

Números Complejos

1. Hallar la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

$$a) \frac{1-i}{1+i}, \quad b) \frac{(3-i)(2+i)}{3+i}, \quad c) \frac{(2-i)^2}{(3-i)^2}, \quad d) \sum_{k=1}^{101} i^k.$$

2. Calcular los valores

$$a) |(2+i)(1-i)^4|, \quad b) \left| \frac{1+\sqrt{3}i}{12-5i} \right|, \quad c) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^3.$$

3. Determinar razonadamente para qué números complejos z y w de módulo 1 se cumple $z + w = 2$.

¿Cuándo se cumple $z + w = 1$ con z y w de módulo 1?

4. Probar las fórmulas $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{c^2 + d^2}$ y $\frac{|z-i|^2}{\operatorname{Im}(z)} + 2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ para $z = \frac{ai+b}{ci+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 1$.

5. a) Demostrar que si dos enteros positivos n y m son suma de dos cuadrados, entonces su producto también es suma de dos cuadrados.

b) Usando que $13 = 2^2 + 3^2$ y $29 = 2^2 + 5^2$, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $377 = a^2 + b^2$.

6. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

$$a) 1+i, \quad b) \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad c) -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad d) -2-2i.$$

7. Calcular

$$a) \exp(\pi i/3), \quad b) \exp(-\pi i/4), \quad c) \exp(2019\pi i), \quad d) \exp(3^{2020}\pi i/2).$$

8. Calcular las partes real e imaginaria de cada uno de los siguientes números:

$$a) (1+i)^8, \quad b) \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \right)^{20}, \quad c) \left(\frac{1}{1-i} \right)^{2020} + \left(\frac{1}{1+i} \right)^{2020}.$$

9. Demostrar la siguiente identidad para x que no sea múltiplo entero de 2π y $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\operatorname{sen}((N+\frac{1}{2})x)}{\operatorname{sen}(x/2)}.$$

10. Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números:

$$a) 1+i, \quad b) 2-i, \quad c) 2+i, \quad d) 1+2i.$$

11. Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:

$$a) z^2 + 3iz - 3 + i, \quad b) 2z^2 + 4z + 2 + i.$$

12. Calcular los diferentes valores de:

$$a) \sqrt[3]{-8}, \quad b) \sqrt[3]{-i}, \quad c) \sqrt[4]{16i}, \quad d) (1+i)^n + (1-i)^n, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

13. Para $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, demostrar $\sum_{k=1}^n e^{2\pi ki/n} = 0$.

14. Sea $z = 2e^{2\pi i/5} + 1 + 2e^{-2\pi i/5}$. Demostrar $z^2 = 5$. Deducir de ello una expresión para $\cos(2\pi/5)$, que utiliza sólo raíces cuadradas de números naturales.