Bloque III: Combinatoria

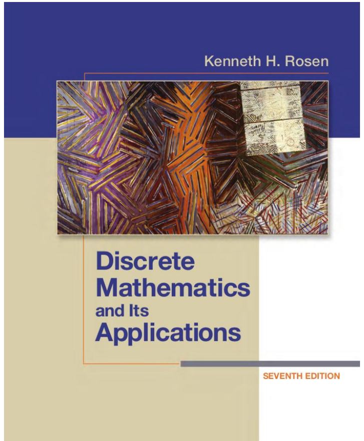
Permutaciones y combinaciones con repetición

Contenidos

Lecturas sugeridas

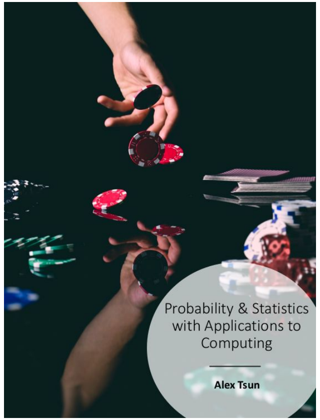
Rosen:

- 6.5. Generalized permutations and combinations



Tsun:

- 1.2.4. Stars and bars / Divider method



Palabras

¿Cuántas palabras (cadenas) distintas de 3 letras se pueden formar con las letras A, B y C?

AAA
AAB
AAC
ABA
ABB
ABC
...

3 3 3

3 x 3 x 3 = 27

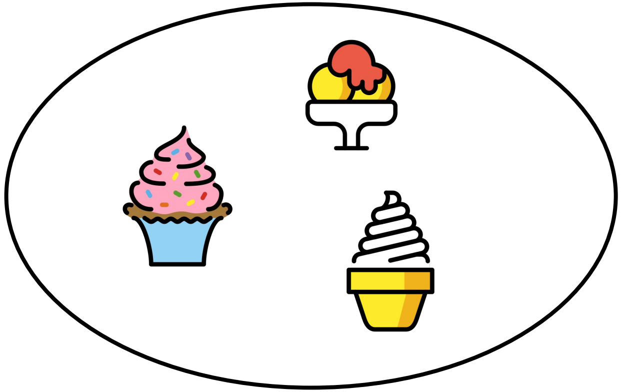
Palabras

¿Cuántas palabras (cadenas) distintas de *r* letras se pueden formar con las 26 letras del alfabeto inglés?

$$\underbrace{\boxed{}_{26}\ \boxed{}_{26}\ \boxed{}_{26}\ \boxed{}_{26}\ \cdots\ \boxed{}_{26}}_{r \text{ veces}} \qquad 26^r$$

Permutaciones con repetición

Una ***r*-permutación con repetición** de los elementos de un conjunto es una lista ordenada de ***r*** elementos tomados del conjunto en la que se permite que haya elementos repetidos.



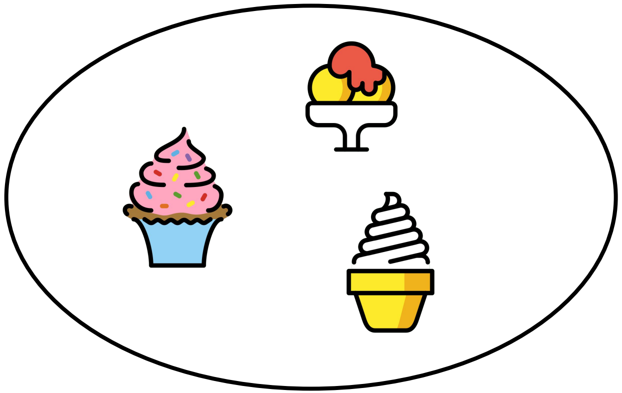
5-permutación con repetición

Dibujos de https://openmoji.org

Número de *r*-permutaciones con repetición

Sea n un número entero positivo y r un número entero no negativo. El número de ***r*-permutaciones con repetición** de un conjunto de ***n* elementos** es

$$PR(n, r) = n^r$$



$$PR(3, 5) = 3^5 = 243$$

Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 1

[Adaptado de Rosen] Cada día un estudiante elige un sandwich como almuerzo. Hay 6 tipos de sandwich diferentes. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir los sandwiches para toda la semana si el orden importa?

