Tema 3. Aplicaciones lineales

3.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/a59b4bc8-47c4-46a3-90f5-2b1e15b9ef82/H3_AplicacionesLineales.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/df225987-ac66-4155-9854-16ce3dc112cc/H4_Cocientes.pdf

3.1. Aplicaciones lineales

*Definición. Una aplicación $f : V \to W$ entre dos espacios vectoriales V y W definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ se llama **lineal** si:*
1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in V$.

Ejemplo 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2$, ¿es lineal?
Sea $v = (7, 1), \lambda = 3$. $\begin{cases} f(\lambda v) = f(3(7,1)) = f(21,3) = 21^2 = 441 \\ \lambda f(v) = 3 \cdot f(7,1) = 3 \cdot 7^2 = 147 \end{cases} \Rightarrow f(\lambda v) \neq \lambda f(v)$, luego f no es lineal.

*Definición. Una aplicación lineal $f : V \to W$ se llama **isomorfismo** si f es biyectiva.*
Nota. En este caso $f^{-1} : W \to V$ también es lineal.

3.1.1. Subespacios núcleo e imagen

Definición. Si $f : V \to W$ es lineal:
1. $f^{-1}(\vec{0}) = \ker f = \mathrm{N}(f)$, núcleo de f.
2. $\mathrm{Im}\ f = f(V)$, imagen de f.

> Proposición. $\ker f$ e $\mathrm{Im}\ f$ son subespacios de V y W respectivamente.

Demostración.
a) $\ker f$
1. $f(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in \ker f$.
2. $v_1, v_2 \in \ker f \Rightarrow f(v_1) = \vec{0} \wedge f(v_2) = \vec{0} \Rightarrow f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow$

$v_1 + v_2 \in \ker f$.
b) $\mathrm{Im}\ f$
1. $f^{-1}(\mathrm{Im}\ f) = V \Rightarrow \mathrm{Im}\ f = f(V) \in W$

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{K}^2 \to M_{2\times 2}(\mathbb{K}), f(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, una aplicación lineal, determina $\ker f$ e $\mathrm{Im}\ f$.
Sean $v_1 = (a_1, b_1), v_2 = (a_2, b_2)$.

$$\begin{cases} f(v_1 + v_2) = f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \\ f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

$\ker f = \left\{ (a,b) = f(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
$\mathrm{Im} f = \{ f(a,b) : (a,b) \in \mathbb{K}^2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K}^2 \right\}$.

> Proposición. f es inyectiva $\Leftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$.

Demostración.
$\Rightarrow$) $v \in \ker f \Rightarrow \begin{cases} f(v) = \vec{0} \\ f(\vec{0}) = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow v = \vec{0} \Rightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$.
$\Leftarrow$) $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = \vec{0} \Rightarrow f(v_1 - v_2) = \vec{0} \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker f = \{\vec{0}\} \Rightarrow v_1 - v_2 = \vec{0} \Rightarrow v_1 = v_2$. $\square$

> Proposición. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces $\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\ f)$.

Demostración.
Sea $\{v_1, ..., v_r\}$ una base de $\ker f$. Sea $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ una base de V. Basta probar que $f(v_{r+1}), ..., f(v_n)$ es una base de $\mathrm{Im}\ f$.$w \in \mathrm{Im}\ f \Rightarrow w = f(v), v \in V \Rightarrow w = f(v), v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r + v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_n v_n \Rightarrow w = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r + v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) \Rightarrow$ son generadores.
$a_{r+1} f(v_{r+1}) + ... + a_n f(v_n) = \vec{0} \Rightarrow f(a_{r+1} v_{r+1} + ... + a_n v_n) = \vec{0} \Rightarrow a_{r+1} v_{r+1} + ... + a_n v_n \in \ker f = \langle v_1, ..., v_r \rangle \Rightarrow a_{r+1} v_{r+1} + ... + a_n v_n = a_1 v_1 + ... + a_r v_r, a_i \in \mathbb{K} \Rightarrow a_1 = ... = a_r = a_{r+1} = ... = a_n = 0 \Rightarrow$ son linealmente independientes. $\square$

