Tema 2. Funciones

2.0. Contenido y documentación

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/bc7645dd-2d12-4752-a0e3-6f2e25e2aa59/U2a_Funciones.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/5e309ded-647a-4e46-9963-af628c81c38f/H2_Funciones.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/f68b0926-f759-435c-919e-83e2987d785b/U2b_CalculoDiferencial.pdf https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/3179ca76-c3ee-4b10-8435-df95da843453/H3_DerivadasParciales.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/dc1f9789-066a-4a6d-9eb6-e30a1c45ff56/U2c_DerivadasOrdenSuperior.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/d3ab89fe-c605-4f6a-a718-c8640799f25b/H4_FuncionesVectoriales.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/2e950bd2-aaa1-46c2-913f-837ac336bdff/H5_PolinomiosTaylor.pdf

2.1. Funciones

Definición. Una ***función*** $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es una regla que asocia, a cada* $(x_1, x_2, .., x_n) \in A$ *un único* $(y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$*.*
Nota. Si $m = 1$ se dice que la función es escalar, mientras que si $m > 1$ se dice que es vectorial.

Definición. El ***dominio*** *de una función es el conjunto de puntos para los que esta está definida.*
Nota. Si no se indica, el dominio de la función son todos los puntos para los que esta tiene sentido, el dominio natural.

Definición. La ***imagen*** *de una función es el conjunto de puntos* $(y_1, y_2, ..., y_m)$ *tales que existe un* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ *con* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_m)$*.*

2.1.1. Gráficas y conjuntos de nivel

Definición. La ***gráfica*** *de una función escalar,* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, es el conjunto de puntos* $\text{Graf}\,(x) = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \vec{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$*.*

Definición. Dada una función escalar, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, el* ***conjunto de nivel de valor*** C *es el conjunto de puntos* $\vec{x} \in A$ *para los cuales* $f(\vec{x}) = C$*:* $N_C(f) = \{\vec{x} \in A : f(\vec{x}) = C\} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$*.*
Nota. Si $n = 2$, lo denominamos **curva de nivel**, mientras que si $n = 3$ lo denominamos **superficie de nivel.**

2.2. Límite de una función

> Decimos que f tiene límite $L \in \mathbb{R}^m$ en x_0, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in U$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$. Escribimos $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L.$

Observaciones.
1. Si existe el límite de la función, este es único.
2. Si f tiene funciones coordenadas $f = (f_1, ..., f_m)$ y $L = (L_1, ..., L_m) \in \mathbb{R}^m$. Entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f_i(x) = L_i, \forall i = 1, ..., m$.

2.2.1. Cálculo operativo de límites

Sean $f, g : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos funciones para las que existen $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$; entonces:

1. $\lim_{x\to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda(\lim_{x\to x_0} f(x)), \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$.
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{x\to x_0} g(x)), m = 1$.
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}, m = 1, \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Ejemplo 1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x^2 + y^2) = 0$
$0 \leq 2x^2 + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2\|(x, y)\|^2 < 2\delta^2$. Luego, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\varepsilon/2} : \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$, entonces $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$.

2.2.2. Límites y sucesiones

> Teorema. Sea U un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, una función $f : U \to \mathbb{R}^m$, x_0 un punto de acumulación de U y $L \in \mathbb{R}^m$. Entonces, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$para toda sucesión de U convergente a x_0, $\{x_k\}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = L$.

2.2.3. Funciones homogéneas

Definición. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, decimos que es ***homogénea de grado*** *k si $f(\lambda\vec{x}) = \lambda^k f(\vec{x}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.*
Nota. Si una función es homogénea de grado 0, no existe el límite de la función en $(0, 0)$.

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{2x^4 + 3y^4}$. Entonces, $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2(\lambda y)^2}{2(\lambda x)^4 + 3(\lambda y)^4} = \frac{\lambda^2x^2\lambda^2y^2}{2\lambda^4x^4 + 3\lambda^4y^4} = \frac{\lambda^4x^2y^2}{\lambda^4(2x^4 + 3y^4)} = \lambda^0 f(x, y)$. Luego, la función es homogénea de grado 0.

