TEMA 4b: Teoremas y aplicaciones de la derivada.
La derivada en un máximo (o mínimo)

Definición (Máximo y mínimo local)

Se dice que f tiene un **máximo** *(respect.* **mínimo***)* **local** *(o* **relativo***)en el punto c de su dominio, $\mathrm{dom}(f)$, si existe un intervalo abierto $I \subset \mathrm{dom}(f)$ que contiene a c en su interior tal que $f(x) \leq f(c)$ (respect. $f(x) \geq f(c)$) $\forall x \in I$.*

Lema

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene un máximo (o mínimo) en un punto c del interior del intervalo ($a < c < b$), y es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.

Dem.: Supongamos que f tiene un máximo en $x = c$. Entonces $f(c + h) - f(c) \leq 0$ para todo h, y por tanto

- si $h > 0$, entonces $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$;
- si $h < 0$, entonces $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$.

La primera implica que $f'_+(c) \leq 0$ y la segunda que $f'_-(c) \geq 0$. Como $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$, y $f'(c)$ tiene que ser cero.

(Si f tiene un mínimo, la demostración es similar).

Maximos y mínimos de una función en un intervalo $[a, b]$.

Definición (Puntos críticosl)

Dada f derivable, se denominan puntos críticos a todos aquellos valores c de su dominio donde la derivada se anula ($f'(c) = 0$).

Para hallar los valores máximos y mínimos de una función derivable en un intervalo $[a, b]$, hay que tener en cuenta no sólo los máximos y mínimos relativos, sino además los extremos del intervalo.

Procedimiento: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable, su máximo y mínimo valor se hallan siguiendo estos pasos:

1. Se calcula f en los extremos a y b; esto da $f(a)$ y $f(b)$;
2. se hallan los puntos críticos de f en $[a, b]$, lo que da ciertos valores $c_1, \dots c_n$ en $[a, b]$;
3. se calculan $f(c_1), \dots f(c_n)$;
4. el máximo en $[a, b]$ de f es el mayor valor entre $f(a), f(b), f(c_1), \dots f(c_n)$; de forma semejante se determina el mínimo.

Teorema de Rolle

Teorema (Teorema de Rolle)

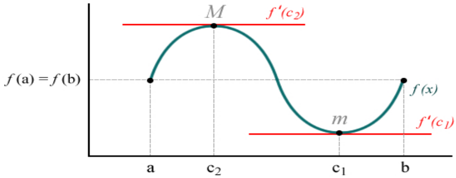
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto interior $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración.

1. Si $f(x) = k$ contante, entonces $f'(x) = 0$ para todo x.

2. Si $f(x) > f(a)$ para algún x, entonces $\exists\, x_M \in (a, b)$ tal que $f(x_M)$ es el máximo de f en $[a, b]$. Como $f(x_M) > f(a) = f(b)$, $x_M \in (a, b)$, f es derivable en x_M y por lo anterior, $f'(x_M) = 0$.

3. Si $f(x) < f(a)$, entonces se hace de forma similar al caso anterior, pero cambiando el máximo por un mínimo. (Ver gráfica) □



Teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy

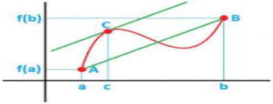
Teorema (Lagrange)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a,b]$ *y diferenciable en* (a,b). *Entonces existe un* $c \in (a,b)$ *tal que* $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dem.: Esto se demuestra usando el teorema de Rolle para la función auxiliar

$$h(x) = [f(b)-f(a)]\,x - [b-a]\,f(x),$$

ya que $h(a) = h(b)$.



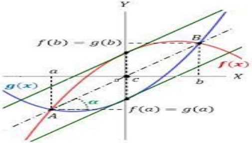
Teorema (Cauchy)

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $[a,b]$, *diferenciables en* (a,b) *y* $g'(x) \neq 0, \forall x$. *Entonces existe un* $c \in (a,b)$ *tal que* $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dem.: Al igual que antes se usa el teorema de Rolle pero ahora con la función auxiliar

$$h(x) = [f(b)-f(a)]\,g(x) - [g(b)-g(a)]\,f(x).$$

De nuevo h(a)=h(b)



La regla de L'Hopital

Teorema

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables donde $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ son ambas simultáneamente 0, o ambas simultáneamente ∞. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que el límite de la derecha exista.

