TEMA 2b: Diferenciación en varias variables
La derivada en $\mathbb{R}$

Como motivación para la definición de derivada de funciones en $\mathbb{R}^n$, recordamos el caso de $\mathbb{R}$ (que es el caso $n = 1$).

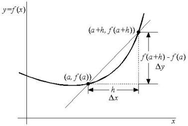
Definición

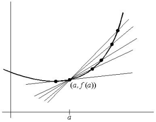
La derivada de la función f en el punto x_0, denotada $f'(x_0)$, es

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre que ese límite exista.

La derivada es la pendiente de la tangente





Ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$: $\quad y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Derivadas parciales de funciones de varias variables

Definición

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces la **derivada parcial** *j-ésima de f, $\partial f/\partial x_i$, se define como la derivada de f respecto a la variable x_j manteniendo el resto de variables fijas:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es vectorial, entonces $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, y podemos hablar de la **derivada parcial** *$\partial f_j/\partial x_i$ de la componente j-ésima de f con respecto a la variable x_i.*

En forma notacional abreviada, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ denota el vector j-ésimo de la base canónica, entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t}, \qquad \text{también denotado por } f_{x_j}(x_0),$$

cuando dicho límite exista.

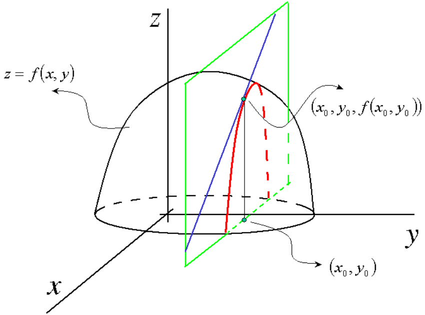
A efectos prácticos, una derivada parcial con respecto a una variable x_j, se calcula considerando el resto de variables como constantes, y derivando con respecto a la x_i. Es decir, si definimos la función auxiliar $H(t) = f(x_0 + te_j)$ como la restricción de f a la recta que pasa por x_0 en la dirección del eje X_j y con $H(0) = f(x_0)$, entonces $H'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$.

Interpretación geométrica de las derivadas parciales en $\mathbb{R}^2$

Intersecamos la superficie descrita por la gráfica de la función $z = f(x, y)$ (en negro) con el plano $y = y_0$ (en verde), y obtenemos la curva C (en rojo).

La derivada parcial de f respecto de x en (x_0, y_0), $f_x(x_0, y_0)$, es la pendiente de la recta tangente a C en el punto (x_0, y_0, z_0) (en azul) en la dirección del eje OX.

Observación: Interpretación análoga para f_y, intercambiando el papel de x e y.



Ejemplo: Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ para las funciones:

$$(a)\ f(x, y) = x^2 + y^4 \qquad (b)\ f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La matriz jacobiana

- Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $f = (f_1, \dots, f_n)$ son sus funciones coordenadas, entonces se define la matriz jacobiana como la matriz de dimensiones $m \times n$

$$\mathbf{D}f(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

donde todas esas parciales están calculadas en el punto x_0.

Ejemplo:

Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.

(b) $f(x,y) = (\mathrm{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(c) $f(x,y,z) = z^2\, e^x \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(d) $f(x) = (e^x \,\mathrm{sen}\, x, e^x \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

La matriz jacobiana (cont.)

La matriz jacobiana $\mathbf{D}f(x_0)$ tiene

- tantas filas como funciones coordenadas f_i en f;
- tantas columnas como variables x_j;
- la entrada en la i-ésima fila y j-ésima columna es la derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ evaluada en x_0.

Casos particulares:

1. Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (función escalar de n variables) entonces $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y denotamos
$$\mathbf{D}f(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$
En este caso, $\nabla f(x_0)$ se denomina **gradiente de f en x_0**.

2. Si $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (función vectorial de una variable) entonces a $f = (f_1, \ldots, f_m)$ se le denomina **trayectoria** y denotamos
$$\mathbf{D}f(x_0) = f'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)).$$
A este vector, que debería ser columna de acuerdo con la notación inicial de $\mathbf{D}f(x_0)$, lo denominamos vector derivada o vector velocidad de la trayectoria y resulta ser tangente a la **gráfica** de la función.