Dibujos de https://openmoji.org

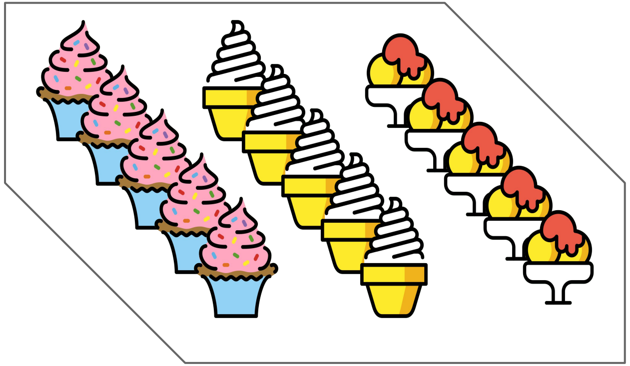
Ejemplo 2

[Adaptado de Rosen] ¿De cuántas maneras diferentes se pueden asignar 3 tareas a 5 empleados si cada empleado puede realizar más de una tarea?

Dibujos de https://openmoji.org

Pasteles

En una tienda hay 3 tipos de pasteles. Si queremos comprar 3 pasteles, ¿de cuántas maneras distintas podemos hacerlo?



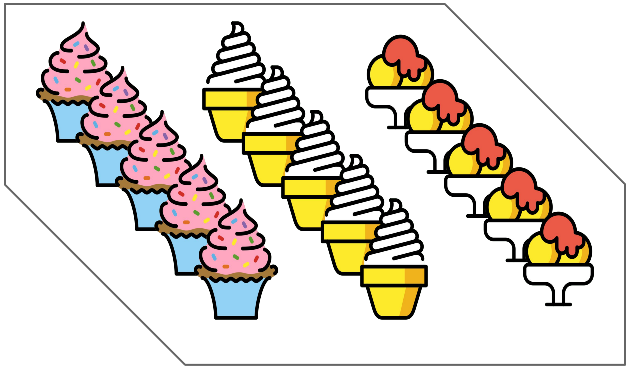
Tres pasteles distintos:

1 caso
(el orden es irrelevante)

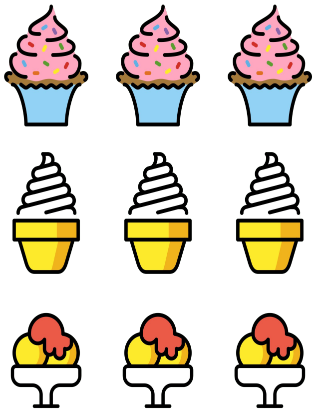
Dibujos de https://openmoji.org

Pasteles

En una tienda hay 3 tipos de pasteles. Si queremos comprar 3 pasteles, ¿de cuántas maneras distintas podemos hacerlo?



Tres pasteles iguales:

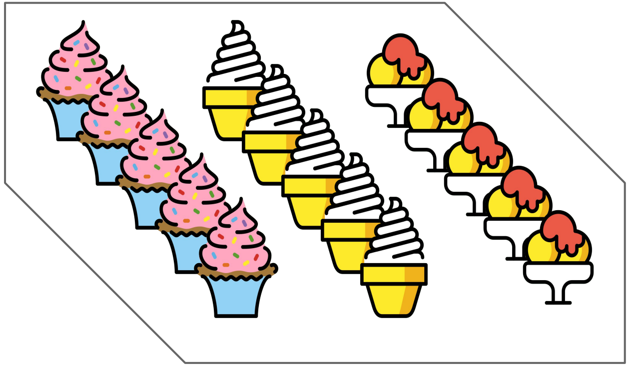


3 casos
(el orden es irrelevante)

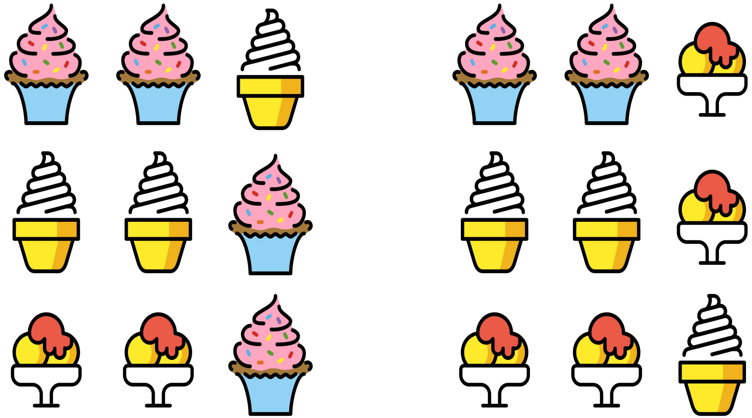
Dibujos de https://openmoji.org

Pasteles

En una tienda hay 3 tipos de pasteles. Si queremos comprar 3 pasteles, ¿de cuántas maneras distintas podemos hacerlo?



