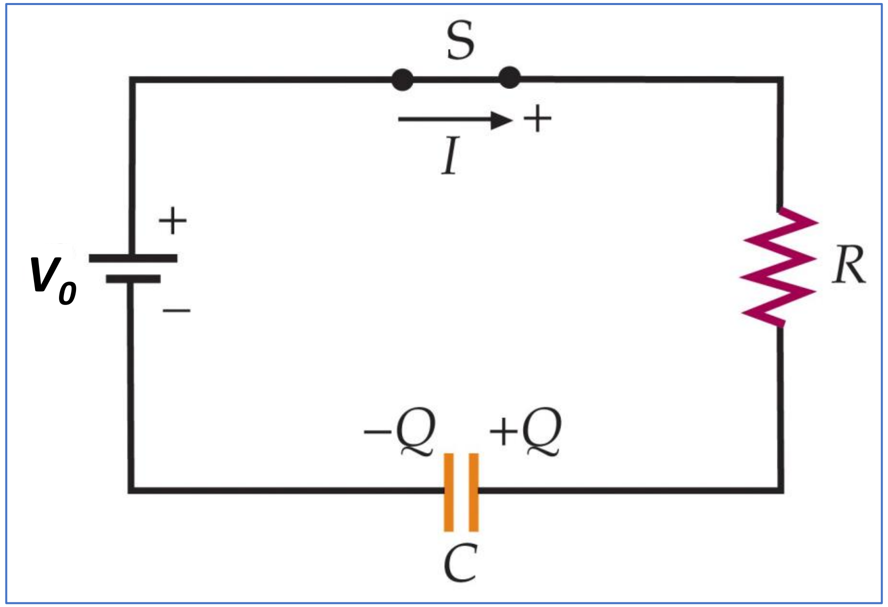
$$\tau = RC$$

De nuevo: **constante de tiempo** τ : tiempo característico de carga y descarga de un circuito *RC* :

- tiempo para el que
  $Q(\tau) = (1- e^{-1})\, Q_f \approx 0.63\, Q_f$

Proceso de carga: exponencial con constante de tiempo τ

Corriente al cargar o descargar un condensador



• Al cargarse o descargarse un condensador, hay una *corriente transitoria*.

•Vemos qué sucede por ejemplo, en el PROCESO DE CARGA:

$$Q(t) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

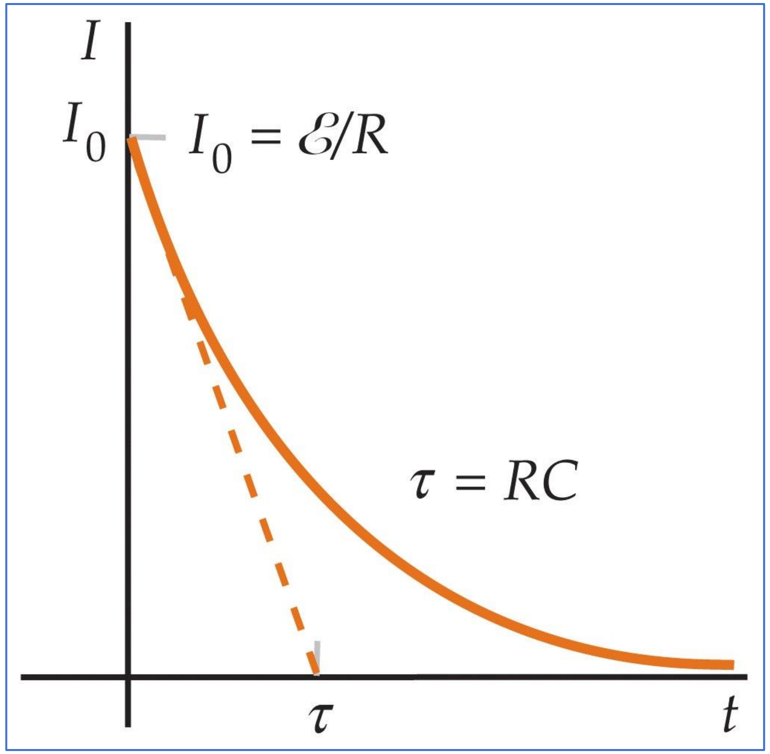
$$I \equiv \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_f}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

De nuevo nos acordamos de la definición de la corriente (I =dQ/dt)
y de la relación $Q_0 / C = V_0$ →

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

La corriente decae exponencialmente con constante de tiempo τ.

