

## 一、输入文件

	影像坐标		地面坐标		
	$x(\text{mm})$	$y(\text{mm})$	$X(\text{m})$	$Y(\text{m})$	$Z(\text{m})$
1	-86.15	-68.99	36589.41	25273.32	2195.17
2	-53.40	82.21	37631.08	31324.51	728.69
3	-14.78	-76.63	39100.97	24934.98	2386.50
4	10.46	64.43	40426.54	30319.81	757.31

试计算近似垂直摄影情况下空间后方交会的解。假设内方位元素已知： $f_k = 153.24\text{mm}$ ,  $x_0 = y_0 = 0$ 。

第二行数据分别为  $f_k$ (单位 mm),  $x_0, y_0$ , 摄影比例尺分母  $m$

$f_k(\text{mm}), x_0, y_0, m$   
153.24, 0, 0, 50

点号,  $x(\text{mm}), y(\text{mm}), X(\text{m}), Y(\text{m}), Z(\text{m})$   
1, -86.15, -68.99, 36589.41, 25273.32, 2195.17  
2, -53.40, 82.21, 37631.08, 31324.51, 728.69  
3, -14.78, -76.63, 39100.97, 24934.98, 2386.50  
4, 10.46, 64.43, 40426.54, 30319.81, 757.31

第五到八行数据分别为各点对应的  $xy$  影像坐标和  $XYZ$  地面坐标

## 二、处理数据

### 1. 确定初始值

(3) 确定未知数的初始值。单像空间后方交会必须给出待定参数的初始值，对于竖直航空摄影影像的单像空间后方交会，且在地面控制点大体对称分布的情况下，可按如下方法确定初始值：

$$\begin{aligned} Z_s^0 &= H = m \cdot f \\ X_s^0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ti} \\ Y_s^0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ti} \\ \varphi^0 &= \omega^0 = 0 \end{aligned} \quad (2-6-18)$$

式中， $m$  为摄影比例尺分母； $n$  为控制点个数。 $\kappa^0$  可在航迹图上找出，或根据控制点坐标通过坐标正反变换求出。

$R = R_y \cdot R_w \cdot R_k$

其中  $X_{ti}, Y_{ti}$  代表各个地面坐标  $X, Y$

题目补充： $\kappa_0 = 0$

## 2. 迭代计算

### (1). 计算旋转矩阵参数

将六个外方位元素  $kappa, phi, omega, X_s, Y_s, Z_s$  的上一次值(第一次用初始值)代入旋转矩阵计算公式

$$R = R_\varphi R_\omega R_\kappa = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \cos\varphi \cos\kappa - \sin\varphi \sin\omega \sin\kappa$$

$$a_2 = -\cos\varphi \sin\kappa - \sin\varphi \sin\omega \cos\kappa$$

$$a_3 = -\sin\varphi \cos\omega$$

$$b_1 = \cos\omega \sin\kappa$$

$$b_2 = \cos\omega \cos\kappa$$

$$b_3 = -\sin\omega$$

$$c_1 = \sin\varphi \cos\kappa + \cos\varphi \sin\omega \sin\kappa$$

$$c_2 = -\sin\varphi \sin\kappa + \cos\varphi \sin\omega \cos\kappa$$

$$c_3 = \cos\varphi \cos\omega$$

## (2). 确定平差方程系数 (Ax-L=0)

### 2.1 误差方差表达式

$$\begin{aligned}
 a_{11}V_{X_s} + a_{12}V_{Y_s} + a_{13}V_{Z_s} + a_{14}V_{\varphi} + a_{15}V_{\omega} + a_{16}V_{\kappa} - [x_1 - (x_1)] &= 0 \\
 a_{21}V_{X_s} + a_{22}V_{Y_s} + a_{23}V_{Z_s} + a_{24}V_{\varphi} + a_{25}V_{\omega} + a_{26}V_{\kappa} - [y_1 - (y_1)] &= 0 \\
 a_{11}'V_{X_s} + a_{12}'V_{Y_s} + a_{13}'V_{Z_s} + a_{14}'V_{\varphi} + a_{15}'V_{\omega} + a_{16}'V_{\kappa} - [x_2 - (x_2)] &= 0 \quad (\text{公式 2-1}) \\
 a_{21}'V_{X_s} + a_{22}'V_{Y_s} + a_{23}'V_{Z_s} + a_{24}'V_{\varphi} + a_{25}'V_{\omega} + a_{26}'V_{\kappa} - [y_2 - (y_2)] &= 0 \\
 \dots
 \end{aligned}$$

其中公式省略了  $x_3, y_3$  和  $x_4, y_4$  的表达式,

$a_{11}, a_{12}, a_{13}$  等参数都由各自对应的  $x, y$  值求得, 所以不同点对应不同  $a$  参数, 所以公式中  $a_{11}'$  是为了区分与  $a_{11}$  不同

### 2.2 求近似值

每一个点都对应着一个近似坐标, 而近似坐标既  $x, y$  的近似值由以下公式 2-1 求得, 其中  $(x_0, y_0)$  为像主点坐标

$$\begin{aligned}
 (x) &= x_0 - f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \\
 (y) &= y_0 - f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \quad (\text{公式 2-2})
 \end{aligned}$$