Dem.: es una consecuencia del TVM de Cauchy. $\square$

****

En el límite anterior, a puede ser, además de un número, ∞ o $-\infty$.

Este límite permite resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

El resto de indeterminaciones se puede resolver usando este método con algún tratamiento previo:

- En general, indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$ pueden resolverse manipulando algebraicamente el límite;
- Las indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0 y 1^∞ pueden resolverse tomando previamente logaritmos.

Crecimiento y decrecimiento de funciones

Definición

Una función f se dice **creciente** *en un intervalo I si para todo $x \leq y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$, y se dice* **decreciente** *si para todo $x \leq y$ se tiene que $f(x) \geq f(y)$.*

De hecho f es creciente $\iff \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$; es decreciente $\iff \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0, \forall x, y \in I$.

Teorema

Sea I un intervalo y supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en todo I. Entonces,

- $f'(x) \geq 0, \forall x \in I \iff f$ *es creciente en I . Si $f'(x) > 0, \forall x \in I$, f es* **estrictamente** *creciente en I.*
- $f'(x) \leq 0, \forall x \in I \iff f$ *es decreciente en I . Si $f'(x) < 0, \forall x \in I$, f es* **estrictamente** *decreciente en I.*

Dem.: Es una consecuencia del TVM de Lagrange: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(z)$, para un z intermedio. □

Nota: Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo

- se hallan los puntos en que $f'(x) = 0$;
- se divide el intervalo en subintervalos usando los puntos hallados en el apartado anterior y el dominio de f;
- se estudia el signo de f' en cada uno de los subintervalos anteriores; para esto basta tomar un punto del subintervalo y evaluar f' sobre ese punto.

Puntos críticos y extremos locales

Si nos queremos referir indistintamente a máximos o mínimos locales de una función, usamos el término *extremos locales*.

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable. Un punto crítico de f es un punto c del intervalo I donde $f'(c) = 0$.

Nota: Si la función f es derivable, entonces $f'(c) = 0$ en un máximo o en un mínimo local. El recíproco no es cierto. Ejemplo: $f(x) = x^3$ cumple $f'(0) = 0$ pero 0 no es un extremo local.

Los puntos críticos pueden ser:

- máximos locales
- mínimos locales
- ninguno de los dos (puntos de silla)

Criterio de la primera derivada para los extremos locales

Sirve para decidir si un punto crítico es o no extremo local. La razón es que si la función pasa de ser creciente a ser decreciente en a entonces se alcanza un máximo local y si pasa de ser decreciente a ser creciente, se alcanza un mínimo local.

Teorema

Supongamos que c es un punto crítico de una función f derivable (i.e., $f'(c)=0$).

1. *Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c, (ya que pasa de creciente a decreciente).*
2. *si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c, (ya que pasa de decreciente a creciente).*
3. *si f' no cambia de signo en c, entonces f no tiene ni máximo local, ni mínimo local en c (punto de silla).*

Criterio de la segunda derivada para los extremos locales

Otro criterio que sirve para decidir el carácter de un punto crítico es el siguiente:

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces, y $a \in I$ un punto crítico de f. Entonces

1. *si $f''(a) < 0$, a es un máximo local de f;*
2. *si $f''(a) > 0$, a es un mínimo local de f;*
3. *si $f''(a) = 0$, no se puede decidir.*

Dem.: En el primer caso, los cocientes incrementales de f' (usando que $f'(a) = 0$)

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \frac{f'(x)}{x - a} \tag{1}$$

son negativos en un entorno de a, luego f' es positiva a la izquierda de a (f crece) y negativa a su derecha (f decrece).

En el segundo caso, los cocientes incrementales (1) de f' son positivos en un entorno de a, luego f' es negativa a la izquierda de a (f decrece) y positiva a su derecha (f crece).

