Hoja 1 Problema 10. Sean A y B dos conjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

Sean A y B dos conjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b\ \forall a \in A\ \forall b \in B$, se puede deducir que $\forall a \in A\ \exists b \in B: a < b \Leftrightarrow \forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{R}: n \geq a \Leftrightarrow\ n\, es\ cota\ superior\ de\ A \Leftrightarrow \exists \sup A$.

Análogamente, $\forall b \in B\ \exists a \in A: a < b \Leftrightarrow \forall b \in B\ \exists n \in \mathbb{R}: b \geq n \Leftrightarrow\ n\, es\ cota\ inferior\ de\ B \Leftrightarrow$ $\exists \inf B$.

Demostrada la existencia de $\sup A$ y de $\inf B$, y sabiendo que $a < b\ \forall a \in A\ \forall b \in B$, se deduce que los conjuntos A y B no tienen elementos en común y por tanto, $\sup A \leq \inf B$.

Los valores de $\sup A$ e $\inf B$ pueden coincidir cuando se dan dos intervalos del tipo $A = (x, y)$ y $B = (y, z)$. Un ejemplo concreto podría ser $A = (0, 2), B = (2, 4)$, donde $\sup A = \inf B = 2$.