Definición de diferenciabilidad de $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definición

$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es **diferenciable** *en $(x_0, y_0) \in U$ si $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (x_0, y_0) y si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Significado: El plano $z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ representa la mejor aproximación con un plano a la gráfica de la función en el entorno de dicho punto.

De hecho es el único plano con dicha propiedad:

Proposición

Si $\pi(x,y) = a + b(x-x_0) + c(y-y_0)$ verifica $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \Pi(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$, entonces $a = f(x_0,y_0), b = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), c = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ y f es por tanto diferenciable.

Deam.: La demostración es similar al caso de una variable.

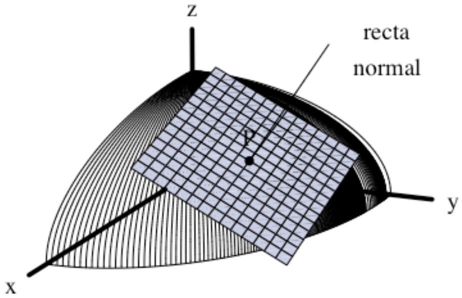
El plano tangente

Si la función f es diferenciable en (x_0, y_0), definimos el **plano tangente** a la gráfica de $z = f(x, y)$ en dicho punto como el definido por:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,.$$

Es el plano que:

- pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$;
- tiene vector normal $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\, -1\right)$.
- satisface la propiedad de la página anterior.



Muy importante: Una función puede tener derivadas parciales y **no ser diferenciable**.

De hecho, puede tener derivadas parciales y ni siquiera ser continua.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funcion definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \text{ ó } y = 0; \\ 1, & \text{si } x \neq 0, \text{ e } y \neq 0. \end{cases}$$

f tiene parciales $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, pero en cualquier entorno de $(0,0)$ hay puntos (x,y) con $f(x,y) = 1$ y puntos con $f(x,y) = 0$ (con lo que no es ni siquiera continua en $(0,0)$).

Definición de diferenciabilidad de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Con más generalidad, dada

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

se dice que

Definición

$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es* **diferenciable** *en* $x_0 \in U$ *si:*

- *Las derivadas parciales de todas las* $f_1, \dots, f_m$ *existen en* x_0*;*
- *para la matriz de* m *filas y* n *columnas* $\mathbf{D}f(x_0)$ *formada por esas parciales, se tiene que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - \mathbf{D}f(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

- Recordamos que $\mathbf{D}f(x_0)$ es la **matriz jacobiana** de f en x_0, también llamada **matriz derivada** o **matriz diferencial** de f en x_0.
- Por las desigualdades de las normas, observamos que una función vectorial es diferenciable si y solo si lo son todas sus funciones coordenadas.
- Además, si f es una trayectoria (es decir depende de una única variable) y sus funciones coordenadas tienen derivadas, entonces es automáticamente diferenciable.

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$. Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Dem.: La demostración (vista en clase) es semejante a la que vimos en Cálculo I para funciones de una variable.

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$. Si existen todas las derivadas parciales, $\partial f_j / \partial x_i$, de f y son continuas en un entorno de x_0, entonces f es diferenciable en x_0.

Se tiene así *Derivadas parciales continuas de f $\Rightarrow$ Diferenciabilidad de f $\Rightarrow$ Continuidad y existencia de derivadas parciales de f*.

Pero las implicaciones inversas no son ciertas en general.

Dem.: La demostración (vista en clase) utiliza el Teorema del Valor Medio en cada dirección paralela a los ejes de coordenadas en términos de la derivada parcial correspondiente.

Propiedades de la matriz jacobiana $\mathbf{D}f(x_0)$

Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciables en x_0, entonces:

(1) $\mathbf{D}(cf)(x_0) = c\mathbf{D}f(x_0)$.

(2) $\mathbf{D}(f+g)(x_0) = \mathbf{D}f(x_0) + \mathbf{D}g(x_0)$.

(3) Si $m = 1$, $\quad \mathbf{D}(fg)(x_0) = g(x_0)\mathbf{D}f(x_0) + f(x_0)\mathbf{D}g(x_0)$.

