Tema 1. Introducción al Espacio Euclídeo

1.0. Contenidos y documentación

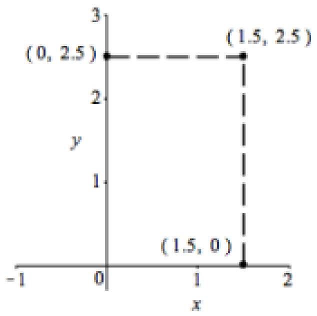
https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/44a37ef1-9a0b-4f1b-bdca-25b81c101162/U1_EspacioEuclideo.pdf

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/48055de3-4cc7-4b20-aae4-540cf6e6ddbc/H1_EspacioEuclideo.pdf

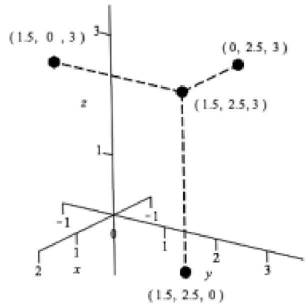
1.1. Vectores en $\mathbb{R}^n$

Definición. La ***recta real*** $\mathbb{R}$ *es el conjunto de números* $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.
Definición. El ***plano cartesiano*** $\mathbb{R}^n$ *o* ***espacio n-dimensional*** $\mathbb{R}^n$ *es el conjunto de puntos de la forma* $(x_1, x_2, ..., x_n)$*, con* $x_i \in \mathbb{R}$ *para todo* $i = 1, 2, ..., n$*. Luego* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, ..., n\}$.

Definimos un punto en $\mathbb{R}^n$ como $p = (x_1, x_2, ..., x_n)$, y llamamos coordenadas del punto a todos los x_i, con $i = 1, 2, ..., n$.



Representación de puntos en $\mathbb{R}^2$.



Representación de puntos en $\mathbb{R}^3$.

Definición. Un ***vector*** *en $\mathbb{R}^n$ es un segmento de recta orientado; determinado por un punto inicial en $\mathbb{R}^n$ y un punto final en $\mathbb{R}^n$.*

Notación: si el punto inicial es A y el punto final B, el vector que va de A a B se denota como $\overrightarrow{AB}$.

Identificamos cada punto $P = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ con el vector que va desde el origen, $O = (0, ..., 0)$, a dicho punto P.

1.1.1. Operaciones con vectores

Dados dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos las operaciones:

- Suma: definimos un vector de la forma $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.
- Producto por un escalar: definimos un vector de la forma $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

1.1.2. Base canónica

Definimos la base canónica en $\mathbb{R}^n$ como $\{\vec{e_1} = (1, 0, ..., 0), \vec{e_2} = (0, 1, ..., 0), ..., \vec{e_n} = (0, 0, ..., 1)\}$.
En general, el vector $\vec{e_i}$ es el vector con todas sus coordenadas 0, salvo la i-ésima, que es un 1.

Todo vector $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse en función de la base canónica como $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + ... + x_n\vec{e_n}$.
Notación. En $\mathbb{R}^3$ se suele usar la notación $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 1)$ para la base canónica.

1.1.3. Espacio afín

En ocasiones nos interesa considerar vectores cuyo origen no es necesariamente el punto O.
Sea $P \in \mathbb{R}^n$ un punto. Un vector en $\mathbb{R}^n$ con origen en P es un segmento de recta orientado, determinado por el punto inicial P, y un punto final $Q \in \mathbb{R}^n$; denotado como $\overrightarrow{PQ}$.

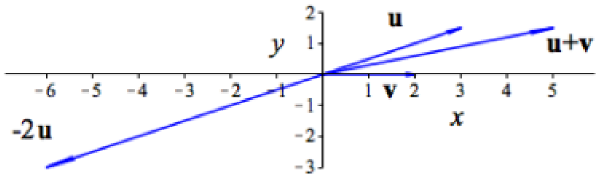
Este conjunto es un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^n$, definido como $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow Q - P \in \mathbb{R}^n$. Esto nos permite definir una nueva operación:

- Suma de un punto y un vector: formamos un nuevo punto en $\mathbb{R}^n$ de la forma $Q = P + \vec{x} = (a_1 + x_1, a_2 + x_2, ..., a_n + x_n)$.

