CÁLCULO 2: GRADO EN MATEMÁTICAS Y DOBLE GRADO MAT/INF.

SOLUCIONES:

1) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad de f en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Encuentra, en el caso de que existan, las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

(c) Determina si f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

(a) En los puntos $(x,y) \neq (0,0)$ la función $f(x,y)$ viene dada por un cociente de dos funciones polinómicas cuyo denominador no se anula, por lo tanto $f(x,y)$ es continua en todos esos puntos. Por otro lado,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

no existe. Para ello basta comprobar que si nos acercamos a $(0,0)$ a través de parábolas de la forma $y = mx^2$, con $m \in \mathbb{R}$ entonces el límite depende de m:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3mx^4}{x^4 + m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3m}{1+m^2} = \frac{3m}{1+m^2}.$$

En consecuencia f es continua solo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario. Entonces la derivada direccional en $(0,0)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu_1, 0+tu_2)) - f(0,0)}{t},$$

si el límite existe. Veamos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu_1, 0+tu_2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^3u_1^2u_2}{t(t^4u_1^4 + t^2u_2^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^3u_1^2u_2}{t^3(t^2u_1^4 + u_2^2)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3u_1^2u_2}{t^2u_1^4 + u_2^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } u_2 = 0; \\ \frac{3u_1^2}{u_2} & \text{si } u_2 \neq 0. \end{cases}$$

En consecuencia, existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

(c) En los puntos $(x,y) \neq (0,0)$, la función f es cociente de funciones polinómicas con denominador no nulo, por lo tanto es diferenciable en todos esos puntos. En $(0,0)$ la función ni siquiera es continua, por lo tanto tampoco es diferenciable.

2) La ecuación $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$ describe y como una función implícita de x. Nuestro objetivo es calcular dy/dx.

a) Supongamos que $F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4$ y que $y = f(x)$. Si $G = F(x, f(x))$ encuentra la expresión de dG/dx en función de $f'(x)$.

b) Comprueba que los puntos $(8, 4)$ y $(-8, 4)$ cumplen la condición $F(x, y) = 0$. Utiliza la expresión obtenida en (a) para calcular dy/dx en dichos puntos.

(a) Observa que G es el resultado de la composición:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad h \quad} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\qquad F \qquad} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & (x, f(x)) & \longrightarrow & F(x, f(x)), \end{array}$$

por lo que $G = F \circ h$. Aplicando la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{dG}{dx} = D(F \circ h) = D(F(h(x))) \cdot D(h(x)) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} =$$

$$(-2x, 3y^2 + 2y - 5) \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} = -2x + (3y^2 + 2y - 5)f'(x) = -2x + (3f(x)^2 + 2f(x) - 5)f'(x),$$

donde, para la última igualdad hemos usado que $y = f(x)$.

(b) Recordemos que $F(x, y) = 0$ describe y como función implícita de x. Por lo tanto, para los pares (x, y) para los que se cumple esa ecuación tenemos que

$$\frac{dG}{dx} = -2x + (3y^2 + 2y - 5)f'(x) = -2x + (3f(x)^2 + 2f(x) - 5)f'(x) = 0,$$

por lo que, despejando, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{2x}{3f(x)^2 + 2f(x) - 5}$$

siempre que el denominador no se anule. Como $F(8, 4) = F(-8, 4) = 0$, podemos reemplazar en la anterior exrepsión para obtener que:

$$f'(8) = \frac{2 \cdot 8}{3f(8)^2 + 2f(8) - 5} = \frac{16}{3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 5} = \frac{16}{51}.$$

Y de modo similar,

$$f'(-8) = \frac{-2 \cdot 8}{3f(-8)^2 + 2f(-8) - 5} = \frac{-16}{3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 5} = -\frac{16}{51}.$$

3) Se considera la función escalar $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xz$, definida sobre la región $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1\}$.

(a) Demostrar que D es una región compacta.

(b) Justificar por qué la función F alcanza su máximo y mínimo absolutos en D y calcularlos.

(a) Tenemos que probar que D es cerrado y acotado. Para ver que D es acotado basta observar que si $(x,y,z) \in D$ entonces,

$$0 \leq \|(x,y,z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq= x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1.$$

Por lo tanto, $D \subset \overline{B((\mathbf{0},1))}$, donde $\overline{B((\mathbf{0},1))}$ denota la clausura de la bola unidad con centro el origen $(0,0,0)$.

Probaremos ahora que D es cerrado. Observa que la función:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2 + y^2 + 2z^2 \end{array}$$

es continua, que $[0,1] \subset \mathbb{R}$ es cerrado y que $D = f^{-1}([0,1])$. Como la preimagen de un cerrado por una función continua es de nuevo un conjunto cerrado conluimos que D es cerrado.

Como D es cerrado y acotado es compacto.