Dos pasteles iguales:

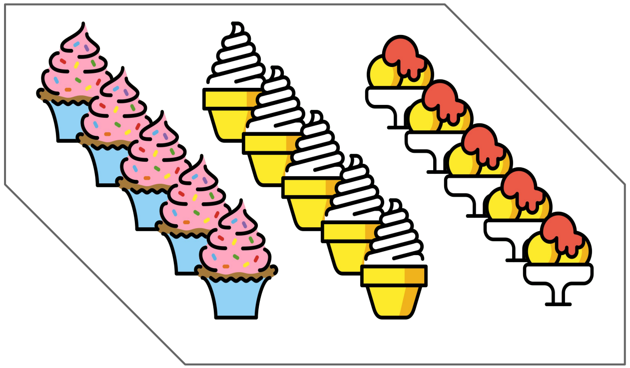


6 casos (el orden es irrelevante)

Dibujos de https://openmoji.org

Pasteles

En una tienda hay 3 tipos de pasteles. Si queremos comprar 3 pasteles, ¿de cuántas maneras distintas podemos hacerlo?



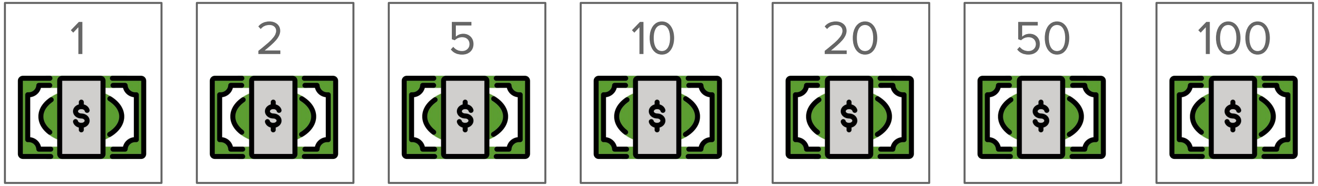
Total = 1 + 3 + 6 = 10

¿Cómo podemos calcular este número directamente, sin ir caso por caso?

Dibujos de https://openmoji.org

Los billetes

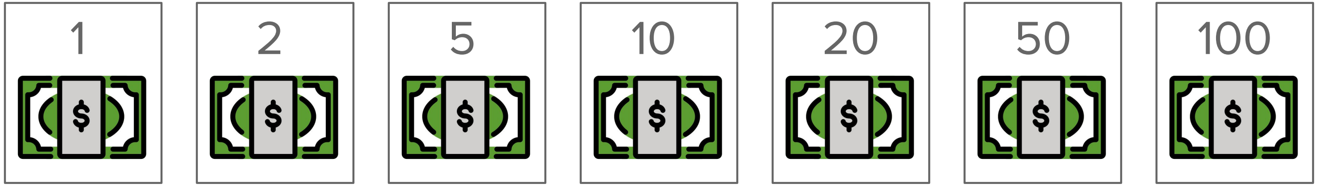
¿De cuántas maneras distintas podemos coger 5 billetes de una caja que contiene billetes de 1, 2, 5, 10, 20, 50 y 100 dólares? Hay al menos 5 billetes de cada tipo en la caja, y el orden en que cogemos los billetes es irrelevante.



Dibujos de https://openmoji.org

Los billetes

¿De cuántas maneras distintas podemos coger 5 billetes de una caja que contiene billetes de 1, 2, 5, 10, 20, 50 y 100 dólares? Hay al menos 5 billetes de cada tipo en la caja, y el orden en que cogemos los billetes es irrelevante.