1.1.4. Representación geométrica

De forma geométrica, se pueden representar vectores como flechas con origen en el punto O.

Ejemplo 1. Sean $\vec{u} = (3, 1.5)$ y $\vec{v} = (2, 0)$. Dibujar $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ y $-2\vec{u}$.



1.2. Producto escalar

Dados dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, se define el **producto escalar** de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como $\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

1.2.1. Propiedades del producto escalar

1. Linealidad. $(\lambda \vec{x} + \beta \vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{z}) + \beta(\vec{y} \cdot \vec{z})$.
2. Conmutatividad. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$.
3. Positividad. $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0, \ \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ y $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

1.3. Norma euclídea

Se define la **norma** de un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ como $||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_1^2}$.

Observaciones.

1. La norma $||\vec{x}||$ mide la longitud del vector $\vec{x}$.
2. Diremos que un vector $\vec{x}$ es unitario si $||\vec{x}|| = 1$.

1.3.1. Propiedades de la norma

1. $||\vec{x}|| > 0, \ \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ y $||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
2. $||\lambda \vec{x}|| = |\lambda| ||\vec{x}||$.
3. $||x - y|| = ||y - x||$.

1.3.2. Distancia entre 2 puntos

Sea x e y dos puntos pertenecientes a $\mathbb{R}^n$, se define $d(x, y) = ||x - y||$ como la distancia euclídea entre ambos puntos. Sus propiedades son:

- $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

1.3.3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

> Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Demostración.

Suponemos que $x, y \neq 0$, ya que de lo contrario la demostración sería trivial.
Entonces, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $0 \leq \|x+\lambda y\|^2 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$.
Eligiendo $\lambda = \frac{-\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, se obtiene de lo anterior $\|x\|^2 - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$, y por tanto, $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$. $\square$

> Corolario (desigualdad triangular). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

> Corolario (desigualdad triangular al revés). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Demostración.

$$\|x-y\| \geq \begin{cases} \|x\| - \|y\| \to \|x\| = \|(x-y)+y)\| \leq \|x-y\| + \|y\| \\ \|y\| - \|x\| \to \|y\| = \|(y-x)+x)\| \leq \|y-x\| + \|x\| \end{cases}. \square$$

Estas desigualdades también se pueden adaptar a la norma de vectores. Si $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $|x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|, \forall j = 1, 2, ..., n$.

> Lema. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Demostración.

$(a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$(a+b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \geq a^2 + b^2 \Rightarrow -ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Por tanto, $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. $\square$

1.4. Ángulo entre dos vectores

Dados dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos de cero, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que $\frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \leq 1$.

Por lo tanto, existe un valor $\theta \in [0, \pi)$ tal que $\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$, de forma que $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|x\|\|y\| \cdot \cos\theta$.

*Definición. Decimos que $\vec{x}$ es **perpendicular** u ortogonal a $\vec{y}$ si $\theta = \widehat{\vec{x},\vec{y}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = 0$.*

1.4.1. Ortogonalidad

*Definición. Decimos que un conjunto de vectores no nulos $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es un **conjunto ortogonal** si se tiene que $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0,\ \forall i \neq j$.*

*Definición. Decimos que un conjunto de vectores no nulos $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es un **conjunto ortonormal** si es un conjunto ortogonal y además cada vector $\vec{u}_i$ es unitario.*

> Teorema de Pitágoras. Si $\vec{x} \perp \vec{y}$, entonces $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

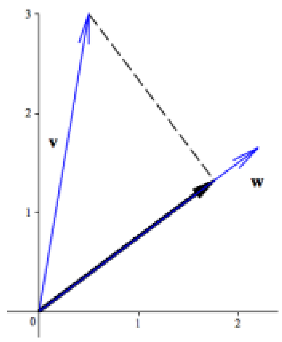
Demostración.

Usando que $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$, se tiene que $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2$. $\square$

1.4.2. Proyección de un vector sobre otro

*Definición. La **proyección** de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ (o sobre la recta determinada por $\vec{w}$) es el vector $\frac{||\vec{v}||}{||\vec{w}||}\cdot\cos(\theta)\cdot\vec{w}$, donde θ es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.*

Esta proyección es un producto de $\vec{w}$ por un escalar; en particular, la proyección y $\vec{w}$ están en la misma recta. Geométricamente, en el plano, la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ es el vector cuyo punto final es la intersección entre la recta que contiene a $\vec{w}$ y la recta que es perpendicular a $\vec{w}$ y contiene el punto final de $\vec{v}$.