2.2.4. Límites laterales

Llamamos límites laterales a $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y))$ y $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y))$, si es que existiesen.

Ejemplo 3. Sea $f(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^2y^2}$, calcula $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f(x, y))$.
Nos aproximamos por $x = y^2$, de forma que $f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 + y^4}{y^4y^2} = \frac{2}{y^2}$, $\nexists \lim_{y\to 0} \frac{2}{y^2} \Rightarrow$

$\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (f(x,y))$.

2.3. Funciones continuas

Definición. Dado un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, decimos que $f: U \to \mathbb{R}^m$ es ***continua en un punto*** *$x_0 \in U$ si: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in U$ con $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Equivalentemente, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

> Teorema. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ con $f(A) \subset B$. Si $x_0 \in A$, f es continua en x_0, y g es continua en $f(x_0)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en x_0.

> Teorema. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y U es conexo (por arcos), entonces dados $x_1, x_2 \in U$ y $f(x_1) \leq m \leq f(x_2)$, $\exists z \in U : f(z) = m$.

Demostración.
Tomamos una función $\varphi : [0,1] \to U$ continua con $\varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$. Entonces la función compuesta $f \circ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y podemos aplicar el resultado en una variable. $\square$

> Teorema. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y U es compacto, entonces f está acotada y alcanza su supremo e ínfimo en valores de su dominio, es decir, posee máximo y mínimo.

Demostración.
Como $\mathrm{D}(f)$ es compacto, $\exists$ una subsucesión $\{x_{k_i}\}$ convergente a un cierto $x_0 \in \mathrm{D}(f)$. Como f es continua, $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = x_0$, entonces, $\exists \lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = \sup f = f(x_0)$. $\square$

> Teorema. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua $\Leftrightarrow \forall V \in \mathbb{R}^m$ abierto, la preimagen $f^{-1}(V)$ es un abierto.

Demostración.
Dado un $x_0 \in f^{-1}(V)$, buscamos un $r > 0 : B_r(x_0) \subset f^{-1}(V)$.
Como $f(x_0) \in V$ y V es abierto, $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(f(x_0)) \subset V$. Basta coger $r = \delta_\varepsilon$. $\square$

Análogamente, una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua $\Leftrightarrow \forall H \subset \mathbb{R}^m$ es cerrado, la preimagen $f^{-1}(H)$ es cerrado.

2.4. Derivadas en $\mathbb{R}$

Definición. La ***derivada*** *de una función f en un punto x_0, denotada $f'(x_0)$, es $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, siempre que dicho límite exista.*

Si la función f es derivable en x_0, entonces la recta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = L(x)$ es la mejor aproximación lineal a f. Es decir, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$.

Además, se dice que f y g tienen **orden de contacto** $\geq k$ en x_0 si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^k} = 0$.

2.5. Derivadas parciales

*Definición. Sea f una función tal que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos la **derivada parcial** j-ésima de f, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, como la derivada de f respecto a la variable x_j, manteniendo el resto de variables fijas:*
$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_j + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h}$.

Nota. Si f es vectorial, entonces $f(x) = (f(x_1), ..., f(x_n))$, y se puede hablar de la derivada parcial $\frac{\partial f_j}{\partial x_j}$ de la componente j-ésima de f con respecto a la variable x_j.

Ejemplo 4. Determina la relación derivabilidad-continuadad de una función en $\mathbb{R}^n$.

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, calculamos sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Vemos que f es continua en un punto, $(0,0)$, en el que no es continua. Luego f es derivable $\not\Rightarrow$ f es continua.

2.5.1. Matriz jacobiana

Definición. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función y $f = (f_1, ..., f_n)$ son sus funciones coordenadas.

*Definimos la **matriz jacobiana** como la matriz:* $\mathrm{D}f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

*Definición. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar, entonces llamamos **gradiente de f en x_0** a $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$.*

*Definición. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es una función vectorial de una variable, entonces llamamos **trayectoria** a $f'(x_0) = (f_1'(x_0), ..., f_m'(x_0))$.*

2.5.2. Diferenciabilidad

*Definición. Decimos que la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** en $(x_0, y_0) \in U$ si $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en (x_0, y_0) y si*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

> Proposición. Si $\pi(x, y) = a + b(x - x_0) + c(y - y_0)$ verifica que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - \Pi(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}$.