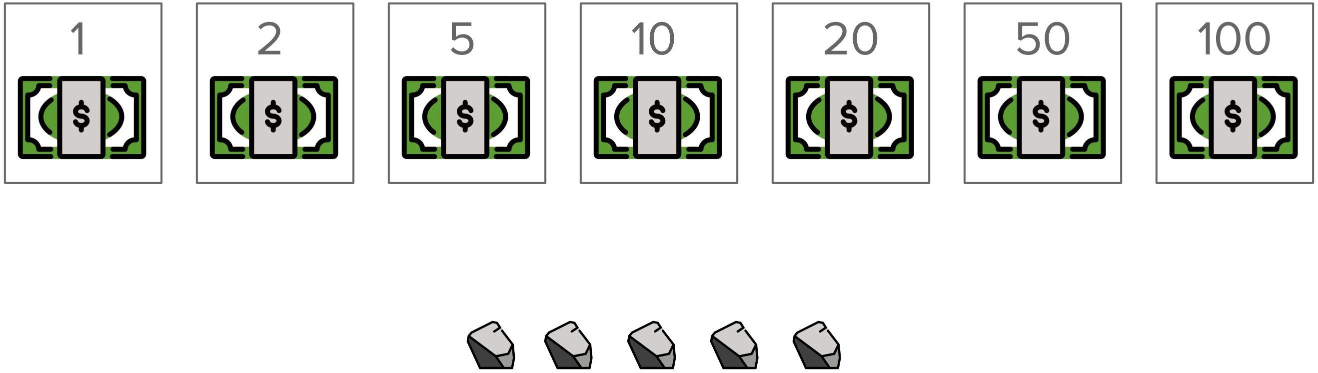


Idea 1: Repartamos 5 piedras entre las cajas de billetes

Dibujos de https://openmoji.org

Los billetes

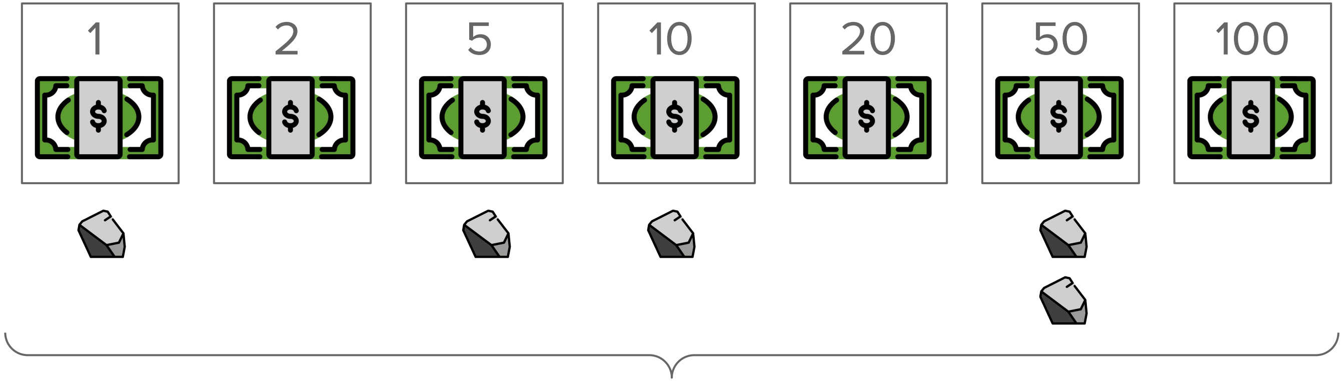
¿De cuántas maneras distintas podemos coger 5 billetes de una caja que contiene billetes de 1, 2, 5, 10, 20, 50 y 100 dólares? Hay al menos 5 billetes de cada tipo en la caja, y el orden en que cogemos los billetes es irrelevante.



Dibujos de https://openmoji.org

Los billetes

¿De cuántas maneras distintas podemos coger 5 billetes de una caja que contiene billetes de 1, 2, 5, 10, 20, 50 y 100 dólares? Hay al menos 5 billetes de cada tipo en la caja, y el orden en que cogemos los billetes es irrelevante.

