Hoja 6

Integrales dobles y triples. Teorema de Fubini

1.- Sea f la función definida para $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f no es integrable en el rectángulo $R = [0,1] \times [0,1]$.

(b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dx \Big) dy \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dy \Big) dx\,.$$

2.- Definimos $f(x,y)$ en el cuadrado $C = [0,1] \times [0,1]$ como sigue:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Probar que la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$ existe y es igual a 1.

(b) Demostrar que, no obstante, f no es integrable en C.

3.- Demostrar la existencia de la integral $\displaystyle\int_Q f(x+y)\, dx\, dy$, donde $Q = [0,2] \times [0,2]$ y $f(t) = [t]$ representa el mayor número entero $\leq t$. Hallar el valor de la integral.

4.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados.

(a) $\displaystyle\int_Q x^2 e^y\, dx\, dy,\ Q = [-1,1] \times [0, \log 2];$

(b) $\displaystyle\int_Q \operatorname{sen}(x+y)\, dx\, dy,\ Q = [0,\pi] \times [0,\pi];$

(c) $\displaystyle\int_Q |xy|\, dx\, dy,\ Q = [-1,2] \times [1,3];$

(d) $\displaystyle\int_Q \operatorname{sen}^2(3x-2y)\, dx\, dy,\ Q = [0,\pi] \times [0,\pi].$

5.- Para cada una de las siguientes funciones f definidas en el rectángulo $Q = [0,1] \times [0,1]$, se pide representar el conjunto de los valores $f(x,y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así obtenido. Determinar también en cada caso el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in Q :\ f \text{ no es continua en } (x,y)\}.$$

(a) $f(x,y) = \begin{cases} 1-(x+y) & \text{si} \quad x+y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$

6.- Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_\Omega x \cos(x+y)\, dx\, dy$, siendo Ω el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π).

7.- Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_D y dx\, dy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ 2x/\pi \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$.

8.- Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_D x^3 y \operatorname{sen} \frac{\pi y^2}{x} dxdy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

9.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z=6$. Dibujar esta pirámide y calcular su volumen: a) de manera elemental; b) integrando.

10.- (a) Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie $z=x^2+y^2$ y el plano $z=10$.

(b) Lo mismo para la región acotada por la gráfica $z=e^{-x^2}$ y los planos $y=0$, $z=0$, $y=x$ y $x=1$.

11.- En los siguientes apartados, se supone que la integral de una función positiva f sobre la región Ω se reduce a la integral iterada que se da. En cada caso, se pide determinar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \Big(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx\Big)dy.$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int_1^4 \Big(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\Big)dx\,,$

(c) $\displaystyle\int_1^e \Big(\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy\Big)dx.$ $\qquad$ (d) $\displaystyle\int_0^\pi \Big(\int_{-\operatorname{sen} x/2}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy\Big)dx.$

12.- Invirtiendo el orden de integración si fuese necesario, calcúlese la integral

$$\int_0^4\int_{y/2}^2 e^{x^2}\,dxdy\,.$$

13.- Si $D=[-1,1]\times[-1,2]$, probar que

$$1\le\int_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}\le 6\,.$$

14.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a) $\displaystyle\int_Q (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, con $Q=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

(b) $\displaystyle\int_T x^2\cos z\,dx\,dy\,dz$, siendo T la región limitada por los planos $z=0, z=\pi, y=0, y=1, x=0, x+y=1$.

(c) $\displaystyle\int_\Omega x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z=x\,y$ y los planos $y=x, x=1$ y $z=0$.

15.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\displaystyle\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ de la función f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z=0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz\,dx\,dy$.

(a) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^x\Big(\int_0^y f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$ $\qquad$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)dx.$