(4) Si $m = 1, g(x_0) \neq 0$, $\quad \mathbf{D}(f/g)(x_0) = \dfrac{g(x_0)\mathbf{D}f(x_0) - f(x_0)\mathbf{D}g(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Esto se sigue simplemente del resultado correspondiente para cada una de las derivadas parciales que aparecen

Regla de la cadena

Teorema

Sean

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

funciones tal que

- f *es diferenciable en* $x_0 \in U$*;*
- g *es diferenciable en* $y_0 = f(x_0)$*;*
- $f(U) \subset V$*, así que la función* $h = g \circ f$ *está definida.*

Entonces la composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *es diferenciable en* x_0*, y su matriz diferencial viene dada por*

$$\mathbf{D}\big(g \circ f\big)(x_0) = \mathbf{D}g(y_0) \cdot \mathbf{D}f(x_0)\,,$$

*donde el lado derecho es un producto de matrices o, también, la composición de las funciones lineales que representan.**

* Si $T(x) = Ax$, $S(y) = By$ entonces $S \circ T(x) = B \cdot A(x)$.

Primer caso de la regla de la cadena

Sean

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{(una trayectoria)} \qquad g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Denotamos

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad g = g(x, y, z)$$

Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función $h(t) = g(f(t)) = g(x(t), y(t), z(t))$, entonces

$$h'(t_0) = \frac{d(g \circ f)}{dt}(t_0) = \nabla g(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \cdot f'(t_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}$$

donde las parciales de g están evaluadas en el punto $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Es decir,

$$\frac{d}{dt} g\Big(x(t), y(t), z(t)\Big) = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,.$$

NOTA.: Todos los demás casos de la Regla de la Cadena se deducen de este, a través del significado de las distintas derivadas parciales.

Demostración del primer caso de la regla de la cadena

Hacemos la demostración para el caso más general en dimensión m:

Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, (una trayectoria) y $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones diferenciables en $t = t_0$ y en $y_0 = f(t_0)$, respectivamente. Llamamos $y_j(t)$ a las funciones coordenadas de f, es decir, $f(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$ y sea $h(t) = (g \circ f)(t) = g(f(t))$. Por definición,

$$\begin{aligned} h'(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{g(f(t)) - g(f(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{g(f(t)) - g(f(t_0)) - \nabla g(y_0) \cdot (f(t) - f(t_0))}{t - t_0} + \lim_{t \to t_0} \frac{\nabla g(y_0) \cdot (f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Entonces, con el cambio de variables $y = f(t)$ y usando que $y \to y_0$ cuando $t \to t_0$, tenemos

$$h'(t_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0) - \nabla g(y_0) \cdot (y - y_0)}{\|y - y_0\|} \lim_{t \to t_0} \frac{\|f(t) - f(t_0)\|}{t - t_0} + \nabla g(y_0) \cdot \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

$$= 0 \cdot \|f'(t_0\| + \nabla g(y_0) \cdot f'(t_0) = \nabla g(y_0) \cdot f'(t_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(y_0) \frac{dy_j}{dt}(t_0),$$

tal y como queríamos. $\square$

El caso en que hubiera sucesiones en la variable t convergiendo a t_0 que cumplieran $f(t) - f(t_0) = y - y_0 = 0$, y que impedirían el argumento anterior, se resuelve de forma elemental tal y como se hizo en dimensión $m = 1$.

Segundo caso de la regla de la cadena

Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la función $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = g(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$, entonces

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Para probar cada una de estas tres identidades, basta con fijar dos de las variables y utilizar el resultado de la página anterior para la restante: por ejemplo, en la primera, si ponemos $H(x) = h(x, y_0, z_0) = g(u(x, y_0, z_0), v(x, y_0, z_0), w(x, y_0, z_0))$ ya estamos en la situación vista anteriormente.

Derivada direccional

Definición

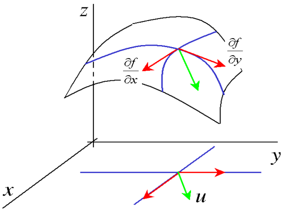
Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario (esto es, un vector $\vec{u}$ con norma $\|\vec{u}\|$=1).