Observaciones. Sea $f : V \to W$ un isomorfismo. Entonces:
1. $\{v_1, ..., v_n\}$ son generadores de $V \Rightarrow \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ son generadores de W.
2. $\{v_1, ..., v_n\}$ son linealmente independientes en $V \Rightarrow \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ son linealmente independientes.
3. $\{v_1, ..., v_n\}$ son base de $V \Rightarrow \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ son base de W. En particular, $\dim V = \dim W$.
4. $V \cong W$ (existe un isomorfismo entre ellos) $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Demostración.
1. Sea $w \in W \Rightarrow \exists v \in V : f(v) = w$. Pero $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow w = f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$. $\square$

4. $\Rightarrow$) Vista.
$\Leftarrow$) Sean $\{v_1, ..., v_n\}, \{w_1, ..., w_n\}$ bases de V y W respectivamente. Entonces, defino $f : V \to W$ como $f(v_i) = w_i$. Como $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$. $\square$

Ejemplo 3. Sea $\mathrm{P}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x]_{\leq n} \xrightarrow{f} \mathbb{K}^{n+1}$, tal que $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \xrightarrow{f} (a_0, a_1, ..., a_n)$ y $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \xleftarrow{f} (a_0, a_1, ..., a_n)$.

Ejemplo 4. ¿Es $B = \{v_1 = 1 + 4x + x^3, v_2 = 4 + x^2, v_3 = 6x, v_4 = 6\}$ base de $\mathrm{P}_3(\mathbb{K})$?¿Cuáles son las coordenadas de $v = 1 + x + x^2 + x^3$ respecto de B?
Por lo anterior, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es base de $\mathrm{P}_3(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \{\varphi_B(v_1), \varphi_B(v_2), \varphi_B(v_3), \varphi_B(v_4)\}$ es base de $\mathbb{K}^4$.

Tenemos que ver que $\begin{cases} \varphi_B(v_1) = (1,4,0,1) \\ \varphi_B(v_2) = (4,0,1,0) \\ \varphi_B(v_3) = (0,6,0,0) \\ \varphi_B(v_4) = (6,0,0,0) \end{cases}$ es una base de $\mathbb{K}^4$. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & | & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & | & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow B$ sí es una base y $\mathrm{coord}_B(v) = (1, 1 - \frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$.

3.1.2. Matriz de una aplicación lineal

> Proposición. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces, $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\varphi_A(X) = AX$, donde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, también es lineal.

Definición. Sea $f : V^n \to W^m$ lineal. Sean $B = \{v_1, .., v_n\}$ y $B' = \{w_1, ..., w_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente. Entonces la matriz de f respecto a las bases B y B' es la matriz $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, que representa las coordenadas de $f(v_1), ..., f(v_n)$ respecto de B'.

Esta matriz determina f porque si $v \in V$ tiene coordenadas $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ respecto de B, entonces $f(v)$ tiene coordenadas $M_{BB'}(f) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ respecto de B'.

Comprobación.
$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \Rightarrow f(v) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1(a_{11} w_1 + ... + a_{m1} w_m) + ... + \lambda_n(a_{m1} w_1 + ... + a_{mn} w_m) = w_1(a_{11}\lambda_1 + ... + a_{1n}\lambda_n) + ... + w_m(a_{m1}\lambda_1 + ... + a_{mn}\lambda_n)$. $\square$

Ejemplo 5. Sea $f : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathrm{P}_2 = \mathbb{K}[X]_{\leq 2}$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)x^2 + (c+d)x$. Sean B la base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 2}$ y el conjunto de matrices
$\left\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.
$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, $f(E_1) = x^2, f(E_2) = -x^2, f(E_3) = x, f(E_4) = x$.

3.2. Regla de la cadena

> Sean E, F, G espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$; $B = \{v_1, ..., v_n\}$, $B' = \{v_1', ..., v_m'\}$ y $B'' = \{v_1'', ..., v_d''\}$ bases de E, F, G respectivamente; y $f : E \to F$, $g : F \to G$ aplicaciones lineales, de forma que $f \circ g : E \to G$ también lo sea. Entonces, $M_{BB''}(f \circ g) = M_{B'B''}(g) \cdot M_{BB'}(f)$.