2.5.3. Plano tangente

Definición. Si la función f es diferencibale en (x_0, y_0), definimos el ***plano tangente*** *a la gráfica de $z = f(x, y)$ en dicho punto como el definido por: $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.*

Este es el plano que:

- Pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
- Tiene vector normal $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$.

2.5.4. Definición de diferenciabilidad

Definición. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se dice que es ***diferenciable*** *en $x_0 \in U$ si:*
1. Las derivadas parciales de todas las $f_1, ..., f_m$ existen en x_0.
2. Para la matriz $\mathrm{D}f(x_0)$ se tiene que $\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - \mathrm{D}f(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$.

2.5.5. Relación entre diferenciabilidad y continuidad

> Teorema. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$. Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

> Teorema. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$. Si existen todas las derivadas parciales, $\frac{\partial f_j}{\partial x_j}$, de f y son continuas en un entorno de x_0, entonces f es diferenciable en x_0.

2.5.6. Propiedades de la matriz jacobiana

Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en x_0, entonces:

1. $\mathrm{D}(\alpha f)(x_0) = \alpha \mathrm{D}f(x_0)$
2. $\mathrm{D}(f + g)(x_0) = \mathrm{D}f(x_0) + \mathrm{D}g(x_0)$
3. Si $m = 1$, $\mathrm{D}(fg)(x_0) = g(x_0)\mathrm{D}f(x_0) + f(x_0)\mathrm{D}g(x_0)$
4. Si $m = 1$, $g(x_0) \neq 0$, $\mathrm{D}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\mathrm{D}f(x_0) - f(x_0)\mathrm{D}g(x_0)}{g(x_0)^2}$

2.6. Regla de la cadena

> Teorema. Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ funciones tales que f es diferenciable en $x_0 \in U$, g es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ y $f(U) \subset V$, de forma que la función $h = g \circ f$ está definida. Entonces la composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es diferenciable en x_0, y su matriz diferencial viene dada por $\mathrm{D}(g \circ f)(x_0) = \mathrm{D}g(y_0)\cdot \mathrm{D}f(x_0)$.

Ejemplo 5. Sean $f(x, y, z) = (x^2y, z\cdot \tan x, y\cdot \log z), g(u, v, w) = (w\cdot e^{uv}, w - u)$. De forma que $(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = g(x^2y, z\cdot \tan x, y\cdot \log z) = (h_1, h_2)$. Así, $\dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial h_1}{\partial x}, \dfrac{\partial h_2}{\partial x}\right)$.

2.6.1. Derivada direccional

Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. Se dice que la **derivada direccional** de f en x_0 en la dirección del vector $\vec{u}$ es $\mathrm{D}_{\vec{u}}f(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x_0 + t\vec{u})\Big|_{t=0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t}$

> Teorema. Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in U$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario, entonces $\mathrm{D}_{\vec{u}}f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \vec{u}\rangle$.

Demostración.
Definimos $H(t) = f(x_0 + t\vec{u})$. Entonces H es la composición de la función trayectoria $g(t) = x_0 + t\vec{u}$ con f. Por tanto, como $g'(t) = \vec{u}, \forall t$, se tiene que $\mathrm{D}_{\vec{u}}f(x_0) = H'(0) = \langle \nabla f(x_0), g'(0)\rangle = \langle \nabla f(x_0), \vec{u}\rangle$. $\square$

Debido al resultado anterior, se tiene que, por Cauchy-Schwarz, $|\mathrm{D}_{\vec{u}}f(x_0)| = |\langle \nabla f(x_0), \vec{u}\rangle| \leq |\nabla f(x_0)|$.

> Teorema. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in U$. Si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces, de entre todas las direcciones unitarias $\vec{v}$, la derivada direccional de f es máxima cuando $\vec{v}_1 = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$. Análogamente, la dirección unitaria en la que la derivada de f en x_0 es mínima, es $\vec{v}_2 = -\dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$.

