Congruencias

1. a) Teniendo en cuenta que $10 \equiv 1 \pmod 9$, pruebe que $n \equiv s \pmod 9$ si s es la suma de los dígitos de n; deduzca que n es múltiplo de 9 si y sólo si lo es s. ¿Cuándo será n múltiplo de 3?

b) Usando la misma idea, y partiendo de que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, deduzca qué suma s debemos hacer con los dígitos de n para saber si es múltiplo de 11.

2. Sea $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ el subconjunto de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ formado por las unidades (los elementos invertibles respecto a la multiplicación) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Demostrar que

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \iff \overline{a} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \text{ y } \overline{b} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\,.$$

3. Halle $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ e indique cuál es el inverso multiplicativo de cada uno de sus elementos. Haga lo mismo con $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$.

4. a) Demuestre que si $p \in \mathbb{N}$ es primo, entonces p divide al número combinatorio $\binom{p}{k}$ para cada valor de k con $1 \le k \le p-1$. ¿Es esto cierto si p no es primo?

b) Pruebe que si p es primo, en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ se cumple la igualdad $\overline{a}^p + \overline{b}^p = (\overline{a} + \overline{b})^p$.

5. a) Hallar los inversos de 13 y -15 en $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

b) Demostrar que la ecuación $13X = 2$ tiene solución única en $\mathbb{Z}_{23}$. Indicar cuál es.

6. Demuestre que existen infinitos naturales no representables como suma de tres cuadrados.

7. Demostrar que si $n > 1$ y $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod n$ entonces n es primo.

8. Escriba una sola congruencia que sea equivalente al sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$$

9. Probar que $n^7 - n$ es divisible entre 42, para cualquier entero n.

10. Probar que $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ es un entero para todo n.

11. Demuestre que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es divisible por 7.

12. Calcular el resto que queda al dividir 3^{2011} entre 11.

13. Resolver los sistemas de congruencias:

$$a)\begin{cases} x \equiv -5 \pmod{77} \\ x \equiv 17 \pmod{143} \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x \equiv 7 \pmod 8 \\ x \equiv 3 \pmod{12} \end{cases}$$