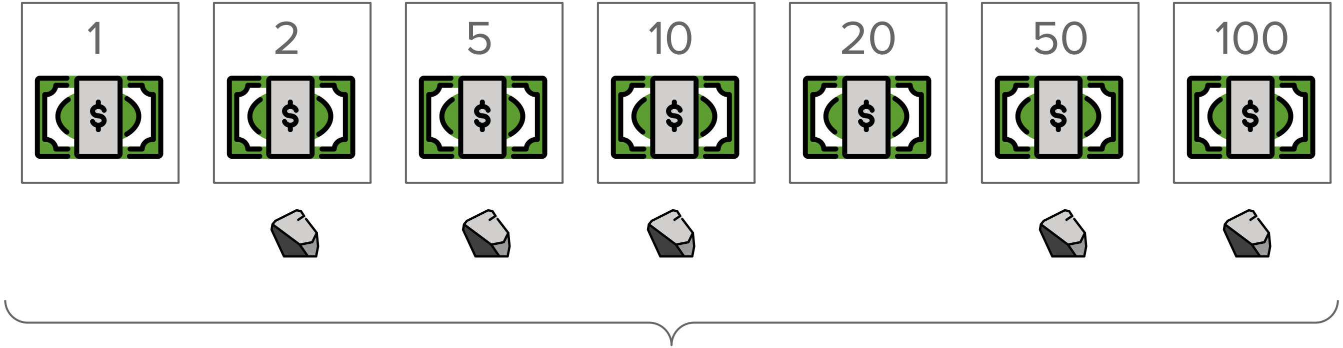


1 x \$1 + 1 x \$5 + 1 x \$10 + 2 x \$50

Dibujos de https://openmoji.org

Los billetes

¿De cuántas maneras distintas podemos coger 5 billetes de una caja que contiene billetes de 1, 2, 5, 10, 20, 50 y 100 dólares? Hay al menos 5 billetes de cada tipo en la caja, y el orden en que cogemos los billetes es irrelevante.

