Cálculo II

2 de junio de 2021

1º del Grado en Matemáticas
1º de Doble titulación en Ingeniería Informática-Matemáticas
Curso 2020-2021

Convocatoria ordinaria

SOLUCIONES

Apellidos y Nombre ______________________________ D.N.I. ______________

Debes justificar todas tus respuestas.

1. (3 puntos) Sea n un entero no negativo, esto es $n \geq 0$, y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^n \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Determine todos los valores de n tal que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$;

   b) Determine todos los valores de n tal que f sea diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$;

   c) Determine todos los valores de n tal que f tenga derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$.

Solución: Si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, f es continua en (x_0, y_0) por ser el cociente, la composición y el producto de funciones continuas en una vecindad de (x_0, y_0) (como es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

En $(0,0)$, f será continua si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Esto va a depender del valor de n.

Comenzamos con el caso $n = 0$, para el cual f es discontinua, ya que no existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Esto se puede ver observando, por ejemplo, que $f(x,0) = \operatorname{sen} \frac{1}{|x|}$, y que $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{|x|}$, que no existe como se ve en Cálculo 1. Por ejemplo, las sucesiones $x_k = \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$ e $y_k = \frac{1}{k\pi}$ tienden a 0 con $k \to \infty$, pero $f(x_k) = 1 \to 1$ mientras que $f(y_k) = 0 \to 0$.

Por lo tanto, asumimos a continuación que $n \geq 1$ y estudiamos el límite de f cuando $(x,y) \to (0,0)$ para $n \geq 1$.

Primer método: Usando coordenadas polares, vemos que, cuando $n \geq 1$

$$|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)| = |r^n(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^n \operatorname{sen}(1/r)| \leq 2^n \, |r^n \operatorname{sen}(1/r)| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ya que $|\cos\theta + \operatorname{sen}\theta| \leq |\cos\theta| + |\operatorname{sen}\theta| \leq 1 + 1 = 2$. Es un error frecuente pero grave no acotar por una función que depende solo de r y seguir trabajando con los θ's.

Segundo método: Usando la definición de límite

$$0 \leq |(x+y)|^n \left| \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \left| \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} \right|^n \leq 2^n \left| \sqrt{x^2+y^2} \right|^n \to 0$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$ si $n \geq 1$.

Es un error frecuente no asumir nada sobre n, llegar a algo como $|f(x,y) - 0| \leq$ alguna expresión que tiende a cero cuando $n \geq 1$ y asumir de ello que n necesita ser ≥ 1. Esto es erróneo: quizás la desigualdad con que se ha mayorado la f no es la mejor para $n = 0$ y todavía podría ser continua en ese caso. Si no se estudia por separado, no hay forma de saberlo, y esto hay que penalizarlo.

2. Es claro que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, ya que en ese abierto es suma, multiplicación y cociente de funciones diferenciables con denominador que no se anula.

   Para la diferenciabilidad en el $(0,0)$, empezamos asumiendo que $n \geq 1$ (en caso contrario f no es continua y, por tanto, no es diferenciable). Lo primero que hacemos es estudiar la existencia de las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^n \operatorname{sen}(1/|h|)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1} \operatorname{sen}(1/|h|).$$

   Lo primero que observamos es que si $n=1$, ese límite es $\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(1/|h|)$ que, una vez más como en el apartado anterior, no existe. Como para que una función sea diferenciable, es necesario que existan las derivadas parciales, entonces, f no es diferenciable para $n=1$ (aparte de $n=0$ que ya estábamos asumiendo), y podemos asumir en el resto del ejercicio que $n \geq 2$.

   En este caso, con $n \geq 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} h^{n-1} \operatorname{sen}(1/|h|) = 0,$$

   una vez más porque $|h^{n-1}\operatorname{sen}(1/|h|)| \leq |h^{n-1}| \to 0$ con $h \to 0$. La otra derivada parcial se calcula igual y también queda cero.