Ejemplo 6. Sea $f : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{P}_2$, con $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)x^2 + (c+d)x$; $C_1 =$ canónica, $C_2 = \{1, x, x^2\}$, $B_1 = \left\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $B_2 = \{1 + x^2, 3x + x^2, 5\}$. Calcula la matriz de f.
$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 = (1 + x^2) - \frac{1}{5}(5)$.
$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.
$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x = -\frac{1}{3}(1 + x^2) + \frac{1}{3}(3x + x^2) + \frac{1}{15}(5)$.
$f(v_4) = f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2x = 2\left(\frac{1}{3}(3x + x^2) - \frac{1}{3}(1 + x^2) + \frac{1}{15}(5)\right)$.
Luego, $M_{B_1B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$.

Ejemplo 7. Con los datos anteriores, calcula las coordenadas de $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
$v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$.
Coordenadas de v respecto a B_2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

3.2.1. Cambio de base

*Definición. Llamamos **matriz de cambio de base** a aquella que nos permite tranformar las coordenadas de un vector v en la base B_1 en las coordenadas de v respecto a la base B_2.*

> Sea $id_V : V \to V$, $f : V \to W$, $id_W : W \to W$. Entonces, $M_{B_1B_2}(f) = M_{B_1B_2}(id_V \cdot f \cdot id_W) = M_{C_2B_2} \cdot M_{C_1C_2}(f) \cdot M_{B_1C_1} \Rightarrow M_{B_1B_2}(f) = M^{-1}_{B_2C_2} \cdot M_{C_1C_2}(f) \cdot M_{B_1C_1}$.

Ejemplo 8.
$M_{B_1C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{C_2B_2} = M^{-1}_{B_2C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.
Luego, $M_{B_1B_2}(f) = M^{-1}_{B_2C_2} \cdot M_{C_1C_2}(f) \cdot M_{B_1C_1} =$
$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$.
La matriz $M_{B_1C_1}$ transforma las coordenadas de v en B_1 en las coordenadas de v respecto a C_1, es la matriz de cambio de base.

3.3. Espacio vectorial cociente

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $F \subset E$ un subespacio, en E se define la siguiente relación: $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_2 - v_1 \in F$. Dicha relación cumple las siguientes propiedades:

1. Reflexiva. $v - v = \vec{0} \in F \Rightarrow v \sim v$.
2. Simétrica. $v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_2 - v_1 \in F \Rightarrow v_1 - v_2 \in F \Rightarrow v_2 \sim v_1$.
3. Transitiva. $v_1 \sim v_2 \wedge v_2 \sim v_3 \Rightarrow v_2 - v_1, v_3 - v_2 \in F \Rightarrow (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) = v_3 - v_1 \in F \Rightarrow v_1 \sim v_3$.

Es decir, $\sim$ es una relación equivalencia, por lo que existe un conjunto cociente, ${}^{E}/_{\sim} ={}^{E}/_{f}$, formado por clases, $[v]$, de forma que $w \in [v] \Leftrightarrow w \sim v \Leftrightarrow w - v = u \in F \Leftrightarrow w = v + u, u \in F$.

> Proposición. Con las operaciones $[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$ y $\lambda[v] = [\lambda v]$, con $v \in E, \lambda \in \mathbb{K}$, ${}^{E}/_{F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Nota. La comprobación de las 8 propiedades del espacio vectorial es trivial, aunque es importante considerar que la operaciones $+$ y $\cdot$ están bien definidas.

Ejemplo 9. En $\mathbb{R}^2$, $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_2 - v_1 \in \mathbb{Q}^2$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, $\sqrt{2}([(0,0)]) = [(0,0)]$, mientras que $\sqrt{2}([(1,1)]) = [(\sqrt{2}, \sqrt{2})]$, de forma que $[(0,0)] \neq [(\sqrt{2}, \sqrt{2})]$. Por lo que ${}^{\mathbb{R}^2}/_{\mathbb{Q}^2}$ no es un espacio vectorial.

Demostración.
$+) \begin{cases} [v_1] = [v_1'], v_1, v_1' \in E \\ [v_2] = [v_2'], v_2, v_2' \in E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' - v_1 \in F \\ v_2' - v_2 \in F \end{cases} \Rightarrow (v_1' + v_2') - (v_1 + v_2) \in F \Rightarrow [v_1' + v_2'] = [v_1 + v_2]$.
$\cdot)\ \lambda \in \mathbb{K}, v_1' - v_1 \in F \Rightarrow \lambda v_1' - \lambda v_1 \in F \Rightarrow [\lambda v_1'] = [\lambda v_1]$. $\square$

> Proposición. $\dim({}^{E}/_{F}) = \dim E - \dim F$.