Usando la relación entre ángulo y producto escalar, podemos expresar la proyección en términos del producto escalar: $\frac{||\vec{v}||}{||\vec{w}||}\cdot\cos(\theta)\cdot\vec{w} = \frac{||\vec{v}||}{||\vec{w}||}\cdot\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\,||\vec{w}||}\cdot\vec{w} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{w}||^2}\cdot\vec{w}$.

1.5. Rectas en el plano

*Definición. Una **recta** en el plano es un conjunto de la forma $\{P + \lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, donde $P = (p_1, p_2)$ es un punto del plano y $\vec{v}$ es un vector, llamado **vector director** de la recta.*

> Ecuación de una recta en $\mathbb{R}^2$. La ecuación de la recta que pasa por $P = (p_1, p_2)$ y tiene vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es $v_2 x - v_1 y = p_1 v_2 - p_2 v_1$.

1.6. Producto vectorial

Dados los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbb{R}^3$, se define el **producto vectorial** de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como: $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e_1} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e_2} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e_3}$.

1.6.1. Propiedades

1. Interpretación geométrica: $\vec{x} \times \vec{y}$ es un vector ortogonal a $\vec{x}, \vec{y}$, con dirección dada por la regla de la mano derecha.
2. Anticonmutatividad: $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.
3. Área del paralelogramo de lados $\vec{x}$ e $\vec{y}$: $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sin\theta$.
4. $\vec{x} \times \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ son colineales.

1.7. Plano en el espacio

Definición. Un ***plano*** *en* $\mathbb{R}^3$ *es un conjunto de puntos de la forma* $\{P + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$*, donde* $P = (p_1, p_2, p_3)$ *es un punto en el espacio y donde* $\vec{v}, \vec{w}$ *se llaman* ***vectores directores****.*

> Ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$. La ecuación general de un plano en $\mathbb{R}^3$ es de la forma $ax + by + cz + d = 0$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son coeficientes fijos.

Si $\vec{n} = (a, b, c)$ es un **vector normal** del plano: $\langle P - P_0, \vec{v}\rangle = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Si tenemos dos vectores directores $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$, el vector $\overrightarrow{PP_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ debe ser combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, luego $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$.

Si conocemos tres puntos no colineales del plano, $P_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$, los vectores $\overrightarrow{P_1, P}$, $\overrightarrow{P_2, P}$ y $\overrightarrow{P_3, P}$ deben ser **coplanarios**: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$.

1.7.1. Distancia punto-plano

La **distancia** del punto P al plano Π es el valor absoluto del número real λ tal que el punto $P + \lambda\vec{n}$ está en el plano Π. De forma que:$|\lambda| = \dfrac{|a_p1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1.8. Límite de sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición. Una ***sucesión*** *en* $\mathbb{R}^n$ *es una colección indexada en* $\mathbb{N}$ *(o en* $\mathbb{Z}$*) de elementos de* $\mathbb{R}^n$*.*
Notación: $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Cuando estudiamos el límite de una sucesión estudiamos su comportamiento para $k \to \infty$.

> Decimos que $L \in \mathbb{R}^n$ es el **límite de la sucesión** $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, x_k \in \mathbb{R}^n$ si $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N, \|x_k - L\| < \epsilon$.

> **Convergencia de sucesiones en** $\mathbb{R}^n$. Sea $\{\vec{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$. $\{\vec{x}_k\}$ converge a $\vec{z} \Leftrightarrow$ Todas y cada una de las sucesiones de las coordenadas de $\{\vec{x}_k\}$ converge a la correspondiente coordenada de $\vec{z}$.