En ambos casos se puede aplicar entonces el criterio de la primera derivada.

Concavidad y convexidad

Definición

- *La función f se dice convexa si su primera derivada f' es creciente. Geométricamente esto se traduce en que la gráfica de f parece un valle.*
- *La función f se dice cóncava si su primera derivada f' es decreciente (y la gráfica de f parece una montaña).*

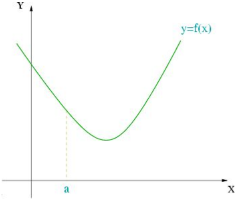


Figura: Una función convexa.

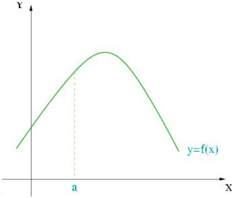


Figura: Una función cóncava.

Concavidad y convexidad (cont.)

Un punto c donde la función cambia de concava a convexa o viceversa, se llama **un punto de inflexión**

Para hallar los intervalos de concavidad y convexidad de una función con dos derivadas en un intervalo (que puede ser $\mathbb{R}$):

- se hallan los puntos en que $f''(x) = 0$;
- se divide el intervalo I en subintervalos usando los puntos hallados en el apartado anterior y el dominio de f;
- se estudia el signo de f'' en cada uno de los subintervalos anteriores; en donde sea positivo hay convexidad, en donde sea negativo, concavidad.

Gráficas de funciones

Para hallar la gráfica de una función conviene seguir los siguientes pasos:

1. **Dominio:** Hallar el dominio de f, esto es, los $x \in \mathbb{R}$ para los que f esté bien definida.

2. **Simetrías de la función:** Hay que ver si la función cumple alguna de las siguientes posibilidades:

   a) Simetría respecto al eje OY: para esto, examinamos si se cumple que $f(x) = f(-x)$;

   b) Simetría respecto al origen: examinamos si se cumple que $f(x) = -f(-x)$.

3. **Cortes con los ejes:**

   a) Corte con el eje X: hallamos para qué x_i's se tiene que $f(x_i) = 0$, y los puntos de corte serán $(x_i, 0)$;

   b) Corte con el eje Y: el punto $(0, f(0))$.

(continúa en la siguiente página)

4. **Asíntotas:**

a) Horizontales: Para esto hallamos (si existen) los límites

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = B$$

y las asíntotas serán $y = A$ e $y = B$ (si existen).

b) Verticales: Buscamos los puntos x_i que no están en el dominio y estudiamos los límites

$$\lim_{x\to {x_i}^-} f(x), \qquad \lim_{x\to {x_i}^+} f(x)$$

Si alguno de ellos es $\pm\infty$, entonces $x = x_i$ es una asíntota.

c) Oblicuas: Para hallar éstas (si existen) hay que calcular los límites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1, \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - m_1 x) = b_1$$

que (si existen ambos) darían la asíntota (por la derecha) $y = m_1 \cdot x + b_1$, y los límites

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - m_2 x) = b_2$$

que daría la asíntota (por la izquierda) $y = m_2 \cdot x + b_2$.

(continúa en la siguiente página)

Gráficas de funciones (cont.)

5. **Puntos críticos:** Estos se obtiene resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$.

6. **Intervalos de crecimiento y decrecimiento:** Se obtiene como se indicó anteriormente: se subdivide la recta real en subintervalos con los puntos críticos y aquellos no en el dominio, y se examina el signo de $f'(x)$ en cada uno; en los positivos, f crece, en los negativos f decrece.

7. **Extremos locales:** Se examinan los puntos críticos y se termina su carácter usando bien el primer o el segundo criterio de la derivada;

8. **Intervalos de concavidad y convexidad:** Se subdivide la recta real en subintervalos con los puntos donde $f''(x) = 0$ y aquellos no en el dominio, y se examina el signo de $f''(x)$ en cada uno; en los positivos, f es convexa, en los negativos f es cóncava.

9. **Puntos de inflexión:** Los puntos donde $f''(x) = 0$ y bien f'' pasa de positiva a negativa, o viceversa.