Demostración.
Sea $\{v_1, ..., v_r\}$ una base de F y $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ una base de E. Afirmamos que $\{[v_1], ..., [v_n]\}$ es una base de ${}^E/_F$.
- Generadores. Sea $[v] \in {}^E/_F$ arbitrario, sabemo que $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_n v_n$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\Rightarrow [v] = [\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_n v_n] = \lambda_1[v_1] + ... + \lambda_r[v_r] + \lambda_{r+1}[v_{r+1}] + ... + \lambda_n[v_n] = \lambda_{r+1}[v_{r+1}] + ... + \lambda_n[v_n]$, ya que $[v_1] = ... = [v_r] = [\vec{0}]$.
- Independientes. Sea $\mu_{r+1}[v_{r+1}] + ... + \mu_n[v_n] = [\vec{0}]$, con $\mu_i \in \mathbb{K}$, $\Rightarrow [\mu_{r+1} v_{r+1} + ... + \mu_n v_n] = [\vec{0}] \Rightarrow \mu_{r+1} v_{r+1} + ... + \mu_n v_n = \mu_1 v_1 + ... + \mu_r v_r = 0$. $\square$

Para encontrar una base de ${}^E/_F$:

1. Se escribe una base de F, $\{v_1, ..., v_r\}$.
2. Se amplia a una base de E, $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$.
3. $\{[v_{r+1}], ..., [v_n]\}$ es una base de ${}^E/_F$.

Ejemplo 10. Sea $V = \mathbb{Q}^3$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. $F = \langle v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,0)\rangle$, $\dim V = 3$ y $\dim F = 2$, luego $\dim({}^V/_F) = 1$.
Una base de V es $\{v_1, v_2, v_3 = (0,0,1)\}$, que es una base de $\mathbb{Q}^3$. Luego, $\{[v_3]\}$ es una base de ${}^V/_F$.
Si $v = (1,0,1) \in {}^V/_F$, entonces $[(1,0,1)] = \lambda[(0,0,1)] = [(0,0,\lambda)]$. Escribimos $v = (1,0,1) = v_2 + v_3 \Rightarrow [v] = [v_2] + [v_3] = [v_3]$, luego $[(1,0,1)] = [(0,0,1)]$.

> Teorema de isomorfía. Sea $f : V \to W$ lineal entre espacios vectoriales. Entonces, $\bar{f} : {}^V/_{\ker f} \to \mathrm{Im} f$, definida como $v + \ker f = [v] \to \bar{f}([v]) = f(v)$, es lineal, de hecho, es un isomorfismo.

Demostración.
Comprobamos que $\bar{f}$ está bien definida: $(\bar{f}[v_1] + [v_2]) = \bar{f}([v_1] + [v_2]) = f(v_1) + f(v_2)$.
Supongamos que $v_1, v_2 \in V$ tales que $[v_1] = [v_2] \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker f \Rightarrow \vec{0} = f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) \Rightarrow f(v_1) = f(v_2)$.
Claramente, $\bar{f}$ es sobreyectiva, pues $\forall f(v) \in \mathrm{Im} f \Rightarrow f(v) = \bar{f}([v])$. Además, $\ker \bar{f} = \{[v] \in {}^V/_{\ker f} : \bar{f}([v]) = f(v) = \vec{0}\} = \{[v] \in {}^V/_{\ker f} : v \in \ker f\} = \{[\vec{0}]\}$, lo que implica que $\bar{f}$ es inyectiva. Luego, $\bar{f}$ es un isomorfismo. $\square$

Ejemplo 11. Sea $f : \mathbb{M}_{2\times 3} \to \mathbb{P}_2[x]$, tal que $f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = (a+b) + (c+c')x + (a'+b')x^2$.
$N(f) = \ker f = \{A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} : f(A) = (a+b) + (c+c')x + (a'+b')x^2 = 0\} = \{A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} : b = -a, c' = -c, b' = -a\}, \dim N(f) = 3$.
Base de $N(f) = \left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$. Además, $\forall A \in N(f) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -a & c \\ a' & -a' & -c \end{pmatrix} = aA_1 + a'A_2 + cA_3$. Luego, son generadores.