Demostración.
$\sup |x_k^j - z^j| \leq \|\vec{x}_k - \vec{z}\| \leq |x_k^1 - z^1| + |x_k^2 - z^2| + ... + |x_k^n - z^n|$
$|x_k^j - z^j| \to_{k\to\infty} 0, \forall j \Rightarrow \|\vec{x}_k - \vec{z}\| \to_{k\to\infty} 0$ y, recíprocamente $\|\vec{x}_k - \vec{z}\| \to_{k\to\infty} 0 \Rightarrow |x_k^j - z^j| \to_{k\to\infty} 0, \forall j.$ $\square$

Ejemplo 2.
Sea $\vec{x}_k = \left(\frac{k+1}{k}, e^{-k}, k\sin\frac{1}{k}, \log\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$ en $\mathbb{R}^4$, esta sucesión converge a $\vec{z} = (1,0,1,0)$.

*Definición. Dado $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ llamamos **entorno** de x con radio r a $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$.*

Utilizando el concepto de entorno podemos dar una definición alternativa de límite.

Definición. Si dado un entorno de z, todos, salvo un número finito de puntos de la sucesión, están dentro de ese entorno, decimos que $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{z}$.

1.9. Concepto topológicos

*Definición. Dado un conjunto A se dice que x es **interior** a A si $\exists r > 0, B_r(x) \subset A$.*
Notación. $\mathring{A} = \{\text{puntos interiores de } A\}$.

*Definición. Dado un conjunto A se dice que x es **frontera** de A si $\forall r > 0, B_r(x) \cap A \neq \emptyset, B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset$.*
Notación. $\partial A = \{\text{puntos frontera de } A\}$.

*Definición. Dado un conjunto A se dice que x es **aislado** de A si $\exists r > 0, B_r(x) \cap A = \{x\}$.*
Notación. $\text{Aisl}\,(A) = \{\text{puntos aislados de } A\}$.

*Definición. Dado un conjunto A se dice que x es **exterior** de A si $\exists r > 0 : B_r(x) \subset A^c$.*

*Definición. Dado un conjunto A se dice que x es un **punto de acumulación** de A si $\exists\{x_k\}$ sucesión de A, con $x_k \neq x, \forall k : \lim\limits_{k\to\infty} = x$.*
Notación. $A' = \{\text{puntos de acumulación de } A\}$.

*Definición. Dado un conjunto A, se dice que es **abierto** si $A = \mathring{A}$; y se dice que es **cerrado** si A^c es abierto.*
Nota. Hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados.

*Definición. Se dice que B es un **entorno** de un punto x si B es abierto y $x \in B$.*

Ejemplo. Determina el cierre, el interior y la frontera del conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < 1\}$.
Sea $(x_0, y_0) \in A$, buscamos un $r > 0 : B_r(x_0,y_0) \subset A$. Suponemos que $(x,y) \in B_r(x_0,y_0)$, de forma que $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r$.
Vemos que $|x-y| = |x-y+(x_0-y_0)-(x_0-y_0)| \leq |x-y-(x_0-y_0)| + |x_0-y_0| = |x-x_0-y+y_0| + |x_0-y_0| \leq |x-x_0| + |y-y_0| + |x_0-y_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\| + \|(x,y)-(x_0,y_0)\| + |x_0-y_0| < 2r + |x_0-y_0|$.
Elegimos $r : 2r + |x_0-y_0| < 1 \Rightarrow r < \frac{1-|x_0-y_0|}{2}$. Luego, $|x-y| < 2r + |x_0-y_0| <$

2. $\frac{1-|x_0-y_0|}{2}+|x_0-y_0|=1$. De forma que si $r=\frac{1-|x_0-y_0|}{2}$, entonces $B_r(x_0,y_0)\subset A \Rightarrow A$ **es abierto**.
Si A es abierto, todo $(x,y)\in A$ es un punto interior, luego $\mathring{A}=A$.
La frontera de A es el conjutno $\partial A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-y|=1\}$. Sea $(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-y|=1$, si tomamos $r>0$, entonces $(x,y)\in B_r(x_0,y_0)\cap A^c\neq\emptyset$. Elegimos $(x',y')=(x\pm r,y)$, de forma que $(x',y')\in B_r(x_0,y_0)$.
$|x-y|=1\Rightarrow\begin{cases} x-y=1\Rightarrow(x-r,y)\in A\Leftrightarrow|x-r-y|=1-r<1\\ x-y=-1\Rightarrow(x+r-y)\in A\Leftrightarrow|x+r-y|=1+r>-1\end{cases}$.
Luego $B_r(x_0,y_0)\cap A\neq\emptyset$.