Demostración.
Basta con ver que $\mathrm{D}_{\vec{v}_1}f(x_0) = |\nabla f(x_0)|$, mientras que $\mathrm{D}_{\vec{v}_2}f(x_0) = -|\nabla f(x_0)|$. $\square$

> Teorema. Si $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ es una curva contenida en S_a (y, por tanto, $f(c(t)) \equiv a$ para todo t), con $c(0) = x_0$, entonces $\langle \nabla f(x_0), c'(0)\rangle = 0$.

Supongamos que $f = (x_0, y_0, z_0) = a$, y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. La ecuación del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) a la superficie de nivel $f(x, y, z) = a$, es $\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z -$

$z_0)\rangle = 0$. Más explícitamente, $\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0) = 0$.

2.7. Derivadas de orden superior

Sea f una función de una variable, sabemos que se pueden calcular derivadas iteradas de f. Si tomamos las derivadas de orden 2 para $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, tenemos $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

*Definición. Llamamos **derivadas mixtas** a las derivadas de la forma $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ o $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.*

*Definición. Si todas estas derivadas existen en cada punto de $\mathbb{R}^2$ y son funciones continuas, se dice que f es una función **de clase** $\mathcal{C}^2$, o se escribe $f \in \mathcal{C}^2$.*

> Teorema. Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$, entonces, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Ejemplo 6. Sea $f(x,y) = xy + (x+2y)^2$. Entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(y + 2(x+2y)) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x + 4(x+2y)) = 8$. Por otra parte, las derivadas mixtas se calculan como $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y + 2(x+2y)) = \frac{\partial}{\partial y}(2x+5y) = 5$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x+4(x+2y)) = \frac{\partial}{\partial x}(5x+8y) = 5$. De forma que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5$.

*Definición. Sea $\in \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f:U\to\mathbb{R}$. Decimos que f es **de clase $\mathcal{C}^2$ en** U si $\forall i,j \in 1,\ldots,n$ la derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existe y es continua en U.*

> Teorema. Si $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en U, entonces $\forall i,j\in 1,\ldots,n$, para todo punto $x_0\in U$, tenemos $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$.

Ejemplo 7. Sea $f(x,y,z) = e^{xy} + z\cos(x)$. Las derivadas de orden 2 de f son:
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} - z\sin(x)) = y^2e^{xy} - z\cos(x)$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x^2e^{xy}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\cos(x) = 0$.

Además, podemos comprobar que las derivadas cruzadas son iguales:
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - z\sin(x)) = e^{xy} + xye^{xy}$.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\sin(x)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\sin(x)$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$.

2.7.1. Matriz Hessiana

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces, entonces se define la **matriz Hessiana** como la matriz de dimensiones $n \times n$ dada por: $\mathrm{H}_f(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{|x=x_0}$,

donde todas las derivadas están calculadas en el punto x_0.

En general, si todas las derivadas de orden k existen y son continuas en U, decimos que la función es de clase $\mathcal{C}^k$ en U. También podemos considerar la derivación k veces con respecto a las variables $x_{j_1}, ..., x_{j_k}$ que pueden ser repetida o no: $\dfrac{\partial^k f(x)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}} = \dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}} \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_{j_k}} f(x)$.

2.8. Polinomios de Taylor

> Teorema. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$. Entonces si $h \in \mathbb{R}^n$ con $x_0 + h \in U$, $f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + R_1(x_0, h)$, donde $\lim_{h \to 0} \dfrac{|R_1(x_0, h)|}{||h||} = 0$, o también $R_1(x_0, h) = o(||h||)$, para $||h|| \to 0$.

Cuando $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el punto es (x_0, y_0) y $n = 1$, la fórmula queda $P_{1,x_0,f}(x, y) = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.

2.8.1. Fórmula de Taylor de orden 2

> Teorema. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $x_0 \in U$. Entonces la fórmula de Taylor de segundo orden de f en x_0 es $f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} h_i + \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + R_2(x_0, h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \dfrac{1}{2} h \cdot \mathrm{H}_f(x_0) \cdot h^T + R_2(x_0, h)$, donde $\mathrm{H}_f(x_0)$ es la matriz Hessiana de f en el punto x_0 y $\lim_{h \to o} \dfrac{R_2(x_0, h)}{||h||^2} = 0$.

