Hoja 2

Límites y continuidad de funciones de varias variables

1.- Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y) = x + y - 2$ $\quad$ (b) $f(x,y) = x^2 + 4\,y^2$ $\quad$ (c) $f(x,y) = -x^2\,y^2$

(d) $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ $\quad$ (e) $f(x,y) = \text{máx}\,\{|x|,|y|\}$ $\quad$ (f) $f(x,y) = \cos^2(x^2+y^2)$

2.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2.$ $\quad$ (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$

(c) $f(x,y,z) = \exp(x^2+y^2+z^2).$ $\quad$ (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - z.$

3.- Para cada una de las funciones dadas, se pide determinar su dominio (es decir, el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donde está definida).

(a) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$ $\quad$ (b) $f(x,y) = \dfrac{\cos(x^2+y)}{x^2-y}.$ $\quad$ (c) $f(x,y) = \dfrac{\log(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$

4.- Halla razonadamente los siguientes límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5\,x^2 \operatorname{sen} y^2 + y^2 e^{-|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\frac{4xy}{5x^2+3y^2}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\text{máx}\{|x|,|y|\}}{\sqrt{x^4+y^4}}\,.$$

5.- ¿Cuál de los siguientes límites existe?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{5x^2+3y^2}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cos\frac{4xy}{5x^2+3y^2}\,.$$

6.- Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

definida para los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x+y \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = -1.$$

¿Existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$?

7.- Sea $f(x,y)$ definida mediante

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

en los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2y^2+(x-y)^2 \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = 0$$

y que no existe el $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

8.- Demostrar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases} y\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}+x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{y}, & \text{si } x,y\neq 0\\ 0, & \text{en el caso contrario}\end{cases}$$

tiene límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ y que, sin embargo, no existen los límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big).$$

9.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

$$(a)\ f(x,y)=\tan\frac{x^2}{y}. \qquad (b)\ f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}. \qquad (c)\ f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

10.- Se considera la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(1,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

¿Es f continua en $(1,0)$?

11.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,, \qquad g(x,y)=\frac{7xy}{2x^2+5y^2}\,, \qquad h(x,y)=\frac{1}{\log\sqrt{x^2+y^2}}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0,0)$?

12.- Para cada $(x,y)\neq(0,0)$ se define

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ a lo largo de la rectas $y=\lambda x$. ¿Es posible definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en $(0,0)$?

13.- Sea

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad y\leq 0 \quad \text{ó} \quad y\geq x^2,\\ 1 & \text{si} \quad 0<y<x^2.\end{cases}$$

Demostrar que $f(x,y)\longrightarrow 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x,y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es f continua en el origen?

14.- Demuéstrese que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1.$ (Sugerencia. Obsérvese que $0\leq 2|xy|\leq x^2+y^2$.)

15.- Utilizando razonamientos con funciones continuas, demuestra que los siguientes conjuntos son cerrados:

$$\begin{aligned} A &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 5\,x^2+6\,y^2=30\big\},\\ B &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1+\mathrm{sen}^2(x+y)\big\}.\end{aligned}$$

Demuestra también que los siguientes son abiertos:

$$\begin{aligned} C &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4\,x^6+2\,y^2+z^4<7\big\},\\ D &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\,y>1,\ \exp\big(x^2+y^2-5\big)<e\big\}.\end{aligned}$$

¿Son acotados o compactos algunos de los cuatro conjuntos considerados? ¿Cuáles?