> Proposición. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. A y B cerrado $\Rightarrow A\cap B$ cerrado.

Demostración.
Consideramos los conjuntos $C=A^c$ y $D=B^c$, de forma que C y D abiertos $\Rightarrow C\cup D$ abierto.
Si $x\in C\cup D$, entonces $x\in C\vee x\in D$. En el primer caso, C abierto $\Rightarrow\exists r>0 : B_r(x)\subset C\subset C\cup D$. En el segundo, D abierto $\Rightarrow\exists r>0 : B_r(x)\subset D\subset C\cup D$.
Así, $C\cup D=A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$, por lo que $C\cup D$ abierto $\Rightarrow(A\cap B)^c$ abierto $\Rightarrow A\cap B$ cerrado. $\square$

1.9.1. Clausura de un conjunto

*Definición. Dado A conjunto de $\mathbb{R}^n$, se define su **clausura**, cierre o adherencia como $\bar{A}=\{x : \forall r>0, B_r(x)\cap A\neq\emptyset\}$.*
Nota. $\partial A\subset\bar{A}$ y $\mathring{A}\subset\bar{A}$, de hecho, $\bar{A}=\partial A\cup\mathring{A}$ y $\partial A\cap\mathring{A}=\emptyset$, ∂A y $\mathring{A}$ son disjuntos.
Nota. $\forall A, \bar{A}$ es siempre cerrado, y A es cerrado $\Leftrightarrow A=\bar{A}$.

> Lema. A es cerrado $\Leftrightarrow$ toda sucesión de elementos de A convergente a un punto z verifica que $z\in A$.

Contraejemplo.
Suponemos que $A\subset\mathbb{R}$ no es cerrado y $A=(0,1]$. Vemos que $\exists$ una sucesión $x_k=\frac{1}{k}$, de forma que $\frac{1}{k}\in A,\forall k\in\mathbb{R}$, pero $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}=0\notin A$.

Demostración.
$\Rightarrow)$ Sea $\{x_k\}\subset A$ con $z=\lim_{k\to\infty}x_k$, si A es cerrado $\Rightarrow z\in A$.
$\forall r>0, B_r(z)$ contiene puntos de la sucesión, luego $B_r(z)\cap A\neq\emptyset\Rightarrow z\in\bar{A}\Rightarrow x\in A$.
$\Leftarrow)$ Supongamos que A no es cerrado, de forma que $\exists z\notin A$ tal que $B_r(z)\cap A\neq\emptyset,\forall r>0$. Así, para cada $k,\exists$ un $x_k\in A : \|x_k-z\|<\frac{1}{k}$. Encontramos una sucesión $\{x_k\}\subset A : \|x_k-z\|<\frac{1}{k}$, luego $\lim_{k\to\infty}x_k=z$, pero $z\notin A$. $\square$

---

*Definición. Se dice que un conjunto es **compacto** si es cerrado y acotado.*
Caracterización. Un conjunto K es compacto si todas las subsucesiones $\{x_k\}$ de K tienen una subsucesión convergente.

1.9.2. Acotación

*Definición. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ está **acotado** si $\exists r > 0$ tal que $\|x\| < r, \forall x \in A$, es decir, $\exists r$ tal que $A \subset B_r(0)$.*

Nota. A no está acotado si $\exists \{x_k\}$ sucesión de A tal que $\lim_{k \to \infty} \|x_k\| = +\infty$.

1.9.3. Conjuntos conexos

*Definición. Se dice que el conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **conexo** si $\nexists$ dos conjuntos B, C abiertos, disjuntos y no vacíos de forma que $A \subset B \cup C$ con $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap C \neq \emptyset$.*

Para $n = 1$, el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es conexo $\Leftrightarrow$ A es un intervalo (abierto o cerrado).

*Definición. Se dice que el conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **conexo por arcos** si dados $x, y \in A \Rightarrow$ existe una función $\varphi : [0, 1] \to A$ de forma que $\varphi(0) = x$ y $\varphi(1) = y$.*

Un conjunto conexo por arcos es siempre conexo, pero el recíproco no es cierto. Un ejemplo es la función $D = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, 0)\}$.