2.9. Extremos locales

Definición. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Decimos que $x_0 \in U$ es un ***máximo local*** *de f si existe una bola abierta V con $x_0 \in V \subset U$ tal que $\forall x \in V, f(x) \leq f(x_0)$.*

Definición. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Decimos que $x_0 \in U$ es un ***mínimo local*** *de f si existe una bola abierta V con $x_0 \in V \subset U$ tal que $\forall x \in V, f(x) \geq f(x_0)$.*

Diremos que $x_0 \in U$ es un **extremo local** si es un máximo o un mínimo local.

> Teorema. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$. Si x_0 es un extremo local, entonces $\nabla f(x_0) = \vec{0}$.

Demostración.
Basta con ver que si f tiene un extremo local en $x = 0$, entonces para cada vector $\vec{e}_j$ de la base canónica, la función en la variable t dada por $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{e}_j)$, tiene un extremo local en el punto $t = 0$. Luego $\varphi'(0) = 0$. Ahora bien, esto nos dice que $0 = \varphi'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$. Como esto es cierto para todo $j = 1, 2, ..., n$, deducimos que $\nabla f(x_0) = (0, 0, ..., 0)$. $\square$

Sea $x_0 \in U$ un extremo de $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Enonces x_0 puede ser un **máximo local**, un **mínimo local** o un **punto de silla**.

2.10. Formas cuadráticas

Dada una matriz A de dimensiones $n \times n$, definimos la forma cuadrática asociada por medio de $F_A(x) = x \cdot A \cdot x^T$.

Definición. A es definida ***positiva*** *si $\forall x \neq 0, x \cdot A \cdot x^T > 0$.*

Definición. A es definida ***negativa*** *si $\forall x \neq 0, x \cdot A \cdot x^T < 0$.*

> Proposición. Si la matriz A es definida positiva (resp. definida negativa) existen dos valores $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ tales que $\lambda \|x\|^2 \leq F_A(x) \leq \Lambda \|x\|^2$ (resp. $\lambda \|x\|^2 \leq -F_A(x) \leq \Lambda \|x\|^2$).

2.10.1. Criterio de Silvester

Dada una matriz M cuadrada de tamaño $n \times n$, para cada $i \in 1, 2, ..., n$, se define el **menor principal i-ésimo** de M como el determinante de la submatriz $M_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ cuyas filas y columnas son las primeras i filas y columnas de M. Supongamos que cada menor de la matriz M es no nulo. Entonces:

1. Si todos los menores principales de M son positivos, entonces M es definida positiva.
2. Si los menores principales i-ésimos de M son negativos para i impar y positivos para i par, entonces M es definida negativa.

2.10.2. Uso de la Hessiana para distinguir extremos

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ en U. Sea $x_0 \in U$ un punto crítico de f, y supongamos que cada menor de la matriz Hessiana $H = H_f(x_0)$ es no nulo.

1. x_0 es un **mínimo local** si $H_f(x_0)$ es definida positiva.

2. x_0 es un **máximo local** si $H_f(x_0)$ es definida como negativa.
3. Si los menores principales son todos no nulos y no se da ni 1. ni 2., entonces x_0 es un **punto de silla** (en algunas direcciones es un mínimo y en otra un máximo).

2.10.3. Caso $n = 2$

Definición. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. El ***discriminante*** *de f en (x_0, y_0) es el determinante del Hessiano de (x_0, y_0), esto es, $D = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ todo ello evaluado en el punto (x_0, y_0).*

> Teorema. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U.
>
> - Un punto $(x_0, y_0) \in U$ es un **mínimo local estricto** de f si se tiene que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0,\ D > 0$ en (x_0, y_0).
> - Un punto $(x_0, y_0) \in U$ es un **máximo local estricto** de f si se tiene que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0,\ D > 0$ en (x_0, y_0).
> - (x_0, y_0) es un **punto de silla** si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0),\ D < 0$.

Ejemplo 8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$. Calculemos los puntos críticos de f. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y$ y resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$. Encontramos un punto crítico en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Calculamos la Hessiana en $(0, 0)$: $H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. De forma que los menores principales son $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4$. Por lo tanto, $(0, 0)$ es un mínimo local.