Se llama la **derivada direccional** *de f en x_0* **en la dirección** *del vector $\vec{u}$ a*

$$\mathbf{D}_{\vec{u}} f(x_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + t\vec{u})\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t}.$$

- Representa *la tasa de cambio (pendiente) de la función en la dirección de dicho vector*.
- Cada derivada parcial resulta ser la derivada direccional en la dirección de un vector de la base canónica (ver siguiente transparencia)
- Si $\|\vec{u}\| \neq 1$, $\mathbf{D}_{\vec{u}} f(x_0)$ es la **derivada según el vector** $\vec{u}$.

Derivada direccional y parciales



- Si $f : U \to \mathbb{R}$ y $v = \mathbf{e}_i$ es un vector de la base canónica,

$$\mathbf{D}_{\vec{e}_i} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{\mathbf{e}}_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Teorema (Relación entre gradiente y derivada direccional)

Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in U$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario, entonces

$$\mathbf{D}_{\vec{u}} f(x_0) = < \nabla f(x_0), \vec{u} >$$

Dem.: Es una consecuencia de la regla de la cadena. Definimos $H(t) = f(x_0 + t\vec{u})$. Entonces H es la composición de la función trayectoria $g(t) = x_0 + t\vec{u}$ con f. Por tanto, como $g'(t) = \vec{u}, \forall t$, se tiene

$$\mathbf{D}_{\vec{u}} f(x_0) = H'(0) = < \nabla f(x_0), g'(0) > = < \nabla f(x_0), \vec{u} >, \qquad q.e.d.$$

El gradiente apunta en la dirección de mayor crecimiento

Debido al resultado anterior, se tiene que por Cauchy-Schwarz

$$|\mathbf{D}_{\vec{u}} f(x_0)| = |< \nabla f(x_0), \vec{u} >| \leq |\nabla f(x_0)| \, .$$

En particular,

$$-|\nabla f(x_0)| \leq \mathbf{D}_{\vec{u}} f(x_0) \leq |\nabla f(x_0)|$$

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funcion diferenciable en $x_0 \in U$. Supongamos que $\nabla f(x_0) \neq 0$. Entonces de entre todas las direcciones unitarias $\vec{v}$, la derivada direccional de f es **máxima** *cuando $\vec{v_1} = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$.*
Análogamente, la dirección unitaria en la que la derivada direccional de f en x_0 es **mínima**, *es $\vec{v_2} = -\dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$.*

Dem.: Basta observar que $\mathbf{D}_{\vec{v_1}} f(x_0) = |\nabla f(x_0)|$, mientras que $\mathbf{D}_{\vec{v_2}} f(x_0) = -|\nabla f(x_0)|$.

El gradiente es ortogonal a las superficies de nivel

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $a \in \mathbb{R}$, la superficie de nivel de f correspondiente a a es

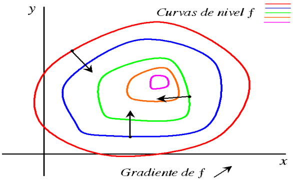
$$S_a = \{\, x \in U \,:\, f(x) = a \,\}\,.$$

Teorema

Si $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ es una curva contenida en S_a (y, por tanto, $f(c(t)) \equiv a$ para todo t), con $c(0) = x_0$, entonces

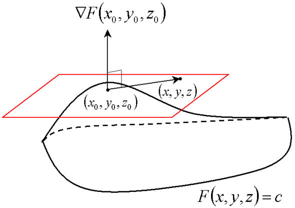
$$\langle \nabla f(x_0), c'(0) \rangle = 0$$

La demostración se deduce de nuevo de la regla de la cadena.
Como el vector $c'(0)$ es tangente a la curva (y por tanto a la superficie), la dirección ∇f es perpendicular a los conjuntos de nivel en cada punto.



Una consecuencia de lo anterior: Plano tangente a una superficie de nivel en $\mathbb{R}^3$

Supongamos $f(x_0, y_0, z_0) = a$, y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. La ecuación del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) a la superficie de nivel $f(x, y, z) = a$, es



$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

Más explícitamente,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(z - z_0) = 0$$

Ejemplo: Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 + y^3 - 6xy$, en el punto $(1, 2, -3)$.