CÁLCULO I

Supremos e ínfimos

> Definición: Sea A un conjunto cualquiera, decimos que L es el supremo (resp. ínfimo) de A si es la menor (resp. mayor) de las cotas superiores (resp. inferiores).

> Axioma de Completitud de $\mathbb{R}$: Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A acotado superiormente (resp. inferiormente) $\Leftrightarrow \exists \sup A$ (resp. $\inf A$).

> Teorema: Sea $L = \sup A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists a \in A : L - \epsilon < a \leq L$.

Sucesiones

> Definición: Sea a_n una sucesión de números reales y $L \in \mathbb{R}$, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon, \forall n \geq N$. Si existe dicho límite se dice que la sucesión es **convergente**, de lo contrario es **divergente**.

> Definición: Sea a_n una sucesión de números reales y $c \in \mathbb{R}$, decimos que a_n está acotada $\Leftrightarrow \exists c : |a_n| < c, \forall n \in \mathbb{N}$.

> Teorema: Sea a_n un sucesión de número reales monótona y acotada $\Leftrightarrow$ $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$.

> Lema del Sándwich: Sean a_n, b_n y c_n sucesiones de números reales tales que $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}$, y $L \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Series

> Teorema: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : |a_n + a_{n+1} + ... + a_m| = |\sum_{k=n}^{\infty} a_n| < \epsilon, \forall m \geq n \geq N$.

> Corolario: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (condiciones necesaria de convergencia).

> Teorema: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge (resp. diverge) $\Leftrightarrow a > 1$ (resp. $a \leq 1$).

> Criterio de Cauchy: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos y $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (resp. diverge) $\Leftrightarrow \alpha < 1$ (resp. $\alpha > 1$).

> Criterio del cociente: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos y $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (resp. diverge) $\Leftrightarrow \alpha < 1$ (resp. $\alpha > 1$).

> Criterio de comparación de series: Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos no negativos tales que $b_n \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

> Criterio de comparación de series por paso al límite: Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos positivos y $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$:
>
> - $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq \infty \Rightarrow$ ambas series se comportan igual.
> - $\alpha = 0 \Rightarrow b_n \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
> - $\alpha = \infty \Rightarrow a_n \geq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

> Criterio de la integral: Sea $f(n)$ una función no negativa, monótona decreciente, definida en $[1, +\infty)$ y localmente integrable. $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

> Criterio de Leibniz: Sea b_n una sucesión decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ converge.

> Teorema: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

> Teorema: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen.

Funciones

> Definición: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua, decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

> Lema del Sándwich: Sean $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in D$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$.

> Teorema: $\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to a^-} f(x) :$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

> Definición: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $a \in D$, decimos que f es continua en $a \Leftrightarrow$ $\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

> Teorema de Bolzano: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

> Teorema de valores intermedios de Bolzano: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \leq t \leq f(b)$ (o $f(a) \geq t \geq f(b)$) $\Rightarrow \exists c \in [a, b] : f(c) = t$.

Derivadas

> Definición: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $a \in D$, decimos que la $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, siempre que dicho límite exista.

> Teorema: $\exists f'(a) \Rightarrow f$ es continua en a.

> Regla de la cadena: Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(I) \subset J$ y $a \in I$. Si $\exists f'(a), g'(a) \Rightarrow (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

> Teorema de la derivada de la función inversa: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función inyectiva, continua y derivable en $x_0 \in I$. Si $f'(x_0) \neq 0$ y $f(x_0) = y_0 \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

> Teorema del valor medio: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $a \in D$ un extremo relativo de f y un punto interior de $D \Rightarrow f'(a) = 0$, siempre que exista.

> Teorema de Rolle: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

> Teorema del valor medio de Lagrange: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

> Definición: Sea D un intervalo abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función derivable n veces en $a \in D$. Se define el polinomio de Taylor de f de grado n en a como:
>
> $$P_{n,a,f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + ... + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

> Proposición: Si f tiene n derivadas en a, se cumple que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

> Corolario: Si f tiene n derivadas en $a \Rightarrow f(x) = P_{n,a,f}(x) + \sigma((x-a)^n), x \to a$.

Integrales

> Teorema: Sea f una función continua en $[a, b] \Leftrightarrow \exists \int_a^b f$.

> Teorema: Sea f una función monótona en $[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f$.

> Teorema: Sea f una función integrable en $[a,b] \Leftrightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \forall c \in (a,b)$.

> Teorema Fundamental del Cálculo: Sea f una función integrable en $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f$ es continua. Si $f$es continua en $c \in (a,b) \Rightarrow \exists F'(c) = f(c)$.

> Regla de Barrow: Sea f una función continua en $[a,b]$ y $f_0'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f = f_0(b) - f_0(a)$.

> Regla de Leibniz: Sea $F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)dt$ una función continua y derivable $\Rightarrow F'(x) = f(h(x))h'(x)$.

> Definición: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, decimos que $\int_a^b f$ es impropia si f no está acotada en (a,b) o si $a = -\infty$ o $b = +\infty$ (pueden darse ambos a la vez).

> Definición: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $\int_a^b f$ su integral impropia, decimos que $\int_a^b f(t)dt$ converge (resp. diverge) $\Leftrightarrow \lim_{z\to b} \int_a^z f(t)dt < \infty$ (resp. $= \infty$).

> Teorema: La integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ (resp. $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$) converge $\Leftrightarrow p < 1$ (resp. $p > 1$).