   Nos queda comprobar para qué $n \geq 2$ se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$$

   Esto es, queremos estudiar para qué valores $n \geq 2$ se verifica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^n \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

   Primer método: Usando coordenadas polares

$$\left| r^{n-1}(cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{r}\right)\right| \leq 2^{n-1}\left| r^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{r}\right)\right| \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

   ya que $n-1 \geq 1$. Una vez más, si no se está asumiendo previamente que $n \geq 2$, al llegar aquí quedaría la posibilidad de que la desigualdad escogida no fuera la mejor para el caso $n=1$, y este caso quedaría abierto.

   Segundo método: Usando la definición de límite y las desigualdades del apartado a) tenemos que

$$\left|\frac{(x+y)^n \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq 2^n \left|\sqrt{x^2+y^2}\right|^{n-1} \to 0$$

   cuando $(x,y) \to (0,0)$ si $n \geq 2$.

   Entonces f es diferenciable en $(0,0)$ si y solo si $n \geq 2$.

3. Es fácil ver que f tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, así que estudiaremos qué pasa en el origen.

   Lo primero es notar que si f tiene derivadas parciales continuas en $(0,0)$, entonces tiene derivadas parciales continuas en todo un entorno de $(0,0)$, y por tanto es derivable ahí. Esto implica, por el apartado anterior, que los únicos n que hay que considerar son $n \geq 2$. Pero aún hay que ver cuáles de estos n dan derivadas parciales continuas.

Por la simetría de la función, bastará que hagamos las comprobaciones en una sola de la derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} n(x+y)^{n-1} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x+y)^n \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tenemos que comprobar para qué valores $n \geq 2$ se verifica

$$\lim \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

Comenzamos con el caso $n = 2$, para el cual $\partial f / \partial x$ es discontinua, ya que no existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2(x+y) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x+y)^2 \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right)$$

Esto puede verse al acercarse a $(0,0)$ a lo largo del eje $(x,0)$, ya que en ese caso,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{x\to 0} \left(2x \operatorname{sen} \frac{1}{|x|} - x^2 \cdot \frac{x}{|x^3|} \cos \frac{1}{|x|} \right)$$

y este límite no va a existir: si lo hiciera, al existir el límite del primer término $2x \operatorname{sen} \frac{1}{|x|}$ (que se acerca a 0), entonces existiría el límite

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{x}{|x^3|} \cos \frac{1}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|},$$

que no existe como se puede ver acercándose a 0 mediante sucesiones $x_k = \frac{1}{k\pi}$, e $y_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$.

Por tanto, podemos suponer en lo que queda que $n \geq 3$. Estudiamos el límite de $\partial f / \partial x$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ en ese caso.

Primer método: Usando coordenadas polares

$$\begin{aligned} &\left| n\, r^{n-1} (cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{r}\right) - r^{n-2} (cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^n \cos\theta \cos\left(\frac{1}{r}\right) \right| \\ &\leq 2^{n-1} n \left| r^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{r}\right) \right| + 2^n \left| r^{n-2} \cos\left(\frac{1}{r}\right) \right| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow n \geq 3 \end{aligned}$$

Segundo método: Usando la definición de límite, el hecho de que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ y, una vez más, desigualdades similares a las del apartado a) tenemos que

$$\begin{aligned} &\left| n(x+y)^{n-1} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x+y)^n \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right| \\ &\leq n\, |x+y|^{n-1} \left| \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| + |x+y|^n \left| \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \left| \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right| \\ &\leq 2^{n-1} n \left| \sqrt{x^2+y^2} \right|^{n-1} + 2^n \left| \sqrt{x^2+y^2} \right|^{n-2} \to 0 \end{aligned}$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$ si $n \geq 3$.