2.11. Extremos condicionales

Llamamos **extremos condicionales** a los extremos de una función bajo ciertas condiciones o restricciones.

Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en U. Denotemos por S_c el conjunto de nivel c de g, a saber $S_c = \{x : g(x) = c\}$. Denotemos por $f|_{S_c}$ la restricción de f a S_c, es decir, la función cuyo dominio es $S_c \to \mathbb{R}$, dada por $x \in S_c \to f(x)$. La idea es estudiar los extremos de $f|_{S_c}$, es decir, los extremos de f sujetos a la condición de pertenecer a S_c.

> Teorema (Multiplicadores de Lagrange). Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y denotemos por S_c el conjunto de nivel c de g. Supongamos que $x_0 \in S_c$ es tal que

> $\nabla g(x_0) \neq 0$. Si $f|_{S_c}$ tiene un extremo en x_0, entonces existe un número real λ_0 tal que $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$.

Demostración.
Si $x_0 \in S_c$ es un extremo de f en S_c, cualquier curva $\sigma(t)$, tal que $\sigma(0) = x_0$. Entonces $f(\sigma(t))$ tiene un extremo en $t = 0.0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\sigma(0)) = \nabla f(x_0) \cdot \sigma(0) \Rightarrow \nabla f(x_0) \perp$ al plano, y, por tanto, $\nabla f(x_0) \parallel \nabla g(x_0) \Rightarrow \exists \lambda_0 : \nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$. $\square$

Ejemplo 9. Encontrar el máximo de $f(x, y, z) = x + z$ con la condición de que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Para un parámetro real λ, utilizamos la función auxiliar $F = f(x, y, z) - \lambda(g(x, y, z) - 1)$, con $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$ de forma que $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.
Consideramos λ como una nueva variable y buscamos los puntos críticos de la función de 4 variables.
Tenemos $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 - 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - 2\lambda z$.
Para que se anulen las tres primeras derivadas parciales, se necesita que $\lambda \neq 0, y = 0, x = z = \dfrac{1}{2\lambda}$, obteniendo los puntos críticos $P_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), P_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ejemplo 10. Encontrar los extremos de $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ en $D : \dfrac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$.
Tenemos que $\nabla f = (x, y)$, luego $\nabla f = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$.
Sea $g(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \nabla g = (x, 2y)$. Luego, combnando ambos gradientes, $\begin{cases} x = \lambda x \\ y = \lambda 2y \end{cases}$.
Si $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \\ y = 2y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.
Luego, tendríamos $(0, 0)$ en el interior y $(0, 1), (0, -1), (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$ en la frontera.
De esta forma, $f(0, 0) = 0, f(0, \pm 1) = \dfrac{1}{2}, f(\pm\sqrt{2}, 0) = 1$.
Conclusión, en D, f tiene máximos globales en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ y un mínimo global en $(0, 0)$.

2.12. Máximos y mínimos globales

*Definición. Sea $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in U$ es un **máximo global** (resp. **mínimo global**) de f en si $\forall x \in U, f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).*

> Teorema. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, es decir, cerrado y acotado, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe al menos un mínimo global de f en D y al menos un mínimo global de f en D.

Ejemplo 11. Sea $a = xyzw$, con $x, y, z, w > 0$, buscamos el valor mínimo de $x + y + z + w$.
Definimos $F(x, y, z, w) = x + y + z + w$, condicionado a $xyzw = a$. Buscamos el conjunto de nivel

0 de $g(x,y,z,w) = xyzw - a$. De forma que tenemos el conjunto de ecuaciones $\begin{cases} \nabla F = \lambda \nabla g \\ xyzw = a \end{cases}$.

Luego $\begin{cases} 1 = \lambda yzw \\ 1 = \lambda xzw \\ 1 = \lambda xyw \\ 1 = \lambda xyz \\ wyzw = a \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{yzw} = \dfrac{1}{xzw} = \dfrac{1}{xyw} = \dfrac{1}{xyz} \Rightarrow x = y = z = w = a^{1/4}$.