Tema 3. Integración en varias variables

3.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/d9549abb-2330-41dd-9620-323029f2c7d8/U3_Integracion.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/0e17eca0-2416-4d37-8dff-dd1777baa6d9/H6_IntegralesDobles.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/a1c06dc7-4e2a-4f56-95af-240f484afde6/H7_CambioVariables.pdf

3.1. Principio de Cavalieri

> Principio de Cavaleri. Sea S un sólido, y, para $a \leq x \leq b$, sea P_x una familia de planos paralelos tales que:
>
> 1. S está entre P_a y P_b.
> 2. El área de la sección transversal de S cortada por el plano P_x está dada por una función $A(x)$.
>
> Entonces, el volumen de S es igual a $\int_a^b A(x)dx$.

Demostración.
Tomamos una partición de $[a, b]$, tal que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Si $c \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces $A(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ es el volumen de un cilindro que aproxima el volumen de la parte de S comprendida entre los planos P_{x_i} y $P_{x_{i+1}}$. La suma de todos esos cilindros en una suma de Riemann para la función $A(x)$ en el intervalo $[a, b]$, así que en el límite, $V(S) = \lim \sum A(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \int_a^b A(x)\, dx$. $\square$

3.1.1. Integrales iteradas

Empleando el principio de Cavaleri, se puede calcular el volumen de la región S de dos formas distintas:

- Seccionando S con planos de la forma $x = x_0$, de forma que el área de la sección a integrar sea $A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)\, dy$ y, por el principio de Cavaleri, $V(S) = \iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$.
- Seccionando S con planos de la forma $y = y_0$, de forma que el área de la sección a integrar sea $B(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\, dx$ y, por el principio de Cavaleri, $V(S) = \iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_c^d B(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$.

3.2. Integral de Riemann

> Integrabilidad de Riemann. Sea R un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es **integrable en R** si $\sup_{\mathcal{P}} s_{\mathcal{P}} = \inf_{\mathcal{P}} S_{\mathcal{P}} = S$, donde el supremo y el ínfimo se toman sobre todas las particiones de R. Este valor también coincide con el límite de la sumas de Riemann. Escribimos $S = \iint_R f(x, y)\, dxdy$.

> Teorema. Toda función continua $f(x, y)$ definida en un rectángulo cerrado es integrable.

Los mismo es cierto si f es acotada y el conjunto de discontinuidades de f se puede cubrir por una unión de rectángulos cuya suma de áreas sea tan pequeña como se quiera.

3.2.1. Propiedades de la integral de Riemann

- Linealidad: para $f, g : R \to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cualesquiera, tenemos $\iint_R (\alpha f + \beta g)\, dA = \alpha \iint_R f\, dA + \beta \iint_R g\, dA$.
- Monotonía: $\forall (x, y) : f(x, y) \geq g(x, y) \Rightarrow \iint_R f\, dA \geq \iint_R g\, dA$.

- Aditividad: si Q es una unión de rectángulos $Q = \bigcup_i R_i$ tales que $\forall i \neq j, \breve{R}_i \cap \breve{R}_j = \emptyset$, entonces $\iint_Q f \, dA = \sum_i \iint_{R_i} f \, dA$.

3.2.2. Teorema de Fubini

> Teorema de Fubini. Sea $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $\iint_R f(x,y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dxdy.$

Este teorema se extiende de forma natural a funciones más generales, siempre que el conjunto de discontinuidades se pueda cubrir con rectángulos cuya suma de áreas sea tan pequeña como se quiera.

Ejemplo 1. Calcula $\iint_R (x^2+y) dA$ para $R = [0,1] \times [0,1]$.

Calculamos $\int_0^1 \int_0^1 (x^2+y) dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y\right) dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}$.

También podemos calcular $\int_0^1 \int_0^1 (x^2+y) dydx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dy = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}$.

3.2.3. Integrales sobre dominios generales

Para integrar regiones más generales que rectángulos, estudiaremos regiones delimitadas por gráficas de funciones continuas. Para ello, podemos considerar las funciones $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$, o bien $x = \psi_1(y)$ y $x = \psi_2(y)$. A estas las llamaremos respectivamente regiones elementales de Tipo 1, $\phi(x)$, y Tipo 2, $\psi(y)$.

1. Llamamos **regiones de Tipo 1** a aquellas que pueden escribirse como $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$. En este caso, definimos $\iint_{D_1} f(x,y) \, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) \, dydx.$
2. Llamamos **regiones de Tipo 2** a aquellas que pueden escribirse como $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$. En este caso, definimos $\iint_{D_2} f(x,y) \, dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) \, dxdy.$
3. Lamamos **regiones de Tipo 3** a aquellas que son de Tipo 1 y Tipo 2 de forma simultánea.