(b) La función F es continua y D es un compacto, por lo tanto $F(D)$ es también compacto. En consecuencia F alcanza valores máximo y mínimo absolutos en D.

Para encontrar los extremos absolutos de F en D distinguimos los siguientes casos:

Interior de D. Aquí comprobaremos si F tiene puntos críticos, resolviendo el sistema:

$$\nabla F = (0,0,0), \quad \text{i.e.,} \quad 2x + 4z = 0; \quad -2y = 0; \quad 4z + 4x = 0,$$

de donde concluímos que el único punto crítico de F es $(0,0,0)$. Aquí podemos usar la matriz Hessiana de F para comprobar si en $(0,0,0)$ se alcanza un extremo relativo (si hacéis la cuenta os saldrá que es un punto silla) o también podemos esperar a comprobar qué ocurre si analizamos los puntos en el borde de D.

Borde de D. Por el Teorema de los multiplicadores de Lagrange, para localizar candidatos a extremos absolutos de F debemos resolver el sistema:

$$\nabla F = \lambda \nabla G; \quad G(x,y,z) = 1$$

donde $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ y λ es una variable, i.e.,

$$\begin{aligned} 2x + 4z &= \lambda 2x \\ -2y &= \lambda 2y \\ 4z + 4x &= \lambda 4z \\ x^2 + y^2 + 2z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Estudiando la segunda ecuación, distinguimos dos casos:

(i) Si $y \neq 0$, entonces $\lambda = -1$. Usando la primera y la tercera concluimos que $x = z = 0$ y de la cuarta obtenemos que $y = 1, -1$. Conclusión: obtenemos dos puntos: $(0,1,0)$ y $(0,-1,0)$.

(i) Si $y = 0$ el único modo de que el sistema formado por la primera y la tercera tenga una solución no trivial es que $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ ó $\lambda = 1 - \sqrt{2}$. En cualquiera de los dos casos se tiene que $x = (\lambda - 1)z$ y usando la última ecuación obtenemos otros cuatro puntos: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

Comparando los valores de F en los siete puntos críticos obtenidos concluimos que F alcanza su valor mínimo en los puntos $(0,1,0)$ y $(0,-1,0)$, donde toma el valor -1 y alcanza su valor máximo en los puntos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{2})$ y $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ donde el valor de F es $1 + \sqrt{2}$.

4) Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ al mover una partícula desde $(-1,0)$ hasta $(1,0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$.¿Qué elipse (es decir, qué valor de b) hace mínimo este trabajo?

Parametrizamos la parte superior de la elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$, i.e., $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & [0,\pi] & \to \mathbb{R}^2 & \\ & t & \mapsto & (\cos t, b \operatorname{sen} t). \end{array}$$

Observa que con esta orientación nos movemos del punto $(1,0)$ al $(-1,0)$ luego el trabajo realizado es:

$$-\int_\sigma \vec{F} ds = -\int_0^\pi (3b^2 \operatorname{sen}^2 t + 2, 16 \cos t) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ b \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi (3b^2 \operatorname{sen}^3 t + 2 \operatorname{sen} t - 16b \cos^2 t) dt =$$

$$= 4b^2 - 8\pi b + 4.$$

Para calcular el valor de b que minimiza el trabajo, basta calcular el valor mínimo de la función

$$f(b) = 4b^2 - 8\pi b + 4.$$

Como $f'(b) = 8b - 8\pi$, el valor mínimo se alcanza para $b = \pi$.

5) Sea S la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y del semicono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con $x^2+y^2 \leq 1/2$.

(a) Dibujar la superficie S.

(b) Enunciar el Teorema de Gauss o de la divergencia y usarlo para calcular $\int_S \vec{F} \cdot dS$ (con la orientación inducida por la normal exterior) donde $\vec{F}(x,y,z) = (xz + e^{y \sin z}, 2yz + \cos(xz), -z^2 + e^x \cos y)$.

(b) Por el Teorema de la divergencia, tenemos que si parametrizamos S según la orientación dada por su normal exterior entonces

$$\int_S \vec{F} \cdot dS = \int\int\int_\Omega \nabla \cdot \vec{F} \cdot dV,$$

donde Ω es el sólido delimitado por S. Ahora bien,

$$\nabla \cdot \vec{F} = z,$$

por lo que,

$$\int_S \vec{F} \cdot dS = \int\int\int_\Omega z \cdot dzdydx.$$

Podemos describir el sólido Ω usando coordenadas cilíndricas,

$$x = r\cos\theta; \quad y = r \operatorname{sen}\theta; \quad z = z,$$

con

$$0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad r \leq z \leq \sqrt{1-r^2},$$

donde hemos usado que $1 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1/2$. Por lo tanto,

$$\int_S \vec{F} \cdot dS = \int\int\int_\Omega z \cdot dzdydx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} zr \cdot dzdrd\theta = \frac{\pi}{8}.$$