Tema 2a. Sucesiones

2a.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/495bdfb4-de9c-4b02-9d8f-2841db3432ae/U2a_Sucesiones.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/797e47ec-6558-437d-bd5b-3596cdbdc5d1/H2_Sucesiones.pdf

2a.1. Límite de una sucesión

Definición. Una ***sucesión*** *en $\mathbb{R}$ es una colección indexada en $\mathbb{N}$ (o en $\mathbb{Z}$) de elementos de $\mathbb{R}$.*
Notación: $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Cuando estudiamos el límite de una sucesión estudiamos su comportamiento para $k \to \infty$.

> Decimos que $L \in \mathbb{R}$ es el **límite de la sucesión** $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, a_k \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

Notación: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$.

> Lema. Una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $L \Leftrightarrow$ todo intervalo abierto no vacío centrado en L contiene a todos los elementos de la sucesión salvo un número finito.

Demostración.
Por definición, $\{a_n\}$ tiene límite $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon, \forall n \geq N$. Equivalentemente, $\forall \varepsilon > 0$, el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ contiene a todos los a_n salvo quizás a aquellos tales que $n \leq N - 1$. $\square$

Si una sucesión tiene límite, se dice que esta es **convergente**, de lo contrario, se dice que es **divergente**.

Ejemplo 1.
$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{0+0} = \infty$, la sucesión es divergente.

2a.1.1. Unicidad del límite

> Unicidad del límite. Si una sucesión tiene límite, este es único.

Demostración.
Suponemos que a_n tiene dos límites L_0 y L_1 y que, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, n_1 : |a_n - L_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n > n_0$ y $|a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n > n_1$. Entonces para $n > \max(n_0, n_1)$, $|L_0 - L_1| \le |L_0 - a_n| + |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Como $\varepsilon > 0$, L_0 tiene que ser igual a L_1. $\square$

2a.1.2. Acotación de una sucesión

*Definición. Se dice que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **acotada** si $\exists c : |a_n| < c, \forall n$, $(\Leftrightarrow \exists I(\text{finito}) \subset \mathbb{R} : a_n \in I, \forall n)$.*

Demostración.
Según la definición anterior: $\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} a_n) - L = 0$.
Efectivamente, $\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \ge N, |a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} a_n) - L = 0$. $\square$

2a.1.3. Operaciones aritméticas con los límites de sucesiones

Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} a_n \to A \lim_{n\to\infty} b_n \to B$ y $A, B \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$.
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$.
3. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{B}$, si $B \ne 0$.
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, si $B \ne 0$.

Demostración 1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n - (A + B)) = \lim_{n\to\infty} ((a_n - A) + (b_n + B)) = 0$. Luego $\exists \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$. $\square$

Demostración 2. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. $|a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \le |a_n - A||b_n| + |A||b_n - B|$. Sabemos que $\lim_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} |b_n - B| = 0$. Luego $\exists N_\varepsilon : |a_n b_n - AB| < \varepsilon$ con $n \ge N$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$. $\square$

2a.2. Subsucesiones

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de índices estrictamente crecientes, se dice que $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una **subsucesión** de $\{a_n\}$.

2a.2.1. Sucesiones monótonas

Sea $\{a_n\}$ una sucesión, se dice que es:

- **monótona creciente** si $a_n \leq a_{n+1}, \forall n$
- **monótona decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}, \forall n$
- **estrictamente monótona creciente** si $a_n < a_{n+1}, \forall n$
- **estrictamente monótona decreciente** si $a_n > a_{n+1}, \forall n$

> Teorema. Toda sucesión de números reales contiene una subsucesión monótona.

> Teorema: Toda sucesión monótona y acotada tiene límite, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.

2a.2.2. Teorema del Sándwich

> Teorema del Sándwich. Sean las sucesiones a_n, b_n y c_n, donde $a_n < b_n < c_n, \forall n$, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, entonces las sucesión b_n es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$ y $N_1, N_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, $a_n \in (L-\varepsilon, l+\varepsilon), \forall n \geq N_1$ y $c_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon), \forall n \geq N_2$. Por tanto, sea $N = \max(N_1, N_2)$, entonces $b_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon), \forall n \geq N$. $\square$

Ejemplo 2. Sea $b_n = \dfrac{n+1}{n^2+1} + \dfrac{n+2}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n+n}{n^2+n}$, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Sea $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+n} + \ldots + \dfrac{n+n}{n^2+n}$ y $c_n = \dfrac{n+1}{n^2} + \ldots + \dfrac{n+n}{n^2}$, de forma que $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n$.
Tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3n^2+n}{2}}{n(n+1)} = \dfrac{3}{2}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3n^2+n}{2}}{n^2} = \dfrac{3}{2}$.
Luego, por el Teorema del Sándwich, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{3}{2}$.

2a.3. Sucesiones de Cauchy

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales, decimos que es una **sucesión de Cauchy** si se cumple que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) : m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$.

> Teorema. Toda sucesión que converge a un número real es una sucesión de Cauchy.

2a.3.1. Teorema de Bolzano-Weierstrass

> Teorema de Bolzano-Weirstrass. Toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.

Toda sucesión $\{a_n\}$ en $\mathbb{R}$ contiene una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} \begin{cases} = l \in \mathbb{R} \\ = \pm\infty \end{cases}$.

Demostración.
Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada tal que $L_- \leq a_n \leq L_+, \forall n$ y $\{a_{n_k}\}$ una subsucesión monótona de $\{a_n\}$. Entonces, $L_- \leq a_{n_k} \leq L_+, \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = L_+$ o $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = L_-$. $\square$

> Lema. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy y $\{a_{n_k}\}$ su subsucesión convergente con límite L, se dice que $\{a_n\}$ es convergente y su límite también es L.

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario:
1. $\exists s : |a_{n_k} - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ si $k \geq s$.
2.$\exists N : m, p > N \Rightarrow |a_m - a_p| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Elegimos un $r \geq s : n_r \geq N$. Luego, si $m \geq n_r \Rightarrow |a_m - L| \leq |a_m - a_{n_r}| + |a_{n_r} - L| < \varepsilon$.
Luego, $\exists \lim\limits_{m\to\infty} a_m = L$. $\square$

> Teorema. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado, entonces $\mathbb{K}$ es completo $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}$ es arquimediano y toda sucesión de Cauchy en el él converge.

2a.4. Límites superiores e inferiores

*Definición. El mayor de los valores que es límite de una sucesión $\{a_n\}$ se denomina **límite superior** y se denota por $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. El menor se denomina **límite inferior** y se denota por $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.*