3.2.4. Teorema del valor medio

> Teorema del valor medio para integrales dobles. Sea f continua en la región compacta y conexa $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces existe un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que $\iint_D f(x,y)\, dA = f(x_0, y_0)|D|$.

*Definición. La **media integral** de f sobre un dominio D viene dada por $M = \frac{1}{\text{Área } (D)} \iint_D f(x,y)\, dA$.*

Ejemplo 2. Halla el área de la región D delimitada por las parábolas $y = 3x^2$ e $y = 4 - x^2$, con $x, y \geq 0$.
Hallamos los puntos de corte entre las gráficas: $3x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x = \pm 1$, como $x, y \geq 0$, la única solución válida es $x = 1$, de forma que el punto de corte buscado es $(x, y) = (1, 3)$.
Consideramos la región de Tipo 1: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 3x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$.
Así, $\text{Área}(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \left(\int_{3x^2}^{4-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 (4 - 4x^2) dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$.

3.3. Cambio de variables

A la hora de integrar sobre dominios más generales, usamos cambios de variables. Sea D^* un abierto en $\mathbb{R}^2$ y $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable, podemos escribir $D = T(D^*)$, simplificando el dominio sobre el que se integra.

Para aplicar los cambios de variable, es importante tener en cuenta:

1. Cómo se describen f y el dominio D^* en términos de las nuevas variables.
2. Cómo afecta el cambio a los elementos infinitesimales de área $dA \to d\bar{A}$.
3. El cambio está justificado si la nueva expresión $f(x(u,v), y(u,v))$ o el nuevo dominio D^* son más manejables que los originales.

Si suponemos que T es una transformación tal que $T(u,v) = (a_0, b_0) + B \cdot (u, v)$, con B una matriz 2×2 de terminante no nulo, y D un cuadrado de unidad, entonces $D^* = T^{-1}(D)$ sería un paralelogramo de área $|\det B|^{-1}$. Tomando $f \equiv 1$, entonces

$$\text{Área } (D^*) \text{ por } d\bar{A} = \iint_{D^*} 1\ d\bar{A} = \iint_D 1\ dA = \text{Área } (D) \text{ por } dA = 1.$$

Luego, $|\det B|^{-1} d\bar{A} = dA \Leftrightarrow d\bar{A} = |\det B| dA$.

En general, podemos tomar la transformación definida por $(a_0, b_0) + DT(u_0, v_0) \cdot (u, v)$, donde $DT(u_0, v_0)$ es la matriz jacobiana de $T(u,v)$ evaluada en (u_0, v_0). De forma que $d\bar{A} = |\det(DT)| dA$.

*Definición. Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \to (x,y)$ una transformación de clase $\mathcal{C}^1$ dada por $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. El **jacobiano** de T, denotado por $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es el determinante de DT.*

> Teorema (cambio de variables). Sean D, D^* dos regiones elementales en $\mathbb{R}^2$, y sea $T : D^* \to D$ una aplicación biyectiva de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces, para cualquier

función integrable $f : D \to \mathbb{R}$, tenemos $\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, dudv$, donde $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ es el valor absoluto del determinante jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Ejemplo 3. Calcular $\int_\Omega (x-y)^2 \text{sen}^2(x+y)\, dxdy$, donde Ω es el paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$.

Definimos $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$, de forma que $T^{-1}(x,y) = (x-y, x+y)$.

Tenemos que $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(v-u) \end{cases}$, luego $T(u,v) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(v-u) \right)$.

Así, $I = \int_{\Omega^*} u^2 \text{sen}^2 v \frac{1}{2}\, dudv$, de forma que aplicando T, $\Omega^* = [-\pi, \pi] \times [\pi, 3\pi]$.

Luego, $I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\pi}^{3\pi} \text{sen}^2 v\, dv \right) u^2\, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^4}{3}$.

3.4. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

3.4.1. Cambio a coordenadas polares

Las **coordenadas polares** se definen por el sistema $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. El jacobiano es $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$.

3.4.2. Cambio a coordenadas cilíndricas

Las **coordenadas cilíndricas** se definen por el sistema $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$. El jacobiano es $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$.

3.4.3. Cambio a coordenadas esféricas

Las **coordenadas cilíndricas** se definen por el sistema $\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$. El jacobiano es $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\phi$.