### 2.3 求常数系数矩阵

公式 2-1 中  $(x_1), (y_1)$  代表像点坐标  $x_1, y_1$  的近似值

$$L = \begin{bmatrix} x_1 - (x_1) \\ y_1 - (y_1) \\ x_2 - (x_2) \\ y_2 - (y_2) \\ x_3 - (x_3) \\ y_3 - (y_3) \\ x_4 - (x_4) \\ y_4 - (y_4) \end{bmatrix} \quad (\text{公式 2-3})$$

## 2.4 求改正数系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} & a'_{16} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & a'_{26} \\ a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & a''_{14} & a''_{15} & a''_{16} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} & a''_{24} & a''_{25} & a''_{26} \\ a'''_{11} & a'''_{12} & a'''_{13} & a'''_{14} & a'''_{15} & a'''_{16} \\ a'''_{21} & a'''_{22} & a'''_{23} & a'''_{24} & a'''_{25} & a'''_{26} \end{bmatrix} \quad (\text{公式 2-4})$$

其中  $a$  上一点代表不同点对应的参数,  $a$  代表 1 号点的参数,  $a'$  代表 2 号点的参数,  $a''$  代表 3 号点参数,  $a'''$  代表 4 号点参数

不同点的  $a$  参数计算如下:

$$\begin{cases} \bar{X} = a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s) \\ \bar{Y} = a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s) \\ \bar{Z} = a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s) \end{cases} \quad (\text{公式 2-5})$$

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{Z} [a_1 f + a_3 (x - x_0)] \\ a_{12} = \frac{1}{Z} [b_1 f + b_3 (x - x_0)] \\ a_{13} = \frac{1}{Z} [c_1 f + c_3 (x - x_0)] \\ a_{21} = \frac{1}{Z} [a_2 f + a_3 (y - y_0)] \\ a_{22} = \frac{1}{Z} [b_2 f + b_3 (y - y_0)] \\ a_{23} = \frac{1}{Z} [c_2 f + c_3 (y - y_0)] \\ a_{14} = (y - y_0) \sin \omega - \left\{ \frac{x - x_0}{f} [(x - x_0) \cos \kappa - (y - y_0) \sin \kappa] + f \cos \kappa \right\} \cos \omega \\ a_{15} = -f \sin \kappa - \frac{x - x_0}{f} [(x - x_0) \sin \kappa + (y - y_0) \cos \kappa] \\ a_{16} = y - y_0 \\ a_{24} = -(x - x_0) \sin \omega - \left\{ \frac{y - y_0}{f} [(x - x_0) \cos \kappa - (y - y_0) \sin \kappa] - f \sin \kappa \right\} \cos \omega \\ a_{25} = -f \cos \kappa - \frac{y - y_0}{f} [(x - x_0) \sin \kappa + (y - y_0) \cos \kappa] \\ a_{26} = -(x - x_0) \end{cases} \quad (\text{公式 2-6})$$

由公式 2-5 得出  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  后代入公式 2-6 分别求出四个不同点的不同  $a_{11} \sim a_{26}$  的参数, 既可得改正数系数矩阵  $A$

## 2.5 法方程求改正数

法方程式解  $V$  值

$$V = (A^T A)^{-1} * (A^T L) \quad (\text{公式 2-7})$$

最终计算出改正数结果为

$$V = \begin{bmatrix} \Delta X_s \\ \Delta Y_s \\ \Delta Z_s \\ \Delta \varphi \\ \Delta \omega \\ \Delta \kappa \end{bmatrix}$$

得到改正数后改正  $X_s, Y_s, Z_s, \varphi, \omega, \kappa$  的初始值既

$$\begin{cases} X_s = X_{s0} + \Delta X_s \\ Y_s = Y_{s0} + \Delta Y_s \\ Z_s = Z_{s0} + \Delta Z_s \\ \varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi \\ \omega = \omega_0 + \Delta \omega \\ \kappa = \kappa_0 + \Delta \kappa \end{cases}$$

得到了改正后的 6 个外方位元素 1 为初始值,重新代回 2-1 迭代计算出 6 个外方位元素 2,再一直无穷迭代下去,直至 6 个改正数任意一个小于一个阈值  $1 \times 10^{-5}$  则结束迭代

## 3. 输出结果

输出最后一次迭代的旋转矩阵参数和  $X_s, Y_s, Z_s$  值

$$\begin{aligned} X_s &= 39795.45\text{m} \\ Y_s &= 27476.46\text{m} \\ Z_s &= 7572.69\text{m} \\ R &= \begin{pmatrix} 0.99771 & 0.06753 & 0.00399 \\ -0.06753 & 0.99772 & -0.00211 \\ -0.00412 & 0.00184 & 0.9999 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

```
result.txt
文件 编辑 查看
|-----计算结果-----
Xs(m)    Ys(m)    Zs(m)
39795.45  27476.46  7572.69
-----R矩阵信息-----
0.99771  0.06753  0.00399
-0.06753 0.99772  -0.00211
-0.00412 0.00184  0.99999
```

David\_void