---

4. (2 puntos) Encuentre los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y+1)^2$$

en el conjunto

$$A := \{ (x, y) \in \mathbb{R} \, : \, x^2 + y^2 \leq 16 \}.$$

Solución: Primero hallamos los puntos críticos: $\nabla f(x, y) = (0, 0)$

$$\nabla f(x, y) = (2(x-2), 2(y+1)) = (0, 0) \Rightarrow \boxed{(x, y) = (2, -1)} \text{ punto crítico.}$$

A continuación hallamos la matriz hessiana

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

y como $\partial^2 f / \partial x^2 = 2 > 0 \Rightarrow (2, -1)$ es un mínimo local.
Ahora estudiamos el borde $x^2 + y^2 = 16$, para ello usamos Multiplicadores de Lagrange de $f(x, y) = (x-2)^2 + (y+1)^2$ sujeta a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 16$.

$$\begin{cases} \nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2(x-2), 2(y+1)) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y

$$\lambda = \frac{x-2}{x} = \frac{y+1}{y} \Rightarrow \quad x = -2y$$

sustituyendo en la última ecuación obtenemos los puntos $(x, y) = \left(\frac{-8}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}} \right)$ y $(x, y) = \left(\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}} \right)$
Comparamos los resultados y se tiene que $(2, -1)$ es el mínimo y $\left(\frac{-8}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}} \right)$ es el máximo.

5. (2 puntos) Sea W el sólido descrito como

$$W := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, z \geq 0, \}$$

Halle la integral

$$\iiint_W \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dV.$$

Solución: Aplicamos el cambio a esféricas

$$\begin{aligned} &T(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos\theta \sin\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\varphi) \\ &\rho \in [1, 2], \, \theta \in [0, 2\pi], \, \varphi \in [0, \pi/2] \\ &|JT| = \rho^2 \sin\varphi \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \iiint_W \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \frac{\rho \cos\varphi}{\sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi}} \, \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \cos\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \int_1^2 \rho^2 \, d\rho \\ &= 2\pi \, [\sin\varphi]_0^{\pi/2} \, [\rho^3/3]_1^2 = \frac{14\pi}{3} \end{aligned}$$

6. (3 puntos)

a) Sea C la frontera del cuadrado de vértices $(-1,1)$, $(-1,0)$, $(0,0)$ y $(0,1)$ orientada en sentido antihorario. Halle la integral de línea

$$\int_C (x\cos^2 x - y)dx + (x - e^y)dy.$$

b) Sea el campo de vectores $\vec{F} = (-y, \frac{3}{2}\, y^2\, z^2, y^3\, z)$ y C la curva definida como

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z = 0,$$

donde $a > 0$, y donde la orientación de C es la antihoraria en el plano $z = 0$. Calcúlese $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Solución:

a) Sea $R = [-1,0] \times [0,1]$, la curva C es la frontera de R y podemos aplicar el Teorema de Green

$$\int_C (x\cos^2 x - y)dx + (x - e^y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial(x - e^y)}{\partial x} - \frac{\partial(x\cos^2 x)}{\partial y} \right) dA(x,y) = \int_0^1 \int_{-1}^0 2\, dx\, dy = 2$$

Obs) Para la resolución de este apartado también se podría haber utilizar la definicion de interal de línea, pero eso supondría paremetrizar los cuatro segmentos que forman la curva C y resolver cuatro integrales de línea, es más rápido utilizar el Teorema de Green.

b) Obsérvese primero que

$$C := \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0\} = \{(x,y,0) :\ x^2 + y^2 = a^2\}$$

e.d. es la circunferencia en el plano $z = 0$ de radio a y centrada en el origen

Primer método: Usamos directamente integación en línea, por lo tanto parametrizamos la curva $C(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(C(t))C'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-a\sin t, 0, 0)(-a\sin t, a\cos t, 0)\, dt = \pi a^2.$$

Segundo método: Aplicamos el Teorema de Stokes, para ello calculamos el rotacional de $\vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(3\, y^2\, z - 2\, \frac{3}{2}\, y^2\, z, 0, 1\right) = (0,0,1)$$

parametrizamos la superficie, S, limitada por la curva C:

$$S := \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ z = 0\} = \{(x,y,0) :\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

por lo tanto $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ con $r \in [0,a]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, con vector normal exterior a la superficie: $T_r \times T_\theta = (0,0,r)$.

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \underset{\text{teor.Stokes}}{=} \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^a (0,0,1) \cdot (0,0,r)\, dr\, d\theta = \pi\, a^2.$$