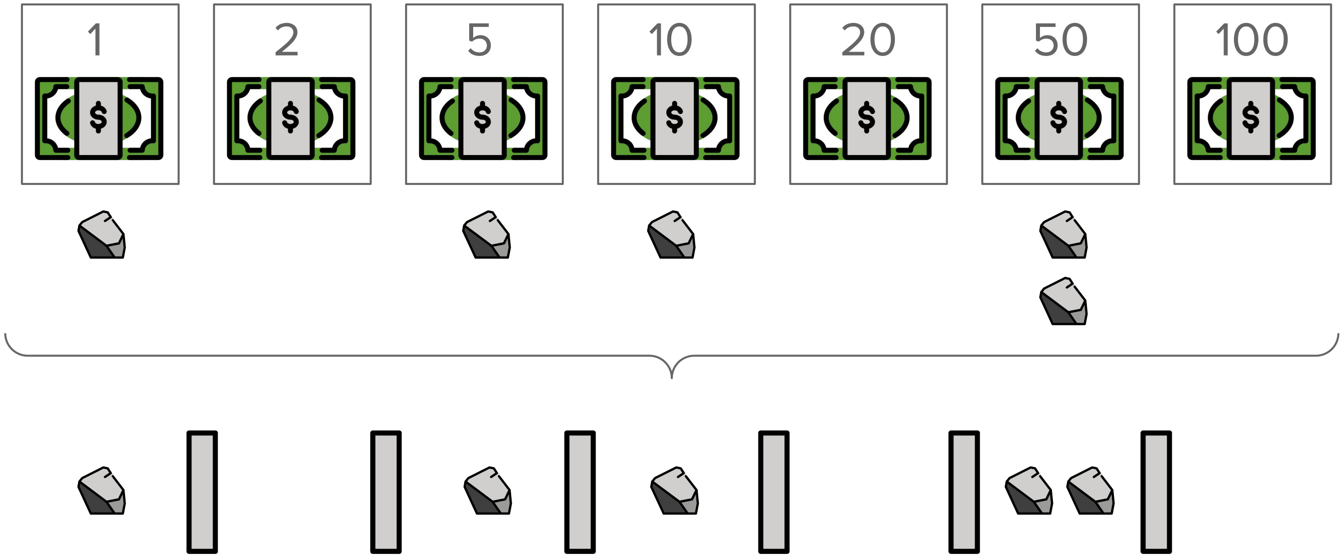


1 x \$2 + 1 x \$5 + 1 x \$10 + 1 x \$50 + 1 x \$100

Dibujos de https://openmoji.org

Los billetes

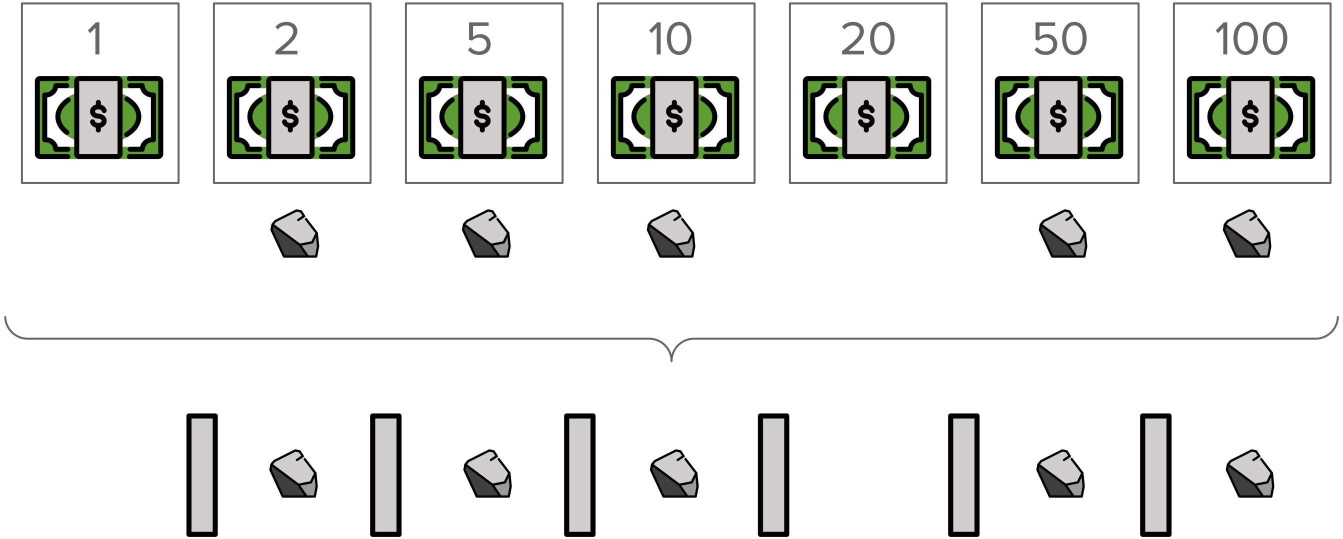
Idea 2: Codifiquemos cada caso usando sólo *piedras* y *barras* (separadores entre las cajas)



Dibujos de https://openmoji.org

Los billetes

Idea 2: Codifiquemos cada caso usando sólo *piedras* y *barras* (separadores entre las cajas)



