Conjuntos y Números, UAM

Convocatoria extraordinaria — Junio de 2021

Apellidos y Nombre: ________________________________ Grupo: __________

Tiempo disponible: 3 horas

Se pide razonar y justificar todas las respuestas.

Estas 6 hojas grapadas son lo único que debe entregarse al final del examen. Hay espacio en blanco al final, si fuera necesario.

1. (**2 puntos**)

   (a) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es cierta o falsa: para tres conjuntos arbitrarios, A, B y C, se cumple la igualdad

   $$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C.$$

   Si la afirmación es cierta, dar una demostración y si es falsa, dar un contraejemplo sencillo.

   (b) Determinar si la relación en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por:

   $$(x, y)\mathcal{R}(u, v) \iff x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

   es una relación de equivalencia o no.

   Si es una de equivalencia, se pide describir qué representa geométricamente la clase del elemento $(3, -4)$. Y si no lo es, explicar qué propiedad de las equivalencias incumple.

2. (**2 puntos**)

   Demostrar que $(n+1)! < n^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$.

3. (**2 puntos**)

   Determinar razonadamente el cardinal del conjunto $[0, 1) \times \mathbb{N}$, estableciendo una función biyectiva entre el conjunto dado y otro conocido cuya cardinalidad sea fácil de hallar o conocida de clase.

4. (**2 puntos**)

a) Demostrar que $2000^{72} \equiv 1(57)$, indicando los resultados usados en la demostración.

b) Demostrar que la función $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ dada por $f([x]) = [x + x^2]$ está bien definida y estudiar si es o no inyectiva.

(Aquí $[x]$ denota la clase de equivalencia de x en $\mathbb{Z}_n$, que también se suele escribir como $\overline{x}$ con frecuencia.)

5. (**2 puntos**)

   Descomponer el polinomio $P(X) = X^6 - X^4 + 4X^2 - 4$ en factores irreducibles en cada uno de los anillos $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$. Justificar la respuesta.