CONJUNTOS Y NÚMEROS

Grado en Informática-Matemáticas
Curso 2022–23

Examen
16-1-2023

Apellidos, Nombre: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	FINAL
10 puntos	30 puntos	20 puntos	20 puntos	20 puntos	100

Razonar debidamente las respuestas | **3 horas**

---

1. Demuestra por inducción que para todo $n \geq 2$ se tiene:

$$\frac{7}{12} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\,.$$

---

2. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica razonadamente tu respuesta:

a) Si $k \equiv \pm 4 \pmod 9$ entonces $x^3 + y^3 + z^3 = k$ no tiene solución con $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

b) Dado un cuerpo K. Existen polinomios no nulos $f(x), g(x) \in K[x]$ tales que $f(x) \cdot g(x) = 0 \in K[x]$.

c) Existe $n \in \mathbb{N}$ cuya expresión decimal termina en 9 y además $n^3 + 3^n$ es divisible por 5.

---

3. Sean A y B dos conjuntos disjuntos.

a) Sean R y S relaciones de equivalencia en A y en B respectivamente. Determina si la siguiente relación definida para $x, y \in A \cup B$ también es de equivalencia o no:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (x, y \in A \wedge xRy) \vee (x, y \in B \wedge xSy).$$

b) Determina si la siguiente relación definida para $x, y \in A \cup B$ es de orden o no:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (x = y) \vee (x \in A \wedge y \in B).$$

---

4. Determina correctamente (debes definir explícitamente las funciones y comprobar las propiedades de las mismas que te permitan concluir tus afirmaciones) la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

a) Sea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ \exists n \in \mathbb{N}, \quad x + y + z = n\}$.

b) Sea L el conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$.

---

5. Factoriza en polinomios irreducibles el polinomio $f(x) = x^4 - 7x^2 + 1$ sobre $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$ y $\mathbb{Z}_3[x]$.