Corriente al cargar o descargar un condensador



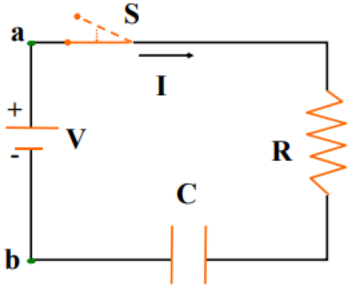
$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

La corriente decae exponencialmente con constante de tiempo τ.

Resumen

a. Carga de un condensador

$$V = V_R(t) + V_C(t)$$

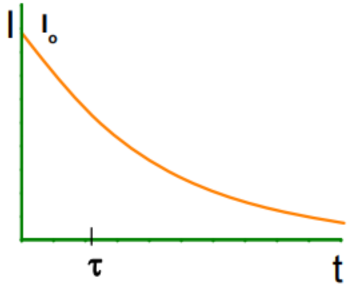


$$V_R(t) = V e^{-t/RC}$$

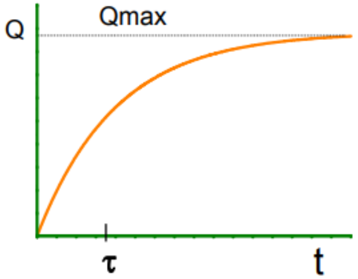
$$V_C(t) = V\,(1 - e^{-t/RC})$$

τ = RC
Constante de tiempo

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}$$



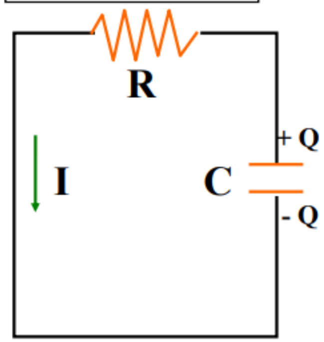
$$Q(t) = Q_{max}(1 - e^{-t/RC})$$



$$t = 0 \rightarrow Q_0 = 0;\ V_{C0} = 0$$
$$V_{R0} = V;\ I_o = \frac{V}{R}$$
$$t_{final} \rightarrow I_f = 0;\ Q_f = Q_{max} = VC$$
$$V_{Rf} = 0;\ V_{Cf} = V$$

b. Descarga de un condensador

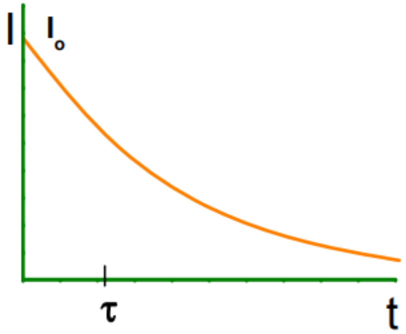
$$V_R(t) = V_C(t)$$



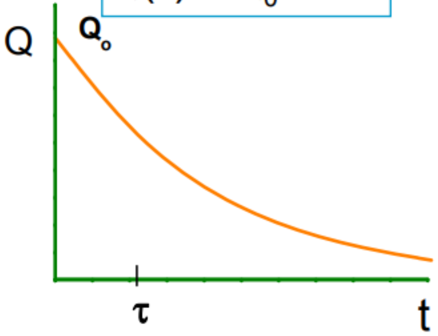
$$V_R(t) = V_{C0} e^{-t/RC}$$

$$V_C(t) = V_{C0} e^{-t/RC}$$

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}$$



$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$



$$t = 0 \rightarrow Q(0) = Q_0;\ V_{C0} = \frac{Q_0}{C}$$
$$I(0) = I_0 = \frac{V_{C0}}{R} = \frac{Q_0}{RC}$$
$$t_{final} \rightarrow Q_f = 0;\ V_{Cf} = 0$$
$$I_f = 0;\ V_{Rf} = 0$$