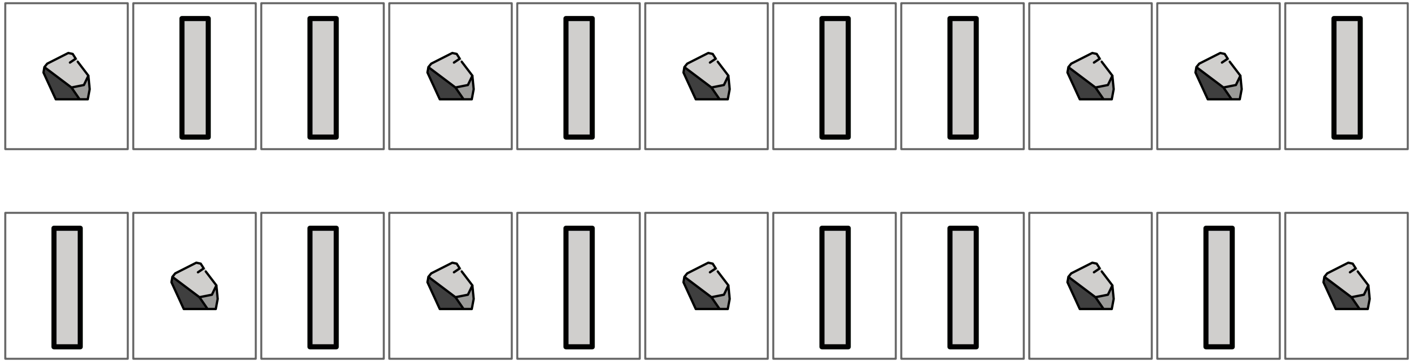
Dibujos de https://openmoji.org

Los billetes

5 piedras 6 barras 11 posiciones

Caso 1

Caso 2



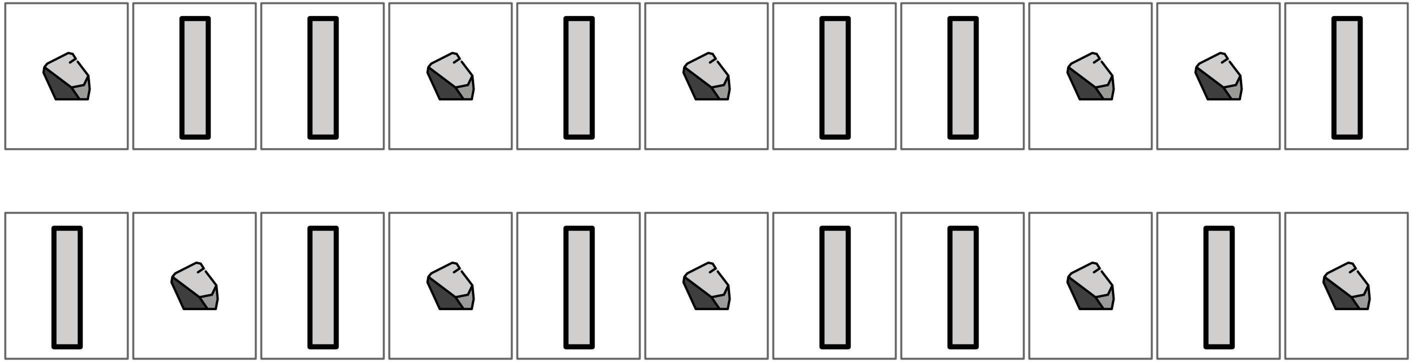
¿De cuántas maneras diferentes podemos distribuir las piedras y barras en las 11 posiciones?

Dibujos de https://openmoji.org

Los billetes

Caso 1

Caso 2



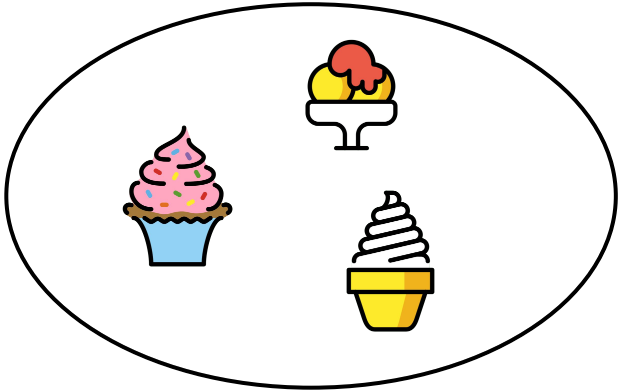
¿De cuántas maneras diferentes podemos distribuir las piedras y barras en las 11 posiciones?

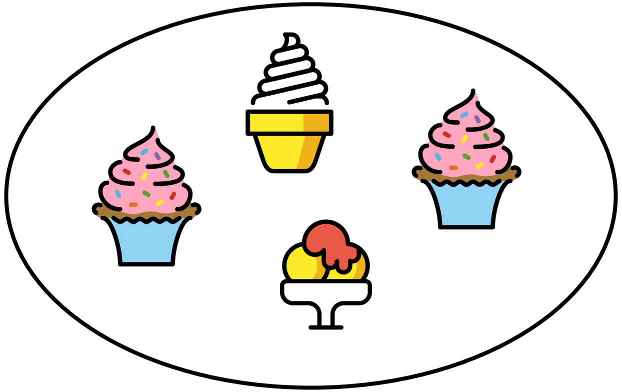
C(11, 5)

Dibujos de https://openmoji.org

Combinaciones con repetición

Una ***r*-combinación con repetición** de los elementos de un conjunto es un grupo no ordenado de ***r*** elementos tomados del conjunto en el que se permite que haya elementos repetidos.





