ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 3: Aplicaciones lineales

1. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:
(a) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (2x, y - x)$.
(b) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (y, x)$.
(c) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = xy$.
(d) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (\sin x, y)$.
(e) $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $F(x) = (2x, 0)$.
(f) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = e^{x+y+z}$.
(g) $F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ definida por $F(x) = (2x, 0, x/2)$.
(h) $F : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ definida por $F(p(x)) = p'(x)$.
(i) $F : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ definida por $F(x, y) = \begin{pmatrix} 5x & 0 \\ x - 3y & x \end{pmatrix}$
(j) $F : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n$ definida por $F(A) = A^T$.
(k) $I : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f \text{ continua}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$.
(l) $J : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f \text{ derivable}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $J(f) = (f'(-1), f(2) + f'(0))$.

2. (i) Halla $T(1, 0)$ si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal para la que sabemos que $T(3, 1) = (1, 2)$ y $T(-1, 0) = (1, 1)$.

(ii) Lo mismo sabiendo que $T(4, 1) = (1, 1)$ y $T(1, 1) = (3, -2)$.

3. Decide en cada caso si existe una aplicación lineal con las propiedades que se indican. (Si existe defínela y si no existe da una justificación).
(a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$.
(b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(\alpha_i) = \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ con $\alpha_1 = (1, 1)$,
$\alpha_2 = (2, -1), \alpha_3 = (-3, 2), \beta_1 = (1, 0), \beta_2 = (0, 1)$ y $\beta_3 = (1, 1)$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_3 - x_1).$$

Determina la imagen por T del plano $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

5. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ la aplicación definida por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b)x^2 + (c + d)x$.
(a) Demuestra que f es lineal y halla bases para el núcleo de f y la imagen de f.
(b) Halla la matriz de f respecto a la base estándar de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base $\{x^2 + 1, x^2 + 3x, 5\}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$.

6. Sean $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ c - d & 5a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, -c, d - a).$$

(a) Halla las matrices de f y g respecto a las bases estándar.

(b) Comprueba que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Halla la matriz de f y las coordenadas de $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

(c) Halla la matriz de g respecto a la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(d) Halla la matriz de $g \circ f$ respecto a las bases estándar y respecto la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

(e) Relaciona las diferentes matrices obtenidas.

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{(2,1,1), (1,1,1), (1,-1,1)\}.$$

(a) Calcula la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

(b) Calcula las coordenadas en la base $\mathcal{B}_1$ del vector cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$ son $(3,-2,1)$.

8. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentra la matriz A de f respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ (tanto en el espacio de partida como en el de llegada).

(b) Encuentra la matriz D de f respecto de la base $\mathcal{C}$ y la base $\mathcal{B}$ formada por los vectores siguientes:

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Calcula $D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Encuentra las coordenadas del vector $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{B}$.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

(a) Halla la matriz de T en la base estándar y la matriz de T respecto a la base $\{(1,0,1), (-1,2,1), (2,1,1)\}$.

(b) Demuestra que T es un isomorfismo y da una expresión para T^{-1}.

10. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Demuestra que:

(a) Los vectores $u_1 = v_1 + v_2, u_2 = v_2 + v_3$ y $u_3 = v_3 + v_1$ son linealmente independientes.

(b) Los vectores $w_1 = v_1, w_2 = v_1 + v_2$ y $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$ son linealmente independientes.

(c) Tres vectores cualesquiera u_1, u_2, u_3 del subespacio $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son independientes $\Leftrightarrow$ sus coordenadas respecto a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ son vectores independientes de $\mathbb{R}^3$.

(Sugerencia: escribe la matriz del endomorfismo $f : F \to F$ caracterizado por $f(v_i) = u_i, i = 1,2,3$ y deduce que f es un isomorfismo).

11. Sean f y g dos aplicaciones lineales. Demuestra que:

(a) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$

(b) Si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{\vec{0}\}$, entonces $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f+g)$.

12. Sea $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada. Demuestra que f es lineal, escribe su mariz respecto a la base estándar de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ y describe su núcleo y su imagen.

13. Sean $V_1, V_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $V_1 \oplus V_2 = V$. Definimos la función $p_1 : V \to V$ como la aplicación que asocia a cada vector $u \in V$ su proyección sobre V_1 en la dirección de V_2, es decir, si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, entonces $p_1(u) = v_1$.

(a) Demuestra que p_1 es lineal y que $p_1^2 = p_1$.

(b) Si $B_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $B_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de V_1 y V_2 respectivamente escribe la matriz de p_1 respecto a la base $B = B_1 \cup B_2$.

(c) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podría definir la proyección de manera similar?

14. Sean $V_1, V_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $V_1 \oplus V_2 = V$. Definimos la función $s : V \to V$ como la aplicación que asocia a cada vector $u \in V$ su simétrico sobre V_1 en la dirección de V_2, es decir, si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, entonces $s(u) = v_1 - v_2$.

(a)Demuestra que s es lineal y que $s^2 = id$.

(b) Si $B_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $B_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de V_1 y V_2 respectivamente escribe la matriz de s respecto a la base $B = B_1 \cup B_2$.

(c) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podría definir la simetría de manera similar?