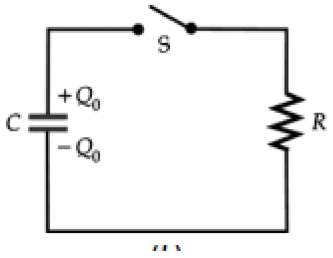
CONCEPTOS ÚTILES A LA HORA DE RESOLVER EJERCICIOS

-En este tema tenemos que distinguir cuando nos pregunten qué sucede nada más abrir/ cerrar interruptores (estados transitorios, tiempos cortos) y lo que sucede al cabo de un cierto tiempo (estado estacionario, tiempos largos)

- MUY IMPORTANTE: Por un condensador en estado estacionario NO circula corriente
- Ver con cuidado el ejemplo 2
- Las fuentes en ocasiones tienen resistencias internas y figuran al lado del valor del voltaje (Una **fuente real** se puede asimilar (circuito equivalente) a **una fuente ideal en serie con una resistencia interna**

Ejemplos resueltos

1- Un condensador de C= 4µF está cargado con 24V y el circuito se cierra a través de una resistencia de 200 Ω. Encontrar (a) Carga inicial en el condensador; (b) Corriente inicial en la resistencia; (c) la constante de tiempo; (d)La carga del condensador después de 4 ms



(*a*) The initial charge is related to the capacitance and voltage: $Q_0 = CV = (4\ \mu F)(24\ V) = 96\ \mu C$

(*b*) The initial current is the initial voltage divided by the resistance: $I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{24\ V}{200\ \Omega} = 0.12\ A$

(*c*) The time constant is *RC*: $\tau = RC = (200\ \Omega)(4\ \mu F) = 800\ \mu s = 0.8\ ms$

(*d*) Substitute t = 4 ms into Equation 26-30 to find the charge on the capacitor at that time:

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} = (96\ \mu C)e^{-(4\ ms)/(0.8\ ms)}$$
$$= (96\ \mu C)e^{-5}$$
$$= 0.647\ \mu C$$

Ejemplo 2

Example 26-19

The capacitor in the circuit shown in Figure 26-43 is initially uncharged. Find the current through the battery (*a*) immediately after the switch is closed, and (*b*) a long time after the switch is closed.

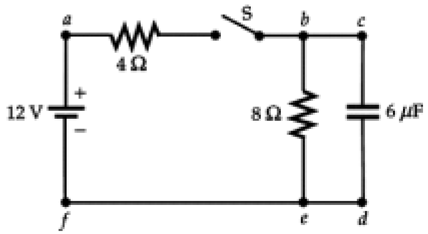


Figure 26-43

(*a*) Since the capacitor is initially uncharged, the potential is the same at points *d* and *c* just after the switch is closed. There is thus no initial current through the 8-Ω resistor between *b* and *e*. Apply the loop rule to the outer loop (*abcdefa*):

$12\text{ V} - (4\ \Omega)I_0 = 0$

$I_0 = 3\text{ A}$

(*b*) After a long time, the capacitor is fully charged, and no more charge flows onto or off of the plates. Apply the loop rule to the left loop (*abefa*):

$12\text{ V} - (4\ \Omega)I_f - (8\ \Omega)I_f = 0$

$I_f = 1\text{ A}$

Remarks The analysis of this circuit at the extreme times when the capacitor is either uncharged or fully charged is simple. When the capacitor is uncharged, it acts like a short circuit between points *c* and *d*, that is, the circuit is the same as the one shown in Figure 26-44*a*, where we have replaced the capacitor by a wire of zero resistance. When the capacitor is fully charged, it acts like an open circuit, as shown in Figure 26-44*b*.

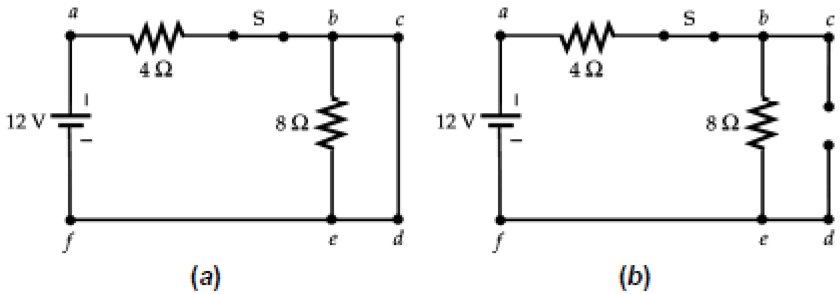


Figure 26-44