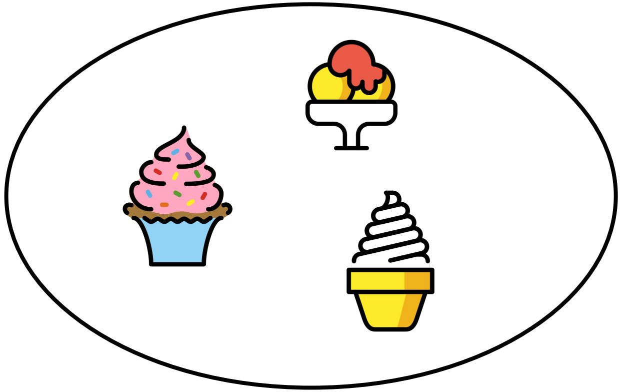
4-combinación con repetición

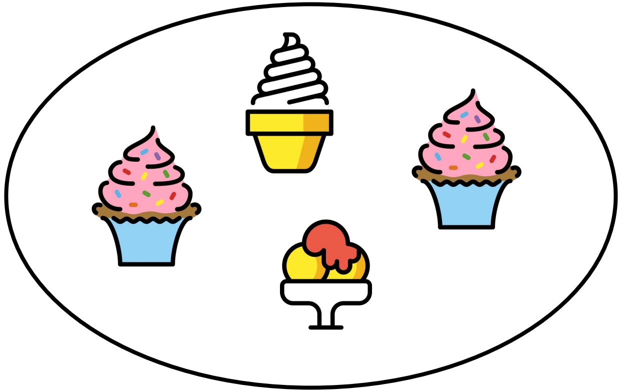
Dibujos de https://openmoji.org

Número de *r*-combinaciones con repetición

Sea n un número entero positivo y r un número entero no negativo. El número de ***r*-combinaciones con repetición** de un conjunto de ***n* elementos** es

$$CR(n, r) = C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1)$$



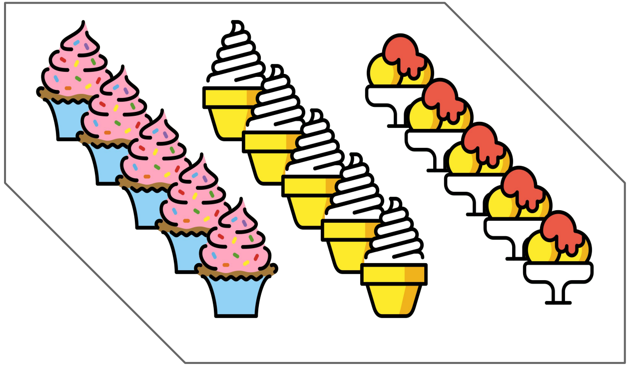


$CR(3, 4) = C(6, 4) = 15$

Dibujos de https://openmoji.org

Volviendo a los pasteles

En una tienda hay 3 tipos de pasteles. Si queremos comprar 3 pasteles, ¿de cuántas maneras distintas podemos hacerlo?

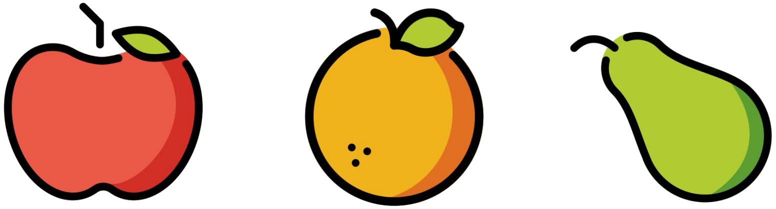


$CR(3, 3) = C(5, 3) = 10$

Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 3

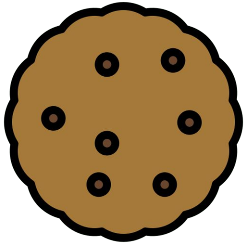
[Adaptado de Rosen] ¿De cuántas maneras diferentes se pueden coger 4 piezas de fruta de un frutero con manzanas, naranjas y peras? Suponemos que el orden en el que se cogen las piezas no importa, que las frutas de un mismo tipo son indistinguibles y que hay al menos 4 piezas de cada tipo de fruta en el frutero.



Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 4

[Adaptado de Rosen] Una tienda vende 4 tipos de galletas. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden comprar 6 galletas en la tienda? Las galletas de un mismo tipo se consideran indistinguibles y el orden en el que se eligen es irrelevante.



Dibujos de https://openmoji.org

Ejemplo 5

[Adaptado de Rosen] ¿Cuántas soluciones diferentes tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

suponiendo que x_1, x_2 y x_3 son números enteros no negativos?

Ejemplo 6

[Adaptado de Rosen] ¿Cuál es el valor de la variable *k* después de ejecutar el siguiente código?

$$
\begin{array}{l}
k := 0 \\
\textbf{for } i_1 := 1 \textbf{ to } n \\
\quad \textbf{for } i_2 := 1 \textbf{ to } i_1 \\
\qquad \cdot \\
\qquad \cdot \\
\qquad \cdot \\
\qquad \quad \textbf{for } i_m := 1 \textbf{ to } i_{m-1} \\
\qquad \qquad k := k + 1
\end{array}
$$

Resumen: Combinaciones y permutaciones

	¿Importa el orden?	¿Elementos repetidos?	Fórmula
r-permutaciones	*Sí*	*No*	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinaciones	*No*	*No*	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r-permutaciones	*Sí*	*Sí*	n^r
r-combinaciones	*No*	*Sí*	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$